

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

1210001100



Nº 24

PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO
USANDO TÉCNICAS DE DECOMPOSIÇÃO MATEMÁTICA
E DE *BRANCH-AND-BOUND*

ALUNO: EDMARCIO ANTONIO BELATI

ORIENTADOR: RUBÉN AUGUSTO ROMERO LÁZARO

Te.1100

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**"Planejamento de Sistemas de Transmissão Usando
Técnicas de Decomposição Matemática e de
Branch-and-Bound"**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA
SOLTEIRA - FEIS - COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).

Aluno: Edmarcio Antonio Belati

Orientador: Prof. Dr. Rubén Augusto Romero Lázaro

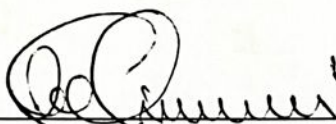
Ilha Solteira - SP, Agosto de 1998



"Planejamento de Sistemas de Transmissão Usando Técnicas de Decomposição Matemática e de Branch-and-Bound"

Edmarcio Antonio Belati

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).

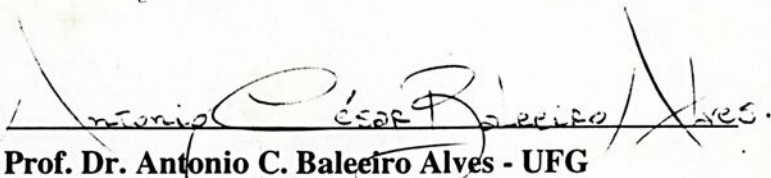


Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi - (Coordenador)

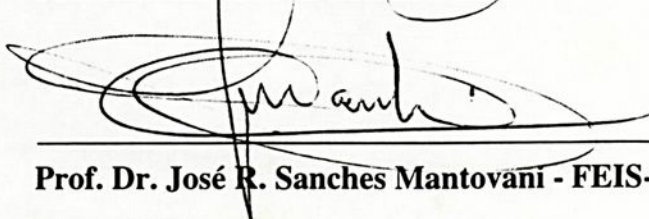
COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. Rubén A. Romero Lázaro - (Orientador)



Prof. Dr. Antonio C. Baleeiro Alves - UFG



Prof. Dr. José R. Sanches Mantovani - FEIS-UNESP

Proc. 054/99-NAD 110

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA 13.9.99	DATA DE TOMBO 30/9/99
REGISTRO Melia	TOMBO 1.100
AQUISIÇÃO Doacafauter	CLASSIFICAÇÃO B426 p

R\$ 1000

Ilha Solteira - SP, Agosto de 1998

À Deus

...que, incomparável e inconfundível na sua infinita sabedoria e bondade, compreendeu meus anseios e deu-me a necessária coragem para enfrentar os problemas. Ofereço este trabalho e o melhor que há por vir. Peço forças para sempre encarar as dificuldades e a sabedoria para tomar as decisões corretas. Agradeço a tudo.

À minha família

Meus pais Onivaldo e Izaura e minha irmã Cleufa, que sempre me apoiaram, o meu muito obrigado e que Deus retribua tudo que me concederam.



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Rubén A. Romero Lázaro, pelo exemplo de competência na orientação segura do desenvolvimento desta pesquisa. Mas, sobretudo pela amizade e compreensão que sempre me dispensou.

Aos professores do DEE (Departamento de Engenharia Elétrica) pela rica convivência.

Aos Funcionários do DEE pela amizade e agradável convivência.

À todos meus colegas do curso de pós-graduação pelo agradável tempo passado junto, tanto nas horas de trabalho e estudo como nas horas de descontração.

À minha noiva Adriana A. Batista Ribeiro, pelo seu carinho e amor.

À minha amiga Adenice D. Santos Taveira, pela sua ajuda neste trabalho e sobretudo pela sua valorosa amizade.

Ao meu amigo Fernando Casari, pela harmoniosa convivência diária.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e a FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro.



Resumo

Este trabalho apresenta o algoritmo de *Branch-and-Bound* (*B&B*) usado no planejamento de sistemas de transmissão. Utiliza-se a decomposição de Benders hierarquizada para resolver o problema de planejamento. A implementação corrente da decomposição hierarquizada utiliza três níveis diferentes de modelagem da rede elétrica: Modelo de Transportes (MT), Modelo Híbrido (MH) e Modelo DC. Cada nível de representação da rede é uma *relaxação* do modelo de maior nível. Em cada nível do algoritmo hierarquizado é usada a decomposição de Benders para separar o problema de planejamento em dois subproblemas: um subproblema de investimento (mestre) e um subproblema de operação (escravo) os quais são resolvidos alternadamente. No processo de resolução os subproblemas trocam informações: o mestre informa ao escravo acerca das decisões de investimento (incremento na capacidade de transmissão) e o escravo informa ao mestre acerca das necessidades de transmissão através dos cortes de Benders. Nos dois primeiros níveis os subproblemas são resolvidos utilizando um algoritmo de programação linear (PL). No último nível (Modelo DC) o subproblema de operação é resolvido usando um PL e o subproblema de investimento é resolvido usando o algoritmo de *B&B* que é um algoritmo de programação linear inteira (PLI).

Neste trabalho foi feito o desenvolvimento do algoritmo de *B&B* especializado para resolver de forma eficiente o subproblema de investimento. O algoritmo básico, embora seja conceitualmente simples, apresenta complexidade na implementação computacional. Este algoritmo apresenta excelente desempenho para sistemas pequenos, mas em sistemas reais apresenta várias limitações relacionadas com o esforço computacional. Assim, foram feitas melhorias significativas para otimizar o desempenho do algoritmo básico.



Abstract

This work describes the algorithm of Branch-and-Bound (B&B) used in the planning of transmission networks. The decomposition of Benders is used to solve the planning problem. The implementation of the hierarchical decomposition uses three different levels of network modeling: Transport Model (MT), Hybrid Model (MH) and DC Model. Each network representation level is a relaxation of the model of upper level. In each level of the hierarchical algorithm the decomposition of Benders is used to separate the planning problem in two subproblem: an investment subproblem (master) and an operation subproblem (slave) which are alternately resolved. In the resolution process the subproblems exchanges information: the master informs the slave concerning the investment decisions (increase in the transmission capacity) and the slave informs the master concerning the transmission needs through the courts of Benders. In the first two levels are resolved the subproblems using an algorithm of lineal programming (PL). In the last level (DC Model) the operation subproblem is solved using a PL and the investment subproblem is solved using the B&B algorithm that is an lineal integer programming algorithm (PLI).

In this work was made the development of the B&B algorithm specialized to solve in efficient way the investment subproblem. The basic algorithm, although it is simple, it presents complexity in the implementation computational. This algorithm presents excellent acting for small systems, but in real systems it presents several limitations related with the effort computational. Thus, significant improvements were made to improve the acting of the basic algorithm.



Conteúdo

1	Introdução	1
2	Problema de Planejamento de Sistemas de Transmissão	3
2.1	Introdução	3
2.2	Modelagem	3
2.2.1	Modelo DC	4
2.2.2	Modelo de Transportes	6
2.2.3	Modelo Híbrido	7
2.3	Técnicas Usadas para Resolver os Modelos Propostos	8
2.3.1	Técnicas Heurísticas	8
2.3.2	Técnicas Combinatórias	9
2.3.3	Técnicas de Otimização Clássicas (Métodos Exatos)	9
3	Decomposição de Benders Hierarquizada Usada no Planejamento de Sistemas de Transmissão	10
3.1	Introdução	10
3.2	A Decomposição de Benders	10

3.3	Decomposição de Benders para os Modelos de Transportes, Híbrido e DC ----	12
3.4	Algoritmo de Planejamento Hierarquizado-----	16
3.4.1	Justificativa do Planejamento Hierarquizado -----	16
3.4.2	Formulação do Planejamento Hierarquizado-----	17
3.4.3	Formulação Básica do Planejamento Hierarquizado-----	19
4	Algoritmo de <i>Branch-and-Bound</i> Usado para Resolver o Subproblema Mestre e Critérios Específicos de Solução -----	21
4.1	Introdução -----	21
4.2	O conceito de <i>Branch-and-Bound</i> -----	22
4.3	Princípio <i>Branch-and-Bound</i> -----	24
4.3.1	Critérios de Sondagem do Algoritmo de <i>B&B</i> -----	24
4.4	Heurística para Resolver Problemas de <i>B&B</i> -----	25
4.4.1	Escolha do Nó -----	25
4.4.2	Escolha da Variável-----	28
4.4.3	Estratégias de Solução-----	30
4.5	Critérios Específicos de <i>B&B</i> -----	30
4.5.1	Restrições Substitutas-----	31
4.5.1.1	Restrições Substitutas Utilizada no Problema de Planejamento-----	32
5	Testes e Resultados Obtidos -----	35
5.1	Introdução -----	35
5.2	Sistema de 03 Barras -----	35
5.2.1	Sistema de 03 Barras Totalmente Ilhado-----	35
5.3	Sistema de 06 Barras -----	37
5.4	Sistema Sul Brasileiro - 46 Barras-----	41

5.4.1 Sistema de 46 Barras Utilizando o Algoritmo Básico	42
5.4.2 Sistema de 46 Barras Usando um Algoritmo Melhorado.....	43
5.4.3 Sistema de 46 Barras Usando um Algoritmo com Ordenamento Especial de Variáveis.....	44
5.5 Análise dos Resultados	48
Conclusões	49
Bibliografia	51
 Apêndices	
Tópicos da Decomposição de Benders.....	54
A.1 Introdução	54
A.2 A Decomposição de Benders	54
A.3 A Decomposição de Benders Generalizada	56
Tópicos de <i>Branch-and-Bound</i> e Exemplos	62
B.1 Introdução	62
B.2 O Problema de <i>Branch-and-Bound</i>	63
B.3 Algoritmo de <i>Branch-and-Bound</i> para PLIM	63
B.3.1 Algoritmo	63
B.4 Exemplo Detalhado	64
B.4.1 Exemplo 1.....	64
B.5 Exemplo Utilizando o "Software" MINOS	71
B.5.1 Exemplo 1.....	71
Dados dos Sistemas Testados.....	76

C.1 Sistema de 03 Barras -----	76
C.2 Sistema de 06 Barras -----	77
C.3 Sistema de 46 Barras -----	78
Artigos Publicados -----	82
D.1 Artigo 1 -----	83
D.2 Artigo 2 -----	90



Capítulo I

Introdução

A presente dissertação trata da solução do Problema de Planejamento de Sistemas de Transmissão a longo prazo, a solução deste problema é encontrada quando toda a demanda de energia (barras de carga) é suprida pela geração (barras de geração) com um custo mínimo, ou seja, quando é encontrada a configuração ótima do sistema.

Este trabalho analisa o planejamento **estático** do sistema de transmissão. Neste tipo de planejamento, conhecida a configuração inicial, dados de geração, cargas e o horizonte de planejamento (e outros dados como os limites de operação, custo e restrições de investimento), deseja-se encontrar um plano de expansão ótimo com um investimento mínimo, que é determinar onde e que tipo de circuitos devem ser instalados no sistema. Neste planejamento leva-se em conta somente a viabilidade do sistema em termos do balanço da potência ativa, futuramente resolve-se o problema da potência reativa colocando fontes reativas no sistema (planejamento de reativo em sistemas de transmissão) e finalmente, as propostas de expansão devem ser analisadas usando técnicas de análises exatas de sistemas elétricos como: fluxos de carga AC, curto-circuito, estabilidade transitória, etc.

Na planejamento de sistemas de transmissão são usados 3 modelos: modelo de transportes, modelo híbrido e o modelo de fluxo de carga DC, os quais estão relatados no capítulo II. O modelo DC é o mais adequado para representar o problema de planejamento. Este modelo matemático tem a estrutura típica de um problema não linear inteiro misto (PNLIM) de difícil resolução, especialmente para sistemas reais. Os

especialistas usam 3 grandes famílias de algoritmos para resolver este problema: algoritmos heurísticos basicamente do tipo construtivo, algoritmos de otimização exata e os novos algoritmos combinatórios os quais também estão relatados no capítulo II. Este trabalho retoma a linha de investigação dos métodos de otimização exata, mantendo as características principais dos trabalhos anteriores mas usando um algoritmo de *Branch-and-Bound* (*B&B*) para resolver o subproblema de investimento.

Em cada nível do algoritmo hierarquizado é usada a decomposição de Benders [6] para separar o problema de planejamento em dois subproblemas: um subproblema de investimento chamado de mestre e um subproblema de operação chamado escravo. No capítulo III, apresenta-se a análise teórica fundamental necessária para a formulação do algoritmo de planejamento ótimo da expansão de sistemas de transmissão. Assim, temos a teoria da decomposição de Benders e a decomposição de Benders para cada um dos três modelos de circuitos apresentados no capítulo II.

No capítulo IV está apresentada a metodologia *B&B* que consiste em dividir e conquistar. O método *B&B* resolve um problema relaxado pois considera as variáveis inteiras como sendo contínuas, sendo assim o espaço das soluções do problema inteiro é apenas um subconjunto do espaço das soluções contínuas. Neste capítulo também estão relatados: O Conceito de *B&B*, Princípio *B&B*, Heurística para Resolver Problemas de *B&B* e Critérios Específicos *B&B*.

Foram realizados vários testes para mostrar a eficiência do algoritmo *B&B*. Estes testes estão relatados no capítulo V, o qual mostra a evolução do algoritmo para os sistemas de 03 barras, sistema de 06 barras (sistema de Garver) e o sistema de 46 barras, sendo que este último mostra a evolução do algoritmo para vários casos, onde são feitas melhorias de caráter geral e melhorias introduzindo informações específicas do problema, as quais visam diminuir o tempo computacional. Os três sistemas têm solução ótima conhecida.

No Apêndice A, são apresentadas as proposições e formulações relacionadas com a técnica de decomposição de Benders generalizada. No apêndice B, são apresentados tópicos e exemplos detalhados do algoritmo de *B&B*. No Apêndice C são apresentados os dados dos sistemas testados e finalmente, no Apêndice D estão incorporados os artigos que foram escritos e aceitos em congressos, como consequência da elaboração da tese de mestrado.



Capítulo II

Problema de Planejamento de Sistemas de Transmissão

2.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados três tipos de modelagem da rede elétrica para o planejamento estático de redes de transmissão e as técnicas usadas para resolvê-las.

2.2 Modelagem

O problema de planejamento estático da expansão dos sistemas de transmissão é formulado usando três diferentes tipos de modelagem da rede elétrica: Modelo DC, Modelo de Transportes e Modelo Híbrido, os quais serão discutidos a seguir.



2.2.1 Modelo DC

O problema de planejamento de sistemas de transmissão a longo prazo pode ser sistematizado através do modelo matemático conhecido como Modelo de Fluxo de Carga DC ou simplesmente Modelo DC, através da seguinte relação matemática.

$$\text{Min } \sum_{ij} c_{ij} n_{ij} \quad (2.1)$$

s.a.

$$Sf + g = d \quad (2.1.a)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^o + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (2.1.b)$$

$$|f_{ij}| \leq (x_{ij} + \gamma_{ij}^o) \Phi_{ij} \quad (2.1.c)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (2.1.d)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \quad (2.1.e)$$

$$n_{ij} \text{ inteiro} \quad (2.1.f)$$

$$x_{ij} \text{ discreto} \quad (2.1.g)$$

$$\forall (i, j) \in \Omega$$

Nesta formulação tem-se as seguintes variáveis:

$\Omega \rightarrow$ Conjunto de todas as linhas candidatas a adição.

$c_{ij} \rightarrow$ Custo de uma linha entre as barras $i - j$.

$S \rightarrow$ Matriz de incidência nó-ramo.

$g \rightarrow$ Vetor de geração.

$\bar{g} \rightarrow$ Vetor das gerações máximas permitidas.

$d \rightarrow$ Vetor de cargas.

$f \rightarrow$ Vetor de fluxo de potência nos ramos.

$f_{ij} \rightarrow$ Fluxo de potência elétrica na linha entre $i - j$.

$\bar{f}_{ij} \rightarrow$ Limite de fluxo em cada circuito existente no ramo $i - j$.

$\gamma_{ij}^o \rightarrow$ Susceptância equivalente dos circuitos existentes no ramo $i - j$ na configuração base.

$\gamma_{ij} \rightarrow$ Susceptância nominal de uma linha no caminho $i - j$.

$x_{ij} \rightarrow$ Susceptância equivalente dos circuitos adicionais no ramo $i - j$.

$\theta \rightarrow$ Vetor de ângulos das tensões nodais.

θ_i e $\theta_j \rightarrow$ Ângulos de tensão nas barras terminais do ramo $i - j$.

$n_{ij} \rightarrow$ Número de linhas adicionadas no caminho $i - j$.

$\bar{n}_{ij} \rightarrow$ Número máximo de adições de linhas permitidas no caminho $i - j$.

Relações auxiliares:

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\gamma_{ij}}; \quad \Phi_{ij} = \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}}$$

No Modelo DC, apresentado na formulação (2.1), o sistema elétrico obedece as duas leis de Kirchhoff. A relação (2.1.a) apresenta um conjunto de equações que satisfaz a Primeira Lei de Kirchhoff (uma equação para cada nó), a relação (2.1.b) apresenta outro conjunto de equações que satisfaz a Segunda Lei de Kirchhoff (uma equação para cada circuito existente ou candidato), a relação (2.1.c) impõe limites máximos nos fluxos através dos circuitos (uma equação para cada circuito existente ou candidato), a equação (2.1.d) impõe limites à geração nas barras de geração, a equação (2.1.e) impõe limites no número de adições de linhas por circuito, e as equações (2.1.f) e (2.1.g) impõe a restrição de que o número de linhas tem que ser inteiro e que a susceptância equivalente dos circuitos adicionais têm que ser de natureza discreta, ou seja, ter um valor constante.

A seguir está apresentada uma formulação alternativa e mais compacta da formulação anterior, que pode ser utilizada na implementação computacional.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{ij} c_{ij} n_{ij} \\ & \text{s.a.} \\ & B\theta + g = d \\ & |\theta_i - \theta_j| \leq \Phi_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega_1 \\ & x_{ij} |\theta_i - \theta_j| \leq x_{ij} \Phi_{ij} \quad \forall (i, j) \in \Omega_2 \\ & 0 \leq g \leq \bar{g} \\ & 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \\ & n_{ij} \text{ inteiro} \\ & x_{ij} \text{ discreto} \end{aligned}$$

Em que:

$\Omega_1 \rightarrow$ Conjunto de todos os caminhos onde existem linhas na configuração base.

$\Omega_2 \rightarrow$ Conjunto de todos os caminhos onde não existem linha na configuração base.

$B \rightarrow$ Matriz de susceptâncias.

Abaixo está representado o Modelo DC utilizado no presente trabalho de mestrado. Neste modelo foram acrescentados geradores artificiais nas barras de carga, sendo este modelo o que melhor se adapta na decomposição de Benders. A decomposição de Benders que será vista no próximo capítulo é utilizada para fazer o

desacoplamento das variáveis de investimento x_{ij} que aparecem multiplicando as variáveis de operação θ_i e θ_j . Nas três formulações vistas neste capítulo, as variáveis de investimento e operação aparecem juntas e são desacopladas usando a decomposição de Benders.

$$\begin{aligned}
 & \text{s.a.} \\
 & \text{Min } \sum_{ij} c_{ij} n_{ij} + \alpha e' r \\
 & Sf + g + r = d \\
 & f_{ij} - (\gamma_{ij}^o + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \\
 & |f_{ij}| \leq (x_{ij} + \gamma_{ij}^o) \Phi_{ij} \\
 & 0 \leq g \leq \bar{g} \\
 & 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \\
 & 0 \leq r \leq d \\
 & n_{ij} \text{ inteiro} \\
 & x_{ij} \text{ discreto} \\
 & \forall (i, j) \in \Omega
 \end{aligned}$$

em que:

$r \rightarrow$ é o vetores de geradores artificiais.

2.2.2 Modelo de Transportes

O Modelo de transportes foi inicialmente formulado por Garver [16], que apresentou uma nova metodologia para o planejamento de sistemas de transmissão, que foi a primeira proposta de síntese de redes. Tendo em vista as dificuldades de obter soluções coerentes no problema de fluxo de carga utilizando uma rede inicial existente, Garver formulou um algoritmo para resolver um modelo simplificado da rede, onde utiliza um modelo simplificado da formulação (2.1), descartando o conjunto de equações (2.1.b) o problema resultante é conhecido como Modelo de Transportes, assim, no Modelo de Transportes somente é levado em conta a Primeira Lei de Kirchhoff. Aqui também estão incluídos os geradores artificiais.

$$\text{Min} \sum_{ij} c_{ij} n_{ij} + \alpha e^t r \quad (2.2)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d$$

$$|f_{ij}| \leq (n_{ij} + n_{ij}^o) \bar{f}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$n_{ij} \text{ inteiro}$$

A formulação (2.2) é uma relaxação da formulação (2.1).

2.2.3 Modelo Híbrido

O Modelo Híbrido foi apresentado por Villasana e outros em [17]. O Modelo Híbrido é uma combinação do Modelo de Transportes e o Modelo DC. No Modelo Híbrido a Primeira Lei de Kirchhoff é obedecida por todos os circuitos do sistema (os existentes e os candidatos) e a Segunda Lei de Kirchhoff somente pelas linhas existentes na configuração inicial. A formulação do Modelo Híbrido com os geradores artificiais tem a seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{ij} c_{ij} n_{ij} + \alpha e^t r \quad (2.3)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^o + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad \forall (i, j) \in \Omega,$$

$$|f_{ij}| \leq (x_{ij} + \gamma_{ij}^o) \bar{\Phi}_{ij}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}$$

$$0 \leq r \leq d$$

$$n_{ij} \text{ inteiro}$$

$$x_{ij} \text{ discreto}$$

Uma formulação equivalente e mais compacta para o Modelo Híbrido, a qual é muito utilizada em termos de programação, está mostrada abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{ij} c_{ij} n_{ij} + \alpha e' & (2.3') \\
 & \text{s.a.} \\
 & S_2 f_2 + B_1 \theta_1 + g + r = d \\
 & |(\theta_i - \theta_j)| \leq \Phi_{ij} & \forall (i, j) \in \Omega_1 \\
 & |f_{ij}| \leq \Phi_{ij} x_{ij} & \forall (i, j) \in \Omega_2 \\
 & 0 \leq g \leq \bar{g} \\
 & 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij} \\
 & n_{ij} \text{ inteiro} \\
 & x_{ij} \text{ discreto}
 \end{aligned}$$

em que:

$f_2 \rightarrow$ Vetor de fluxo de potência nos ramos onde não existe linhas na configuração base.

$S_2 \rightarrow$ Matriz de incidência nó-ramo para a parcela do sistema onde não existe linha na configuração base.

$B_1 \rightarrow$ Matriz de Susceptância para a parcela do sistema onde existe linha na configuração base.

2.3 Técnicas Usadas para Resolver os Modelos Propostos

2.3.1 Técnicas Heurísticas

Os algoritmos heurísticos basicamente do tipo construtivo encontram soluções de boa qualidade com pequeno esforço computacional, mas raramente encontram a solução ótima de sistemas reais; estes métodos são bastante usados pelas empresas de energia elétrica. Os métodos mais conhecidos foram apresentados em [10,15,16,17].

2.3.2 Técnicas Combinatórias

As técnicas combinatórias representam linhas de investigação interessantes, onde temos os algoritmos genéticos, simulated annealing, busca tabu, etc. Estes algoritmos encontram soluções sub-ótimas nos problemas de grande porte mas com um esforço computacional relativamente elevado.

2.3.3 Técnicas de Otimização Clássicas (Métodos Exatos)

Os métodos de otimização exata usam técnicas de decomposição matemática e geralmente encontram soluções ótimas em sistemas de pequeno e médio porte, mas em sistemas de grande porte apresentam problemas de convergência e esforço computacional. Algoritmos deste tipo foram apresentados em [5,7,9].

Este trabalho de mestrado retoma a linha de investigação dos métodos de otimização exata, como os apresentados em [5,7,9]. Ele mantém as características principais dos trabalhos anteriores mas usa um algoritmo de *Branch-and-Bound* para resolver o problema de investimento.



Capítulo III

Decomposição de Benders Hierarquizada Usada no Planejamento de Sistemas de Transmissão

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se a análise teórica fundamental necessária para a formulação do algoritmo de planejamento ótimo da expansão de sistemas de transmissão. Assim, temos a teoria da decomposição de Benders e a decomposição de Benders para cada um dos três modelos de circuitos apresentados no capítulo anterior.

3.2 A Decomposição de Benders

A aplicação da decomposição de Benders ao problema de planejamento de sistemas de transmissão é justificada por três motivos:

A decomposição de Benders fornece uma ferramenta natural para decompor o problema em duas partes:

1. Determinação do investimento ótimo da nova capacidade do sistema.
2. Determinação do custo de operação e confiabilidade do fornecimento de energia associada com a construção desta nova capacidade.

A decomposição de Benders é atrativa neste caso particular pois permite a solução de um problema difícil, através de uma seqüência de soluções de problemas relativamente mais simples.

Além disso já foi aplicada com sucesso em problemas relacionados com sistemas de potência.

Os métodos de decomposição, de acordo com a classificação de Geoffrion [18], podem ser classificados dentro de um esquema padrão pelos conceitos fundamentais usados para o desenvolvimento de cada método. Estes conceitos fundamentais podem ser classificados em dois grupos: manipulação de problemas e estratégias de resolução.

Manipulação de um problema é formulá-lo de uma maneira equivalente com a vantagem de que o problema resultante seja mais fácil de se resolver. A manipulação de um problema é usada para obter o *problema mestre*. As principais manipulações são: dualidade, projeção e linearização externa.

A decomposição de Benders usa **projeção-linearização externa/relaxação** como manipulação e estratégia de resolução. Assim comenta-se brevemente estes conceitos.

Projeção, freqüentemente também conhecida como “partição”, é um mecanismo que leva vantagens em certos problemas, que se tornam-se relativamente simples quando algumas variáveis são fixadas temporariamente. Na decomposição de Benders o conceito de projeção é usado para isolar problemas com estruturas especiais que estão integrados num problema maior, ou seja, a parte linear ou contínua de um problema “semi-linear”, por exemplo.

Linearização Externa é um mecanismo que objetiva induzir linearidade em um problema parcialmente não-linear, via aproximação, para depois usar poderosos algoritmos de programação linear. A linearização externa implica na aproximação tangencial para funções convexas. Um importante uso de linearização externa é na manipulação das não linearidades introduzidas por projeção. Linearização externa é aplicada a conjuntos convexos e funções convexas ou côncavas.

Os principais obstáculos que se tem com linearização externa é que se pode requerer um número excessivo de aproximações para obter resultados adequados. Estas dificuldades são contornadas, desde que exista uma estratégia de solução aplicável a problemas com linearização externa, usando as aproximações, somente quando forem necessárias, sem ter que especificá-las antecipadamente. Esta estratégia de resolução é

relaxação. O efeito líquido é que a manipulação de linearização externa é feita só implicitamente.

Relaxação é útil para problemas com muitas restrições de desigualdade. Assim, a relaxação reduz um problema a uma sequência recursiva de problemas onde muitas das restrições são ignoradas. Relaxação é usada principalmente para problemas com um grande número de restrições de desigualdade, alguns dos quais podem estar disponíveis somente implicitamente. Tais problemas ocorrem, por exemplo, como resultado de uma linearização externa.

Em algumas aplicações somente poucas das restrições mais violadas estão disponíveis cada vez que o problema relaxado é resolvido, e serão usadas se elas satisfizerem algum critério particular. Em outras aplicações, tais como a decomposição de Benders, um critério tal como "a restrição mais violada" é obtido via implementação de um problema de programação linear subsidiário.

O método de decomposição de Benders, proposto originalmente por Benders [19], mostra-se particularmente atrativo ou interessante para problemas de programação mista, ou seja, para problemas de programação linear inteira mista. Nos últimos anos, entretanto, os avanços nas técnicas de computação paralela fizeram com que a decomposição de Benders passasse ser usada num contexto mais geral, até para decompor problemas de programação linear de características especiais. Posteriormente, o método de decomposição de Benders foi estendido para o caso não-linear por Geoffrion [6]. Como já foi mencionado, o método de decomposição de Benders consiste na combinação **Projeção-Linearização Externa/Relaxação** como manipulação e estratégia de resolução.

3.3 Decomposição de Benders para os Modelos de Transportes, Híbrido e DC

Neste tópico, estão apresentadas em forma resumida, as formulações matemáticas da decomposição de Benders.

Formulação do Problema:

O problema de planejamento da expansão dos sistemas de transmissão é formulado, como já vimos no capítulo II, usando três diferentes tipos de modelagem da rede elétrica [7,17]:

Modelo de Transportes,
Modelo Híbrido, e
Modelo DC.

As variáveis estão definidas no capítulo II.

Modelo de Transportes: (formulação I)

$$\text{Min } v = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \quad (3.1)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d \quad (3.1.1)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \Phi_{ij} \leq \gamma_{ij}^o \Phi_{ij} \quad (3.1.2)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (3.1.3)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (3.1.4)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.1.5)$$

Modelo Híbrido: (formulação II)

$$\text{Min } v = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \quad (3.2)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d \quad (3.2.1)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^o + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0; \forall (i, j) \in \Omega, \quad (3.2.2)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \Phi_{ij} \leq \gamma_{ij}^o \Phi_{ij} \quad (3.2.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (3.2.4)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (3.2.5)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.2.6)$$

Modelo DC: (formulação III)

$$\text{Min } v = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \quad (3.3)$$

s.a.

$$Sf + g + r = d \quad (3.3.1)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^o + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (3.3.2)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \Phi_{ij} \leq \gamma_{ij}^o \Phi_{ij} \quad (3.3.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (3.3.4)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (3.3.5)$$

$$0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.3.6)$$

Decomposição do Problema

Usando decomposição de Benders [8, 19], cada uma das três formulações pode ser decomposta em dois subproblemas, um subproblema de investimento e um subproblema de operação como segue [4, 7].

Subproblema de Investimento (Mestre)

Para as três formulações é válida a seguinte relação,

$$\text{Min } v = \sum_{ij} c_{ij} n_{ij} + \beta \quad (3.4)$$

s.a.

$$w^k + \sum \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta; \quad \beta \geq 0 \quad (3.4.1)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \gamma_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.4.2)$$

Subproblema de Operação (Escravo):

Para cada formulação, o escravo assume uma forma diferente. Assim, tem-se:

Modelo de Transportes:

$$\text{Min } w = \alpha e' r \quad (3.5)$$

s.a

$$Sf + g + r = d \quad (3.5.1)$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^o + x_{ij}) \Phi_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.5.2)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (3.5.3)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (3.5.4)$$

Modelo Híbrido:

$$\text{Min } w = \alpha e' r \quad (3.6)$$

s.a

$$B_1 \theta + S_2 f + g + r = d \quad (3.6.1)$$

$$|(\theta_i - \theta_j)| \leq \Phi_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega_1 \quad (3.6.2)$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^o + x_{ij}) \Phi_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega_2 \quad (3.6.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (3.6.4)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (3.6.5)$$

Modelo DC:

$$\begin{aligned}
 & \text{s.a} \quad \text{Min } w = \alpha e' r & (3.7) \\
 & B\theta + g + r = d & (3.7.1) \\
 & |(\theta_i - \theta_j)| \leq \Phi_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega & (3.7.2) \\
 & 0 \leq g \leq \bar{g} & (3.7.3) \\
 & 0 \leq r \leq d & (3.7.4)
 \end{aligned}$$

Nas relações anteriores, B é a matriz de susceptâncias da rede, B_l é a matriz nó-ramo para os ramos que pertence a Ω_2 .

No mestre, w é o valor ótimo do correspondente escravo e σ_{ij} é a sensibilidade do valor ótimo w com respeito a x_{ij} . Para o Modelo de Transportes, σ_{ij} é dado por [3]:

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij} \Phi_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.8)$$

π_{ij} são as variáveis duais associada às restrições (3.5.2) do escravo e β é um limitante que aparece por causa da decomposição [3].

Para o Modelo DC, σ_{ij} é dado por [3,7]:

$$\sigma_{ij} = (\pi_i^o - \pi_j^o)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (3.9)$$

em que os π_i^o são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições (3.7.1). É importante observar que a Eq.(3.9) é verdadeira somente para redes conexas [3].

Para o Modelo Híbrido, σ_{ij} é uma combinação dos resultados obtidos nas Eqs (3.8) e (3.9), [3]:

$$\sigma_{ij} = (\pi_i^o - \pi_j^o)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i, j) \in \Omega_1 \quad (3.10)$$

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij} \Phi_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega_2 \quad (3.11)$$

Em que os π_i^o são variáveis duais (multiplicadores de Lagrange) associados às restrições (3.6.1) e π_{ij} são as variáveis duais (multiplicadores de Lagrange) associados às restrições (3.6.3).

As restrições (3.4.1) e os cortes de Benders, informam ao mestre sobre as necessidades de investimento para tornar o escravo factível, isto é, sem corte de carga. Em cada iteração é adicionado um novo corte ao mestre forçando, portanto, a novos

investimentos até que o subproblema apresente uma solução menor ou igual ao limite imposto a w . Para o Modelo de Transportes, note-se que a aplicação da decomposição de Benders é muito simples, pois as variáveis de operação e investimento são linearmente separáveis. Também, esta Formulação I é um problema convexo, o que garante uma convergência rápida do processo iterativo [8]. Por outro lado, na Formulação III as variáveis de operação e de investimento não são linearmente separáveis pela presença do termo $x_{ij}(\theta_i - \theta_j)$ na restrição (3.3.2).

No subproblema de operação, as variáveis de investimento x_{ij}^k são mantidas constantes durante a solução do subproblema; assim, inicialmente pode-se ter $x_{ij} = 0$, neste caso as possíveis infactibilidades são contornadas através das variáveis r (geradores artificiais).

3.4 Algoritmo de Planejamento Hierarquizado

3.4.1 Justificativa do Planejamento Hierarquizado

Foi apresentada anteriormente uma maneira sistemática de resolver o problema de planejamento usando a decomposição de Benders para os três tipos de modelagem do sistema elétrico: Modelo de Transportes, Modelo Híbrido e Modelo DC. Em princípio, pode-se usar cada metodologia independentemente, para resolver o problema de planejamento. Entretanto, existem algumas limitações ou complicações ao implementar cada metodologia separadamente. Essas dificuldades são apresentadas em forma resumida, para justificar a implementação de uma metodologia hierarquizada. É também oportuno lembrar que o problema de planejamento apresenta três grandes dificuldades que devem ser contornadas de alguma forma: O problema de **rede inicial não conexa**, o problema de **não convexidade** que pode levar a atingir um ótimo local antes do ótimo global e o problema de **esforço computacional** ao resolver de maneira iterativa o subproblema de investimento que é um problema de programação linear inteira (PLI).

Em relação ao Modelo de Transportes seu uso independente ou separado é limitado pela qualidade da solução final obtida, pois este modelo só leva em conta a Primeira Lei de Kirchhoff e, assim, a alternativa de investimento obtida pode ficar muito distante da solução real desejada para futuros estudos de planejamento. O Modelo de Transportes, não apresenta maiores dificuldades quando utilizado para resolver um sistema elétrico não conexo e também não apresenta problemas de convexidade. Portanto, a única dificuldade é a necessidade de usar um algoritmo de PLI ao resolver iterativamente o subproblema de investimento. Este esforço computacional pode ser aliviado separando-se o problema em duas fases: Na primeira fase, resolve-se um subproblema de investimento, relaxando o caráter discreto das variáveis de investimento, que é simplesmente um PL com as variáveis contínuas, que pode ser

resolvido por um algoritmo de PL especializado. Na fase final é reintegrado o caráter discreto das variáveis de investimento sendo necessária a utilização de um algoritmo de PLI. Assim pode-se reduzir o número de iterações de PLI reduzindo-se, conseqüentemente, o uso do algoritmo de PLI e o esforço computacional global.

A utilização do Modelo Híbrido em forma independente ou separada apresentaria características muito parecidas às do Modelo de Transportes. Novamente, pode-se implementar um processo de otimização de duas fases. Neste caso, os problemas de convexidade e convergência aumentam em complexidade, de maneira significativa. Em compensação, a qualidade da solução final obtida é melhor.

A utilização do Modelo DC, o qual é o mais adequado para planejamento, de forma independente, apresenta todas as dificuldades mencionadas anteriormente. Este modelo não pode trabalhar se a rede inicial é não conexa, os problemas de convexidade aumentam significativamente apresentando freqüentemente grandes problemas de convergência e soluções ótimas locais, e se tem a necessidade de usar iterativamente um algoritmo de PLI para resolver o subproblema de investimento. A implementação de um processo de duas fases, relaxando-se a integridade dos circuitos candidatos a investimento na primeira fase, não consegue contornar as dificuldades mencionadas. Também, a utilização de uma rede fictícia para evitar o problema de rede inicial não conexa contorna só em parte estas dificuldades.

Levando em conta as dificuldades mencionadas, foi projetado um algoritmo de planejamento hierarquizado, tentando tirar proveito das melhores qualidades de cada modelo e contornado suas limitações.

3.4.2 Formulação do Planejamento Hierarquizado

Temos três fases no algoritmo hierarquizado, sendo que em cada uma o problema de planejamento da expansão da transmissão é decomposto pelo método de Benders em dois subproblemas, como é mostrado na Figura 3.1. Durante o processo de solução, estes dois subproblemas trocam informações. O mestre informa ao escravo acerca das decisões de investimento (incremento na capacidade de transmissão) e o escravo informa ao mestre acerca das necessidades de transmissão (os cortes de Benders gerados). O subproblema de operação, a partir de uma alternativa de investimento apresentada pelo subproblema de investimento, minimiza o uso dos geradores fictícios para apresentar um fluxo de carga sem violar as restrições de operação. Se num estágio do processo as decisões de investimento são tais, que é possível obter um ponto de operação com geração fictícia igual a zero, então foi obtida uma solução parcial para o problema da expansão e o processo passa ao nível seguinte. Por outro lado, quando não é possível obter um ponto de operação factível sem recorrer aos geradores fictícios, então deve-se enviar informações relevantes, acerca das necessidades de operação, ao subproblema de investimento através dos cortes de Benders. Estes cortes, incorporados ao subproblema de investimento como restrições adicionais, têm um papel fundamental

no mecanismo de planejamento, pois eles informam ao subproblema de investimento acerca das necessidades de capacidade adicional de transmissão.

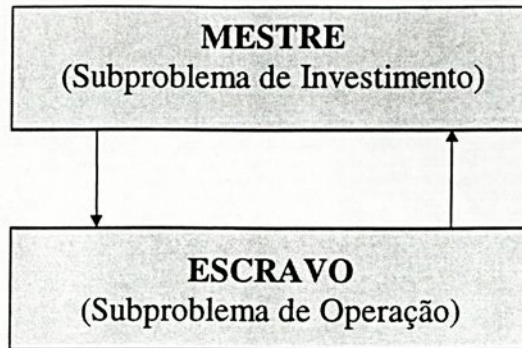


Figura 3.1 O problema da Decomposição

O subproblema de investimento apresenta dois tipos de restrições como é mostrado na figura 3.2. Um dos tipos de restrições são aquelas próprias das variáveis de investimento (tais como a restrição do número máximo de adições permitidas em cada linha e as restrições de investimento ou orçamentária) e outras restrições são aquelas que fazem uma representação equivalente do subproblema de operação (um conjunto reduzido de restrições que representam implicitamente as restrições críticas de operação). A representação equivalente das restrições de operação contém, basicamente, o conjunto de cortes de Benders que estão disponíveis em qualquer estágio do processo e outros tipos de informações simplificadas acerca da topologia da rede elétrica.

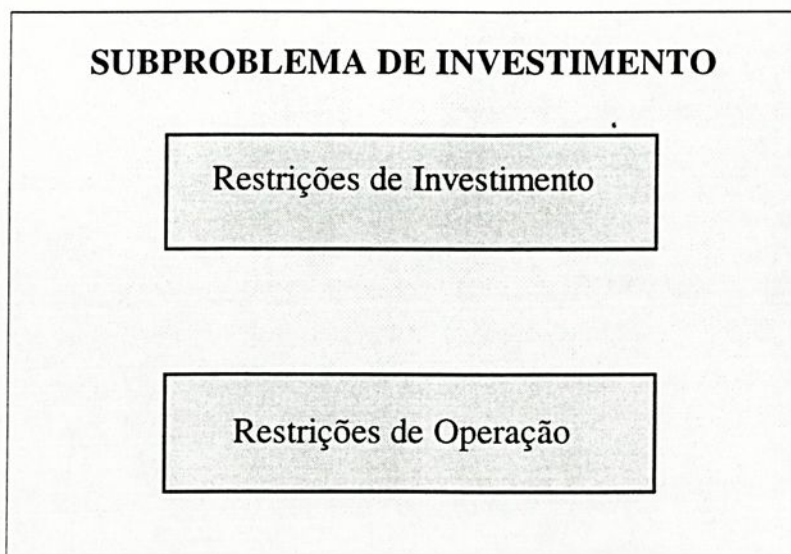


Figura 3.2 O Subproblema de Investimento

A experiência prática mostra que a técnica de planejamento hierarquizado é uma forma simples e efetiva para contornar soluções locais. Mas esta é só uma das várias motivações para usar um planejamento hierarquizado. Outra motivação importante é a natureza combinatorial do problema. Resolver diretamente o subproblema de investimento, mantendo sua natureza discreta, pode levar a um esforço computacional excessivo pois exigiria a resolução de um problema de PLI em cada iteração. Na metodologia hierarquizada, quando é usado um algoritmo de PLI na fase III, o processo já está perto da solução final, sendo necessário um número menor de iterações de PLI para atingir a solução ótima global. Finalmente a outra motivação importante é que a metodologia hierarquizada contorna facilmente o problema de rede inicial não conexa, pois na fase inicial, a fase I, o Modelo de Transportes não apresenta nenhuma dificuldade para trabalhar com uma rede não conexa. Por outro lado, na fase final ou fase III, o problema de rede não conexa praticamente desaparece e nas raras vezes em que ele se apresenta, são contornados pelo uso de uma rede fictícia superposta ao sistema real.

3.4.3 Formulação Básica do Planejamento Hierarquizado

As três fases do algoritmo hierarquizado podem ser resumidas na seguinte forma:

Fase I: Modelo de Transportes - Variáveis de Investimento Contínuas

Nesta fase, a técnica de decomposição é aplicada ao problema de planejamento da expansão relaxado, em que a rede é representada por um Modelo de Transportes, e os subproblemas resultantes (subproblema de operação e investimento) são resolvidos alternadamente até atingirem a convergência. Uma relaxação adicional é considerar as variáveis de investimento contínuas. O subproblema de investimento é resolvido por um algoritmo padrão de programação linear. Entre uma iteração e outra, no processo iterativo, o subproblema de investimento difere somente em uma restrição (último corte de Benders adicionado), então o algoritmo mais adequado é do tipo dual simplex, aproveitando, desta maneira, a base dual ótima da iteração anterior do subproblema de investimento. O subproblema de operação é também um problema de programação linear e, pode-se usar um algoritmo de PL primal simplex, ou algum dos algoritmos de programação linear projetados para sistemas elétricos [11]. Os resultados de investimento, assim como os cortes de Benders gerados no processo, são reutilizados nas fases seguintes.

Fase II: Modelo Híbrido - Variáveis de Investimento Contínuas

Nesta fase, a técnica de decomposição de Benders é aplicada ao problema de planejamento relaxado, no qual a rede é representada pelo Modelo Híbrido (Modelo DC para os circuitos existentes e Modelo de Transportes para os circuitos candidatos em novos caminhos) e ainda mantêm-se relaxadas as variáveis de investimento considerando-as como variáveis contínuas. O subproblema de investimento é resolvido como na Fase I e o subproblema de operação, pode ser resolvido usando técnicas especializadas de programação linear em sistemas de potência [3,11] ou mesmo algoritmos de PL padrão do tipo primal simplex. Assim como na Fase I, os resultados de investimento e os cortes de Benders gerados no processo são transferidos para a fase seguinte.

Fase III: Modelo DC - Variáveis de Investimento Discretas

Nesta última fase é reintroduzida a natureza discreta das variáveis de investimento e as restrições correspondentes à Segunda Lei de Kirchhoff, para todos os circuitos do sistema elétrico, existente e candidato. O subproblema da operação é um PL. O problema de investimento torna-se agora muito mais complicado de resolver, pois ele é um problema de programação linear inteira (PLI). Para resolver este problema de investimento utilizaremos um algoritmo de *Branch-and-Bound*, o qual faz parte integrante e mais importante da presente dissertação e que está apresentado no capítulo IV. Esta fase, obviamente, consome o maior esforço computacional pela necessidade de resolver iterativamente um problema de PLI.



Capítulo IV

Algoritmo de *Branch-and-Bound* Usado para Resolver o Subproblema Mestre e Critérios Específicos de Solução

4.1 Introdução

Considere o problema de programação linear inteira mista (PLIM).

minimizar

$$z = \sum_{j \in N} c_j x_j \quad (4.1)$$

s.a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} a_{ij} x_j &\leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ x_j &\text{ é inteiro,} & j = 1, 2, \dots, I \ (I \leq n) \end{aligned}$$

Quando $I = n$ temos um problema puro de PLI.

O problema acima pode ser resolvido usando o algoritmo de (*B&B*).

A idéia básica da metodologia *B&B* é dividir e conquistar. O método *B&B* não resolve diretamente o problema inteiro, ele resolve um problema relaxado, pois considera as variáveis inteiras como sendo contínuas. O espaço das soluções do problema inteiro é apenas um subconjunto do espaço das soluções contínuas. O motivo de relaxar o problema inteiro é que este problema pode ser resolvido como um conjunto de problemas de programação linear (PL).

4.2 O Conceito de *Branch-and-Bound*

Este tópico é um resumo do livro de "Integer Programming Theory, Applications, and Computations", do autor *Hamdy A. Taha* [14].

A solução de um problema comum de programação inteira pode ser limitada. O número de pontos inteiros que devem ser investigados são portanto finito, costumando ser muito grande. Um modo simples de resolver um problema é enumerar todos os pontos, descartando os infactíveis e guardando a solução factível que apresenta o melhor valor da função objetivo. Quando a enumeração está completa, a solução ótima, se existir, é associada com o melhor valor objetivo.

O método *B&B* é baseado no princípio da enumeração implícita zero-um. A enumeração implícita é essencialmente um método *B&B*, a principal diferença é que em um problema genérico inteiro, cada variável pode assumir mais que dois valores, diferente da enumeração implícita zero-um onde as variáveis só podem ser zero ou um. Conseqüentemente, os testes para excluir pontos não promissores torna-se mais sofisticado, mais complexo, e talvez menos efetivo.

O procedimento *B&B* não trata diretamente com o problema inteiro. Antes, ele considera um problema contínuo, obtido relaxando as restrições inteiras das variáveis. Deste modo, como já foi mencionado, o espaço da solução do problema inteiro é somente um subespaço do espaço contínuo. A principal razão para proceder com o problema contínuo é que ele é simples de resolver especialmente quando ele é um programa linear.

Se a solução contínua ótima obtida resolvendo um PL for toda inteira, então ela também será ótima para o problema inteiro. Por outro lado, a técnica de *B&B* é aplicada para implementar duas operações básicas:

Branching É a partição do espaço das soluções contínuas dentro dos sub-espacos (subproblemas), que também são contínuos. A intenção de particionar, é para eliminar partes dos espacos contínuos que não são factíveis para o problema inteiro e com isso aumentar a possibilidade de que as soluções contínuas, obtidas usando PL, dos dois novos subproblemas sejam inteiras. Esta é realizada por imposição de restrições, que é uma condição necessária para produzir soluções inteiras, pois essas regiões produzem novas regiões factíveis nos subproblemas com pontos inteiros na casca convexa da região factível. Em outras palavras, todos os pontos inteiros factíveis do problema

original estão presentes nas regiões factíveis dos subproblemas e, alguns destes pontos inteiros fazem parte da casca convexa dos subproblemas e, conseqüentemente, podem ser soluções ótimas do subproblema com variáveis contínuas (PL). Por causa da natureza da operação de partição, ela tem sido chamada pelo nome de *branching*.

Bounding Considerando o problema original do tipo minimizar, então o valor ótimo da função objetivo, para cada subproblema criado pelo *branching* deve ter, logicamente, um limite inferior associado com algum dos valores inteiros factíveis. Este limite é essencial para fazer o ranking, ou seja, ordenar a seqüência de solução dos subproblemas, e conseqüentemente, em localizar a solução ótima inteira mais rapidamente. Esta operação justifica o nome de *bounding*.

Cada subproblema criado pode ser agora resolvido como um problema contínuo. Quando a solução de um subproblema é inteira, o subproblema não é particionado; caso contrário é necessário fazer o *branching*. A solução ótima inteira, é aquela que foi obtida do subproblema de menor limite entre todos os subproblemas com solução inteira. (quando é assumido o problema de minimizar).

Uma típica árvore de *B&B* está representada na figura 4.1. Os nós representam os subproblemas e seus números representam a ordem de execução. O nó 3 produz a melhor solução factível (inteira); conseqüentemente ela é ótima. Todos os nós remanescentes são portanto descartados, isto é, eliminados por algum teste apresentado no item 4.3.1 desta seção. Esta operação é conhecida como sondagem.

Infelizmente, não existe uma fórmula de identificar o tamanho da árvore da figura 4.1 quando temos o propósito de programar computacionalmente. As razões são:

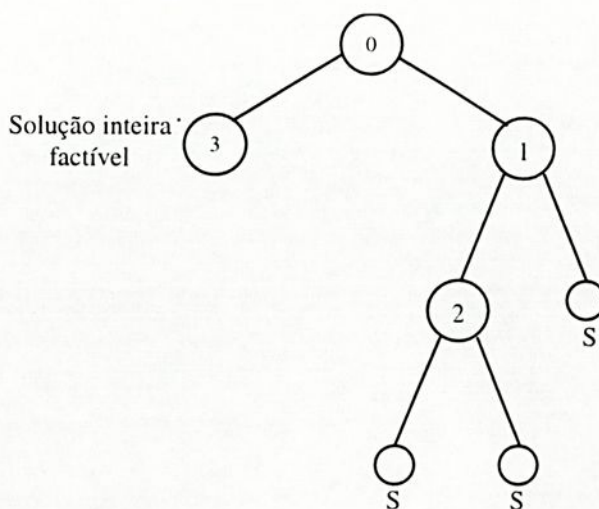


Figura 4-1

- (i) Um número muito grande de ramos e nós que podem ser criados;

- (ii) Cada nó terá associado um subproblema contínuo que pode ser armazenado para posteriores investigações. Este método apresenta uma complexidade de programação, que não depende somente do grande número de ramos que podem ser criados, mas também da necessidade de economizar a memória do computador.

Na próxima seção, será apresentada o princípio *B&B*. Este princípio é válido para uma extensa classe de problemas, dos quais, programação inteira é um caso especial. Implementando-se as particularidades dos princípios gerais de *B&B*, pode-se obter um algoritmo adequado para o problema linear inteiro misto. Desde já se pode adiantar que o princípio *B&B* não é restrito somente para problemas lineares, sua aplicação também abrange problemas não lineares.

4.3 Princípio *Branch-and-Bound*

Considere o problema da formulação (4.1).

Problemas deste tipo, quando são relaxadas a integralidade das variáveis, inicialmente não apresenta valores inteiros nas variáveis de decisão. Quando isso acontece, divide-se o problema em dois novos subproblemas, onde temos para cada novo subproblema o acréscimo de uma nova restrição, por exemplo, se tivermos a variável $x_1 = \frac{1}{2}$ um dos subproblemas gerado terá uma nova restrição $x_1 \geq 1$ e o outro a restrição adicional $x_1 \leq 0$, que forçará x_1 ter valor inteiro nos dois casos.

Quando dividimos um problema ou um subproblema, surgem duas novas direções de busca, e é muito difícil determinar a direção ótima, as direções de busca vão aumentando a partir das novas divisões feitas nos subproblemas, formando assim uma árvore como vimos na figura 4.1.

Uma direção de busca, isto é, a escolha do próximo subproblema que deve ser resolvido usando PL, pode ser dispensada de futuras considerações quando o subproblema é sondado. Os testes usados para fazer a sondagem são mostrados a seguir.

4.3.1 Critérios de Sondagem do Algoritmo de *B&B*

Como já foi mencionado um problema quando sondado é dispensado de futuras considerações. Os testes básicos de sondagem são três:

Teste 1: Se o subproblema tiver o valor de z (função objetivo) de inferior qualidade em relação a melhor solução inteira já encontrada durante o processo (incumbente), no nosso caso onde o problema é de minimizar significa ter um valor para z maior que a incumbente.

Teste 2: Se o subproblema não possuir solução viável (ser infactível).

Teste 3: Se a solução obtida de um determinado subproblema for inteira. Se ela for a primeira solução inteira encontrada então ela será a solução incumbente (melhor solução inteira já encontrada), caso não seja a primeira, compara-se com a incumbente existente, se o valor de z for melhor ela ficará sendo a nova solução incumbente. Nos dois casos o problema é sondado.

4.4 Heurística para Resolver Problemas de *B&B*

Este tópico foi baseado no capítulo 4 da dissertação de Mestrado de *Lúcia F. de A. Guimarães* [26], cujo conteúdo está apresentado em uma forma didática e objetiva e no livro de "Integer Programming Theory, Applications, and Computations", do autor *Hamdy A. Taha* [14].

A eficiência de um algoritmo *Branch-and-Bound* depende fortemente de dois fatores:

- 1) Escolha do problema candidato (ou do nó ativo) que deve ser resolvido.
- 2) Decisão da variável inteira a ser dicotomizada: escolher uma variável dentre as várias variáveis inteiras que assumem valores fracionários na solução ótima do problema candidato relaxado, de modo a separar o problema em dois outros problemas candidatos.

A seguir são descritos critérios para as decisões acima mencionadas.

4.4.1 Escolha do Nó

Dado uma lista de problemas candidatos (lista de nós ativos), existem duas opções básicas para a escolha:

- a) Regra *à priori* que determina a ordem na qual a árvore será desenvolvida.
- b) Regras adaptativas, que escolhem um nó usando informações (limites, etc.) sobre os nós ativos

A principal regra *à priori* usada é a busca em profundidade. Esta regra determina que o problema candidato selecionado é sempre o último adicionado à lista de problemas candidatos, ou seja, se o nó atual não é sondado, o próximo a ser considerado é um dos seus dois sucessores na árvore. Esta regra é também conhecida como "*last in, first out*" (LIFO).

As principais vantagens da regra LIFO são:

- A solução do último problema da lista por programação linear é muito simples: basta adicionar uma restrição de limite inferior ou superior a uma variável não inteira e reotimizar usando o dual simplex.
- A experiência mostra que soluções factíveis inteiras são mais prováveis de serem encontradas em níveis mais profundos da árvore.

A principal desvantagem da regra LIFO é a sua rigidez para controlar o processo enumerativo; há ocasiões em que um problema mais antigo na lista de problemas candidatos é mais promissor.

Esta regra se torna ineficiente quando o tamanho do problema vem a ser muito grande [14].

Outra regra à priori é a busca em largura, que consiste em considerar todos os nós de um mesmo nível, onde o nível de um nó é determinado pelo número de arcos no caminho único entre este nó e o nó raiz (problema original).

Como regras adaptativas temos:

a) Dentre os nós ativos, escolher o de menor limitante inferior (limite inferior de um nó é o valor do problema relaxado).

b) Regra da rápida melhoria: o objetivo desta regra é encontrar rapidamente uma solução factível melhor que a solução incumbente (melhor que a solução atual).

Para este estudo definiremos as variáveis como segue:

z^* - solução incumbente.

z^k - limitante inferior no nó k .

$\hat{z}^k$ - estimativa do valor da solução ótima no nó k , $\hat{z}^k \geq z^k$.

L - conjunto de nós ativos.

I - conjunto das variáveis requisitadas a terem valores inteiro na solução do problema.

O critério:

$$\text{Max}_{k \in L} \left\{ \frac{(z^* - z^k)}{(\hat{z}^k - z^k)} \right\} \text{ é uma tentativa de atingir este objetivo.}$$

Nota-se que o nó k com $\hat{z}^k < z^*$ é preferido ao nó j com $\hat{z}^j \geq z^*$. Além disso a preferência será dada para os nós nos quais a diferença $\hat{z}^k - z^k$ é pequena.

Um modo grosseiro de estimar $\hat{z}^k$ é utilizar a seguinte equação

$$\hat{z}^k = z^k + \sum_{i \in I} \{ \max(c_i f_i, c_i(1 - f_i)) \}$$

onde c_i é o coeficiente desta variável (custo) na função objetivo. Analogamente pode-se estimar $\hat{z}$.

É válido observar que, quanto mais perto da solução, $\hat{z}^k$ calculado é mais preciso, isso é devido ao fato de haver poucas variáveis com valores fracionários nos ramos mais profundos.

Outras maneiras mais refinadas de se estimar $\hat{z}^k$ são mostradas nos itens abaixo.

c) Existe ainda a regra pela escolha da menor estimativa, ou seja, estima-se o valor da solução no nó através de uma determinada formulação, e escolhe-se aquele que tiver o menor valor. Uma destas formulações é descrita abaixo.

Para um dado nó k tem-se:

$$s_k = \sum_{i \in I} \min\{f_i, 1 - f_i\}$$

em que, s_k é chamado de "soma dos inteiros infactíveis".

Sendo, $x_i = x_i^*$ para o nó k , em que $x_i^* = [x_i^*] + f_i$, sendo $[x_i^*]$ a parte inteira e f_i sua parte fracionária e $\min\{f_i, 1 - f_i\}$ o elemento que fornece o menor desvio de x_i^* para $[x_i^*]$ e $[x_i^*] + 1$.

Conseqüentemente uma medida empírica das regras de acréscimo no valor ótimo objetivo de z^0 para $\hat{z}$ pode ser dado por

$$\lambda = (z^0 + \hat{z}) / s_0$$

em que:

z^0 - o limite inferior associado com o primeiro nó da árvore.

$\hat{z}$ - estimativa do valor ótimo do problema no primeiro nó da árvore.

O valor de λ é atualizado toda vez que um novo $\hat{z}$ é encontrado.

Se z^k é o valor ótimo objetivo no nó k , e s_k é associado a soma de infactibilidade, então o valor objetivo projetado da solução inteira gerado para este nó é estimado por

$$z_p^k = z^k + \lambda s_k$$

assim o nó tendendo a menor z_p^k é o próximo a ser examinado.

Um estimativa de $\hat{z}^k$ também pode ser obtida pela seguinte equação:

$$\hat{z}^k = z^k + \sum_{i \in I} \max\{\lambda f_i, \lambda(1 - f_i)\}$$

Nenhauser e Wolsey [20] propõem como estratégia para escolha do nó a ser pesquisado o uso de várias regras ao mesmo tempo: se o nó que está sendo pesquisado não foi sondado, continua-se no mesmo ramo, caso contrário, verifica-se o irmão. Se este não foi sondado, então é escolhido, caso contrário verifica-se se já existe uma solução inteira (incumbente). Em caso afirmativo, usa-se a regra da rápida melhoria, se não a regra da melhor estimativa.

4.4.2 Escolha da Variável

Uma vez escolhido o problema candidato (nó) a ser pesquisado, relaxa-se a integralidade nas variáveis e resolve-se um problema de programação linear. Dentre as variáveis ótimas que assumem valores não inteiros é necessário escolher uma delas para ser dicotomizada. Esta escolha é muito importante para o tempo computacional de execução do algoritmo, pois geralmente há muitas variáveis que precisam ser fixadas em seus valores inteiros, para que as outras tornem-se inteiras na resolução do problema de programação linear.

A regra mais comum para escolha das variáveis é pelo uso das prioridades, isto é, um ordenamento das variáveis é especificado como parte da entrada de dados e elas são escolhidas segundo esta ordem.

Estão apresentadas abaixo outros critérios para escolha da variável:

Penalidades:

É uma estimativa do acréscimo no valor ótimo do problema relaxado ao se forçar uma das variáveis a assumir um valor inteiro particular. Uma maneira de calcular a penalidade foi apresentada no item (c) do subtítulo (4.4.1), onde se estimava o acréscimo do valor de z^k do próximo nó. Esta mesma formulação pode ser adaptada para fazer a estimativa do acréscimo no valor da próxima variável a ser dicotomizada.

Pseudo-custo:

Segundo *Benichou* [25], pseudo-custo pode ser interpretado como uma medida quantitativa da deterioração do valor funcional, quando se força uma variável requisitada inteira com uma valor fracionário para um valor inteiro.

Seja k o nó que está sendo pesquisado e seja x_i uma variável ótima não inteira com valor x_i^* a ser dicotomizada. O nó k gera dois problemas candidatos ($N+1$) e ($N+2$) com as restrições tradicionais sobre a variável x_i .

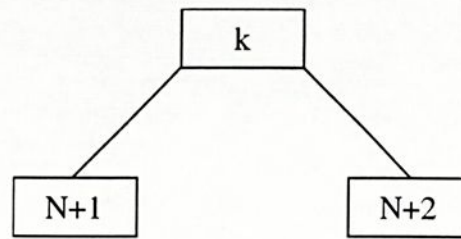


Figura 4.4.1

$$x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor \qquad x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1$$

Esquema do pseudo-custo

Os pseudo-custos de uma variável inteira x_i , são definidos como:

$$D_i = \left| \frac{z^{(N+1)} - z^k}{f_i^k} \right| \qquad U_i = \left| \frac{z^{(N+2)} - z^k}{1 - f_i^k} \right|$$

Os pseudo-custos sugerem uma degradação do valor ótimo do problema relaxado no nó k por unidade de variação de x_i para baixo e para cima. D_i é definido como sendo a estimativa por unidade de custo acrescido e U_i , a estimativa por unidade de custo decrescido.

No início da resolução do problema, geralmente os pseudo-custos não são conhecidos. Quando o problema inicial relaxado é executado (nó zero), obtém-se várias variáveis com valores fracionários. Com o intuito de calcular os pseudo-custos destas variáveis, processa-se para cada uma delas dois subproblemas de programação linear com o máximo 10 iterações (vide Figura 4.4.1). Assim, se pode determinar a primeira variável a ser ramificada. Os pseudo-custos destas variáveis são atualizados, à medida que estas são novamente escolhidas com variáveis de ramificação durante o algoritmo. As variáveis que possuem valores inteiros na resolução do problema relaxado no nó zero, possuem pseudo-custos indeterminados.

Usando pseudo-custos pode-se estimar $\hat{z}^k$, em um nó sucessor ao nó k :

$$\hat{z}^k = z^k + \sum_{i \in I} \min(D_i f_i^k, U_i (1 - f_i^k))$$

Abaixo são propostas duas maneiras de se calcular a variável a ser ramificada:

$$\text{Max}_i (\text{Min}(D_i f_i, U_i (1 - f_i)))$$

$$\text{Max}_i (\text{Max}(D_i, U_i)).$$

Cabe ao usuário escolher a que melhor se ajusta no seu algoritmo de resolução.

4.4.3 Estratégias de Solução

Após conhecidas várias sugestões e métodos de solução, a tentativa de resolver um problema considerado grande pode ser muito desanimadora.

A experiência com diferentes heurísticas, pode acumular informações suficientes, para garantir uma mudança na formulação original e/ou desenvolver diferentes listas de prioridades e pseudo-custos para o problema. Também o usuário ganha suficiente confiança sobre o problema e pode então especificar uma estratégia para resolver seu problema, persistindo em preparar mudanças na sua estratégia, no caso de nenhum progresso estar ocorrendo.

No caso do usuário desejar formular uma estratégia própria para resolução do seu problema, é importante levar em consideração os itens seguintes, para que sua estratégia torne-se mais versátil.

- 1) Descobrir uma (boa) solução prontamente.
- 2) Encontrar um bom limite superior (problemas de minimizar), para com isso descartar um maior número de ramos e, conseqüentemente, economizar a memória do computador.

Também é importante mencionar que o desenvolvimento da heurística de solução é feita de modo que se ajuste o melhor possível no problema em questão.

4.5 Critérios Específicos *B&B*

Existem duas estratégias diferentes para melhorar o desempenho do algoritmo *B&B*: a primeira é introduzir melhorias de caráter geral, com o uso de estratégias de resolução do tipo apresentadas anteriormente neste capítulo; a segunda é introduzir informações específicas do problema que está sendo resolvido, ou seja,

incorporar conhecimento sobre o tipo do problema, para acelerar o processo de convergência.

Para o nosso problema de planejamento de sistemas de transmissão, existem várias características que podem ser aproveitadas, entre elas podemos destacar:

- 1) Armazenar boas soluções inteiras ao resolver um subproblema mestre, as quais podem ser boas incumbentes iniciais do próximo mestre a ser resolvido.
- 2) Tentar encontrar todas as soluções ótimas alternativas que, por sua vez, gerariam cortes de Benders alternativos.
- 3) Gerar *restrições especiais* que são relaxadas para o problema global, mas que introduzem conhecimento e melhor desempenho na resolução dos subproblemas mestres.

Para o último caso temos as restrições conhecidas como restrições substitutas, são *restrições especiais* que introduzem informações específicas do problema. Como veremos abaixo, estas restrições substitutas fazem com que exista uma melhoria no desempenho na resolução do problema.

4.5.1 Restrições Substitutas

Um modo de analisar melhor o uso das restrições substitutas é observar a figura 4.5.1, onde vemos três regiões para o problema: região factível relaxada, região factível relaxada com as restrições substitutas e a região factível original, com os seus respectivos pontos de ótimo p_1 , p_2 e p_3 . A figura representa um problema de minimizar sendo C o vetor de coeficiente de custo, d_1 a distância da região original a região relaxada e d_2 a distância da região original a região relaxada com as restrições substitutas.

Quando resolvemos o mestre na última fase, temos de início um problema relaxado, ou seja, a integralidade das variáveis estão relaxadas, isso faz com que a região factível se torne muito grande e o limitante inferior do problema relaxado fique muito longe do limitante inferior do problema original (distância d_1). Esta distância vai diminuindo à medida que são feitas as chamadas ao mestre, isto é, após cada iteração, as quais adicionam novas restrições ao problema (cortes de Benders). Quando temos uma d_1 muito grande, conseqüentemente teremos um número grande de chamadas ao mestre com um número PL's que crescerá após cada chamada, isto faz com que o esforço computacional cresça muito.

A adição de restrições substitutas introduzem melhorias no desempenho dos subproblemas mestres, fazendo com que a distância entre o limitante inferior do problema relaxado em relação ao problema original fique menor (d_2). O acréscimo

destas restrições corta uma faixa da região factível do problema relaxado, mas mantém a região factível do problema original, isto leva a uma melhoria no desempenho na resolução do problema, fazendo com que o número de chamadas ao mestre diminua e, conseqüentemente, o número de PL's necessários na última fase fique menor.

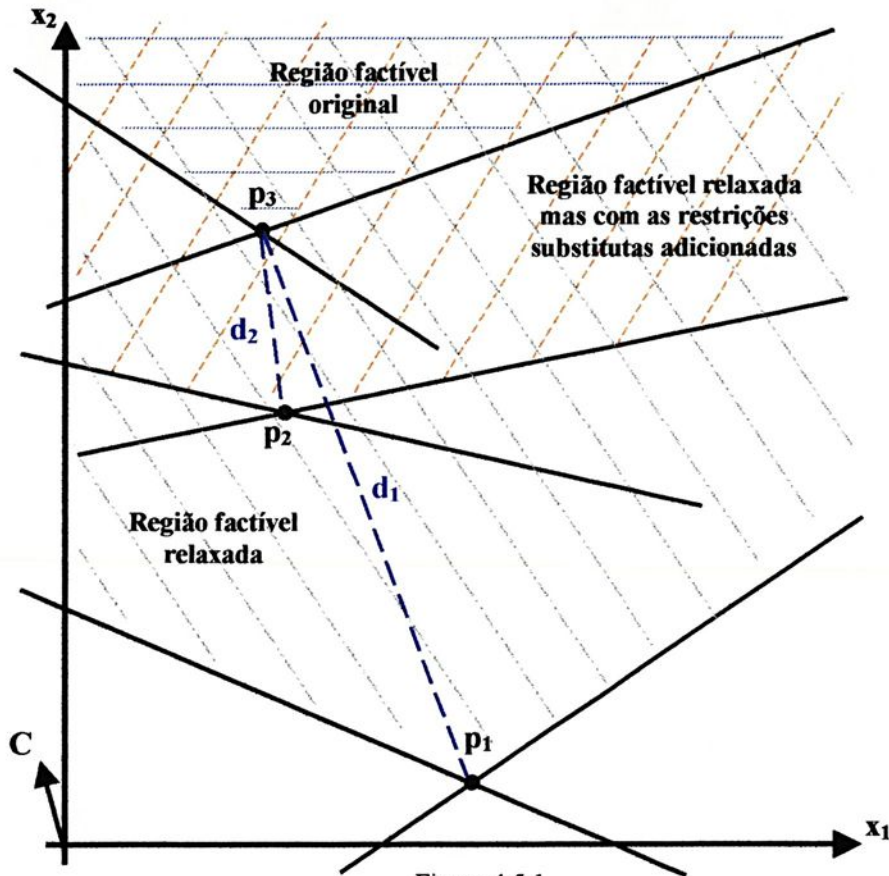


Figura 4.5.1

4.5.1.1 Restrições Substitutas Utilizada no Problema de Planejamento

Em problemas de planejamento, os problemas mais complexos de resolução são aqueles que apresentam novos caminhos de adição de circuitos [1]. O caso mais simples é um caminho novo representado por uma linha e um transformador como podemos ver no exemplo da figura 4.5.1.1 abaixo, onde está mostrado o limite de transmissão para cada linha de transmissão.

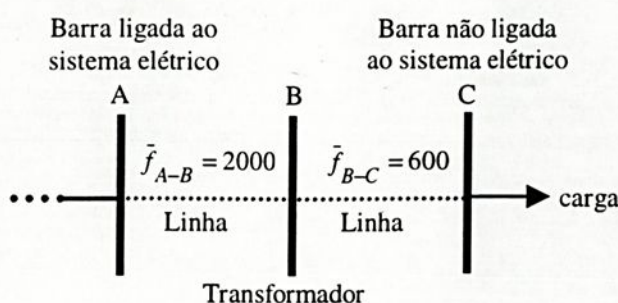


Figura 4.5.1.1

Para os dois circuitos da Figura 4.5.1.1, pode-se escrever as seguintes restrições levando em conta a capacidade de transmissão de cada linha:

$$4n_{A-B} - n_{B-C} \geq 0 \quad (4.5.a)$$

$$n_{B-C} - n_{A-B} \geq 0 \quad (4.5.b)$$

Sendo n_{A-B} e n_{B-C} inteiros. As restrições (4.5.a)-(4.5.b) são aparentemente triviais e simplesmente indicam que ambas variáveis devem ser iguais a zero ou se $n_{A-B} = 1$ então $n_{B-C} \in \{1, 2, 3, 4\}$. Logicamente, n_{A-B} pode assumir valores maiores, e sempre deve acontecer uma proposta de adição adequada nesse novo caminho.

Restrições do tipo (4.5.a)-(4.5.b) são relaxadas para o problema integral mas não necessariamente para o problema mestre em particular. Em outras palavras, o mestre pode apresentar uma alternativa de adição de um único circuito nesse novo caminho (violando o sistema (4.5.a)-(4.5.b)), pelo fato do número de cortes de Benders gerados serem insuficientes para eliminar esse problema. Como consequência, o mestre em algumas iterações pode apresentar soluções inadequadas aumentando desnecessariamente o número de iterações do processo integral. Adicionalmente a presença de restrições do tipo (4.5.a)-(4.5.b) melhora o desempenho dos testes de sondagem do algoritmo de *B&B*, pois ele aumenta o valor do limitante inferior do PL correspondente (maior número de restrições leva a uma solução do PL de maior valor). Portanto, restrições do tipo (4.5.a)-(4.5.b) diminui o número de iterações do algoritmo da fase III (menos chamadas ao mestre) e diminui o número de PL's na resolução de cada mestre diminuindo o esforço computacional em duas partes do algoritmo.

Testes computacionais mostraram, que algoritmos de *B&B* que usam as características específicas do problema como as restrições do tipo (4.5.a)-(4.5.b) [1], produzem uma diminuição de esforço computacional muito maior que os obtidos usando as estratégias do tipo geral do algoritmo de *B&B*. Adicionalmente, é necessário mencionar, que existem outras formas adicionais de gerar restrições especiais no problema de planejamento de sistema de transmissão. Restrições do tipo (4.5.a)-(4.5.b) podem ser facilmente geradas automaticamente.

Algoritmo B&B Básico:

A estrutura de um algoritmo B&B básico para resolver o mestre na última fase apresenta a seguinte estrutura:

1. **Início:**
Fazer a incumbente inicial igual a infinito ($Z_{inc} = \infty$). Resolver o PL correspondente (PLI original com variáveis contínuas). Se a solução do PL for inteira para pois ela é ótima global. Caso contrário ir ao passo 2
2. **Branching:**
Escolher a primeira variável inteira x_i com valor corrente contínuo x_i^* para realizar a separação. Gerar dois novos subproblemas a partir do subproblema corrente adicionando a restrição $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ para gerar um subproblema e a restrição $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor + 1$ para gerar outro subproblema. Onde $\lfloor x_i^* \rfloor$ é a parte inteira de x_i^* .
3. **Bounding:**
Resolver os dois PL's gerados usando o MINOS e armazenar a solução ótima de cada um $z_{pl} = z_{inf}$ como limitante inferior, para os prováveis PL's sucessores.
4. **Teste de Sondagem:**
Após resolver o PL (subproblema), deve-se verificar os testes de sondagem. O problema é sondado (eliminado de futuros considerações), se satisfazer algum dos seguintes testes de sondagem:
 - a. Teste 1: Se $z_{inf} \geq z^*$, em que z^* é o valor da incumbente.
 - b. Teste 2: Se a solução do PL for infactível.
 - c. Teste 3: Se o ótimo do PL for inteiro, isto é, todas as variáveis inteiras assumem valores inteiros. Neste caso, se o ótimo for menor que a incumbente então, deve-se atualizar a incumbente e aplicar o teste 1 para os subproblemas ainda não sondados.
5. Se existir subproblemas (nós) remanescentes não sondados, escolher o de menor z_{inf} e ir ao passo 2 para fazer **Branching**. Se todos subproblemas foram sondados, pare, pois terminou o processo.

O algoritmo básico, embora seja conceitualmente simples, apresenta complexidade na implementação computacional. Este algoritmo apresenta excelente desempenho para sistemas pequenos, mas em sistemas reais apresenta várias limitações relacionadas com o esforço computacional.

Capítulo V

Testes e Resultados Obtidos:

5.1 Introdução

Este capítulo mostra os testes realizados em alguns sistemas os quais ilustram o uso da metodologia hierarquizada. Foram testados os sistemas de 03 barras, o de 06 barras que é conhecido como sistema de Garver e o sistema Sul Brasileiro de 46 barras. Estes 03 sistemas têm solução ótima conhecida na literatura.

5.2 Sistema de 03 Barras

Está apresentado na figura 5.1.1.1 o sistema de três barras onde temos todas as barras ilhadas ou seja, não há nenhuma linha ligando as barras. No processo de resolução é permitido adicionar linhas entre duas barras quaisquer. Este sistema tem o objetivo de mostrar a versatilidade do algoritmo.

5.2.1 Sistema de 03 Barras Totalmente Ilhado

A figura 5.1.1.1 mostra a configuração inicial do sistema, a figura 5.1.1.2 mostra a solução final da fase I e da fase II, a figura 5.1.1.3 e a figura 5.1.1.4 mostra as duas soluções ótimas existentes da fase III.

A configuração inicial do sistema e os dados relevantes do sistema estão apresentados no Apêndice C.

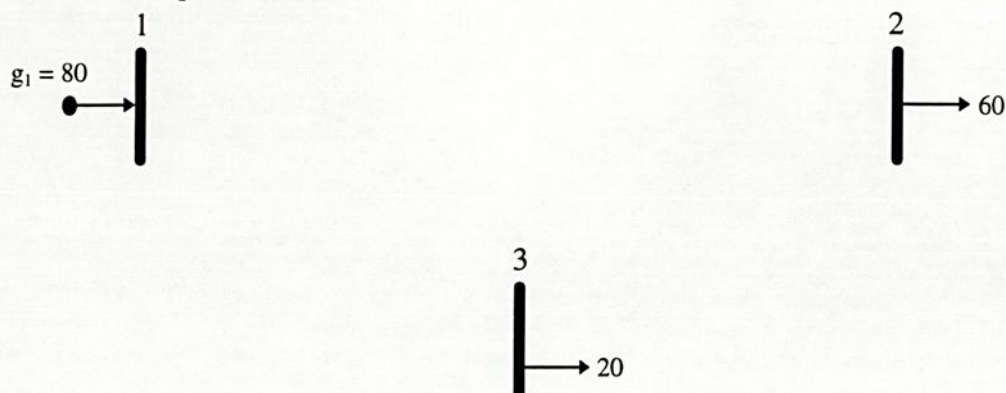


Figura 5.1.1.1
Sistema de 03 Barras: Configuração Inicial

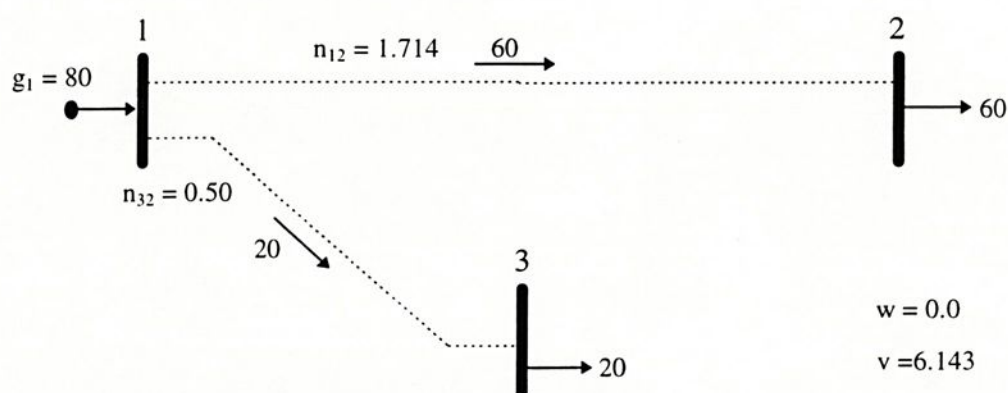


Figura 5.1.1.2
Sistema de 03 Barras: Final da Fase I e II

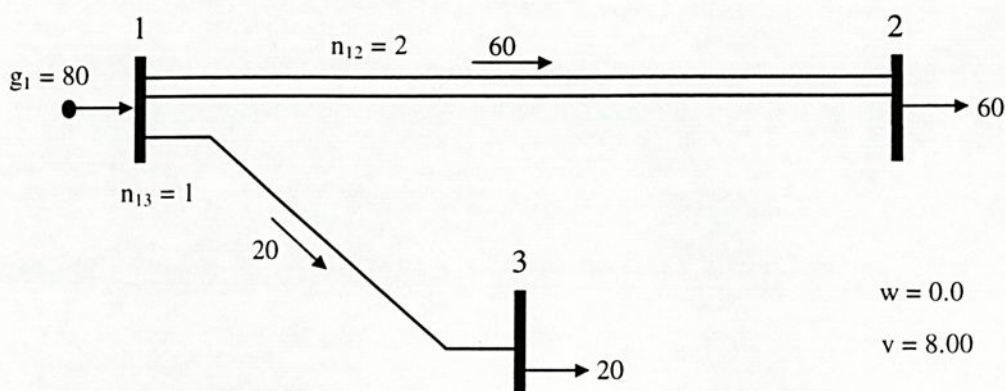


Figura 5.1.1.3
Sistema de 03 Barras: Final da Fase III (solução 01)

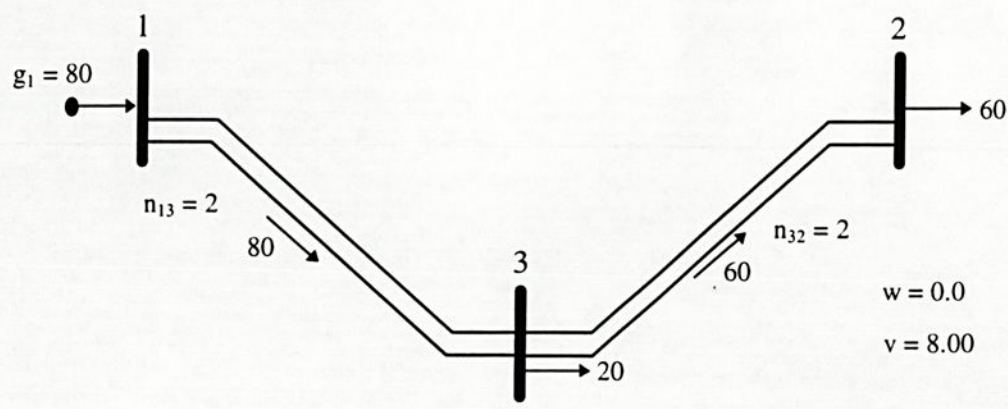


Figura 5.1.1.4
Sistema de 03 Barras: Final da Fase III (solução 02)

Os resultados relevantes deste sistema estão mostrados na tabela abaixo. Também estão mostrados as duas soluções ótimas do sistema.

Fase	Iter.	Número de Linhas Adicionadas			Investimento (Custo)	Operação (Corte)
		n_{12}	N_{13}	n_{23}	V	w
I	---	---	---	---	---	80.00
I	1	---	2.00	---	4.00	60.00
I	2	1.72	0.50	---	6.14	0.00
II	1	1.72	0.50	---	6.14	0.00
III	1	2.00	1.00	---	8.00	0.00
III	1	---	2.00	2.00	8.00	0.00

Observações:

- 1) O algoritmo tem capacidade de realizar o planejamento de um sistema completamente ilhado (sem linhas na configuração base).
- 2) O mestre encontra soluções ótimas alternativas na fase III e, portanto, pode encontrar ótimos alternativos globais.

5.3 Sistema de 06 Barras

Este sistema foi usado em [10] e [2]. A figura 5.2 mostra a configuração inicial do sistema. Pode-se ver que a barra 6 está inicialmente ilhada o que não causa problemas como já foi visto acima. Os dados relevantes do sistema estão apresentados no Apêndice C.

Será utilizado o planejamento em que é permitido a reprogramação da geração, isto é, não é fixado o nível de geração nas barras de geração, especificando simplesmente os valores máximos de geração permitidos em cada barra de geração. Portanto a determinação do nível de geração nas barras de geração faz parte do processo de otimização do problema de planejamento. Para este caso não existe restrição de número máximo de linhas, que pode ser adicionado para cada caminho candidato.

Os dados adicionais deste sistema são: $\varepsilon_w = 1MV$, $\alpha = 10$ e a unidade de custo em milhares de dólares.

em que:

ε_w é o máximo corte de carga permitido, e α a uma grandeza escalar.

A figura 5.2.1 mostra o sistema inicial e a figura 5.2.2 o resultado deste planejamento.

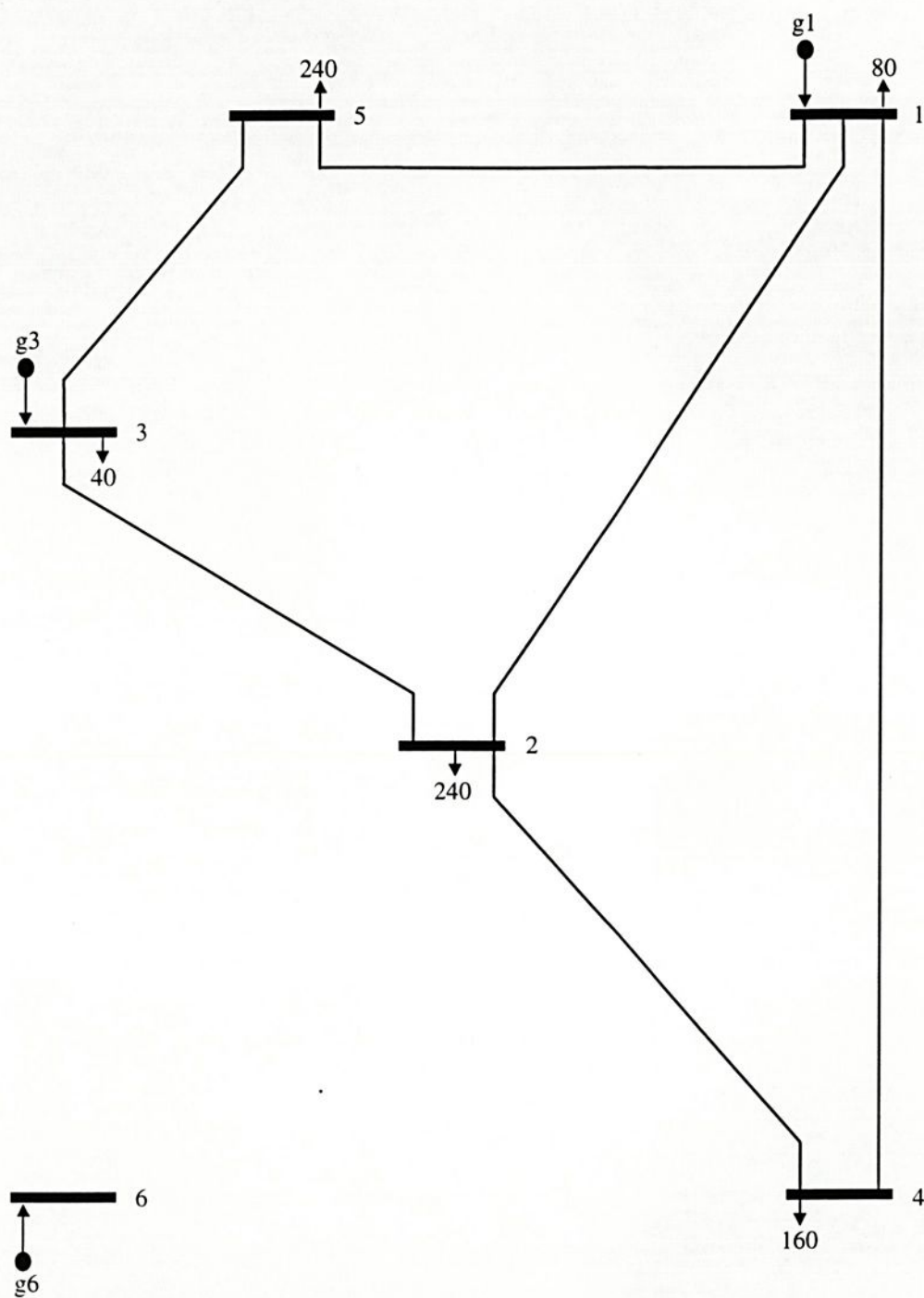


Figura 5.2.1
Sistema Inicial de 06 Barras

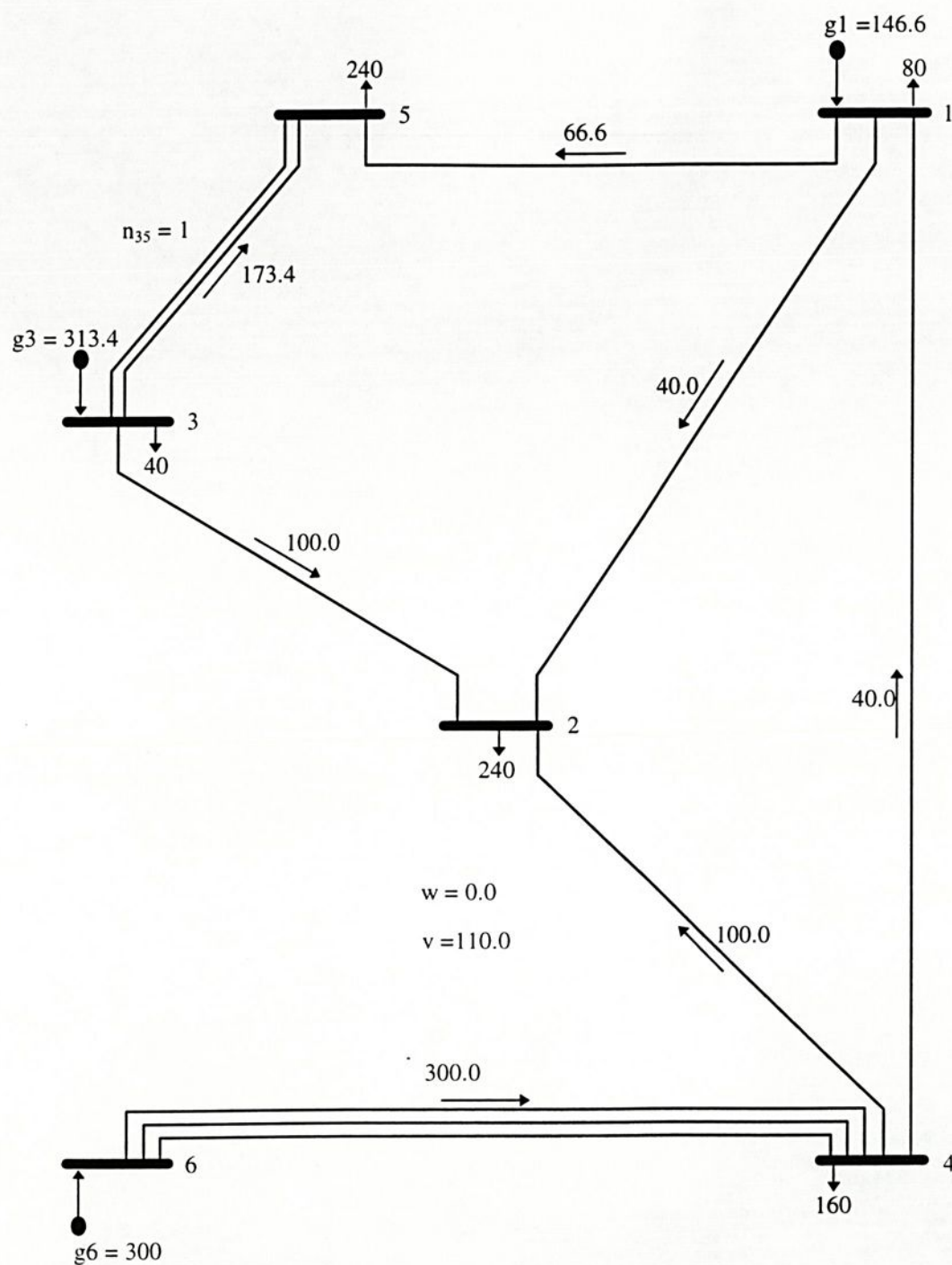


Figura 5.2.2
Sistema de 06 Barras: Final da Fase III

Os resultados relevantes deste sistema estão mostrados na tabela abaixo.

Fas e	Iter.	Número de Linhas Adicionadas				Custo de Investimento	Custo de Operação
		n ₂₃	n ₂₆	n ₃₅	n ₄₆	V	W
I	---	---	---	---	---	---	370.00
I	1	3.70	---	---	---	74.00	250.00
I	2	1.20	2.50	---	---	99.00	40.00
I	3	0.80	2.50	0.40	---	99.00	0.00
II	1	0.80	2.50	0.40	---	99.00	78.90
II	2	0.80	1.60	0.40	0.91	99.00	61.10
II	3	0.45	---	0.75	2.50	99.00	2.10
III	1	---	1.00	1.00	2.00	110.00	5.70
III	1	---	2.00	1.00	1.00	110.00	24.80
III	1	---	---	1.0	3.0	110.00	0.00

Observação:

O algoritmo básico de *B&B* foi acionado uma única vez, encontrando 3 soluções ótimas alternativas com 96 chamadas ao algoritmo de PL e uma dessas soluções encontradas é a solução ótima global.

5.4 Sistema Sul Brasileiro - 46 Barras

Este sistema em termos de transmissão é considerado como um sistema de médio porte. Este sistema foi utilizado para testar melhorias no algoritmo de *Branch-and-Bound*. As quais estão relatadas abaixo.

Este sistema foi usado em [15]. A figura 5.3.1 mostra a configuração inicial e os caminhos candidatos à adição de linhas, os quais estão representados em linhas pontilhadas. Para resolução deste sistema consideramos $\epsilon_w = 1MW$, $\alpha = 1000$ e a unidade de custo da ordem de milhares de dólares. Os outros dados relevantes deste sistema estão mostrados no Apêndice C.

Neste teste somente foram especificados os limites máximos de geração das barras de geração, podendo portanto ser feito uma reprogramação de geração.

Foram realizados três testes com o sistema de 46 barras, os quais nos mostra as melhorias em termos de desempenho computacional.

5.4.1 Sistema de 46 Barras Utilizando o Algoritmo Básico

Os testes realizados com o algoritmo básico, onde a escolha dos nós leva em conta o limite inferior, e as variáveis a serem dicotomizadas são escolhidas pela ordem apresentada no arquivo de entrada, mostram uma necessidade de se fazer implementações no algoritmo, visando a melhoria do desempenho computacional. Como podemos ver abaixo, o número de PL's (quantidade de sub-iterações) foi muito grande, o que levou aproximadamente 20 horas em um micro *pentium 200* para ser processado. Os resultados relevantes são:

Investimento: 70.298.000,00 dólares

Circuito adicionados: 08 circuitos mostrados na figura 5.3.2 e na tabela 5.3.2.1

Corte de carga na solução: $w = 0,948$ MW

Corte de Benders necessários: 61

Fase I: 15
Fase II: 16
Fase III: 30

Quantidade de PL's utilizados na última fase: ≈ 85.000

A tabela 5.3.1 mostra as chamadas ao algoritmo *B&B* na resolução da última fase do sistema de 46 barras utilizando o algoritmo básico.

Tabela 5.3.1
Mestre na Fase III do Algoritmo *B&B*

Nº	Investimento 10 ³ \$US	Nº de PL's (mestre)
1	54.706	492
2	54.706	472
3	58.600	962
4	58.879	2112
5	62.884	2224
6	62.884	2180
7	62.884	2124
8	62.884	2056
9	62.884	1984
10	63.163	3422
11	63.395	3744
12	63.395	3612
13	63.395	3584
14	65.183	3742

15	65.183	3648
16	65.269	3798
17	65.595	3322
18	65.659	3642
19	65.659	3576
20	65.659	3438
21	65.659	3410
22	65.835	2922
23	66.047	3010
24	66.554	3398
25	67.057	2606
26	67.057	2416
27	67.057	2306
28	69.077	3356
29	69.389	3584
30	70.289	3872

5.4.2 Sistema de 46 Barras Usando um Algoritmo Melhorado

Neste caso o sistema foi testado utilizando a implementação de uma subrotina que cria restrições substitutas que eliminam eventuais desconexidade das linhas. Esta implementação está mostrada em detalhes no tópico 4.5.1.1 do capítulo 4 deste trabalho.

Os resultados obtidos com a implementação foram bons. A solução foi encontrada relativamente sem muito esforço computacional. Neste caso podemos observar uma redução nos cortes de Benders, da última fase necessários para atingir a convergência. Foram geradas 18 restrições especiais na forma de corte de Benders relativas a desconexidade das barras. Os resultados relevantes são:

Investimento: 70.289.000,00 dólares

Circuito adicionados: 08 circuitos mostrados na figura 5.3.2 e na tabela 5.3.2.1

Corte de carga na solução: $w = 0.948$ MW

Cortes especiais gerados: 18

Corte de Benders necessários: 38

Fase I: 15
Fase II: 16
Fase III: 7

Quantidade de PL's utilizados na última fase: = 5.238



A tabela 5.3.2 mostra as chamadas ao algoritmo *B&B* na resolução da última fase utilizando o algoritmo de 46 barras implementado.

Tabela 5.3.2
Mestre na Fase III do Algoritmo *B&B*

Nº	Investimento 10 ³ \$US	Nº de PL's (mestre)
1	62.884	486
2	63.163	466
3	65.183	626
4	66.555	756
5	67.506	752
6	69.936	1058
7	70.289	1094

Observações:

Houve uma melhoria no desempenho do algoritmo modificado em três partes do processo de solução.

- 1) O número de iterações na fase III diminuiu de 30 para 7, isto é, com o algoritmo básico foram necessárias 30 chamadas ao algoritmo de *B&B* para resolver 30 vezes o subproblema mestre. Este número de chamadas foi reduzido para 7.
- 2) O número de PL's necessários, para resolver o subproblema mestre em cada chamada na fase III foi drasticamente reduzido, o que significa que as restrições especiais melhoraram de maneira significativa os testes de sondagem.
- 3) A primeira solução inteira encontrada pelo algoritmo básico na fase III apresentou um investimento de $v = 54.703.000,00$ (ver tabela 5.3.1), enquanto que a primeira solução inteira encontrada pelo algoritmo modificado foi igual a $v = 62.884.000,00$ (ver tabela 5.3.2) que está muito mais perto da solução ótima global procurada de $v^* = 70.289.000,00$.

5.4.3 Sistema de 46 Barras Usando um Algoritmo com Ordenamento Especial de Variáveis

Este caso foi testado utilizando a implementação já mencionada no item anterior, e com o ordenamento especial das variáveis. As variáveis foram ordenadas de modo que, sempre fosse escolhida entre as variáveis com valores contínuos no nó em questão, a que tivesse maior custo, antes a escolha era feita pela ordem apresentada no

arquivo de entrada. Notou-se uma melhoria no desempenho da última fase do programa. Os resultados relevantes deste sistema são:

Investimento: 70.289.000,00 dólares

Circuito adicionados: 08 circuitos mostrados na figura 5.3.2 e na tabela 5.3.2.1

Corte de carga na solução: $w = 0.948$ MW

Cortes especiais gerados: 18

Corte de Benders necessários: 38

Fase I: 15

Fase II: 16

Fase III: 7

Quantidade de PL's utilizado na última fase: = 1.778

A tabela 5.3.3 mostra as chamadas ao algoritmo *B&B* na resolução da última fase utilizando o algoritmo de 46 barras implementado e com o ordenamento de variáveis.

Tabela 5.3.3
Mestre na Fase III do Algoritmo *B&B*

Nº	Investimento 10 ³ \$US	Nº de PL's (mestre)
1	62.884	204
2	63.163	194
3	63.163	114
4	66.555	332
5	67.506	228
6	69.936	396
7	70.289	402

Observações:

Nesta última modificação com a estratégia especial de escolha de variáveis para fazer *branching*, houve uma melhora significativa nos testes de sondagem, diminuindo assim o tamanho da árvore de *B&B*.

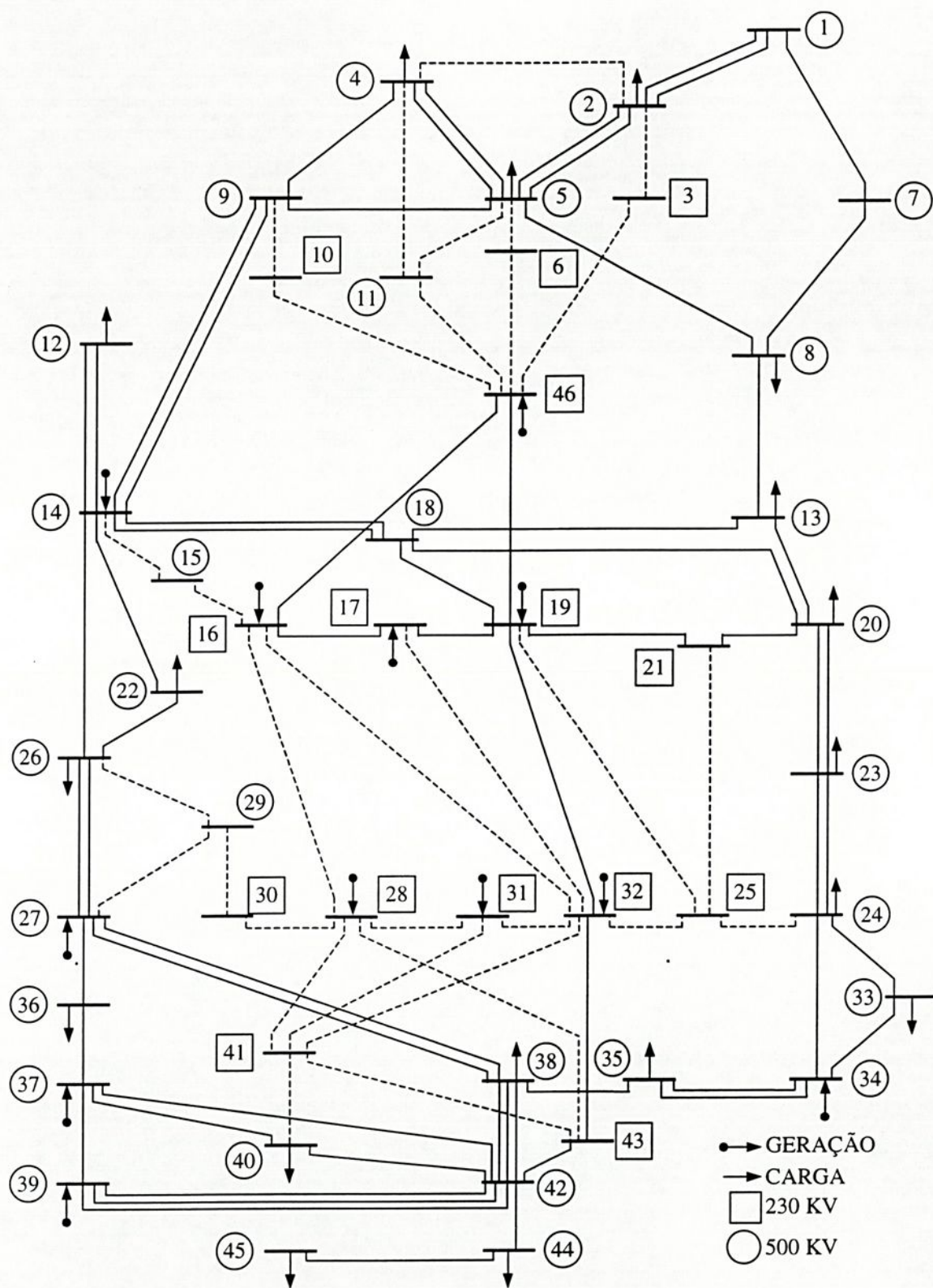


Figura 5.3.1
Sistema Inicial de 46 Barras

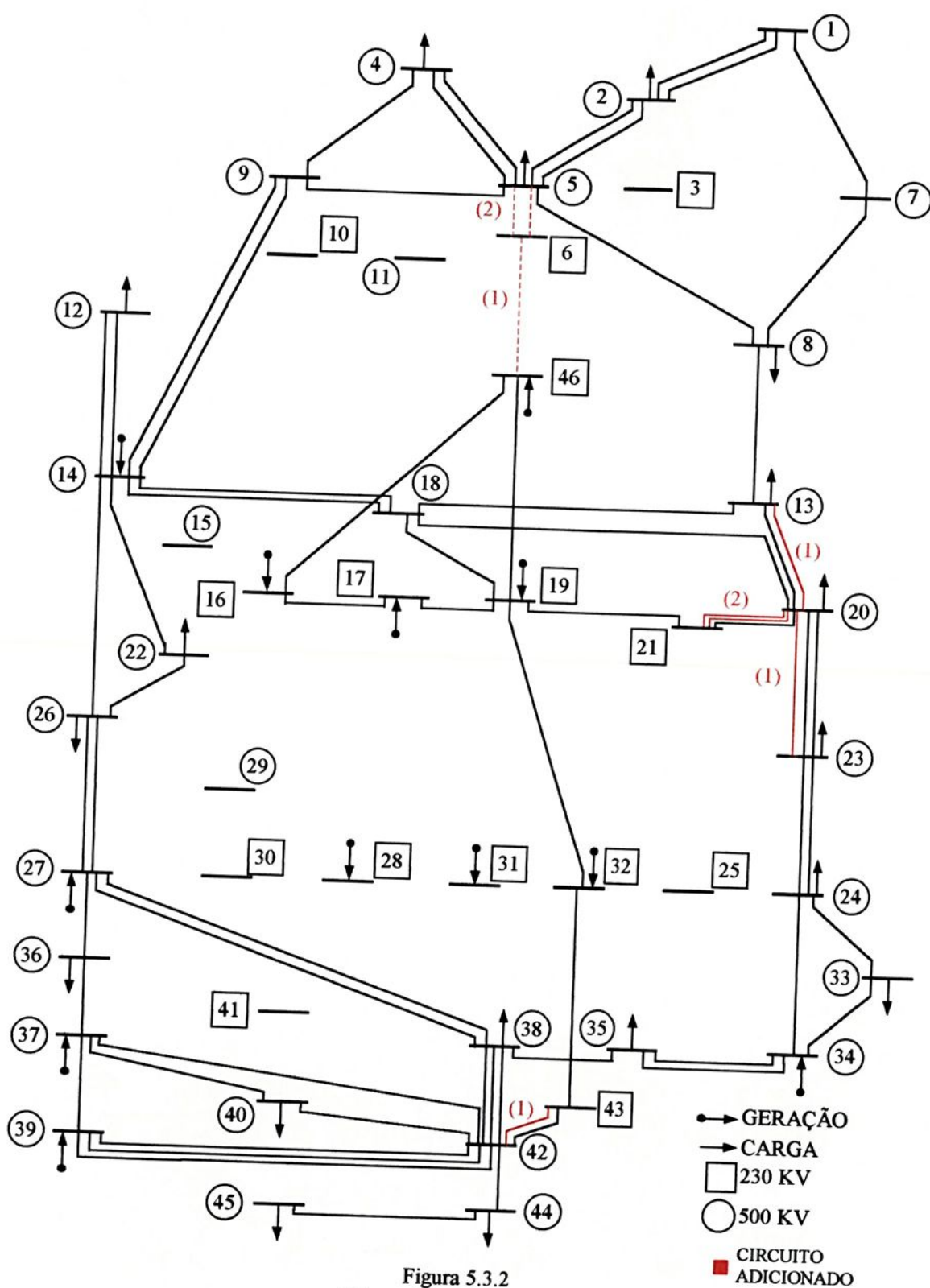


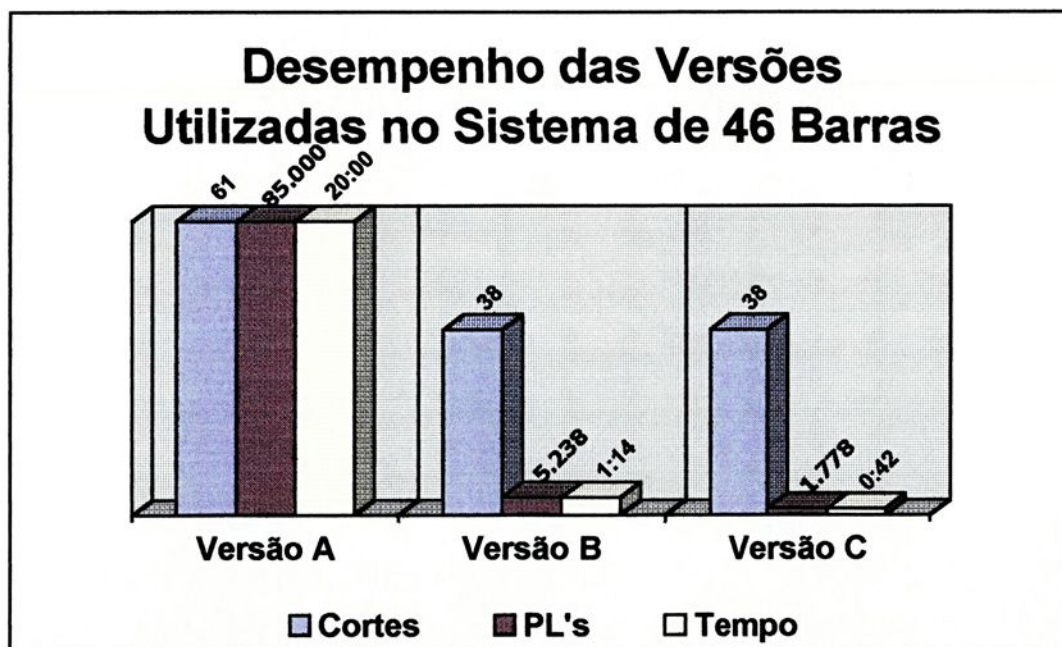
Figura 5.3.2
Sistema Final de 46 Barras

Tabela 5.3.2.1

Nº	Circuitos Adicionados	Nº de Circuitos Adicionados
1	13-20	1
2	20-23	1
3	46-06	1
4	20-21	2
5	42-43	1
6	05-06	2

5.5 Análise dos Resultados

Abaixo está esboçado o gráfico que traz a relação de desempenho (cortes de Benders, número de PL's e o tempo de processamento gasto) entre as três versões do mestre da última fase, ou seja, algoritmo básico, algoritmo melhorado e algoritmo com ordenamento especial de variáveis utilizadas no sistema de 46 barras, estes estão representados no gráfico por Versão A, Versão B e Versão C respectivamente.



O gráfico nos mostra com clareza os resultados obtidos com as melhorias no algoritmo básico. Vimos que houve progresso no números de cortes de Benders gerados, o qual diminuiu de 61 na versão A para 38 nas versões B e C. Em relação ao tamanho da árvore de *B&B* gerada, constatamos uma diminuição drástica, pois na versão A foram necessários 85.014 PL's para atingir o ótimo global, sendo que esse número caiu para 5.238 na versão B e finalmente para 1.778 na versão C, com isso o tempo de processamento computacional diminuiu de aproximadamente 20:00 horas na versão A para 0:42 minutos na versão final.

Conclusões

Este trabalho apresentou um algoritmo de *Branch-and-Bound* usado no planejamento de sistemas de transmissão, onde se utilizou a decomposição de Benders hierarquizada para resolver o problema de planejamento. Como vimos, a implementação da decomposição hierarquizada utilizou três níveis diferentes de modelagem da rede elétrica (MT, MH e DC). Nos dois primeiros níveis (MT e MH) foi utilizado o algoritmo de programação linear "MINOS" para resolver os subproblemas de investimento e de operação os quais são gerados pela decomposição de Benders. No último nível o subproblema de operação foi resolvido utilizando o "MINOS" e o subproblema de investimento foi resolvido utilizando um algoritmo de *Branch-and-Bound*.

Foi utilizado um método de otimização exata para resolver o problema de planejamento, como vimos, esses métodos encontram soluções ótimas para sistemas de pequeno e médio porte, mas dificilmente encontram a solução ótima para sistemas de grande porte.

Como foi mostrado no capítulo V o algoritmo encontrou soluções ótimas nos sistemas pequenos (sistemas de 3 e 6 barras) e de médio porte (sistema de 46 barras). No entanto, quando se tentou resolver um sistema maior (sistema norte-nordeste brasileiro para o ano 2002) com 89 barras, 183 linhas candidatas e uma demanda de 20.316 MW, constituindo realmente um sistema de grande porte com muitas barras isoladas na configuração base, o qual ainda não tem solução ótima conhecida, o algoritmo se mostrou ineficiente apresentando problemas de esforço computacional.

A implementação de um algoritmo de *Branch-and-Bound* no problema de planejamento de sistemas de transmissão pode ser feita com sucesso para sistemas pequeno e de médio porte, como vimos no item 5.5 do capítulo V onde está apresentado a análise dos resultados para o sistema de 46 barras com as melhorias adicionadas no algoritmo.

Ainda permanece a expectativa de uma solução ótima para um sistema de transmissão de grande porte, como o sistema norte-nordeste. Estudos estão sendo realizados nesta área e a qualquer momento pode-se obter uma solução.

Finalmente, o melhor algoritmo de *Branch-and-Bound* é aquele que apresenta adequadamente as características gerais dos algoritmos de *B&B* e as características específicas do problema que está sendo resolvido como foi verificado nos testes apresentados capítulo V.



Bibliografia

- [01] *R. Romero, E. Belati e A. Monticelli*, "Algoritmo de *Branch-and-Bound* Usado no Planejamento de Sistemas de Transmissão", XII Congresso Brasileiro de Automação (CBA), 1998.
- [02] *R. Romero e E. Belati*, "Planejamento de Sistemas de Transmissão Usando Técnicas de Decomposição Matemática e de *Branch-and-Bound*", XII Congresso Chileno de Engenharia Elétrica, 1997.
- [03] *R. Romero*, "Um Método de Decomposição para Planejamento a Longo Prazo de Sistemas de Transmissão", Tese de Doutorado, agosto de 1993, UNICAMP.
- [04] *R. Romero and A. Monticelli*, "A hierarchical Decomposition Approach for Transmission Network Expansion Planning", Paper WP93-048, IEEE-PES Winter Meeting, Jan./Feb.1993, Columbus-Ohio.
- [05] *Romero R. and Monticelli A.*, "A Hierarchical Decomposition Approach for Transmission Network Expansion Planning", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, N^o 1, pp. 373-380, February 1994.
- [06] *A. M. Geoffrion*, "Generalized Benders Decomposition", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 10. 1972.
- [07] *S. Granville and M. V. F. Pereira*, "Analysis of the Linearized Power Flow Model in Benders Decomposition", EPRI-Report RP 2473-6, Stanford University, February 1985.
- [08] *A. M. Geoffrion*, "Generalized Benders Decomposition"; Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 10, 1972.

- [09] *Oliveira G. C., Costa A. P. C. and Binato S.*, "Large Scale Transmission Network Planning Using Optimization and Heuristic Techniques", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, Nº 4, pp 1828-1834, November 1995.
- [10] *Monticelli A., Santos Jr. A., Pereira M. V., Cunha S. H., Parker B. J. and Praça J. C.*, "Interactive Transmission Network Planning Using a Least-Effort Criterion", IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-101, Nº 10, October 1982.
- [11] *B. Stott and J. L. Marinho*, "Linear Programming for Power-System Network Security Applications", IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-98. nº 3, May/June, 1979.
- [12] *M. V. F. Pereira, L. M. V. G. Pinto, S. H. F. Cunha and G. C. Oliveira*: "A Decomposition Approach to Automated Generation/Transmission Expansion Planning"; IEEE Trans. Power App. Systems. Vol. PAS-104, nº 11, November. 1985.
- [13] *A. Monticelli*, "Métodos de Análise e Sínteses Aplicados ao Planejamento a Longo Prazo de Sistemas de Transmissão de Energia Elétrica". Relatório nº 1 do Contrato CEPEL/UNICAMP sobre Planejamento de Sistemas de Transmissão, 1979.
- [14] *Hamdy A. Taha*: "Integer Programming Theory, Applications, and Computations", Department of Industrial Engineering, University of Arkansas Fayetteville, Arkansas. 1975.
- [15] *M. F. V. Perreira, L. M. V. G. Pinto, G. C. Oliveira and S. H. F. Cunha*, "Composite Generation-Transmission Expansion Planning", EPRI-Research Project 2473-9, S- Stanford University, 1987.
- [16] *L. L. Garver*, "Transmission Network Estimation Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-89, p. 1688-1697. September -October, 1970.
- [17] *R. Villasana, L. L. Garver and S. J. Salon*, "Transmission Network Planning Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Systems. Vol. PAS-104, nº 2, February, 1985.
- [18] *A.M. Geoffrion*, "Elements of Large-Scale Mathematical Programming Part I: Concepts", Management Science, Vol. 16, nº 11, 1970.
- [19] *J. F. Benders*, "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", Numerische Mathematics, Vol. 4. 1962.



- [20] *Nenhauser, George L. and Laurence A. Wosley*, "Integer and Combinatorial Optimization", John Wiley & Sons, Inc. United States of America (1988).
- [21] *Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis and Hanif D. Sherali*, "Linear Programming and Network Flows", John Wiley & Sons, Inc., 2nd ed. (1990).
- [22] *Tomlin, J. A.*, "An Improved Branch-and-Bound Method For Integer Programming", Scientific Control Systems Ltd., London, England (May, 08, 1969).
- [23] *Beale, E. M. L.*, "Branch-and-Bound Methods For Mathematical Programming Systems", Annals of Discrete Mathematics 5, pp. 201-219 (1979).
- [24] *Geoffrion, A. M. and R. E. Mastern*, "Integer Programming Algorithms: A Framework and State of The Art Survey", Management Science, Vol. 18, nº9 (May, 1978).
- [25] *Benichou, M. J. M. Gauthier, P. Girodet, G. Henteges, G. Ribieri and O. Vicent*, "Experiments In Mixed-Integer Linear Programming", Mathematical Programming 1, pp. 76-94 (1971).
- [26] *Guimarães L. F. de Almeida*, "Um Algoritmo Branch-and-Bound para um Modelo de Otimização de Um Sistema "Kanban", Tese de Mestrado, março de 1991, UNICAMP.

Apêndice A

Tópicos da Decomposição de Benders

A.1 Introdução

Este apêndice foi redigido baseado no apêndice A da Tese de Doutorado do *R. Romero* [3]. Neste apêndice são apresentadas as proposições e formulações relacionadas com a técnica de decomposição de Benders generalizada.

A.2 A Decomposição de Benders

Dado o problema linear ou semi-linear (P).

$$\begin{aligned} \text{Min } & cx + f(y) \\ & Ax + F(y) \leq y \\ & x \geq 0; y \in Y \end{aligned} \tag{A.1}$$

O algoritmo de Benders para este problema pode ser considerado como a aplicação de projeção, linearização externa e relaxação. Projeta-se (A.1) sobre o espaço das variáveis y , efetua-se a linearização externa da função de valor supremo resultante na minimização e depois aplica-se a estratégia de relaxação para as novas restrições que

aparecem como uma consequência da linearização externa. Assume-se por simplicidade que (A.1) é factível e tem ótimo finito.

Projeção sobre o espaço das variáveis y leva a.

$$\text{Min}_{y \in V} \{ f(y) + \inf_{x \geq 0} [cx; \text{s.a.}, Ax \leq b - f(y)] \} \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$V = \{y \in Y \mid \exists! x \geq 0 \text{ com } Ax \leq b - F(y)\}$$

O ínfimo dentro da minimização é o valor ótimo do programa linear parametrizado (PLP),

$$\text{Min } cx \quad (\text{A.3})$$

s.a

$$\begin{aligned} Ax &\leq b - F(y) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

cujo programa linear dual (DLP) é,

$$\text{Max } u(b - F(y)) \quad (\text{A.4})$$

s.a

$$\begin{aligned} uA &\leq c \\ u &\leq 0 \end{aligned}$$

Sejam $\langle u^1, \dots, u^p \rangle$ os pontos extremos e $\langle u^{p+1}, \dots, u^{p+q} \rangle$ os raios extremos do poliedro,

$$S = \{u \leq 0 \mid uA \leq c\}$$

Se S é vazio (P) não tem solução factível ou tem valor ótimo ilimitado. Afastando estes casos triviais pode-se garantir pela dualidade de programação linear que se (DLP) em (A.4) tiver solução ilimitada para algum y , então o (PLP) será infactível. Assim pode-se caracterizar o conjunto V como:

$$V = \{y \in Y \mid u^j(b - F(y)) \leq 0: j = p+1, \dots, p+q\} \quad (\text{A.5})$$

Assim, a projeção aplicada a (A.1) leva a (A.2) sujeito às restrições (A.5).

Por outro lado, linearizando externamente o ínfimo de (PLP), ou seja, lembrando o teorema da dualidade em programação linear que seu valor é:

$$\text{Max}_{1 \leq j \leq p} \{u^j(b - F(y))\} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.6) em (A.2) e tomando em consideração (A.5) tem-se que,

$$\text{Min}_{y \in Y} \{f(y) + \text{Max}_{1 \leq j \leq p} u^j (b - F(y))\} \quad (\text{A.7})$$

s.a

$$u^j [b - F(y)] \leq 0; \quad j = p+1, \dots, p+q$$

e sabendo que o máximo é o menor limitante superior. (A.7) pode ser escrito da seguinte forma equivalente,

$$\text{Min}_{y \in Y, y^0} \{f(x) + y^0\} \quad (\text{A.8})$$

s.a

$$u^j [b - F(y)] \leq y^0 : \quad j = 1, 2, \dots, p$$

$$u^j [b - F(y)] \leq 0 : \quad j = p+1, \dots, p+q$$

que é o problema mestre (PM) a ser resolvido. O problema mestre (A.8) é equivalente a (A.1) obtido depois das manipulações de projeção e linearização externa.

É claro que relaxação é uma estratégia natural para resolver o (PM) pois evita determinar antecipadamente os vetores $\{u^j\}; j = 1, 2, \dots, p+q$. O problema mestre relaxado (PMR) pode ser escrito da seguinte forma,

$$\text{Min}_{y \in Y, y^0} \{f(y) + y^0\} \quad (\text{A.9})$$

s.a.

$$u^j [b - F(y)] \leq y^0; \quad \text{para alguns} \quad 1 \leq j \leq p$$

$$u^j [b - F(y)] \leq 0; \quad \text{para alguns} \quad p+1 \leq j \leq p+q$$

A.3 A Decomposição de Benders Generalizada

Geoffrion generalizou a técnica de decomposição de Benders para programas onde o subproblema parametrizado, pelas variáveis y fixadas temporariamente já não precisam ser lineares. A teoria da dualidade convexa não linear é usada para desenvolver a decomposição de Benders para o caso não linear.

Seja o problema,

$$\text{Max}_{x,y} f(x, y) \quad (\text{A.10})$$

s.a.

$$G(x, y) \geq 0; \quad x \in X, \quad y \in Y$$

onde y é o vetor das variáveis que serão fixadas temporariamente, e G é um vetor de m restrições funcionais definido sobre $X \times Y \subseteq R^{n_1} \times R^{n_2}$.

Tem-se em mente situações específicas como:

- Para y fixo, (A.10) é separável num número de subproblemas de otimização independentes, cada um deles envolvendo um subvetor de x .
- Para y fixo, (A.10) assume uma estrutura especial onde é possível aproveitar técnicas de solução muito eficientes.
- O problema (A.10) não é um problema convexo em conjunto, mas fixando y o problema resultante é convexo em x .

A *projeção* de (A.10) sobre y é,

$$\text{Max}_y \quad v(y) \quad (\text{A.11})$$

s.a.

$$y \in Y \cap V$$

onde:

$$v(y) = \text{Sup}_x \{ f(x, y); \text{ s.a. } G(x, y) \geq 0; x \in X \} \quad (\text{A.12})$$

e

$$V = \{ y : G(x, y) \geq 0; \text{ para algum } x \in X \} \quad (\text{A.13})$$

Note que $v(y)$ é o valor ótimo de (A.10) para um y fixo e, por nossa definição de y como variáveis complicadas, calcular $v(y)$ é muito mais fácil de se resolver do que o problema (A.10).

Denote-se novamente o problema de otimização (A.12), $v(y)$:

$$\text{Max}_{x \in X} \{ f(x, y); \text{ s.a. } G(x, y) \geq 0 \} \quad (\text{A.14})$$

V é o conjunto de valores de y para os quais (A.14) é factível. $Y \cap V$ pode ser considerado com a projeção da região factível de (A.10) no espaço de y .

O problema projetado (A.11) é equivalente ao problema original (A.10).

Derivação do Problema Mestre

O problema mestre é obtido de (A.10) através de uma seqüência de três manipulações:

1. Projeção de (A.10) sobre y para obter (A.11).

2. Invocar a representação dual natural de V em termos da interseção de uma coleção de região que o contém.
3. Invocar a representação dual natural de v em termos do ínfimo ponto a ponto de uma coleção de funções.

O seguinte teorema mostra que (A.10) e (A.11) são equivalentes para nosso propósito e compreende a manipulação (1) já mencionada.

Teorema A.1 Projeção:

O problema (A.11) é infactível ou ilimitado se o mesmo é certo para (A.11). Se (x^*, y^*) é ótimo em (A.10), então y^* é ótimo e (A.11). Se y^* é ótimo em (A.11) e x^* atinge o supremo em (A.12) com $y = y^*$, então (x^*, y^*) é ótimo em (A.10). Se $\bar{y}$ é ε_1 -ótimo em (A.11) e $\bar{x}$ é ε_2 -ótimo em (A.14), então $(\bar{x}, \bar{y})$ é $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ -ótimo em (A.10).

Prova: Ver [6]

A manipulação (2) baseia-se no seguinte teorema:

Teorema A.2 Representação de V :

Assumir que X é um conjunto convexo não vazio e que G é côncava sobre X para cada $y \in Y$ fixo. Assumir depois que o conjunto,

$$Z_y = \{ \lambda \in R^m : G(x, y) \geq \lambda \text{ para algum } x \in X \}$$

é fechado para cada $y \in Y$ fixo. Então, um ponto $\bar{y} \in Y$ está também no conjunto V se $\bar{y}$ satisfaz o sistema (infinito):

$$[\sup \lambda' G(x, y)] \geq 0 : \forall \lambda \in \wedge \quad (\text{A.15})$$

onde

$$\wedge = \{ \lambda \in R^m : \lambda \geq 0, e \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \}$$

Prova: Ver [6]

A manipulação (3) baseia-se no seguinte teorema:

Teorema A.3: Representação de v :

Assumir que X é um conjunto convexo não vazio e que f e G são côncavos sobre X para cada $y \in Y$ fixo. Assumir também que, para cada $\bar{y} \in Y \cap V$ fixo, pelo menos uma das seguintes três condições satisfeitas:

1. $v(\bar{y})$ é finito e (A.14) possui um vetor multiplicador ótimo.
2. $v(\bar{y})$ é finito, $G(x, \bar{y})$ e $f(x, \bar{y})$ são contínuos em X . X é fechado e o conjunto solução ε -ótimo de (A.14) é não vazio e limitado para algum $\varepsilon \geq 0$, e
3. $v(\bar{y}) = +\infty$. Então o valor ótimo de (A.14) é igual a seu dual sobre $Y \cap V$, isto é,

$$v(y) = \inf_{u \geq 0} [\sup_{x \in X} f(x, y) + u'G(x, y)]; \forall y \in Y \cap V \quad (\text{A.16})$$

Prova: Ver [6]

A condição (1) verifica-se mais freqüentemente,

Assim dos teoremas A.2 e A.3, as manipulações (1)-(2) aplicadas a (A.10) levam ao problema mestre equivalente:

$$\text{Max}_{y \in Y} \{ \inf_{u \geq 0} [\sup_{x \in X} f(x, y) + u'G(x, y)] \}; \text{ s.a.} \quad (\text{A.15})$$

e usando a definição de ínfimo como o maior limitante inferior, tem que,

$$\text{Max}_{y \in X, y_0} \{ y_0 \} \quad (\text{A.17})$$

s.a.

$$\text{Sup}_{x \in X} \{ f(x, y) + u'G(x, y) \} \geq y_0 : \forall u \geq 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Sup}_{x \in X} \{ \lambda'G(x, y) \} \geq 0 : \forall \lambda \in \Lambda \quad (\text{A.19})$$

Resolução do Problema Mestre

A estratégia mais natural, para resolver o problema mestre (A.17) é relaxação pois ele tem um número grande de restrições.

Inicia-se resolvendo a versão relaxada de (A.17) ignorando todas ou algumas das restrições (A.17) (A.18) e (A.19); se a solução resultante não satisfaz todas as restrições ignoradas, então gerar e adicionar ao problema relaxado uma ou mais restrições violadas e resolvê-lo novamente; continuar deste modo até que a solução do problema relaxado satisfaça todas as restrições ignoradas (neste ponto foi achada uma solução ótima

de (A.17)), ou até obter uma solução de precisão aceitável, de acordo com algum critério de parada. Temos ainda que resolver o problema crucial de como testar a factibilidade da solução da versão relaxada de (A.17) em relação às restrições ignoradas e, no caso de infactibilidade, como gerar uma restrição violada.

Supor que $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ é uma solução ótima da versão relaxada de (A.17) assim:

- Do teorema A.2 e da definição de V tem-se que $\hat{y}$ satisfaz (A.19) se (A.14) é factível.
- Se (A.14) tem solução factível, o teorema A.3 implica que $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ satisfaz (A.18) se $\hat{y}_0 \leq v(\hat{y})$.

Assim (A.14) é apropriado para testar a factibilidade de $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ no problema mestre.

O problema (A.14) é apropriado para testar factibilidade de $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ em (A.17) e, em caso contrário, uma solução de (A.14) fornece os índices das restrições violadas no caso que $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ seja infactível. Um índice de uma restrição violada significa:

- Um vetor $\hat{y} \geq 0$ tal que,

$$\hat{y}_0 > \sup_{x \in X} \{ f(x, \hat{y}) + \hat{u}' G(x, \hat{y}) \} \quad (\text{A.20})$$

se (A.18) é violada, ou

- Um vetor $\hat{\lambda} \in \Lambda$ tal que,

$$[\sup_{x \in X} \{ \hat{\lambda}' G(x, \hat{y}) \}] < 0 \quad (\text{A.21})$$

se (A.19) é violada.

Se (A.14) é infactível obtém-se um $\hat{\lambda}$. Se (A.14) é factível e tem um valor ótimo finito obtém-se um vetor multiplicador ótimo, que satisfaz (A.20) se existe tal multiplicador e $\hat{y}_0 > v(\hat{y})$. Como um subproduto da solução de (A.14). A não existência do vetor multiplicador ótimo está relacionada com um ótimo ilimitado.

Então (A.14) para $y = \hat{y}$ fica relacionada com um algoritmo dual adequado pois ele produz: Um vetor $\hat{\lambda} \in \Lambda$ que satisfaz (A.21) se (A.14) é infactível para $y = \hat{y}$ ou um vetor multiplicador $\hat{u}$ que satisfaz (A.20) se ele existi.

Assim (A.14) para $y = \hat{y}$ pode ser usado para testar a factibilidade de qualquer ponto $(\hat{y}, \hat{y}_0)$ no problema mestre (A.17) e gerar um índice $(\hat{\lambda} \text{ ou } \hat{u})$ de uma restrição violada no caso de infactibilidade.

Convergência Teórica

Existem diferentes condições para as quais a decomposição de Benders generalizada converge. Apresenta-se dois teoremas de aplicações concretas. O primeiro aplicado quando Y é um conjunto discreto finito e portanto adequado para aplicações em programação não linear inteira mista. O outro teorema é aplicado quando Y é de cardinalidade finita, ou seja, Y convexo.

Teorema A.4 Convergência Finita:

Seja Y um conjunto discreto finito e considere satisfeitas as hipóteses do teorema A.2 e as hipóteses do teorema A.3 com a condição (b) omitida. Então, o processo da decomposição de Benders generalizada termina num número finito de passos para algum $\varepsilon > 0$ e também $\varepsilon = 0$.

Prova: Ver [6]

Teorema A.5 ε – Convergência Finita:

Seja Y um subconjunto compacto não vazio de V , X um conjunto convexo compacto não vazio, f e G côncavos sobre X para cada $y \in Y$ fixo e contínuo sobre $X \times Y$ e que o conjunto $U(g)$ de vetores multiplicadores ótimo para (A.14) é não vazio para todo $y \in Y$ e uniformemente limitado numa vizinhança de cada tal ponto. Então, para algum $\varepsilon > 0$, o processo de decomposição de Benders generalizada termina num número finito de passos.

Prova: Ver [6].



Apêndice B

Tópicos de *Branch-and-Bound* e Exemplos

B.1 Introdução

Temos muitos casos onde é requisitada a aplicação de um PL (programação linear) para solucionar determinados problemas. No entanto em muitos problemas, as variáveis de decisão só fazem sentido se assumirem valores inteiros. Neste caso, o problema desvia de uma formulação de PL para uma formulação de PLI (programação linear inteira). Se este problema de PLI for requisitado ter somente valores binários (0 ou 1) teremos então um problema de PLIB (programação linear inteira binária). Se algumas das variáveis forem requisitadas a ter valores inteiros, e outras valores contínuos, teremos então um problema de PLM (programação linear mista).

O modelo matemático para a programação linear inteira é, simplesmente, o modelo de programação linear com uma restrição adicional, na qual as variáveis precisam ter valores inteiros. Um método de solução para resolver estes problemas, PLI, PLIB e PLM é utilizar o algoritmo de (*Branch-and-bound*) *B&B* o qual é mostrado a seguir.

B.2 O Problema de *Branch-and-Bound*

O fundamento básico da teoria de *B&B* é resolver um problema do tipo P:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\
 & \text{s.a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \geq b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, m, \\
 & e \quad x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, n \\
 & \quad x_j \text{ é inteiro} \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, I \ (I \leq n)
 \end{aligned}
 \tag{P}$$

Quando temos $I = n$ temos um problema puro de PLI.

Problemas deste tipo inicialmente não apresentam valores inteiros nas variáveis de decisão. Quando isto acontece temos que dividir este problema inicial em dois novos subproblemas, onde temos para cada novo subproblema o acréscimo de uma nova restrição, por exemplo, se tivermos a variável $x_1 = 1/2$, então um dos subproblemas gerado terá uma nova restrição $x_1 \geq 1$ e o outro uma restrição adicional $x_1 \leq 0$, que forçará x_1 ter valor inteiro nos dois casos. Quando dividimos um problema ou um subproblema, surgem duas novas direções. As direções vão aumentando a partir das novas divisões feitas nos subproblemas, formando assim uma árvore. Uma direção pode ser dispensada de futuras considerações quando sondada. Neste estudo utilizam-se três testes para fazer a sondagem.

B.3 Algoritmo de *Branch-and-Bound* para PLIM

Considerando o problema P, que é um problema genérico PLIM, onde uma parte das variáveis são restritas para valores inteiros, e a outra parte para valores contínuos. Mostraremos o algoritmo básico para resolver este problema.

B.3.1 Algoritmo

Passo inicial: Fazer $Z^* = +\infty$, aplicar o **passo ii**, **passo iii**, e o teste ótimo para o problema. Se não for sondado, classificar este problema como um “subproblema” remanescente para realizar a primeira iteração.

Passos para cada iteração:

Passo i: Entre os subproblemas remanescentes (não sondados), selecionar o que tiver o menor Z e interromper momentaneamente o(s) outro(s). Entre as variáveis inteiras com valores contínuos na solução do PL do subproblema selecionado, escolher a primeira na ordem natural das variáveis para ser a variável *branching*. Seja x_j esta variável, e x_j^* o primeiro valor inteiro acima de x_j . Criar dois novos subproblemas adicionais, a partir do anterior que ficará sendo um nó, com as seguintes restrições adicionais ($x_j \leq x_j^* - 1$) e ($x_j \geq x_j^*$) respectivamente, a partir do nó em questão.

Passo ii: Resolver cada subproblema utilizando o método PRIMAL SIMPLEX ou DUAL SIMPLEX em que Z é o limitante inferior para os novos PL's.

Passo iii: Para cada novo subproblema, aplicar os três testes de sondagem vistos anteriormente e descartar de considerações futuras os subproblemas sondados.

Teste 1: Se $Z \geq Z^*$, onde Z^* é o valor de Z para a solução corrente incumbente.

Teste 2: Se o PL não tem solução factível.

Teste 3: Se a solução ótima para este PL tiver valores inteiros para as variáveis restritas a ter valores inteiros. (Se esta solução é a primeira incumbente ou melhor que a incumbente corrente, ela se tornará a nova solução incumbente e o teste 1 será reaplicado para todos os subproblemas não sondados com o novo Z^*).

Teste ótimo: Parar quando não houver mais subproblemas. Neste caso a solução incumbente corrente é ótima. Caso contrário, faça nova iteração.

B.4 Exemplo Detalhado

Abaixo está apresentado um exemplo detalhado de PLI onde se utiliza o algoritmo de *Branch-and-Bound* descrito acima juntamente com a teoria de programação linear descrita por Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis e Hanif D. Sherali [21].

B.4.1 Exemplo 1

Seja o problema:

$$\begin{aligned}
 &\min Z = 2x_1 + 3x_2 \\
 &\text{s.t.} \\
 &\quad x_1 + x_2 \geq 3 \\
 &\quad x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
 &\quad x_1 \geq 0 \\
 &\quad x_2 \geq 0 \\
 &\quad x_1 \text{ e } x_2 \text{ são inteiros.}
 \end{aligned}$$

Passo inicial: $Z^* = +8$

Passo ii: Utilizando o método SIMPLEX das duas fases [21] apresentaremos a solução deste problema inicial.

SOLUÇÃO ALGÉBRICA:

Transformando as restrições de desigualdade do problema em igualdades e acrescentando as variáveis de folga e as variáveis artificiais temos:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 3 \\
 x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 &= 6
 \end{aligned}$$

FASE I

$$A' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = I = [a_5 \ a_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{minimize } x_0 = x_5 + x_6$$

Montando o quadro inicial.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad C'_B = [1 \ 1] \quad C'_N = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = b$$

$$C'_B B^{-1} N - C'_N = [2 \ 4 \ -1 \ -1]$$

$$C'_B B^{-1} b = 9$$

FASE II

$$C_B = 10 \ 01$$

$$C_N = 12 \ 3 \ 0 \ 01$$

$$C_B B^{-1}N - C_N = 1 - 2 \ -3 \ 0 \ 01$$

$$C_B B^{-1}b = 0$$

Esquema do quadro inicial:

	Z	x_0	x_N	RHS
Z	1	0	$C_B B^{-1}N - C_N$	$C_B B^{-1}b$
x_0	0	1	$C'_B B^{-1}N - C'_N$	$C'_B B^{-1}b$
x_B	0	0	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Quadro inicial:

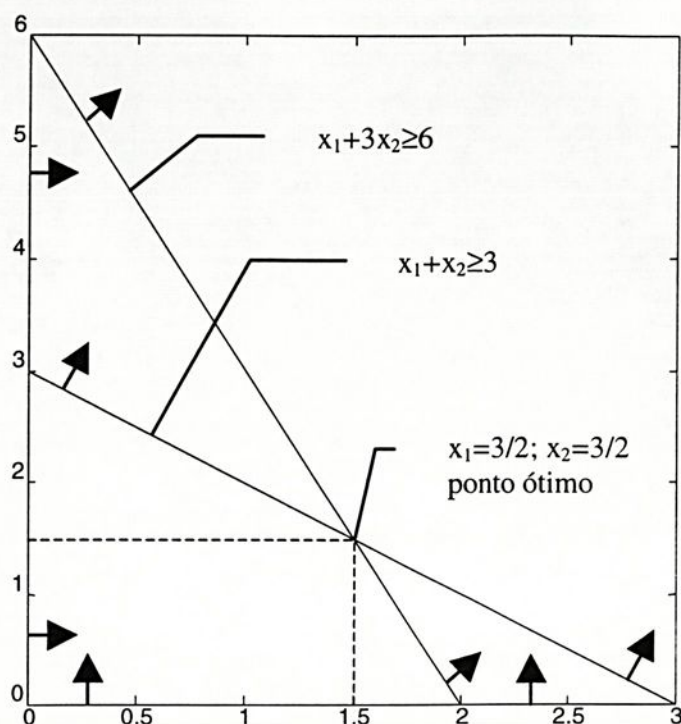
	Z	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	1	0	-2	-3	0	0	0	0	0
x_0	0	1	2	4	-1	-1	0	0	0
x_5	0	0	1	1	-1	0	1	0	3
x_6	0	0	1	<u>3</u>	0	-1	0	1	6

	Z	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	1	0	-1	0	0	0	-1	1	6
x_0	0	1	2/3	0	-1	-1	1/3	-4/3	1
x_5	0	0	<u>2/3</u>	0	-1	0	1/3	-1/3	1
x_2	0	0	1/3	1	0	-1	-1/3	1/3	2

	Z	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	1	0	0	0	-3/2	-1/2	3/2	1/2	15/2
x_0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	0	0	1	0	-3/2	1/2	3/2	-1/2	3/2
x_2	0	0	0	1	1/2	-1/2	-1/2	1/2	3/2

Solução $x_1 = 3/2$; $x_2 = 3/2$;
 $Z = 15/2$

Graficamente temos:



Inicialmente temos na solução do problema principal:

$$\text{principal} \quad \begin{matrix} x_1 = 3/2; x_2 = 3/2 \\ Z = 15/2 \end{matrix}$$

Passo iii: Não é sondado por nenhum teste.

Teste ótimo: Fazer a primeira iteração.

Primeira iteração:

Passo i: Criaremos agora dois subproblemas com as seguintes restrições adicionais: $x_1 \leq 1$ e $x_1 \geq 2$ respectivamente.

Passo ii: Resolveremos os subproblemas adicionais utilizando o método DUAL SIMPLEX.

Subproblema I

Restrição adicional: $x_1 \leq 1$

Esta nova restrição forçará x_1 ser inteiro e igual a 1.

Utilizaremos a partir de agora o método DUAL SIMPLEX referente à análise de sensibilidade, o que faz com que a restrição tome a seguinte forma:

$$x_1 + s_1 = 1$$

A partir do quadro final do problema inicial montaremos o quadro inicial do subproblema I e resolveremos.

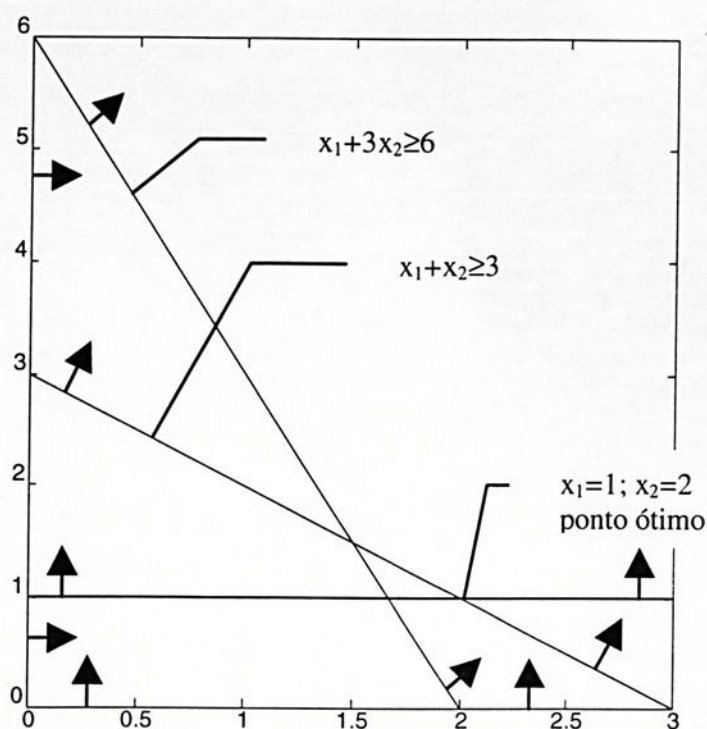
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
Z	1	0	0	-3/2	-1/2	0	15/2
x_1	0	1	0	-3/2	1/2	0	3/2
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	0	3/2
s_1	0	1	0	0	0	1	1

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
Z	1	0	0	-3/2	-1/2	0	15/2
x_1	0	1	0	-3/2	1/2	0	3/2
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	0	3/2
s_1	0	0	0	3/2	<u>-1/2</u>	1	-1/2

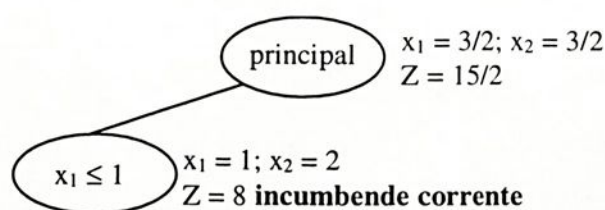
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
Z	1	0	0	-3	0	-1	8
x_1	0	1	0	0	0	1	1
x_2	0	0	1	-1	0	-1	2
x_4	0	0	0	-3	1	-2	1

Solução: $x_1 = 1$
 $x_2 = 2$
 $Z = 8$

Graficamente temos:



O esquema da solução toma a seguinte forma:



Subproblema II

Restrição adicional: $x_1 \geq 2$

Esta nova restrição forçará x_1 ser inteiro e igual a 2

Utilizaremos a partir de agora o método DUAL SIMPLEX referente à análise de sensibilidade, o que faz com que a restrição tome a seguinte forma:

$$-x_1 + s_2 = -2$$

A partir do quadro final do problema inicial montaremos o quadro inicial do subproblema II e resolveremos.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_2	RHS
Z	1	0	0	-3/2	-1/2	0	15/2
x_1	0	1	0	-3/2	1/2	0	3/2
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	0	3/2
s_2	0	-1	0	0	0	1	-2

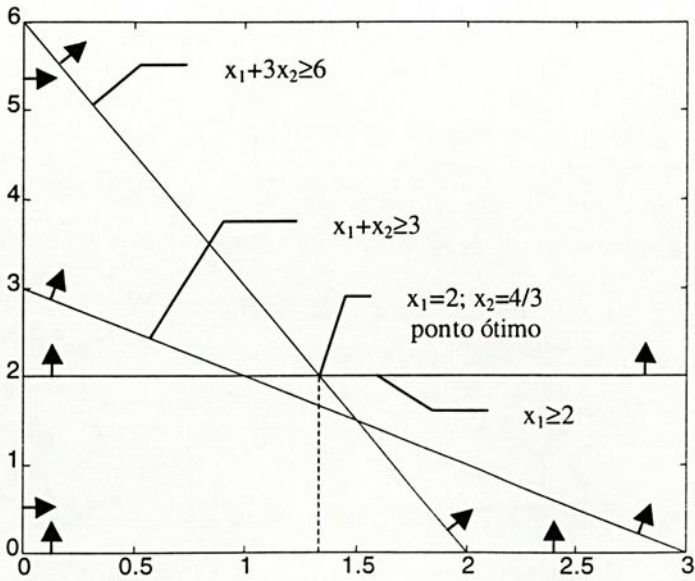
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_2	RHS
Z	1	0	0	-3/2	-1/2	0	15/2
x_1	0	1	0	-3/2	1/2	0	3/2
x_2	0	0	1	1/2	-1/2	0	3/2
s_2	0	0	0	-3/2	1/2	1	-1/2

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_2	RHS
Z	1	0	0	0	-1	-1	8
x_1	0	1	0	0	0	-1	2
x_2	0	0	1	0	-1/3	1/3	4/3
x_3	0	0	0	1	-1/3	-2/3	1/3

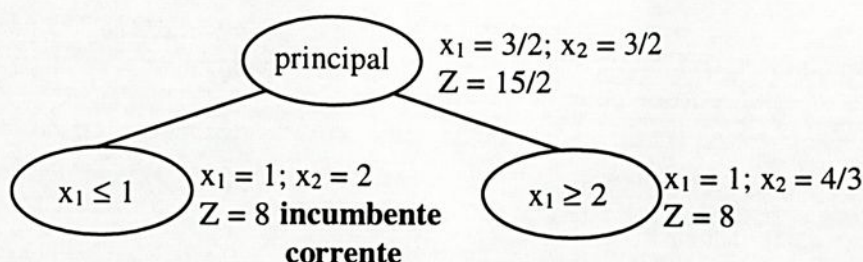
Solução:

$x_1 = 2$
 $x_2 = 4/3$
 $Z = 8$

Graficamente temos:



O esquema da solução toma a seguinte forma:



Passo iii: O subproblema I é sondado pelo teste 3 e se torna a nova solução incumbente e Z^* passa a ser 8, e o subproblema II fica sondado pelo teste 3 ($Z \geq Z^*$).

Teste ótimo: A solução incumbente é ótima.

B.5 Exemplo Utilizando o “Software” MINOS

Apresentaremos a seguir um exemplo do algoritmo de *Branch-and-Bound* usando o “software” MINOS.

B.5.1 Exemplo 1

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize } Z = -4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 \\
 &\text{s.a} \quad \begin{array}{rclcl}
 x_1 & & + 5x_3 & & \leq 10 \\
 x_1 & + & x_2 & - x_3 & \leq 1 \\
 6x_1 & - & 5x_2 & & \leq 0 \\
 -x_1 & & + 2x_3 & - 2x_4 & \leq 3
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \text{ e inteiro para } j = 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

Passo inicial: $Z^* = +\infty$

Passo ii: Utilizando o MINOS apresentaremos a solução deste problema inicial.

solução:

$$x_1 = 5/4; \quad x_2 = 3/2; \quad x_3 = 7/4; \quad x_4 = 0$$

$$Z = -71/5$$

Esquema da solução:

$$\text{principal} \quad \begin{matrix} 5/4; 3/2; 7/4; 0 \\ Z = -57/4 \end{matrix}$$

Passo iii: Não é sondado por nenhum dos testes de sondagem.

Teste ótimo: Fazer a primeira iteração:

Primeira iteração:

Passo i: Criaremos agora dois subproblemas (I e II) a partir do principal com as seguintes restrições adicionais; $x_1 \leq 1$ e $x_1 \geq 2$ respectivamente.

Passo ii: Resolveremos os subproblemas adicionais (I e II) utilizando o MINOS.

solução:

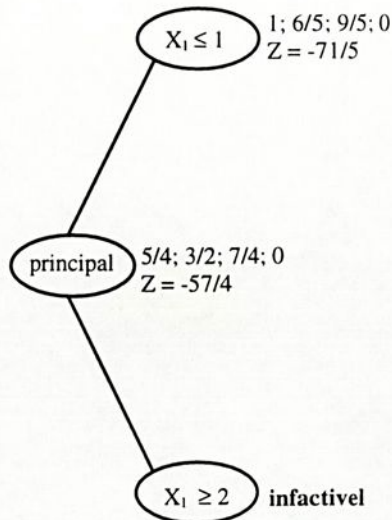
subproblema I.

$$\begin{matrix} x_1 = 1; x_2 = 6/5; x_3 = 9/5; x_4 = 0 \\ Z = -71/5 \end{matrix}$$

subproblema II

solução infactível

Esquema da solução:



Passo iii: O subproblema II é sondado pelo teste 2.

Teste ótimo: Fazer a segunda iteração:

Segunda iteração:

Passo i: Criaremos mais dois subproblemas (III e IV) a partir do subproblema I com as seguintes restrições adicionais; $x_2 \leq 1$ e $x_1 \geq 2$ respectivamente.

Passo ii: Resolveremos os subproblemas adicionais (III e IV) utilizando o MINOS.

solução:

subproblema III.

$$x_1 = 5/6; x_2 = 1; x_3 = 11/6; x_4 = 0$$

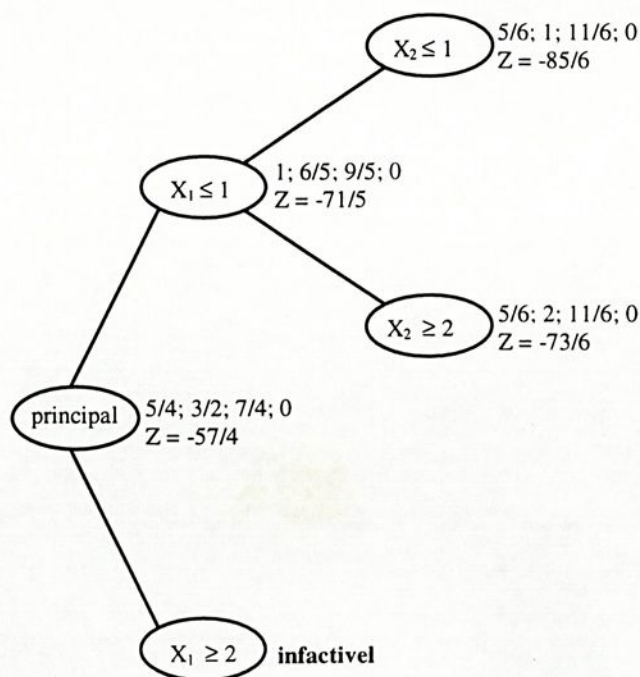
$$Z = -85/6$$

subproblema IV

$$x_1 = 5/6; x_2 = 2; x_3 = 11/6; x_4 = 0$$

$$Z = -73/6$$

Esquema da solução:



Passo iii: Os subproblemas III e IV não são sondados.

Teste ótimo: Fazer a terceira iteração:

Terceira iteração:

Passo i: Criaremos mais dois subproblemas (V e VI) a partir do subproblema III com as seguintes restrições adicionais; $x_1 \leq 0$ e $x_1 \geq 1$ respectivamente.

Passo ii: Resolveremos os subproblemas adicionais (V e VI) utilizando o MINOS.

solução:

subproblema V.

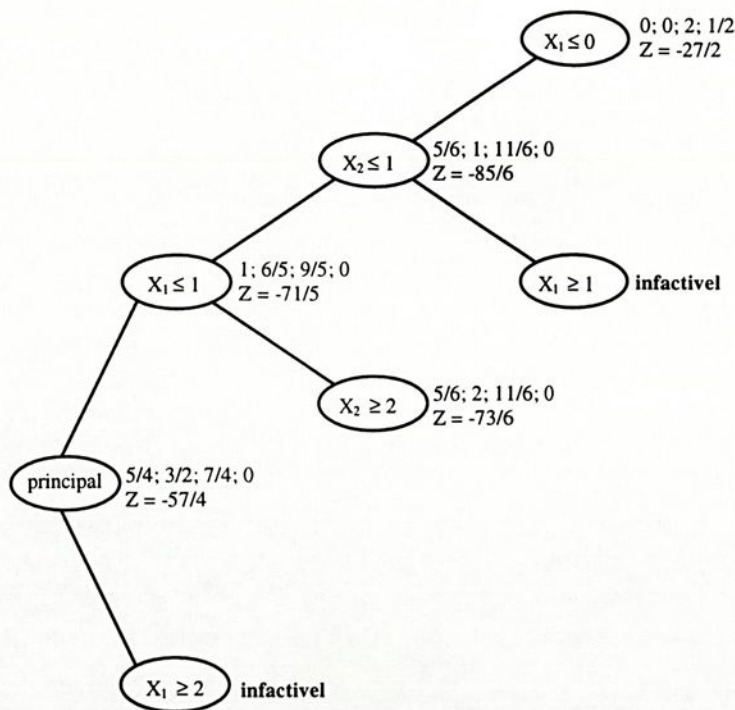
$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 1/2$$

$$Z = -27/2$$

subproblema VI

infactível

Esquema da solução:



Passo iii: O subproblema VI é sondado pelo teste 2.

Teste ótimo: Fazer a quarta iteração:

Quarta iteração:

Passo i: Criaremos mais dois subproblemas (VII e VIII) a partir do subproblema V com as seguintes restrições adicionais; $x_4 \leq 0$ e $x_1 \geq 1$ respectivamente.

Passo ii: Resolveremos os subproblemas adicionais (VII e VIII) utilizando o MINOS.

solução:

subproblema VII

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 3/2; x_4 = 0$$

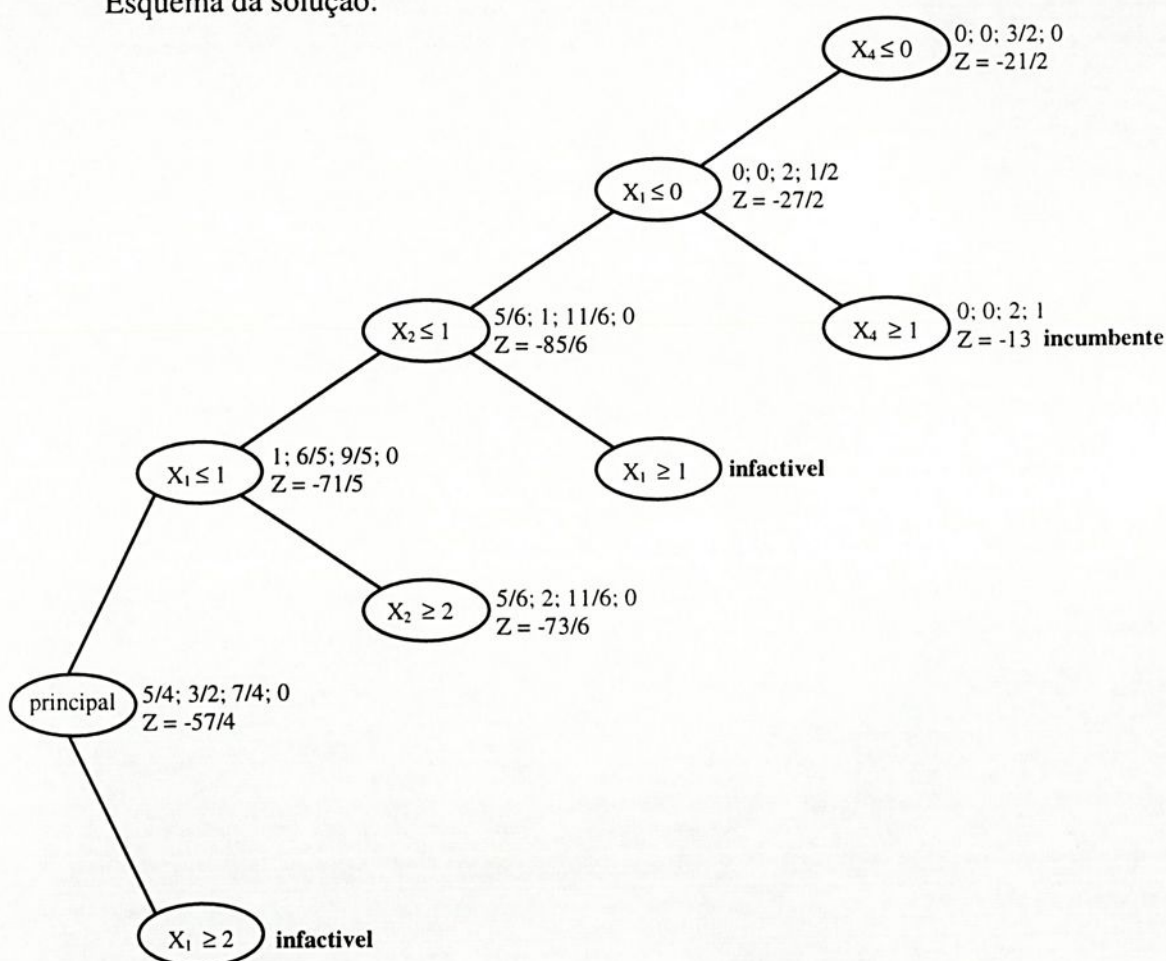
$$Z = -21/2$$

subproblema VIII

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 2; x_4 = 1$$

$$Z = -13$$

Esquema da solução:



Passo iii: O subproblema VII é sondado pelo teste 1 e o subproblema VIII pelo teste 3.

Passo ótimo: A solução incumbente corrente é ótima.

Apêndice C

Dados dos Sistemas Testados

C.1 Sistema de 03 Barras.

Níveis de Geração e Carga

Barra	Cap. de Geração	Carga (MW)
1	80.0	0.0
2	0.0	60.0
3	0.0	20.0

Características das Linhas

Nº	Linha	Custo	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)
1	1-2	3.0	3.0	35.0
2	1-3	2.0	2.0	40.0
3	2-3	2.0	2.0	40.0

C.2 Sistema de 06 Barras

Níveis de Geração e Carga

Barra	Cap. de Geração	Ger. Atual	Carga (MW)
1	150.0	50.0	80.0
2	0.0	0.0	240.0
3	360.0	165.0	40.0
4	0.0	0.0	160.0
5	0.0	0.0	240.0
6	600.0	545.0	0.0

Características das Linhas

Nº	Linha	Custo	Reatância(ohm)	Capacidade (MW)
1	1-2	40.0	0.40	100.0
2	1-3	38.0	0.38	100.0
3	1-4	60.0	0.60	80.0
4	1-5	20.0	0.20	100.0
5	1-6	68.0	0.68	70.0
6	2-3	20.0	0.20	100.0
7	2-4	40.0	0.40	100.0
8	2-5	31.0	0.31	100.0
9	2-6	30.0	0.30	100.0
10	3-4	59.0	0.59	82.0
11	3-5	20.0	0.20	100.0
12	3-6	48.0	0.48	100.0
13	4-5	63.0	0.63	75.0
14	4-6	30.0	0.30	100.0
15	5-6	61.0	0.61	78.0

C.3 Sistema de 46 Barras

Níveis de Geração e Carga

Barra	Cap. de geração	Ger. Atual	Carga (MW)
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	443.1
3	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	300.7
5	0.0	0.0	238.0
6	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	72.2
9	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0
11	0.0	0.0	0.0
12	0.0	0.0	511.9
13	0.0	0.0	185.8
14	1257.0	944.0	0.0
15	0.0	0.0	0.0
16	2000.0	1366.0	0.0
17	1050.0	1000.0	0.0
18	0.0	0.0	0.0
19	1670.0	733.0	0.0
20	0.0	0.0	1091.2
21	0.0	0.0	0.0
22	0.0	0.0	81.9
23	0.0	0.0	458.1
24	0.0	0.0	478.2
25	0.0	0.0	0.0
26	0.0	0.0	231.9
27	220.0	54.0	0.0
28	800.0	730.0	0.0
29	0.0	0.0	0.0
30	0.0	0.0	0.0
31	700.0	310.0	0.0
32	500.0	450.0	0.0
33	0.0	0.0	229.1
34	748.0	221.0	0.0
35	0.0	0.0	216.0

Níveis de Geração e Carga (continuação)

Barra	Cap. de geração	Ger. Atual	Carga (MW)
36	0.0	0.0	90.1
37	300.0	212.0	0.0
38	0.0	0.0	216.0
39	600.0	221.0	0.0
40	0.0	0.0	262.1
42	0.0	0.0	1607.9
43	0.0	0.0	0.0
44	0.0	0.0	79.1
45	0.0	0.0	86.7
46	700.0	599.0	0.0

Características das Linhas

Nº	Linha	Linhas existentes	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)	Custo 10 ³ dol.
1	01-07	1	0.0616	270	4349
2	01-02	2	0.1065	270	7076
3	04-09	1	0.0924	270	6217
4	05-09	1	0.1173	270	7732
5	05-08	1	0.1132	270	7480
6	07-08	1	0.1023	270	6823
7	04-05	2	0.0566	270	4046
8	02-05	2	0.0324	270	2581
9	08-13	1	0.1348	270	2581
10	09-14	2	0.1756	220	11267
11	12-14	2	0.0740	270	5106
12	14-18	2	0.1514	240	9803
13	13-18	1	0.1805	220	11570
14	13-20	1	0.1073	270	7126
15	18-20	1	0.1997	200	12732
16	19-21	1	0.0278	1500	32632
17	16-17	1	0.0078	2000	10505
18	17-19	1	0.0061	2000	8715
19	14-26	1	0.1614	220	10409
20	14-22	1	0.0840	270	5712
21	22-26	1	0.0790	270	5409
22	20-23	2	0.0932	270	6268
23	23-24	2	0.0774	270	5308

Características das Linhas (continuação)

Nº	Linha	Linhas existentes	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)	Custo 10 ³ dol.
24	26-27	2	0.0832	270	5662
25	24-34	1	0.1647	220	10611
26	24-33	1	0.1448	240	9399
27	33-34	1	0.1265	270	8288
28	27-36	1	0.0915	270	6167
29	27-38	2	0.2080	200	13237
30	36-37	1	0.1057	270	7025
31	34-35	2	0.0491	270	3591
32	35-38	1	0.1980	200	12631
33	37-39	1	0.0283	270	2329
34	37-40	1	0.1281	270	8389
35	37-42	1	0.2105	200	13388
36	39-42	3	0.2030	200	12934
37	40-42	1	0.0932	270	6268
38	38-42	3	0.0907	270	6116
39	32-43	1	0.0309	1400	35957
40	42-44	1	0.1206	270	7934
41	44-45	1	0.1864	200	11924
42	19-32	1	0.0195	1800	23423
43	46-19	1	0.0222	1800	26365
44	46-16	1	0.0203	1800	24319
45	18-19	1	0.0125	600	8178
46	20-21	1	0.0125	600	8178
47	42-43	1	0.0125	600	8178
48	02-04	0	0.0882	270	5965
49	14-15	0	0.0374	270	2884
50	46-10	0	0.0081	2000	10889
51	04-11	0	0.2246	240	14247
52	05-11	0	0.0915	270	6167
53	46-06	0	0.0128	2000	16005
54	46-03	0	0.0203	1800	24319
55	16-28	0	0.0222	1800	26365
56	16-32	0	0.0311	1400	36213
57	17-32	0	0.0232	1700	27516
58	19-25	0	0.0325	1400	37748
59	21-25	0	0.0174	2000	21121
60	25-32	0	0.0319	1400	37109
61	31-32	0	0.0046	2000	7052
62	28-31	0	0.0053	2000	7819

Características das Linhas (continuação)

Nº	Linha	Linhas existentes	Reatância (Ohm)	Capacidade (MW)	Custo 10 ³ dol.
63	28-30	0	0.0058	2000	8331
64	27-29	0	0.0998	270	6672
65	26-29	0	0.0541	270	3894
66	28-41	0	0.0339	1300	39283
67	28-43	0	0.0406	1200	46701
68	31-41	0	0.0278	1500	32632
69	32-41	0	0.0309	1400	35957
70	41-43	0	0.0139	2000	17284
71	40-45	0	0.2205	180	13994
72	15-16	0	0.0125	600	8178
73	46-11	0	0.0125	600	8178
74	24-25	0	0.0125	600	8178
75	29-30	0	0.0125	600	8178
76	40-41	0	0.0125	600	8178
77	02-03	0	0.0125	600	8178
78	05-06	0	0.0125	600	8178
79	09-10	0	0.0125	600	8178

Apêndice D

Artigos Publicados



D.1 Artigo 1

**Planejamento de Sistema de
Transmissão Usando Técnicas de
Decomposição Matemática e de
*Branch-and-Bound***

R. Romero

E. Belati

XII Congresso Chileno de
Engenharia Elétrica

**Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de La Frontera
Temuco - CHILE**

PLANIFICACIÓN DE SISTEMAS DE TRANSMISIÓN USANDO TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN MATEMÁTICA Y DE BRANCH AND BOUND

R. Romero

E. Belati

Departamento de Engenharia Elétrica

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS-UNESP

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Av. Brasil 56 - Centro - CP 15385-000

Ilha Solteira - SP - Brasil

RESUMEN

Se presenta un método de descomposición matemática jerarquizada para resolver el problema de la planificación de sistemas de transmisión. La metodología usa la descomposición matemática de Benders y un algoritmo de Branch and Bound para resolver el subproblema de inversión que es un problema entero. Así el aporte significativo del trabajo es mostrar el desempeño del algoritmo de B & B usado en el problema de la planificación de sistemas de transmisión. Se presenta resultados con la metodología propuesta.

ABSTRACT

This paper describes a hierarchical decomposition approach for optimal expansion planning of transmission networks. The methodology uses Bender's mathematical decomposition and a branch and bound algorithm to solve an investment problem which is an integer problem. This work shows the branch and bound performance applied specifically to transmission system planning. Test results are presented.

Keywords: planificación, descomposición matemática, algoritmo branch and bound.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo analiza la planificación estática de sistemas de transmisión. En este tipo de planificación, conocida una configuración inicial y los datos de generación y carga de un horizonte de planificación (además de otros datos como los límites de operación, costos y restricciones de inversión), se desea encontrar el plan de expansión óptima del sistema con una inversión mínima, o sea determinar donde y que tipos de circuitos deben instalarse en el sistema. Lógicamente este es un subproblema de un problema más general llamado de planificación dinámica donde adicionalmente se desea saber cuando instalar estos nuevos circuitos o de un nuevo enfoque considerando un sistema de acceso abierto para la transmisión [9]. Además, estos trabajos preliminares que analiza simplemente la viabilidad del sistema en términos de balance de potencia activa, después debe ser analizado para resolver el problema de balance de potencia reactiva colocando fuentes reactivas en el sistema (planificación de reactivos en sistemas de transmisión). Finalmente, las propuestas de expansión deben ser analizadas usando técnicas de análisis exactas de sistemas

eléctricos como flujo de carga AC, corto circuito, estabilidad transitoria, etc.

En la planificación de sistemas de transmisión son usados 3 modelos: modelo de transportes, modelo híbrido y modelo DC. El modelo DC es el más adecuado para representar el problema de la planificación. Este modelo matemático tiene la estructura típica de un problema de programación no lineal entera mixta (PNLIM) de difícil resolución especialmente para sistemas reales. Los especialistas usan 3 grandes familias de algoritmos para resolver este problema: algoritmos heurísticos básicamente de tipo constructivo, algoritmos de optimización exacta y los nuevos algoritmos combinatoriales. Los algoritmos heurísticos encuentran soluciones de buena calidad con esfuerzos computacionales pequeños mas raramente encuentran la solución óptima de sistemas reales; sin embargo estos métodos todavía son bastante usados por las empresas eléctricas. Los métodos heurísticos más conocidos fueron presentados en [1,4,6,7]. Los métodos de optimización exacta usan técnicas de descomposición matemática y generalmente encuentran las soluciones óptimas de sistemas de pequeño y de medio porte mas tienen problemas de convergencia y de esfuerzo computacional en el caso de sistemas de grande porte. Algoritmos de este tipo fueron presentados en [2,5,8]. Por otro lado, los algoritmos de optimización combinatorial como recocido simulado, algoritmos genéticos, búsqueda tabú, etc. representan líneas de investigación interesantes. Estos algoritmos generalmente encuentran soluciones sub-óptimas de problemas de grande porte mas con un esfuerzo computacional relativamente elevado. Este trabajo retoma la línea de investigación de los métodos de optimización exacta como los presentados en [2,5,8]. Así, en este trabajo se mantiene las principales características de los trabajos anteriores mas se sugiere usar un algoritmo de B & B para resolver el subproblema de inversión.

En este trabajo se presenta una propuesta óptima de la planificación de la transmisión. La mayor dificultad para encontrar la solución óptima global de este problema es que su formulación matemática es un problema no convexo y en ese caso solamente se garantiza encontrar un óptimo local que es lo que sucede con frecuencia cuando se usa la descomposición de Benders para resolver directamente el modelo DC. La metodología jerarquizada es una forma ingeniosa de evitar los óptimos locales como fue discutida en [2]. Además, esta metodología disminuye el esfuerzo computacional porque usa un algoritmo de programación

lineal entera (PLI) solamente en la última fase y adicionalmente se puede disminuir el número de cortes de Benders usando características especiales del problema de la planificación. Se presenta una descomposición jerarquizada usando relajación y 2 modelos matemáticos para la red eléctrica: modelo de transportes relajando la integralidad de las variables de inversión en la fase inicial y modelo DC en la fase final. Así, solamente en la fase final es usado un algoritmo de PLI para resolver el subproblema de inversión y en este caso es usado un algoritmo de B & B.

2. LA TÉCNICA JERARQUIZADA

En la fase inicial de la metodología jerarquizada se resuelve un problema relajado, o sea se usa un modelo relajado que es el modelo de transportes y se relaja la integralidad de las variables de inversión que son enteras mas son tratadas como continuas. Las ventajas de implementar esta parte son las siguientes: 1) necesita de un esfuerzo computacional pequeño porque ambos subproblemas (inversión y operación) son resueltos usando algoritmos de programación lineal (PL), 2) la solución parcial es óptima porque ese problema relajado es convexo y, 3) toda la información encontrada, especialmente los cortes de Benders pueden ser usados como restricciones válidas (y de grande calidad) para resolver el problema con el modelo adecuado. En la fase final se resuelve el modelo DC considerando las variables de inversión como enteras o discretas. En esta fase final el subproblema de operación se resuelve con un algoritmo de PL y el subproblema de inversión con un algoritmo B & B. Obviamente, el mayor esfuerzo computacional del algoritmo corresponde al uso del algoritmo B & B en forma iterativa en esta fase final.

2.1 La Descomposición de Benders

En cada nivel del algoritmo jerarquizado es usada la descomposición de Benders [11] para separar el problema de la planificación en 2 subproblemas: un subproblema de inversión llamado de maestro y un subproblema de operación llamado esclavo como es mostrado en la figura 2.1. Durante el proceso de resolución iterativa los subproblemas intercambian de información: el maestro informa al esclavo sobre las decisiones de inversión (generalmente un aumento en la capacidad de transmisión) y el esclavo informa al maestro sobre las necesidades de transmisión a través de los cortes de Benders. Así el maestro controla los aspectos económicos de la planificación y el esclavo representa las ecuaciones de flujo de carga con diferentes niveles de detalle de acuerdo al modelo usado. El esclavo, usando la alternativa de inversión propuesta por el maestro, minimiza el uso de los generadores artificiales para satisfacer las necesidades de carga y sin violar las restricciones de operación. Si el proceso de resolución llega a un momento en que la propuesta de inversión del maestro permite una operación del esclavo sin violar las restricciones y sin usar los generadores artificiales entonces fue encontrada la solución óptima para ese nivel del proceso jerarquizado y se puede pasar a la próxima fase. En caso contrario se debe enviar al maestro información acerca de las necesidades de inversión a través de los cortes de Benders como es

mostrado en la figura 2.1(a). Estos cortes (restricciones) son incorporados al maestro como restricciones adicionales y básicamente informan al maestro sobre las necesidades adicionales en capacidad de transmisión.

2.2 Modelo Reducido de Operación

En el subproblema de inversión existen 2 tipos de restricciones (figura 2.1(b)): restricciones típicas de inversión como el número máximo de circuitos que se debe adicionar en cada ramo y, restricciones de operación (representadas en función de las variables de inversión) que generalmente, en la implementación práctica, es un conjunto reducido de restricciones que representan implícitamente las restricciones críticas de operación. Esta representación equivalente de las restricciones de operación está constituido fundamentalmente por los cortes de Benders que son generadas durante el proceso de resolución mas también pueden ser incorporados en este conjunto otros tipos de información sobre la operación del sistema y después de transformarlas en restricciones en función de las variables de inversión. Así es posible encontrar restricciones usando reglas como: *la adición de un circuito necesita de la adición simultánea de otro circuito para formar un camino conexo*. Es importante observar que cuanto más restricciones de calidad sobre la operación son incorporados al maestro, mejores serán las propuestas de inversión del maestro y la convergencia del algoritmo será más rápida.

El principal problema encontrado en la práctica con el uso de la descomposición de Benders en la planificación de la transmisión está relacionado con la no convexidad del modelo DC. Una forma práctica de contornar este problema es justamente usando una metodología jerarquizada.

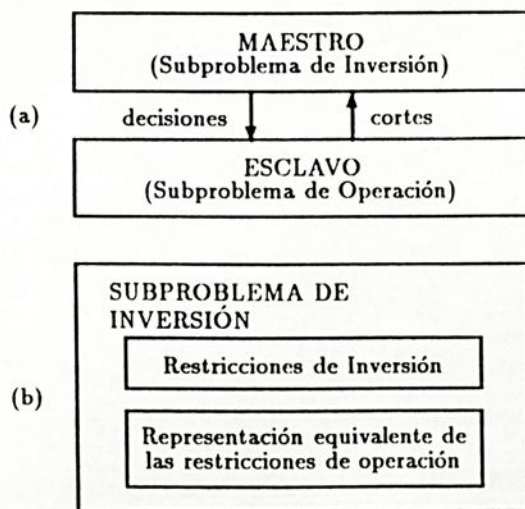


Figura 2.1: La Descomposición del Problema.

2.3 Proceso de Jerarquización

En experiencias anteriores usando jerarquización de 2 y 3 niveles ya fue verificado que la metodología de jerarquización es la manera más simple y efectiva de evitar óptimos locales [2,8]. Sin embargo, el aspecto más importante de jerarquización es la disminución del esfuerzo computacio-

nal usando un algoritmo de PLI solamente en la fase final y en la forma eficiente de contornar el problema de red no conexa.

En la fase inicial es usado el modelo de transportes que solamente lleva en cuenta la primera ley de Kirchhoff y los límites de operación de los circuitos (es relajada la segunda ley de Kirchhoff). Una ventaja del modelo de transportes es que puede trabajar de manera eficiente con sistemas desconexos sin problemas y esta característica es típica de planificación de sistemas de transmisión que tienen muchas barras aisladas de la configuración base. Por otro lado, las técnicas que resuelven el modelo DC normalmente necesita de usar la llamada red ficticia para poder resolver un sistema no conexo. En la fase final se resuelve el modelo DC que lleva en cuenta las 2 leyes de Kirchhoff y los límites de operación mas en esta fase ya fue adicionado un conjunto de circuitos tornando el sistema menos desconexo. Así el mayor tiempo en esfuerzo computacional es realizado resolviendo en forma iterativa el subproblema de inversión de la fase final usando un algoritmo de PLI. El algoritmo jerarquizado de 2 etapas es el siguiente:

Fase I: Modelo de Transportes y Adiciones Continuas

En esta fase se resuelve el problema de la planificación usando el modelo de transportes y considerando las variables de inversión como continuas así se relaja el modelo y el tipo de variable (variables enteras o discretas son consideradas continuas). Los subproblemas de inversión y de operación se resuelven alternativamente hasta encontrar el óptimo global de este problema relajado. Ambos subproblemas se pueden resolver usando algoritmos eficientes de PL. En este trabajo fue usado el software MINOS. La solución óptima de este problema relajado y principalmente los cortes de Benders encontrados durante esta fase son utilizados (incorporados al maestro) en el subproblema de inversión de la fase final.

Fase II: Modelo DC y Adiciones Enteras

En esta fase se resuelve el modelo DC y considerando las variables de inversión enteras (o discretas). Así, el subproblema de operación es un PL y se resuelve usando MINOS mas el subproblema de inversión es un PLI. En realidad el subproblema de inversión es un problema con una variable continua y todas las otras enteras. Por lo tanto, este subproblema se resuelve usando un algoritmo de B & B que, por lo menos teóricamente, debería ser el más adecuado.

3. ALGORITMO DE BRANCH AND BOUND

En la fase final de la metodología propuesta el maestro es un PLI que se debe resolver en forma iterativa. En [3] este problema fue resuelto usando un algoritmo de enumeración implícita de Balas especializado transformando las variables enteras en binarias en forma eficiente. En [8] este problema fue resuelto usando el software CPLEX mas en este caso los autores no esperan que CPLEX encuentre la solución óptima de cada subproblema debido al esfuerzo computacional necesario. En este trabajo se analiza la posibilidad de resolver el maestro usando un algoritmo de B & B especializado.

Al implementar un algoritmo B & B especializado se puede usar criterios generales usados en algoritmos de B & B y/o se puede usar las características específicas del problema. La eficiencia de un algoritmo B & B está determinado por su capacidad de eliminar nodos del árbol de B & B de manera eficiente. Fue elaborado un algoritmo de B & B que usa MINOS para resolver el PL en cada nodo. Se comenta brevemente las características principales del algoritmo de B & B elaborado.

Es fácil encontrar un límite superior (LS) para el PLI en cada iteración y para el problema global. Se puede usar un algoritmo heurístico constructivo rápido para encontrar un LS del problema. Mas cada vez que se resuelve el maestro se puede almacenar las soluciones enteras que se van generando. Muchas de estas soluciones enteras pueden ser LS para el maestro en la siguiente iteración; así es posible encontrar buenos LS sin costo computacional.

Para ramificar el árbol, o sea para decidir que variable debe ser escogida para separación se puede escoger las variables más atractivas siguiendo la siguiente prioridad: 1) escoger una variable que forma parte del óptimo del maestro de la iteración anterior, 2) escoger las variables de mayor costo (pues ya existen buenas limitantes y la idea es eliminar nodos) y, 3) escoger variables que tiene una parte fraccional más cercana a la unidad.

Se puede encontrar todas las soluciones óptimas alternativas del maestro y esta implementación tiene 2 ventajas importantes: 1) es posible generar varios cortes de Benders resolviendo cada vez el maestro durante el proceso, y 2) si el problema tiene soluciones óptimas globales alternativas, esta metodología encuentra todos esos óptimos globales (ver ejemplo).

Un aspecto más importante todavía es implementar un algoritmo de PL que use el método Dual Simplex Canalizado que puede ser desarrollado separado o incorporado al MINOS. La importancia de este algoritmo es que puede encontrar las soluciones de los nodos de una forma muy rápida usando la base óptima del nodo inicial. Actualmente estamos desarrollando este algoritmo.

4. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

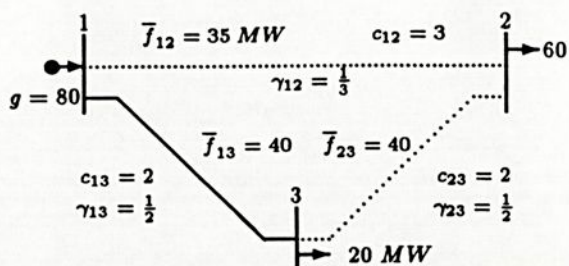
Se presenta resultados ilustrativos usando el algoritmo propuesto.

4.1 Sistema de 3 Barras

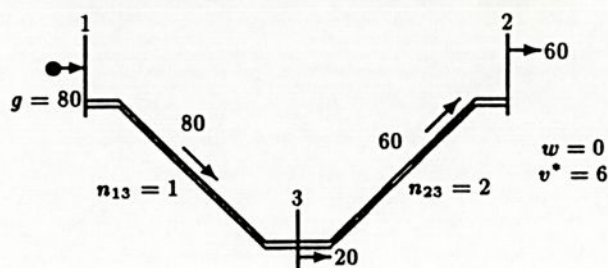
Los datos de este sistema aparecen en la figura 4.1. Los resultados parciales son mostradas en la tabla I donde puede observarse que es generado solamente 2 cortes de Benders en la fase I y el algoritmo de B & B es accionada una única vez. Este ejemplo simple tiene 2 soluciones óptimas globales que son mostradas en la figura 4.1. En la figura 4.2 es mostrado el árbol de B & B que fue generada en la única vez que este algoritmo fue accionado.

4.2 Sistema de 6 Barras de Garver

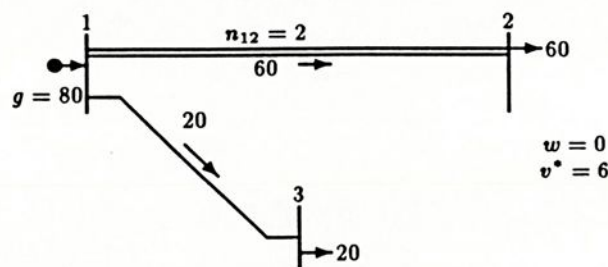
Los datos de este sistema, bastante usado por los especialistas, están en [1]. La topología inicial es mostrada en la figura 4.3 y los datos adicionales son: $\epsilon_w = 1MW$ y $\alpha = 10$. La topología óptima mostrada en la figura 4.4



(a): Sistema Inicial de 3 Barras



(b): Primera Solución Óptima Global



(c): Segunda Solución Óptima Global

Figura 4.1: Sistema de 3 barras

corresponde al caso en que se permite reprogramación de la generación, o sea simplemente se especifica los límites máximos de generación y el punto de generación en cada barra de generación es determinado por el proceso de optimización. Fueron adicionados 4 circuitos: $n_{35} = 1$ y $n_{46} = 3$ con $v = 110$ y los resultados parciales del proceso son mostrados en la tabla II. Es necesario mencionar que esta solución óptima no es encontrada cuando se usa un algoritmo de Benders de fase única. En este caso se encuentra un óptimo local con la adición de 5 circuitos y una inversión de $v = 130$.

En este caso el algoritmo B & B fue usado una única vez

Tabla I: Evolución del Sistema de 3 Barras

Fase	Iter.	Circuitos Adicionados			Inv. Costo	Oper. (corte)
		n_{12}	n_{13}	n_{23}		
I	-	-	-	-	-	60
I	1	-	-	1.5	3	40
I	2	1.143	-	0.5	4.429	0
II	1	2	-	-	6	0
II	1	-	1	2	6	0

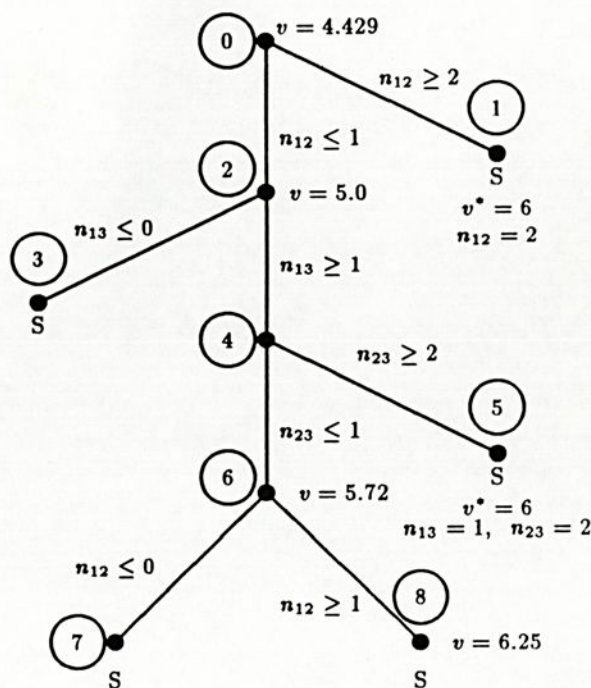


Figura 4.2: Árbol de Branch and Bound

encontrando 4 soluciones óptimas alternativas y realizando 36 llamadas al algoritmo de PL. Una de las soluciones óptimas alternativas es óptimo global del sistema de 6 barras como es mostrado en la tabla II.

Tabla II: Evolución del Sistema de Garver

Fase	Iter.	Circuitos Adicionados				Inv. Costo	Oper. (corte)
		n_{23}	n_{26}	n_{35}	n_{46}		
I	-	-	-	-	-	-	370
I	1	3.7	-	-	-	74	250
I	2	1.2	2.5	-	-	99	40
I	3	0.8	2.5	0.4	-	99	0
II	1	-	1	1	2	110	5,7
II	1	-	2	1	1	110	24,8
II	1	-	3	1	-	110	17,8
II	1	-	-	1	3	110	0

CONCLUSIONES

La metodología presentada se mostró eficiente para resolver problemas de pequeño porte. El algoritmo de B & B trabaja en forma eficiente y tiene capacidad de encontrar óptimos alternativos del subproblema de inversión. Sin embargo, el esfuerzo necesario para resolver sistemas de grande porte todavía es tema de investigación más profunda donde debe ser optimizado el algoritmo de B & B y analizar si la incorporación de un nivel adicional del proceso jerarquizado incorporando el modelo híbrido [6] produce un algoritmo más eficiente para sistemas de grande porte.

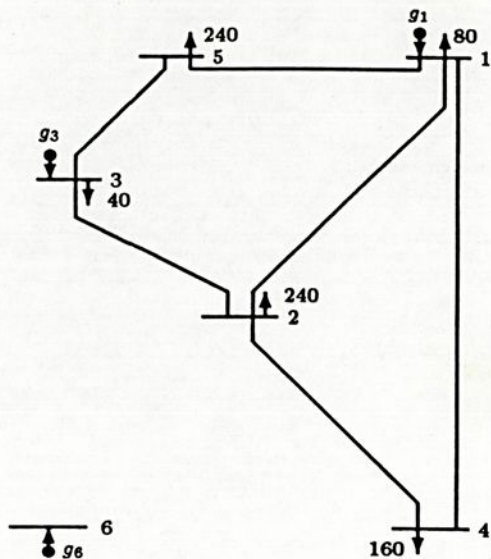


Figura 4.3: Red Inicial de Garver

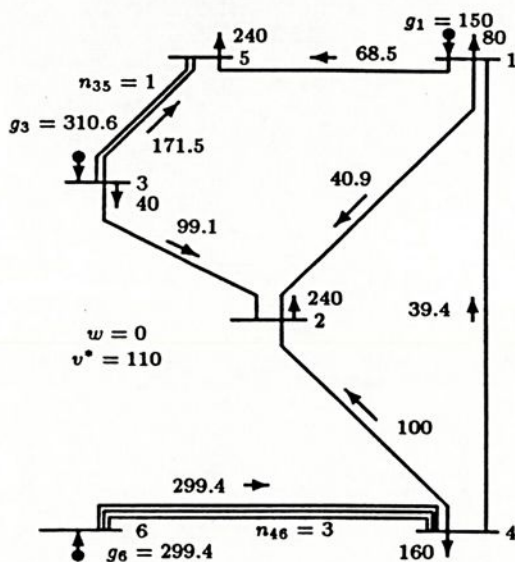


Figura 4.4. Solución Óptima para el Sistema de Garver

REFERENCIAS

- [1] Garver L.L.: "Transmission Network Estimation Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-89, pp. 1688-1697, Sept/Oct 1970.
- [2] Romero R., Monticelli A.: "A Hierarchical Decomposition Approach for Transmission Network Expansion Planning", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 1, pp. 373-380, February 1994.
- [3] Romero R., Monticelli A.: "A Zero-One Implicit Enumeration Method for Optimizing Investments in Transmission Expansion Planning", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 3, pp. 1385-1391, August 1994.
- [4] Monticelli A., Santos Jr. A., Pereira M.V., Cunha S.H., Parker B.J., Praça J.C.: "Interactive Transmission Network Planning Using a Least-effort Criterion", IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-101, No. 10, October 1982.

[5] Granville S., Pereira M.V.: "Analysis of the Linearized Power Flow Model in Benders Decomposition", EPRI-Report RP 2473-6, Stanford University, February 1985.

[6] Villanasa R., Garver L.L., Salon S.J.: "Transmission Network Planning Using Linear Programming", IEEE Trans. Power App. Systems, Vol. PAS-104, No. 2, February 1985.

[7] Pereira M.V., Pinto L.M., Oliveira G.C., Cunha S.H.: "Composite Generation-Transmission Expansion Planning", EPRI-Research Project 2473-9, Stanford University, 1987.

[8] Oliveira G.C., Costa A.P.C., Binato S.: "Large Scale Transmission Network Planning Using Optimization and Heuristic Techniques", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No. 4, pp 1828-1834, November 1995.

[9] Rudnick H., Palma R., Cura E., Silva C.: "Economically Adapted Transmission Systems in Open Access Schemes - Application of Genetic Algorithms", IEEE PES Summer Meeting, July 1995.

[10] Romero R., Gallego R.A., Monticelli A.: "Transmission System Expansion Planning by Simulated Annealing", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, No. 1, pp. 364-369, February 1996.

[11] Geoffrion A.M.: "Generalized Benders Decomposition", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 10, 1972.

APÉNDICE: LA DESCOMPOSICIÓN DEL PROBLEMA

Es mostrada, en forma resumida, las formulaciones matemáticas y otros resultados relevantes de la descomposición de Benders.

Formulación del Problema

El problema de la planificación de la transmisión puede ser formulado usando los siguientes modelos [5]:

Formulação I: Modelo de Transportes

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c'_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (1.1)$$

s.a.

$$S f + g + r = d \quad (1.2)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (1.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (1.4)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (1.5)$$

Formulação II: Modelo DC

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c'_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (2.1)$$

s. a.

$$S f + g + r = d \quad (2.2)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (2.3)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (2.4)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (2.5)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (2.6)$$

En (1) y (2) y en el resto del artículo son usadas las siguientes notaciones: $x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}$ son los valores discretos de las susceptancias adicionadas en el camino ij cuando se adiciona n_{ij} circuitos cada uno con susceptancia igual a $\tilde{\gamma}_{ij}$, $c'_{ij} = c_{ij}/\tilde{\gamma}_{ij}$ donde c_{ij} es el costo de un circuito en ij , S es la matriz de incidencia nodo-ramo, f es el vector de flujo de potencia activa, g es el vector de generación activa, r es el vector de generadores artificiales, d es el vector de cargas, los θ_i son los ángulos de tensiones de barras y Ω es el conjunto de todos los circuitos candidatos a adición.

La formulación I es un problema lineal entero mixto (PLIM) mas si es relajado el carácter discreto de x_{ij} se transforma en un PL. La formulación II es un problema no lineal entero mixto (PNLIM). En ambas formulaciones puede eliminarse n_{ij} o x_{ij} usando la relación $x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}$ y, en ambas aparecen variables de operación y de inversión que deben ser desacopladas usando la descomposición de Benders.

Descomposición del Problema

Usando la descomposición de Benders [5] es posible separar las 2 formulaciones en un subproblema de operación y un problema de inversión [2,5]:

Subproblema de Inversión (Maestro)

Para las 2 formulaciones vale la siguiente relación:

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c'_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (4.1)$$

s. a.

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma^k_{ij} (x_{ij} - x^k_{ij}) \leq \beta; \quad \beta \geq 0 \quad (4.2)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (4.3)$$

Subproblema de Operación (Esclavo):

Para cada formulación tenemos lo siguiente:

• Modelo de Transportes (MT):

$$\text{Min } w^k = \alpha e^t r \quad (5.1)$$

s. a.

$$S f + g + r = d \quad (5.2)$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma^o_{ij} + x^k_{ij}) \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (5.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (5.4)$$

• Modelo DC:

$$\text{Min } w^k = \alpha e^t r \quad (6.1)$$

s. a.

$$B \theta + g + r = d \quad (6.2)$$

$$|(\theta_i - \theta_j)| \leq \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (6.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (6.4)$$

En el maestro, w^k es el óptimo del esclavo en la iteración k y σ^k_{ij} es la sensibilidad del valor óptimo w^k con respecto a x^k_{ij} . Para el modelo MT, σ^k_{ij} es dado por [2]:

$$\sigma^k_{ij} = -\pi^k_{ij} \bar{\phi}_{ij}; \quad \pi^k_{ij} \geq 0; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (7)$$

π^k_{ij} son los multiplicadores de Lagrange relacionados con las restricciones (5.3) y β es una variable continua que aparece durante la descomposición [5].

Para el modelo DC, σ^k_{ij} es dado por [2,5]:

$$\sigma^k_{ij} = -(\pi^k_i - \pi^k_j)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (8)$$

y los π^k_i son los multiplicadores de Lagrange relacionados con las restricciones (6.2).

Las restricciones (4.2), los cortes de Benders, informan al maestro de las necesidades de inversión para transformar el esclavo en factible, o sea sin corte de carga. En cada iteración es adicionado un corte de Benders (o varios) al maestro forzando una inversión más eficiente hasta que el esclavo no tenga corte de carga, $w = 0$. Para el modelo MT es fácil y rápida la implementación de la descomposición de Benders porque las variables de inversión y de operación son linealmente separables y es posible encontrar el óptimo global de este problema convexo. Para el modelo DC las variables de operación e inversión no son linealmente separables debido a términos de tipo $x_{ij}(\theta_i - \theta_j)$ en la restricción (2.3).

Algoritmo Básico:

El siguiente algoritmo es un resumen de la metodología jerarquizada:

1. Iniciar con las variables de inversión $x_{ij}=0$ y hacer $phase = 1$.
2. Resolver el subproblema de operación para la inversión actual x^k_{ij} :
 - Si el corte de carga es menor que ϵ_w , hacer $phase = phase + 1$ e ir al paso 4;
 - En otro caso adicionar un nuevo corte(s) de Benders al maestro.
3. Resolver el maestro y determinar la nueva propuesta de inversión después de adicionar las restricciones del paso 2 y/o considerando las variables enteras.
4. Si $phase \leq 2$, ir al paso 3; en otro caso, pare.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo tiene el apoyo financiero de FAPESP a través de los proyectos de investigación 96/01104-7 y 95/2082-4.

RESEÑAS BIOGRÁFICAS

RUBÉN ROMERO

Bachiller e Ingeniero Electricista, Universidad Nacional de Ingeniería, UNI, Lima-Perú en 1978 y 1984, Magister y Doctor en Ingeniería Eléctrica, UNICAMP, Campinas-Brasil en 1990 y 1993. Profesor Asistente Doctor del Departamento de Engenharia Elétrica, Campus de Engenharia de Ilha Solteira de la UNESP-Brasil.

E. BELATI

Engenheiro Elétrico, Escola de Engenharia de Lins, SP-Brasil, 1994. Alumno de Magister en el DEF-FEIS, UNESP-Brasil.

D.2 Artigo 2

**Algoritmo de
Branch-and-Bound
Usado no Planejamento
de Sistemas de Transmissão**

R. Romero E. Belati A. Monticelli

**XII Congresso Brasileiro
de Automação
(CBA)**

Uberlândia-MG



ALGORITMO DE BRANCH AND BOUND USADO NO PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO

Rubén Romero - Edmarcio Belati
DEE-FEIS-UNESP-Ilha Solteira-Brasil
C.P. 31, 15385-000-SP
ruben@dee.feis.unesp.br edmarcio@dee.feis.unesp.br

Alcir Monticelli
UNICAMP-Campinas-Brasil
C.P. 6101, 13081-970-SP
alcir@dsee.fee.unicamp.br

Resumo— Este artigo apresenta um algoritmo de Branch and Bound (B & B) usado no planejamento de sistemas de transmissão. O problema de planejamento usa o modelo DC e a decomposição de Benders para separar o problema em dois subproblemas: um subproblema de operação e um subproblema de investimento. O subproblema de operação é resolvido usando um algoritmo de programação linear (PL) e o subproblema de investimento é resolvido usando um algoritmo de B & B. Portanto, a principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo de B & B especializado para resolver em forma eficiente o subproblema de investimento. A metodologia geral é a técnica de decomposição de Benders hierarquizada.

Abstract— This paper presents a Branch-and-Bound (B & B) algorithm applied to transmission systems expansion planning. The planning problem uses a DC power flow model and is solved by Benders decomposition which decomposes the original problem into two subproblems: an operation subproblem and an investment subproblem. The operation subproblem is solved by specialized LP; and the investment subproblem is solved by B & B. The main contribution of this paper concerns the proposed B & B algorithm specifically designed for the investment subproblem. The optimization framework is that of the hierarchical Benders decomposition.

Key Words— Benders decomposition; transmission planning; Branch and Bound.

1 Introdução

Este artigo estuda o planejamento *estático* de sistemas de transmissão. Neste tipo de planejamento, dada uma configuração inicial e os dados de geração e demanda do horizonte de planejamento, tenta-se determinar o plano de expansão com um custo mínimo, isto é, deve-se determinar *onde* e *que* tipos de novos equipamentos devem ser instalados. Naturalmente este é um subproblema de um caso mais geral, chamado planejamento dinâmico da expansão onde adicionalmente, deseja-se saber *quando* instalar estes novos equipamentos. Estes resultados preliminares de planejamento depois são analisados e melhorados testando sua performance através de ferramentas de análise mais exatas como fluxo de carga AC, curto circuito e estabilidade transitória.

Este artigo apresenta um algoritmo de B & B para resolver o subproblema mestre do problema de planejamento de sistemas de transmissão quando é usada a metodologia de decomposição de Benders hierarquizada. A decomposição hierarquizada provou ser uma metodologia eficiente para contornar os problemas de não convexidade como foi mostrado por Romero e Monticelli (1994a). A redução do número de cortes de Benders assim como do tempo de computação são aspectos relevantes dos resultados obtidos quando comparados com resultados disponíveis na literatura. A implementação corrente da decomposição hierarquizada utiliza três níveis diferentes de modelamento da rede elétrica: modelo de transportes (MT), mode-

lo híbrido (MH) e modelo DC. Cada nível de representação da rede na verdade é uma *relaxação* do modelo de maior nível. Assim, é obtida uma solução inicial para o modelo mais simples (MT) e assim como o processo evolui passa-se aos modelos mais precisos. Na fase final, usa-se o modelo DC com as variáveis de investimento discretas o que implica na resolução iterativa de um problema de programação linear inteira (PLI). Portanto, para a fase final foi implementado um algoritmo de B & B especializado cujo potencial é avaliado no presente trabalho.

2 A Metodologia Hierarquizada

No estágio inicial do processo de planejamento o algoritmo hierarquizado resolve um problema relaxado para os quais as condições de convexidade são satisfeitas e podem ser obtidas as soluções ótimas. Portanto, as restrições relaxadas são gradualmente reintroduzidas assim como o processo evolui à solução final do problema. Assim, inicialmente é resolvido um problema relaxado onde são relaxadas as restrições que representam a lei de tensões de Kirchhoff (LTK) e a natureza discreta das variáveis de investimento (MT sem a integralidade dos circuitos candidatos a adição). A solução ótima obtida, assim como as outras informações importantes, são reutilizadas para iniciar o processo de solução no segundo nível hierárquico (MH sem a integralidade dos circuitos). No MH os ramos dos circuitos exis-

tentes devem satisfazer as duas leis de Kirchhoff e os ramos que representam novos caminhos devem satisfazer somente a primeira lei de Kirchhoff, isto é, no MH são relaxadas as restrições correspondentes à LVK para os ramos que representam novos caminhos. Finalmente, são restabelecidas a LVK para a rede completa e as restrições de integralidade dos circuitos na fase final de resolução do problema.

2.1 A Decomposição de Benders

Em cada nível do algoritmo hierarquizado é usado a decomposição de Benders para separar o problema de planejamento em dois subproblemas: um subproblema de investimento e um subproblema de operação, Figura 1(a). No processo de resolução os subproblemas trocam informações: o **mestre** informa ao **escravo** acerca das decisões de investimento (incremento na capacidade de transmissão) e o **escravo** informa ao **mestre** acerca das necessidades de transmissão através dos cortes de Benders. O mestre basicamente controla os aspectos econômicos do processo de planejamento; o escravo representa as equações de fluxo de potência com diferentes níveis de detalhe de acordo com o nível corrente de hierarquização. O escravo, com a alternativa de investimento fornecida pelo mestre, minimiza o uso dos geradores fictícios para satisfazer a demanda sem violações das restrições de operação. Se, num estágio do processo de solução, as decisões de investimento são tais que permitem um ponto de operação sem a utilização dos geradores fictícios então foi obtida uma solução do problema nesse nível de hierarquização e o processo entra na seguinte fase. Em outro caso, se não é possível obter um ponto de operação sem recorrer aos geradores fictícios então, deve-se enviar informação acerca das necessidades de investimento ao mestre através dos cortes de Benders como é mostrado na Figura 1(a). Estes cortes são incorporados ao mestre como restrições adicionais; assim eles jogam um rol crucial no processo de planejamento, pois eles informam ao mestre acerca das necessidades adicionais de capacidade de transmissão. Experiências usando Benders podem ser encontrados em Granville e Pereira (1985) e Pereira et al. (1987).

2.2 Modelo Reduzido de Operação

No mestre existem dois tipos de restrições, Figura 1(b): restrições nas variáveis de investimento (como o número máximo de circuitos a adicionar em cada ramo) e uma representação equivalente das restrições de operação (um conjunto reduzido de restrições que representam implicitamente as restrições críticas de operação). A representação equivalente das restrições de operação estão constituídos basicamente dos cortes de Benders que se encontram disponíveis em qualquer estágio do

processo e também de outros tipos de informação simplificada acerca da operação da rede. Assim, é possível encontrar restrições através de regras como: *a adição de um circuito precisa da adição simultânea de um outro circuito para formar um caminho conexo*. O aspecto crucial é que quanto mais o mestre conhece acerca da operação da rede, melhores são as decisões de investimento e, portanto, mais rápido o processo de convergência ao ótimo.

O maior obstáculo associado a uma aplicação prática da técnica de Benders está relacionado com a convexidade, o problema de planejamento da expansão é não convexo. A experiência prática mostra que a metodologia hierarquizada contorna adequadamente esta dificuldade.

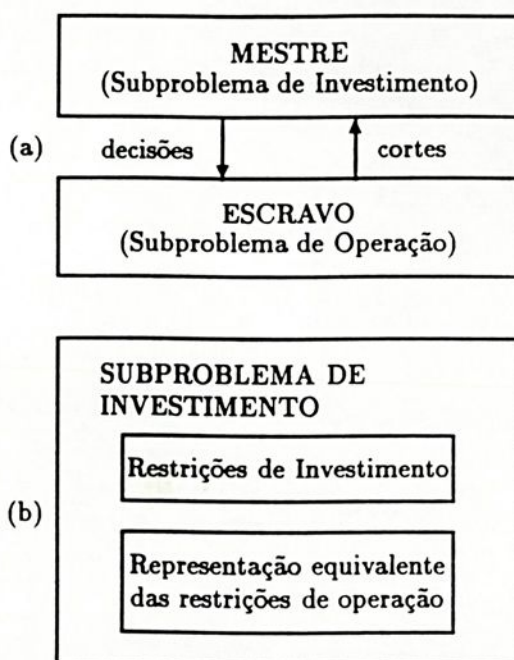


Figura 1: A Decomposição do problema.

2.3 Hierarquização

As discussões prévias e a experiência prática com a técnica hierarquizada mostrou que esta metodologia é a forma mais simples e efetiva de contornar as soluções ótimas locais. Mas existem outros motivos para usar hierarquização e o principal deles é a natureza combinatorial do problema de planejamento. Resolver o mestre num processo iterativo de uma fase única leva a um esforço computacional muito grande, entretanto, quando é usado um algoritmo de PLI para resolver o mestre na Fase III, normalmente o processo já está perto do ponto de ótimo desejado, com um número de restrições (cortes) de Benders adequado e assim o processo converge mais rapidamente reduzindo significativamente o número de iterações do mestre na Fase III e, conseqüentemente, na utilização do algoritmo de PLI. Outra justificativa importante para fazer um planejamento hierarquizado é a presença de barras não ligadas na rede inicial. Assim, en-

tanto o MT trabalha sem problemas com uma rede não conexa, o modelo DC precisa de uma rede fictícia para contornar o problema de rede inicial desconexa. Assim, a metodologia hierarquizada, ao utilizar modelos relaxados nas fases iniciais contorna de uma maneira mas adequada o problema de rede inicial não conexa.

2.4 Algoritmo Hierarquizado

As três fases do algoritmo hierarquizado são resumidas na seguinte forma:

Fase I: Modelo de Transportes - Adições Contínuas

Resolver o problema usando o modelo MT e relaxando a integralidade das variáveis de investimento. Assim, é relaxado o modelo matemático e o tipo de variável. Os subproblemas resultantes de operação e investimento são resolvidos alternadamente até atingir a convergência. Ambos subproblemas resultantes são problemas de programação linear (PL) e são resolvidos usando técnicas de PL. A solução ótima obtida, assim como os cortes de Benders gerados neste processo, são reutilizadas nas fases seguintes.

Fase II: Modelo Híbrido - Adições Contínuas

Resolver o problema usando o modelo MH e relaxando a integralidade das variáveis de investimento. Assim, ainda é relaxado o modelo matemático (embora agora seja menos relaxado) e o tipo de variável. Os subproblemas resultantes são problemas de PL e são resolvidos usando PL. Como na Fase I, a solução ótima obtida, assim como os cortes de Benders gerados neste processo, são reutilizadas na fase seguinte.

Fase III: Modelo DC - Adições Discretas

Nesta fase são reintroduzidas a natureza discreta das variáveis de investimento e o modelo DC para a rede completa. Nestas condições a rede está representada pelo modelo DC e o mestre é um PLI. O subproblema de operação é um PL e pode ser resolvido usando técnicas de PL, mas o subproblema de investimento deve ser resolvido usando técnicas de PLI. Nesta pesquisa este subproblema é resolvido usando um algoritmo de B & B especializado. Portanto, é usada a decomposição de Benders para resolver três formas diferentes do problema de planejamento, sendo que as duas primeiras são resolvidas simplesmente para auxiliar na resolução do problema na fase III, ajudando a contornar os problemas de convergência para a solução ótima e diminuindo o esforço computacional do processo integral.

3 Algoritmo de Branch and Bound

Na Fase III da metodologia hierarquizada, precisa-se de um algoritmo de PLI para resolver o mestre em forma iterativa. Em Romero e Monticelli

(1994b) este problema foi resolvido usando um algoritmo de Balas especializado e em Oliveira et al. (1995) usando o software CPLEX. Na presente pesquisa foi desenvolvido um algoritmo de B & B que usa o software MINOS para resolver o PL de cada nó da árvore de B & B. O algoritmo de B & B é apresentado em dois estágios de desenvolvimento para analisar o desempenho das principais partes do algoritmo.

3.1 Algoritmo B & B Básico

Teoria sobre B & B pode ser encontrada em Hiller e Lieberman (1995) e em Taha (1975). Um algoritmo B & B básico para resolver o mestre na Fase III apresenta a seguinte estrutura:

1. Inicialização:

Escolher a incumbente inicial $Z_{inc} = \infty$. Resolver o PL correspondente (PLI original com variáveis contínuas). Se a solução do PL é inteiro, pare pois ela é ótima global. Em outro caso ir ao passo 2.

2. Branching:

Escolher a primeira variável inteira x_j com valor corrente contínuo x_j^* para realizar a separação. Gerar dois novos subproblemas a partir do subproblema corrente adicionando a restrição $x_j \leq [x_j^*]$ para gerar um subproblema e a restrição $x_j \geq [x_j^*] + 1$ para gerar o outro subproblema onde $[x_j^*]$ é o maior inteiro contido em x_j^* .

3. Bounding:

Resolver o último PL gerado usando MINOS e armazenar a solução ótima $z_{pl} = z_{inf}$ como limitante inferior para os prováveis PL's sucessores.

4. Testes de Sondagem:

Após resolver o PL (subproblema), deve-se verificar os testes de sondagem. O problema é sondado (eliminado para futuros desdobramentos) se satisfaz algum dos seguintes testes de sondagem:

- Teste 1: Se $z_{inf} \geq z^*$, em que z^* é o valor da incumbente.
- Teste 2: Se a solução do PL é infactível.
- Teste 3: Se o ótimo do PL é inteiro, isto é, todas as variáveis inteiras assumem valores inteiros. Neste caso, se o ótimo é menor que a incumbente então, deve-se atualizar a incumbente e aplicar o teste 1 para todos os subproblemas ainda não sondados.

- Se o problema não foi sondado ir ao passo 2 para fazer branching. Em outro caso verificar se existem subproblemas não sondados.

Se todos os subproblemas foram sondados, pare, pois foi terminado o processo; em caso contrário voltar ao passo 3 para resolver o último subproblema gerado.

O algoritmo básico, embora seja conceitualmente simples, apresenta complexidade na implementação computacional. Este algoritmo apresenta excelente desempenho para sistemas pequenos, mas em sistemas reais apresenta várias limitações relacionadas com o esforço computacional. Assim, foram introduzidas melhorias significativas no algoritmo básico.

3.2 Algoritmo B & B Especializado

Existem duas estratégias diferentes para melhorar o desempenho do algoritmo de B & B: (1) introduzindo melhorias de tipo geral próprios dos algoritmos de B & B, e (2) introduzindo informação específica do tipo de problema que está sendo resolvido.

É possível introduzir estratégias de tipo geral no algoritmo de B & B tais como: (1) no passo inicial introduzir um algoritmo heurístico para encontrar uma boa incumbente inicial; (2) escolher outras estratégias de branching como escolher aquela variável que faz parte do ótimo contínuo, ou a variável que apresenta o maior valor fracional ou ainda a variável que apresenta maior custo, e ainda estes critérios podem ser usados de maneira adaptativa; e (3) usando outra estratégia para escolher o próximo subproblema que deve ser analisado. Nesta linha de pesquisa é possível ainda incorporar outras estratégias mais sofisticadas.

Outra estratégia interessante é incorporar conhecimento sobre o tipo de problema para acelerar o processo de convergência. Para o problema de planejamento existem várias características que podem ser aproveitadas e três delas são as seguintes: (1) armazenar boas soluções inteiras ao resolver um subproblema mestre os quais podem ser excelentes incumbentes iniciais de mestres resolvidas posteriormente; (2) tentar encontrar todas as soluções ótimas alternativas que por sua vez gerariam cortes de Benders alternativos; e (3) gerar *restrições especiais* que são relaxadas para o problema global mas que introduzem conhecimento e melhor desempenho na resolução dos subproblemas mestres. As duas primeiras são óbvias mas a última é explicada separadamente.

Em planejamento, os problemas mais complexos de resolver são aqueles que apresentam caminhos novos de adição de circuitos. O caso mais simples é um caminho novo representado por uma linha e um transformador como mostrado na Figura 2.

Para os dois circuitos da Figura 2, pode-se escrever as seguintes restrições:

$$3n_{46-6} - n_{6-5} \geq 0 \quad (1)$$

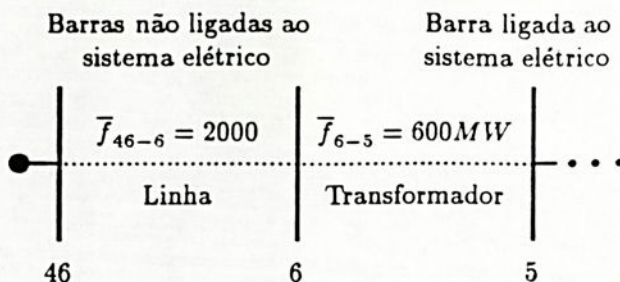


Figura 2. Adição de um caminho novo.

$$n_{6-5} - n_{46-6} \geq 0 \quad (2)$$

sendo n_{46-6} , n_{6-5} inteiros. As restrições (1) e (2) são aparentemente triviais e simplesmente indicam que ambas as variáveis devem ser iguais a zero ou se $n_{46-6} = 1$ então $n_{6-5} \in \{1, 2, 3\}$. Logicamente, n_{46-6} pode assumir valores maiores e sempre deve acontecer uma proposta de adição adequada nesse novo caminho.

Restrições do tipo (1)-(2) são relaxadas para o problema integral mas não necessariamente para um problema mestre em particular. Em outras palavras, um mestre pode apresentar uma alternativa de adição de um único circuito nesse novo caminho (violando o sistema (1)-(2)) porque o número de cortes de Benders gerados é insuficiente para eliminar esse tipo de problema. Como consequência, o mestre em algumas iterações pode apresentar soluções inadequadas, aumentando desnecessariamente o número de iterações do processo integral. Adicionalmente, a presença de restrições do tipo (1)-(2) melhoram o desempenho dos testes de sondagem do algoritmo de B & B em cada iteração, pois elas aumentam o valor da limitante inferior do PL correspondente (maior número de restrições leva a uma solução do PL de maior valor). Portanto, restrições do tipo (1)-(2) diminuem o número de iterações do algoritmo na fase III (menos chamadas ao mestre) e diminuem o número de PL's na resolução de cada mestre, diminuindo assim o esforço computacional em duas partes do algoritmo.

Testes computacionais mostraram que algoritmos de B & B que usam as características específicas do problema como as restrições do tipo (1)-(2) produzem uma diminuição do esforço computacional muito maior que os obtidos usando as estratégias de tipo geral de algoritmos de B & B. Adicionalmente, é necessário mencionar que existem outras formas adicionais de gerar restrições especiais no problema de planejamento de sistemas de transmissão. Restrições do tipo (1)-(2) podem ser facilmente geradas automaticamente.

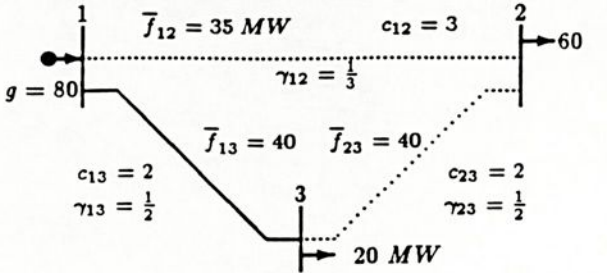
4 Sistemas Testados

Para ilustrar o uso da metodologia hierarquizada são mostrados os testes realizados em três sistemas conhecidos na literatura: sistema didático de 03

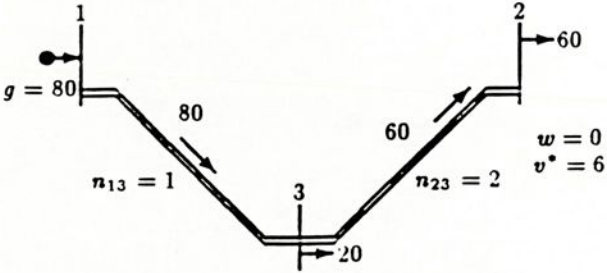
barras, sistema de 06 barras de Garver e sistema sul brasileiro de 46 barras.

4.1 Sistema de 3 Barras

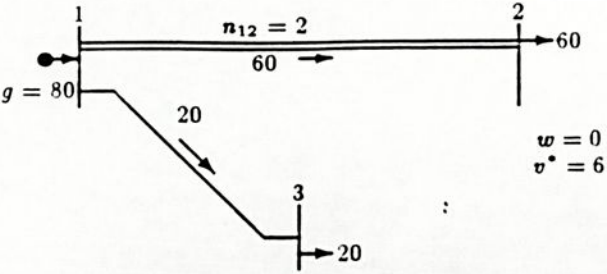
Os dados do sistema estão na Figura 3. Os resultados parciais são mostradas na Tabela 1, onde é possível verificar que foram gerados somente 2 cortes de Benders na fase I e nenhum nas fases II e III. O algoritmo de B & B é acionado uma única vez encontrando duas soluções ótimas alternativas globais, mostradas na Figura 3 e, na Figura 4, é mostrada a árvore de B & B.



(a): Sistema inicial de 3 barras



(b): Primeira solução ótima global



(c): Segunda solução ótima global

Figura 3: Sistema de 3 barras

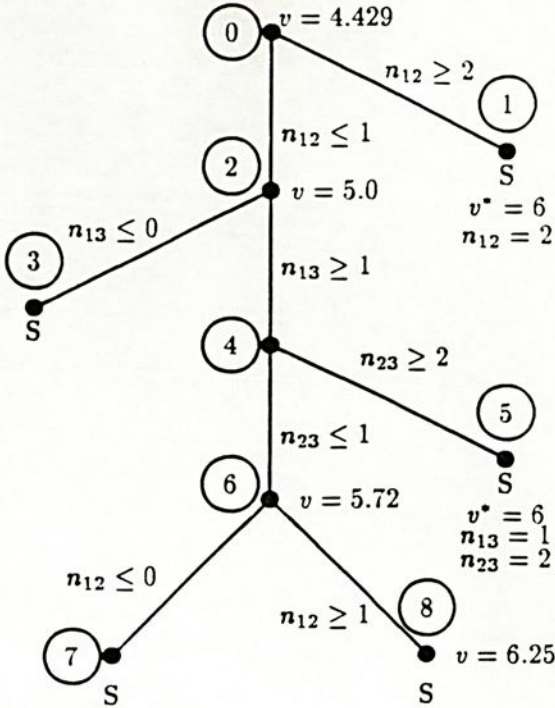


Figura 4: Árvore de Branch and Bound

adicionados e $v = 130$. O algoritmo básico de B & B foi acionado uma única vez encontrando 3 soluções ótimas alternativas com 96 chamadas ao algoritmo de PL e uma dessas soluções encontradas é a solução ótima global.

4.3 Sistema Sul Brasileiro - 1980

Neste caso foi testado o sistema sul-brasileiro cujos dados aparecem em Pereira et al. (1987). Outros dados específicos são: $\epsilon_w = 5MW$, $\alpha = 1000$ e a unidade de custo é milhares de dólares. É analisado o caso em que existe redespacho de geração.

Na solução final o processo levou a um investimento de US\$ 70.289.000, que corresponde à adição dos seguintes oito circuitos: $n_{13-20} = 1$, $n_{20-23} = 1$, $n_{46-6} = 1$, $n_{20-21} = 2$, $n_{42-43} = 1$ e $n_{5-6} = 2$, isto é, três linhas e cinco transformadores. O corte de carga, no final do processo, foi de $\epsilon_w = 1MW$ portanto, menor que a

Tabela 1: Evolução do sistema de 3 barras.

Fase	Iter.	Circuitos adicionados			Inv. custo	Oper. (corte)
		n_{12}	n_{13}	n_{23}	v	w
I	-	-	-	-	-	60
I	1	-	-	1,5	3	40
I	2	1,143	-	0,5	4.429	0
II	1	1,143	-	0,5	4.429	0
III	1	2	-	-	6	0
III	1	-	1	2	6	0

4.2 Sistema de 6 Barras de Garver

Os dados deste sistema aparecem em Garver (1970) e os dados adicionais são: $\epsilon_w = 5MW$ e $\alpha = 10$. A topologia ótima é mostrada na Figura 5 para o caso em que existe redespacho. O investimento é de $v = 110$ com os seguintes circuitos adicionados: $n_{35} = 1$ e $n_{46} = 3$. Os resultados parciais são mostrados na Tabela 2. Esta configuração ótima não é obtida quando é usado o algoritmo de Benders de fase única. Nesse caso é encontrada uma topologia com cinco circuitos

Tabela 2: Evolução do Sistema de Garver

Fase	It.	Circuitos adicionados				Inv.	Oper.
		n_{23}	n_{26}	n_{35}	n_{46}	v	w
I	-	-	-	-	-	-	370
I	1	3,7	-	-	-	74	250
I	2	1,2	2,5	-	-	99	40
I	3	0,8	2,5	0,4	-	99	0
II	1	0,8	2,5	0,4	-	99	78,9
II	2	0,8	1,6	0,4	0,91	99	61,1
II	3	0,45	-	0,75	2,5	99	2,1
III	1	-	1	1	2	110	5,7
III	1	-	2	1	1	110	24,8
III	1	-	-	1	3	110	0

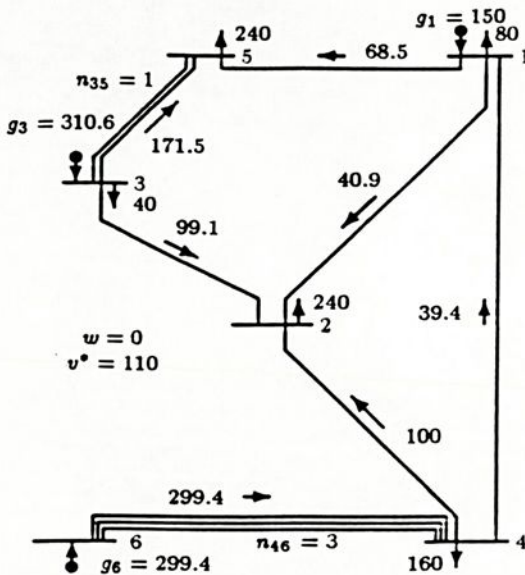


Figura 5: Solução ótima do sistema de Garver

tolerância especificada.

Em relação ao esforço computacional, o algoritmo precisou de 31 cortes de Benders nas fases I e II o que equivale a resolver 62 PL's. Na Fase III usando o algoritmo B & B básico foi necessário realizar 21 iterações que geram 32 cortes de Benders (foram geradas soluções ótimas alternativas). Na resolução do mestre, durante 21 vezes foram resolvidas 72914 PL's. Pode-se verificar que na fase III o esforço computacional é elevado e, também mostra as limitações do algoritmo B & B básico. Por outro lado, incorporando simplesmente as restrições do tipo (1)-(2) para todos os transformadores (19 restrições), o esforço computacional se reduz drasticamente como pode ser verificado nos resultados apresentados na Tabela 3. É importante verificar que acontece uma diminuição de chamadas ao mestre (de 21 para 7) e do número de PL's ao resolver cada mestre. Assim, na fase III o número de PL's usados se reduz a valores em torno de 5350 PL's o que mostra a importância de desenvolver algoritmos de B & B especializados usando características específicas do problema. Se,

adicionalmente, são incluídas as estratégias gerais dos algoritmos de B & B como estratégias de ordenamento de variáveis para branching pelo custo, pode-se verificar que o número de PL's mostrado na Tabela 3 pode diminuir a valores em torno de 1778 PL's. Assim, o melhor algoritmo de B & B é aquele que combina as características específicas do problema com as características gerais dos algoritmos de B & B.

Tabela 3: o Mestre na fase III do algoritmo B & B

No.	Investimento $10^3\$US$	No. de PL's (mestre)
1	62884	684
2	63163	592
3	65183	566
4	66555	624
5	67717	898
6	69936	888
7	70289	1092
Total		5344

5 Conclusões

Foi apresentado um algoritmo de B & B para resolver o subproblema mestre do problema de planejamento de sistemas de transmissão quando é usada a decomposição de Benders hierarquizada como técnica de solução. O algoritmo de B & B especializado apresenta excelente desempenho em sistemas pequenos. Quando é testado um sistema real, o esforço computacional não é pequeno nem elevado. Entretanto, deve-se realizar pesquisas adicionais para testar a viabilidade do algoritmo de B & B especializado para testar sistemas de grande porte.

Referências Bibliográficas

- Garver L.L. (1970). Transmission Network Estimation Using Linear Programming, IEEE Trans. Power App. Syst., PAS 89(7): 1688-1697.
- Granville S. e Pereira M.V.F. (1985). Analysis of the Linearized Power Flow Model in Benders Decomposition, EPRI-Report RP 2473-6, Stanford University,
- Hillier F.S. e Lieberman G.J. (1995). Introduction to Operations Research, McGraw Hill.
- Monticelli A., Santos Jr. A., Pereira M.V.F., Cunha S.H., Parker B.J. e Praça J.C.G. (1982). Interactive Transmission Network Planning Using a Least-effort Criterion. IEEE Trans. Power App. Systems. PAS-101(10): 3919-3925.

Oliveira G.C., Costa A.P.C. e Binato S. (1995). Large Scale Transmission Network Planning Using Optimization and Heuristic Techniques, IEEE Transactions on Power Systems, 10(4): 1828-1834.

Pereira M.V.F., Pinto L.M.V.G., Oliveira G.C. e S.H.F. Cunha S.H.F. (1987). Composite Generation Transmission Expansion Planning, EPRI Research Project 2473-9, Stanford University.

Romero R. e Monticelli A. (1994a). A Hierarchical Decomposition Approach for Transmission Network Expansion Planning, IEEE Transactions on Power Systems, 9(1): 373-380.

Romero R. e Monticelli A. (1994b). A Zero-One Implicit Enumeration Method for Optimization Investments in Transmission Expansion Planning, IEEE Transactions on Power Systems, 9(3): 1385-1391.

Villasana R., Garver L.L. e Salon S.J. (1985). Transmission Network Planning Using Linear Programming, IEEE Trans. Power App. Systems, PAS-104(2): 349-356.

Taha H. (1975). Integer Programming, Academic Press.

Apêndice: A Decomposição do Problema

Neste apêndice são apresentadas, em forma resumida, as formulações matemáticas e outros resultados relevantes da decomposição de Benders.

Formulação de Problema

O problema de planejamento estático da expansão dos sistemas de transmissão é formulado usando três diferentes tipos de modelamento da rede elétrica:

Modelo de Transportes:

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c'_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (1.1)$$

s. a.

$$S f + g + r = d \quad (1.2)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (1.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (1.4)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (1.5)$$

Modelo DC:

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c'_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (2.1)$$

s. a.

$$S f + g + r = d \quad (2.2)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (2.3)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (2.4)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (2.5)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (2.6)$$

Modelo Híbrido:

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c'_{ij} x_{ij} + \alpha e^t r \right\} \quad (3.1)$$

s. a.

$$S f + g + r = d \quad (3.2)$$

$$f_{ij} - (\gamma_{ij}^0 + x_{ij})(\theta_i - \theta_j) = 0; \quad (i, j) \in \Omega_1 \quad (3.3)$$

$$|f_{ij}| - x_{ij} \bar{\phi}_{ij} \leq \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij} \quad (3.4)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (3.5)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \quad (i, j) \in \Omega \quad (3.6)$$

Nas Eqs.(1)-(3) e no resto do apêndice são adotadas as seguintes notações: $x_{ij} = n_{ij} \tilde{\gamma}_{ij}$ representa os valores discretos das susceptâncias que podem ser adicionados no ramo- ij (n_{ij} é o número de circuitos e $\tilde{\gamma}_{ij}$ é a susceptância do circuito), c'_{ij} é o custo incremental associado à adição de um circuito no ramo- ij (\$/MW), S é a matriz de incidência nó-ramo, f é o vetor de fluxo de potência ativa nos ramos, g é o vetor de injeção de potência ativa, d é o vetor de cargas, f_{ij} é o fluxo total no ramo- ij , $\bar{f}_{ij}$ é o limite de fluxo de cada circuito existente no ramo- ij , e θ_i e θ_j são os ângulos de tensão nas barras terminais do ramo- ij , Ω é o conjunto de todos os ramos onde são permitidas novas adições, Ω_1 é um subconjunto de Ω constituído por aqueles ramos onde já existem circuitos na rede inicial, e finalmente Ω_2 , está constituído pelos elementos de Ω que não fazem parte de Ω_1 .

O modelo MT é um problema linear inteiro misto; se a integralidade dos circuitos adicionados é relaxada, isto é, se são permitidas adições fracionárias de linhas, esta formulação se transforma num PL. O modelo DC é um problema de programação não linear inteiro misto pela presença da Eq. (2.3), onde as variáveis de investimento x_{ij} aparecem multiplicando as variáveis de operação θ_i, θ_j .

Note-se que nas três formulações as variáveis de operação e investimento aparecem juntas, formando um conjunto acoplado de equações. Estas variáveis devem ser desacopladas usando a decomposição de Benders.

Decomposição de Benders

Usando decomposição de Benders é possível separar cada uma das três formulações num subproblema de operação e num subproblema de investimento:

Subproblema de Investimento (Mestre):

Para as três formulações é válida a seguinte relação:

$$\text{Min } v = \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} c'_{ij} x_{ij} + \beta \right\} \quad (4.1)$$

s. a.

$$w^k + \sum_{(i,j) \in \Omega} \sigma_{ij}^k (x_{ij} - x_{ij}^k) \leq \beta; \beta \geq 0 \quad (4.2)$$

$$x_{ij} = n_{ij} \gamma_{ij}; \quad 0 \leq n_{ij} \leq \bar{n}_{ij}; \forall (i,j) \in \Omega \quad (4.3)$$

em que w^k é o valor ótimo do escravo correspondente na iteração k e σ_{ij} é a sensibilidade do valor ótimo w^k com respeito a x_{ij} dado pelas seguintes relações:

Modelo de Transportes:

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij} \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (5)$$

em que os π_{ij} são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições (8.3) do subproblema de operação e β é uma limitante que aparece por causa da decomposição.

Modelo de DC:

$$\sigma_{ij} = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (6)$$

em que os π_i^0 são as variáveis duais (multiplicadores de Lagrange) associadas às restrições (9.2). É importante observar que (6) é verdadeira somente para redes conexas.

Modelo Híbrido:

$$\sigma_{ij} = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j); \quad \forall (i,j) \in \Omega_1 \quad (7.1)$$

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij} \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega_2 \quad (7.2)$$

em que os π_i^0 são as variáveis duais (multiplicadores de Lagrange) associadas às restrições (10.2) e π_{ij} são as variáveis duais (multiplicadores de lagrange) associadas às restrições (10.4).

Os subproblemas de operação (escravo) assumem a seguinte forma:

Modelo de Transportes:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (8.1)$$

s. a.

$$S f + g + r = d \quad (8.2)$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}^k) \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (8.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (8.4)$$

em que as variáveis de investimento x_{ij}^k são mantidas constantes durante a solução do subproblema; assim, inicialmente pode-se ter $x_{ij}^0 = 0$, neste caso as possíveis infactibilidades são contornadas através das variáveis r de geradores artificiais.

Modelo DC:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (9.1)$$

s. a.

$$B \theta + g + r = d \quad (9.2)$$

$$|(\theta_i - \theta_j)| \leq \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega \quad (9.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (9.4)$$

Modelo Híbrido:

$$\text{Min } w = \alpha e^t r \quad (10.1)$$

s. a.

$$B_1 \theta + S_2 f + g + r = d \quad (10.2)$$

$$|(\theta_i - \theta_j)| \leq \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega_1 \quad (10.3)$$

$$|f_{ij}| \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}; \quad \forall (i,j) \in \Omega_2 \quad (10.4)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad 0 \leq r \leq d \quad (10.5)$$

em que B é a matriz de susceptâncias do sistema, B_1 é a matriz de susceptâncias dos ramos de Ω_1 e S_2 é a matriz de incidência nó-ramo dos ramos de Ω_2 . As restrições (4.2), os cortes de Benders, informam ao mestre acerca das necessidades de investimento para tornar o escravo factível, isto é, sem corte de carga. Em cada iteração é adicionado um novo corte ao mestre forçando, portanto, a novos investimentos até que o subproblema apresente uma solução com $w = 0$. Finalmente, note-se que a aplicação da decomposição de Benders nesse caso é muito simples, pois as variáveis de operação e de investimento são linearmente separáveis. Também, o modelo MT é um problema convexo o que garante uma convergência rápida do processo iterativo.

Algoritmo Hierarquizado Básico:

O seguinte algoritmo resume as características básicas da metodologia hierarquizada:

1. Iniciar as variáveis de investimento $x_{ij} = 0$ e fazer $phase = 1$.
2. Resolver o subproblema de operação para o investimento atual x_{ij} :
 - Se o corte de carga é menor que o especificado ϵ_w , fazer $phase = phase + 1$ e ir ao Passo 4;
 - Em outro caso adicionar um novo corte de Benders ao mestre.
3. Resolver o mestre e determinar o novo nível de investimento após adicionar as restrições no Passo 2. Ir ao Passo 2.
4. Se $phase \leq 3$, ir ao Passo 2; em outro caso, pare.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
AV. BRASIL, 56 - CAIXA POSTAL 31
15385-000 - ILHA SOLTEIRA - SP**

