

Juliana Honda Lopes

Soluções Auto-Similares das Equações de
Navier-Stokes em L^p -Fraco

São José do Rio Preto

2013

Juliana Honda Lopes

Soluções Auto-Similares das Equações de Navier-Stokes em L^p -Fraco

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira

São José do Rio Preto
2013

Juliana Honda Lopes

Soluções Auto-Similares das Equações de Navier-Stokes em L^p -Fraco

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
Professor Associado
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
27 de fevereiro de 2013

Dedico aos meus pais,
Carlos César e Emilia Yuriko,
e aos meus familiares.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de concluir mais esta etapa da minha vida.

Em seguida, agradeço aos meus pais, Carlos César e Emilia Yuriko, que apesar das dificuldades, sempre estiveram ao meu lado, e me ajudaram a chegar onde estou.

Agradeço também, aos meus irmãos André e Joyce, pelos momentos felizes, pelas brigas, pela eterna amizade e pelo apoio moral nos momentos necessários.

Gostaria de agradecer também, a todos os professores que me acompanharam durante a vida e pelos conhecimentos transmitidos. Em especial, gostaria de agradecer à minha orientadora Prof^a. Dr^a. Juliana Conceição Precioso Pereira, pelo tempo dedicado à minha orientação desde a graduação até o mestrado, pela amizade, carinho e paciência durante todo esse tempo de convívio.

Agradeço à Banca Examinadora, por aceitarem o meu convite.

A todos os meus familiares, agradeço o apoio e a confiança que tiveram em mim e a todos os momentos maravilhosos proporcionados pela presença de vocês.

Agradeço a todos os meus amigos da faculdade, pelos momentos de felicidade e tristeza compartilhados, pelas incontáveis horas de estudos e de conversas que tivemos. Agradeço aos meus amigos de fora da faculdade, que sempre me proporcionam momentos de muita alegria e descontração. E aos amigos do centro espírita Caminheiros do Amor, agradeço aos ensinamentos passados e a toda confiança depositada em mim. A todos esses amigos que dedicam essa amizade eterna e apesar de algumas desavenças e discordâncias, agradeço por me chamarem de amiga e eu de poder chamar-los de irmãos.

Agradeço também, ao Igor Gustavo Oliveira Rozani, pelas lágrimas enxugadas, pelas palavras ditas, pelo tempo dedicado e pelo apoio concedido.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que diretamente ou indiretamente me ajudaram a chegar onde estou!

*“Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que a fez tão importante.
... Eu sou o responsável pela minha rosa.”*

(O Pequeno Príncipe)

Resumo

Neste trabalho, estudaremos as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^n$ e mostraremos a existência de solução global, quando a velocidade inicial $u_0(x)$ pertence ao espaço L^p -fraco e tem norma suficientemente pequena. A análise da evolução da solução é realizada em espaços funcionais de Kato-Fujita, invariantes pelo *scaling* de Navier-Stokes. Mostraremos também que se $u_0(x)$ é homogênea de grau -1 , as soluções também são invariantes por este scaling, ou seja, elas são auto-similares. Além disso, mostraremos a estabilidade assintótica das soluções mild.

Palavras-chave: Equações de Navier-Stokes, L^p -fraco, Espaços de Lorentz, Auto-similaridade.

Abstract

In this work, we study the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ and show the existence of global solution, when the initial velocity $u_0(x)$ belongs to weak L^p space with a sufficiently small norm. The evolution of the solution is analyzed in function spaces with Kato-Fujita type norms invariant by scaling of Navier-Stokes. We also show that if u_0 is an homogeneous function of degree -1 , the solutions are also invariant by that scaling, i.e., they are self-similar. Moreover, we show the asymptotic stability of mild solutions.

Keywords: Navier-Stokes equations, Weak L^p , Lorentz spaces, Self-similarity.

Conteúdo

1	Conceitos Preliminares	12
1.1	A Função Distribuição e o Espaço L^p —Fraco	12
1.2	A Função Rearranjo	18
1.3	A Função Duplo Rearranjo	27
2	Os Espaços de Lorentz	31
2.1	Definição, Espaços de Lorentz Normados e Algumas Propriedades	31
2.2	Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz	42
2.3	Desigualdades de Young e Hölder em $L^{(p,q)}$	45
2.4	A Transformada de Riesz em $L^{(p,q)}$	48
3	Soluções Mild no Espaço $L^{(p,\infty)}$	50
3.1	Problema de Cauchy para a Equação de Navier-Stokes	50
3.1.1	O Problema Linear Associado a (3.4)	52
3.1.2	Estimativas do Semigrupo do Calor $S(t)$	53
3.1.3	Formulação Integral do Problema	55
3.2	Scaling das Equações de Navier-Stokes e Espaços Funcionais	57
3.3	Boa Colocação nos Espaços $L^{(p,\infty)}$	62
3.3.1	Estimativa do Termo Não Linear	64
3.3.2	Estimativa do Termo Linear	68
3.3.3	Prova do Teorema de Existência e Unicidade 3.3.2	70
3.4	Existência de Soluções Auto-Similares	71
3.5	Estabilidade Assintótica das Soluções Mild	73
	Referências Bibliográficas	78

Introdução

Neste trabalho, estudaremos o problema de Cauchy para as equações de Navier-Stokes, o qual é dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. .$$

As equações de Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido viscoso e incompressível em $\mathbb{R}^n$, e que neste caso, não está submetido a nenhuma força externa.

As funções $u(t, x)$ e $p(t, x)$ representam, respectivamente, o campo de velocidade e a pressão do fluido no instante $t > 0$ e na posição $x \in \mathbb{R}^n$, e $u_0(x)$ representa a velocidade inicial do fluido. A primeira equação dada no problema de Cauchy representa a conservação do momento, e a segunda equação representa a conservação de massa (condição de incompressibilidade).

As constantes ν e $\rho > 0$ representam, respectivamente, o coeficiente de viscosidade e a densidade do fluido. Para os nossos estudos, vamos assumir por simplicidade que $\nu = 1$ e $\rho = 1$, ou seja, o nosso fluido é homogêneo.

Assim, o problema de Cauchy para as equações de Navier-Stokes se reescreve da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. . \quad (1)$$

Para resolver tal problema, adotaremos o procedimento clássico para analisar equações diferenciais, ou seja, procuraremos por soluções do problema em um sentido mais fraco, de forma que a solução do problema original também seja uma solução no sentido mais fraco. A solução fraca, com a qual iremos trabalhar, será a solução mild.

É bem conhecido no meio acadêmico que uma solução completa para Navier-Stokes (3D) ainda é um problema em aberto. Neste sentido, o estudo de soluções auto-similares é de grande importância, pois fornece informações sobre propriedades qualitativas de possíveis singularidades para o modelo.

O principal resultado apresentado nesta dissertação, baseado no artigo [1], é o teorema de existência e unicidade de solução mild global para a equação de Navier-Stokes quando a velocidade inicial u_0 possui norma suficientemente pequena e pertence ao espaço L^n -fraco. Além disso, este resultado permite-nos obter existência de soluções auto-similares, se u_0 for uma função homogênea de um certo grau, que será determinado pela relação de escala da equação, bem como a estabilidade assintótica das soluções mild obtidas no teorema de existência e unicidade.

Vale lembrar que uma vez que nos espaços de Lebesgue L^n , não há qualquer função homogênea de grau $q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, em [1], O. A. Barraza estudou o problema de Cauchy (1), com o dado inicial no espaço L^n -fraco, também conhecido como espaço de Marcinkiewicz, o qual contém as funções homogêneas. Os espaços de Lorentz, que serão estudados no Capítulo 2, são uma classe de espaços que contém tanto os espaços de Lebesgue L^n , quanto os espaços de Marcinkiewicz.

Esta dissertação está organizada em 3 capítulos e a seguir faremos uma breve descrição do conteúdo de cada um deles:

No capítulo 1, são apresentados alguns conceitos preliminares que servirão de alicerce para a teoria que queremos estudar nos capítulos posteriores. Começamos introduzindo o conceito de função distribuição, apresentando alguns resultados e propriedades. Tal função será útil para definir os espaços L^p -fracos e a função rearranjo.

Em seguida, munidos com a definição de função distribuição, definimos o que seriam os espaços L^p -fracos. Para continuar os estudos preliminares, apresentamos o conceito de função rearranjo, e algumas propriedades e resultados envolvendo tal função, como por exemplo a Desigualdade de Hardy-Littlewood. A função rearranjo também será útil para definir a função duplo rearranjo.

Para finalizar o capítulo 1, definimos a função duplo rearranjo, demonstramos algumas propriedades, e resultados envolvendo tal função, como por exemplo a Proposição 1.3.6 que nos dá uma estimativa para o duplo rearranjo da convolução entre duas funções mensuráveis. Tal proposição será útil na demonstração da Desigualdade de Young na Seção 2.3.

No capítulo 2, definimos os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ e a sua seminorma que envolve a função rearranjo. Mostramos também que os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ contém os espaços de Lebesgue L^p , e que suas relações de escala coincidem. Serão apresentados alguns resultados, como por exemplo, a Desigualdade de Hardy, que também será utilizada para provar a desigualdade de Young na Seção 2.3. Em seguida, com o auxílio da função duplo rearranjo, definimos uma norma para o espaço de Lorentz, e mostramos que ela é equivalente a seminorma definida anteriormente. Alguns resultados envolvendo tal norma serão apresentados, como por exemplo, o Lema de Calderón, e a completude dos espaços de Lorentz.

Em seguida, mostramos o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, que será uma ferramenta importante na demonstração de que a k -transformada de Riesz é contínua nos espaços de Marcinkiewicz na Seção 2.4. Para finalizar os estudos sobre os espaços de Lorentz, apresentamos as Desigualdades de Young e Hölder generalizadas, que serão muito utilizadas nos resultados centrais desta dissertação (Capítulo 3).

Terminamos o capítulo, definindo o que seriam as k -transformadas de Riesz, e provando que elas são contínuas nos espaços de Marcinkiewicz, com a finalidade de mostrar, no capítulo 3, que o Projctor de Leray $\mathbb{P}$ é contínuo nesses espaços.

No capítulo 3, começamos a análise do problema de Cauchy para a equação de Navier-Stokes. Com o auxílio do projetor de Leray, transformamos o problema de Cauchy (1), no sistema equivalente,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mathbb{P}[\nabla \cdot (u \otimes u)] = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \nabla \cdot u_0 = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (2)$$

Feito isto, calculamos a solução do problema linear associado ao sistema (2). A solução encontrada, gera um semi-grupo $S(t)$ via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass. Depois de encontrarmos algumas estimativas para o semi-grupo do calor, apresentamos a formulação integral do problema (2), que é dada por

$$u(t, x) = S(t)u_0(x) - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x) ds. \quad (3)$$

Chamamos de solução mild do problema (2), a solução que satisfaz (3).

Na seção seguinte, apresentamos o scaling das equações de Navier-Stokes, definimos o que seria uma solução auto-similar, e mostramos que para se obter soluções auto-similares para o problema (2), precisamos que a condição inicial u_0 seja homogênea de grau -1 . Em seguida, definimos os espaços funcionais de Kato-Fujita, nos quais estudaremos a equação integral (3), e suas respectivas normas, que são tomadas de modo que elas sejam invariantes pelo scaling.

Na próxima seção, enunciamos o principal resultado deste trabalho, que é o teorema de existência e unicidade de solução do problema (2). De fundamental importância para a prova deste teorema é o Lema Abstrato que é apresentado na sequência. Afim de aplicar o Lema Abstrato, estimamos os termos não linear e linear da equação (3) e apresentamos resultados de convergência dos mesmos. Tendo em mãos essas ferramentas, no que segue, demonstramos o teorema de existência e unicidade de solução.

Para finalizar o trabalho, provamos o teorema de existência de solução auto-similar, e mostramos a estabilidade assintótica das soluções mild dadas pelo teorema de existência e unicidade.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

O objetivo deste capítulo é construir os alicerces deste trabalho. Iremos fixar notação e apresentar resultados elementares que serão utilizados nos demais capítulos. Começaremos por fixar o espaço de medida σ -finita $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

1.1 A Função Distribuição e o Espaço L^p —Fraco

Definição 1.1.1 *Se f é uma função mensurável no espaço de medida fixado acima, dizemos que a função $\lambda_f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ definida por*

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}), \quad (1.1)$$

é chamada de função distribuição de f .

Algumas propriedades interessantes sobre a função distribuição são apresentadas à seguir:

Proposição 1.1.2 *Se f e g são funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis em X , então*

1. λ_f é não-crescente e contínua à direita.
2. Se $|f| \leq |g|$, então $\lambda_f \leq \lambda_g$.
3. Se $|f_n|$ cresce para $|f|$, então λ_{f_n} cresce para λ_f .
4. Se $f = g + h$, então $\lambda_f(\alpha) \leq \lambda_g\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \lambda_h\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Demonstração: Seja $E(\alpha, f) = \{x : |f(x)| > \alpha\}$. Observe que se $\alpha > \beta$, então para todo $x \in X$ tal que $|f(x)| > \alpha$, tem-se $|f(x)| > \beta$, o que implica que $E(\alpha, f) \subset E(\beta, f)$. Ou seja, se $\alpha > \beta$, então $\mu(E(\alpha, f)) \leq \mu(E(\beta, f))$.

Portanto, concluímos que λ_f é não-crescente.

Mostremos agora, que λ_f é contínua à direita. Para isto, dado $\alpha \in (0, \infty)$, seja (ε_n) uma sequência tal que ε_n decresce para 0.

Observe que, para cada n , $E(\alpha + \varepsilon_n, f) \subset E(\alpha + \varepsilon_{n+1}, f)$, pois $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, ou seja, $E(\alpha + \varepsilon_n, f)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos. Além disso,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha + \varepsilon_n, f) = E(\alpha, f). \quad (1.2)$$

De fato, como $E(\alpha + \varepsilon_n, f) \subset E(\alpha, f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha + \varepsilon_n, f) \subset E(\alpha, f)$. Para a inclusão contrária, seja $x \in E(\alpha, f)$. Então, $|f(x)| > \alpha$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \geq \alpha + \varepsilon_{n_0} > \alpha + \varepsilon_{n_0+1}$, pois $\varepsilon_{n_0} > \varepsilon_{n_0+1}$.

Logo, $x \in E(\alpha + \varepsilon_{n_0+1}, f)$, ou seja, $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha + \varepsilon_n, f)$. Portanto, (1.2) se verifica.

Agora, utilizando a continuidade por baixo das medidas, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_f(\alpha + \varepsilon_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E(\alpha + \varepsilon_n, f)) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha + \varepsilon_n, f)\right) = \lambda_f(\alpha),$$

ou seja, λ_f é contínua à direita, o que completa a prova do item 1.

Agora, se $|f| \leq |g|$, então dado $\alpha \in (0, \infty)$ tem-se $|g(x)| \geq |f(x)| > \alpha$, para todo $x \in E(\alpha, f)$, ou seja, $x \in E(\alpha, g)$.

Portanto, $E(\alpha, f) \subset E(\alpha, g)$, e assim,

$$\mu\{E(\alpha, f)\} \leq \mu\{E(\alpha, g)\}, \forall \alpha \in (0, \infty),$$

donde segue que $\lambda_f \leq \lambda_g$, e assim, fica provado o item 2.

Seja $(|f_n|)$ uma sequência crescente que converge para $|f|$. Assim, $|f_n| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, dado $\alpha \in (0, \infty)$ tem-se $|f(x)| \geq |f_n(x)| > \alpha$, para todo $x \in E(\alpha, f_n)$, ou seja, $x \in E(\alpha, f)$. Logo, $E(\alpha, f_n) \subset E(\alpha, f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha, f_n) \subset E(\alpha, f).$$

Agora, se $x \in E(\alpha, f)$, então $|f(x)| > \alpha$. Como $|f_n| \rightarrow |f|$ de forma crescente, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| > |f_{n_0}(x)| \geq \alpha$, e assim, $|f(x)| > |f_{n_0+1}(x)| > |f_{n_0}(x)| \geq \alpha$.

Logo, $x \in E(\alpha, f_{n_0+1})$, ou seja, $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha, f_n)$.

Portanto, $E(\alpha, f) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha, f_n)$, donde segue que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha, f_n) = E(\alpha, f)$.

Como $E(\alpha, f_n)$ é crescente quando $n \rightarrow \infty$, então pela continuidade por baixo das medidas, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{f_n}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E(\alpha, f_n)) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(\alpha, f_n)\right) = \mu(E(\alpha, f)) = \lambda_f(\alpha).$$

Além disso, como $E(\alpha, f_n) \subset E(\alpha, f_{n+1}) \subset \cdots \subset E(\alpha, f)$, então

$$\mu\{E(\alpha, f_n)\} \leq \mu\{E(\alpha, f_{n+1})\} \leq \cdots \leq \mu\{E(\alpha, f)\},$$

ou seja, $\lambda_{f_n} \rightarrow \lambda_f$ de forma crescente quando $n \rightarrow \infty$, o que conclui a prova do item 3.

Para a prova do item 4, considere $f = g + h$ e $\alpha \in (0, \infty)$. Se $x \in E(\alpha, f)$, então

$$\alpha < |f(x)| = |g(x) + h(x)| \leq |g(x)| + |h(x)|.$$

Logo, temos duas possibilidades, ou $\frac{\alpha}{2} < |g(x)|$ ou $\frac{\alpha}{2} < |h(x)|$, donde conclui-se que $x \in E\left(\frac{\alpha}{2}, g\right)$ ou $x \in E\left(\frac{\alpha}{2}, h\right)$, ou seja, $x \in \left(E\left(\frac{\alpha}{2}, g\right) \cup E\left(\frac{\alpha}{2}, h\right)\right)$.

Assim, $E(\alpha, f) \subset \left(E\left(\frac{\alpha}{2}, g\right) \cup E\left(\frac{\alpha}{2}, h\right)\right)$ e

$$\mu(E(\alpha, f)) \leq \mu\left(E\left(\frac{\alpha}{2}, g\right) \cup E\left(\frac{\alpha}{2}, h\right)\right) \leq \mu\left(E\left(\frac{\alpha}{2}, g\right)\right) + \mu\left(E\left(\frac{\alpha}{2}, h\right)\right).$$

Portanto, tem-se $\lambda_f(\alpha) \leq \lambda_g\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \lambda_h\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

■

Exemplo 1.1.3 Para o melhor entendimento da função distribuição, neste exemplo vamos apresentar cálculos formais de λ_f , em que f é uma função simples.

Seja f uma função positiva e simples, definida em X da forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x),$$

em que $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1$ e os conjuntos $E_i = \{x \in X : f(x) = a_i\}$, $i = 1, \dots, n$, são disjuntos.

Se $\alpha \geq a_1$, então $\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. Agora, se $a_2 \leq \alpha < a_1$, então $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = E_1$, ou seja, $\lambda_f(\alpha) = \mu(E_1)$.

Analogamente, se $a_3 \leq \alpha < a_2$, então $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = E_1 \cup E_2$, ou seja, $\lambda_f(\alpha) = \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Continuando o processo, obtém-se

$$\lambda_f(\alpha) = \sum_{i=1}^n C_i \chi_{[a_{i+1}, a_i)}(\alpha),$$

em que $C_i = \sum_{j=1}^i \mu(E_j)$, $i = 1, \dots, n$, e $a_{n+1} := 0$.

Os gráficos 1.1 e 1.2 representam respectivamente, a função simples e a distribuição da função simples.

Agora, vamos supor que $\lambda_f(\alpha) < \infty$, para todo $\alpha > 0$.

Pelo item 1 da Proposição 1.1.2, λ_f define uma medida de Borel negativa ν em $(0, \infty)$ definida por

$$\nu((a, b]) = \lambda_f(b) - \lambda_f(a), \quad \forall a, b > 0.$$

Podemos portanto, considerar a integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int \varphi d\lambda_f = \int \varphi d\nu$$

de uma função φ em $(0, \infty)$.

O seguinte resultado mostra que a integral da função $|f|$ em X pode ser reduzida a uma integral de Lebesgue-Stieltjes.

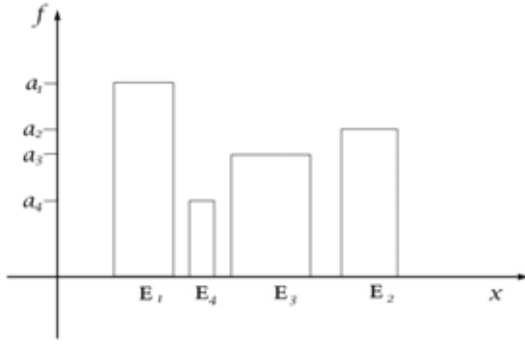


Figura 1.1: Função simples

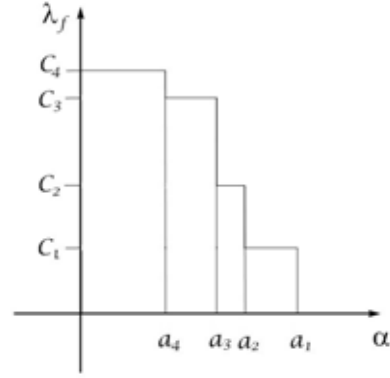


Figura 1.2: Função distribuição

Proposição 1.1.4 *Se $\lambda_f(\alpha) < \infty$ para todo $\alpha > 0$ e φ é uma função Borel mensurável não-negativa em $(0, \infty)$, então*

$$\int_X \varphi \circ |f| \, d\mu = - \int_0^\infty \varphi(\alpha) \, d\lambda_f(\alpha).$$

Demonstração: Se ν é a medida negativa definida acima, através de λ_f , tem-se

$$\begin{aligned} \nu((a, b]) &= \lambda_f(b) - \lambda_f(a) \\ &= \mu(\{x : |f(x)| > b\}) - \mu(\{x : |f(x)| > a\}) \\ &= -\left[\mu(\{x : |f(x)| > a\}) - \mu(\{x : |f(x)| > b\})\right] \\ &= -\mu(\{x : |f(x)| > a\} \setminus \{x : |f(x)| > b\}) \\ &= -\mu(\{x : a < |f(x)| \leq b\}) \\ &= -\mu(|f|^{-1}((a, b])). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de unicidade da extensão, (veja [5]), segue que $\nu(E) = -\mu(|f|^{-1}(E))$, para todo conjunto de Borel $E \subset (0, \infty)$.

Note que, se φ é simples, então $\varphi \circ |f|(x) = \sum a_i \chi_{E_i}(|f(x)|) = \sum a_i \chi_{|f|^{-1}(E_i)}(x)$, pois

$$\begin{aligned} \chi_{E_i}(|f(x)|) &= \begin{cases} 1 & \text{se } |f(x)| \in E_i \\ 0 & \text{se } |f(x)| \in (E_i)^c \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in |f|^{-1}(E_i) \\ 0 & \text{se } x \in (|f|^{-1}(E_i))^c \end{cases} \\ &= \chi_{|f|^{-1}(E_i)}(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_X \varphi \circ |f| \, d\mu &= \sum a_i \mu(|f|^{-1}(E_i)) = - \sum a_i \nu(E_i) \\ &= - \int_0^\infty \varphi \, d\nu = - \int_0^\infty \varphi(\alpha) \, d\lambda_f(\alpha). \end{aligned}$$

Mostremos agora o caso geral. Uma vez que dada uma função φ mensurável, existe uma sequência crescente (φ_n) de funções simples que convergem para φ , então pelo Teorema da Convergência Monótona, tem-se

$$\int_X \varphi \circ |f| \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n \circ |f| \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_0^\infty \varphi_n(\alpha) \, d\lambda_f(\alpha) = - \int_0^\infty \varphi(\alpha) \, d\lambda_f(\alpha).$$

■

Estamos particularmente interessados no caso em que $\varphi(\alpha) = \alpha^p$, na Proposição 1.1.4. Note que isto nos leva a

$$\int |f|^p \, d\mu = - \int_0^\infty \alpha^p \, d\lambda_f(\alpha).$$

Utilizando-se formalmente integração por partes no lado direito da igualdade acima, obtém-se uma forma mais útil para nossos propósitos:

$$\int |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) \, d\alpha.$$

Note que a validade do cálculo formal realizado acima não é clara, a menos que saibamos que $\alpha^p \lambda_f(\alpha) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \infty$. No entanto, o resultado a seguir mostra que a conclusão é correta.

Proposição 1.1.5 *Se $0 < p < \infty$, então $\int |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) \, d\alpha$.*

Demonstração: O caso em que $\lambda_f(\alpha) = \infty$, para algum $\alpha > 0$ é imediato, pois ambas integrais são infinitas.

Suponhamos então, que para todo $\alpha > 0$, $\lambda_f(\alpha) < \infty$ e f é uma função simples. Assim, λ_f é limitada quando $\alpha \rightarrow 0$, e se anula quando α é suficientemente grande, ou seja, $\alpha^p \lambda_f(\alpha) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \infty$. Portanto, a integração por partes fica justificada neste caso e a igualdade desejada é obtida.

Para o caso geral, seja (g_n) uma sequência de funções simples que converge para $|f|$ de forma crescente. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\int |g_n|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{g_n} \, d\alpha.$$

Como $|g_n|$ cresce para $|f|$, pelo item 3 da Proposição 1.1.2, segue que λ_{g_n} cresce para λ_f . Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona, tem-se

$$\int |f|^p \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |g_n|^p \, d\mu = p \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_{g_n}(\alpha) \, d\alpha = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) \, d\alpha.$$

■

Definiremos agora, um importante variante dos espaços L^p que aparecem com grande frequência na literatura.

Definição 1.1.6 Para cada $0 < p < \infty$, definimos o espaço L^p -fraco como sendo o conjunto de todas as funções f mensuráveis em X , tais que

$$[f]_p := \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Observação 1.1.7 Vale lembrar que $[\cdot]_p$ não é uma norma, pois a propriedade da desigualdade triangular não é válida. Porém a seguinte desigualdade é válida:

$$[f + g]_p \leq 2 ([f]_p^p + [g]_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

De fato, pelo item 4 da Proposição 1.1.2, obtém-se

$$\begin{aligned} [f + g]_p &= \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_{f+g}(\alpha) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \left(\lambda_f \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \lambda_g \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_g \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[2^p \left(\sup_{\alpha > 0} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^p \lambda_f \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sup_{\alpha > 0} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^p \lambda_g \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= 2 \left(\sup_{\beta > 0} \beta^p \lambda_f(\beta) + \sup_{\beta > 0} \beta^p \lambda_g(\beta) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \left(\text{em que } \beta = \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2 ([f]_p^p + [g]_p^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Analisaremos agora a relação entre o espaço L^p e o espaço L^p -fraco.

Por um lado, tem-se $L^p \subset L^p$ -fraco e $[f]_p \leq \|f\|_p$. De fato, para $\alpha > 0$, pela Desigualdade de Chebyshev, ver [5, pg. 185, teorema 6.17], obtém-se

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) \leq \left[\frac{\|f\|_p^p}{\alpha} \right]^p, \text{ ou seja, } \lambda_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p}.$$

Desta forma, segue que $\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha) \leq \|f\|_p^p$, donde conclui-se que

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p.$$

Assim, dado $f \in L^p$, pela desigualdade acima, tem-se

$$[f]_p \leq \|f\|_p < \infty,$$

ou seja, $f \in L^p$ -fraco.

Por outro lado, nem toda função do espaço L^p -fraco pertence ao espaço L^p . De fato, seja $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ definida em $(0, \infty)$, (com a medida de Lebesgue). Note que,

$$\begin{aligned}\lambda_f(\alpha) &= \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) \\ &= \mu(\{x : x^{-\frac{1}{p}} > \alpha\}) \\ &= \mu(\{x : x^{-1} > \alpha^p\}) \\ &= \mu(\{x : x < \alpha^{-p}\}) \\ &= \alpha^{-p}.\end{aligned}$$

Logo,

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \alpha^{-p} \right)^{\frac{1}{p}} = 1 < \infty.$$

Portanto, $f \in L^p$ -fraco. Porém,

$$\|f\|_p^p = \int_0^\infty \left| x^{-\frac{1}{p}} \right|^p d\mu = \int_0^\infty x^{-1} d\mu$$

que diverge, donde concluí-se que $f \notin L^p$.

Observação 1.1.8 Neste trabalho consideraremos os espaços L^p -fraco em que $X = \mathbb{R}^n$, ou seja, $L^p(\mathbb{R}^n)$ -fraco, denotados por $L^{(p,\infty)}(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente por $L^{(p,\infty)}$.

O espaço $L^{(p,\infty)}$ tem a vantagem de ser uma das extensões mais naturais de L^p que contém funções homogêneas de grau -1 . E esta é a chave para resolver o problema de existência de soluções auto-similares das equações de Navier-Stokes em um sentido especial que será explicado posteriormente.

1.2 A Função Rearranjo

Para cada função $\mathcal{M}$ -mesurável f , associaremos uma função f^* , definida em $(0, \infty)$, chamada de *rearranjo não-crescente* de f . O objetivo desta seção é discutir propriedades da função rearranjo, as quais serão de grande utilidade no decorrer deste trabalho.

Definição 1.2.1 Seja f uma função $\mathcal{M}$ -mensurável em X . A função rearranjo de f é uma aplicação $f^* : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, definida por

$$f^*(t) = \inf\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) \leq t\}.$$

Vamos usar a convenção $\inf \emptyset = \infty$. Assim, se $\lambda_f(\alpha) > t$, para todo $\alpha > 0$, então $f^*(t) = \infty$. Se assumirmos que X tem medida finita, então a função $\lambda_f(\alpha)$ é limitada por $\mu(X)$, e portanto, segue que $f^*(t) = 0$, se $t \geq \mu(X)$.

Proposição 1.2.2 A aplicação f^* é o rearranjo de f se, e somente se,

$$\begin{aligned}f^* : (0, \infty) &\rightarrow [0, \infty] \\ t &\mapsto m_{\lambda_f}(t) = m(\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) > t\}),\end{aligned}$$

em que m denota a medida de Lebesgue.

Demonstração:

Pelo item 1, da Proposição 1.1.2, a função λ_f é não-crescente. Assim, tem-se

$$\sup\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) > t\} = m(\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) > t\}).$$

Logo, da definição de λ_f , conclui-se

$$\begin{aligned} m_{\lambda_f}(t) &= m(\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) > t\}) \\ &= \sup\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) > t\} \\ &= \inf\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) \leq t\} \\ &= f^*(t). \end{aligned}$$

■

Este resultado nos permite concluir que a função rearranjo de f herda as mesmas propriedades da função distribuição de f .

Exemplo 1.2.3 *Calcularemos agora, o rearranjo f^* da função simples f do Exemplo 1.1.3.*

Pelo gráfico de λ_f , no Exemplo 1.1.3 e pela definição de f^ , observa-se que $f^*(t) = 0$, quando $t \geq C_n$. Além disso, se $C_n > t \geq C_{n-1}$, então $f^*(t) = a_n$. E se $C_{n-1} > t \geq C_{n-2}$, então $f^*(t) = a_{n-1}$, e assim sucessivamente. Ou seja,*

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[C_{i-1}, C_i)}(t),$$

em que $C_0 = 0$.

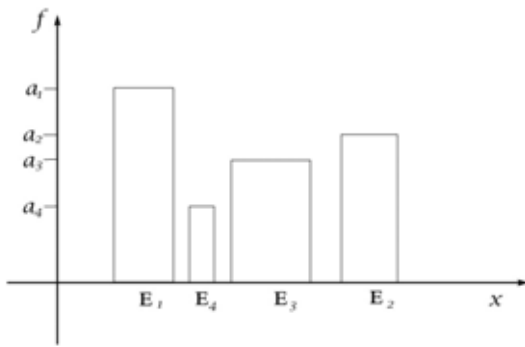


Figura 1.3: Função simples

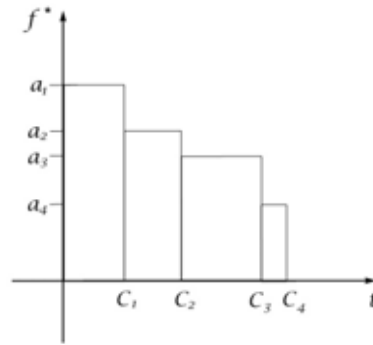


Figura 1.4: Função rearranjo

Pelos gráficos apresentados nas Figuras 1.3 e 1.4, nota-se que o gráfico de f^ é obtido através de um rearranjo, em uma ordem não crescente, dos blocos verticais do gráfico de f .*

Nos dois resultados a seguir, destacaremos algumas propriedades do rearranjo.

Proposição 1.2.4 *São válidas as seguintes desigualdades,*

$$f^*(\lambda_f(\alpha)) \leq \alpha \quad \text{e} \quad \lambda_f(f^*(t)) \leq t, \quad \forall \alpha, t > 0.$$

Demonstração: Como $f^*(t) = \inf\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) \leq t\}$, para cada $t > 0$, existe uma sequência (α_n) não-crescente, tal que $\alpha_n \rightarrow f^*(t)$ e $\lambda_f(\alpha_n) \leq t$.

Pela Proposição 1.1.2, segue que a função λ_f é contínua a direita. Assim,

$$\lambda_f(f^*(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_f(\alpha_n) \leq t.$$

Para provar a outra desigualdade, observa-se que

$$f^*(\lambda_f(\alpha)) = \inf\{\beta > 0 : \lambda_f(\beta) \leq \lambda_f(\alpha)\} \leq \inf\{\beta > 0 : \beta > \alpha\} = \alpha,$$

pois λ_f é não-crescente e $\{\beta > 0 : \lambda_f(\beta) \leq \lambda_f(\alpha)\} \supset \{\beta > 0 : \beta > \alpha\}$. ■

Note que, se assumirmos que λ_f é decrescente, f^* será a função inversa de λ_f .

Proposição 1.2.5 *As seguintes propriedades são válidas:*

1. $f^*(t) > \alpha \Leftrightarrow \lambda_f(\alpha) > t$.
2. $\lambda_f(\alpha) = m_{f^*}(\alpha)$, em que m denota a medida de Lebesgue.
3. Se $E \subset \mathcal{M}$, então $(f\chi_E)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0, \mu(E)]}$.
4. Para $0 < p < \infty$, $(|f|^p)^*(t) = (f^*(t))^p$.
5. Se $|f_n|$ cresce para $|f|$, então f_n^* cresce para f^* .

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\lambda_f(\alpha) \leq t$. Uma vez que f^* é não-crescente, pela Proposição 1.2.4, conclui-se que

$$f^*(t) \leq f^*(\lambda_f(\alpha)) \leq \alpha,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\lambda_f(\alpha) > t$.

Reciprocamente, suponha por absurdo que $f^*(t) \leq \alpha$. Como λ_f é não-crescente, então pela Proposição 1.2.4, tem-se

$$\lambda_f(\alpha) \leq \lambda_f(f^*(t)) \leq t,$$

contradizendo a hipótese. Portanto, $f^*(t) > \alpha$ e o item 1 está provado.

Agora, seja m a medida de Lebesgue. Pelo item 1, tem-se

$$\begin{aligned} m_{f^*}(\alpha) &= m(\{t > 0 : f^*(t) > \alpha\}) \\ &= m(\{t > 0 : \lambda_f(\alpha) > t\}) \\ &= m([0, \lambda_f(\alpha))) \\ &= \lambda_f(\alpha), \end{aligned}$$

o que prova o item 2.

Provemos agora o item 3. Para isso, observe que $(f\mathcal{X}_E)(x) \leq f(x)$ e que pelo item 2 da Proposição 1.1.2, tem-se

$$\lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(\alpha) \leq \lambda_f(\alpha).$$

Assim, como $\{\alpha : \lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(\alpha) > t\} \subset \{\alpha : \lambda_f(\alpha) > t\}$, tem-se

$$m_{\lambda_{(f\mathcal{X}_E)}}(t) = m(\{\alpha : \lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(\alpha) > t\}) \leq m(\{\alpha : \lambda_f(\alpha) > t\}) = m_{\lambda_f}(t)$$

Portanto, pela Proposição 1.2.2,

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) \leq f^*(t). \quad (1.3)$$

Para $t > \mu(E)$, $\lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f\mathcal{X}_E(x)| > \alpha\}) \leq \mu(E)$, o que implica que

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) = \inf\{\alpha > 0 : \lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(\alpha) \leq t\} = 0.$$

Assim, se $t > \mu(E)$, então $(f\mathcal{X}_E)^*(t) = f^*(t)\mathcal{X}_{[0, \mu(E)]} = 0$.

Agora, se $t \in [0, \mu(E)]$, então por (1.3), temos

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) \leq f^*(t) = f^*(t)\mathcal{X}_{[0, \mu(E)]},$$

de onde conclui-se o item 3.

Para o item 4, vamos assumir que $0 < p < \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} (|f|^p)^*(t) &= \inf\{\alpha > 0 : \lambda_{|f|^p}(\alpha) \leq t\} \\ &= \inf\{\alpha > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)|^p > \alpha\}) \leq t\} \\ &= \inf\{\beta^p > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}) \leq t\} \\ &= \inf\{\beta^p > 0 : \lambda_f(\beta) \leq t\} \\ &= (f^*(t))^p, \end{aligned}$$

em que $\beta = \alpha^{\frac{1}{p}}$.

Para provar o item 5, como por hipótese $|f_n|$ cresce para $|f|$, pelo item 3 da Proposição 1.1.2, segue que $\lambda_f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{f_n}(\alpha)$ e, portanto, $m_{\lambda_f}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\lambda_{f_n}}(\alpha)$.

Daí, pela Proposição 1.2.2, tem-se $f^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(t)$.

Mas, pelo item 2 da Proposição 1.1.2, tem-se $\lambda_{f_n} \leq \lambda_f$, assim

$$f_n^*(t) = \inf\{\alpha > 0 : \lambda_{f_n}(\alpha) \leq t\} \leq \inf\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) \leq t\} = f^*(t), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de onde concluimos a demonstração. ■

Futuramente, mostraremos que a norma em L^p pode ser calculada a partir da função distribuição e do rearranjo. Para isso, começaremos com o seguinte resultado:

Lema 1.2.6 *As seguintes igualdades são válidas:*

$$\int_X |f(x)| \, d\mu = \int_0^\infty \lambda_f(\alpha) \, d\alpha, \quad (1.4)$$

$$\int_X |f(x)| \, d\mu = \int_0^\infty f^*(t) \, dt, \quad (1.5)$$

$$\sup_{\alpha > 0} \alpha \, \lambda_f(\alpha) = \sup_{t > 0} t f^*(t). \quad (1.6)$$

Demonstração: Vamos provar as igualdades (1.4) e (1.5) para funções simples, o caso geral em que f é uma função mensurável qualquer, seguirá do teorema da convergência monótona.

Assim, para provarmos (1.4), seja f uma função simples e positiva definida em X da forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

em que $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ e E_i são subconjuntos disjuntos. Logo, como visto no Exemplo 1.1.3,

$$\lambda_f(\alpha) = \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{X}_{[a_{i+1}, a_i]}(\alpha),$$

em que $C_i = \sum_{j=1}^i \mu(E_j)$, $i = 1, \dots, n$, e $a_{n+1} = 0$.

Daí, calculando a integral dessa função simples, obtém-se

$$\int_0^\infty \lambda_f(\alpha) \, d\alpha = \sum_{i=1}^n C_i \, m([a_{i+1}, a_i]) = \sum_{i=1}^n C_i (a_i - a_{i+1}).$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i (a_i - a_{i+1}) &= C_1(a_1 - a_2) + C_2(a_2 - a_3) + \cdots + C_n(a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 C_1 + a_2(C_2 - C_1) + \cdots + a_{n-1}(C_{n-1} - C_{n-2}) + a_n(C_n - C_{n-1}) \\ &= a_1 \mu(E_1) + a_2 \mu(E_2) + \cdots + a_{n-1} \mu(E_{n-1}) + a_n \mu(E_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^\infty \lambda_f(\alpha) \, d\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) = \int_X f(x) \, d\mu = \int_X |f(x)| \, d\mu,$$

e a igualdade (1.4) está provada.

Para a prova da igualdade (1.5), observe que pelo Exemplo 1.2.3, tem-se

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1}, C_i]}(t),$$

em que $C_0 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty f^*(t) dt &= \sum_{i=1}^n a_i (C_i - C_{i-1}) \\
 &= a_1(C_1 - C_0) + a_2(C_2 - C_1) + \cdots + a_n(C_n - C_{n-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \\
 &= \int_X f(x) d\mu \\
 &= \int_X |f(x)| d\mu,
 \end{aligned}$$

e a igualdade (1.5) está provada.

Para provar a igualdade (1.6), primeiramente vamos mostrar para o caso em que a função f seja uma função simples.

Para isso, seja

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x),$$

onde $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ e $E_i \in \mathcal{M}$ são subconjuntos disjuntos. Assim, mais uma vez, como visto no Exemplo 1.1.3,

$$\lambda_f(\alpha) = \sum_{i=1}^n C_i \chi_{[a_{i+1}, a_i)}(\alpha) = \begin{cases} C_i & , \quad \text{se } a_{i+1} \leq \alpha \leq a_i, \quad 1 \leq i \leq n \\ 0 & , \quad \text{se } a_1 \leq \alpha \end{cases},$$

em que $C_i = \sum_{j=1}^i \mu(E_j)$, $i = 1, \dots, n$, e $a_{n+1} = 0$.

E pelo exemplo 1.2.3, temos

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[C_{i-1}, C_i)}(t) = \begin{cases} a_i & , \quad \text{se } C_{i-1} \leq t \leq C_i, \quad 1 \leq i \leq n \\ 0 & , \quad \text{se } C_n \leq t \end{cases},$$

em que $C_0 = 0$.

Assim,

$$\sup_{\alpha > 0} \alpha \lambda_f(\alpha) = \sup_{1 \leq i \leq n} a_i C_i = \sup_{t > 0} t f^*(t),$$

como desejado.

Para o caso em que f é uma função mensurável qualquer, tomamos uma sequência (f_n) de funções simples tal que $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ q.t.p. em X e $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = |f(x)|$.

Assim, usando a proposição 1.1.2 item 3, a proposição 1.2.5 item 5, e a igualdade obtida para funções simples, concluímos a demonstração. ■

Teorema 1.2.7 *Se $0 < p < \infty$, então*

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha, \quad (1.7)$$

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p dt, \quad (1.8)$$

para toda $f \in L^p(\mu)$ e

$$\sup_{\alpha>0} \alpha \lambda_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), \quad (1.9)$$

para toda f mensurável.

No caso em que $p = \infty$, tem-se

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{\alpha : \lambda_f(\alpha) = 0\} = f^*(0). \quad (1.10)$$

Demonstração: Vamos assumir primeiramente que $0 < p < \infty$. Observe que

$$\begin{aligned} \lambda_{|f|^p}(\alpha) &= \mu(\{x \in X : |f(x)|^p > \alpha\}) \\ &= \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \alpha^{\frac{1}{p}}\right\}\right) \\ &= \lambda_f\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right). \end{aligned}$$

Assim, pela igualdade (1.4) do Lema 1.2.6, tem-se

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \int_0^\infty \lambda_{|f|^p}(\alpha) d\alpha = \int_0^\infty \lambda_f\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right) d\alpha = p \int_0^\infty a^{p-1} \lambda_f(a) da,$$

sendo que para a última igualdade usou-se a mudança de variável $a = \alpha^{\frac{1}{p}}$. Logo, (1.7) está provada.

Agora do item 4 da Proposição 1.2.5, e da igualdade (1.5) do Lema 1.2.6, segue que

$$\int_0^\infty (f^*(t))^p dt = \int_0^\infty (|f|^p)^*(t) dt = \int_X |f(x)|^p d\mu,$$

o que prova (1.8).

Para provar (1.9), usa-se o item 4 da Proposição 1.2.5 e a igualdade (1.6) do Lema 1.2.6, para obter

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) &= \sup_{t>0} [t (f^*(t))^p]^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{t>0} [t (|f|^p)^*(t)]^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\alpha>0} (\alpha \lambda_{|f|^p}(\alpha))^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\alpha>0} \left(\alpha \lambda_f\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\beta > 0} (\beta^p \lambda_f(\beta))^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\beta > 0} \beta \lambda_f(\beta)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

O caso em que $p = \infty$, decorre das definições de supremo essencial e da função distribuição, pois

$$\begin{aligned}
\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| &= \inf \{ \alpha : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0 \} \\
&= \inf \{ \alpha : \lambda_f(\alpha) = 0 \} \\
&= f^*(0).
\end{aligned}$$

■

Nosso objetivo agora é provar a famosa desigualdade de Hardy-Littlewood. Para isso, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 1.2.8 *Se E é um conjunto mensurável qualquer, com medida $\mu(E) \leq a$, então*

$$\int_E |f(x)| \, d\mu \leq \int_0^a f^*(t) \, dt. \quad (1.11)$$

Demonstração: Pela igualdade (1.5) do Lema 1.2.6, tem-se

$$\int_E |f(x)| \, d\mu = \int_X |f\chi_E(x)| \, d\mu = \int_0^\infty (f\chi_E)^*(t) \, dt.$$

Agora, pelo item 3 da Proposição 1.2.5, observa-se que $(f\chi_E)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0, \mu(E)]}$. Assim,

$$\int_0^\infty (f\chi_E)^*(t) \, dt \leq \int_0^\infty f^*(t)\chi_{[0, \mu(E)]} \, dt = \int_0^{\mu(E)} f^*(t) \, dt \leq \int_0^a f^*(t) \, dt.$$

Portanto,

$$\int_E |f(x)| \, d\mu \leq \int_0^a f^*(t) \, dt.$$

■

Agora estamos em condições de provar a desigualdade de Hardy-Littlewood, que garante que a integral do produto de funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis não pode ser maior do que a integral do produto dos seus rearranjos.

Teorema 1.2.9 (Desigualdade de Hardy-Littlewood) *Sejam f e g duas funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis, então vale a seguinte desigualdade*

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t) \, g^*(t) \, dt.$$

Demonstração: Mostraremos primeiramente que a desigualdade é válida para funções simples e positivas. Sendo assim, seja f uma função simples e positiva em X , da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x),$$

em que $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} = 0$ e $E_i = \{x \in X : f(x) = a_i\}$, são tais que $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

Observe que podemos rescrever $f(x)$ como

$$f(x) = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{F_i}(x),$$

em que $F_i = \bigcup_{j=1}^i E_j$ e $b_i = a_i - a_{i+1}$. Assim, pelo Lema 1.2.8, tem-se

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)g(x)| \, d\mu &= \int_X \left| \left(\sum_{i=1}^n b_i \chi_{F_i}(x) \right) g(x) \right| \, d\mu \\ &= \int_X \left| \sum_{i=1}^n b_i g(x) \chi_{F_i}(x) \right| \, d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^n b_i \int_{F_i} |g(x)| \, d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) \int_0^{\mu(F_i)} g^*(t) \, dt \\ &= (a_1 - a_2) \int_0^{\mu(E_1)} g^*(t) \, dt + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \int_0^{\sum \mu(E_i)} g^*(t) \, dt \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_{C_{i-1}}^{C_i} g^*(t) \, dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[C_{i-1}, C_i)}(t) g^*(t) \, dt \\ &= \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) \, dt, \end{aligned}$$

em que $C_i = \sum_{j=1}^i \mu(E_j)$ e $C_0 = 0$.

O caso geral, em que f é uma função mensurável qualquer, pode ser provado aplicando-se o teorema da convergência monótona, uma vez f pode ser aproximada por uma sequência não-crescente de funções simples. ■

1.3 A Função Duplo Rearranjo

Nesta seção, vamos definir a função duplo rearranjo de f e provar algumas de suas propriedades.

Definição 1.3.1 *Chama-se duplo rearranjo, a função $f^{**} : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ definida por*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds.$$

A função f^{**} geralmente é chamada de *função maximal de f* , pois pode ser vista como a média da função f^* .

Vale observar que o duplo rearranjo não está definido em $t = 0$, porém

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{**}(t) = f^*(0) = \inf\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) \leq 0\} = \operatorname{ess\,sup}_{x \geq 0} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Algumas propriedades do duplo rearranjo são destacadas no próximo resultado.

Proposição 1.3.2 *Se f e f_n são funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis em X , $n = 1, 2, \dots$, então*

1. f^{**} é uma função não-crescente e contínua em $(0, \infty)$.
2. $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, para todo $t > 0$.
3. Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.t.p. em X , então $f^{**}(t) \leq g^{**}(t)$, para todo $t > 0$.
4. Se (f_n) é uma sequência tal que, $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ q.t.p. em X , e $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = |f(x)|$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{**}(t) = f^{**}(t)$.

Demonstração: A continuidade de f^{**} segue de sua definição e do fato que as funções $\frac{1}{t}$ e $f^*(t)$ são contínuas em $(0, \infty)$.

Agora, se $0 < a < b$, então

$$\begin{aligned} f^{**}(b) &= \frac{1}{b} \int_0^b f^*(s) \, ds \\ &= \frac{1}{b} \int_0^a f^*(s) \, ds + \frac{1}{b} \int_a^b f^*(s) \, ds \\ &\leq \frac{1}{b} \int_0^a f^*(s) \, ds + \frac{1}{b} f^*(a)(b-a), \quad (\text{pois } f^* \text{ é não-crescente}) \\ &= \frac{1}{b} \int_0^a f^*(s) \, ds + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) a f^*(a) \\ &\leq \frac{1}{b} \int_0^a f^*(s) \, ds + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \int_0^a f^*(s) \, ds \quad (\text{pois } f^* \text{ é não-crescente}) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a f^*(s) \, ds = f^{**}(a), \end{aligned}$$

ou seja, f^{**} é não-crescente e o item 1 está provado.

Agora, como f^* é não-crescente, tem-se

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds \geq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(t) \, ds = \frac{1}{t} t f^*(t) = f^*(t),$$

o que mostra o item 2.

Para o item 3, sejam f, g funções tais que $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.t.p. em X . Assim, pelo item 2 da Proposição 1.1.2, segue que $\lambda_f(\alpha) \leq \lambda_g(\alpha)$, ou seja $\{\alpha : \lambda_f(\alpha) > t\} \subset \{\alpha : \lambda_g(\alpha) > t\}$, para todo $t > 0$.

Logo, conclui-se que $m_{\lambda_f}(t) \leq m_{\lambda_g}(t)$, em que m denota a medida de Lebesgue. Portanto, pela Proposição 1.2.2, tem-se $f^{**}(t) \leq g^{**}(t)$, o que conclui a prova de 3.

Para o item 4, por hipótese, tem-se $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ q.t.p. e $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = |f(x)|$. Daí, pelo item 5 da Proposição 1.2.5, temos $f^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(t)$, e $f_n^*(t) \leq f^*(t) \in L^1(0, t)$.

Logo, pelo teorema da convergência dominada, conclui-se que

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(s) \, ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f_n^*(s) \, ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{**}(t). \end{aligned}$$

■

Observação 1.3.3 Vale ainda destacar a subaditividade do duplo rearranjo, ou seja,

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t), \quad \forall t > 0.$$

Esta propriedade será de grande importância para mostrar que os espaços de Lorentz, (ver Definição 2.1.1), podem ser munidos de uma norma, a qual será definida adiante, utilizando-se o duplo rearranjo. Para mais detalhes sobre a demonstração desta propriedade veja, por exemplo, [7].

Para a demonstração da desigualdade de Young, ver Seção 2.3, precisaremos de algumas propriedades do duplo rearranjo do operador convolução. Começaremos definindo tal operador.

Definição 1.3.4 : Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis. A convolução de f e g é a função $h(x)$ dada por

$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy.$$

O resultado a seguir fornece uma estimativa para h^{**} e sua demonstração pode ser encontrada em [8].

Lema 1.3.5 *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis. Então*

$$h^{**}(t) \leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s) g^*(s) ds,$$

para todo $t > 0$.

Como consequência deste lema, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.3.6 *Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis, então*

$$h^{**}(t) \leq \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds, \quad (1.12)$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Se a integral do lado direito da desigualdade acima for infinita, então o resultado é imediato.

Suponha então que

$$\int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds < \infty$$

para todo $t > 0$. Como, além disso, f^* e g^* são não-crescentes, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t f^{**}(t) g^{**}(t) = 0.$$

Pela Proposição 1.3.2, item 2, e pelo Lema 1.3.5, obtém-se

$$h^{**}(t) \leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^{**}(s) g^*(s) ds, \quad \forall t > 0. \quad (1.13)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f^{**}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{t} f^*(t) - \frac{1}{t^2} \int_0^t f^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} (f^*(t) - f^{**}(t)), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt} (t g^{**})(t) = g^{**}(t) + t \frac{d}{dt} g^{**}(t) = g^*(t).$$

Daí, integrando por partes em (1.13), segue que

$$\begin{aligned} h^{**}(t) &\leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + \left[s g^{**}(s) f^{**}(s) \right]_t^\infty - \int_t^\infty \frac{1}{s} [f^*(s) - f^{**}(s)] s g^{**}(s) ds \\ &= \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds - \int_t^\infty f^*(s) g^{**}(s) ds \\ &\leq \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds, \end{aligned}$$

como queríamos.



Capítulo 2

Os Espaços de Lorentz

Neste capítulo, apresentaremos os espaços de Lorentz, introduzidos pelo matemático russo George G. Lorentz (1910-2006) em 1950. Abordaremos também, algumas de suas principais propriedades, as quais serão de fundamental importância para nossos propósitos.

2.1 Definição, Espaços de Lorentz Normados e Algumas Propriedades

Definição 2.1.1 (Espaço de Lorentz) *Sejam $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. O espaço de Lorentz, $L^{(p,q)}$ é o conjunto das funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis tais que*

$$\|f\|_{(p,q)}^* = \begin{cases} \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 0 < p < \infty \text{ e } 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & \text{se } 0 < p \leq \infty \text{ e } q = \infty \end{cases},$$

é finito.

Observação 2.1.2 *O funcional $\|\cdot\|_{(p,q)}^*$ definido acima é uma seminorma, pois a desigualdade triangular não é satisfeita. Porém, para $1 \leq q \leq p$ ou $p = q = \infty$, o funcional $\|\cdot\|_{(p,q)}^*$ define uma norma. Para mais detalhes sobre estes comentários veja [7].*

A seguir, calcularemos $\|f\|_{(p,q)}^*$, em que f é uma função simples.

Exemplo 2.1.3 *Com a notação dos Exemplos (1.1.3) e (1.2.3), quando $0 < p, q < \infty$, tem-se*

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,q)}^* &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[C_{i-1}, C_i)}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1}, C_i)}(t) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left[a_1^q C_1^{\frac{q}{p}} + a_2^q \left(C_2^{\frac{q}{p}} - C_1^{\frac{q}{p}} \right) + \cdots + a_n^q \left(C_n^{\frac{q}{p}} - C_{n-1}^{\frac{q}{p}} \right) \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,\infty)}^* &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1}, C_i)}(t) \\
&= \sup_{1 \leq i \leq n} a_i C_i^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Observação 2.1.4 A expressão para $\|f\|_{(p,q)}^*$ no Exemplo 2.1.3 também é válida para $p = \infty$. Porém, neste caso $\|f\|_{(\infty,q)}^* = \infty$ se pelo menos um dos a_i 's for estritamente positivo. Isso permite concluir que as únicas funções simples com $\|\cdot\|_{(\infty,q)}^*$ finito são as funções nulas q.t.p.

Como toda função mensurável pode ser aproximada por funções simples, pelo exemplo 2.1.3, conclui-se que $L^{(\infty,q)} = \{0\}$, para todo $0 < q < \infty$.

Quando temos $q = \infty$, observe que o espaço $L^{(p,\infty)}$ coincide com o espaço L^p -fraco, também conhecido como espaço de Marcinkiewicz, pois pelo Teorema 1.2.7, igualdade (1.9), tem-se

$$\|f\|_{(p,\infty)}^* = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha \lambda_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\alpha>0} (\alpha^p \lambda_f(\alpha))^{\frac{1}{p}},$$

ou seja, a quase norma $\|\cdot\|_{(p,\infty)}^*$ coincide com a quase norma da definição de L^p -fraco.

Vale ainda lembrar que, os espaços de Lebesgue L^p são casos particulares dos espaços de Lorentz, pois tomando-se $0 < p = q < \infty$, tem-se

$$\|f\|_{(p,p)}^* = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty t (f^*(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

e pelo Teorema 1.2.7, igualdade (1.8), segue que

$$\|f\|_{(p,p)}^* = \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, se $p = \infty$, usando-se o fato de f^* ser não-crescente e o Teorema 1.2.7, igualdade (1.10), tem-se

$$\|f\|_{(\infty,\infty)}^* = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

Assim, conclui-se que $\|f\|_{(p,p)}^* = \|f\|_p$ e, portanto, $L^{(p,p)} = L^p$.

Assim, os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$, são uma classe de espaços que contém tanto os espaços L^p quanto os espaços L^p -fracos.

Observação 2.1.5 Vale ressaltar que a relação de escala dos espaços de Lorentz e a dos espaços L^p coincidem, ou seja, dado $\alpha > 0$ e uma função mensurável f em $\mathbb{R}^n$, tal que $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$, tem-se

$$\|f_\alpha(x)\|_{(p,q)}^* = \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f(x)\|_{(p,q)}^*, \quad (2.1)$$

em que $0 < p, q \leq \infty$.

De fato, seja m a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, assim

$$\begin{aligned} \lambda_{f_\alpha}(\beta) &= m(\{x : |f(\alpha x)| > \beta\}) \\ &= m(\{x\alpha^{-1} : |f(x)| > \beta\}) \\ &= \alpha^{-n} m(\{x : |f(x)| > \beta\}) \\ &= \alpha^{-n} \lambda_f(\beta). \end{aligned}$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} (f_\alpha)^*(t) &= \inf\{\beta > 0 : \lambda_{f_\alpha}(\beta) \leq t\} \\ &= \inf\{\beta > 0 : \lambda_f(\beta) \leq t\alpha^n\} \\ &= f^*(\alpha^n t). \end{aligned}$$

- Para $0 < q < \infty$, segue que

$$\begin{aligned} \|f_\alpha(x)\|_{(p,q)}^* &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} (f_\alpha)^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(\alpha^n t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \alpha^{-\frac{n}{p}} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f(x)\|_{(p,q)}^*. \end{aligned}$$

- Para $q = \infty$, conclui-se que

$$\begin{aligned} \|f_\alpha(x)\|_{(p,\infty)}^* &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f_\alpha)^*(t) \\ &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(\alpha^n t) \\ &= \sup_{t>0} (\alpha^{-n} t)^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\ &= \alpha^{-\frac{n}{p}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\ &= \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f(x)\|_{(p,\infty)}^*. \end{aligned}$$

Nosso objetivo agora, é munir os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ de uma norma. Para isso, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 2.1.6 (Desigualdade de Hardy) Se $1 \leq q < \infty$, $r > 0$ e f é uma função mensurável em $(0, \infty)$, então

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u) du \right)^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (u f(u))^q u^{-r-1} du \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.2)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(u) du \right)^q t^{r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (u f(u))^q u^{r-1} du \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.3)$$

Demonstração: Mostraremos primeiramente que a desigualdade (2.3) é obtida a partir de (2.2). Para isso, considere $f(u) = u^{-2}g(u^{-1})$. Note que, fazendo-se as mudanças de variáveis $v = u^{-1}$ e $s = t^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u) du \right)^q t^{-r-1} dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^t u^{-2}g(u^{-1}) du \right)^q t^{-r-1} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\frac{1}{t}}^\infty g(v) dv \right)^q t^{-r-1} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty g(v) dv \right)^q s^{r-1} ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por outro lado, fazendo-se a mudança de variável $v = u^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (u f(u))^q u^{-r-1} du &= \int_0^\infty (u^{-1}g(u^{-1}))^q u^{-r-1} du \\ &= \int_0^\infty (v g(v))^q v^{r-1} dv. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Assim, de (2.2), com $f(u) = u^{-2}g(u^{-1})$ e das igualdades (2.4) e (2.5), obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty g(v) dv \right)^q s^{r-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u) du \right)^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (u f(u))^q u^{-r-1} du \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (v g(v))^q v^{r-1} dv \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Portanto, é suficiente verificar apenas a desigualdade (2.2).

Uma vez que a função $\varphi(x) = x^q$ é convexa em $(0, \infty)$, realizando-se a mudança de variável $v = \frac{q}{r} u^{\frac{r}{q}}$ e aplicando-se a desigualdade de Jensen (veja, por exemplo, [9]), obtém-se

$$\begin{aligned} \varphi \left(\int_0^t f(u) du \right) &= \left(\int_0^t f(u) u^{1-\frac{r}{q}} u^{\frac{r}{q}-1} du \right)^q \\ &= \left(\int_0^{\frac{q}{r} t^{\frac{r}{q}}} f \left(\left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{q}{r}} v^{\frac{q}{r}} \right) \left(\left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{q}{r}} v^{\frac{q}{r}} \right)^{1-\frac{r}{q}} dv \right)^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(t^{\frac{r}{q}} \frac{q}{r}\right)^q \left(t^{-\frac{r}{q}} \frac{r}{q} \int_0^{\frac{q}{r} t^{\frac{r}{q}}} f\left(\left(\frac{r}{q}\right)^{\frac{q}{r}} v^{\frac{q}{r}}\right) \left(\left(\frac{r}{q}\right)^{\frac{q}{r}} v^{\frac{q}{r}}\right)^{1-\frac{r}{q}} dv\right)^q \\
&\leq \left(t^{\frac{r}{q}} \frac{q}{r}\right)^q \left(t^{-\frac{r}{q}} \frac{r}{q}\right) \int_0^{\frac{q}{r} t^{\frac{r}{q}}} \left[f\left(\left(\frac{r}{q}\right)^{\frac{q}{r}} v^{\frac{q}{r}}\right) \left(\left(\frac{r}{q}\right)^{\frac{q}{r}} v^{\frac{q}{r}}\right)^{1-\frac{r}{q}}\right]^q dv \\
&= t^{r-\frac{r}{q}} \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^t (f(u))^q u^{q-r} u^{\frac{r}{q}-1} du \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} t^{r-\frac{r}{q}} \int_0^t (f(u))^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1} du.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por t^{-r-1} , integrando de 0 a ∞ e usando o Teorema de Fubini, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u) du\right)^q t^{-r-1} dt &\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^\infty t^{-r-1} t^{r-\frac{r}{q}} \left(\int_0^t (f(u))^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1} du\right) dt \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^\infty (f(u))^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1} \left(\int_u^\infty t^{-1-\frac{r}{q}} dt\right) du \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^q \int_0^\infty (f(u))^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1} u^{-\frac{r}{q}} du \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^q \int_0^\infty (u f(u))^q u^{-r-1} du,
\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade (2.2). ■

Trataremos agora do problema de encontrar uma norma adequada para os espaços de Lorentz. No próximo resultado, definiremos tal norma, que será denotada por $\|\cdot\|_{(p,q)}$, e mostraremos sua equivalência com o funcional $\|\cdot\|_{(p,q)}^*$.

Com a norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$, os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ se tornam espaços vetoriais topológicos normados, em que a topologia do espaço é a topologia gerada por $\|\cdot\|_{(p,q)}$.

Proposição 2.1.7 *Se $f \in L^{(p,q)}$, em que $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então $\|\cdot\|_{(p,q)}$ dada por*

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & \text{se } 1 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases},$$

define uma norma e

$$\|f\|_{(p,q)}^* \leq \|f\|_{(p,q)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{(p,q)}^*. \quad (2.6)$$

Demonstração: Primeiramente, mostraremos (2.6). Para isso, lembremos que pela Proposição 1.3.2, item 2, tem-se $f^*(t) \leq f^{**}(t)$. Assim, a primeira desigualdade de (2.6)

é imediata.

Para a segunda desigualdade, considere primeiramente o caso em que $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

Pela desigualdade de Hardy (2.2), com $r = q \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, é possível estimar $\|f\|_{(p,q)}$ como segue

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right)^q t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s) ds \right)^q t^{-q(1-\frac{1}{p})-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \frac{q}{q \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \left(\int_0^\infty (s f^*(s))^q s^{-q(1-\frac{1}{p})-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \frac{p}{p-1} \left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s) \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \frac{p}{p-1} \|f\|_{(p,q)}^*.
 \end{aligned}$$

No caso em que $1 < p \leq \infty$ e $q = \infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s) ds \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}} f^*(s) ds \\
 &\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} \left(\sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}} f^*(u) \right) ds \\
 &= \|f\|_{(p,\infty)}^* \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} ds \\
 &= \|f\|_{(p,\infty)}^* \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \frac{p}{p-1} t^{-\frac{1}{p}+1} \\
 &= \frac{p}{p-1} \|f\|_{(p,\infty)}^*.
 \end{aligned}$$

Agora mostremos que de fato o funcional $\|\cdot\|_{(p,q)}$ é uma norma em $L^{(p,q)}$.

Se $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então $\|f\|_{(p,q)} \geq 0$, e

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{(p,q)} = 0 &\Leftrightarrow f^{**}(t) = 0 \text{ q.t.p.} \Leftrightarrow f^*(t) = 0 \text{ q.t.p.} \\
 &\Leftrightarrow \lambda_f(\alpha) \leq t, \forall t \in (0, \infty), \alpha \in (0, \infty) \\
 &\Leftrightarrow \lambda_f(\alpha) = 0, \forall \alpha \in (0, \infty) \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \text{ q.t.p.}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ q.t.p.}$$

Para provar a desigualdade triangular, usaremos a subaditividade do duplo rearranjo, ver Observação 1.3.3. Para $q = \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f + g)^{**}(t) \\ &\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \\ &= \|f\|_{(p,\infty)} + \|g\|_{(p,\infty)}. \end{aligned}$$

Agora, para $1 \leq q < \infty$, pela desigualdade de Minkowski, segue que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f + g)^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}. \end{aligned}$$

■

A seguir, mostraremos que os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ munidos com a norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$, com $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$ são espaços de Banach. Para isso, precisaremos de um resultado devido ao matemático argentino A. Calderón.

Lema 2.1.8 (Calderón) *Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < r \leq \infty$, então*

$$L^{(p,q)} \hookrightarrow L^{(p,r)},$$

ou seja,

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)}. \quad (2.7)$$

Demonstração: Uma vez que o duplo rearranjo $f^{**} : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ é não-crescente, segue que

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^x \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} + \int_x^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq f^{**}(x) \left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,r)}^r &= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} (f^{**}(t))^r dt \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} (f^{**}(t))^q (f^{**}(t))^{r-q} dt \\ &\leq \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} (f^{**}(t))^q \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{t^{\frac{1}{p}}} \right)^{r-q} dt \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{(p,q)}^{r-q} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f^{**}(t))^q dt \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{(p,q)}^{r-q} \|f\|_{(p,q)}^q \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)}.$$

■

Para mostrar que os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$, em que $0 < p \leq \infty$ e $0 < q \leq \infty$ são completos, precisaremos introduzir um modo de convergência que é frequentemente útil e é conhecido como convergência em medida:

Definição 2.1.9 *Uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis, converge em medida para f se, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Diz-se que a sequência (f_n) é de Cauchy em medida, se

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0,$$

quando $n, m \rightarrow \infty$.

Precisaremos também do resultado a seguir, que envolve a convergência em medida, (ver [5, pg 59]).

Proposição 2.1.10 *Suponha que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em medida, então existe uma função mensurável f , tal que $f_n \rightarrow f$ em medida, e existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para f q.t.p.. Além disso, se $f_n \rightarrow g$ em medida, então $g = f$ q.t.p..*

Demonstração: Seja $(g_k) = (f_{n_k})$ uma subsequência de (f_n) , tal que se

$$E_k = \{x \in X : |g_k(x) - g_{k+1}(x)| \geq 2^{-k}\},$$

então, $\mu(E_k) \leq 2^{-k}$.

Assim, se $F_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k$, então $\mu(F_j) \leq \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-j}$, e se $x \notin F_j$, para $i \geq k \geq j$, tem-se

$$|g_k(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=k}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=k}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{1-k}. \quad (2.8)$$

Assim, a sequência (g_k) é pontualmente de Cauchy em F_j^c .

Seja $F = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j = \limsup E_k$, então

$$\mu(F) = \mu(\limsup E_k) = 0.$$

Considere

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_k & , \quad \text{se } x \notin F \\ 0 & , \quad \text{se } x \in F \end{cases},$$

então f é mensurável e $g_k \rightarrow f$ q.t.p.. Agora, pela desigualdade (2.8), tem-se para $k \geq j$ e $x \notin F_j$,

$$|g_k(x) - f(x)| = |g_k(x) - \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x)| \leq 2^{1-k}.$$

Como $\mu(F_j) \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$, segue que $g_k \rightarrow f$ em medida.

Assim, $f_n \rightarrow f$ em medida, pois

$$\begin{aligned} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} &\subset \{x : |f_n(x) - g_k(x) + g_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \\ &\subset \left\{x : |f_n(x) - g_k(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : |g_k(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) &\leq \mu\left(\left\{x : |f_n(x) - g_k(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\ &\quad + \mu\left(\left\{x : |g_k(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right), \end{aligned}$$

mas $g_k \rightarrow f$ em medida e (f_n) é de Cauchy em medida, então para j e n suficientemente grandes, o lado direito da desigualdade acima é suficientemente pequeno, como gostaríamos.

Agora, de maneira análoga, se $f_n \rightarrow g$ em medida, então

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

para todo n e tem-se

$$\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu\left(\left\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

$$+\mu\left(\left\{x:|f_n(x)-g(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\rightarrow 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$, já que $f_n \rightarrow f$ em medida. Assim, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluí-se que $f = g$ q.t.p., o que conclui a prova. ■

Teorema 2.1.11 *Se $0 < p \leq \infty$ e $0 < q \leq \infty$, então o espaço de Lorentz $L^{(p,q)}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^{(p,q)}$, ou seja,

$$\|f_m - f_n\|_{(p,q)} \rightarrow 0,$$

quando $m, n \rightarrow \infty$. Assim, por (1.9) do Teorema 1.2.7, obtém-se

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha > 0} \alpha (\lambda_{f_m - f_n}(\alpha))^{\frac{1}{p}} &= \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} (f_m - f_n)^*(t) \\ &= \|f_m - f_n\|_{(p,\infty)}^*. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.1.7 e o Lema de Calderón 2.1.8, tem-se

$$\|f_m - f_n\|_{(p,\infty)}^* \leq \|f_m - f_n\|_{(p,\infty)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f_m - f_n\|_{(p,q)} \rightarrow 0,$$

quando $m, n \rightarrow \infty$. Assim, segue que a sequência (f_n) é de Cauchy em medida.

Logo, pela Proposição 2.1.10, existe uma função $\mathcal{M}$ -mensurável f , tal que, $f_n \rightarrow f$ em medida, donde segue que existe uma subsequência $f_{n_k} \rightarrow f$ q.t.p.. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_N\|_{(p,q)} < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > N,$$

e $f_{n_k} - f_N \rightarrow f - f_N$ q.t.p. Daí, $|f_{n_k} - f_N| \rightarrow |f - f_N|$ q.t.p. e pode-se considerar $(|f_{n_k} - f_N|)$ uma sequência crescente (passando a uma subsequência, se necessário), pois $|f - f_N|$ é mensurável e não-negativa. Logo, pela Proposição 1.3.2, item (4), tem-se

$$(f - f_N)^{**} = \lim_{k \rightarrow \infty} |(f_{n_k} - f_N)^{**}| = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_N)^{**} = \liminf_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_N)^{**}.$$

Portanto, usando o lema de Fatou, obtém-se

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} (f - f_N)^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} \liminf_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_N)^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} (f_{n_k} - f_N)^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f_N\|_{(p,q)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_{(p,q)} = 0$$

e, portanto, como $f = f - f_N + f_N$ conclui-se que $f \in L^{(p,q)}$, ou seja, $(L^{(p,q)}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ é um espaço de Banach. ■

O resultado a seguir finaliza a sequência de propriedades topológicas dos espaços de Lorentz que precisaremos neste trabalho. Sua prova pode ser encontrada em [7].

Teorema 2.1.12 *O espaço conjugado de $L^{(p,1)}$ é $L^{(p',\infty)}$, em que p' é o conjugado de p .*

Observação 2.1.13 *Em [4], pode-se encontrar um resultado de aproximação da identidade em espaços de Lorentz. Mais precisamente, se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que, $\int \varphi(x) dx = 1$, para cada $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ é o molificador de Friedrichs e $f \in L^{(p,q)}$, com $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então*

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{(p,q)} \rightarrow 0,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A demonstração desse resultado, baseia-se na continuidade da translação em espaços de Lorentz, que é consequência da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $L^{(p,q)}$, para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

Para encerrar esta seção, vale ainda observar que como o funcional $\|\cdot\|_{(p,q)}^*$, a norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$ também satisfaz a relação de escala:

$$\|f_\alpha(x)\|_{(p,q)} = \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f(x)\|_{(p,q)}, \quad (2.9)$$

se $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$, em que $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, ver Observação 2.1.5.

De fato; já vimos que $(f_\alpha)^*(t) = f^*(\alpha^n t)$, assim

$$\begin{aligned} f_\alpha^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f_\alpha^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(\alpha^n s) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{\alpha^n t} f^*(s) \frac{ds}{\alpha^n} \\ &= \frac{1}{\alpha^n t} \int_0^{\alpha^n t} f^*(s) ds \\ &= f^{**}(\alpha^n t). \end{aligned}$$

Logo, quando $1 \leq q < \infty$, tem-se

$$\|f_\alpha\|_{(p,q)} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f_\alpha^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(\alpha^n t) \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int_0^\infty \left((\alpha^{-n} t)^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{\alpha^n \alpha^{-n} t} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{(p,q)}.
\end{aligned}$$

E quando $q = \infty$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha\|_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_\alpha^{**}(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(\alpha^n t) \\
&= \sup_{t>0} (\alpha^{-n} t)^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
&= \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{(p,\infty)}.
\end{aligned}$$

■

2.2 Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz

O principal resultado desta seção é o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz. A formulação que apresentaremos aqui, em termos de espaços de Lorentz, é devida a A.P. Calderón. No entanto, antes de enunciá-lo, precisaremos de mais alguns conceitos.

Definição 2.2.1 *Seja T um operador de $\mathcal{D}$ no espaço de todas as funções mensuráveis em $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, em que $\mathcal{D}$ é um espaço vetorial de funções mensuráveis em $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Dizemos que T é sublinear se*

1. $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$, $\forall f, g \in \mathcal{D}$,
2. $|T(cf)| = |c||Tf|$, $\forall f \in \mathcal{D}$, $c \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.2.2 *Toda aplicação linear é sublinear.*

Definição 2.2.3 *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida. Se T é um operador sublinear de $L^{(p,1)}(X)$ em $L^{(p,q)}(Y)$, em que $1 \leq p, q \leq \infty$, então diz-se que T é do tipo fraco (p, q) , quando existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|Tf\|_{(p,q)} \leq C \|f\|_{(p,1)}.$$

Definição 2.2.4 *Suponha que $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, com $q_0 \neq q_1$. Sejam σ o segmento de interpolação*

$$\sigma = \left[\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0} \right), \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1} \right) \right],$$

isto é, o segmento de reta no quadrado unitário $\{(x, y); 0 \leq x, y \leq 1\}$, com extremos $\left(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{q_i}\right)$, $i = 0, 1$ e

$$m = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

a inclinação do segmento σ . Para cada função f mensurável em $(0, \infty)$ e para cada $t > 0$, o operador de Calderón S_σ é definido por

$$(S_\sigma f)(t) = t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f(s) \frac{ds}{s} + t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f(s) \frac{ds}{s}.$$

Definição 2.2.5 Um operador T é do tipo fraco $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ se

$$(Tf)^*(t) \leq MS_\sigma(f^*)(t), \quad t > 0,$$

para toda f tal que o lado direito é finito.

O resultado à seguir será utilizado na demonstração do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz e sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 2.2.6 Suponha que $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, com $q_0 \neq q_1$. Um operador T é do tipo fraco $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ se, e somente se, T é dos tipos fraco (p_0, q_0) e (p_1, q_1) .

Teorema 2.2.7 (Interpolação de Marcinkiewicz) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida. Suponha que $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, com $q_0 \neq q_1$. Seja $0 < \theta < 1$ e defina p e q por

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (2.10)$$

Seja T um operador sublinear de $L^{(p_0,1)} + L^{(p_1,1)}(\mu)$ em um espaço de funções mensuráveis em Y . Se T é do tipo fraco (p_i, q_i) , $i = 0, 1$, então existe $B = B(p_i, q_i, \theta)$, tal que, para $1 \leq r \leq \infty$ tem-se

$$T : L^{(p,r)} \rightarrow L^{(q,r)},$$

contínuo de $L^{(p,r)}$ em $L^{(q,r)}$, ou seja,

$$\|Tf\|_{(q,r)} \leq B\|f\|_{(p,r)}.$$

Demonstração: Note que para m como na Definição 2.2.4 e p, q definidos em (2.10), tem-se

$$\frac{1}{m} \left[\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} \right] = \frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}} \left[\frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right] \theta \\
&= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} - \frac{1}{p_0} \\
&= \frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se

$$\frac{1}{m} \left[\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} \right] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}.$$

Pelo Teorema 2.2.6, segue que T é um operador do tipo fraco $(p_0, q_0; p_1, q_1)$. Assim, para o caso em que $r < \infty$, pelas Definições 2.2.5 e 2.1.1, tem-se

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{(q,r)}^* &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{q}} (Tf)^*(t) \right]^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq M \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{q}} S_\sigma(f^*)(t) \right]^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= M \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} + t^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Minkowski, segue que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{(q,r)}^* &\leq M \left(\left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo-se a mudança de variável $t^m = u$ em cada uma das integrais acima, tem-se

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{(q,r)}^* &\leq M \left(\left(\frac{1}{m} \int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{m}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0})} \int_0^u s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{m} \int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{m}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1})} \int_u^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{r}} \right) \\
&\leq M|m|^{-\frac{1}{r}} \left(\left(\int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \int_0^u s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \int_u^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]^r \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{r}} \right) \\
&\leq M|m|^{-\frac{1}{r}} \left(\left(\int_0^\infty \left[\int_0^u s^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(s) ds \right]^r u^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0})r-1} du \right)^{\frac{1}{r}} \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(\int_0^\infty \left[\int_u^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(s) ds \right]^r u^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)r-1} du \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Agora, aplicando as desigualdades de Hardy (2.2) e (2.3) no primeiro e segundo termo do lado direito, respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{(q,r)}^* &\leq M|m|^{-\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{p}} f^*(u) \right]^r \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \left(\int_0^\infty \left[u^{\frac{1}{p}} f^*(u) \right]^r \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{r}} \right) \\ &= B' \|f\|_{(p,r)}^*. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{q-1}{q} \|Tf\|_{(q,r)} \leq \|Tf\|_{(q,r)}^* \leq B' \|f\|_{(p,r)}^* \leq B' \|f\|_{(p,r)},$$

portanto, concluímos que

$$\|Tf\|_{(q,r)} \leq B \|f\|_{(p,r)}.$$

A prova do caso em que $r = \infty$ é análoga. ■

2.3 Desigualdades de Young e Hölder em $L^{(p,q)}$

Teorema 2.3.1 (Desigualdade de Young Generalizada) *Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$. Se $h = g * f$, em que $f \in L^{(p_1, q_1)}$, $g \in L^{(p_2, q_2)}$ e $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$, então $h \in L^{(r,s)}$ quando $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ($s \geq 1$). Isto é,*

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r) \|f\|_{(p_1, q_1)} \|g\|_{(p_2, q_2)}. \quad (2.11)$$

Demonstração: A demonstração será dividida em dois casos: $s = \infty$ e $s < \infty$.

Caso 1: $s = \infty$.

Usando a Proposição 1.3.6 e (2.7), obtém-se

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t) \\ &\leq \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds \right] \\ &= \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} \left(s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s) \right) \left(s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s) \right) ds \right] \\ &\leq \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} \left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s) \right) \left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s) \right) ds \right] \\ &= \|f\|_{(p_1,\infty)} \|g\|_{(p_2,\infty)} \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|f\|_{(p_1,\infty)} \|g\|_{(p_2,\infty)} \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} r t^{-\frac{1}{r}} \right] \\
&= r \|f\|_{(p_1,\infty)} \|g\|_{(p_2,\infty)} \\
&\leq r \left(\frac{q_1}{p_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{(p_1,q_1)} \left(\frac{q_2}{p_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \|g\|_{(p_2,q_2)} \\
&= C(r) \|f\|_{(p_1,q_1)} \|g\|_{(p_2,q_2)}.
\end{aligned}$$

Caso 2: $s < \infty$.

Pela Proposição 1.3.6, tem-se

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)}^s &= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t) \right)^s \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(v) g^{**}(v) dv \right)^s \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Fazendo-se as mudanças de variáveis $t = \frac{1}{y}$ e $v = \frac{1}{u}$, segue que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)}^s &\leq \int_0^\infty \left(y^{-\frac{1}{r}} \int_0^y f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} \right)^s \frac{dy}{y} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2} du \right)^s y^{-\frac{s}{r}-1} dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y F(u) du \right)^s y^{-\tilde{r}-1} dy,
\end{aligned}$$

em que $\tilde{r} = \frac{s}{r}$ e $F(u) = \frac{f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}$. Assim, pela desigualdade de Hardy (2.2), obtém-se

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)}^s &\leq \left(\frac{s}{\tilde{r}} \right)^s \int_0^\infty [u F(u)]^s u^{-\tilde{r}-1} du \\
&= r^s \int_0^\infty \left[u \frac{f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2} \right]^s u^{-\frac{s}{r}} \frac{du}{u} \\
&= r^s \int_0^\infty \left[u^{-1-\frac{1}{r}} f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right) \right]^s \frac{du}{u}.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo-se a mudança de variável $t = \frac{1}{u}$, conclui-se que

$$\|h\|_{(r,s)}^s \leq r^s \int_0^\infty \left[t^{1+\frac{1}{r}} f^{**}(t) g^{**}(t) \right]^s \frac{dt}{t}.$$

Uma vez que $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}$, existem $m_1 \geq 1$ e $m_2 \geq 1$ que satisfazem

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1, \quad \frac{1}{m_1} \leq \frac{s}{q_1}, \quad \frac{1}{m_2} \leq \frac{s}{q_2}.$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder em $L^p(0, \infty)$ com a medida $\mu = \frac{dx}{x}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)} &\leq r \left(\int_0^\infty \left[t^{1+\frac{1}{r}} f^{**}(t) g^{**}(t) \right]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= r \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t) \right]^s \left[t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t) \right]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq r \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t) \right]^{sm_1} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{sm_1}} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t) \right]^{sm_2} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{sm_2}} \\ &= r \|f\|_{(p_1, sm_1)} \|g\|_{(p_2, sm_2)}. \end{aligned}$$

Agora, como $q_1 \leq sm_1$ e $q_2 \leq sm_2$, do Lema de Calderón 2.1.8, conclui-se que

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)} &\leq r \left(\frac{q_1}{p_1} \right)^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{sm_1}} \left(\frac{q_2}{p_2} \right)^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{sm_2}} \|f\|_{(p_1, q_1)} \|g\|_{(p_2, q_2)} \\ &= C(r) \|f\|_{(p_1, q_1)} \|g\|_{(p_2, q_2)}. \end{aligned}$$

■

O resultado a seguir é uma consequência da desigualdade de Young e sua demonstração pode ser encontrada em [5].

Proposição 2.3.2 *Seja $g \in L^{(p,\infty)}$ com $1 < p < \infty$, e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a convolução $h = g * f \in L^{(p,\infty)}$ e vale*

$$\|h\|_{(p,\infty)} \leq C(p) \|f\|_1 \|g\|_{(p,\infty)}. \quad (2.12)$$

Apresentaremos agora, uma generalização da desigualdade de Hölder para os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$, e a sua demonstração pode ser encontrada em [8].

Proposição 2.3.3 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$. Se $h = fg$, em que $f \in L^{(p_1, q_1)}$, $g \in L^{(p_2, q_2)}$ e $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$, então $h \in L^{(r,s)}$, quando*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \quad (s \geq 1).$$

Ou seja,

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r') \|f\|_{(p_1, q_1)} \|g\|_{(p_2, q_2)}, \quad (2.13)$$

em que r' é o índice conjugado de r , isto é, $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$.

Observação 2.3.4 *A desigualdade de Holder generalizada permite-nos concluir que o operador bilinear $(\cdot, \cdot) : L^{(p_1, q_1)} \times L^{(p_2, q_2)} \rightarrow L^{(r,s)}$, definido por $(f, g)(x) = f(x)g(x)$, é contínuo sobre os espaços de Lorentz $L^{(p_1, q_1)} \times L^{(p_2, q_2)}$.*

2.4 A Transformada de Riesz em $L^{(p,q)}$

Nesta seção, vamos definir a transformada de Riesz e enunciar um resultado que garante a sua continuidade no espaço de Lorentz $L^{(p,q)}$, e em particular no espaço de Marcinkiewicz $L^{(p,\infty)}$.

Antes de definirmos a transformada de Riesz, precisaremos introduzir o espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções infinitamente deriváveis em $\mathbb{R}^n$ e de decrescimento rápido no infinito:

Definição 2.4.1 *O espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todas as funções $f \in C^\infty$, tais que a semi-norma*

$$\|f\|_{k,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^k) |\partial^\alpha f(x)|$$

é finita, para qualquer inteiro não negativo k e qualquer multi-índice α .

Definição 2.4.2 *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A k -transformada de Riesz, denotada por R_k , é definida da seguinte forma:*

$$\widehat{R_k f}(\xi) = \frac{i\xi_k}{|\xi|} \widehat{f}(\xi), \quad (2.14)$$

em que $\widehat{f}$ representa a transformada de Fourier de f , definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx.$$

Uma vez que a transformada inversa de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) d\xi,$$

usando algumas propriedades básicas, pode-se verificar que

$$R_k f(x) = \left[\left(\widehat{R_k f} \right) (\xi) \right]^\vee = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(x) \right).$$

Assim, uma definição equivalente a Definição 2.4.2, pode ser dada da seguinte forma:

$$R_k f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(x) \right), \quad (2.15)$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ é o operador de Laplace.

Observação 2.4.3 *Em [10, pg. 39], E. Stein mostra que a transformada de Riesz, $R_k = \partial_k(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, é contínua em L^p , em que $1 < p < \infty$. Este resultado é clássico e será importante para obter a continuidade de R_k nos espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$, em que $1 < p < \infty$ e $q = \infty$.*

Teorema 2.4.4 *A k -transformada de Riesz, $R_k = \partial_k(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, $k = 1, \dots, n$, é contínua em $L^{(p,\infty)}$, em que $1 < p < \infty$.*

Demonstração: A transformada de Riesz é um operador sublinear e é contínua em L^p , pela Observação 2.4.3.

Considere $1 < p_0 < p_1 < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$.

Ainda pela Observação 2.4.3, tem-se R_k contínua em L^{p_i} , com $i = 0, 1$. Assim, pelo Lema de Calderón 2.1.8, obtém-se

$$\|R_k f\|_{p_i} \leq C \|f\|_{p_i} = C \|f\|_{(p_i, p_i)} \leq C' \|f\|_{(p_i, 1)},$$

ou seja, R_k é do tipo fraco (p_i, p_i) , com $i = 0, 1$.

Logo, pelo Teorema de Interpolação 2.2.7, segue que

$$\|R_k f\|_{(p, r)} \leq B \|f\|_{(p, r)},$$

em que $1 \leq r \leq \infty$. Em particular, toma-se $r = \infty$ para concluir que R_k é contínua em $L^{(p, \infty)}$. ■

Capítulo 3

Soluções Mild no Espaço $L^{(p,\infty)}$

Neste capítulo, trataremos do problema de Cauchy para a equação de Navier-Stokes. Seguindo o procedimento padrão para a análise de uma equação diferencial, procuraremos por soluções do problema em questão, em um sentido mais fraco, de forma que a solução do problema original seja também uma solução no sentido mais fraco. A solução fraca que abordaremos neste trabalho será a solução mild. Nosso objetivo é garantir a existência de solução mild global para a equação de Navier-Stokes, quando a velocidade inicial pertence ao espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$ —fraco e tem norma suficientemente pequena.

3.1 Problema de Cauchy para a Equação de Navier-Stokes

Nesse trabalho, consideraremos o problema de valor inicial para as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^n$. Essas equações descrevem o movimento de um fluido viscoso e incompressível. Por simplicidade, consideraremos que não existem forças externas agindo sobre o fluido. O conjunto de equações que descreve tal comportamento é dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. , \quad (3.1)$$

em que $u(x, t)$ e $p(t, x)$ representam, respectivamente, o campo de velocidades e a pressão do fluido no instante $t > 0$ e na posição $x \in \mathbb{R}^n$ e $u_0(x)$ é a velocidade inicial. As constantes ν e $\rho > 0$ representam, respectivamente, o coeficiente de viscosidade e a densidade do fluido. Por simplicidade, assumiremos que $\nu = 1$ e $\rho = 1$, ou seja, o fluido é homogêneo.

Como usual, $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n} \right)$ denota o gradiente de p e $\nabla \cdot u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ o divergente de $u = (u_1, \dots, u_n)$. Acima, entendemos $(u \cdot \nabla)u$ como o campo cuja j -ésima componente é dada por $(u \cdot \nabla)u_j = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$.

A primeira equação em (3.1) é a conservação de momento e a segunda, a conservação de massa (condição de incompressibilidade).

Para estudarmos o problema de Cauchy (3.1) usaremos soluções mild, também chamadas de brandas, as quais satisfazem a equação integral proveniente do princípio de D'uhamel. Porém, antes de tornarmos precisa a noção de solução para (3.1), precisaremos estabelecer algumas notações e definições.

Para isso, seja u um campo que satisfaz $\nabla \cdot u = 0$. Nestas condições, pode-se escrever

$$(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot (u \otimes u) = \left(\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right),$$

em que $u \otimes u$ é a matriz dada por

$$(u \otimes u)_{ij} = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \dots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \dots & u_n^2 \end{pmatrix},$$

em que $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Um argumento clássico que usaremos para encontrar as soluções para (3.1), é transformar este problema de Cauchy, que depende das incógnitas u e p , em um sistema que dependerá apenas da incógnita $u = (u_1, \dots, u_n)$. Note que a pressão p pode ser recuperada posteriormente, utilizando-se $\nabla \cdot u = 0$. Para aplicar tal técnica, é necessário usar o projetor de Leray $\mathbb{P}$, dado por

$$\mathbb{P}u = u + (R_1 \sigma, R_2 \sigma, \dots, R_n \sigma), \quad (3.2)$$

em que $\sigma = \sum_{k=1}^n R_k u_k$ e R_k é a k -transformada de Riesz. Como vimos no Capítulo 2, Seção 2.4, a transformada de Riesz R_k é definida via transformada de Fourier por

$$\widehat{R_k f}(\xi) = \frac{i \xi_k}{|\xi|} \widehat{f}(\xi)$$

e pode ser reescrita da seguinte forma

$$R_k f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(x) \right).$$

Assim, pode-se escrever $R_k \sigma$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_k \sigma &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \left(\sum_{i=1}^n R_i u_i \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} u_i \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \nabla \cdot \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} u \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{(-\Delta)} \nabla \cdot u \right)
\end{aligned}$$

e, portanto, o projetor de Leray $\mathbb{P}$ pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}u &= u + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{(-\Delta)} \nabla \cdot u, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{(-\Delta)} \nabla \cdot u \right) \\
&= u + \nabla \left(\frac{1}{(-\Delta)} \nabla \cdot u \right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Vale ainda ressaltar que o projetor de Leray comuta com derivadas, que $\mathbb{P}(\nabla p) = 0$ e que ele tem a seguinte propriedade

$$\nabla \cdot [\mathbb{P}u] = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot u = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}u = u.$$

Para mais informações sobre o projetor de Leray veja, por exemplo, [6].

Agora, com a aplicação formal do projetor de Leray a (3.1), tem-se o seguinte sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mathbb{P}[\nabla \cdot (u \otimes u)] = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, \, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, \, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \, \nabla \cdot u_0 = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{3.4}$$

3.1.1 O Problema Linear Associado a (3.4)

Note que o problema linear associado ao sistema (3.4) nada mais é do que o problema de Cauchy para a equação linear do calor em $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \text{em } x \in \mathbb{R}^n, \, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right., \tag{3.5}$$

que trata-se de um problema clássico da literatura de EDP's.

É bem conhecido que uma aplicação da transformada de Fourier em (3.5) fornece, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixado, o seguinte pvi:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + 4\pi^2|\xi|^2)\hat{u}(t, \xi) = 0 \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{array} \right., \tag{3.6}$$

que possui uma única solução, dada por

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}_0(\xi)\hat{g}(t, \xi), \tag{3.7}$$

em que $\hat{g}(t, \xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$.

Sabe-se também, que a solução de (3.5), é obtida através da aplicação da transformada inversa a (3.7), ou seja, tem-se

$$u(t, x) = g(t, x) * u_0(x), \quad (3.8)$$

em que

$$g(t, x) = \left(e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \right)^\vee (x) = (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, \quad (3.9)$$

o qual é chamado de núcleo de Gauss-Weierstrass.

A solução (3.8) do problema linear (3.5) gera um semi-grupo $S(t)$ via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass (3.9), isto é,

$$u(t, x) = g(t, x) * u_0(x) = S(t)u_0(x). \quad (3.10)$$

Para mais detalhes sobre a discussão acima veja, por exemplo, [3]. No que segue, nos referimos a $S(t)$ e $g(t, x)$ como semigrupo do calor e núcleo do calor, respectivamente.

3.1.2 Estimativas do Semigrupo do Calor $S(t)$

Nesta seção, vamos obter algumas estimativas para o núcleo de Gauss-Weierstrass $g(t, x)$ e para o semigrupo do calor $S(t)$ em espaços de Lorentz.

Primeiramente, verificaremos algumas propriedades de homogeneidade de $g(t, x)$, que serão úteis para nossos propósitos.

Lema 3.1.1 *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, tem-se*

$$g(t, x) = t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}), \quad (3.11)$$

$$(\nabla_x^k g)(t, x) = t^{-\frac{n+k}{2}} (\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

Demonstração: A igualdade (3.11) segue dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} g(t, x) &= (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \\ &= t^{-\frac{n}{2}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|t^{-\frac{1}{2}}x\|^2}{4}} \\ &= t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Agora, para provar (3.12), aplica-se a regra da cadeia k vezes a igualdade (3.11), para obter

$$\begin{aligned} (\nabla_x^k g)(t, x) &= \nabla_x^k (t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}})) \\ &= \nabla_x^k \left(t^{-\frac{n}{2}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|t^{-\frac{1}{2}}x\|^2}{4}} \right) \\ &= t^{-\frac{n+k}{2}} (\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

■

Agora, utilizando-se o Lema 3.1.1, a desigualdade de Young generalizada 2.3.1 e a relação de escala em espaços de Lorentz (2.9), tem-se o seguinte resultado:

Lema 3.1.2 *Sejam $1 < p \leq r < \infty$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Se $f \in L^{(p, q_1)}$, então $\nabla_x^k S(t)f \in L^{(r, q_2)}$ e vale*

$$\|\nabla_x^k S(t)f\|_{(r, q_2)} \leq Ct^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) - \frac{k}{2}} \|f\|_{(p, q_1)}. \quad (3.13)$$

Demonstração: Sejam $q \geq 1$, $l \geq 1$, tais que

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{l} \geq \frac{1}{q_2}.$$

Uma vez que $\nabla_x^k S(t)f = (\nabla_x^k g(t, x)) * f$ e $f \in L^{(p, q_1)}$, pela desigualdade de Young generalizada (2.11), obtém-se $\nabla_x^k S(t)f \in L^{(r, q_2)}$ e

$$\|\nabla_x^k S(t)f\|_{(r, q_2)} \leq C(r) \|(\nabla_x^k g)(t, x)\|_{(q, l)} \|f\|_{(p, q_1)}. \quad (3.14)$$

Por outro lado, pela igualdade (3.12) e pela relação de escala nos espaços de Lorentz $L^{(q, l)}$ (2.9), obtém-se

$$\begin{aligned} \|(\nabla_x^k g)(t, x)\|_{(q, l)} &= \|t^{-\frac{n+k}{2}} (\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q, l)} \quad (\text{por (3.12)}) \\ &= t^{-\frac{n+k}{2}} \|(\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q, l)} \\ &= t^{-\frac{n+k}{2}} t^{\frac{n}{2q}} \|(\nabla_x^k g)(1, x)\|_{(q, l)} \quad (\text{por (2.9)}) \\ &= C(q, l) t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) - \frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

Substituindo $\|(\nabla_x^k g)(t, x)\|_{(q, l)}$ por $C(q, l) t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) - \frac{k}{2}}$ em (3.14), obtém-se o resultado. ■

Observação 3.1.3 *No caso dos espaços de Lebesgue L^r , mostra-se (3.13) para $1 \leq p \leq r \leq \infty$ (ou seja, inclui-se os casos extremos em que $p = 1$ e $r = \infty$), isto é,*

$$\|\nabla_x^k S(t)f\|_r \leq Ct^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) - \frac{k}{2}} \|f\|_p. \quad (3.15)$$

De fato, para provar esta afirmação, utiliza-se o mesmo argumento usado para a demonstração do Lema 3.1.2, porém neste caso, aplica-se a desigualdade de Young em L^r , que é dada por

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

em que $1 \leq p, q, r \leq \infty$, com $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Estimando $\|(\nabla_x^k g)(t, x)\|_q$ para este caso, obtém-se

$$\begin{aligned} \|(\nabla_x^k g)(t, x)\|_q &= t^{-\frac{n+k}{2}} \|(\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}})\|_q \\ &= t^{-\frac{n+k}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}})|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^{-\frac{n+k}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x^k \left(\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|t^{-\frac{1}{2}}x\|^2}{4}} \right) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= t^{-\frac{n+k}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_y^k \left(\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4}} \right) \right|^q \frac{dy}{t^{-\frac{n}{2}}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{em que } y = t^{-\frac{1}{2}}x) \\
&= t^{-\frac{n+k}{2}} t^{\frac{n}{2q}} \|(\nabla_x^k g)(1, x)\|_q \\
&= C t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}},
\end{aligned}$$

donde segue o resultado.

3.1.3 Formulação Integral do Problema

Nessa seção, derivaremos a formulação integral associada ao sistema (3.4).

Seja u uma solução clássica de (3.4), e defina $\psi(s) = S(t-s)u(s, x)$, em que $S(t)$ é o semigrupo do calor. Como

$$\psi(s) = S(t-s)u(s, x) = g(t-s, x) * u(s, x),$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \psi(s) &= \frac{\partial}{\partial s} (g(t-s, x) * u(s, x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(t-s, x-y) u(s, y) dy \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial}{\partial s} (g(t-s, x-y)) u(s, y) + g(t-s, x-y) \frac{\partial}{\partial s} (u(s, y)) \right] dy.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Mostremos agora que

$$\frac{\partial}{\partial s} (g(t-s, x-y)) = -\Delta (g(t-s, x-y)). \tag{3.17}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} (g(t-s, x-y)) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}} \right) \\
&= \frac{4n\pi}{2[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}} + \frac{1}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}} \frac{\|x-y\|^2(-4)}{[4(t-s)]^2} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}} \\
&= \left[\frac{n}{2(t-s)} - \frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)^2} \right] \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}}}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (g(t-s, x-y)) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}} \right)$$

$$= \frac{-(x_i - y_i)}{2(t-s)} \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}}}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i x_i} (g(t-s, x-y)) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{-(x_i - y_i)}{2(t-s)} \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}}}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}} \right) \\ &= \left[\frac{-1}{2(t-s)} + \frac{(x_i - y_i)^2}{4[(t-s)]^2} \right] \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}}}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, de (3.18) e (3.19), tem-se

$$\begin{aligned} -\Delta(g(t-s, x-y)) &= \left[\frac{n}{2(t-s)} - \frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)^2} \right] \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}}}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (g(t-s, x-y)), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Agora, como ψ é diferenciável, aplicando a igualdade (3.17) a (3.16), e utilizando propriedades básicas da convolução, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \psi(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta(g(t-s, x-y)) u(s, y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} g(t-s, x-y) \frac{\partial}{\partial s} (u(s, y)) dy \\ &= S(t-s) \frac{\partial}{\partial s} (u(s, x)) - \Delta S(t-s) u(s, x) \\ &= S(t-s) (\Delta u(s, x) - \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(s, x)) - \Delta S(t-s) u(s, x) \\ &= S(t-s) \Delta u(s, x) - S(t-s) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(s, x) - S(t-s) \Delta u(s, x) \\ &= -S(t-s) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(s, x). \end{aligned}$$

Integrando de 0 até t a última igualdade, e lembrando que $\psi(0) = S(t-0)u(0, x) = S(t)u_0(x)$ e $\psi(t) = S(0)u(t, x) = u(t, x)$, obtém-se

$$\psi(t) - \psi(0) = - \int_0^t S(t-s) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(s, x) ds,$$

ou seja,

$$u(t, x) - S(t)u_0(x) = - \int_0^t S(t-s) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(s, x) ds.$$

Uma vez que o projetor de Leray $\mathbb{P}$ comuta com derivadas e a ação do semi-grupo $S(t)$ é expressa como sendo uma convolução, tem-se

$$u(t, x) = S(t)u_0(x) - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P} (u \otimes u)(s, x) ds. \quad (3.20)$$

Portanto, concluí-se que toda solução clássica do sistema (3.4) satisfaz a equação

integral (3.20).

Agora estamos em condições de definir a noção de solução que será utilizada neste trabalho.

Definição 3.1.4 *Soluções que satisfazem (3.20) são chamadas de soluções mild para o problema de Cauchy (3.4).*

Com o intuito de tornar mais simples a expressão (3.20), a parte não linear será denotada por:

$$B(u, v)(t, x) = - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds. \quad (3.21)$$

Portanto, (3.20) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u(t, x) = S(t)u_0 + B(u, u)(t, x). \quad (3.22)$$

3.2 Scaling das Equações de Navier-Stokes e Espaços Funcionais

Nesta seção, apresentaremos os espaços funcionais do tipo Kato-Fujita nos quais estudaremos a equação integral (3.20). Por simplicidade, cometeremos um abuso de notação ao denotar espaços de funções vetoriais e espaços de funções escalares da mesma forma. Uma vez que também desejamos encontrar soluções auto-similares, devemos escolher os “índices” adequados de modo que as normas destes espaços sejam invariantes pela relação de escala ou scaling de (3.4), cuja definição é dada por:

Definição 3.2.1 *Considere $u(t, x)$ uma solução clássica de (3.4). Definimos u_α por*

$$u_\alpha(t, x) := \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x), \quad \forall \alpha > 0. \quad (3.23)$$

A aplicação

$$u \mapsto u_\alpha \quad (3.24)$$

é chamada de scaling de (3.4).

Observação 3.2.2 *Não é difícil ver que se $u(t, x)$ é uma solução clássica da equação de Navier-Stokes (3.4), então $u_\alpha(t, x) = \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)$ também o é. De fato; aplicando a regra da cadeia, obtém-se*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(t, x) &= \alpha \frac{\partial}{\partial t}(u(\alpha^2 t, \alpha x)) \\ &= \alpha^3 \frac{\partial u}{\partial t}(\alpha^2 t, \alpha x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(u_\alpha \cdot \nabla u_\alpha)(t, x) &= \mathbb{P}[\alpha u(\alpha^2 t, \alpha x) \cdot \alpha \nabla u(\alpha^2 t, \alpha x)] \\ &= \mathbb{P}(\alpha^3 u \cdot \nabla u)(\alpha^2 t, \alpha x) \\ &= \alpha^3 \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(\alpha^2 t, \alpha x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-\Delta u_\alpha)(t, x) &= -\Delta [\alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)] \\
&= \alpha^3 (-\Delta u)(\alpha^2 t, \alpha x).
\end{aligned}$$

Assim, somando as três igualdades acima, e usando o fato de $u(t, x)$ ser solução de (3.4), segue que

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \Delta u_\alpha + \mathbb{P}[\nabla \cdot (u_\alpha \otimes u_\alpha)] = \alpha^3 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mathbb{P}[\nabla \cdot (u \otimes u)] \right) = 0,$$

ou seja, $u_\alpha(t, x)$ também é solução de (3.4), para todo $\alpha > 0$.

O scaling (3.23) é o único dentre todos os da forma $\alpha^k u(\alpha^2 t, \alpha x)$, com a propriedade de que u_α é solução de (3.4) sempre que u também o for.

Sendo assim, uma questão natural que se coloca é sobre a existência de soluções invariantes por scaling. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.2.3 *Seja $u = u(t, x)$ uma solução (3.4). Dizemos que tal solução é auto-similar se satisfaz*

$$u(t, x) = u_\alpha(t, x) = \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x), \quad (3.25)$$

para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$.

Note que, formalmente, fazendo $t \rightarrow 0^+$ em (3.24), segue que

$$\begin{array}{ccc}
u(x, t) & \mapsto & \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x) \\
\mathcal{D}' \downarrow & & \mathcal{D}' \downarrow \\
u_0(x) & \mapsto & \alpha u_0(\alpha x),
\end{array}$$

ou seja, para que u seja auto-similar, devemos tomar u_0 homogênea de grau -1 , isto é

$$u_0(x) = \alpha u_0(\alpha x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mais precisamente, se $u(t, x)$ é uma solução mild auto-similar com $u(t, x) \rightharpoonup u_0$, quando $t \rightarrow 0^+$, então para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha(t, x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x) \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{1-n} u(\alpha^2 t, x) \varphi(\alpha^{-1} x) dx \\
&\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{1-n} u_0(x) \varphi(\alpha^{-1} x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha u_0(\alpha x) \varphi(x) dx,
\end{aligned}$$

isto é, $u_\alpha(t, x) \rightharpoonup \alpha u_0(\alpha x)$. Uma vez que $u(t, x) = u_\alpha(t, x)$, pela unicidade do limite, segue que $\alpha u_0(\alpha x) = u_0(x)$, ou seja, o dado inicial u_0 é uma função homogênea de grau -1 .

Pela discussão acima, percebe-se que os espaços adequados para se encontrar as soluções auto-similares são os que contém as funções homogêneas de grau -1 .

Exemplo 3.2.4 *Os seguintes campos de vetores em $\mathbb{R}^3$,*

$$\left(0, -\frac{x_3}{\|x\|^2}, \frac{x_2}{\|x\|^2}\right), \left(\frac{x_3}{\|x\|^2}, 0, -\frac{x_1}{\|x\|^2}\right), \left(-\frac{x_2}{\|x\|^2}, \frac{x_1}{\|x\|^2}, 0\right)$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3)$, são exemplos de funções homogêneas de grau -1 . Além disso eles satisfazem $\nabla \cdot u = 0$.

Note que qualquer combinação linear dos campos de vetores acima, isto é,

$$u(x) = \alpha_1 \left(0, -\frac{x_3}{\|x\|^2}, \frac{x_2}{\|x\|^2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{x_3}{\|x\|^2}, 0, -\frac{x_1}{\|x\|^2}\right) + \alpha_3 \left(-\frac{x_2}{\|x\|^2}, \frac{x_1}{\|x\|^2}, 0\right),$$

é homogênea de grau -1 e satisfaz $\nabla \cdot u(x) = 0$.

Observe que uma função u como no Exemplo 3.2.4 pertence ao espaço $L^{(3,\infty)}(\mathbb{R}^3)$, mas não ao espaço $L^3(\mathbb{R}^3)$.

De fato; considere

$$u_1(x) = \left(0, -\frac{x_3}{\|x\|^2}, \frac{x_2}{\|x\|^2}\right).$$

Assim

$$\begin{aligned} \lambda_{u_1}(\alpha) &= m(\{x : \|u_1(x)\| > \alpha\}) \\ &= m\left(\left\{x : \left(\frac{x_3^2}{\|x\|^4} + \frac{x_2^2}{\|x\|^4}\right)^{\frac{1}{2}} > \alpha\right\}\right) \\ &= m\left(\left\{x : \frac{x_3^2 + x_2^2}{\|x\|^4} > \alpha^2\right\}\right) \\ &= m\left(\left\{x : \frac{1}{\|x\|^2} > \alpha^2 + \frac{x_1^2}{\|x\|^4}\right\}\right) \\ &= m\left(\left\{x : 1 > \alpha^2\|x\|^2 + \frac{x_1^2}{\|x\|^2}\right\}\right). \end{aligned}$$

Agora, observe que o conjunto

$$\left\{x : 1 > \alpha^2\|x\|^2 + \frac{x_1^2}{\|x\|^2}\right\} \subset \left\{x : -\frac{1}{\alpha} \leq x_1 \leq \frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha} \leq x_2 \leq \frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha} \leq x_3 \leq \frac{1}{\alpha}\right\} = R,$$

e $m(R) = \frac{8}{\alpha^3}$, ou seja,

$$\lambda_{u_1}(\alpha) \leq \frac{8}{\alpha^3}.$$

Assim,

$$\sup_{\alpha>0} \alpha^3 \lambda_{u_1}(\alpha) \leq \sup_{\alpha>0} \alpha^3 \frac{8}{\alpha^3} = 8 < \infty.$$

Portanto, $u_1(x) \in L^{(3,\infty)}(\mathbb{R}^3)$. Analogamente, mostra-se que os outros campos de vetores, e portanto a combinação linear deles, u , pertence ao espaço $L^{(3,\infty)}(\mathbb{R}^3)$.

Por outro lado, utilizando as coordenadas esféricas, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|u_1(x)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \|u_1(x)\|^3 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{x_3^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2} \right)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{r^4} \right)^{\frac{3}{2}} r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{r^2} \right)^{\frac{3}{2}} r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \varphi}{r^3} r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^4 \varphi}{r} d\varphi d\theta dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2}{r} d\varphi d\theta dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}}{4r} d\varphi d\theta dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{4r} \left(\varphi - \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right)_0^\pi d\theta dr \\
&= \int_0^\infty \frac{2\pi}{4r} \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) dr \\
&= \frac{3\pi^2}{4} \int_0^\infty \frac{1}{r} dr = \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $u_1(x) \notin L^3(\mathbb{R}^3)$. De maneira análoga, mostra-se que u também não pertence ao espaço $L^3(\mathbb{R}^3)$.

Note que o Exemplo 3.2.4 produz uma situação complicada, pois espera-se que os espaços L^p sejam os ambientes naturais para se trabalhar.

Na realidade, não há qualquer função homogênea nos espaços L^p , pois caso contrário, se $u(x) \neq 0$ q.t.p. fosse uma função homogênea de grau $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ neste espaço, teríamos

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|_p^p &= \|u(\alpha x)\|_p^p \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \|u(\alpha x)\|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \|\alpha^q u(x)\|^p dx \\
&= \alpha^{qp} \|u(x)\|_p^p,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(1 - \alpha^{pq}) \|u(x)\|_p^p = 0,$$

para todo $\alpha > 0$.

Como $qp \neq 0$, tem-se $\|u(x)\|_p^p = 0$, o que é um absurdo.

Uma vez que o espaço $L^{(n,\infty)}(\mathbb{R}^n)$ é a extensão mais natural de $L^n(\mathbb{R}^n)$ que contém as funções homogêneas de grau -1 , trabalharemos com o dado inicial em $L^{(n,\infty)}(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, como já observado anteriormente, se desejamos obter soluções auto-similares de (3.4), em certos espaços funcionais, então as normas desses espaços devem ser invariantes pela relação de escala (3.24). Assim, vamos definir os espaços funcionais de Kato-Fujita, que serão os espaços que iremos utilizar daqui por diante.

Definição 3.2.5 *Sejam $n \geq 2$ um número inteiro positivo e $1 \leq q < \infty$ um número fixado qualquer. Com isso, definimos os seguintes espaços de Banach das funções vetoriais $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:*

$$E = \{u; u(t, x) \in BC((0, \infty), L^{(n,\infty)}), \nabla \cdot u = 0\}, \quad (3.26)$$

$$E_q = \left\{u \in E; t^{\frac{1}{2} - \frac{n}{2q}} u(t, x) \in BC((0, \infty), L^{(q,\infty)})\right\}, \quad (3.27)$$

em que o espaço $BC((0, \infty), X)$ representa o espaço de todas as funções contínuas e limitadas definidas em $(0, \infty)$ e com valores em X .

Cada espaço é munido, respectivamente, com as seguintes normas,

$$\|u\|_E = \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(n,\infty)}, \quad (3.28)$$

$$\|u\|_{E_q} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2} - \frac{n}{2q}} \|u(t, x)\|_{(q,\infty)} + \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(n,\infty)}. \quad (3.29)$$

Observação 3.2.6 *Os índices $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{n}{2q}$ e $\beta = 0$, em*

$$\|u\|_{E_q} = \sup_{t>0} t^\lambda \|u(t, x)\|_{(q,\infty)} + \sup_{t>0} t^\beta \|u(t, x)\|_{(n,\infty)},$$

são escolhidos de forma a tornar $\|\cdot\|_{E_q}$ invariante pelo scaling (3.24), isto é, de forma que $\|u\|_{E_q} = \|u_\alpha\|_{E_q}$, $\forall \alpha > 0$.

De fato; note que

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t, x)\|_{E_q} &= \sup_{t>0} t^\lambda \alpha \|u(\alpha^2 t, \alpha x)\|_{(q,\infty)} + \sup_{t>0} t^\beta \alpha \|u(\alpha^2 t, \alpha x)\|_{(n,\infty)} \\ &= \sup_{s>0} \alpha \left(\frac{s}{\alpha^2}\right)^\lambda \|u(s, \alpha x)\|_{(q,\infty)} + \sup_{s>0} \alpha \left(\frac{s}{\alpha^2}\right)^\beta \|u(s, \alpha x)\|_{(n,\infty)} \\ &= \sup_{s>0} \alpha^{1-2\lambda} s^\lambda \|u(s, \alpha x)\|_{(q,\infty)} + \sup_{s>0} \alpha^{1-2\beta} s^\beta \|u(s, \alpha x)\|_{(n,\infty)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por outro lado, lembrando a relação de escala dos espaços de Lorentz (2.9), tem-se

$$\|u(s, \alpha x)\|_{(q,\infty)} = \alpha^{-\frac{n}{q}} \|u(s, x)\|_{(q,\infty)} \quad e \quad \|u(s, \alpha x)\|_{(n,\infty)} = \alpha^{-1} \|u(s, x)\|_{(n,\infty)} \quad (3.31)$$

Assim, usando (3.30) e (3.31), segue que

$$\|u_\alpha(t, x)\|_{E_q} = \sup_{s>0} \alpha^{1-2\lambda-\frac{n}{q}} s^\lambda \|u(s, x)\|_{(q,\infty)} + \sup_{s>0} \alpha^{-2\beta} s^\beta \|u(s, x)\|_{(n,\infty)}. \quad (3.32)$$

Logo, para que valha

$$\|u_\alpha(t, x)\|_{E_q} = \|u(t, x)\|_{E_q},$$

é necessário e suficiente que $1 - 2\lambda - \frac{n}{q} = 0$ e $-2\beta = 0$, ou seja, $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{n}{2q}$ e $\beta = 0$.

Como os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ são espaços de Banach pelo Teorema 2.1.11, segue que os espaços E e E_q com as respectivas normas definidas acima $\|\cdot\|_E$ e $\|\cdot\|_{E_q}$ também são espaços de Banach.

3.3 Boa Colocação nos Espaços $L^{(p,\infty)}$

Nesta seção, apresentaremos os resultados de existência e unicidade de soluções nos espaços L^p -fraco, ou seja, em $L^{(p,\infty)}$. Começaremos tornando precisa a noção de solução mild em $L^{(p,\infty)}$, associada a equação de Navier-Stokes (3.4).

Definição 3.3.1 *Seja $u_0 \in L^{(n,\infty)}$, com $\nabla \cdot u_0 = 0$. Diz-se que $u = u(t, x)$ é uma solução mild global do problema de Cauchy (3.4) em E_q , se a função u satisfaz a equação integral (3.22), ou seja,*

$$u(t, x) = S(t)u_0(t) + B(u, u)(t, x),$$

e $u(t, x) \rightharpoonup u_0$, quando $t \rightarrow 0^+$, em que o limite tomado é definido na topologia fraca-* de $L^{(n,\infty)}$.

O resultado a seguir é um dos principais resultados tratados neste trabalho e garante a existência e unicidade da solução mild no espaço E_q .

Teorema 3.3.2 (Existência e Unicidade de Solução) *Seja $u_0 \in L^{(n,\infty)}$ com $\nabla \cdot u_0 = 0$. Existem $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que, se $\|u_0\|_{(n,\infty)} < \varepsilon$, então existe uma solução global mild para o problema de Cauchy (3.4), $u(t, x) \in E_q$, que satisfaz $\|u\|_{E_q} \leq 2C\varepsilon$. Além disso, a solução é única na bola fechada $\overline{B}_{2C\varepsilon}(0)$.*

Antes de demonstrarmos o Teorema 3.3.2, precisaremos de uma série de resultados auxiliares. Começaremos com um lema abstrato, cuja demonstração é uma aplicação do Teorema do ponto fixo de Banach para contrações.

Lema 3.3.3 (Lema Abstrato) *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $B : X \times X \rightarrow X$ um operador bilinear contínuo, ou seja, existe $k > 0$, tal que*

$$\|B(x, y)\|_X \leq k\|x\|_X\|y\|_X, \quad \forall (x, y) \in X \times X.$$

Seja $y \in X$, $y \neq 0$ e $\|y\|_X \leq \varepsilon$. Se $4k\varepsilon < 1$, então existe uma solução $x \in X$ para a equação $x = y + B(x, x)$, tal que $\|x\|_X \leq 2\varepsilon$, a qual é única na bola fechada $\overline{B}_{2\varepsilon}(0)$. Mais ainda, essa solução depende continuamente de y , ou seja, se $\|\bar{y}\|_X \leq \varepsilon$, $\bar{x} = \bar{y} + B(\bar{x}, \bar{x})$, e $\|\bar{x}\|_X \leq 2\varepsilon$, então

$$\|x - \bar{x}\|_X \leq \frac{1}{1 - 4k\varepsilon} \|y - \bar{y}\|_X. \quad (3.33)$$

Demonstração: Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação, tal que $f(x) = y + B(x, x)$.

Queremos mostrar que f restrita a $\overline{B}_{2\varepsilon}(0) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 2\varepsilon\}$ é uma contração que satisfaz $f(\overline{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$.

Mostremos primeiramente que $f(\overline{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$.

Para isso, observe que para $x \in \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$, tem-se

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_X &= \|y + B(x, x)\|_X \\ &\leq \|y\|_X + \|B(x, x)\|_X \\ &\leq \|y\|_X + k\|x\|_X^2 \\ &\leq \varepsilon + k(2\varepsilon)^2 \\ &= \varepsilon + 4k\varepsilon^2 \\ &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

com queríamos.

Agora, para mostrar que f é uma contração, sejam $x, x' \in \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$; assim

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x')\|_X &= \|y + B(x, x) - y - B(x', x')\|_X \\ &= \|B(x, x) - B(x', x')\|_X \\ &= \|B(x, x) - B(x, x') + B(x, x') - B(x', x')\|_X \\ &= \|B(x, x - x') - B(x - x', x')\|_X \\ &\leq \|B(x, x - x')\|_X + \|B(x - x', x')\|_X \\ &\leq k\|x\|_X\|x - x'\|_X + k\|x - x'\|_X\|x'\|_X \\ &\leq 4k\varepsilon\|x - x'\|_X. \end{aligned}$$

Uma vez que por hipótese, $4k\varepsilon < 1$, concluí-se que f restrita ao conjunto $\overline{B}_{2\varepsilon}(0)$ é uma contração que satisfaz $f(\overline{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$.

Observe que $\overline{B}_{2\varepsilon}(0) \subset X$ é um conjunto fechado em X . Assim, munindo $\overline{B}_{2\varepsilon}(0)$ com a métrica

$$d(a, b) := \|a - b\|_X,$$

concluí-se que o par $(\overline{B}_{2\varepsilon}(0), d)$ é um espaço métrico completo, pois um subespaço métrico fechado de um espaço completo é completo.

Como $(\overline{B}_{2\varepsilon}(0), d)$ é completo e f é uma contração neste subespaço, então pelo Teorema do ponto fixo de Banach para contrações, segue que f possui apenas um ponto fixo em $\overline{B}_{2\varepsilon}(0)$, ou seja, existe um único $x \in \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$ tal que x é uma solução da equação $x = y + B(x, x)$.

Para concluir o resultado, mostraremos agora a continuidade em relação ao parâmetro inicial y . Para isso, seja $\bar{x} = \bar{y} + B(\bar{x}, \bar{x})$. Assim,

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|_X &= \|y + B(x, x) - \bar{y} - B(\bar{x}, \bar{x})\|_X \\ &\leq \|y - \bar{y}\|_X + \|B(x, x) - B(\bar{x}, \bar{x})\|_X \\ &\leq \|y - \bar{y}\|_X + \|B(x, x - \bar{x})\|_X + \|B(x - \bar{x}, \bar{x})\|_X \\ &\leq \|y - \bar{y}\|_X + k\|x\|_X\|x - \bar{x}\|_X + k\|x - \bar{x}\|_X\|\bar{x}\|_X \\ &\leq \|y - \bar{y}\|_X + 4k\varepsilon\|x - \bar{x}\|_X, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$(1 - 4k\varepsilon)\|x - \bar{x}\|_X \leq \|y - \bar{y}\|_X,$$

ou seja,

$$\|x - \bar{x}\|_X \leq \frac{\|y - \bar{y}\|_X}{1 - 4k\varepsilon}.$$

■

Afim de demonstrarmos o Teorema 3.3.2, devemos aplicar o Lema Abstrato 3.3.3 para $X = E_q$. Para isso, precisaremos mostrar que a parte não linear da equação (3.22) é contínua de $E_q \times E_q$ em E_q e a norma da parte linear em E_q pode ser controlado pela norma do dado inicial $u_0 \in L^{(n,\infty)}$. Este será o objetivo das duas próximas seções.

3.3.1 Estimativa do Termo Não Linear

Como vimos no Capítulo 2, (Observação 2.4.3 e Teorema 2.4.4), a k -transformada de Riesz é contínua nos espaços de Lebesgue e também nos espaços $L^{(p,\infty)}$. Assim, conclui-se que o projetor de Leray, definido em (3.2), é contínuo nesses espaços.

A seguir, apresentaremos um resultado que garante que o operador bilinear $B(u, v)$ é contínuo no espaço funcional E_q . Para isso, provaremos primeiramente a seguinte proposição, que será de grande utilidade, nesta e na próxima seção.

Proposição 3.3.4 *A função Beta, denotada por $\beta(x, y)$, e definida por*

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad (3.34)$$

em que $x, y > 0$, é sempre finita.

Demonstração: Tomando $0 < \delta < 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^\delta t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt + \int_\delta^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &\leq \max(1, (1-\delta)^{y-1}) \int_0^\delta t^{x-1} dt + \max(1, \delta^{x-1}) \int_\delta^1 (1-t)^{y-1} dt \\ &= \max(1, (1-\delta)^{y-1}) \frac{\delta^x}{x} + \max(1, \delta^{x-1}) \frac{(1-\delta)^y}{y} < \infty. \end{aligned}$$

■

Observação 3.3.5 *Observe que pela mudança de variável $s = tz$, tem-se*

$$\begin{aligned} \int_0^t s^{x-1}(t-s)^{y-1} ds &= \int_0^1 (tz)^{x-1}(t-tz)^{y-1} t dz \\ &= \int_0^1 t^{x+y-1} z^{x-1}(1-z)^{y-1} dz \end{aligned}$$

$$= t^{x+y-1} \beta(x, y).$$

Lema 3.3.6 *Se $1 < n < q$, $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{n}{2q}$ e $u, v \in E_q$, então existem constantes $K_n, K_q > 0$, tais que*

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(n,\infty)} \leq K_n \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(n,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)}, \quad (3.35)$$

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, v)(t, x)\|_{(q,\infty)} \leq K_q \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)}. \quad (3.36)$$

Demonstração: Provaremos a desigualdade (3.35). Note que como $1 < n < q$, existe $r > 1$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{n} + \frac{1}{q}$ e neste caso $r \leq n$.

Usando o Lema 3.1.2, com $k = 1$, $q_1 = q_2 = \infty$, a continuidade do projetor de Leray e a desigualdade de Hölder generalizada (2.13), tem-se

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t, x)\|_{(n,\infty)} &= \left\| \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds \right\|_{(n,\infty)} \\ &\leq \int_0^t \|\nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\|_{(n,\infty)} ds \\ &\leq \int_0^t C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} \|\mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\|_{(r,\infty)} ds \\ &\leq \int_0^t C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} \|u(s, x) \otimes v(s, x)\|_{(r,\infty)} ds \\ &\leq \int_0^t C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(n,\infty)} \|v(s, x)\|_{(q,\infty)} ds \\ &\leq C F(t, s) \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(n,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

em que $F(t, s) = \int_0^t (t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds$. Mostremos que $F(t, s) < \infty$. Para isso, observe que

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} &= \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{n}{2q} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{\alpha}{2} - 1. \end{aligned}$$

Como por hipótese, $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$, então pela Observação 3.3.5, conclui-se que $F(t, s) = t^{1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-1} \beta\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) < \infty$.

Assim, de (3.37), obtém-se

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(n,\infty)} \leq C \beta\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(n,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)}$$

$$= k_n \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(n,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)}, \quad (3.38)$$

em que $K_n = C\beta \left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ independe de u e v , obtendo assim a desigualdade (3.35).

Para provar a desigualdade (3.36), observe que

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(q,\infty)} \leq \int_0^t \|\nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\|_{(q,\infty)} ds,$$

e como $1 < n < q < \infty$, pode-se considerar $r = \frac{q}{2}$, aplicar mais uma vez o Lema 3.1.2 e usar a continuidade do projetor de Leray em $L^{(q,\infty)}$, para obter

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(q,\infty)} \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2q}-\frac{1}{2}} \|u(s, x) \otimes v(s, x)\|_{(r,\infty)} ds. \quad (3.39)$$

Uma vez que $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q}$, e $-\frac{n}{2q} - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} - 1$, pela desigualdade de Hölder (2.13) e pela Observação 3.3.5, tem-se

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t, x)\|_{(q,\infty)} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s, x)\|_{(q,\infty)} \|v(s, x)\|_{(q,\infty)} ds \\ &= C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q,\infty)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|v(s, x)\|_{(q,\infty)} ds \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} ds \\ &= C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)} t^{1-\alpha+\frac{\alpha}{2}-1} \beta \left(1 - \alpha, \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= K_q t^{-\frac{\alpha}{2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)}, \end{aligned}$$

em que $K_q = C\beta \left(1 - \alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$.

Portanto,

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, v)(t, x)\|_{(q,\infty)} \leq K_q \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)}.$$

■

Para demonstrarmos o Teorema 3.3.2, devemos mostrar que a solução u converge fraco-* para o dado inicial u_0 , quando $t \rightarrow 0^+$, em $L^{(n,\infty)}$. Para isso, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.3.7 *Se a função $u(t, x) \in E_q$, então*

$$B(u, u)(t, x) \rightharpoonup 0, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.$$

Demonstração: Como já citado na Observação 2.1.13, o conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^{(n',1)}$, (ver [4] para mais detalhes). Como $u, v \in E_q$, pela desigualdade (3.35) do Lema 3.3.6, observa-se que $B(u, v) \in L^{(n,\infty)}$.

Assim, pelas observações acima e pelo Teorema 2.1.12, é suficiente mostrar que dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\langle B(u, u)(t, x), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left(- \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}[u(s, x) \otimes u(s, x)] ds \right) \varphi dx \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0^+$, pois para se obter o resultado, basta usar um argumento de densidade.

Sendo assim, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Usando o Teorema de Fubini e a desigualdade de Hardy-Littlewood 1.2.9, obtém-se

$$\begin{aligned} |\langle B(u, u)(t, x), \varphi \rangle| &= \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla S(t-s) \mathbb{P}[u(s, x) \otimes u(s, x)] \varphi dx ds \right| \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla S(t-s) \mathbb{P}[u(s, x) \otimes u(s, x)] \varphi| dx ds \\ &\leq \int_0^t \int_0^\infty (\nabla S(t-s) \mathbb{P}[u \otimes u])^*(s, y) \varphi^*(y) dy ds \\ &\leq \int_0^t \int_0^\infty \left[y^{\frac{1}{r'}} (\nabla S(t-s) \mathbb{P}[u \otimes u])^*(s, y) \right] \left[y^{\frac{1}{r}} \varphi^*(y) \right] \frac{dy}{y} ds \\ &\leq \int_0^t \left(\sup_{y>0} y^{\frac{1}{r'}} (\nabla S(t-s) \mathbb{P}[u \otimes u])^*(s, y) \right) \int_0^\infty \left[y^{\frac{1}{r}} \varphi^*(y) \right] \frac{dy}{y} ds \\ &\leq \int_0^t \|\nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x)\|_{(r', \infty)} \|\varphi\|_{(r, 1)} ds. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Escrevendo $\frac{1}{r'} = \frac{1}{l} + \frac{1}{b} - 1$ e $\frac{1}{b} = \frac{1}{n} + \frac{1}{q}$, segue que $1 < b \leq r' < \infty$. Agora, utilizando o Lema 3.1.2, a continuidade do projetor de Leray e a Desigualdade de Hölder (2.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \|\nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x)\|_{(r', \infty)} &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} \|\mathbb{P}(u \otimes u)(s, x)\|_{(b, \infty)} \\ &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} \|(u \otimes u)(s, x)\|_{(b, \infty)} \\ &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} \|u(s, x)\|_{(n, \infty)} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \\ &= C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(n, \infty)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \\ &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{E_q}^2 \\ &\leq C(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, de (3.40) e da desigualdade obtida acima, tem-se

$$\begin{aligned} |\langle B(u, u)(s, x), \varphi \rangle| &\leq C \|\varphi\|_{(r, 1)} \int_0^t (t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds \\ &= C \|\varphi\|_{(r, 1)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}} \beta \left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} &= \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{n} - \frac{1}{q} \right) + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{n} \right) - \frac{n}{2q} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade acima se escreve como

$$\begin{aligned} |\langle B(u, u)(s, x), \varphi \rangle| &\leq C \|\varphi\|_{(r,1)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{n})} \beta \left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \right). \\ &\leq C \|\varphi\|_{(r,1)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

Passando o limite quando $t \rightarrow 0^+$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |\langle B(u, u)(s, x), \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{(r,1)} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{n})} = 0.$$

■

3.3.2 Estimativa do Termo Linear

O objetivo desta seção é mostrar que a norma da parte linear pode ser controlada pela norma do dado inicial u_0 no espaço $L^{(n,\infty)}$ e que a parte linear converge fraco-* em $L^{(n,\infty)}$ para o dado inicial, quando $t \rightarrow 0^+$.

Lema 3.3.8 *Se $n < q < \infty$ e $u_0 \in L^{(n,\infty)}$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|S(t)u_0\|_{E_q} \leq C \|u_0\|_{(n,\infty)},$$

e $S(t)u_0 \rightharpoonup u_0$ quando $t \rightarrow 0^+$, sendo o limite na topologia fraco- de $L^{(n,\infty)}$.*

Além disso, se $1 < p \leq \infty$ e $u_0 \in L^{(p,\infty)}$, então existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|S(t)u_0\|_{(p,\infty)} \leq C \|u_0\|_{(p,\infty)}.$$

Demonstração: Seja $u_0 \in L^{(n,\infty)}$. Aplicando o Lema 3.1.2, com $r = p = n$ e $q_1 = q_2 = \infty$, obtém-se

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0\|_{(n,\infty)} &\leq C t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n})} \|u_0\|_{(n,\infty)} \\ &= C \|u_0\|_{(n,\infty)}. \end{aligned}$$

Aplicando novamente o Lema 3.1.2, agora com $r = q$, $p = n$ e $q_1 = q_2 = \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0\|_{(q,\infty)} &\leq C t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{n})} \|u_0\|_{(n,\infty)} \\ &= C t^{\frac{n}{2q} - \frac{1}{2}} \|u_0\|_{(n,\infty)} \end{aligned}$$

$$= Ct^{-\frac{\alpha}{2}} \|u_0\|_{(n,\infty)},$$

ou seja,

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)u_0\|_{(q,\infty)} \leq C \|u_0\|_{(n,\infty)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0\|_{E_q} &= \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)u_0\|_{(q,\infty)} + \sup_{t>0} \|S(t)u_0\|_{(n,\infty)} \\ &\leq \sup_{t>0} C \|u_0\|_{(n,\infty)} \\ &= C \|u_0\|_{(n,\infty)}. \end{aligned}$$

Analogamente, quando $u_0 \in L^{(p,\infty)}$, aplicando o Lema 3.1.2, com $r = p$, tem-se

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0\|_{(p,\infty)} &\leq Ct^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p})} \|u_0\|_{(p,\infty)} \\ &= C \|u_0\|_{(p,\infty)}. \end{aligned}$$

Resta mostrar a convergência da parte linear da equação integral (3.22), para o dado inicial u_0 , usando a topologia $\sigma(L^{(n,\infty)}, L^{(n',1)})$, ou seja, a topologia fraca-* de $L^{(n,\infty)}$.

Primeiramente, lembremos que $f_n \rightharpoonup f$ (fraco-*) é equivalente a convergência das integrais $\langle f_n, \bar{g} \rangle \rightarrow \langle f, \bar{g} \rangle$, para todo $\bar{g} \in L^{(n',1)}$.

Assim, fixando $\bar{g} \in L^{(n',1)}$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle S(t)u_0 - u_0, \bar{g} \rangle &= \langle g(t, \cdot) * u_0 - u_0, \bar{g} \rangle \\ &= \langle g(t, \cdot) * u_0, \bar{g} \rangle - \langle u_0, \bar{g} \rangle, \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \langle g(t, \cdot) * u_0, \bar{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(t, x-y) u_0(y) dy \bar{g}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(t, y-x) \bar{g}(x) dx u_0(y) dy \\ &= \langle u_0, g(t, \cdot) * \bar{g} \rangle. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} |\langle S(t)u_0 - u_0, \bar{g} \rangle| &= |\langle u_0, S(t)\bar{g} - \bar{g} \rangle| \\ &\leq \|u_0\|_{(n,\infty)} \|S(t)\bar{g} - \bar{g}\|_{(n',1)}. \end{aligned}$$

Mostremos que $\|S(t)\bar{g} - \bar{g}\|_{(n',1)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$.

Com efeito, como já vimos, $S(t)$ é a convolução com o núcleo do calor, ou seja, $S(t)\bar{g} = g(t, x) * \bar{g}$.

Note que

$$g(t, x) = t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

em que $\varepsilon = t^{\frac{1}{2}}$ e $\varphi(x) = g(1, x)$.

Uma vez que $\varepsilon \rightarrow 0$ se, e somente se, $t \rightarrow 0$, fazendo a mudança de variável $y = xt^{-\frac{1}{2}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(t, x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}} g(1, y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(1, y) \, dy \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para mais detalhes sobre a última passagem, veja por exemplo, [5].

Observe que a família $g(t, x)$, indexada em $t > 0$, é uma aproximação da identidade em $L^{(p,q)}$. Portanto, pela Observação 2.1.13, segue que

$$\|S(t)\bar{g} - \bar{g}\|_{(n',1)} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0^+$.

Portanto,

$$|\langle S(t)u_0 - u_0, \bar{g} \rangle| \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0^+$, ou seja, $S(t)u_0 \rightharpoonup u_0$. ■

3.3.3 Prova do Teorema de Existência e Unicidade 3.3.2

Agora que já verificamos todas as hipóteses necessárias para aplicar o Lema abstrato, estamos em condições de provar o Teorema 3.3.2.

Demonstração: (do teorema de Existência e Unicidade 3.3.2)

Pelo Lema 3.3.6, sabe-se que o operador bilinear $B : E_q \times E_q \rightarrow E_q$, dado por

$$B(u, v)(t, x) = - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) \, ds,$$

é contínuo. De fato; observe que pela definição do projetor de Leray, $\nabla \cdot [\mathbb{P}(u \otimes v)] = 0$. Assim, lembrando que a ação do semi-grupo $S(t)$ é via convolução, obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [B(u, v)(t, x)] &= - \nabla \cdot \left[\int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) \, ds \right] \\ &= - \int_0^t \nabla \cdot [\nabla g(t-s, x) * \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)] \, ds \\ &= - \int_0^t \nabla g(t-s, x) * \nabla \cdot [\mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)] \, ds \\ &= - \int_0^t \nabla S(t-s) \nabla \cdot [\mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)] \, ds \end{aligned}$$

$$= 0.$$

Por outro lado, usando as desigualdades (3.35) e (3.36) do Lema 3.3.6, segue que

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t, x)\|_{E_q} &= \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} + \sup_{t>0} \|B(u, v)(t, x)\|_{(n, \infty)} \\ &\leq k \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q, \infty)} + \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(n, \infty)} \right) \\ &\leq k \left(\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} + \sup_{t>0} \|v(t, x)\|_{(n, \infty)} \right) \|u\|_{E_q} \\ &= k \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_q}, \end{aligned}$$

em que $k = \max\{K_n, K_q\}$. Portanto, $B(u, v)$ é um operador bilinear contínuo.

Como E_q é um espaço de Banach, vamos usar o Lema Abstrato 3.3.3 para mostrar que a equação integral (3.20) tem uma solução mild neste espaço.

Por hipótese, sabe-se que $\|u_0\|_{(n, \infty)} < \varepsilon$. Assim, pelo Lema 3.3.8, tem-se

$$4k\|S(t)u_0\|_{E_q} \leq 4kC\|u_0\|_{(n, \infty)} < 4kC\varepsilon. \quad (3.41)$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ de forma que

$$0 < \varepsilon < (4kC)^{-1}, \quad (3.42)$$

tem-se

$$4k\|S(t)u_0\|_{E_q} < 1.$$

Agora, se $y = S(t)u_0$, então

$$\nabla \cdot y = \nabla \cdot (S(t)u_0) = S(t)\nabla \cdot u_0 = 0,$$

por hipótese. Isso, juntamente com (3.41), mostra que $y \in E_q$.

Portanto o Lema Abstrato 3.3.3 garante a existência de solução para a equação integral (3.20) em E_q , e que essa solução é única na bola $\overline{B}_{2C\varepsilon}(0)$.

Mais ainda, pelos Lemas 3.3.7 e 3.3.8, observa-se que

$$u(t, x) \rightharpoonup u_0,$$

quando $t \rightarrow 0^+$, na topologia fraca-* do espaço $L^{(n, \infty)}$.

Portanto, a solução $u \in E_q$ é uma solução mild como definida em 3.3.1. ■

3.4 Existência de Soluções Auto-Similares

A seguir, vamos enunciar e demonstrar o teorema de existência de soluções auto-similares em E_q . Este resultado pode ser encontrado em [1].

Teorema 3.4.1 *Seja $u_0 \in L^{(n, \infty)}$ com $\nabla \cdot u_0 = 0$ e $\varepsilon > 0$, como no Teorema 3.3.2, tal que $\|u_0\|_{(n, \infty)} < \varepsilon$. Se u_0 é uma função homogênea de grau -1 , ou seja, $u_0(\alpha x) = \alpha^{-1}u_0(x)$*

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ e $\alpha > 0$, então a solução mild global $u(t, x)$ do Teorema 3.3.2 é auto-similar.

Demonstração: Primeiramente, observe que a solução u obtida no Teorema 3.3.2 é um limite da seguinte sequência de Picard:

$$\begin{cases} u_1(t, \cdot) &= S(t)u_0 \\ u_{k+1}(t, \cdot) &= u_1(t, \cdot) + B(u_k, u_k)(t, \cdot), \end{cases}$$

ou seja, o limite de u_k em E_q é o ponto fixo u da aplicação $f(u) = u_1 + B(u, u)$.

Agora, mostremos que $u_1(t, x)$ satisfaz a relação de escala (3.25).

De fato;

$$\begin{aligned} g(\alpha^2 t, \alpha(x - \alpha^{-1}y)) &= (4\alpha^2 t \pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\alpha(x - \alpha^{-1}y)\|^2}{4\alpha^2 t}} \\ &= \alpha^{-n} (4t \pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x - \alpha^{-1}y\|^2}{4t}} \\ &= \alpha^{-n} g(t, x - \alpha^{-1}y). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Assim, usando a igualdade (3.43) e a hipótese sobre o dado inicial u_0 , obtemos

$$\begin{aligned} u_1(\alpha^2 t, \alpha x) &= g(\alpha^2 t, \alpha x) * u_0(\alpha x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\alpha^2 t, \alpha x - y) u_0(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\alpha^2 t, \alpha(x - \alpha^{-1}y)) u_0(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-n} g(t, x - \alpha^{-1}y) u_0(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^{-1} g(t, x - z) u_0(z) dz \quad (\text{em que } z = \alpha^{-1}y) \\ &= \alpha^{-1} g(t, x) * u_0(x) \\ &= \alpha^{-1} u_1(t, x). \end{aligned}$$

Agora, vamos usar indução para mostrar que $u(t, x)$ também satisfaz (3.25).

Como hipótese de indução, assumamos que u_k satisfaz a relação de escala (3.25). Observe que usando a regra da cadeia, obtém-se

$$\nabla_x(g(\alpha^2 t, \alpha x)) = \alpha(\nabla_x g)(\alpha^2 t, \alpha x),$$

e da igualdade (3.43), segue que

$$\nabla_x(g(\alpha^2 t, \alpha x)) = \nabla_x(\alpha^{-n} g(t, x)) = \alpha^{-n}(\nabla_x g)(t, x).$$

Portanto, das duas igualdades acima, tem-se

$$(\nabla_x g)(\alpha^2 t, \alpha x) = \alpha^{-1-n}(\nabla_x g)(t, x). \quad (3.44)$$

Assim, usando a igualdade (3.44) e fazendo as mudanças de variáveis $s' = \alpha^2 s$ e $y' = \alpha y$, obtém-se

$$\begin{aligned}
B(u_k, u_k)(\alpha^2 t, \alpha x) &= - \int_0^{\alpha^2 t} \nabla S(\alpha^2 t - s') \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(s', \alpha x) ds' \\
&= - \int_0^{\alpha^2 t} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g(\alpha^2 t - s', \alpha x - y') \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(s', y') dy' ds' \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^2 \nabla_x g(\alpha^2(t - s), \alpha x - y') \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(\alpha^2 s, y') dy' ds \\
&= - \alpha^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^n \nabla_x g(\alpha^2(t - s), \alpha(x - y)) \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(\alpha^2 s, \alpha y) dy ds \\
&= - \alpha^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^n \alpha^{-1-n} \nabla_x g(t - s, x - y) \alpha^{-2} \mathbb{P}(\alpha u_k \otimes \alpha u_k)(\alpha^2 s, \alpha y) dy ds \\
&= - \alpha^{-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x g(t - s, x - y) \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(s, y) dy ds \\
&= \alpha^{-1} B(u_k, u_k)(t, x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u_{k+1}(\alpha^2 t, \alpha x) &= u_1(\alpha^2 t, \alpha x) + B(u_k, u_k)(\alpha^2 t, \alpha x) \\
&= \alpha^{-1} [u_1(t, x) + B(u_k, u_k)(t, x)] \\
&= \alpha^{-1} u_{k+1}(t, x).
\end{aligned}$$

Assim, as soluções mild globais são obtidas como limite de uma sequência de funções auto-similares (u_k) . Deste modo, usando a invariância da norma E_q , segue que

$$\begin{aligned}
\|u(t, x) - \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)\|_{E_q} &= \|u(t, x) - u_k(t, x) + u_k(t, x) - \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)\|_{E_q} \\
&\leq \|u(t, x) - u_k(t, x)\|_{E_q} + \|u_k(t, x) - \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)\|_{E_q} \\
&\leq \|u(t, x) - u_k(t, x)\|_{E_q} + \|\alpha u_k(\alpha^2 t, \alpha x) - \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)\|_{E_q} \\
&= \|u(t, x) - u_k(t, x)\|_{E_q} + \|u_k(t, x) - u(t, x)\|_{E_q} \\
&= 2\|u(t, x) - u_k(t, x)\|_{E_q} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, conclui-se que a solução $u(t, x)$ satisfaz

$$u(t, x) = \alpha u(\alpha^2 t, \alpha x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, todo $t > 0$ e todo $\alpha > 0$, ou seja, a solução é auto-similar. ■

3.5 Estabilidade Assintótica das Soluções Mild

O objetivo desta seção é estudar a estabilidade assintótica da solução mild obtida no Teorema 3.3.2.

Teorema 3.5.1 *Sejam u, v soluções do problema de valor inicial (3.4) dadas pelo Teorema 3.3.2, com dados iniciais $u_0, v_0 \in L^{(n,\infty)}$ com $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot v_0 = 0$, respectivamente. Se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(n,\infty)} = 0,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, x) - v(t, x)\|_{(n,\infty)} = 0. \quad (3.45)$$

Além disso, se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(q,\infty)} = 0,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x) - v(t, x)\|_{(q,\infty)} = 0. \quad (3.46)$$

Demonstração: Considere $u = u(t, x)$ e $v = v(t, x)$ duas soluções mild globais do problema de valor inicial (3.4) em E_q , com dados iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= S(t)u_0 + B(u, u)(t, x) \\ v(t, x) &= S(t)v_0 + B(v, v)(t, x). \end{aligned}$$

Seja $w(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$. Com cálculos similares aos da prova do Lema 3.3.3, obtém-se

$$\begin{aligned} w(t, x) &= u(t, x) - v(t, x) \\ &= S(t)u_0 + B(u, u)(t, x) - S(t)v_0 - B(v, v)(t, x) \\ &= S(t)(u_0 - v_0) + B(u, u - v) + B(u - v, v) \\ &= S(t)(u_0 - v_0) + B(u, w) + B(w, v). \end{aligned}$$

Agora, procedendo como na prova do Lema 3.3.6, tem-se

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{(n,\infty)} &\leq \int_0^t \|\nabla S(t-s)\mathbb{P}(w \otimes v)(s, x)\|_{(n,\infty)} ds \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q,\infty)} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(n,\infty)} ds, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|B(u, w)\|_{(n,\infty)} &\leq \int_0^t \|\nabla S(t-s)\mathbb{P}(u \otimes w)(s, x)\|_{(n,\infty)} ds \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q,\infty)} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(n,\infty)} ds. \end{aligned}$$

Uma vez que pelo Teorema 3.3.2 segue que $\|u\|_{E_q} \leq 2C\varepsilon$ e $\|v\|_{E_q} \leq 2C\varepsilon$, usando as duas desigualdades obtidas acima, tem-se

$$\begin{aligned} \|B(w, v) + B(u, w)\|_{(n,\infty)} &\leq \|B(w, v)\|_{(n,\infty)} + \|B(u, w)\|_{(n,\infty)} \\ &\leq C (\|v(t, x)\|_{E_q} + \|u(t, x)\|_{E_q}) \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(n,\infty)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\varepsilon \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(n, \infty)} ds \\
&= C\varepsilon \int_0^1 (t-ts')^{\frac{\alpha}{2}-1} (ts')^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(ts', x)\|_{(n, \infty)} t ds' \quad (\text{fazendo } s = ts') \\
&= C\varepsilon \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(ts', x)\|_{(n, \infty)} ds'.
\end{aligned}$$

Considere

$$A = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(ts', x)\|_{(n, \infty)} = \lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} \|w(ts', x)\|_{(n, \infty)}.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\sup_{t \geq k} \|w(ts', x)\|_{(n, \infty)} &= \sup_{t \geq k} \|(u-v)(ts', x)\|_{(n, \infty)} \\
&\leq \sup_{t \geq k} \|u(ts', x)\|_{(n, \infty)} + \sup_{t \geq k} \|v(ts', x)\|_{(n, \infty)} \\
&\leq \sup_{t \geq 0} \|u(ts', x)\|_{(n, \infty)} + \sup_{t \geq 0} \|v(ts', x)\|_{(n, \infty)} \\
&\leq \|u\|_{E_q} + \|v\|_{E_q} \\
&\leq C\varepsilon \in L^1((0, 1)).
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da convergência dominada e pela monotonicidade da integral, obtém-se

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(ts', x)\|_{(n, \infty)} ds' \leq A \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} s'^{-\frac{\alpha}{2}} ds'.$$

Como $\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2} > 0$, usando o Teorema 3.3.4 para a função $\beta\left(1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$, segue que

$$\int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds < \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(t, x)\|_{(n, \infty)} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0) + B(u, w) + B(w, v)\|_{(n, \infty)} \\
&\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(n, \infty)} + C\varepsilon A \\
&= 0 + C\varepsilon A,
\end{aligned}$$

se ε for escolhido satisfazendo $0 < \varepsilon < C^{-1}$, além de (3.42) no Teorema 3.3.2.

Assim, $A = 0$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(t, x)\|_{(n, \infty)} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(t, x)\|_{(n, \infty)} = 0,$$

o que concluí a prova de (3.45).

Mostremos agora (3.46). Primeiramente, vamos estimar a parte não linear de $t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x) - v(t, x)\|_{(q, \infty)}$ de maneira semelhante ao que foi feito na desigualdade (3.36) do Lema 3.3.6:

$$\begin{aligned}
\|B(w, v)\|_{(q, \infty)} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|v(s, x)\|_{(q, \infty)} \|w(s, x)\|_{(q, \infty)} ds \\
&\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} s^{\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(q, \infty)} ds \\
&\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} \\
&\quad \int_0^1 (t-ts')^{\frac{\alpha}{2}-1} (ts')^{-\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts', x)\|_{(q, \infty)} t ds', \quad (\text{fazendo } s = ts') \\
&\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 (1-s')^{\frac{\alpha}{2}-1} (s')^{-\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts', x)\|_{(q, \infty)} ds'.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(w, v)\|_{(q, \infty)} &\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts, x)\|_{(q, \infty)} ds \\
&\leq C \|v(t, x)\|_{E_q} \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts, x)\|_{(q, \infty)} ds \\
&\leq C\varepsilon \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts, x)\|_{(q, \infty)} ds.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, w)\|_{(q, \infty)} \leq C\varepsilon \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts, x)\|_{(q, \infty)} ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(w, v) + B(u, w)\|_{(q, \infty)} &\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(w, v)\|_{(q, \infty)} + t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, w)\|_{(q, \infty)} \\
&\leq C\varepsilon \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts, x)\|_{(q, \infty)} ds.
\end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(t, x)\|_{(q, \infty)} &= t^{\frac{\alpha}{2}} \|(u-v)(t, x)\|_{(q, \infty)} \\
&= t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0) + B(u, u)(t, x) - B(v, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} \\
&= t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0) + B(u, w)(t, x) + B(w, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} \\
&\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(q, \infty)} + t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, w) + B(w, v)\|_{(q, \infty)} \\
&\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(q, \infty)} + C\varepsilon \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts, x)\|_{(q, \infty)} ds.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Definindo novamente,

$$A = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts)\|_{(q,\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts)\|_{(q,\infty)},$$

aplicando o $\limsup$ em (3.47) e procedendo como na prova de (3.45), concluí-se que $A = 0$, como gostaríamos. ■

Observação 3.5.2 *Assuma que u_0 é uma função homogênea de grau -1 com $\nabla \cdot u_0 = 0$ e que $\theta \in C_c$ com norma suficientemente pequena em $L^{(n,\infty)}$. Considere u e v soluções mild, com condições iniciais dadas, respectivamente, por u_0 e $v_0 = u_0 + \theta$ (perturbação de u_0).*

Assim, se $1 < p < n$, uma vez que $\theta \in C_c \subset L^{(p,\infty)}$, então usando o Lema 3.1.2, obtém-se

$$\|S(t)\theta\|_{(n,\infty)} \leq Ct^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{p})} \|\theta\|_{(p,\infty)} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Pelo Teorema 3.5.1, concluí-se que a solução perturbada v é atraída pela solução auto-similar u .

Bibliografia

- [1] Barraza, O., *Self-Similar Solutions in Weak L^p -spaces of the Navier-Stokes Equations*, Revista Matemática Iberoamericana, 12(2), (1996), (document), 2.1.1,3.
- [2] Bennett, C., Sharpley, R., *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc, London, (1988).
- [3] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence RI, (1998).
- [4] Ferreira, Lucas C. F., *Soluções Auto-Similares para a Equação Quase-Geostrófica e Comportamento Assintótico*, Tese de Doutorado, Departamento de matemática, Março (2005), (document).
- [5] Folland, G. B., *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Jhon Wiley & Sons, New York, (1984).
- [6] Fujiwara, D., Morimoto, H., *An L^r - Theorem of the Helmholtz Decomposition of Vectors Fields*, Fac. Sci. Univ. Tokio, (1977).
- [7] Kristiansson, E., *Decreasing Rearrangement and Lorentz $L^{(p,q)}$ Spaces*, Dissertação de Mestrado, Departament of Mathematics, december (2002).
- [8] O'Neil R., *Convolution Operators and $L^{(p,q)}$ Spaces*, Duke Math. J. 30 (1963) 129-142.
- [9] Stein, E., Weiss, G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidian Spaces*, Princeton Univ. Press, (1971).
- [10] Stein, E., *Singular Integral and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, N.J., (1970).