

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HERON BUSSOLIM BARBOSA

**Modelos cosmológicos da Eletrodinâmica com termo de quebra de calibre de Lorenz e quebra de
simetria de Lorentz :**

Guaratinguetá

2023

Heron Bussolim Barbosa

Modelos cosmológicos da Eletrodinâmica com termo de quebra de calibre de Lorenz e quebra de simetria de Lorentz .

Trabalho de Pós-graduação apresentado ao Conselho de Curso de Pós-graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestrado em Física .

Orientador: Profº Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá

2023

B238m	Barbosa, Heron Bussolim Modelos cosmológicos da eletrodinâmica com termo de quebra de calibre de Lorenz e quebra de simetria de Lorentz. / Heron Bussolim Barbosa - Guaratinguetá, 2023. 40 f : il. Bibliografia: f. 32-33 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2023. Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira 1. Eletromagnetismo. 2. Cosmologia. 3. Simetria (Física). I. Título. CDU 537.8(043)
-------	--

HERON BUSSOLIM BARBOSA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: MESTRADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Documento assinado digitalmente
 **ERNESTO VIEIRA NETO**
Data: 25/07/2023 17:26:24-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
 **SAULO HENRIQUE PEREIRA**
Data: 24/07/2023 13:07:57-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA
Orientador - UNESP

Documento assinado digitalmente
 **JOSE FERNANDO DE JESUS**
Data: 24/07/2023 11:16:18-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. JOSÉ FERNANDO DE JESUS
UNESP

Documento assinado digitalmente
 **LUIZ CLEBER TAVARES DE BRITO**
Data: 23/07/2023 17:05:37-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. LUIZ CLEBER TAVARES DE BRITO
UFLA

JULHO de 2023

DADOS CURRICULARES

HERON BUSSOLIM BARBOSA

NASCIMENTO 06/12/1992 - São Paulo / SP

FILIAÇÃO Luiz Sérgio Barbosa
Emilia da Silva Bussolim Barbosa

2013 / 2019 Formação acadêmica ou Complementar
(Física- Bacharel)
UNESP- FEG

Dedico este trabalho ao meu pai, Luiz Sérgio, minha Tia Tânia, Meu vô José e minha vó Iracema.
Em memória: Lia Bussolim, Luzia Maria, Durval Bussolin, Edson Bussolin.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Saulo pela enorme paciência, suporte e dedicação. A UNIVESP pela bolsa de pesquisa, não necessariamente para este trabalho, mas fundamental para que eu conseguisse fazê-lo.

Aos meus pais, por toda base e por parte de quem sou, Luiz Sérgio e Lia Bussolim, pelo apoio, companheirismo e amor em toda minha vida, minha esposa Maria e meu filho Oliver, assim como para minha tia Tânia Débora que teve o mesmo papel da minha mãe em minha vida. Aos meus avós, José e Iracema, tio Edmilson, minha Tia Mônica e um agradecimento especial a minha prima Dayana que tenho como irmã ao grande campeão Enzo e meu primo Renan.

Rute pela revisão nos meus erros grotescos com a gramática, Nilce pelo apoio e amizade, Juliana pela amizade e ajuda nos dias difíceis. A Melhor sala do dep. de Física: Kelvin, Lucas e João pelos dias de estudo árduo. Também aos amigos de vida e jornada Barbara, Milena, André e Ana Carla.

“Por trás de cada homem vivo hoje estão trinta fantasmas, pois essa é a proporção pela qual os mortos superam os vivos. Desde a aurora do tempo, aproximadamente cem bilhões de seres humanos já caminharam pelo planeta Terra. Ora, esse é um número interessante, pois, por uma curiosa coincidência, existem aproximadamente cem bilhões de estrelas em nosso Universo local, a Via-Láctea. Então, para cada homem que já viveu, brilha uma estrela nesse Universo. “
(Arthur C. Clarke)

RESUMO

Neste trabalho estudamos dois modelos alternativos de energia escura oriundos de extensões da eletrodinâmica. O primeiro modelo apresenta um termo de quebra de calibre de Lorenz, motivado por correções quânticas durante a fase inflacionária do universo. O segundo modelo é baseado em uma eletrodinâmica modificada por termos que quebram a invariância de Lorentz, caracterizado por um vetor constante que privilegia uma direção espaço-temporal. Este modelo é motivado por extensões do modelo padrão da física de partículas elementares. Em ambos os modelos estudados obtivemos soluções particulares para a evolução do fator de escala que permitem uma interpretação de energia escura, produzindo uma fase acelerada para a expansão do universo.

PALAVRAS-CHAVE: Eletromagnetismo. Calibre de Lorenz. Simetria de Lorentz. Cosmologia.

ABSTRACT

In this work, we study two alternative models of dark energy arising from extensions of electrodynamics. The first model features a gauge-breaking term of Lorenz, motivated by quantum corrections during the inflationary phase of the universe. The second model is based on an electrodynamics modified by terms that break Lorentz invariance, characterized by a constant vector that favors a spacetime direction. This model is motivated by extensions of the standard model of elementary particle physics. In both studied models, we obtained particular solutions for the evolution of the scale factor that allow for an interpretation of dark energy, resulting in an accelerated phase for the expansion of the universe.

KEYWORDS: Cosmology. Gauge de Lorenz. Lorentz Simetry. Electrodynamics.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Λ CDM	Modelo Padrão da cosmologia
UNESP	Universidade Estadual Paulista
Univesp	Universidade Virtual do estado de São Paulo
SME	Standard model extetion.
MP	Modelo Padrão.
MPE	Modelo padrão estendido.
CPT	Simetria carga, paridade e tempo.

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Velocidade da luz no vácuo ($\approx 3.10^8 \text{ m/s}$)
H_0	Constante de Hubble ($\approx 71,9 \text{ km/s/megaparsec}$)

1 INTRODUÇÃO

A cosmologia é o palco onde tentamos entender o universo, sua estrutura e composição. Sempre buscamos uma resposta satisfatória para o que vemos além dos céus. Isso começou no início de nossa história, com os primeiros homínídeos que olhavam as estrelas, o Sol e a Lua, tentavam entender e significar o que viam. Os deuses que eram o próprio Sol, heróis nas estrelas e religiões para a lua. Suas fases, disponibilizou o primeiro calendário que tivemos (ROSA, 2012). Tal comportamento se mantém em nós, com o avanço da tecnologia e conhecimento, podemos responder muitas dessas perguntas, mas nos trouxe muitas mais. Uma dessas novas perguntas veremos nessa dissertação, exploraremos a aceleração de expansão do universo (energia escura), investigando sua possível origem.

Para entendermos o estudo da energia escura não podemos ignorar a bagagem histórica que nos trouxe aqui. Assim, podemos entender este trabalho como uma pequeníssima contribuição a esta construção de milênios que a humanidade vem desenvolvendo. Mas para não nos colocarmos direto no segmento do que causa a aceleração da expansão do universo, iniciaremos com Edwin P. Hubble.

Nossa interpretação do universo antes de Hubble era de um universo estático. Apesar das equações de Einstein-Friedmann preverem uma expansão, o próprio Einstein introduziu uma constante que impedia isso, tornando assim o universo matematicamente estático (EINSTEIN HERMANN MINKOWSKI,). Em 1912 a astrônoma Henrietta Leavitt (BARROS, 2018) do Harvard College Observatory, descobriu a relação entre a luminosidade absoluta média de estrelas variáveis Cefeidas ¹ e o período de oscilação da intensidade da luz vinda delas, quanto maior o período entre dois máximos, maior a luminosidade absoluta. Os resultados obtidos por Leavitt permite-nos saber sua luminosidade absoluta e como a luz decai com o quadrado da distância, então conseguimos determinar a distância dessas estrelas em relação à Terra. Em 1923 Edwin P. Hubble observa em uma nebulosa espiral em Andrômeda, uma estrela variável Cefeida, com a técnica de Leavitt, consegue determinar sua distância. Usando o trabalho de Vesto M. Slipher (SLIPHER, 1912), que analisava as linhas de espectro vindas de estrelas e nebulosas, observou que as linhas espectrais de Andrômeda eram deslocadas para o azul (região espectral com o comprimento de onda menor).

Relacionado com o efeito Doppler, que descreve o desvio de frequência causado pelo movimento relativo entre a fonte de luz e o observador. O desvio para o vermelho ocorre quando a fonte de luz se afasta do observador, resultando em um comprimento de onda observado maior do que o emitido. Por outro lado, um desvio para o azul ocorre quando a fonte de luz se aproxima do observador, resultando em um comprimento de onda observado menor do que o emitido.

A velocidade de recessão da fonte de luz, ou seja, a velocidade com a qual a fonte de luz está se afastando do observador. Por fim, c representa a velocidade da luz no vácuo, uma constante fundamental que é igual a aproximadamente 299.792.458 metros por segundo.

Em 1929, Edwin Hubble utilizou informações sobre as distâncias observadas entre galáxias, juntamente com os dados de desvio para o vermelho (redshift) obtidos por Milton Humason, e fez uma

¹ As estrelas Cefeidas clássicas efetuam pulsações radiais com período – tempo para completar um ciclo – bem delimitado em cada caso. (MACHADO, 2019)

descoberta notável. Ele identificou uma relação linear entre essas grandezas expressa por $cz = H_0 d$, em que c é a velocidade da luz, z é o desvio para o vermelho, H_0 é a constante de Hubble e d é a distância entre o observador e o objeto observado. Essa relação é válida para distâncias relativamente curtas, próximas a 4 milhões de anos-luz. Essa equação está diretamente relacionada à equação de desvio para o vermelho.

$$v_e = H_0 d \quad (1.1)$$

Quando olhamos para os dados do trabalho de Hubble em 1929 (HUBBLE, 1929), há um aumento da velocidade de afastamento com a distância na maioria dos dados, sugerindo uma expansão no universo e removendo a necessidade da constante de Einstein. No universo estático era para medirmos uma quantidade de galáxias aproximando e se afastando muito próximas.

Essas medidas de Hubble são necessariamente pensadas como um universo isotrópico e homogêneo (WAGA, 2005), modelo usado hoje no modelo padrão da cosmologia. Este modelo pensa em um universo que não importa a direção que o observamos, a física dele será a mesma e terá uma mesma concentração de objetos.

Em 2011, Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Riess ganharam o prêmio Nobel pela descoberta da expansão acelerada do universo com observações de supernovas distantes nos seus trabalhos em 1998, (PERLMUTTER BRIAN SCHMIDT, 1998) esses resultados foram reforçados também em (PERLMUTTER, 1998). O universo se expande, só que ao invés de ser freado pela gravitação, que se era esperado, ele se afastava cada vez mais rápido. Isso é representado matematicamente por uma constante cosmológica Λ , que uma vez removida pelo trabalho de Hubble agora vem para explicarmos tais observações. Incluímos essa constante no modelo padrão da cosmologia, há uma energia que faz uma força com caráter contrário a gravitacional e mais intensa que ela, chamemos esta de Energia Escura.

O modelo padrão usado hoje na cosmologia chama-se Λ CDM, tal modelo nos traz grandes previsões sobre a evolução do universo, respaldado pela Relatividade Geral e dados observados de galáxias e supernovas como em (DAHLÉN, 2017) e (DAHLÉN, 1999). No trabalho, desenvolvemos a partir da ação de Einstein as equações de Friedmann no modelo padrão da cosmologia. Consideramos ainda um universo preenchido por fluidos de matéria e radiação, conseguimos obter estas equações em função das densidades de energia desses fluidos. Logo depois desenvolvemos elas em função do Redshift para uma futura comparação com dados observados.

Para investigarmos a aceleração de expansão do universo analisaremos a contribuição da eletrodinâmica com termo de quebra de calibre de Lorenz a partir do artigo de Jiménez e Maroto (JIMÉNEZ; MAROTO,) e quebra de simetria de Lorentz usando de um modelo visto em (TONIOLO, 2015).

No trabalho do (JIMÉNEZ; MAROTO,), propõe-se uma ação com os termos da equação de Einstein, com o eletromagnetismo padrão, mostrada no Apêndice A, mais um termo com quebra de calibre de Lorenz. Com este termo os autores do artigo chegam em uma possível explicação para a aceleração de expansão sem necessidade de constante cosmológica. No artigo de Jiménez e Maroto esta contribuição de aceleração pode ter surgido no período eletrofraco do nosso universo. Entretanto, tivemos que fazer uma análise mais profunda, com resultados mais gerais vimos que a contribuição desse campo realmente pode reproduzir o papel de constante cosmológica.

Ao estudar um modelo de expansão empregando um termo de quebra de simetria de Lorentz analisamos um campo visto na densidade lagrangeana em (TONIOLO, 2015) com um termo vetorial b_μ que produz uma direção preferencial no espaço-tempo. O artigo baseia-se no Modelo Padrão Extendido (MPE) (COLLADAY, 1997) da física. Este seria uma modificação no Modelo Padrão (MP) da física de partículas (NOVAES, 2000), um modelo excelente e com poder preditivo muito eficiente, mas que não corrobora com dados observados nos últimos tempos. Investigando se estas contribuições do MPE para o eletromagnetismo pode ter uma aplicação cosmológica. Construímos uma lagrangiana usando um lapso temporal visto no Apêndice C, nas equações de Friedmann conseguimos adicionar a contribuição desta quebra de simetria e explicarmos qualitativamente a expansão do universo e também um resultado que prevê uma oscilação na aceleração de expansão.

2 MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA

2.1 EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Para o modelo atual da cosmologia (Λ CDM¹) (NOVELLO, 2010), usamos a equação de Einstein para interpretar como o universo se comporta. De acordo com observações de galáxias feitas desde Edwin Hubble no século passado (HUBBLE, 1929), vemos um universo em expansão e pelos trabalhos de Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Riess (PERLMUTTER BRIAN SCHMIDT, 1998) com observação de supernovas, a expansão é acelerada. Para desenvolvermos um modelo teórico que vá de acordo ao que observamos usaremos a equação de Campo de Einstein- Hilbert, dada pela ação (CARDOSO, 2019):

$$S = -\frac{1}{16\pi G c^{-4}} \int d^4x [(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M] \sqrt{-g} \quad (2.1)$$

R aqui é o conhecido escalar de Ricci da relatividade Geral, (veja Apêndice A), onde G é a constante gravitacional, c a velocidade da luz no vácuo, g o determinante da métrica. O fator Λ é a constante cosmológica responsável por ajustar o modelo atual com os dados observacionais, incluindo uma aceleração na expansão do universo e $\mathcal{L}_M$ descreve qualquer campo de matéria que apareça na teoria. Pelo princípio da mínima ação, ou seja, a variação da ação e igualando a zero usando também a definição (FLEMING, 1994) para o Tensor de Energia-Momento:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.2)$$

escrevemos a equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

Nessa equação (2.3) o lado esquerdo carrega informações sobre a geometria do universo, enquanto o lado direito observa-se o tensor de energia momento definido em (2.2) que carrega informações sobre a composição do mesmo.

2.2 EQUAÇÕES DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER (FRW)

Se observarmos qualquer direção do nosso universo, seja em imagens, ou em espectros eletromagnéticos, não é difícil constatar que há homogeneidade, ou seja, sempre observamos a mesma composição de corpos celestes, quase sempre distribuídas da mesma maneira. Mesmo em pontos onde parece não haver nada, quando utilizado um telescópio mais potente, por exemplo, veremos mais

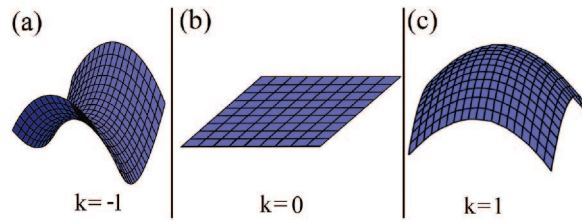
¹ Abreviação para Lambda-Cold Dark Matter, o modelo padrão atual da cosmologia. Inclui a constante cosmológica Λ , responsável pela representação de aceleração de expansão do Universo. Contém também a Matéria escura fria (CDM), matéria conhecida por ter interação gravitacional, mas não eletromagnética, este modelo inclui radiação e matéria bariônica também.

desses mesmos corpos celestes, isso nos dá uma hipótese de isotropia do universo², o que nos permite tratar o universo como um fluido perfeito. Tomando $c = 1$, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) é visto em (CAROLL, 2004) como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.4)$$

onde $a(t)$, é o fator de escala do universo e k representa o tipo de curvatura espacial, $k = 0$ seria a curvatura plana (euclidiana), $k = 1$ seria a curvatura esférica (fechada), $k = -1$ seria a curvatura hipersférica (aberta), ver Figura 1.

Figura 1 – Curvaturas possíveis do Universo



Representação esquemática das possíveis geometrias do Universo. Em (a) temos um Universo em formato de sela, $k = -1$. Em (b) um Universo chato, $k = 0$. E em (c) um Universo esférico, $k = 1$ (TROBIA, 2022).

Em uma visão clássica tridimensional, a função temporal $a(t)^2$ faz o papel do fator de escala do universo em um dado instante de tempo. Esta métrica com $k = 0$ é muito utilizada, pois várias observações apontam para um universo com curvatura espacial nula.

2.2.1 Tensor de energia momento num fluido perfeito.

Analisemos aqui o tensor de energia momento para um fluido perfeito. Esse pode ser descrito por suas características de densidade de energia de repouso ρ e pressão isotrópica p (CAROLL, 2004):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (2.5)$$

onde U é um campo vetorial de velocidade no fluido. A componente $T^{00} = \rho(t)$ e $T^{ii} = p(t)$.

Fazendo a derivada covariante do tensor de energia momento: $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, conhecida como equação de continuidade, podemos tirar a relação de conservação de energia do universo em expansão pelo fator de escala $a(t)$:

$$\dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}[\rho(t) + p(t)] = 0 \quad (2.6)$$

² A parte do Universo que podemos ver é uma amostra representativa do mesmo, e que as mesmas leis físicas se aplicam em todos os lugares (KEEL, 2007).

2.2.2 As equações de FRW e o modelo Λ CDM.

Utilizando (2.3), obtemos:

$$R^\nu_\mu - \frac{1}{2}g^\nu_\mu R + \Lambda g^\nu_\mu = \frac{8\pi G}{c^4}T^\nu_\mu \quad (2.7)$$

As equações de Einstein que seguem do tensor de energia-momento (2.5) são conhecidas como equações de Friedmann-Robertson-Walker. São elas:

$$R^0_0 - \frac{1}{2}g^0_0 R + \Lambda g^0_0 = \frac{8\pi G}{c^4}T^0_0 \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.8)$$

$$R^j_i - \frac{1}{2}g^j_i R + \Lambda g^j_i = \frac{8\pi G}{c^4}T^j_i \Rightarrow 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = 8\pi Gp + \Lambda. \quad (2.9)$$

Note que elas apresentam três variáveis desconhecidas $\rho(t)$, $p(t)$, $a(t)$, mas são apenas duas equações, para resolver isso precisamos de uma equação de estado que relacione a pressão e a densidade de energia:

$$p = \omega\rho \quad (2.10)$$

com isso o sistema possui solução (mesmo que numérica em alguns casos), onde ω é o parâmetro da equação de estado, ele terá diferentes valores para diferentes fluidos, como $\omega = 0$ para a matéria bariônica usual e $\omega = 1/3$ para radiação eletromagnética (WEINBERG, 2008).

Cosiderando um universo plano ($k = 0$) e combinando (2.8) e (2.9) temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.11)$$

Observe que Λ sendo zero, com o sinal negativo do lado direito da equação, implica que para fluidos que satisfaçam as condições usuais de energia e pressão positivas, a aceleração será negativa também, havendo uma divergência com os dados observados. Vemos o tamanho da importância da constante cosmológica; ou a pressão no universo é negativa, ou a constante cosmológica é grande suficiente para compensar o sinal do primeiro termo.

Utilizando estas equações construímos o modelo Λ CDM da cosmologia.

2.2.3 Modelo Λ CDM em termos do parâmetro de Hubble H e do redshift z

As equações (2.8), (2.9) e (2.11) já nos trazem muitas informações, entretanto elas estarem em termos do parâmetro de escala $a(t)$ dificulta muito a comparação com dados observados, que estão em termos de Redshift, para facilitar o trabalho escreveremos as equações de outra maneira.

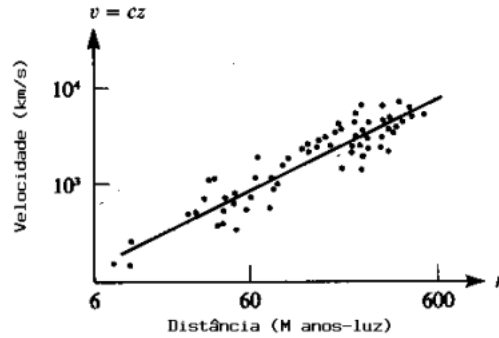
Nas observações de Edwin Hubble, pode se notar que as galáxias estavam se afastando da seguinte

maneira:

$$v = H_0 D \quad (2.12)$$

Onde v é a velocidade, D a distância, H_0 é a constante de Hubble, e possui um valor aproximado de

Figura 2 – Relação de Hubble



Relação observada por Hubble para 2.12 Fonte do gráfico: (AMÔRES,)

$H_0 \sim 70 \text{ km/s.Mpc}$. Observemos, por exemplo, uma galáxia a 3 Mpc de distância tem sua velocidade a 210 km/s , mas se ela esta a 6 Mpc será de 420 km/s .

Escreveremos a equação (2.12), conhecida como lei de Hubble, em parâmetros do fator de escala $a(t)$, para isso pensaremos da seguinte maneira; se duas galáxias estão a uma distância D entre elas e se afastam, devem se afastar proporcional ao próprio fator de escala, ou seja, dado que a distância entre elas aumentará com o tempo, assim como o universo se expande com o tempo, medindo D hoje e depois em um tempo futuro qualquer, tem de ser proporcional a $a(t)$ hoje e neste tempo futuro também; escrevemos então,

$$\frac{D(t)}{D(t_0)} = \frac{a(t)}{a(t_0)} \quad (2.13)$$

onde $D(t_0)$ e $a(t_0)$ são respectivamente, a medida da distância dessas duas galáxias hoje e o fator de escala hoje. Com isso:

$$v = \frac{d}{dt} D(t) = \frac{d}{dt} \frac{a(t)}{a(t_0)} D(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} D(t) = H(t) D(t) \quad (2.14)$$

definiremos a quantidade:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.15)$$

esse é o parâmetro de Hubble definido para qualquer tempo, logo para o tempo de hoje temos:

$$H(t_0) \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad (2.16)$$

As equações (2.8), (2.9) e (2.19) com este parâmetro, tomando $H(t) \equiv H$ temos:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.17)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{k}{a^2} = 8\pi Gp + \Lambda, \quad (2.18)$$

$$\dot{\rho}(t) + 3H[\rho(t) + p(t)] = 0. \quad (2.19)$$

Veja que essas equações dependem do parâmetro de Hubble medido hoje. Para medir esses parâmetros, usamos o desvio para o vermelho, quando recebemos a luz de astros distantes, como galáxias e supernovas, podemos usar um fenômeno que se assemelha com o do efeito Doppler para o som.

Analizando as linhas espectrais dos átomos que existem nestas galáxias ou supernovas por um parametro z , quando elas se aproximam vemos um desvio da luz para o azul, já que o comprimento de onda diminui e se afastando o desvio vai para o vermelho. Tomando λ_0 o comprimento de onda medido do átomo em repouso num laboratório aqui na terra e λ é o comprimento de onda observado quando a fonte está em movimento, definimos o redshift z :

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (2.20)$$

Como o universo está em expansão e observando as medidas que obtêm desvio para o vermelho, ou Redshift de um objeto observado, a relação com velocidade v do objeto, da relação relativística, concluímos:

$$z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1 \quad (2.21)$$

onde c é a velocidade da luz, escrevendo o redshift em termos do fator de escala $a(t)$:

$$\frac{a_0}{a(t)} \equiv 1 + z \quad (2.22)$$

Se $z = 0$, logo $a(t) = a_0$ corresponde ao tempo atual enquanto que, se $z > 0$ indica passado. O início do universo é dado quando z tende ao infinito, ou $a(t)$ tende à zero, quando o fator de escala do universo vai a zero.

2.2.4 Universo com bárions, radiação, matéria escura e constante cosmológica.

Com estas formulações podemos construir um modelo que concorda com os dados observados de galáxias e supernovas. Este universo é constituído por matéria bariônica, a matéria comum que conhecemos, matéria escura, um tipo de matéria com interação gravitacional, mas não eletromagnética, radiação e a constante cosmológica. Para ter estes fluidos compondo o modelo basta definir uma densidade de energia destes fluidos e acrescentar as equações (2.17) e (2.18) (WEINBERG, 2008):

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_b + \rho_{DM} + \rho_r) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.23)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 + \frac{k}{a^2} = 8\pi G(p_b + p_{DM} + p_r) + \Lambda \quad (2.24)$$

onde ρ_b , ρ_{DM} , ρ_r são respectivamente densidades de energia de matéria bariônica, matéria escura e radiação, os índices para a equação 2.23 são análogos para pressão. Supondo que os fluidos evoluem independentemente um do outro, não havendo nenhum tipo de interação entre eles, podemos simplificar o problema para $p_b = p_{DM} = 0$ e $p_r = (1/3)\rho_r$, assim a equação (2.19) para cada fluido é:

$$\rho_b(t) = \rho_{b0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 \quad (2.25)$$

$$\rho_{DM}(t) = \rho_{DM0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 \quad (2.26)$$

$$\rho_r(t) = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 \quad (2.27)$$

O sub-índice "0" diz respeito a quantidades medidas hoje, ou seja, representam as densidades de energia hoje, quando $a_0 = 1$. Esses valores devem vir das observações. Definindo a densidade de energia para constante cosmológica como; $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$, substituindo em (2.23)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{b0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \rho_{DM0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \rho_\Lambda \right] - \frac{k}{a^2} \quad (2.28)$$

Nessa expressão vemos que hoje, quando $a = a_0$ e $H = H_0$, existe uma relação entre a densidade total $\rho_0 = \rho_{b0} + \rho_{DM0} + \rho_{r0} + \rho_\Lambda$ e o parâmetro de Hubble H_0 e a curvatura k :

$$\frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_0 - \frac{3k}{8\pi G a_0^2} \quad (2.29)$$

Definindo $\rho_{crit} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, e chamado de densidade crítica, obtemos $\rho_{crit} + \frac{3k}{8\pi G a_0^2} = \rho_0$ o que nos diz que se a densidade total do universo for maior que a densidade crítica, o universo é fechado, se for menor, o universo é aberto, ou seja, a densidade crítica vai ao limite do universo aberto ou fechado.

Definiremos novos parâmetros aqui:

$$\Omega_b \equiv \frac{\rho_{b0}}{\rho_{crit}}; \Omega_{DM} \equiv \frac{\rho_{DM0}}{\rho_{crit}}; \Omega_r \equiv \frac{\rho_{r0}}{\rho_{crit}}; \Omega_k \equiv \frac{-k}{a_0^2 H_0^2} \quad (2.30)$$

Representando as frações de cada conteúdo em relação à densidade crítica, com seu valor aproximado de $\rho_{crit} = 9,3 \times 10^{-30} g/cm^3$, com isso a equação (2.28) fica:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_b \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \Omega_{DM} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \Omega_r \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \right] \quad (2.31)$$

Como não conseguimos medir $a(t)$, é interessante escrever em redshift z , então:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_b (1+z)^3 + \Omega_{DM} (1+z)^3 + \Omega_r (1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_k (1+z)^2 \right]. \quad (2.32)$$

Para as observações realizada hoje: $z = 0$, então:

$$\Omega_b + \Omega_{DM} + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (2.33)$$

que estabelece que a soma dos parâmetros representando as densidades de energia de todos os fluidos que compõem o universo deve ser igual à unidade. Essa equação representa o modelo padrão da cosmologia, conhecido como modelo Λ CDM. Se conseguirmos medir com precisão a quantidade de cada fluido que compõe o universo hoje, somos capazes de obter como será sua evolução. Nessa equação vemos as diferentes fases do universo também, hoje dominado por constante cosmológica.

2.3 PROBLEMA DA ENERGIA E MATÉRIA ESCURA.

Com tudo isso podemos notar que o modelo de constante cosmológica, apesar de adequar bem aos dados (WEINBERG, 2008) observacionais, ainda nos traz um problema; o que compõe a constante cosmológica? Por hipótese temos a energia escura, que seria uma energia que segundo as observações compõe 75% do universo, sua característica é ter uma pressão negativa, e entraria nas equações como um fluido de energia escura, isso explicaria a aceleração de expansão. Mas nunca detectamos nenhuma matéria que teria a pressão negativa. Existem diversos modelos cosmológicos que apresentam explica-

ções para tal fenômeno. No nosso trabalho também buscaremos um modelo com uma modificação no eletromagnetismo que, como fluido, talvez possa contribuir com uma aceleração.

Outro problema da cosmologia é a Matéria Escura, apesar de não sabermos muito sobre ela, apresenta-se em diversas observações, como lentes gravitacionais, quando observado a velocidade de corpos mais externos de uma galaxia, por ser uma matéria que não interage eletromagneticamente, ou seja, com nenhuma outra matéria conhecida, é muito difícil detectar (NOVELLO, 2010). Por isso modelos cosmológicos, que buscam integrar a composição de matéria escura, são estudados com rigor. Recentemente a detecção de ondas gravitacionais podem nos clarear muito em relação a esta matéria exótica, ela é bem mais conhecida do que a energia escura e deve compor aproximadamente 23% do universo (MARTINS IK SIONG HENG, 2023) e (NOVELLO, 2010).

3 MODELO COM QUEBRA DE CALIBRE DE LORENZ - ENERGIA ESCURA DE JIMÉNEZ E MAROTO

O trabalho de Jiménez e Maroto (JIMÉNEZ; MAROTO,), procura uma explicação para a constante cosmológica. Sendo motivados pela ideia de um campo eletromagnético Padrão (Apêndice A) mais uma contribuição de quebra de calibre que dependa do tempo durante as eras cosmológicas, este modelo pode gerar um efeito de aceleração na expansão do universo originados por flutuações quânticas no início da formação do universo.

Podemos escrever a ação com esta quebra de simetria de calibre da seguinte maneira:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (\nabla_\mu A^\mu)^2 \right] \quad (3.1)$$

O Termo de fixação de calibre ($\frac{\lambda}{2} (\nabla_\mu A^\mu)^2$) (ITZYKSON, 2006) Veja que no eletromagnetismo de Maxwell o termo $\nabla_\mu A^\mu = 0$, mas considerando que ele difere de zero, proporciona a quebra no calibre de lorenz. Analisaremos a contribuição desse termo em larga escala, ou seja, escalas muito maiores do que as observadas por Hubble, este modelo busca analisar até onde o universo é observado e não apenas algumas galáxias próximas.

Tomando o princípio de mínima ação em relação à métrica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^A) \quad (3.2)$$

A variação em A^μ :

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} + \lambda \nabla^\mu \nabla_\nu A^\nu = 0. \quad (3.3)$$

O Tensor de Energia momento na equação (3.2), é dividido em dois termos, o primeiro é referente ao que já temos no modelo Λ CDM com radiação e matéria, o segundo termo é a contribuição do campo eletromagnético. Fazendo suas variações em termos da parte temporal do quadrivetor potencial magnético e depois suas componentes espaciais em (3.3), obtemos as seguintes equações:

$$\ddot{A}_0 + 3H\dot{A}_0 + 3\dot{H}A_0 = 0 \quad (3.4)$$

$$\ddot{\vec{A}} + H\dot{\vec{A}} = 0 \quad (3.5)$$

Temos aqui as equações diferenciais de movimento.

Para campos homogêneos temos:

$$\frac{d}{dt}(\nabla_\mu A^\mu) = \frac{d}{dt}(\dot{A}_0 + 3H A_0) = 0 \quad (3.6)$$

A condição de calibre mencionada, $\nabla_\mu A^\mu = 0$, é destacada como uma condição que preserva a

covariância geral, pois o termo $\nabla_\mu A^\mu$ é um escalar, ou seja, um objeto físico que não depende de um sistema de coordenadas específico.

No entanto, é ressaltado que, nesse determinado calibre, as equações de Maxwell não homogêneas (que descrevem o comportamento do campo eletromagnético na presença de fontes de carga) não se apresentam na forma esperada de $\partial_\nu A^\nu = -J^\nu$, que seria uma forma intuitiva com base no conceito de acoplamento mínimo entre o campo eletromagnético e as cargas elétricas.

Em vez disso, as equações de Maxwell não homogêneas se ajustam à condição de calibre covariante de Lorenz, sendo uma escolha específica para garantir a consistência teórica do formalismo. O resultado de (3.6) quebra este calibre já que podemos obter $\nabla_\mu A^\mu = \text{constante}$.

Durante as épocas de radiação e matéria do universo o parâmetro de Hubble pode ser dado por $H = \frac{p}{t}$, com $p = 1/2$ para radiação, $p = 2/3$ para a matéria.

Usando método de Cauchy-Euler para resolução de equações diferenciais podemos então “chutar” uma solução do tipo $A(t) = Ct^m$:

$$\begin{aligned} A(t) &= Ct^m, \\ \dot{A}(t) &= Cmt^{m-1}, \\ \ddot{A}(t) &= Cm(m-1)t^{m-2}, \end{aligned}$$

substituindo na (3.4):

$$\begin{aligned} Cp(m-1)t^{m-2} + 3HCmt^{m-1} + 3\dot{H}Ct^m &= 0, \\ Cm(m-1)t^{m-2} + 3\frac{p}{t}Cmt^{m-1} - 3\frac{p}{t^2}Ct^m &= 0, \\ (m-1)(m+3p) &= 0 \\ S &= \{-3p, 1\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nos dá a seguinte solução:

$$A_0(t) = A^+t + A^-t^{-3p} \quad (3.8)$$

onde $A_0^\pm$ são constantes de integração.

Para a componente espacial (3.5),

$$\begin{aligned} Cp(m-1)t^{m-2} + HCmt^{m-1} &= 0, \\ Cm(m-1)t^{m-2} + \frac{p}{t}Cmt^{m-1} &= 0, \\ m &= 1-p. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A solução apresenta a soma linear de uma constante que também é uma solução para equação diferencial (3.5):

$$\vec{A}(t) = \vec{A}^+t^{1-p} + \vec{A}^- \quad (3.10)$$

onde $\vec{A}^\pm$ são constantes de integração.

Podemos escrever as equações de Friedmann similar a (2.23) do modo:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\sum_{\alpha=R,M} \rho_\alpha + \rho_{A_0} + \rho_{\vec{A}} \right] \quad (3.11)$$

onde R, M são respectivamente Radiação e Matéria, ρ_{A_0} e $\rho_{\vec{A}}$ densidades de energia dada por:

$$\rho_{A_0} = \lambda \left(\frac{9}{2} H^2 A_0^2 + 3 H A_0 \dot{A}_0 + \frac{1}{2} \dot{A}_0^2 \right) \quad (3.12)$$

$$\rho_{\vec{A}} = \frac{1}{2a^2} (\dot{\vec{A}})^2. \quad (3.13)$$

Observe que para ρ_{A_0} , necessita ter λ positivo, para termos uma densidade de energia positiva.

Usando a solução do tipo:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{p}{t},$$

encontramos a seguinte função $a(t) = kt^p$, com k sendo uma constante de integração. Para (3.13):

$$\begin{aligned} \rho_{\vec{A}} &= \frac{1}{2a^2} \left[(1-p) \vec{A}^+ t^{-p} \right]^2 = \frac{1}{2a^2} (1-p)^2 \vec{A}^+ t^{-2p} = \\ &= \frac{(1-p)^2 \vec{A}^+}{2k^2 t^{4p}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

com

$$\begin{aligned} \rho_{A_0} &= \lambda \frac{1}{2} \left(3A_0^+ p + 3p A_0^- t^{-3p-1} + A_0^+ - 3p A_0^- t^{-3p-1} \right)^2 \\ &= \lambda \frac{1}{2} (3p+1)^2 A_0^{+2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Observe que o vetor $\vec{A}$ decai no tempo, ou seja, sua contribuição para a densidade de energia tende a zero em tempos muito grandes, enquanto a componente temporal, A_0 , mantém um comportamento constante. A solução constante usando (aqui p representará a pressão) $p = \omega\rho$ mostra-se interessante em (2.19), vemos que $p = -\rho$ nesta solução $\omega = -1$, tomando algumas simplificações em (2.17) escrevemos:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho}, \quad (3.16)$$

Como solução $a(t) = C e^{\sqrt{8\pi G \rho/3} t}$, veja que o fator de escala dado por uma função exponencial evoluindo com o tempo, explicando assim a expansão acelerada do universo.

Foi mostrado por que a atual fase de expansão acelerada do universo pode explicada pela presença de um campo eletromagnético cosmológico gerado durante inflação. Este resultado oferece uma solução para estabelecer a verdadeira natureza da energia escura, mas também explica o valor da constante cosmológica.

A análise acima extraída do trabalho de Jiménez e Maroto (JIMÉNEZ; MAROTO,) sofre de alguns problemas que precisam ser melhor esclarecidos. A suposição de que o parâmetro de Hubble evolui conforme $H(t) = \frac{p}{t}$ é uma suposição forte, tendo em vista não haver garantia de que o sistema de equações formado por (3.4), (3.5) e (3.11) tem solução simultânea com esta escolha específica de $H(t)$. Dito de outra forma, para esta solução de $H(t)$ a equação de Friedmann (3.11) fica redundante, e o potencial vetor A^μ contribui diretamente para a densidade de energia daquela equação. Fizemos então uma análise diferente, considerando todo o sistema acoplado de equações formado por (3.4), (3.5) e (3.11)), para verificar se a contribuição do potencial vetor realmente pode dar uma contribuição para energia escura. A análise é descrita a seguir.

Tomamos o sistema acoplado de equações (3.4), (3.5) e (3.11) escritas em termos do fator de escala $a(t)$ e usamos o potencial vetor simplificado, representado apenas pelas componentes temporais $A_0(t)$ e $A_1(t)$, ou seja, $A_\mu = (A_0(t), -A_1(t), 0, 0)$. Isso gera um conjunto de equações mais fácil de trabalhar e carrega as mesmas informações do sistema original, tendo em vista que as componentes y e z devem ser simétricas à componente x devido à homogeneidade e isotropia da métrica. Também nos restringimos ao caso sem matéria, $\rho_M = 0$, para verificar o comportamento apenas da contribuição do campo A_μ na evolução do universo. O sistema simplificado para este caso fica:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\dot{A}_1^2}{2a(t)^2} + \lambda \left(\frac{9}{2} \frac{\dot{a}^2 A_0^2}{a^2} + \frac{\dot{A}_0^2}{2} + \frac{3\dot{a} A_0 \dot{A}_0}{a} \right) \right] \quad (3.17)$$

$$\ddot{A}_0 + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{A}_0 + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)A_0 = 0 \quad (3.18)$$

$$\ddot{A}_1 + \frac{\dot{a}}{a}\dot{A}_1 = 0 \quad (3.19)$$

Para este caso obtivemos a seguinte solução do sistema acoplado:

$$a(t) = a_0 \exp(\bar{H}t), \quad (3.20)$$

$$A_0(t) = \pm \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{\lambda\pi G}} + C \exp(-\bar{3}Ht), \quad (3.21)$$

$$A_1(t) = D, \quad (3.22)$$

onde a_0 , $\bar{H}$, C e D são constantes de integração. Vemos claramente que a solução acima para o fator de escala é do tipo De Sitter, e, portanto, é uma solução do tipo energia escura que acelera o universo. A componente A_0 evolui de tal forma a se tornar uma constante no futuro, enquanto A_1 é constante para qualquer tempo. Esta, portanto, é uma solução do sistema acoplado que descreve o comportamento de energia escura do universo, e representa a análise feita por Jiménez e Maroto (JIMÉNEZ; MAROTO,) no limite assintótico de $t \rightarrow \infty$.

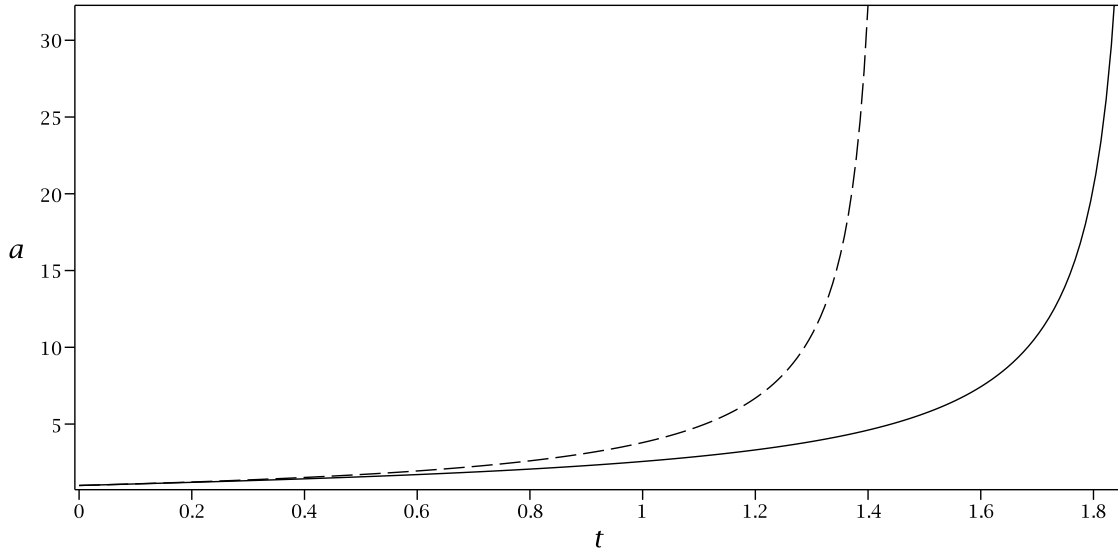
Uma vez que a solução acima indica uma componente constante para a parte espacial do potencial vetor, ou seja, $A_1(t) = \text{constante}$, impusemos então essa condição no sistema de equações (3.16)-(3.18) e analisamos também o caso com matéria, $\rho_M \propto a(t)^{-3}$, cuja contribuição deve afetar a evolução em relação ao caso sem matéria. Portanto, com $A_\mu = (A_0(t), -A_1, 0, 0)$ e incluindo o termo de matéria, o sistema de equações fica simplificado para:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{M0} a^{-3} + \lambda \left(\frac{9}{2} \frac{\dot{a}^2 A_0^2}{a^2} + \frac{\dot{A}_0^2}{2} + \frac{3\dot{a} A_0 \dot{A}_0}{a} \right) \right] \quad (3.23)$$

$$\ddot{A}_0 + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{A}_0 + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)A_0 = 0 \quad (3.24)$$

Embora não tenhamos encontrado uma solução analítica para este sistema, a solução numérica pode ser obtida, tomando constantes arbitrárias $8\pi G = 1$, $\lambda = 1$ e $\rho_{M0} = 1$. O resultado está mostrado na Figura 3. A linha contínua mostra a evolução do fator de escala $a(t)$ para o caso com a presença do termo de matéria, enquanto a linha tracejada representa o caso anterior, na ausência de matéria. Ambos com $A_1 = \text{constante}$. Fica evidente que a presença de um termo de matéria adia significativamente o início da fase acelerada, permitindo um período de domínio de matéria, como deve ser o caso da evolução prevista pelo modelo padrão.

Figura 3 – Evolução do fator de escala para o sistema de equações (3.23)-(3.24)



Evolução do fator de escala $a(t)$ para o caso sem matéria (linha tracejada) e para o caso com matéria (linha contínua).

Esta análise qualitativa mostra que este modelo tem todas as características desejadas para descrever a evolução do universo, sendo uma alternativa ao modelo padrão.

4 MODELO COM QUEBRA DE SIMETRIA DE LORENTZ

Usaremos agora um modelo de eletromagnetismo que quebra a simetria de Lorentz. No trabalho de (FARGOLI et al., 2014), e (TONIOLO, 2015) foi apresentado uma densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{ed} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\rho}{2}(b_\mu F^{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}A_\mu h^{\mu\nu}A_\nu \quad (4.1)$$

sendo $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \beta b^\mu b^\nu$. Os parâmetros ρ e β auxiliam na manipulação dos novos termos, sendo conveniente para estudos de novos limites para o modelo. O vetor de fundo b^μ insere na teoria uma direção preferencial no espaço-tempo e é responsável pela quebra de simetria de Lorentz.).

Para analisar como esta quebra de simetria irá contribuir com a aceleração de expansão do universo.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\rho}{2}(b_\mu F^{\mu\nu})^2 + \frac{m^2}{2}A_\mu h^{\mu\nu}A_\nu \right] \quad (4.2)$$

Para conseguir equações de densidade de energia desse modelo usamos a métrica: $ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2 dx_i^2$ (Veja Apêndice C), usando o caso do potencial vetor magnético da forma $A_\mu = (A_0(t), -A_1(t), -A_2(t), -A_3(t))$ e um vetor constante $b_\mu = (b_0, -b_1, -b_2, -b_3)$, tomando $N(t) \equiv N$ a Lagrangiana pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{3}{8\pi G N^2} \left(a^2 \dot{a} \dot{N} + a^2 \ddot{a} N + a \dot{a} N \right) + \frac{a}{2N} \dot{\vec{A}}^2 + \frac{\rho}{2aN^3} \left[b_0^2 a \dot{\vec{A}} - a^2 \left(\dot{\vec{A}} \cdot \vec{b} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{m^2}{2aN} \left[N^2 \left(\dot{\vec{A}} \cdot \vec{b} \right)^2 + a^2 A_0 b_0 \left(\vec{A} \cdot \vec{b} \right) - a^2 N^2 \vec{A} + a^4 A_0 + a^4 (A_0 b_0)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

fazendo a variação da densidade Lagrangiana em relação a $N(t)$ depois $N(t) = 1$ obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{4\pi G}{3a^2} m^2 \left[a^2 (3A_0^2 b_0 - A_0^2) - a A_0 b_0 \vec{A} \cdot \vec{b} \right] = \\ = \frac{4\pi G m^2}{3a^3} \left[\left(\dot{\vec{A}} \cdot \vec{b} \right)^2 + \vec{A}^2 \right] + \frac{4\pi G}{3a^2} \dot{\vec{A}}^2 + \frac{4\pi G \rho}{3a^4} \left[3a^2 b_0^2 \dot{\vec{A}}_0^2 + \left(\dot{\vec{A}} \cdot \vec{b} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Se variarmos em relação a A_0 :

$$-\frac{m^2}{a^2} b_0 \left(A_0 b_0 a^2 - \vec{A} \cdot \vec{b} \right) + m^2 A_0 = 0. \quad (4.5)$$

Para $\vec{A}$,

$$m^2 a A_0 b_0 \vec{b} - a^2 = \dot{a} \left[\left(\dot{\vec{A}} \right) + \rho \left(\dot{\vec{A}} \cdot \vec{b} \right) \vec{b} \right] + \left[\left(a \ddot{\vec{A}} \right) + \rho a \left(\ddot{\vec{A}} \cdot \vec{b} \right) \vec{b} \right] + \frac{m^2}{a^3} \left(\ddot{\vec{A}} \cdot \vec{b} \right) \vec{b}. \quad (4.6)$$

Observe que as equações (4.5) e (4.6) são as equações de movimento e (4.4) é a equação de Friedmann

do campo apresentado.

Neste sistema de equações acopladas as equações são muito complicadas, então analisamos um caso particular, mais simples. Tomamos $A_\mu = (A_0(t), -A_1(t), 0, 0)$ e $b_\mu = (b_0, 0, 0, 0)$, ou seja, apenas as componentes A_0 e A_1 , são não nulas no potencial vetor e particularizamos o vetor de fundo b_μ apenas para a componente temporal, b_0 . A lagrangiana para este caso mais simples tem a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{3}{8\pi G N^2} \left(a\dot{a}^2 N - \dot{N}a^2\dot{a} + Na^2\ddot{a} \right) + \frac{a\dot{A}_1^2}{2N^3} (N^2 + \rho b_0^2) - \frac{m^2 a^3 A_0^2}{2N^3} (b_0^2 - N^2) + \\ & - \frac{1}{2} Nam^2 A_1^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A primeira equação de Friedmann, equivalente a (4.4), é obtida fazendo a variação com relação a $N(t)$ e colocando $N \rightarrow 1$ no final:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{4\pi G}{3a^2} \left(\dot{A}_1^2 + \rho b_0^2 \dot{A}_1^2 + \dot{A}_1^2 m^2 - m^2 b_0^2 A_0^2 + m^2 A_0^2 \right). \quad (4.8)$$

Quando variamos em relação A_0 , obtemos:

$$-A_0 b_0^2 m^2 + A_0 m^2 = 0. \quad (4.9)$$

Para variação em relação a A_1 , obtemos:

$$(1 + \rho b_0^2) \ddot{A}_1 + (1 + \rho b_0^2) \frac{\dot{a}\dot{A}_1}{a} = 0. \quad (4.10)$$

A primeira análise realizada foi para o caso particular sem massa, $m = 0$. Neste caso A_0 não contribui para a evolução do fator de escala, e a equação de Friedmann fica dependente apenas de $A_1(t)$. O sistema de equações (4.8)-(4.10) se reduz a:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{4\pi G}{3a^2} \left(\dot{A}_1^2 + 3\rho b_0^2 \dot{A}_1^2 \right). \quad (4.11)$$

$$(1 + \rho b_0^2) \ddot{A}_1 + (1 + \rho b_0^2) \frac{\dot{a}\dot{A}_1}{a} = 0. \quad (4.12)$$

No entanto verificamos numericamente que a solução deste sistema acoplado de equações não produz aceleração, sendo do tipo radiação para o fator de escala, pois o resultado para fator de escala foi proporcional a $t^{1/2}$.

Em seguida analisamos a contribuição vinda do termo de massa. A solução para a equação (4.9) no caso massivo diz que $A_0(t)$ pode assumir qualquer valor se $b_0 = \pm 1$. Tendo em vista essa liberdade de escolha de $A_0(0)$, procuramos por soluções numéricas das equações (4.8)-(4.10) para este caso particular e assumimos proporcional ao fator de Hubble, $A_0(t) = H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$. Neste caso as equações

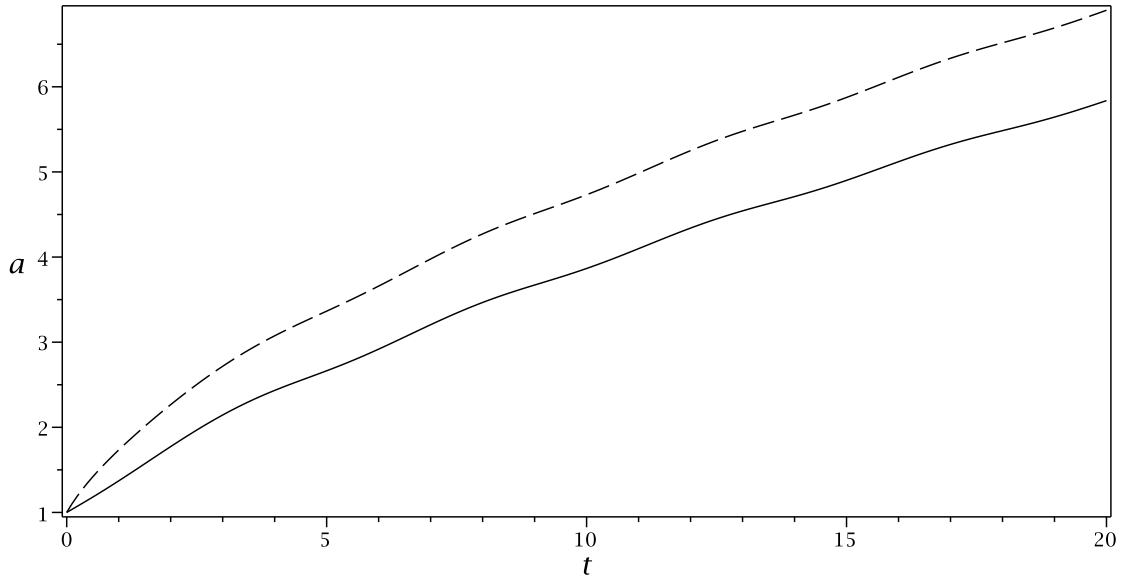
(4.8) e (4.10) ficam:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{4\pi G}{3a^2} \left(\dot{A}_1^2 + 3\rho \dot{A}_1^2 + m^2 A_1^2 - 2m^2 \dot{a}^2 \right). \quad (4.13)$$

$$(1 + \rho)\ddot{A}_1 + (1 + \rho)\frac{\dot{a}\dot{A}_1}{a} + m^2 A_1(t) = 0. \quad (4.14)$$

Este sistema acoplado de equações pode ser resolvido numericamente para $a(t)$ e $A_1(t)$. A evolução do fator de escala $a(t)$ para este caso está representada na Figura 4, onde foi escolhido $8\pi G = 1$, $\rho = 1$ e $m = 1$ para fazer o gráfico.

Figura 4 – Evolução do fator de escala para o sistema de equações (4.11)-(4.12) (sem matéria) e (4.14)-(4.15) (com matéria).



Evolução do fator de escala $a(t)$ para o caso com matéria (linha tracejada) e sem matéria (linha contínua) para $A_0(t) = H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$.

Da análise da Figura 4 concluímos que uma evolução acelerada é possível se A_0 for proporcional ao parâmetro de Hubble. Vemos que a evolução já começa acelerada, depois passa por fases cíclicas entre aceleração e desaceleração. É um comportamento bastante interessante, indicando que o universo pode passar por diferentes fases de aceleração ao longo da evolução cósmica.

Por fim, analisamos o efeito da presença de matéria na evolução do fator de escala, incluindo um termo do tipo $\rho_M \propto a(t)^{-3}$ na equação de Friedmann. A equação (4.11) fica:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{4\pi G}{3a^2} \left(\dot{A}_1^2 + 3\rho \dot{A}_1^2 + m^2 A_1^2 - 2m^2 \dot{a}^2 \right) + \frac{8\pi G}{3} \rho_{M0} a^{-3}. \quad (4.15)$$

enquanto a equação (4.12) não muda. Escolhendo $\rho_{M0} = 1$, fizemos a análise comparativa entre os casos na presença e na ausência do termo de matéria. O resultado está apresentado na Figura 4, em linha tracejada. A linha cheia corresponde à evolução do fator de escala sem matéria e a linha tracejada a evolução com matéria. A presença de matéria torna o início da evolução desacelerada, como deve

ser conforme o modelo padrão, com domínio de matéria. Depois a evolução para novamente por fases cíclicas de aceleração e desaceleração, um comportamento bastante interessante que merece ser estudado com mais detalhes. No outro modelo de quebra de simetria considera a presença de matéria no sistema, observamos um início de evolução desacelerada, conforme o modelo padrão. Em seguida, ocorrem fases cíclicas de aceleração e desaceleração, revelando um comportamento interessante. Essas oscilações cósmicas proporcionam uma dança cósmica com ritmos e padrões distintos. Essa descoberta desafia nossa compreensão do universo, com implicações importantes para a física e cosmologia. Estudar essas oscilações pode fornecer informações valiosas sobre a evolução do universo e seus mecanismos subjacentes. A presença da matéria desempenha um papel fundamental nesse processo, revelando um padrão complexo de comportamento cíclico. Essa descoberta abre novas perspectivas emocionantes para desvendar os segredos do universo em constante mudança.

5 CONCLUSÃO

No contexto da cosmologia, o modelo padrão atualmente adotado utiliza a energia escura como uma constante cosmológica, cuja origem ainda não é conhecida, sendo considerada meramente uma correção matemática para explicar a expansão acelerada do universo. No entanto, caso tentemos empregar as equações do modelo padrão sem o uso dessa constante, nos deparamos com uma densidade de energia que apresenta uma pressão negativa, utilizada para explicar tal aceleração de expansão. Contudo, uma vez que não foi observado na física nenhum fenômeno com pressão negativa, torna-se viável, buscar uma alternativa à energia escura.

Optamos por dedicar nosso estudo à análise de modelos que ampliam os fundamentos da Eletrodinâmica, introduzindo uma quebra de simetria, uma vez que tais quebras simétricas são observadas na natureza.

O primeiro modelo investigado baseou-se no trabalho de referência de (JIMÉNEZ; MAROTO,), no qual é proposta uma quebra de simetria no calibre de Lorenz. Nesta dissertação, reproduzimos o estudo realizado por esses autores, que por meio de uma análise qualitativa, fixaram o valor de H e analisaram a evolução do potencial vetor, obtendo uma solução de natureza acelerada. Complementando o trabalho anterior, realizamos uma análise dos sistemas de equações acopladas, confirmando, assim, a evolução acelerada do fator de escala.

O segundo modelo analisado foi de uma eletrodinâmica com uma extensão baseada na quebra de simetria de Lorentz, onde aparece o vetor b_μ que nos traz uma direção preferencial no espaço e tempo. Este termo de quebra de simetria foi baseado nos trabalhos de (FARGOLI et al., 2014) e (TONIOLO, 2015). A primeira análise para o caso com massa nula não apresenta solução acelerada. No entanto, encontramos neste trabalho uma solução particular muito interessante para o caso massivo. Obtivemos que a parte temporal do potencial vetor magnético é independente e para $b_0 = \pm 1$, temos uma liberdade de escolha para solução de A_0 . Escolhendo um comportamento que evolua a parte temporal do potencial vetor com $H(t)$, a solução numérica que encontramos se comporta como energia escura acelerando o fator de escala. Mais do que isso esta solução nos traz também uma possibilidade de desaceleração, e assim repetidamente, podendo assim construir um modelo cíclico de contração e expansão do universo.

REFERÊNCIAS

- AMÔRES, I. G. A. Eduardo Brescansin de. Redshift e lei de hubble. **Observatórios Virtuais**.
- BARROS, M. C. de. As mulheres do harvard college observatory: Henrietta swan leavitt - a mulher que descobriu como medir a distância das galáxias. **História da Ciência e Ensino: Construindo interfaces**, v. 18, p. 12–21, 2018.
- BLAU, M. **Lecture Notes on General Relativity**. Universit at Bern: Albert Einstein Center for Fundamental Physics, 1995.
- CARDOSO, E. V. S. R. C.-M. R. Geração de soluções exatas em relatividade geral através do método de kerr-schild. **Revista Brasileira de ensino de Física**, n. 4, 2019.
- CAROLL, S. **SPACETIME AND GEOMETRY: An Introduction to General Relativity**. EUA: Pearson Education, 2004.
- COLLADAY, A. K. D. Cpt violation and the standard model. **Phys.Rev.D55:6760-6774,1997**, 1997.
- DAHLÉN, C. F. T. Rates and redshift distributions of high-z supernovae. **ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS**, 1999.
- DAHLÉN, C. F. T. Estimating the redshift error in supernova data analysis. **JCAP**, 2017.
- EINSTEIN HERMANN MINKOWSKI, H. W. lbert. **The principle of Relativity**. [S.l.]: Hendrik Lorentz.
- FARGOLI, H. et al. Dual embedding of extended models with a lorentz-breaking mass term. **PHYSICAL REVIEW, AMERICAN PHYSICAL SOCIETY**, v. 90, n. 085016, 2014.
- FLEMING, H. O tensor de momento-energia métrico, e o canônico. **Revista Brasileira de ensino de Física**, n. 1-4, p. 48–53, 1994.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, n. 3, p. 168–173, 1929.
- ITZYKSON, J. B. Z. C. **Quantum Fields Theory**. EUA: Dover Publications, 2006.
- JIMÉNEZ, J. B.; MAROTO, A. L. Cosmological electromagnetic fields and dark energy. **arxiv 0811.0566, JCAP 0903:016, 2009**.
- KEEL, W. C. **The Road to Galaxy Formation**. [S.l.]: Springer, 2007.
- LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. São Paulo, SP - Brasil: Livraria da Física, 2013.
- MACHADO, D. I. Estrelas variáveis no contexto educacional: Uma proposta envolvendo a observação de cefeidas clássicas no ensino médio. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia - RELEA**, n. 28, p. 7–25, 2019.
- MARTINS IK SIONG HENG, I. T. e. M. e. O. D. A. J. C. Search for gravitational-wave bursts in ligo data at the schenberg antenna sensitivity range. 2023.
- NETO, J. B. **Matemática para Físicos com Aplicações, volumeI: Vetores, Tensores e Spinors**. São Paulo, SP - Brasil: Livraria da Física, 2010.

NOVAES, S. F. Standard model: An introduction. **Instituto de Física Teórica- UNESP**, 2000.

NOVELLO, M. **Programa mínimo de cosmologia**. Rio de Janeiro-RJ, Brasil: Ibra Brasil, 2010.

PEREIRA., J. F. de Jesus. Alexandre Pinho dos Santos Souza. Julio Marny Hoff da S. S. H. $\lambda(t)$ cosmology induced by a slowly varying elko field. **Journal os Cosmology and Astroparticle Physics**, 2017.

PERLMUTTER BRIAN SCHMIDT, A. R. S. Constraints on cosmological models from hubble space telescope observations of high-z supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 493, n. 2, p. 153–158, 1998.

PERLMUTTER, G. G. S. A study of 42 type ia supernovae and a resulting measurement of ω_m and ω_λ . **Physics Reports**, v. 307, n. 1, p. 325–331, 1998.

ROSA, C. A. de P. **História da Ciência Da Antiguidade ao Renascimento Científico**. Brasília, DF - Brasil: Fundação Alexandre Gusmão, 2012.

SLIPHER, V. M. The radial velocity of the andromeda nebula. **Lowell Observatory Bulletin+**, v. 2, n. 8, p. 56–57, 1912.

TONIOLO, G. R. **DUALIZAÇÃO DE NOETHER DE UMA EXTENSÃO DA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ**. Lavras, MG - Brasil: [s.n.], 2015.

TROBIA, P. D. dos R. G. S. C. G. C. J. C. I. M. B. Estudo do universo de friedmann partindo de conceitos newtonianos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 2022.

WAGA, I. Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o século *xxi*. **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, v. 1, n. 27, p. 157–173, 2005.

WEINBERG, S. **Cosmology**. EUA: OXFORD, 2008.

APÊNDICE A – A COVARIÂNCIA DO ELETROMAGNETISMO

A.1 PRINCIPAIS EQUAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO

Olhemos as equações de Maxwell do eletromagnetismo em unidades Gaussianas, tomando ρ como densidade de carga, $\vec{j}$ densidade de corrente, $\vec{E}$ o campo elétrico e $\vec{B}$ o campo magnético:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}\end{aligned}\tag{A.1}$$

da segunda equação verá:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\end{aligned}\tag{A.2}$$

O vetor $\vec{A}$ é conhecido como potencial vetor magnético. Da eletrostática pelo princípio de campos conservativos $(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$, então $\vec{E} = -\text{grad}(\phi)$ onde ϕ é o potencial do campo $\vec{E}$, logo:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0 \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}\tag{A.3}$$

A equação de continuidade, ou lei de conservação total da carga, é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0\tag{A.4}$$

A.2 FORMULAÇÃO COVARIANTE

Para escrever uma formulação covariante, usemos a teoria eletromagnética, mas com quadrivetores e quadritensores reescrevendo a equação (A.4):

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0\tag{A.5}$$

com a notação: $\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu j^\mu$, portanto, a lei de continuidade fica:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (\text{A.6})$$

j^μ será representado por $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, como por experimentação sabemos haver conservação de carga, em todos os sistemas inerciais, pode se afirmar que j^μ é um quadrivetor, conhecido como quadricorrente, como ∂_μ é um operador muito bem definido em um espaço quadridimensional, a equação (A.6) é a manifestação da forma covariante da equação de continuidade (A.4).

Usando (A.3) constrói-se um novo quadrivetor:

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad (\text{A.7})$$

através do rotacional desse quadrivetor definiremos um tensor de segunda ordem:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{A.8})$$

Fácil construir então:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -Ex & -Ey & -Ez \\ Ex & 0 & -Bz & By \\ Ey & Bz & 0 & -Bx \\ Ez & -By & Bx & 0 \end{pmatrix}$$

Se utilizarmos da primeira e última lei de Maxwell (A.1) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 4\pi\rho \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j_x \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j_y \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j_z \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

veja que podemos escrever da seguinte maneira, mais compacta:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (\text{A.10})$$

$F^{\mu\nu}$ é o quadritensor (NETO, 2010), pois o índice ν está relacionado a quadricorrente j^ν e o índice μ está contraído com o operador. Conhecido como tensor do campo eletromagnético, importante salientar que este tensor é anti-simétrico:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (\text{A.11})$$

Para a segunda e terceira equação de Maxwell dada em (A.1) a equação covariante é

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0 \quad (\text{A.12})$$

juntando as equações (A.10) e (A.12), recuperamos todas as equações de Maxwell de (A.1).

Outra abordagem para obter duas das equações do Maxwell covariante é através do campo eletromagnético dada pela densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu A_\mu \quad (\text{A.13})$$

Podemos escrever a ação:

$$S = - \int d^4\xi \left(\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{c}j^\mu A_\mu \right) \quad (\text{A.14})$$

pelo princípio da mínima ação $\delta S = 0$ chegamos a (A.10)

A.3 ELETROMAGNETISMO NA RELATIVIDADE GERAL

A equação (A.8) é dada pela relatividade especial, o procedimento para alcançar $F^{\mu\nu}$ na relatividade geral usamos $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$ reformulamos a derivada convencional pela derivada covariante:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \rightarrow F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (\text{A.15})$$

Calculemos então:

$$\nabla_\alpha F_{\mu\nu} = \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda F_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda F_{\mu\lambda} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.17})$$

esse resultado recupera analogamente a equação de Maxwell (A.10), para a relatividade geral em uma situação que não teremos corrente. O campo em qualquer teoria de calibre, abeliana ou não abeliana, é sempre dado em termos da derivada externa do potencial vetor (ou seja, é a curvatura da conexão), e como tal não tem nada a ver com alguma métrica no espaço-tempo. Outra maneira de se obter este resultado é através da ação:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{A.18})$$

efetuando $\delta S = 0$ chegamos a (A.17)

APÊNDICE B – BREVE MATEMÁTICA DA RELATIVIDADE GERAL

A ideia deste apêndice é relembrar ou consultar algumas quantidades importantes da relatividade geral, é um breve resumo de alguns conceitos e exposições das suas principais equações. Na relatividade geral a gravitação tem interação geométrica, consideremos um espaço-curvo dado pela métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.1})$$

Dado um sistema nesse espaço curvo $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ transformando para $x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ a diferenciação é:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (\text{B.2})$$

Qualquer quadrivetor A^μ pode se transformar:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (\text{B.3})$$

chamado de *vetor contravariante* fazemos as seguintes generalizações:

$$\begin{aligned} T'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \\ T'^{\mu\nu\rho} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\xi} T^{\alpha\beta\xi} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

pode-se abstrair para tensores de ordem superior. Para tensores covariantes:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad (\text{B.5})$$

Para um tensor misto:

$$T'^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T^\alpha{}_\beta \quad (\text{B.6})$$

B.1 DERIVADA COVARIANTE

Considera-se dois pontos no espaço curvo separados por um espaço infenitesimal dx . Sejam o vetor $A_\mu(x)$ definido em x e $A_\mu(x + dx)$ em $x + dx$, generalizando da seguinte forma:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A_\lambda(x) dx^\nu \quad (\text{B.7})$$

Este procedimento chama-se deslocamento paralelo, o termo $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$ chamamos de conexão e é responsável por trazer a curvatura no espaço-tempo. Definimos a derivada covariante como:

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \quad (\text{B.8})$$

Para tensores de ordens superiores temos:

$$\nabla_\nu T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_m} = \partial_\nu T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_m} + \sum_i \Gamma_{\nu\xi}^{\beta_i} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \xi \dots \beta_m} - \sum_i \Gamma_{\nu\alpha_i}^\xi T_{\alpha_1 \dots \xi \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_m} \quad (\text{B.9})$$

Um resultado interessante é o da derivada covariante na própria métrica:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.10})$$

usando esse resultado de (B.10) com (B.9), dado a conexão simétrica, pode ser escrita em termos do tensor métrico da seguinte maneira:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (\text{B.11})$$

Este objeto com três índices chama-se de *Símbolo de Cristoffel*.

B.2 TENSOR DE CURVATURA DE RICCI

O tensor de curvatura Riemann-Christoffel é dado por:

$$R_{\mu\nu\alpha}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\lambda \quad (\text{B.12})$$

dessa relação podemos obter que $R_{\mu\nu\alpha}^\lambda = -R_{\mu\alpha\nu}^\lambda$ se fizermos permutações cíclicas nos índices μ, ν e α e somando os resultados, temos:

$$R_{\mu\nu\alpha}^\lambda + R_{\alpha\mu\nu}^\lambda + R_{\nu\alpha\mu}^\lambda = 0 \quad (\text{B.13})$$

chamado de identidade de Bianchi. Uma grandeza importante para a teoria da relatividade é:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \quad (\text{B.14})$$

que é o tensor de Ricci, com ele obtemos o escalar de curvatura:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R \quad (\text{B.15})$$

conhecido como escalar de Ricci.

APÊNDICE C – LAPSO DE TEMPO

Como vemos em (BLAU, 1995) e (PEREIRA., 2017), podemos usar um ansatz na métrica tomando-a como:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)dx_i^2 \quad (\text{C.1})$$

Podemos sempre escolher o medidor $N(t)$ tendendo a 1 a métrica se comportará igual à métrica de Friedman, no final dos cálculos. A quantidade $N(t)$ nos ajudará a obter um formalismo Lagrangiano para as equações de Friedmann (2.8) e (2.9). Usando a densidade lagrangiana da ação (2.1) sem a constante cosmológica e (B.15), com $N(t) \equiv N$, obtemos:

$$R = \frac{6}{a^2 N^3} \left[N (a\ddot{a} + \dot{a}^2) - a\dot{a}\dot{N} + kN^3 \right] \quad (\text{C.2})$$

logo,

$$\mathcal{L} = \sqrt{g}R = Na^3\sqrt{g'}R = \sqrt{g'}\frac{6a}{N^2} \left[N (a\ddot{a} + \dot{a}^2) - a\dot{a}\dot{N} + kN^3 \right] \quad (\text{C.3})$$

A única dependência das coordenadas espaciais está no elemento de volume espacial $\sqrt{g'}$.

Portanto, integrando essa densidade lagrangiana ao longo do espaço-tempo, obtém-se um fator de volume da integração sobre as coordenadas espaciais que vamos simplesmente descartar. Ficamos, assim, com a lagrangiana gravitacional unidimensional:

$$\mathcal{L} = \frac{6a}{N^2} \left[N (a\ddot{a} + \dot{a}^2) - a\dot{a}\dot{N} + kN^3 \right] \quad (\text{C.4})$$

Observe que esta lagrangeana não depende apenas de $a(t)$, $\dot{a}(t)$, N , $\dot{N}$, mas também de um fator $\ddot{a}$. Isso obviamente reflete a propriedade geral da Lagrangeana de Einstein-Hilbert que depende da 2ª derivada da métrica. Para eliminar termo de aceleração, podemos integrar o primeiro termo da Lagrangiana quando a escrevemos nos termos de derivada total em uma integral do tempo, ela se anula nos extremos, observe que

$$6a^2\ddot{a}N^{-1} = \frac{d}{dt}(6a^2\dot{a}N^{-1}) + 6aN^{-2}(-2\dot{a}^2N + a\dot{a}\dot{N}), \quad (\text{C.5})$$

manipulando esta equação:

$$\mathcal{L} = \frac{6a}{N^2} (-N\dot{a}^2 + kN^3) - \frac{d}{dt}(6a^2\dot{a}N^{-1}) \quad (\text{C.6})$$

pelo princípio de mínima ação e considerando os extremos da integração, o termo da derivada total é

cancelado¹. Incluindo a constante cosmológica:

$$\mathcal{L} = \frac{6a}{N^2} \left(-N\dot{a}^2 + kN^3 - \frac{\Lambda a^2 N^3}{3} \right) \quad (\text{C.7})$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange em relação a N

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} = 0, \quad (\text{C.8})$$

como a densidade Lagrangiana não depende de $\dot{N}$ conseguimos realizar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} = 6a \left(\dot{a}^2 N^{-2} + k - \frac{\Lambda a^2}{3} \right) = 0, \quad (\text{C.9})$$

portanto

$$\frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (\text{C.10})$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange em (C.7) em relação ao fator de escala a ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} &= -6\dot{a}^2 N^{-1} + 6kN - 6\Lambda a^2 N^3, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} &= -12N^{-1} \frac{d}{dt}(\dot{a}a) = -12N^{-1}(\ddot{a}a + \dot{a}^2), \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2 N} + \frac{2\ddot{a}}{aN} + \frac{kN}{a^2} = \Lambda N^3. \quad (\text{C.11})$$

Observe que nas equações (C.10) e (C.11) quando N tende a um, Obtemos a parte geométrica das equações de Friedmann (2.17) e (2.18).

¹ Para melhor entendimento leia sessão 2.1 de (LEMOS, 2013)