Otimização Global para os Problemas de Redução $\mathcal{H}_2$ de Modelos e Redução $\mathcal{H}_2$ da Ordem do Controlador

Edvaldo Assunção*
edvaldo@dee.feis.unesp.br

Pedro L. D. Peres**
peres@dt.fee.unicamp.br

*Universidade Estadual Paulista, DEE/FEIS/UNESP
CP 31, 15.385-000 - Ilha Solteira – SP – Brasil
**Universidade Estadual de Campinas, DT/FEEC
CP 6101, 13.081-970 - Campinas - SP – Brasil

RESUMO Algoritmos *branch and bound* são propostos para resolver os problemas de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos e redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador, com condições que asseguram a convergência dos algoritmos para o ótimo global em tempo finito. Os limitantes inferior e superior utilizados no procedimento de otimização são obtidos através de problemas descritos na forma de desigualdades matriciais lineares. Exemplos ilustram os resultados.

Palavras chaves: redução de modelos, norma $\mathcal{H}_2$, Branch and Bound, otimização global, desigualdades matriciais lineares.

ABSTRACT A branch and bound algorithm is proposed to solve the $\mathcal{H}_2$-norm model reduction problem and the $\mathcal{H}_2$-norm controller reduction problem, with conditions assuring convergence to the global optimum in finite time. The lower and upper bounds used in the optimization procedure are obtained through linear matrix inequalities formulations. Examples illustrate the results.

Keywords: Model Reduction, $\mathcal{H}_2$ Norm, Branch and Bound, Global Optimization, Linear Matrix Inequalities.

1 INTRODUÇÃO

O problema de redução de modelos tem recebido grande atenção durante as últimas três décadas. De fato, um modelo reduzido que aproxime bem uma planta de alta ordem é muito importante para propósitos relacionados ao projeto de controladores. Modelos de baixa ordem são mais fáceis de se analisar e podem ser implementados como controladores digitais em problemas práticos, vide por exemplo (Joshi and Kelkar, 1998).

Muitos métodos de redução de modelos aparecem na literatura. Os que mais causaram impacto foram o método da realização balanceada (Moore, 1981) e o método da norma Hankel (Glover, 1984), que basicamente eliminam os estados menos significativos (associados aos menores valores singulares da chamada realização balanceada) para obter o modelo reduzido. Contudo, esses são métodos de otimização local.

Mais recentemente, estão sendo usados para redução de modelos métodos de otimização baseados em Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) acopladas, usando as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ como critério de desempenho. Como é bem conhecido, LMIs podem ser resolvidas por algoritmos de características polinomiais de convergência, altamente eficientes ((Gahinet et al., 1995), (Gahinet and Nemirovskii, 1994)). Contudo, as formulações propostas são não lineares mas, em geral, são expressas na forma de Desigualdades Matriciais Bilineares - BMIs (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities*), sendo resolvidas por algoritmos que não possuem convergência assegurada ((Assunção e Peres, 1998a), (Assunção and Peres, 1998b), (Assunção and Peres, 1998c), (Assunção and Peres, 1999b), (Grigoriadis, 1997), (Helmersson, 1994), (Valentin and Duc, 1997)).

O algoritmo *branch and bound* tem sido utilizado para otimização global de alguns problemas de controle (VanAntwerp et al., 1997), (VanAntwerp and Braatz, 2000). Apesar de algumas vezes demandar um elevado esforço computacional, o algoritmo *branch and bound* obtém a solução global em tempo finito (Balakrishnan and Boyd, 1992). A idéia principal do algoritmo consiste em subdividir o espaço paramétrico enquanto os limitantes superior e inferior para o ótimo global são calculados, usando uma heurística para a divisão.

Neste trabalho, é proposto um algoritmo *branch and bound* para resolver o problema de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos lineares contínuos no tempo (Assunção, 2000), (Assunção and Peres, 1999a). Utilizando representação em espaço de estados, a minimização da norma $\mathcal{H}_2$ do erro entre o modelo original e o reduzido pode ser formulada como um problema de otimização na forma de BMIs. Para impor um limite para as variáveis matriciais utiliza-se uma relaxação retangular da região factível (não convexa). São mostradas condições que asseguram a convergência do algoritmo para o ótimo global em tempo finito. Aproveitando-se esta estrutura, é proposto um método de redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador distinto das formulações existentes na literatura (VanAntwerp et al., 1997), (Balakrishnan and Boyd, 1992). Esta metodologia possibilita encontrar um controlador de ordem reduzida que objetiva aproximar o desempenho obtido com o controlador de alta ordem, não importando a técnica utilizada no projeto original do controlador. Neste caso, a norma $\mathcal{H}_2$ é utilizada como medida do desempenho do pro-

[0]Artigo submetido em 22/11/99
1a. Revisão em 17/04/2000; 2a. Revisão em 18/04/2001
Aceito sob recomendação do Ed. Cons. Prof. Dr. Liu Hsu

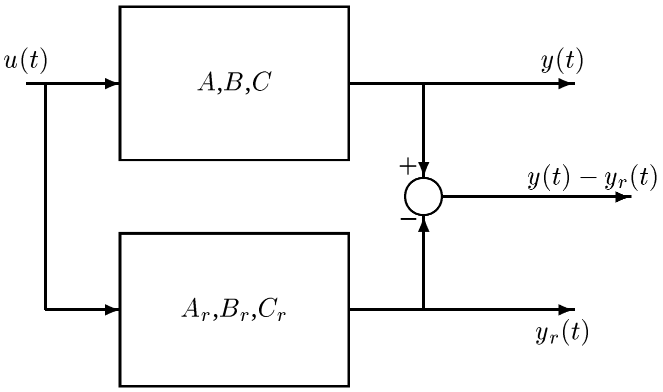

Figura 1: Diagrama de blocos do erro de redução.

cedimento de redução. Alguns exemplos são apresentados para ilustrar os métodos propostos.

2 FORMULAÇÃO DA REDUÇÃO $\mathcal{H}_2$ DE MODELOS

A norma $\mathcal{H}_2$ do sistema dinâmico estritamente próprio $H(s)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A, B, C),

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, supostamente conhecidas, pode ser obtida através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs (Boyd et al., 1994):

$$\begin{aligned}\|H(s)\|_2^2 = \quad & \min \quad Tr\,(R)\\ & s.a \quad \begin{bmatrix} R & CP \\ PC' & P \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}\\ & \qquad \begin{bmatrix} AP + PA' & B \\ B' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}\\ & \qquad P > \mathbf{0}\end{aligned} \tag{1}$$

A matriz de transferência do sistema é dada por $H(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B$.

O problema ótimo de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos pode ser assim formulado: encontre um sistema estável com ordem $r < n$ e com representação no espaço de estados (A_r, B_r, C_r)

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t)\\ y_r(t) &= C_r x_r(t)\end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r\times m}$ e $C_r \in \mathbb{R}^{p\times r}$, tal que a norma $\mathcal{H}_2$ do modelo do erro de redução, dado por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{2}$$

seja minimizada.

A figura 1 mostra o diagrama de blocos do modelo do erro de redução.

De (1) e (2), a norma $\mathcal{H}_2$ do modelo do erro de redução pode ser obtida como

$$\begin{aligned}\|H(s)\|_2^2 = \Phi = \quad & \min \quad Tr\,(R)\\ & s.a \quad \begin{bmatrix} R & \tilde{C}P \\ P\tilde{C}' & P \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}\\ & \qquad \begin{bmatrix} \tilde{A}P + P\tilde{A}' & \tilde{B} \\ \tilde{B}' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}\\ & \qquad P > \mathbf{0}\end{aligned} \tag{3}$$

Note que a existência de $P > 0$ satisfazendo (3) é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de $\tilde{A}$ e, por conseguinte, para a estabilidade de A e de A_r.

Particionando-se a matriz P na forma

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

com $P_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $P_{12} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, tem-se

$$\begin{aligned}\Phi = \min \quad & Tr\,(R)\\ s.a \quad & \begin{bmatrix} R & * & * \\ P_{11}C' - P_{12}C_r' & P_{11} & * \\ P_{12}'C' - P_{22}C_r' & P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}\\ & \begin{bmatrix} AP_{11} + P_{11}A' & * & * \\ A_rP_{12}' + P_{12}'A' & A_rP_{22} + P_{22}A_r' & * \\ B' & B_r' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}\\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}\end{aligned} \tag{5}$$

sendo que “$*$” denota elemento simétrico da matriz.

Para uma ordem r fixa para o modelo reduzido, as variáveis do problema são A_r, B_r, C_r, P e R, produzindo os termos bilineares $P_{12}A_r'$, $P_{22}A_r'$, $P_{12}C_r'$, $P_{22}C_r'$. O problema de redução de modelos ótimo está descrito na forma de BMIs. Na seção 5, é proposto um algoritmo de otimização global para este problema.

3 REDUÇÃO $\mathcal{H}_2$ DA ORDEM DO CONTROLADOR

O problema ótimo de redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador pode ser assim formulado: encontre um controlador com ordem $r < n$, com representação em espaço de estados (A_r,B_r,C_r)

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r y(t)\\ u(t) &= C_r x_r(t)\end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r\times m}$ e $C_r \in \mathbb{R}^{p\times r}$, tal que a norma $\mathcal{H}_2$ do modelo do erro entre o sistema realimentado pelo controlador original de ordem k e o sistema controlado pelo controlador de ordem reduzida de ordem r, dado por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} A & -BC_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B \\ B_kC & A_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A & -BC_r & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_rC & A_r & \mathbf{0} \\ \hline C & \mathbf{0} & -C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{6}$$

seja minimizada. A equação (6) representa o modelo do erro de redução entre o sistema realimentado pelo controlador original,

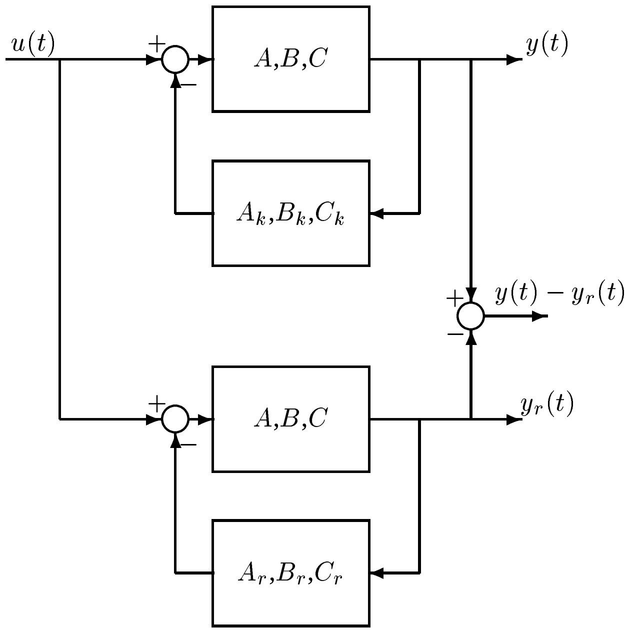

Figura 2: Diagrama de blocos do modelo do erro de redução da ordem do controlador: os parâmetros da planta são A, B, C, do controlador original são A_k, B_k, C_k e do controlador reduzido são A_r, B_r, C_r.

dado por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_k(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -BC_k \\ B_kC & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

e o sistema realimentado pelo controlador de ordem reduzida, dado por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -BC_r \\ B_rC & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Os estados do controlador original são representados por $x_k(t)$. A figura 2 mostra o diagrama de blocos do modelo do erro de redução do controlador. De maneira similar à desenvolvida na seção 2, utilizando-se as equações (3) e (6) e particionando-se a matriz P na forma

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}' & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}' & P_{23}' & P_{33} \end{bmatrix}$$

com $P_{11} \in \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$, $P_{12} \in \mathbb{R}^{(n+k)\times n}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_{13} \in \mathbb{R}^{(n+k)\times r}$, $P_{23} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ e $P_{33} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, tem-se (8), sendo que A_f, B_f, C_f são os parâmetros do sistema realimentado pelo controlador original, dado em (7), ou seja,

$$A_f = \begin{bmatrix} A & -BC_k \\ B_kC & A_k \end{bmatrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Note que o problema (8) está descrito na forma de BMIs e será proposto neste trabalho um método de otimização global para o problema.

4 O ALGORITMO *BRANCH and BOUND*

O algoritmo *branch and bound* é uma técnica de otimização global que pode ser aplicada em problemas NP-hard, encontrando o mínimo global de uma função não convexa $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ sobre um hiper-retângulo $\mathcal{Q}$ de dimensão l. O hiper-retângulo é iterativamente dividido até que o ótimo global seja obtido com dada precisão ϵ.

De acordo com (Goh et al., 1994), o método *branch and bound* pode ser interpretado como uma maneira conveniente de gerar divisões iterativas no espaço de busca que utiliza limites superiores e inferiores para refinar progressivamente as áreas de interesse, evitando que todo o espaço de busca seja investigado. Este procedimento termina quando a diferença entre o limite superior e o inferior é menor que ϵ.

O algoritmo *branch and bound* é ilustrado na figura 3, (veja (Ryoo and Sahinidis, 1995) para detalhes). Primeiro, são determinadas uma função relaxação inicial L_1 e uma função restrição inicial U_1 contendo a função objetivo não convexa F, como ilustrado na figura 3(a). Essas funções devem ser determinadas de forma a garantir que o mínimo global da função restrição seja maior que o mínimo global da função não convexa e que o mínimo global da função relaxação seja menor que o mínimo global da função não convexa. O domínio factível é então dividido em duas subregiões, à direita e à esquerda do ponto de divisão (SP) e novos limites inferiores (L_2, L_3) e limites superiores (U_2, U_3) são calculados. Se o valor mínimo do limite inferior for maior que o valor mínimo de qualquer limitante superior, essa região deve ser descartada pois o ótimo global não pertence a essa região. A figura 3(b) ilustra este procedimento, neste caso, o valor mínimo do limitante inferior L_3, indicado por L, é maior que o valor mínimo do limitante superior U_2, indicado por U. A figura 3(c) ilustra a região descartada. A seguir, a região factível é dividida (figura 3(d)) e o procedimento é repetido até que a diferença entre os limites superior e inferior sejam menor que ϵ. O algoritmo *branch and bound* proposto neste trabalho envolve a construção de uma árvore de busca com problemas de otimização descritos na forma de LMIs em cada nó (essas LMIs serão descritas na seção 5). Apesar das LMIs serem eficientementes resolvidas, a manipulação do hiper-retângulo $\mathcal{Q}$ requer uma heurística com a qual espera-se reduzir o número total de operações para resolver o problema, quando comparado com a divisão exaustiva do hiper-retângulo (para maiores detalhes vide (Balakrishnan and Boyd, 1992)). A seguir, é apresentado o algoritmo *branch and bound*, sendo que os limitantes superior e inferior para o problema de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos contínuos serão apresentados na seção 5.

O Algoritmo *Branch and Bound*

Na seguinte descrição, k denota o índice da k-ésima iteração, $\mathcal{L}_k$ denota a lista de hiper-retângulos ativos na k-ésima iteração, $\mathcal{Q}_i$ é o i-ésimo hiper-retângulo pertencente a lista $\mathcal{L}_k$ (subdivisões do hiper-retângulo inicial $\mathcal{Q}$), $\Phi_L(\mathcal{Q}_i)$ denota o limitante inferior do i-ésimo hiper-retângulo, $\Phi_U(\mathcal{Q}_i)$ denota o limitante superior do i-ésimo hiper-retângulo e $\epsilon > 0$ é a precisão especificada.

$$
\begin{aligned}
\Phi = \min \quad & Tr\,(R) \\
s.a \quad & \begin{bmatrix} R & C_fP_{11} - CP_{12}' & C_fP_{12} - CP_{22} & C_fP_{13} - CP_{23} \\ P_{11}C_f' - P_{12}C' & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}'C_f' - P_{22}C' & P_{12}' & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}'C_f' - P_{23}'C' & P_{13}' & P_{23}' & P_{33} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} A_fP_{11} + P_{11}A_f' & A_fP_{12} + P_{12}A' - P_{13}C_r'B' & A_fP_{13} + P_{12}C'B_r' + P_{13}A_r' & B_f \\ AP_{12}' - BC_rP_{13}' + P_{12}'A_f' & AP_{22} - BC_rP_{23}' + P_{22}A' - P_{23}C_r'B' & AP_{23} - BC_rP_{33} + P_{22}C'B_r' + P_{23}A_r' & B \\ B_rCP_{12}' + A_rP_{13}' + P_{13}'A_f' & B_rCP_{22} + A_rP_{23}' + P_{23}'A' - P_{33}C_r'B' & B_rCP_{23} + A_rP_{33} + P_{23}'C'B_r' + P_{33}A_r' & \mathbf{0} \\ B_f' & B' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}' & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}' & P_{23}' & P_{33} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

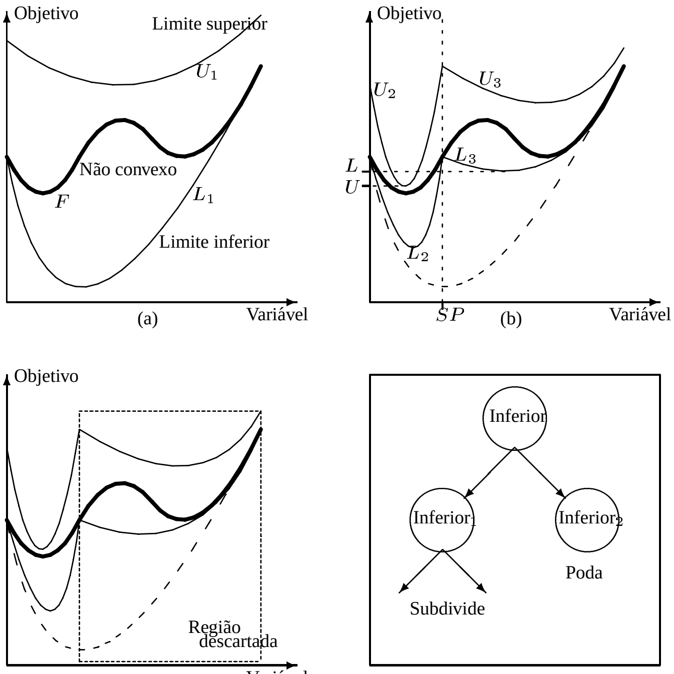

Figura 3: Interpretação gráfica do algoritmo *branch and bound*.

1. *Faça:* $k = 0$, $\mathcal{L}_0 = \{\mathcal{Q}\}$, $L_0 = \Phi_L(\mathcal{Q})$, $U_0 = \Phi_U(\mathcal{Q})$.

2. *Repita* $\{$

R1. selecione $\mathcal{Q}_i \in \mathcal{L}_k$ *tal que* $\Phi_L(\mathcal{Q}_i) = L_k$*;*

R2. divida $\mathcal{Q}_i$ *ao longo de seu maior lado e coloque em* $\mathcal{Q}_I$ *e* $\mathcal{Q}_{II}$*;*

R3. $\mathcal{L}_{k+1} := (\mathcal{L}_k - \{\mathcal{Q}_i\}) \bigcup \{\mathcal{Q}_I, \mathcal{Q}_{II}\}$*;*

R4. $L_{k+1} := \min_{\mathcal{Q}_i \in \mathcal{L}_{k+1}} \Phi_L(\mathcal{Q}_i)$*;*

R5. $U_{k+1} := \min_{\mathcal{Q}_i \in \mathcal{L}_{k+1}} \Phi_U(\mathcal{Q}_i)$*;*

R6. $k := k + 1$.

$\}$ *até* $U_k - L_k < \epsilon$.

Note que, no item *R3*, o hiper-retângulo $\mathcal{Q}_i$ dos itens *R1* e *R2* é removido da lista $\mathcal{L}_k$, enquanto que as duas novas partições são adicionadas. A cada iteração, novos limitantes inferiores e superiores são obtidos nos itens *R4* e *R5*, respectivamente. A cada iteração, a poda pode ser realizada eliminando-se da lista $\mathcal{L}_k$ os hiper-retângulos $\mathcal{Q}_i \in \mathcal{L}_k$ que satisfaçam

$$\Phi_L(\mathcal{Q}_i) > U_k$$

o que reduz a quantidade de memória computacional necessária para o algoritmo operar.

A seguir, apresentam-se os limitantes superior e inferior do problema de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos que satisfazem as condições necessárias para que o algoritmo convirja para o ótimo global em um tempo finito.

5 REDUÇÃO $\mathcal{H}_2$ DE MODELOS CONTÍNUOS

5.1 Limitante Superior

Considere o problema de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos contínuos formulado na seção 2 pela equação (5), um limitante superior Φ_U para a norma $\mathcal{H}_2$ (ao quadrado) do erro de redução pode ser obtido fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (5), isto é

$$
\begin{aligned}
\Phi_U = \min \quad & Tr\,(R) \\
s.a \quad & \begin{bmatrix} R & * & * \\ P_{11}C' - P_{12}\hat{C}_r' & P_{11} & * \\ P_{12}'C' - P_{22}\hat{C}_r' & P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$\left[\begin{array}{ccc} AP_{11}+P_{11}A' & AP_{12}+P_{12}\hat{A}_r' & B \\ \hat{A}_rP_{12}'+P_{12}'A' & \hat{A}_rP_{22}+P_{22}\hat{A}_r' & B_r \\ B' & B_r' & -\mathbf{I} \end{array}\right] \leq \mathbf{0}$$
$$\left[\begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{array}\right] > \mathbf{0} \qquad (9)$$

Note que, fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (9), uma restrição foi imposta em $\mathcal{Q}$ implicando que

$$\Phi_U(\hat{A}_r, \hat{C}_r) \geq \Phi_{(A_r,C_r)\in\mathcal{Q}} \qquad (10)$$

Uma observação importante aqui é que (9) é um problema de otimização descrito na forma de LMIs que pode ser eficientemente resolvido por procedimentos numéricos de características polinomiais de convergência (Gahinet et al., 1995).

5.2 Limitante Inferior

Um limitante inferior para o problema de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos formulado pela equação (5) pode ser obtido através da relaxação das restrições, criando-se novas variáveis que representem os termos bilineares, ou seja, definindo-se $W_1 = C_rP_{12}'$, $W_2 = C_rP_{22}$, $W_3 = P_{12}A_r'$ e $W_4 = A_rP_{22}$ na equação (5), obtendo-se

$$\begin{array}{rl} \Phi_L = \min & Tr\,(R) \\ s.a & \left[\begin{array}{ccc} R & CP_{11}-W_1 & * \\ P_{11}C'-W_1' & P_{11} & * \\ P_{12}'C'-W_2' & P_{12}' & P_{22} \end{array}\right] \geq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{ccc} AP_{11}+P_{11}A' & AP_{12}+W_3 & B \\ W_3'+P_{12}'A' & W_4+W_4' & B_r \\ B' & B_r' & -\mathbf{I} \end{array}\right] \leq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{array}\right] > \mathbf{0} \end{array} \qquad (11)$$

Claramente, a equação (11) representa um problema relaxado quando comparado com a equação (5), implicando que

$$\Phi_{(A_r,C_r)\in\mathcal{Q}} \geq \Phi_L \qquad (12)$$

Assim como o limitante superior, o limitante inferior dado por (11), é um problema de otimização via LMI que pode ser eficientemente resolvido.

5.3 Construção de $\mathcal{Q}$

O problema de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos não impõe restrições naturais às variáveis do problema, que são os elementos das matrizes A_r, B_r, C_r, R, P, W_1, W_2, W_3 e W_4. Para construir a região de busca, definida pelo hiper-retângulo $\mathcal{Q}$, uma nova região relaxada pode ser obtida resolvendo-se $2N_t$ problemas de otimização via LMIs, sendo N_t o número total de variáveis (veja (Maranas and Floudas, 1997) para mais detalhes). Denotando $x \in \mathbb{R}^{N_t}$ o vetor de todas as variáveis matriciais (exceto A_r e C_r), resolva

$$\begin{array}{ll} \min & x_i \\ \text{s.a} & (11) \\ & i = 1, \ldots, N_t \end{array}$$

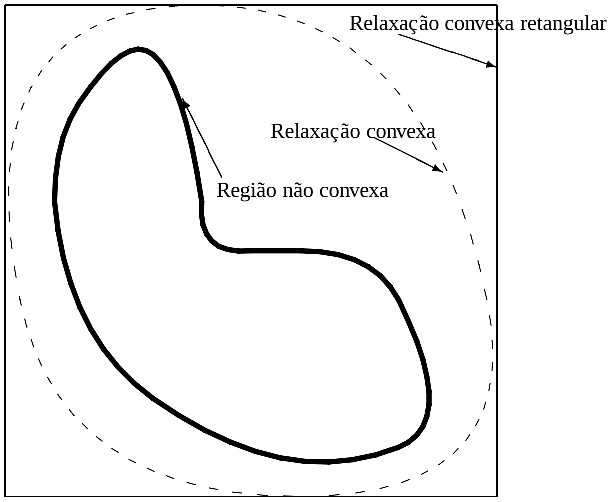

Figura 4: Regiões factíveis.

$$\begin{array}{ll} \max & x_i \\ \text{s.a} & (11) \\ & i = 1, \ldots, N_t \end{array}$$

Com este procedimento obtêm-se,

$$x_{min} \leq x \leq x_{max} \quad , \; x \in \mathbb{R}^{N_t}$$

Os valores máximo e mínimo dos elementos da matrizes A_r e C_r são obtidos em função dos vetores x_{min} e x_{max}.

Apenas para ilustrar, a figura 4 mostra uma região não convexa factível, a sua relaxação convexa e a relaxação convexa retangular obtida de $[x_{min}, x_{max}]$.

5.4 Análise da Convergência

Para que o algoritmo *branch and bound* minimize Φ é necessária a existência de duas funções, Φ_L e Φ_U, sobre a região $\mathcal{Q}$, tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

C1. Φ_L é um limitante inferior e Φ_U um limitante superior para Φ, isto é,

$$\Phi_L \leq \Phi \leq \Phi_U$$

para todo hiper-retângulo $\mathcal{Q}$.

C2. Seja Size($\mathcal{Q}$) o comprimento do maior lado do hiper-retângulo $\mathcal{Q}$. Quando Size($\mathcal{Q}$) $\to 0$, $\Phi_U(\mathcal{Q}) - \Phi_L(\mathcal{Q}) \to 0$ uniformemente, isto é, $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, tal que,

$$\text{Size}(\mathcal{Q}) \leq \delta \;\; \Rightarrow \;\; \Phi_U(\mathcal{Q}) - \Phi_L(\mathcal{Q}) \leq \epsilon$$

Claramente, Φ_L e Φ_U definidos nas equações (11) e (9) satisfazem as condições **C1** e **C2**. A condição **C1** segue imediatamente das equações (10) e (12); se o maior lado de $\mathcal{Q}$ é iterativamente reduzido pelo algoritmo, a condição **C2** também é satisfeita. Assim, as condições **C1** e **C2** são satisfeitas e portanto, o algoritmo converge para o ótimo global em um tempo finito (veja (Balakrishnan et al., 1991)).

6 REDUÇÃO $\mathcal{H}_2$ DA ORDEM DO CONTROLADOR

Nesta seção serão apresentados os limitantes superior e inferior para o problema de redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador que resolvem o problema utilizando o algoritmo *branch and bound* mostrado na seção 4.

6.1 Limitante Superior

Considere o problema de redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador formulado na seção 3 pela equação (8), um limitante superior Φ_U para a norma $\mathcal{H}_2$ (ao quadrado) do erro de redução pode ser obtido fixando-se $A_r = \hat{A}_r$, $B_r = \hat{B}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (8), resultando (13).

Note que, fixando-se $A_r = \hat{A}_r$, $B_r = \hat{B}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (13), uma restrição foi imposta em $\mathcal{Q}$ implicando que

$$\Phi_U(\hat{A}_r, \hat{B}_r, \hat{C}_r) \geq \Phi_{(A_r,B_r,C_r)\in\mathcal{Q}} \tag{14}$$

Neste caso, (13) é um problema de otimização descrito na forma de LMIs que pode ser eficientemente resolvido.

6.2 Limitante Inferior

Um limitante inferior para o problema de redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador formulado na seção 3 pela equação (8) pode ser obtido através da relaxação das restrições, criando-se novas variáveis que representem os termos bilineares, ou seja, definindo-se $W_1 = BC_rP'_{13}$, $W_2 = BC_rP'_{23}$, $W_3 = B_rCP'_{12}$, $W_4 = A_rP'_{13}$, $W_5 = B_rCP_{22}$, $W_6 = A_rP'_{23}$, $W_7 = P_{33}C'_rB'$, $W_8 = B_rCP_{23}$ e $W_9 = A_rP_{33}$ na equação (8), obtendo-se (15).

Claramente, a equação (15) representa um problema relaxado quando comparado com a equação (8), implicando que

$$\Phi_{(A_r,B_r,C_r)\in\mathcal{Q}} \geq \Phi_L \tag{16}$$

Aqui também, o limitante inferior dado por (15), é um problema de otimização via LMI que pode ser eficientemente resolvido.

6.3 Construção de $\mathcal{Q}$

Assim como no caso de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos, o problema de redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador não impõe restrições naturais às variáveis do problema, que são os elementos das matrizes A_r, B_r, C_r, R, P, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8 e W_9. Para construir a região de busca, definida pelo hiper-retângulo $\mathcal{Q}$, uma nova região relaxada pode ser obtida resolvendo-se $2N_t$ problemas de otimização via LMIs, sendo N_t o número total de variáveis. Denotando $x \in \mathbb{R}^{N_t}$ o vetor de todas as variáveis matriciais (exceto A_r, B_r e C_r), resolva

$$\begin{array}{rl} \min & x_i \\ \text{s.a} & (15) \\ & i = 1, \ldots, N_t \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max & x_i \\ \text{s.a} & (15) \\ & i = 1, \ldots, N_t \end{array}$$

Com este procedimento obtêm-se,

$$x_{min} \leq x \leq x_{max} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^{N_t}$$

Os valores máximo e mínimo dos elementos da matrizes A_r, B_r e C_r são obtidos em função dos vetores x_{min} e x_{max}.

6.4 Análise da Convergência

Claramente, Φ_L e Φ_U definidos nas equações (15) e (13) satisfazem as condições **C1** e **C2** mostradas na seção 5.4, portanto o algoritmo converge para o ótimo global em um tempo finito.

7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplo 1. O primeiro exemplo refere-se à redução $\mathcal{H}_2$ do modelo de um sistema dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.1000 & -0.8889 \\ 1.0000 & -0.1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

O objetivo é obter um modelo de primeira ordem, isto é, $r = 1$. A figura 5 mostra a evolução dos limitantes inferior e superior da função Φ, equações (11) e (9). Como pode ser notado, o algoritmo necessitou de 80 iterações para reduzir a diferença entre o limitante superior e o inferior para menos que 0.4% do limitante superior. Para efeito de comparação com os outros métodos de redução de modelos, mostra-se na figura 5 a raiz quadrada dos valores dos limitantes superior e inferior.

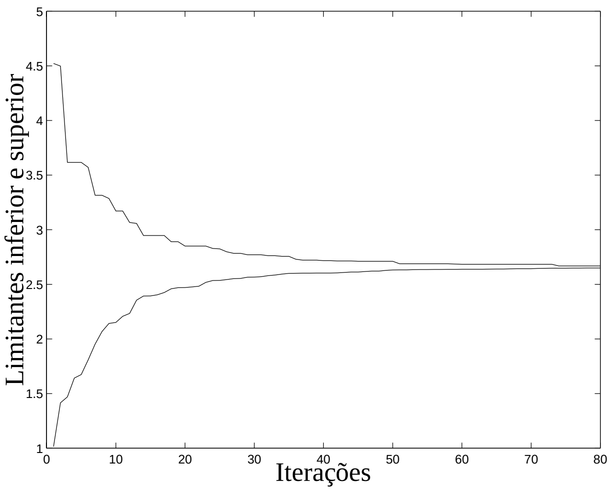

Figura 5: Evolução dos limitantes inferior e superior (raiz quadrada) para a redução $\mathcal{H}_2$ do modelo do exemplo 1.

O modelo reduzido resultante é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -1.6648x(t) + 1.0022u(t) \\ y(t) &= 2.8323x(t) \end{aligned}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ do modelo do erro de redução é 2.6610. Usando a realização balanceada (Moore, 1981), obtém-se $\mathcal{H}_2 =$

$$
\begin{aligned}
\Phi_U = \min \quad & Tr\,(R) \\
s.a & \begin{bmatrix} R & C_fP_{11} - CP'_{12} & C_fP_{12} - CP_{22} & C_fP_{13} - CP_{23} \\ P_{11}C'_f - P_{12}C' & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12}C'_f - P_{22}C' & P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13}C'_f - P'_{23}C' & P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} A_fP_{11} + P_{11}A'_f & A_fP_{12} + P_{12}A' - P_{13}\hat{C}'_rB' & A_fP_{13} + P_{12}C'\hat{B}'_r + P_{13}\hat{A}'_r & B_f \\ AP'_{12} - B\hat{C}_rP'_{13} + P'_{12}A'_f & AP_{22} - B\hat{C}_rP'_{23} + P_{22}A' - P_{23}\hat{C}'_rB' & AP_{23} - B\hat{C}_rP_{33} + P_{22}C'\hat{B}'_r + P_{23}\hat{A}'_r & B \\ \hat{B}_rCP'_{12} + \hat{A}_rP'_{13} + P'_{13}A'_f & \hat{B}_rCP_{22} + \hat{A}_rP'_{23} + P'_{23}A' - P_{33}\hat{C}'_rB' & \hat{B}_rCP_{23} + \hat{A}_rP_{33} + P'_{23}C'\hat{B}'_r + P_{33}\hat{A}'_r & \mathbf{0} \\ B'_f & B' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_L = \min \quad & Tr\,(R) \\
s.a & \begin{bmatrix} R & C_fP_{11} - CP'_{12} & C_fP_{12} - CP_{22} & C_fP_{13} - CP_{23} \\ P_{11}C'_f - P_{12}C' & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12}C'_f - P_{22}C' & P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13}C'_f - P'_{23}C' & P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} A_fP_{11} + P_{11}A'_f & A_fP_{12} + P_{12}A' - W'_1 & A_fP_{13} + W'_3 + W'_4 & B_f \\ P'_{12}A'_f + AP'_{12} - W_1 & AP_{22} + P_{22}A' - W_2 - W'_2 & AP_{23} + W'_5 + W'_6 - W'_7 & B \\ W_3 + W_4 + P'_{13}A'_f & W_5 + W_6 - W_7 + P'_{23}A' & W_8 + W'_8 + W_9 + W'_9 & \mathbf{0} \\ B'_f & B' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{15}
$$

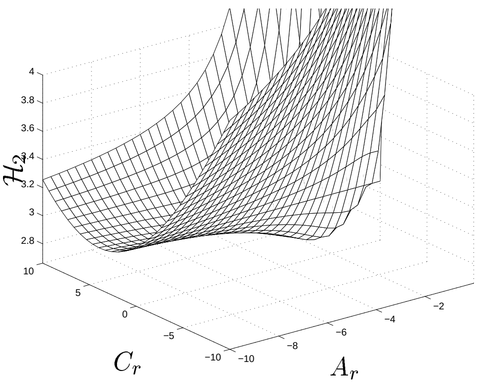

Figura 6: Superfície da norma $\mathcal{H}_2$ do modelo do erro de redução (exemplo 1).

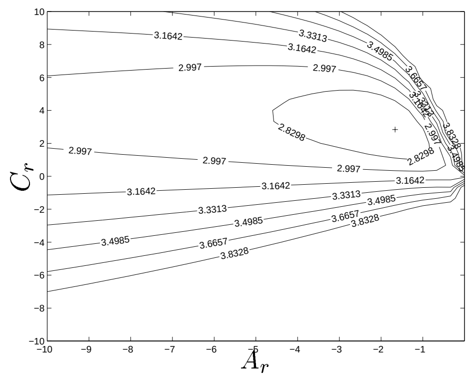

Figura 7: Curvas de nível da norma $\mathcal{H}_2$ do modelo do erro de redução do problema (exemplo 1). O ótimo global obtido pelo algoritmo *branch and bound* é indicado por "+".

4.1088 e utilizando o algoritmo de otimização local descrito em (Assunção e Peres, 1998a) o modelo reduzido resultante proporcionou 3.0632. Como esperado, o algoritmo *branch and bound* produziu melhor resultado que os outros métodos de otimização local.

Apenas para ilustração, neste caso, a norma $\mathcal{H}_2$ da diferença entre o sistema original e o modelo reduzido de ordem $r = 1$ pode ser diretamente calculada como função de A_r, B_r e C_r. Fixando-se $B_r = 1$, o ótimo global da função Φ pode ser obtido através da divisão exaustiva do domínio paramétrico. A figura 6 mostra a norma $\mathcal{H}_2$ do modelo do erro de redução como uma superfície no espaço do domínio paramétrico dado por $-10 < A_r < 0$, $-10 < C_r < 10$. As curvas de nível da norma $\mathcal{H}_2$ do modelo do erro de redução estão mostradas na figura 7.

Pode-se notar que o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ (indicado por "+") coincide com o valor ótimo obtido pelo algoritmo *branch and bound*.

Exemplo 2. O segundo exemplo refere-se à redução $\mathcal{H}_2$ do modelo de um sistema de controle que mantém constante a tensão na lâmina de aço quente de uma máquina de laminação (veja (Dorf and Bishop, 1995) para detalhes). A função de transferência do sistema é dada por

$$
G(s) = \frac{0.0350s + 0.0175}{2.5s^6 + 8.5s^5 + 11.125s^4 + 7s^3 + 2.125s^2 + 0.285s + 0.0175} \tag{18}
$$

O algoritmo *branch and bound* foi utilizado para se obter o modelo reduzido. A figura 8 mostra a evolução dos limitantes inferior e superior da função Φ (na verdade, mostra-se a raiz quadrada dos valores).

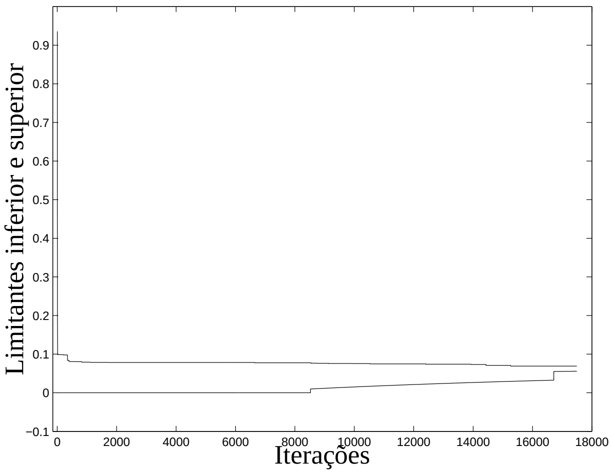

Figura 8: Evolução dos limitantes inferior e superior (raiz quadrada) para a redução $\mathcal{H}_2$ do modelo do exemplo 2.

O modelo reduzido obtido com o ótimo global da norma $\mathcal{H}_2$ do erro de redução confinado no intervalo $0.0557 \leq \mathcal{H}_2 \leq 0.0616$ (precisão abaixo de 10%) é:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -0.054x(t) + 0.0089u(t)\\ y(t) &= 2.4781x(t)\end{aligned}$$

Neste caso, o número total de iterações é 17491. Este exemplo mostra que o algoritmo *branch and bound* pode apresentar lenta convergência para problemas de alta ordem.

Exemplo 3. Este exemplo consiste na redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador, utilizando-se o algoritmo *branch and bound* proposto na seção 6.

O modelo da planta é dado por

$$G(s) = \frac{9}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

A planta é realimentada pelo controlador que tem o seguinte modelo:

$$C(s) = \frac{20.8}{s^3 + 15s^2 + 74s + 120}$$

A função de transferência do modelo do sistema realimentado (planta e controlador) é

$$H(s) = \frac{9s^3 + 135s^2 + 666s + 1080}{s^6 + 21s^5 + 175s^4 + 735s^3 + 1623.99s^2 + 1763.99s + 907.2}$$

Utilizando-se o algoritmo *branch and bound* de redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador para este sistema, obteve-se o seguinte modelo reduzido do controlador:

$$C_r(s) = \frac{0.6054}{s + 3.3075}$$

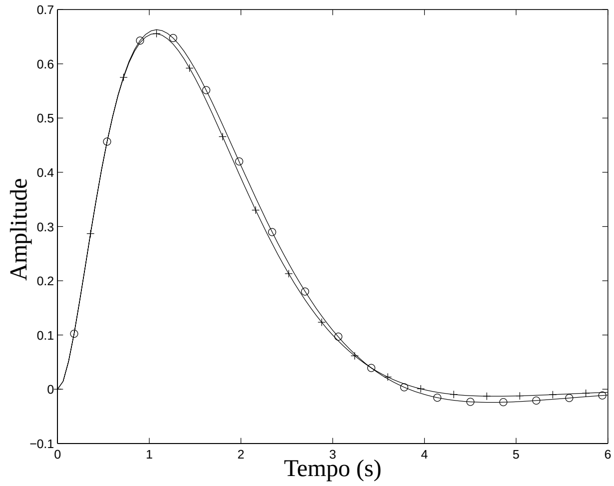

Figura 9: Respostas impulsivas: do sistema realimentado com o controlador original (“o”) e do sistema realimentado com o controlador reduzido (“+”) (exemplo 3).

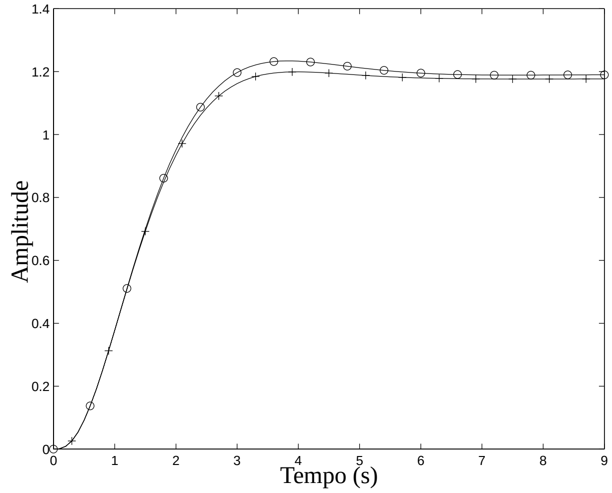

Figura 10: Respostas ao degrau: do sistema realimentado com o controlador original (“o”) e do sistema realimentado com o controlador reduzido (“+”) (exemplo 3).

sendo que o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ do erro de redução obtido após 105 iterações, foi: 2.92×10^{-2}.

O modelo do sistema realimentado com o controlador de ordem reduzida ótimo é dado por

$$H_r(s) = \frac{9s + 29.76}{s^4 + 9.31s^3 + 30.84s^2 + 42.38s + 25.29}$$

A figura 9 mostra as respostas impulsivas do sistema realimentado com o controlador original e do sistema realimentado com o controlador reduzido. É interessante notar que, segundo os resultados apresentados na figura 9 e segundo o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ do erro de redução, o algoritmo *branch and bound* proporcionou um excelente resultado para a redução de ordem do controlador.

A figura 10 mostra as respostas ao degrau do sitema original e o reduzido. Embora o projeto de redução minimize a norma $\mathcal{H}_2$, o modelo reduzido em geral representa bem o modelo original em diversos aspectos.

8 CONCLUSÕES

Um algoritmo *branch and bound* foi aplicado para o problema de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos, com condições que asseguram a convergência para o ótimo global em um número finito de iterações (com dada precisão ϵ). A principal característica e vantagem do algoritmo proposto quando comparado com outros existentes é a garantia de convergência para o ótimo global em um número finito de passos. A desvantagem reside no fato de que em problemas com ordem elevada, a convergência pode tornar-se bastante lenta. Também foi proposto um algoritmo *branch and bound* para uma nova estrutura de projeto de controladores reduzidos e os resultados apresentados mostraram a sua eficiência.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos revisores anônimos pelos comentários úteis e construtivos e também à FAPESP, à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro a este trabalho.

Referências

Assunção, E. (2000). *Redução $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Através de Desigualdades Matriciais Lineares: Otimização Local e Global* , Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP.

Assunção, E. e Peres, P. L. D. (1998a). Redução de modelos com critério $\mathcal{H}_\infty$ através de desigualdades matriciais lineares: casos contínuo e discreto no tempo, *XII Congresso Brasileiro de Automática*, Vol. 3, Uberlândia, MG, pp. 885–890.

Assunção, E. e Peres, P. L. D. (1998b). Redução de modelos contínuos com critério $\mathcal{H}_2$ através de desigualdades matriciais lineares, *XII Congresso Brasileiro de Automática*, Vol. 3, Uberlândia, MG, pp. 879–884.

Assunção, E. e Peres, P. L. D. (1998c). Redução de modelos discretos com critério $\mathcal{H}_2$ através de desigualdades matriciais lineares, *VIII Latin American Congress on Automatic Control*, Vol. 1, Viña del Mar, Chile, pp. 61–66.

Assunção, E. and Peres, P. L. D. (1999a). A global optimization approach for the $\mathcal{H}_2$-norm model reduction problem, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, AZ, USA, pp. 1857–1862.

Assunção, E. and Peres, P. L. D. (1999b). A $\mathcal{H}_2$ and/or $\mathcal{H}_\infty$-norm model reduction of uncertain discrete-time systems, *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, San Diego, CA, USA, pp. 4466–4470.

Balakrishnan, V. and Boyd, S. (1992). Global optimization in control system analysis and design, *in* C. T. Leondes (ed.), *Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and Applications*, Vol. 53, Academic Press, New York, NY.

Balakrishnan, V., Boyd, S. and Balemi, S. (1991). Branch and bound algorithm for computing the minimum stability degree of parameter-dependent linear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **1**(4): 295–317.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.

Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (1995). *Modern Control Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Mathworks Inc.,Natick, MA, USA.

Gahinet, P. and Nemirovskii, A. (1994). General-purpose LMI solvers with benchmarks, *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, San Antonio, TX, USA, pp. 3162–3165.

Glover, K. (1984). All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞-error bounds, *International Journal of Control* **39**(6): 1115–1193.

Goh, K. C., Safonov, M. G. and Papavassilopoulos, G. P. (1994). A global optimization approach for the BMI problem, *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, USA, pp. 2009–2014.

Grigoriadis, K. M. (1997). L_2 and $L_2 - L_\infty$ model reduction via linear matrix inequalities, *International Journal of Control* **68**(3): 485–498.

Helmersson, A. (1994). Model reduction using LMIs, *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, Lake Buena Vista, FL, USA, pp. 3217–3222.

Joshi, S. M. and Kelkar, A. G. (1998). Inner loop control of supersonic aircraft in the presence of aeroelastic modes, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **6**(6): 730–739.

Maranas, C. D. and Floudas, C. A. (1997). Global optimization in generalized geometric programming, *Computers & Chemical Engineering* **21**(4): 351–369.

Moore, B. C. (1981). Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC–26**(1): 17–32.

Ryoo, H. S. and Sahinidis, N. V. (1995). Global optimization of nonconvex NLPs and MINLPs with applications in process design, *Computers & Chemical Engineering* **19**(5): 551–566.

Valentin, C. and Duc, G. (1997). LMI-based algorithms for frequency weighted optimal $\mathcal{H}_2$-norm model reduction, *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 1, San Diego, CA, USA, pp. 767–772.

VanAntwerp, J. G. and Braatz, R. D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities, *Journal of Process Control* **10**: 363–385.

VanAntwerp, J. G., Braatz, R. D. and Sahinidis, N. V. (1997). Globally optimal robust control of large scale sheet and film processes, *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, Vol. 3, Albuquerque, New Mexico, USA, pp. 1473–1477.