UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Iguer Luis Domini dos Santos

Existência de Soluções de Inclusões Diferenciais em Escalas Temporais

São José do Rio Preto
2011

Iguer Luis Domini dos Santos

Existência de Soluções de Inclusões Diferenciais em Escalas Temporais

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

São José do Rio Preto
2011

Santos, Iguer Luis Domini dos.
Existência de soluções de inclusões diferenciais em escalas temporais / Iguer Luis Domini dos Santos. -São José do Rio Preto: [s.n.], 2011.
77f. ; 30cm.

Orientador: Geraldo Nunes Silva
Co-orientador: Luciano Barbanti
Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Análise matemática. 2. Teoria do controle. 3. Campos vetoriais. 4. Cálculo das variações. I. Silva, Geraldo Nunes. II. Barbanti, Luciano. III. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU - 517.97

Iguer Luis Domini dos Santos

Existência de Soluções de Inclusões Diferenciais em Escalas Temporais

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Antônio Carlos Gardel Leitão
UFSC - Florianópolis

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros
UNICAMP - Campinas

Prof^{a}. Dr^{a}. Márcia Cristina A. B. Federson
USP - São Carlos

São José do Rio Preto
10/junho/2011

Dedico este trabalho

Aos meus pais, Sebastião e Marta.

AGRADECIMENTOS

À minha família. Pelo apoio nos momentos difíceis.

À Unesp. Pela contribuição para minha formação acadêmica.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Consideramos nesta tese inclusões dinâmicas vetoriais em escalas de tempo e estendemos para esta classe o resultado de compacidade das trajetórias que, por sua vez, foi combinado com soluções de Euler, também introduzidas nesta tese, para garantir a existência de trajetória quando o campo vetorial da inclusão dinâmica é semicontínuo superior. Porém, quando o campo vetorial da inclusão dinâmica é semicontínuo inferior, é possível obter uma solução da inclusão dinâmica por meio de uma equação dinâmica cujo campo vetorial é contínuo. Este campo é uma seleção da multifunção que define o campo vetorial. Consideramos também um problema de controle ótimo e mostramos que este possui trajetória admissível ótima sempre que o conjunto de soluções admissíveis é não-vazio e o campo satisfaz as condições de mensurabilidade, convexidade, compacidade e crescimento linear. Além disso, estendemos o Lema de Filippov para a classe de inclusões dinâmicas para mostrar que é possível fazer uma equivalência total do problema de controle no paradigma de inclusão dinâmica com o problema de controle padrão.

Palavras-chave: Inclusões dinâmicas, existência de soluções, escalas temporais, controle ótimo.

ABSTRACT

We consider in this thesis vectors dynamic inclusions on time scales and extended for this class the result of compactness of the trajectories which, in turn, was combined with Euler solutions, also introduced in this thesis, to ensure the existence of trajectory when the vector field of the dynamic inclusion is upper semicontinuous. However, when the vector field of the dynamic inclusion is lower semicontinuous, it is possible to obtain a solution of the dynamic inclusion through a dynamic equation whose vector field is continuous. This field is a selection of the multifunction defining the vector field. We also consider an optimal control problem and we showed that it has an optimal admissible trajectory whenever the admissible solutions set is nonempty and the field satisfies measurability conditions, convexity, compactness and linear growth. Furthermore, we extend the Filippov's Lemma for the class of dynamic inclusions to show that it is possible to do a full equivalence of the control problem in the paradigm of dynamic inclusion with the standard control problem.

Keywords: Dynamic inclusions, existence of solutions, time scales, optimal control.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O cálculo em escalas temporais foi introduzido por Hilger [24] para unificar o cálculo de diferença e o cálculo diferencial.

Atualmente, existe uma vasta literatura empregando a teoria de escalas temporais [1], [2], [3], [18], [27].

O estudo de equações dinâmicas em escalas temporais pode ser encontrado em [9], [10],[19], [20], [31].

Aplicações da teoria de escalas temporais em economia foram consideradas em [35] e [36]. Por sua vez, aplicações em cálculo das variações são tratadas por [8] e [25].

Recentemente, bastante atenção foi dada a resultados de existência de soluções para inclusões dinâmicas em escalas temporais, o que pode ser observado nos trabalhos [3], [4], [7], [11] e [15]. Nessas referências, os resultados são obtidos para sistemas cuja variável de estado é real. Além disso, são utilizadas técnicas de ponto fixo.

A partir do uso do método de soluções superiores e inferiores, em [4] é provado a existência de soluções para inclusões dinâmicas de primeira ordem em escalas temporais com condições de fronteira gerais. Já em [15], prova-se a existência de soluções para inclusões dinâmicas de primeira ordem em escalas temporais com condições iniciais não-locais.

Resultados de existência de soluções para inclusões dinâmicas de segunda ordem em escalas temporais com condições de fronteira usando o método de soluções superiores e inferiores podem ser encontrados em [3] e [11].

Nessa Tese, provamos a existência de soluções para inclusões dinâmicas de primeira ordem em escalas temporais quando a variável de estado do sistema é vetorial. Diferente de [4] e [15], propomos que o gráfico do campo vetorial da inclusão dinâmica seja fechado.

Em termos de completude, analisamos também a existência de soluções para inclusões dinâmicas de primeira ordem em escalas temporais quando os campos vetoriais são semicontínuos inferiores. Nessa análise, utilizamos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Contribuições sobre condições necessárias à otimalidade para problemas de controle ótimo em escalas temporais podem ser encontradas em [26], [28], [30].

Estudos sobre programação dinâmica em escalas temporais é encontrado em [38]. Neste artigo, são obtidas as equações de Hamilton-Jacobi-Bellman para uma classe de problemas de controle ótimo em escalas temporais.

Em tempo contínuo, um problema de controle padrão pode ser visto como uma inclusão diferencial e uma inclusão diferencial pode ser vista como um problema de controle padrão, se algumas hipóteses são consideradas [21]. Este resultado é conhecido como Lema de Filippov.

Nessa Tese, provamos que o Lema de Filippov ainda é válido em escalas temporais. Sendo assim, uma inclusão dinâmica pode ser vista como um problema de controle padrão em escalas temporais se as hipóteses usuais do caso contínuo são satisfeitas.

Esta Tese pretende contribuir para a teoria de inclusões dinâmicas em escalas temporais, provando que sob determinadas condições o conjunto de soluções é não-vazio e sequencialmente compacto. Como aplicação deste resultado na teoria do controle em escalas temporais, mostramos que sob as hipóteses usuais o problema de controle ótimo tem solução ótima.

O resultado de compacidade das trajetórias em escalas temporais se emparelha ao caso clássico, que pode ser encontrado, por exemplo, em [16], [17], [37].

Como é usual, desenvolvemos este trabalho utilizando o cálculo delta e a medida delta. Além disso, usamos a integral delta de Lebesgue, que é mais geral, ao invés da integral delta de Riemann.

Com o objetivo de facilitar a leitura do trabalho, separamos no capítulo 7 resultados da teoria da medida específicos para a medida delta e a integral delta. Dessa forma, não será necessário buscar resultados dispersos na literatura.

Outra contribuição dessa Tese é a obtenção de propriedades envolvendo a delta mensurabilidade de multifunções, generalizando os correspondentes resultados clássicos que envolvem a Lebesgue mensurabilidade.

Esta Tese é organizada da seguinte maneira: No capítulo 1, fazemos uma revisão bibliográfica; No capítulo 2, consideramos conceitos e resultados básicos que são utilizados ao longo de toda a Tese; No capítulo 3, fazemos um estudo da delta mensurabilidade de funções vetoriais e de multifunções; No capítulo 4, demonstramos uma desigualdade do tipo Gronwall e a propriedade de compacidade das trajetórias para inclusões dinâmicas em escalas temporais; No capítulo 5, mostramos a existência de soluções para inclusões dinâmicas e provamos o Lema de Filippov em escalas temporais; No capítulo 6, apresentamos as considerações finais sobre o trabalho e apontamos quais seriam os possíveis tópicos de serem pesquisados no futuro; Por fim, no capítulo 7, fazemos um apêndice apresentando resultados básicos da teoria da medida específicos para a medida delta.

Capítulo 2

Pré-Requisitos

Nas seções a seguir, consideramos conceitos e resultados básicos que são utilizados ao longo do trabalho.

2.1 Notação

Utilizaremos as seguintes convenções:
(i) se $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos a norma euclidiana de x por $\|x\|$.
(ii) se $A \subset \mathbb{R}$, denotamos por $A_{\mathbb{T}}$ o conjunto $A \cap \mathbb{T}$.
(iii) B denotará o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

2.2 Escala Temporal

Definição 2.1. *Uma escala temporal* $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto não-vazio e fechado.*

Definição 2.2. *Seja* $\mathbb{T}$ *uma escala temporal. Define-se a função* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *como*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

e a função $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *como*

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Estamos supondo que $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ *e* $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$.

Lema 2.1 ([13]). *Seja* $\mathbb{T}$ *uma escala temporal. Existem* $I \subset \mathbb{N}$ *e* $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ *tal que*

$$RS := \{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i \in I} \ .$$

Observação O conjunto I considerado no lema anterior será utilizado ao longo da Tese.

Definição 2.3. *Se $\mathbb{T}$ é uma escala temporal, define-se:*
(i) se $E \subset \mathbb{T}$ tem-se $I_E = \{i \in I : t_i \in E \cap RS\}$.
(ii) a função $\mu : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ é dada por

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \ .$$

(iii) se $\sup \mathbb{T} < +\infty$ tem-se

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}]_{\mathbb{T}}$$

e se $\sup \mathbb{T} = +\infty$ então $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$.

2.3 Cálculo em Escala Temporal

Definição 2.4. *Se $\mathbb{T}$ é uma escala temporal, considere uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Se existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que*

$$| \ f(\sigma(t)) - f(s) - \xi(\sigma(t) - s) \ | \leq \ \varepsilon \ | \ \sigma(t) - s \ |$$

para todo $s \in (t-\delta, t+\delta)_{\mathbb{T}}$, diz-se que ξ é a derivada delta de f em t e denota-se $\xi = f^{\Delta}(t)$.

Definição 2.5. *Considere uma escala temporal $\mathbb{T}$, uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Diz-se que f é Δ-diferenciável em t se cada função coordenada $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ for Δ-diferenciável em t. Neste caso $f^{\Delta}(t) = (f_1^{\Delta}(t), ..., f_n^{\Delta}(t))$.*

Teorema 2.1 ([10])**.** *Considere uma escala temporal $\mathbb{T}$, uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Valem as seguintes propriedades:*
(i) Se f é Δ-diferenciável em t então f é contínua em t.
(ii) Se f é contínua em t e $\sigma(t) > t$, então f é Δ-diferenciável em t. Além disso,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \ .$$

(iii) Se $\sigma(t) = t$, então f é Δ-diferenciável em t se, e somente se, o limite

$$\lim_{s \underset{\to}{\mathbb{T}} t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe como um número real. Neste caso,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \underset{\to}{\mathbb{T}} t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \ .$$

(iv) Se f é Δ-diferenciável em t, então

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Corolário 2.1. *Considere uma escala temporal $\mathbb{T}$, uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Valem as seguintes propriedades:*
(i) Se f é Δ-diferenciável em t então f é contínua em t.
(ii) Se f é contínua em t e $\sigma(t) > t$, então f é Δ-diferenciável em t. Além disso,

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \ .$$

(iii) Se $\sigma(t) = t$, então f é Δ-diferenciável em t se, e somente se, o limite

$$\lim_{s \overset{\mathbb{T}}{\to} t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe como um elemento de $\mathbb{R}^n$. Neste caso,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \overset{\mathbb{T}}{\to} t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \ .$$

(iv) Se f é Δ-diferenciável em t, então

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t).$$

Exemplo Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal e considere a função contínua $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = t^2.$$

Tome $t_* \in \mathbb{T}^\kappa$. Se $\sigma(t_*) > t_*$ então

$$f^\Delta(t_*) = \frac{f(\sigma(t_*)) - f(t_*)}{\mu(t_*)} = \frac{\sigma(t_*)^2 - t_*^2}{\sigma(t_*) - t_*} = \frac{(\sigma(t_*) - t_*)(\sigma(t_*) + t_*)}{\sigma(t_*) - t_*} = \sigma(t_*) + t_* \ .$$

Se $\sigma(t_*) = t_*$, para cada $s \in \mathbb{T} \setminus \{t_*\}$ tem-se

$$\frac{f(t_*) - f(s)}{t_* - s} = \frac{t_*^2 - s^2}{t_* - s} = \frac{(t_* - s)(t_* + s)}{t_* - s} = t_* + s$$

e então

$$f^\Delta(t_*) = \lim_{s \overset{\mathbb{T}}{\to} t_*} \frac{f(t_*) - f(s)}{t_* - s} = 2t_* \ .$$

Teorema 2.2 ([10])**.** *Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Suponha que as funções $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ são Δ-diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Então:*
(i) A soma $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é Δ-diferenciável em t e vale a relação

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

(ii) O produto $f.g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é Δ-diferenciável em t. Além disso,

$$\begin{aligned} (f.g)^\Delta(t) &= f^\Delta(t) g(t) + f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \\ &= f(t) g^\Delta(t) + f^\Delta(t) g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

Corolário 2.2. *Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Suponha que as funções $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ são Δ-diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Então a soma $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é Δ-diferenciável em t. Além disso,*

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

2.4 Partições

Definição 2.6. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, uma partição de K é um conjunto $P = \{t_0, t_1, ..., t_N\} \subset K$ tal que*

$$t_0 = a < t_1 < ... < t_N = b$$

sendo $a = \min\{K\}$ e $b = \max\{K\}$.

Definição 2.7. *Seja $\delta > 0$ e $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Define-se $\mathcal{P}_\delta(K)$ como o conjunto de todas as partições $P = \{t_0, t_1, ..., t_N\}$ de K com as seguintes propriedades:*
(i) ou $t_i - t_{i-1} \leq \delta$, quando $i \in \{1..., n\}$.
(ii) ou $t_i - t_{i-1} > \delta$, quando $i \in \{1..., n\}$. Neste caso tem-se $\rho(t_i) = t_{i-1}$.

Lema 2.2 ([22]). *Para cada $\delta > 0$ o conjunto $\mathcal{P}_\delta(K)$ é não-vazio.*

2.5 Teorema de Arzela-Ascoli

Definição 2.8. *Seja E uma coleção de funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$. Diz-se que E é equicontínuo se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|f(s) - f(t)\| < \varepsilon$$

para toda $f \in E$ e para cada $t, s \in \mathbb{T}$ satisfazendo $\mid t - s \mid < \delta$.

Teorema 2.3 (Arzela-Ascoli, [33]). *Considere uma escala temporal $\mathbb{T}$ compacta e uma coleção E de funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$. Suponha que E é equicontínuo e limitado na norma do supremo. Então toda sequência de E possui subsequência que converge uniformemente em $\mathbb{T}$.*

2.6 Propriedades de Multifunções

Definição 2.9. *Sejam M e N espaços métricos e considere uma multifunção $F : M \rightsquigarrow N$. Diz-se que F é semicontínua inferior em $x_0 \in M$ se para cada $y_0 \in F(x_0)$ e para toda* *vizinhança* $V(y_0)$ *de* y_0 *existe uma vizinhança* $V(x_0)$ *de* x_0 *tal que*

$$F(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$$

para todo $x \in V(x_0)$.

Definição 2.10. *Considere um espaço métrico* M *e um espaço de Banach* N. *Diz-se que uma multifunção* $F : M \rightsquigarrow N$ *é semicontínua superior em* $x_0 \in M$ *se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$F(B(x_0, \delta)) \subset F(x_0) + \varepsilon B(0, 1) \ .$$

Observação Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Se uma multifunção $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ não-vazia e fechada é semicontínua superior então o conjunto

$$GrF = \{(t, x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : y \in F(t, x)\}$$

é fechado.

Definição 2.11. *Dada uma multifunção* $F : M \rightsquigarrow N$, *diz-se que uma função* $f : M \to N$ *é uma seleção de* F *quando* $f(x) \in F(x)$ *para todo* $x \in M$.

Teorema 2.4 ([5]). *Considere um espaço métrico* M, *um espaço de Banach* N *e uma multifunção* $F : M \rightsquigarrow N$ *semicontínua inferior. Se* F *é não-vazia, convexa e fechada então* F *admite uma seleção contínua.*

Definição 2.12. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F})$ *um espaço mensurável. Uma multifunção* $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ *é* $\mathcal{F}$*-mensurável quando o conjunto*

$$\Gamma^{-1}(V) = \{x \in \Omega : \Gamma(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

é $\mathcal{F}$*-mensurável para cada conjunto compacto* $V \subset \mathbb{R}^n$.

Observação Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado, então existe uma sequência de conjuntos compactos $\{V_i\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $F = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i$. Logo

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(F) &= \{x \in \Omega : \Gamma(x) \cap F \neq \emptyset = \{x \in \Omega : \Gamma(x) \cap \{\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i\} \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{x \in \Omega : \Gamma(x) \cap V_i \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

e concluímos que $\Gamma^{-1}(F)$ é $\mathcal{F}$-mensurável quando Γ é $\mathcal{F}$-mensurável.

Teorema 2.5 ([14]). *Tome um espaço mensurável* $(\Omega, \mathcal{F})$ *e uma multifunção* $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *não-vazia e fechada. Se* Γ *é* $\mathcal{F}$*-mensurável então* Γ *admite uma seleção mensurável.*

Teorema 2.6 ([14]). *Seja* $\Gamma : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *uma multifunção fechada e* $E := \{t \in [a, b] : \Gamma(t) \neq \emptyset\}$. *Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) a multifunção Γ *é* $\mathcal{L}$*-mensurável.*

(ii) o conjunto $Gr\Gamma = \{(t, v) : v \in \Gamma(t)\}$ *é* $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$*-mensurável.*

(iii) o conjunto E *é* $\mathcal{L}$*-mensurável e existe uma sequência de funções* $\mathcal{L}$*-mensuráveis* $\gamma_i : E \to \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$\Gamma(t) = \overline{\{\gamma_i(t) : i = 1, 2, ...\}}$$

para cada $t \in E$.

Corolário 2.3. *Sejam* $\Gamma_1, \Gamma_2 : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *multifunções fechadas. Se* Γ_1 *e* Γ_2 *são* $\mathcal{L}$*-mensuráveis então a multifunção* $\Gamma : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ *dada por*

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)$$

é $\mathcal{L}$*-mensurável.*

Capítulo 3

Δ-Mensurabilidade de Funções Vetoriais e de Multifunções

Nesse capítulo, demonstramos propriedades básicas de funções vetoriais Δ-mensuráveis. Além disso, utilizando mensurabilidade de multifunções, provamos propriedades da função hamiltoniana envolvendo a Δ-mensurabilidade. Assim, fazemos um paralelo com o caso clássico [16], [29] e [37].

Usamos uma escala temporal $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{T}}$, sendo $a, b \in \mathbb{T}$ e $a < b$.

3.1 Funções Vetoriais Mensuráveis

Definição 3.1. *Diz-se que uma função* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *é* Δ*-mensurável se cada função coordenada* $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *é* Δ*-mensurável.*

Lema 3.1. *Seja* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *uma função* Δ*-mensurável. Se* $A \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto aberto então* $f^{-1}(A)$ *é* Δ*-mensurável.*

Demonstração. O conjunto A pode ser expressado como

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \left\{ W_1^{(i)} \times ... \times W_n^{(i)} \right\}$$

sendo $W_j^{(i)} \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto para cada $i \geq 1$ e $j \in \{1, ..., n\}$.

Temos que

$$\begin{aligned}
f^{-1}(A) &= \{t \in \mathbb{T} : f(t) \in A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{W_1^{(i)} \times ... \times W_n^{(i)}\}\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{t \in \mathbb{T} : f(t) \in \{W_1^{(i)} \times ... \times W_n^{(i)}\}\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[\{t \in \mathbb{T} : f_1(t) \in W_1^{(i)}\} \cap ... \cap \{t \in \mathbb{T} : f_n(t) \in W_n^{(i)}\}\right] \\
&= \bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[f_1^{-1}(W_1^{(i)}) \cap ... \cap f_n^{-1}(W_n^{(i)})\right] \in \Delta \ .
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.1. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ uma função Δ-mensurável. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado então $f^{-1}(F)$ é Δ-mensurável.*

Lema 3.2. *Considere uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Suponha que $f^{-1}(A)$ é Δ-mensurável quando $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. Então f é Δ-mensurável.*

Demonstração. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ seja $W_j \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto.

Fixe um $j \in \{1, ..., n\}$. Se $B_i = \mathbb{R}$ para $i \neq j$ e $B_j = W_j$ segue que

$$f^{-1}(B_1 \times ... \times B_n) = f_1^{-1}(B_1) \cap ... \cap f_n^{-1}(B_n) = f_j^{-1}(B_j) = f_j^{-1}(W_j) \in \Delta$$

já que $f_i^{-1}(B_i) = f_i^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{T}$ para cada $i \neq j$. Assim, f_j é Δ-mensurável e então $f = (f_1, ..., f_n)$ é Δ-mensurável. □

Lema 3.3. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ uma função Δ-mensurável. A função $\|f\| : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ também é Δ-mensurável.*

Demonstração. Defina a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $g(x) = \|x\|$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Como g é contínua, se $W \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto e $g^{-1}(W) \neq \emptyset$ segue que $g^{-1}(W)$ é um conjunto aberto.

Considere $h = \|f\| = g \circ f$. Dado um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}$ tal que $g^{-1}(W) \neq \emptyset$ temos que

$$h^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \Delta \ .$$

Se $g^{-1}(W) = \emptyset$ segue que $h^{-1}(W) = \emptyset \in \Delta$ e então h é Δ-mensurável . □

Lema 3.4. *Seja $\tau : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função Δ-mensurável e $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Se $\tau(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$ então a função $x \circ \tau : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é Δ-mensurável.*

Demonstração. Como x é contínua cada função coordenada $x_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ também é contínua. Então a função $\overline{x_i} : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua.

Se $t > b$ defina $\overline{x_i}(t) = x_i(b)$ e se $t < a$ defina $\overline{x_i}(t) = x_i(a)$. Logo $\overline{x_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e então $\overline{x} = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_n})$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Seja $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ definida como $h = x \circ \tau$. Dado um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $(\overline{x})^{-1}(W) \neq \emptyset$ temos que

$$\begin{aligned} h^{-1}(W) &= \{t \in [a,b]_{\mathbb{T}} : x(\tau(t)) \in W\} \\ &= \{t \in \mathbb{T} : \tau(t) \in (\overline{x})^{-1}(W)\} = \tau^{-1}((\overline{x})^{-1}(W)) \in \Delta \ . \end{aligned}$$

Entretanto, se $(\overline{x})^{-1}(W) = \emptyset$ segue que $h^{-1}(W) = \emptyset \in \Delta$ e então h é Δ-mensurável . □

3.2 Funções Vetoriais Integráveis

Definição 3.2. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ uma função Δ-mensurável e $E \in \Delta$. Diz-se que f é integrável em E se cada função coordenada $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é integrável em E. Neste caso,*

$$\int_E f(s)\Delta s = (\int_E f_1(s)\Delta s, ..., \int_E f_n(s)\Delta s).$$

Definição 3.3. *Se $E \in \Delta$, denotaremos por $L_1(E, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ Δ-mensuráveis e integráveis em E.*

Lema 3.5. *Se $E \in \Delta$ e $f \in L_1(E, \mathbb{R}^n)$ então $\|f\| \in L_1(E)$.*

Demonstração. Para cada $t \in \mathbb{T}$ temos que

$$\|f(t)\| = \|(f_1(t), ..., f_n(t))\| \leq |\ f_1(t)\ | \ + ... + \ |\ f_n(t)\ | \ .$$

Como $|\ f_1\ |, ..., |\ f_n\ | \in L_1(E)$ segue que $\|f\| \in L_1(E)$. □

Definição 3.4. *Dada uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, define-se $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ como*

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), \ \ t \in \mathbb{T} \\ f(t_i), \ \ \ t \in (t_i, \sigma(t_i)) \ \textit{para algum} \ i \in I \end{cases}$$

sendo $I \subset \mathbb{N}$ e $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ tal que

$$RS := \{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i \in I} \ .$$

Proposição 3.1 ([13])**.** *Considere uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Então f é Δ-mensurável se, e somente se, $\tilde{f}$ é $\mathcal{L}$-mensurável.*

Corolário 3.2. *Tome uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Então f é Δ-mensurável se, e somente se, $\tilde{f}$ é $\mathcal{L}$-mensurável.*

Definição 3.5. *Se $E \subset \mathbb{T}$, define-se o conjunto $\tilde{E}$ como*

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{i \in I_E} (t_i, \sigma(t_i)).$$

Teorema 3.1 ([13])**.** *Tome um conjunto Δ-mensurável $E \subset \mathbb{T}$ tal que $b \notin E$. Então, $f \in L_1(E)$ se, e somente se, $\tilde{f} \in L_1(\tilde{E})$. Neste caso,*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(s)ds \; .$$

Corolário 3.3. *Seja $E \in \Delta$ tal que $b \notin E$. Então, $f \in L_1(E, \mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\tilde{f} \in L_1(\tilde{E}, \mathbb{R}^n)$. Neste caso,*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(s)ds \; .$$

Lema 3.6. *Considere $E \in \Delta$ tal que $b \notin E$. Se $f \in L_1(E, \mathbb{R}^n)$ então*

$$\| \int_E f(s)\Delta s \| \leq \int_E \|f(s)\| \Delta s.$$

Demonstração. Se $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é definida como

$$g(t) = \|f(t)\|$$

segue que $\tilde{g}(t) = \|\tilde{f}(t)\|$ para cada $t \in [a, b]$.

Como $g \in L_1(E)$, do Corolário 3.3 segue que $\tilde{g} \in L_1(\tilde{E})$. Além disso,

$$\begin{aligned} \| \int_E f(s)\Delta s \| &= \| \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(s)ds \| \leq \int_{\tilde{E}} \|\tilde{f}(s)\| ds \\ &= \int_{\tilde{E}} \tilde{g}(s)ds = \int_E g(s)\Delta s = \int_E \|f(s)\| \Delta s. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2. *Considere uma função $g \in L_1([a, b)_{\mathbb{T}})$. Suponha que*

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} g(s)\Delta s = 0$$

para cada $c, d \in \mathbb{T}$ tal que $c < d$. Então $g(t) = 0$ Δ-q.t.p. $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$.

Demonstração. Observe inicialmente que $\tilde{g} \in L_1([a,b))$, já que $g \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$.

Seja $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ fixado arbitrariamente. Se $\sigma(t) > t$, segue que

$$0 = \int_{[t,\sigma(t))_{\mathbb{T}}} g(s)\Delta s = \int_{\{t\}} g(s)\Delta s = g(t)\{\sigma(t) - t\}$$

e então $g(t) = 0$.

Se $\sigma(t) = t$ e t é um ponto de Lebesgue de $\tilde{g}$, seja $\{\delta_i\}$ uma sequência tal que $\delta_i \downarrow 0$ e $t + \delta_i \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ para cada i. Do Teorema 3.1 e de [33] temos

$$0 = \lim \frac{1}{\delta_i} \int_{[t,t+\delta_i)_{\mathbb{T}}} g(s)\Delta s = \lim \frac{1}{\delta_i} \int_{[t,t+\delta_i)} \tilde{g}(s)ds = \tilde{g}(t) = g(t)$$

já que $t \in \mathbb{T}$.

Assim, se $D = \{s \in [a,b)_{\mathbb{T}} : g(s) \neq 0\}$ segue que $D \subset A \cap B$, sendo

$$A = \{s \in [a,b)_{\mathbb{T}} : \sigma(s) = s\}$$

e B o conjunto dos pontos $s \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ tal que s não é ponto de Lebesgue de $\tilde{g}$. Do Lema 7.7 e de [33] segue que

$$m^*(D) \leq m^*(A \cap B) = \lambda^*(A \cap B) \leq \lambda^*(B) = 0$$

e portanto $g(t) = 0$ Δ-q.t.p. $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$. □

Proposição 3.3. *Seja $g \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$ e suponha que*

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} g(s)\Delta s \geq 0$$

para cada $c, d \in \mathbb{T}$ tal que $c < d$. Então $g(t) \geq 0$ Δ-q.t.p. $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$.

Demonstração. Considere $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ fixado arbitrariamente. Se $\sigma(t) > t$, segue que

$$0 \leq \int_{[t,\sigma(t))_{\mathbb{T}}} g(s)\Delta s = \int_{\{t\}} g(s)\Delta s = g(t)\{\sigma(t) - t\}$$

e então $g(t) \geq 0$.

Se $\sigma(t) = t$ e t é um ponto de Lebesgue de $\tilde{g}$, considere uma sequência $\{\delta_i\}$ tal que $\delta_i \downarrow 0$ e $t + \delta_i \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ para cada i. Do Teorema 3.1 e de [33] temos que

$$0 \leq \lim \frac{1}{\delta_i} \int_{[t,t+\delta_i)_{\mathbb{T}}} g(s)\Delta s = \lim \frac{1}{\delta_i} \int_{[t,t+\delta_i)} \tilde{g}(s)ds = \tilde{g}(t) = g(t)$$

já que $t \in \mathbb{T}$.

Assim, se $D = \{s \in [a,b)_{\mathbb{T}} : g(s) < 0\}$ temos que $D \subset A \cap B$, sendo

$$A = \{s \in [a,b)_{\mathbb{T}} : \sigma(s) = s\}$$

e B o conjunto dos pontos $s \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ tal que s não é ponto de Lebesgue de $\tilde{g}$. Do Lema 7.7 e de [33] segue que

$$m^*(D) \leq m^*(A \cap B) = \lambda^*(A \cap B) \leq \lambda^*(B) = 0$$

e portanto $g(t) \geq 0$ Δ-q.t.p. $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$. □

Proposição 3.4. *Considere uma função* $g \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$. *Suponha que*

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} g(s)\Delta s = 0$$

para cada $c, d \in \mathbb{T}$ *tal que* $c < d$. *Então* $g(t) = 0$ Δ-*q.t.p.* $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$.

Demonstração. Se $g = (g_1, ..., g_n)$, cada função coordenada $g_i \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$.

Temos que

$$N = \{s \in [a,b)_{\mathbb{T}} : g(s) \neq 0\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_i$$

sendo

$$N_i = \{s \in [a,b)_{\mathbb{T}} : g_i(s) \neq 0\}.$$

Da Proposição 3.2 segue que

$$m^*(N_i) = 0$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto

$$m^*(N) \leq m^*(\cup N_i) \leq \sum_i m^*(N_i) = 0$$

e concluímos que

$$g(t) = 0 \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \; .$$

□

3.3 Funções Absolutamente Contínuas

Definição 3.6. *Diz-se que uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$$

quando $a_i \leq b_i$ e $\{[a_i, b_i)_{\mathbb{T}}\}_{i=1}^{n}$ são intervalos disjuntos satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \ .$$

Definição 3.7. *Diz-se que a função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é um arco se f é absolutamente contínua. Denotaremos o conjunto de todos os arcos com domínio $\mathbb{T}$ e contradomínio $\mathbb{R}^n$ por $AC([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$.*

Teorema 3.2 ([12])**.** *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se, e somente se, as seguintes condições são válidas:*
(i) Δ-q.t.p. $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ a função f é Δ-diferenciável e $f^{\Delta} \in L_1([a, b)_{\mathbb{T}})$;
(ii) para cada $t \in \mathbb{T}$ tem-se

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f^{\Delta}(s)\Delta s \ .$$

Corolário 3.4. *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é absolutamente contínua se, e somente se, as seguintes condições são válidas:*
(i) Δ-q.t.p. $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ a função f é Δ-diferenciável e $f^{\Delta} \in L_1([a, b)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$;
(ii) para cada $t \in \mathbb{T}$ tem-se

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f^{\Delta}(s)\Delta s \ .$$

Proposição 3.5. *Considere uma sequência $x_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$ de arcos e uma função $\phi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ em $L_1([a, b)_{\mathbb{T}})$. Suponha que para cada i se tenha*

$$\|x_i^{\Delta}(s)\| \ \leq \phi(s) \quad \Delta - q.t.p. \ s \in [a, b)_{\mathbb{T}} \ .$$

Se $\{x_i(a)\}$ é uma sequência limitada, então existe uma subsequência $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}$ e um arco $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$ tal que $x_{i_k} \rightrightarrows x$. Além disso, se $c, d \in \mathbb{T}$ e $c < d$ então

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^{\Delta}(s)\Delta s \to \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x^{\Delta}(s)\Delta s \ .$$

Demonstração. Seja $t_* \in \mathbb{T}$ fixado arbitrariamente. Se $t \in \mathbb{T}$ e $t > t_*$ temos que

$$\begin{aligned}
\|x_i(t) - x_i(t_*)\| &= \|x_i(a) + \int_{[a,t)_\mathbb{T}} x_i^\Delta(s)\Delta s - x_i(a) - \int_{[a,t_*)_\mathbb{T}} x_i^\Delta(s)\Delta s\| \\
&= \|\int_{[a,t_*)_\mathbb{T}} x_i^\Delta(s)\Delta s + \int_{[t_*,t)_\mathbb{T}} x_i^\Delta(s)\Delta s - \int_{[a,t_*)_\mathbb{T}} x_i^\Delta(s)\Delta s\| \\
&= \|\int_{[t_*,t)_\mathbb{T}} x_i^\Delta(s)\Delta s\| \leq \int_{[t_*,t)_\mathbb{T}} \|x_i^\Delta(s)\|\Delta s \leq \int_{[t_*,t)_\mathbb{T}} \phi(s)\Delta s \ .
\end{aligned}$$

De modo análogo, se $t \in \mathbb{T}$ e $t < t_*$ segue que

$$\|x_i(t) - x_i(t_*)\| \leq \int_{[t,t_*)_\mathbb{T}} \phi(s)\Delta s \ .$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ da Proposição 7.2 existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x_i(t) - x_i(t_*)\| < \varepsilon$$

quando $t \in (t_* - \delta, t_* + \delta) \cap \mathbb{T}$ e i é arbitrário. Então a sequência $\{x_i\}$ é equicontínua.

Para cada $t \in \mathbb{T}$ temos

$$\begin{aligned}
\|x_i(t)\| &= \|x_i(a) + \int_{[a,t)_\mathbb{T}} x_i^\Delta(s)\Delta s\| \\
&\leq \|x_i(a)\| + \|\int_{[a,t)_\mathbb{T}} x_i^\Delta(s)\Delta s\| \leq \|x_i(a)\| + \int_{[a,t)_\mathbb{T}} \|x_i^\Delta(s)\|\Delta s \\
&\leq \|x_i(a)\| + \int_{[a,t)_\mathbb{T}} \phi(s)\Delta s \leq \|x_i(a)\| + \int_{[a,b)_\mathbb{T}} \phi(s)\Delta s
\end{aligned}$$

e concluímos que a sequência $\{x_i\}$ é limitada na norma do supremo. Do Teorema 2.3 existe uma subsequência $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}$ e uma função x tal que $\{x_{i_k}\}$ converge uniformemente para $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{T}$.

Considere $c \in [a,b)_\mathbb{T}$ fixado arbitrariamente. Se $d \in \mathbb{T}$ e $d > c$ temos que

$$\begin{aligned}
\|x(d) - x(c)\| &= \|\lim x_{i_k}(d) - \lim x_{i_k}(c)\| \\
&= \|\lim\{x_{i_k}(d) - x_{i_k}(c)\}\| = \lim \|x_{i_k}(d) - x_{i_k}(c)\|
\end{aligned}$$

e como

$$\|x_i(d) - x_i(c)\| \leq \int_{[c,d)_\mathbb{T}} \phi(s)\Delta s$$

concluímos que

$$\|x(d) - x(c)\| \leq \int_{[c,d)_\mathbb{T}} \phi(s)\Delta s \ .$$

Sejam $\{[c_i, d_i)_{\mathbb{T}}\}_{i=1}^n \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$ intervalos disjuntos tal que $c_i, d_i \in \mathbb{T}$ e $c_i \leq d_i$. Do Lema 7.26 segue que

$$\sum_{i=1}^n \|x(d_i) - x(c_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{[c_i,d_i)_{\mathbb{T}}} \phi(s)\Delta s = \int_{\bigcup_{i=1}^n [c_i,d_i)_{\mathbb{T}}} \phi(s)\Delta s \ .$$

Dado $\varepsilon > 0$ da Proposição 7.2 existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \|x(d_i) - x(c_i)\| < \varepsilon$$

quando

$$\mu_\Delta(\bigcup_{i=1}^n [c_i, d_i)_{\mathbb{T}}) = \sum_{i=1}^n \mu_\Delta([c_i, d_i)_{\mathbb{T}}) = \sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$$

e então x é um arco.

Para cada $t \in \mathbb{T}$ temos que

$$x_{i_k}(t) = x_{i_k}(a) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^\Delta(s)\Delta s \to x(t) = x(a) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} x^\Delta(s)\Delta s$$

e como $x_{i_k}(a) \to x(a)$ segue que

$$\int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^\Delta(s)\Delta s \to \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} x^\Delta(s)\Delta s \ .$$

Sejam $c, d \in \mathbb{T}$ de modo que $c < d$. Do Lema 7.26 obtemos

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^\Delta(s)\Delta s = \int_{[a,d)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^\Delta(s)\Delta s - \int_{[a,c)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^\Delta(s)\Delta s$$

e então

$$\begin{aligned}\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^\Delta(s)\Delta s &\to \int_{[a,d)_{\mathbb{T}}} x^\Delta(s)\Delta s - \int_{[a,c)_{\mathbb{T}}} x^\Delta(s)\Delta s \\ &= \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x^\Delta(s)\Delta s \ .\end{aligned}$$

□

3.4 Multifunções Mensuráveis

Os principais resultados dessa seção serão usados na seção 4.2 .

Lema 3.7. *Considere uma função $\theta : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ e defina a multifunção $\Gamma : [a,b]_{\mathbb{T}} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ como $\Gamma(t) = [\theta(t), +\infty)$. Se Γ for Δ-mensurável então θ será Δ-mensurável.*

Demonstração. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}((-\infty,\alpha]) &= \{t \in [a,b]_{\mathbb{T}} : \Gamma(t) = [\theta(t),+\infty) \cap (-\infty,\alpha] \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in [a,b]_{\mathbb{T}} : \theta(t) \leq \alpha\} \in \Delta\end{aligned}$$

já que $(-\infty,\alpha]$ é um conjunto fechado. Do Lema 7.14 concluímos a prova. □

Definição 3.8. *Seja $E : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não-vazia. Definimos a função hamiltoniana $h : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ como*

$$h(t,x,p) = \inf\{< p, v >: v \in E(t,x)\}\ .$$

Lema 3.8. *Tome uma multifunção $E : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ não-vazia e compacta. Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0,+\infty)$ limitada tal que*

$$E(t,x) \subset (\gamma\|x\| + c(t))\overline{B}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Suponha que E possui o gráfico fechado e $p \in \mathbb{R}^n$ é fixado arbitrariamente. Então a função $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$\phi(t,x) = h(t,x,p)$$

é semicontínua inferior.

Demonstração. Seja $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ fixado arbitrariamente e considere uma sequência $\{(t_i,x_i)\} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ que converge para (t,x). Temos que

$$\begin{aligned}\liminf \phi(t_i,x_i) &= \liminf h(t_i,x_i,p) \\ &= \lim h(t_{i_k},x_{i_k},p) = \lim < p, v_{i_k} >\end{aligned}$$

sendo $v_{i_k} \in E(t_{i_k},x_{i_k})$. Como $\|v_{i_k}\| \leq \gamma\|x_{i_k}\| + c(t_{i_k})$ segue que $\{v_{i_k}\}$ é uma sequência limitada. Então existe uma subsequência $\{v_{i_{k_j}}\} \subset \{v_{i_k}\}$ que converge para um elemento $v_* \in \mathbb{R}^n$.

Uma vez que $(t_{i_{k_j}}, x_{i_{k_j}}, v_{i_{k_j}}) \in GrE$ segue que

$$(t_{i_{k_j}}, x_{i_{k_j}}, v_{i_{k_j}}) \to (t,x,v_*) \in \overline{GrE} = GrE$$

e então $v_* \in E(t,x)$. Portanto

$$\begin{aligned}\liminf \phi(t_i,x_i) &= \lim < p, v_{i_k} > = \lim < p, v_{i_{k_j}} > \\ &= \ < p, v_* > \geq \ h(t,x,p) = \phi(t,x)\end{aligned}$$

e concluímos que ϕ é semicontínua inferior em (t,x). □

Lema 3.9. *Seja $E : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não-vazia e compacta. Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ tal que*

$$E(t,x) \subset (\gamma\|x\| + c(t))\overline{B}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Seja $t \in \mathbb{T}$ tal que a multifunção $E(t,.) : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ possui o gráfico fechado. Se $p \in \mathbb{R}^n$ é fixado arbitrariamente então a função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = h(t,x,p)$$

é semicontínua inferior.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ fixado arbitrariamente e considere uma sequência $\{x_i\} \subset \mathbb{R}^n$ que converge para x. Temos que

$$\begin{aligned} \liminf \phi(x_i) &= \liminf h(t,x_i,p) \\ &= \lim h(t,x_{i_k},p) = \lim < p, v_{i_k} > \end{aligned}$$

sendo $v_{i_k} \in E(t,x_{i_k})$. Como $\|v_{i_k}\| \leq \gamma\|x_{i_k}\| + c(t)$ segue que $\{v_{i_k}\}$ é uma sequência limitada. Então existe uma subsequência $\{v_{i_{k_j}}\} \subset \{v_{i_k}\}$ que converge para um elemento $v_* \in \mathbb{R}^n$.

Como $(x_{i_{k_j}}, v_{i_{k_j}}) \in GrE(t,.)$ temos que

$$(x_{i_{k_j}}, v_{i_{k_j}}) \to (x, v_*) \in \overline{GrE(t,.)} = GrE(t,.)$$

e então $v_* \in E(t,x)$. Portanto

$$\begin{aligned} \liminf \phi(x_i) &= \lim < p, v_{i_k} > = \lim < p, v_{i_{k_j}} > \\ &= \ < p, v_* > \geq \ h(t,x,p) = \phi(x) \end{aligned}$$

e concluímos que ϕ é semicontínua inferior em x. □

Lema 3.10. *Seja $E : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não-vazia e compacta. Se $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ é fixado arbitrariamente, então a função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como*

$$\phi(p) = h(t,x,p)$$

é de Lipschitz.

Demonstração. Tome $p, q \in \mathbb{R}^n$ e seja $k > 0$ tal que $E(t,x) \subset k\overline{B}$. Logo existe $v \in E(t,x)$ de modo que $h(t,x,p) =< p, v >$ e então

$$h(t,x,q) \ \leq < q, v > \ .$$

Assim,

$$\begin{aligned} h(t,x,q) - h(t,x,p) &\leq\; < q,v > - < p,v > = < q-p,v > \\ &\leq\; \|q-p\|\|v\| \leq k\|q-p\|. \end{aligned}$$

Analogamente temos

$$h(t,x,p) - h(t,x,q) \leq k\|q-p\|$$

e portanto

$$\mid h(t,x,p) - h(t,x,q) \mid \leq k\|q-p\|.$$

$\square$

Lema 3.11. *Seja $\Gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}$ uma multifunção que possui o gráfico fechado. Então $\Gamma^{-1}(V)$ é um conjunto fechado quando $V \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja $V \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Logo

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(V) &= \{u \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m : \Gamma(u) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{u \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m : \exists\, v \in V \text{ satisfazendo } (u,v) \in Gr\Gamma\} = C\ . \end{aligned}$$

Se $u \in \overline{C}$ existe uma sequência $\{u_i\} \subset C$ tal que $u_i \to u$. Assim, existe $\{v_i\} \subset V$ de modo que $(u_i, v_i) \in Gr\Gamma$.

Como V é um conjunto compacto existe uma subsequência $\{v_{i_k}\} \subset \{v_i\}$ que converge para $v_* \in V$. Então

$$(u_{i_k}, v_{i_k}) \to (u, v_*) \in \overline{Gr\Gamma} = Gr\Gamma$$

e concluímos que $u \in C$. Portanto $\Gamma^{-1}(V)$ é um conjunto fechado. $\square$

Lema 3.12. *Seja $\gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferior e defina a multifunção $\Gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}$ como $\Gamma(u) = [\gamma(u), +\infty)$. Então Γ possui o gráfico fechado.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} Gr\Gamma &= \{(v,w) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : w \in \Gamma(v)\} \\ &= \{(v,w) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : w \in [\gamma(v), +\infty)\} \\ &= \{(v,w) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : w \geq \gamma(v)\} = epi\gamma\ . \end{aligned}$$

Como $epi\gamma$ é um conjunto fechado, concluímos a prova. $\square$

Lema 3.13. *Seja* $\gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *uma função semicontínua inferior e* $\theta : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m$ *uma função* Δ*-mensurável. Então a função* $l : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$l(t) = \gamma(\theta(t))$$

é Δ*-mensurável.*

Demonstração. Defina a multifunção $\Gamma : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}$ como $\Gamma(u) = [\gamma(u), +\infty)$. Do Lema 3.12 temos que Γ possui o gráfico fechado.

Seja $F : [a,b]_{\mathbb{T}} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ uma multifunção definida como $F(t) = \Gamma(\theta(t))$. Se $V \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, do Lema 3.11 segue que $\Gamma^{-1}(V)$ é um conjunto fechado. Assim,

$$\begin{aligned} F^{-1}(V) &= \{t \in [a,b]_{\mathbb{T}} : F(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in [a,b]_{\mathbb{T}} : \Gamma(\theta(t)) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in [a,b]_{\mathbb{T}} : \theta(t) \in \Gamma^{-1}(V)\} = \theta^{-1}(\Gamma^{-1}(V)) \in \Delta \end{aligned}$$

e então F é Δ-mensurável.

Como $F(t) = \Gamma(\theta(t)) = [\gamma(\theta(t)), +\infty) = [l(t), +\infty)$, do Lema 3.7 concluímos que a função l é Δ-mensurável. □

Corolário 3.5. *Sejam* $\tau : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *e* $x : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ *funções* Δ*-mensuráveis tal que* $\tau(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$*. Se* $p \in \mathbb{R}^n$ *é fixado arbitrariamente, então a função* $l : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$l(t) = h(\tau(t), x(t), p)$$

é Δ*-mensurável.*

Demonstração. Do Lema 3.8 temos que a função $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $\phi(t,x) = h(t,x,p)$ é semicontínua inferior. Como $(\tau, x) : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ é uma função Δ-mensurável, do Lema anterior a função $l(t) = \phi((\tau,x)(t)) = \phi(\tau(t), x(t)) = h(\tau(t), x(t), p)$ é Δ-mensurável. □

Definição 3.9. *Se* $\mathcal{B}^m$ *denota a* σ*-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}^m$*, usaremos a notação* $\Delta \times \mathcal{B}^m$ *para denotar a* σ*-álgebra produto entre* Δ *e* $\mathcal{B}^m$*.*

Observação A σ-álgebra $\Delta \times \mathcal{B}^m$ é a menor σ-álgebra em $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^m$ que contém todos os produtos $A \times B$, sendo $A \in \Delta$ e $B \in \mathcal{B}^m$.

Lema 3.14. *Seja* $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$ *uma função* Δ*-mensurável. Se* $B \in \mathcal{B}^m$ *então* $u^{-1}(B) \in \Delta$*.*

Demonstração. Do Corolário 3.2 a função $\tilde{u} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ é $\mathcal{L}$-mensurável. Temos que

$$\begin{aligned} u^{-1}(B) &= \{t \in \mathbb{T} : u(t) \in B\} = \{t \in [a, b] : \tilde{u}(t) \in B\} \cap \mathbb{T} \\ &= (\tilde{u})^{-1}(B) \cap \mathbb{T} \in \mathcal{L} \ . \end{aligned}$$

Usando a Proposição 7.1 concluímos que $u^{-1}(B) \in \Delta$. □

Proposição 3.6. *Seja* $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *uma função* $\Delta \times \mathcal{B}^m$*-mensurável e* $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$ *uma função* Δ*-mensurável . Então a função* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *definida como*

$$g(t) = f(t, u(t))$$

é Δ*-mensurável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{H}$ a seguinte coleção de subconjuntos

$$\mathcal{H} = \{E \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m : \{t \in \mathbb{T} : (t, u(t)) \in E\} \in \Delta\}.$$

Então $\mathcal{H}$ é uma σ-álgebra em $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^m$.

Se $A \in \Delta$ e $B \in \mathcal{B}^m$ temos que

$$\{t \in \mathbb{T} : (t, u(t)) \in A \times B\} = A \cap u^{-1}(B) \in \Delta \ .$$

Assim, $\Delta \times \mathcal{B}^m \subset \mathcal{H}$.

Tome um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$. Logo

$$E = \{(t, u) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m : f(t, u) \in W\} = f^{-1}(W) \in \Delta \times \mathcal{B}^m$$

e então $E \in \mathcal{H}$. Portanto

$$g^{-1}(W) = \{t \in \mathbb{T} : f(t, u(t)) \in W\} = \{t \in \mathbb{T} : (t, u(t)) \in E\} \in \Delta$$

e concluímos que g é Δ-mensurável. □

Proposição 3.7. *Sejam* $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *e* $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *funções* Δ*-mensuráveis. Suponha que* $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ *é uma multifunção não-vazia, compacta e* $\Delta \times \mathcal{B}^n$*-mensurável. Então a função*

$$t \mapsto h(t, y(t), p(t))$$

é Δ*-mensurável.*

Demonstração. Considere um número $r \in \mathbb{R}$ fixado arbitrariamente. Seja $\{v_i\}$ um subconjunto denso de $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon_j \downarrow 0$. Defina

$$\mathcal{D} = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{A_{i,j} \times B_{i,j}\}$$

sendo

$$A_{i,j} = \{(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n : \{v_i + \varepsilon_j \overline{B}\} \cap F(t,x) \neq \emptyset\}$$

e

$$B_{i,j} = \{p \in \mathbb{R}^n : < p, v_i > < r + \varepsilon_j\} \ .$$

Para usar a Proposição 3.6, devemos provar que a função

$$(t,(x,p)) \mapsto h(t,(x,p))$$

é $\Delta \times \mathcal{B}^{2n}$-mensurável. Para isso basta provar que

$$D = \{(t,x,p) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : h(t,x,p) \leq r\} = \mathcal{D}.$$

Tome $(t_*, x_*, p_*) \in D$ arbitrariamente. Logo existe $f_* \in F(t_*, x_*)$ tal que

$$h(t_*, x_*, p_*) = < p_*, f_* > \leq r.$$

Para cada $\varepsilon_j > 0$ existe $f_j \in F(t_*, x_*)$ satisfazendo

$$< p_*, f_* > \leq < p_*, f_j > < < p_*, f_* > + \varepsilon_j \leq r + \varepsilon_j.$$

Se $j \geq 1$ é fixado arbitrariamente, seja $\{v_{i_k}\} \subset \{v_i\}$ tal que $v_{i_k} \to f_j$. Tome $I \in \mathbb{N}$ de modo que

$$< p_*, v_{i_k} > < < p_*, f_* > + \varepsilon_j \leq r + \varepsilon_j$$

quando $k \geq I$. Considere também $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$v_{i_k} \in \overline{B}(f_j, \varepsilon_j)$$

quando $k \geq J$. Assim,

$$\|f_j - v_{i_k}\| = \|v_{i_k} - f_j\| \leq \varepsilon_j$$

isto é,

$$\{v_{i_k} + \varepsilon_j \overline{B}\} \cap F(t_*, x_*) \neq \emptyset$$

quando $k \geq J$. Fixando um número inteiro $k \geq \max\{I, J\}$ segue que $(t_*, x_*, p_*) \in A_{i_k,j} \times B_{i_k,j}$ e então $(t_*, x_*, p_*) \in \mathcal{D}$.

Se $(t_*, x_*, p_*) \in \mathcal{D}$, para cada $j \geq 1$ existe $I = I(j)$ satisfazendo

$$(t_*, x_*, p_*) \in A_{I(j),j} \times B_{I(j),j} \ .$$

Como $(t_*, x_*) \in A_{I(j),j}$ segue que

$$\{v_{I(j)} + \varepsilon_j \overline{B}\} \cap F(t_*, x_*) \neq \emptyset$$

isto é, existe $f_j \in F(t_*, x_*)$ tal que $\|f_j - v_{I(j)}\| \leq \varepsilon_j$. Logo existe $b_j \in \overline{B}$ satisfazendo

$$f_j - v_{I(j)} = \varepsilon_j b_j \ .$$

Sendo $p_* \in B_{I(j),j}$ temos que $< p_*, v_{I(j)} > < \ r + \varepsilon_j$. Assim,

$$\begin{aligned} h(t_*, x_*, p_*) &\leq \ < p_*, f_j > = < p_*, v_{I(j)} + \varepsilon_j b_j > \\ &= \ < p_*, v_{I(j)} > + < p_*, \varepsilon_j b_j > \leq < p_*, v_{I(j)} > + \ \varepsilon_j \|p_*\| \|b_j\| \\ &\leq \ < p_*, v_{I(j)} > + \ \varepsilon_j \|p_*\| \ < \ r + \varepsilon_j + \varepsilon_j \|p_*\| \end{aligned}$$

e como $\varepsilon_j \downarrow 0$ concluímos que $h(t_*, x_*, p_*) \leq r$. Portanto $(t_*, x_*, p_*) \in D$. $\square$

Capítulo 4

Compacidade de Trajetórias de Inclusões Dinâmicas em Escalas Temporais

Usando resultados dos capítulos anteriores, provamos uma desigualdade do tipo Gronwall em escalas temporais. Além disso, demonstramos a propriedade de compacidade de trajetórias para inclusões dinâmicas em escalas temporais. Assim, fazemos um paralelo com o caso clássico [16],[17] e [37].

Utilizamos uma escala temporal $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{T}}$, sendo $a, b \in \mathbb{T}$ e $a < b$.

4.1 Desigualdade do Tipo Gronwall

Proposição 4.1. *Seja $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ um arco e $k : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ uma função em $L_1([a, b)_{\mathbb{T}})$. Suponha que*

$$\|x^{\Delta}(t)\| \leq \gamma \|x(t)\| + k(t) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$$

sendo $\gamma \geq 0$. Então

$$\|x(t) - x(a)\| \leq \gamma \|x(a)\| \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} e^{\gamma(t-s)} \Delta s + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} k(s) e^{\gamma(t-s)} \Delta s$$

para todo $t \in \mathbb{T}$.

Demonstração. Defina o arco $r : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ como $r(t) = \|x(t) - x(a)\|$ e considere $t_* \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ tal que r e x são Δ-diferenciáveis em t_*.

Se $\sigma(t_*) > t_*$ temos que

$$\begin{aligned} r^{\Delta}(t_*) &= \frac{r(\sigma(t_*)) - r(t_*)}{\mu(t_*)} \\ &= \frac{\|x(\sigma(t_*)) - x(a)\| - \|x(t_*) - x(a)\|}{\mu(t_*)} \\ &\leq \frac{\|x(\sigma(t_*)) - x(t_*)\|}{\mu(t_*)} = \|x^{\Delta}(t_*)\| \ . \end{aligned}$$

Se $\sigma(t_*) = t_*$, seja $\{s_i\} \subset \mathbb{T}$ tal que $s_i \downarrow t_*$. Como

$$\begin{aligned} \frac{r(s_i) - r(t_*)}{s_i - t_*} &= \frac{\|x(s_i) - x(a)\| - \|x(t_*) - x(a)\|}{s_i - t_*} \\ &\leq \frac{\|x(s_i) - x(t_*)\|}{s_i - t_*} \end{aligned}$$

concluímos que $r^{\Delta}(t_*) \leq \|x^{\Delta}(t_*)\|$. Portanto

$$\begin{aligned} r^{\Delta}(t) &\leq \|x^{\Delta}(t)\| \leq \gamma\|x(t)\| + k(t) \\ &\leq \gamma\|x(t) - x(a)\| + \gamma\|x(a)\| + k(t) \\ &= \gamma r(t) + \gamma\|x(a)\| + k(t) \ \ \Delta - q.t.p. \ \ t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \ . \end{aligned}$$

Defina as funções $m : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $m_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $m(t) = m_c(t) = e^{-\gamma t}$. Uma vez que m é um arco, a função $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = r(t)m(t)$$

também é um arco.

Considere $t_* \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ tal que r e m são Δ-diferenciáveis em t_*. Suponha também que

$$r^{\Delta}(t_*) \leq \gamma r(t_*) + \gamma\|x(a)\| + k(t_*) \ .$$

Do Teorema 2.2 segue que

$$h^{\Delta}(t_*) = m^{\Delta}(t_*)r(t_*) + m(\sigma(t_*))r^{\Delta}(t_*) \ .$$

Se $\sigma(t_*) = t_*$, seja $\{s_i\} \subset \mathbb{T}$ tal que $s_i \to t_*$. Logo

$$\begin{aligned} m^{\Delta}(t_*) &= \lim \frac{m(t_*) - m(s_i)}{t_* - s_i} \\ &= \lim \frac{m_c(t_*) - m_c(s_i)}{t_* - s_i} = m_c^{'}(t_*) = -\gamma e^{-\gamma t_*} \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} h^{\Delta}(t_*) &= -\gamma e^{-\gamma t_*} r(t_*) + e^{-\gamma t_*} r^{\Delta}(t_*) \\ &= \{r^{\Delta}(t_*) - \gamma r(t_*)\} e^{-\gamma t_*} \leq \{\gamma \|x(a)\| + k(t_*)\} e^{-\gamma t_*} \ . \end{aligned}$$

Se $\sigma(t_*) > t_*$, do Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (t_*, \sigma(t_*))$ tal que

$$\begin{aligned} m^{\Delta}(t_*) &= \frac{m(\sigma(t_*)) - m(t_*)}{\mu(t_*)} \\ &= \frac{m_c(\sigma(t_*)) - m_c(t_*)}{\mu(t_*)} = m_c^{'}(\theta) \\ &= -\gamma e^{-\gamma \theta} \leq -\gamma e^{-\gamma \sigma(t_*)} \end{aligned}$$

e portanto

$$h^{\Delta}(t_*) \leq -\gamma r(t_*) e^{-\gamma \sigma(t_*)} + e^{-\gamma \sigma(t_*)} r^{\Delta}(t_*) = \{r^{\Delta}(t_*) - \gamma r(t_*)\} e^{-\gamma \sigma(t_*)} \ .$$

Se $\lambda(t_*) = r^{\Delta}(t_*) - \gamma r(t_*) \leq 0$ temos que

$$h^{\Delta}(t_*) \leq \lambda(t_*) e^{-\gamma \sigma(t_*)} \leq 0 \leq \{\gamma \|x(a)\| + k(t_*)\} e^{-\gamma t_*} \ .$$

No entanto, se $\lambda(t_*) = r^{\Delta}(t_*) - \gamma r(t_*) > 0$ segue que

$$\begin{aligned} h^{\Delta}(t_*) &\leq \lambda(t_*) e^{-\gamma \sigma(t_*)} \leq \lambda(t_*) e^{-\gamma t_*} \\ &= \{r^{\Delta}(t_*) - \gamma r(t_*)\} e^{-\gamma t_*} \leq \{\gamma \|x(a)\| + k(t_*)\} e^{-\gamma t_*} \ . \end{aligned}$$

Assim,

$$h^{\Delta}(t) \leq \{\gamma \|x(a)\| + k(t)\} e^{-\gamma t} \quad \Delta - q.t.p. \ \ t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \ .$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$ temos que

$$\begin{aligned} h(t) - h(a) &= \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} h^{\Delta}(s) \Delta s \leq \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} \{\gamma \|x(a)\| e^{-\gamma s} + k(s) e^{-\gamma s}\} \Delta s \\ &= \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} \gamma \|x(a)\| e^{-\gamma s} \Delta s + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} k(s) e^{-\gamma s} \Delta s \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(a)\| &\leq e^{\gamma t} \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} \gamma \|x(a)\| e^{-\gamma s} \Delta s + e^{\gamma t} \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} k(s) e^{-\gamma s} \Delta s \\ &= \gamma \|x(a)\| \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} e^{\gamma (t-s)} \Delta s + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} k(s) e^{\gamma (t-s)} \Delta s \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{T}$. □

Corolário 4.1. *Considere um arco* $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *e uma função* $k : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ *em* $L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$*. Suponha que*

$$\|x^{\Delta}(t)\| \leq \gamma \|x(t)\| + k(t) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$$

sendo $\gamma \geq 0$*. Então*

$$\|x(t)\| \leq \big(\gamma e^{\gamma(b-a)}(b-a) + 1\big)\|x(a)\| + e^{\gamma(b-a)} \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s$$

para todo $t \in \mathbb{T}$*.*

Demonstração. Vimos na demonstração anterior que

$$\begin{aligned} h^{\Delta}(t) &\leq \{\gamma\|x(a)\| + k(t)\}e^{-\gamma t} \\ &\leq \{\gamma\|x(a)\| + k(t)\}e^{-\gamma a} \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \ . \end{aligned}$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$ temos que

$$\begin{aligned} h(t) - h(a) &= \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} h^{\Delta}(s)\Delta s \leq \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} \{\gamma\|x(a)\|e^{-\gamma a} + k(s)e^{-\gamma a}\}\Delta s \\ &= \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} \gamma\|x(a)\|e^{-\gamma a}\Delta s + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} e^{-\gamma a}k(s)\Delta s \\ &= \gamma\|x(a)\|e^{-\gamma a}(t-a) + e^{-\gamma a}\int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s \\ &\leq \gamma\|x(a)\|e^{-\gamma a}(b-a) + e^{-\gamma a}\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s \ . \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(a)\| &\leq \gamma\|x(a)\|e^{\gamma t}e^{-\gamma a}(b-a) + e^{\gamma t}e^{-\gamma a}\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s \\ &\leq \gamma\|x(a)\|e^{\gamma(b-a)}(b-a) + e^{\gamma(b-a)}\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{T}$. Portanto

$$\|x(t)\| \leq \{\gamma e^{\gamma(b-a)}(b-a) + 1\}\|x(a)\| + e^{\gamma(b-a)}\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s$$

para todo $t \in \mathbb{T}$. $\square$

4.2 Compacidade de Trajetórias

Nessa seção, provamos dois teoremas que são usados na obtenção de soluções de inclusões dinâmicas.

Definição 4.1. *Considere uma multifunção $E : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ não-vazia. Dizemos que uma função $x \in AC(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ é uma trajetória de E se satisfizer a seguinte restrição*

$$x^{\Delta}(t) \in E(t, x(t)) \qquad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \; .$$

Teorema 4.1. *Seja $E : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não-vazia, compacta, convexa e cujo gráfico é fechado. Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ limitada tal que*

$$E(t, x) \subset (\gamma\|x\| + c(t))\overline{B}$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$.

Tome uma sequência de arcos $x_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\{x_i(a)\}$ é limitada. Considere também uma sequência de funções Δ-mensuráveis $y_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $y_i(t) \to 0$ Δ-q.t.p. $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$. Suponha que existe uma função $\varphi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ em $L_1([a, b)_{\mathbb{T}})$ de modo que

$$\|y_i(t)\| \leq \varphi(t)$$

para todo $t \in \mathbb{T}$ e todo i.

Considere uma sequência $\tau_i : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ de funções Δ-mensuráveis que satisfaz

$$\tau_i(t) \to t \qquad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \; .$$

Se para cada i temos

$$x_i^{\Delta}(t) \in E(\tau_i(t), x_i(t) + y_i(t)) \qquad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$$

então existe uma subsequência $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}$ e uma trajetória x de E tal que $x_{i_k} \rightrightarrows x$.

Demonstração. Tome $c_* > 0$ tal que

$$c(t) \leq c_*$$

para todo $t \in \mathbb{T}$.

Para cada i, da inclusão dinâmica temos que

$$\begin{aligned} \|x_i^{\Delta}(t)\| &\leq \gamma\|x_i(t) + y_i(t)\| + c_* \\ &\leq \gamma\|x_i(t)\| + \gamma\|y_i(t)\| + c_* \\ &\leq \gamma\|x_i(t)\| + \gamma\varphi(t) + c_* \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \; . \end{aligned}$$

Seja $C_1 > 0$ tal que $\|x_i(a)\| \leq C_1$ para todo i. Se $k(t) = \gamma\varphi(t) + c_*$ do Corolário 4.1 segue que

$$\begin{aligned}\|x_i(t)\| &\leq \big(\gamma e^{\gamma(b-a)}(b-a)+1\big)\|x_i(a)\| + e^{\gamma(b-a)}\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s \\ &\leq \big(\gamma e^{\gamma(b-a)}(b-a)+1\big)C_1 + e^{\gamma(b-a)}\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s := K\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{T}$. Então, para cada i temos que

$$\|x_i^{\Delta}(t)\| \leq \gamma K + k(t) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \;.$$

Da Proposição 3.5 existe uma subsequência $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}$ e um arco $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $x_{i_k} \rightrightarrows x$. Além disso, se $c, d \in \mathbb{T}$ e $c < d$ então

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^{\Delta}(s)\Delta s \to \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x^{\Delta}(s)\Delta s \;.$$

Sem perda de generalidade, reindexamos a subsequência $\{i_k\}$ como $\{k\}$.

Se $p \in \mathbb{R}^n$ é fixado arbitrariamente, do Corolário 3.5 a função

$$t \mapsto h(\tau_k(t), x_k(t) + y_k(t), p) = l_k(t)$$

é Δ-mensurável para cada k. Além disso, para todo $t \in \mathbb{T}$ temos

$$\begin{aligned}|\; h(\tau_k(t), x_k(t)+y_k(t), p)\;| &\leq \|p\|(\gamma\|x_k(t)+y_k(t)\| + c_*) \\ &\leq \|p\|\gamma\|x_k(t)\| + \|p\|\gamma\|y_k(t)\| + \|p\|c_* \\ &\leq \|p\|\gamma K + \|p\|\gamma\varphi(t) + \|p\|c_*\end{aligned}$$

e então $l_k \in L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$. Do Corolário 7.16 temos que

$$\int_A \liminf h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p)\Delta s \;\leq\; \liminf \int_A h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p)\Delta s$$

para cada conjunto Δ-mensurável $A \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$.

Novamente da inclusão dinâmica, para cada k temos que

$$h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p) \;\leq < p, x_k^{\Delta}(s) > \quad \Delta - q.t.p. \;\; s \in [a,b)_{\mathbb{T}} \;.$$

Assim, se $c, d \in \mathbb{T}$ e $c < d$ então

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} \{< p, x_k^{\Delta}(s) > - h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p)\}\Delta s \;\geq\; 0 \;.$$

Sendo

$$\begin{aligned}\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} \liminf h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p)\Delta s &\leq \liminf \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p)\Delta s \\ &= \lim \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} h(\tau_{k_j}(s), x_{k_j}(s)+y_{k_j}(s), p)\Delta s\end{aligned}$$

segue que

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} < p, x^{\Delta}(s) > \Delta s - \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} \liminf h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p)\Delta s$$

$$\begin{aligned}&\geq \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} < p, x^{\Delta}(s) > \Delta s - \liminf \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p)\Delta s \\ &= \lim \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} < p, x^{\Delta}_{k_j}(s) > \Delta s - \lim \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} h(\tau_{k_j}(s), x_{k_j}(s)+y_{k_j}(s), p)\Delta s \\ &= \lim\{\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} < p, x^{\Delta}_{k_j}(s) > \Delta s - \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} h(\tau_{k_j}(s), x_{k_j}(s)+y_{k_j}(s), p)\Delta s\} \\ &= \lim\{\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} \{< p, x^{\Delta}_{k_j}(s) > -h(\tau_{k_j}(s), x_{k_j}(s)+y_{k_j}(s), p)\}\Delta s\} \geq 0 \ .\end{aligned}$$

Como

$$(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s)) \to (s, x(s)) \quad \Delta - q.t.p. \;\; s \in [a,b)_{\mathbb{T}}$$

e $h(t,x,p)$ é semicontínua inferior em (t,x) temos que

$$\liminf h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p) \;\geq\; h(s, x(s), p) \;\; \Delta - q.t.p. \;\; s \in [a,b)_{\mathbb{T}} \ .$$

Então

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} \{< p, x^{\Delta}(s) > -h(s, x(s), p)\}\Delta s$$

$$\begin{aligned}&= \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} < p, x^{\Delta}(s) > \Delta s - \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} h(s, x(s), p)\Delta s \\ &\geq \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} < p, x^{\Delta}(s) > \Delta s - \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} \liminf h(\tau_k(s), x_k(s)+y_k(s), p)\Delta s \geq 0\end{aligned}$$

e da Proposição 3.3 concluímos que

$$< p, x^{\Delta}(s) > -h(s, x(s), p) \geq 0 \quad \Delta - q.t.p. \;\; s \in [a,b)_{\mathbb{T}}$$

isto é,

$$< p, x^{\Delta}(s) > \geq \; h(s, x(s), p) \quad \Delta - q.t.p. \;\; s \in [a,b)_{\mathbb{T}} \ . \tag{4.1}$$

Seja $\{p_i\}$ um subconjunto denso enumerável de $\mathbb{R}^n$. Então (4.1) vale para todo $p = p_i$ quando $s \in [a,b)_{\mathbb{T}} \setminus \Omega_i$, sendo $\Omega_i \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$ tal que $\mu_\Delta(\Omega_i) = 0$.

Se $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ e $s \in [a,b)_{\mathbb{T}} \setminus \Omega$ segue que

$$< p_i, x^\Delta(s) > \geq \; h(s, x(s), p_i)$$

para todo i.

Tome $p \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente. Logo existe $\{p_{i_m}\} \subset \{p_i\}$ tal que $p_{i_m} \to p$.

Se $s \in [a,b)_{\mathbb{T}} \setminus \Omega$ temos que

$$\begin{aligned} < p, x^\Delta(s) > &= \lim < p_{i_m}, x^\Delta(s) > \\ &\geq \lim h(s, x(s), p_{i_m}) = h(s, x(s), p) \end{aligned}$$

e então

$$< p, x^\Delta(t) > \geq \; h(t, x(t), p) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$$

já que $\mu_\Delta(\Omega) \leq \sum_i \mu_\Delta(\Omega_i) = 0$.

Seja $s \in [a,b)_{\mathbb{T}} \setminus \Omega$ e suponha por absurdo que

$$x^\Delta(s) \notin E(s, x(s)) \; .$$

Do Teorema da Separação [34] existe um elemento $p_* \in \mathbb{R}^n$ não-nulo e um $\varepsilon > 0$ tal que

$$< v, p_* > \geq < x^\Delta(s), p_* > + \varepsilon$$

para todo $v \in E(s, x(s))$. Logo

$$h(s, x(s), p_*) \;\; \geq < x^\Delta(s), p_* > + \varepsilon \;\; > < x^\Delta(s), p_* >$$

e obtemos um absurdo. Portanto

$$x^\Delta(t) \in E(t, x(t)) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \; .$$

$\square$

Teorema 4.2. *Seja $E : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não-vazia, compacta, convexa e $\Delta \times \mathcal{B}^n$-mensurável. Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ em $L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$ tal que*

$$E(t, x) \subset (\gamma \|x\| + c(t))\overline{B}$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Suponha que $\Delta - q.t.p.$ $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ a multifunção $E(t, .) : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ possui o gráfico fechado.

Tome uma sequência de arcos $x_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\{x_i(a)\}$ é limitada. Considere também uma sequência de funções Δ-mensuráveis $y_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $y_i(t) \to 0$ Δ-q.t.p. $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$. Suponha que existe uma função $\varphi : \mathbb{T} \to [0,+\infty)$ em $L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$ de modo que

$$\|y_i(t)\| \leq \varphi(t)$$

para todo $t \in \mathbb{T}$ e todo i.

Se para cada i temos

$$x_i^{\Delta}(t) \in E(t, x_i(t) + y_i(t)) \qquad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$$

então existe uma subsequência $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}$ e uma trajetória x de E tal que $x_{i_k} \rightrightarrows x$.

Demonstração. Para cada i, da inclusão dinâmica temos que

$$\begin{aligned} \|x_i^{\Delta}(t)\| &\leq \gamma\|x_i(t) + y_i(t)\| + c(t) \\ &\leq \gamma\|x_i(t)\| + \gamma\|y_i(t)\| + c(t) \\ &\leq \gamma\|x_i(t)\| + \gamma\varphi(t) + c(t) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \; . \end{aligned}$$

Seja $C_1 > 0$ tal que $\|x_i(a)\| \leq C_1$ para todo i. Se $k(t) = \gamma\varphi(t) + c(t)$ do Corolário 4.1 segue que

$$\begin{aligned} \|x_i(t)\| &\leq \big(\gamma e^{\gamma(b-a)}(b-a) + 1\big)\|x_i(a)\| + e^{\gamma(b-a)} \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s \\ &\leq \big(\gamma e^{\gamma(b-a)}(b-a) + 1\big)C_1 + e^{\gamma(b-a)} \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} k(s)\Delta s := K \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{T}$. Então, para cada i temos que

$$\|x_i^{\Delta}(t)\| \leq \gamma K + k(t) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \; .$$

Da Proposição 3.5 existe uma subsequência $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}$ e um arco $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $x_{i_k} \rightrightarrows x$. Além disso, se $c, d \in \mathbb{T}$ e $c < d$ então

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x_{i_k}^{\Delta}(s)\Delta s \to \int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} x^{\Delta}(s)\Delta s \; .$$

Sem perda de generalidade, reindexamos a subsequência $\{i_k\}$ como $\{k\}$.

Se $p \in \mathbb{R}^n$ é fixado arbitrariamente, da Proposição 3.7 a função

$$t \mapsto h(t, x_k(t) + y_k(t), p) = l_k(t)$$

é Δ-mensurável para cada k. Além disso, para todo $t \in \mathbb{T}$ temos

$$\begin{aligned} | \, h(t, x_k(t) + y_k(t), p) \, | &\leq \|p\|(\gamma\|x_k(t) + y_k(t)\| + c(t)) \\ &\leq \|p\|\gamma\|x_k(t)\| + \|p\|\gamma\|y_k(t)\| + \|p\|c(t) \\ &\leq \|p\|\gamma K + \|p\|\gamma\varphi(t) + \|p\|c(t) \end{aligned}$$

e então $l_k \in L_1([a, b)_{\mathbb{T}})$.

Concluímos a prova repetindo a demonstração do Teorema 4.1. $\square$

Capítulo 5

Existência de Soluções de Inclusões Dinâmicas em Escalas Temporais

Para provar a existência de soluções para inclusões dinâmicas, de campos vetoriais de gráfico fechado, utilizamos soluções de Euler para equações dinâmicas em escalas temporais. Assim, na próxima seção, introduzimos e provamos a existência de soluções de Euler para equações dinâmicas em escalas temporais.

Os resultados de existência de soluções para inclusões dinâmicas são apresentados na Seção 5.2 .

Na Seção 5.3, discutimos a existência de trajetórias ótimas para problemas de controle ótimo cuja restrição dinâmica é dada na forma de uma inclusão dinâmica.

A prova do Lema de Filippov em escalas temporais é apresentada na Seção 5.4 .

Usamos uma escala temporal $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{T}}$ tal que $a, b \in \mathbb{T}$ e $a < b$.

5.1 Solução de Euler

Fixado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \\ x(a) = x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

sendo $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Tome $\delta > 0$ e $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_N\} \in \mathcal{P}_{\delta}(\mathbb{T})$. Definimos a função $x_\pi : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ como segue:

$$x_\pi(t_0) = x_0 \;, \quad x_\pi(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0) \quad t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}},$$

$$x_\pi(t_1) = x_1 \;, \quad x_\pi(t) = x_1 + (t - t_1) f(t_1, x_1) \quad t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}},$$

e por indução obtemos

$$x_\pi(t_i) = x_i\ , \quad x_\pi(t) = x_i + (t - t_i) f(t_i, x_i) \quad t \in [t_i, t_{i+1}]_{\mathbb{T}}$$

quando $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$.

Definição 5.1. *O arco x_π definido anteriormente é chamado de arco poligonal de Euler.*

Definição 5.2. *Uma solução de Euler para o problema de valor inicial (5.1), é um arco x que é o limite uniforme de arcos poligonais de Euler x_{π_j} relacionados a $\pi_j \in \mathcal{P}_{\delta_j}(\mathbb{T})$, para alguma sequência $\delta_j \downarrow 0$.*

Lema 5.1 ([16])**.** *Considere números reais $r_0, r_1, ..., r_N \geq 0$ que satisfazem*

$$r_{i+1} \leq (1 + \delta_i) r_i + \eta_i, \quad i \in \{0, 1, ..., N-1\}$$

sendo $\delta_i, \eta_i \geq 0$ e $r_0 = 0$. Então

$$r_N \leq \big(\exp\big(\sum_{i=0}^{N-1} \delta_i\big)\big) \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i.$$

Proposição 5.1. *Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ limitada. Suponha que*

$$\|f(t,x)\| \leq \gamma \|x\| + c(t)$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Então, para todo $\delta > 0$ e para cada $\pi \in \mathcal{P}_\delta(\mathbb{T})$, existe $L > 0$ tal que o arco poligonal de Euler x_π é de Lipschitz com constante L. Além disso,

$$\|x_\pi^\Delta(t)\| \leq L \quad \Delta - q.t.p. \ \ t \in [a, b)_{\mathbb{T}}.$$

Demonstração. Seja $c_* > 0$ tal que

$$c(t) \leq c_*$$

para todo $t \in \mathbb{T}$.

Tome $\delta > 0$ e $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_N\} \in \mathcal{P}_\delta(\mathbb{T})$. Seja x_π o correspondente arco poligonal de Euler.

Fixado $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$, considere $t \in [t_i, t_{i+1})_{\mathbb{T}}$ tal que x_π é Δ-diferenciável em t. Se $\sigma(t) > t$ segue que

$$\begin{aligned} x_\pi^\Delta(t) &= \frac{x_\pi(\sigma(t)) - x_\pi(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{x_i + (\sigma(t) - t_i) f(t_i, x_i) - \{x_i + (t - t_i) f(t_i, x_i)\}}{\mu(t)} = f(t_i, x_i). \end{aligned}$$

Se $\sigma(t) = t$ tome uma sequência $\{s_j\} \subset \mathbb{T} \cap [t_i, t_{i+1})$ tal que $s_j \downarrow t$. Sendo

$$\frac{x_\pi(s_j) - x_\pi(t)}{s_j - t} = f(t_i, x_i)$$

temos que $x_\pi^\Delta(t) = f(t_i, x_i)$. Em ambos os casos temos

$$\|x_\pi^\Delta(t)\| = \|f(t_i, x_i)\| \leq \gamma\|x_i\| + c_* \leq \gamma\|x_i - x_0\| + \gamma\|x_0\| + c_* \ .$$

Para cada $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1} - x_0\| &\leq \|x_{i+1} - x_i\| + \|x_i - x_0\| \\
&= \|(t_{i+1} - t_i) f(t_i, x_i)\| + \|x_i - x_0\| \\
&\leq (t_{i+1} - t_i)\{\gamma\|x_i\| + c_*\} + \|x_i - x_0\| \\
&\leq (t_{i+1} - t_i)\{\gamma\|x_i - x_0\| + \gamma\|x_0\| + c_*\} + \|x_i - x_0\| \\
&= \{(t_{i+1} - t_i)\gamma + 1\}\|x_i - x_0\| + (t_{i+1} - t_i)(\gamma\|x_0\| + c_*).
\end{aligned}$$

Para cada i, seja $r_i = \|x_i - x_0\|$, $\delta_i = (t_{i+1} - t_i)\gamma$ e $\eta_i = (t_{i+1} - t_i)(\gamma\|x_0\| + c_*)$. Dado $M \in \{1, ..., N\}$ temos que

$$r_{j+1} \leq (1 + \delta_j) r_j + \eta_j$$

para todo $j \in \{0, ..., M-1\}$. Do Lema 5.1 segue que

$$\begin{aligned}
r_M &\leq \left[\exp(\delta_0 + \delta_1 + ... + \delta_{M-1})\right]\left[\eta_0 + \eta_1 + ... + \eta_{M-1}\right] \\
&= \left[\exp((t_M - t_0)\gamma)\right]\left[(t_M - t_0)(\gamma\|x_0\| + c_*)\right] \\
&\leq (b-a)e^{\gamma(b-a)}(\gamma\|x_0\| + c_*) := K \ .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|x_\pi^\Delta(t)\| \leq \gamma K + \gamma\|x_0\| + c_* := L \qquad \Delta - q.t.p. \ \ t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \ .$$

Seja $t \in \mathbb{T}$ fixado arbitrariamente. Se $s \in \mathbb{T}$ e $s > t$ temos que

$$\begin{aligned}
\|x_\pi(s) - x_\pi(t)\| &= \|x_\pi(a) + \int_{[a,s)_{\mathbb{T}}} x_\pi^\Delta(\tau)\Delta\tau - x_\pi(a) - \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} x_\pi^\Delta(\tau)\Delta\tau\| \\
&= \|\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} x_\pi^\Delta(\tau)\Delta\tau\| \leq \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} \|x_\pi^\Delta(\tau)\|\Delta\tau \\
&\leq \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} L\Delta s = L(s-t) \ .
\end{aligned}$$

De modo análogo, se $s \in \mathbb{T}$ e $s < t$ segue que

$$\|x_\pi(s) - x_\pi(t)\| \leq \int_{[s,t)_{\mathbb{T}}} L\Delta s = L(t-s)$$

e concluímos a prova. $\square$

Corolário 5.1. *Seja $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ uma função limitada. Suponha que*

$$\|f(t,x)\| \leq \gamma\|x\| + c(t)$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Então o problema (5.1) possui uma solução de Euler.

Demonstração. Considere uma sequência $\delta_j \downarrow 0$. Para cada j tome uma partição $\pi_j \in \mathcal{P}_{\delta_j}(\mathbb{T})$ e seja x_{π_j} o correspondente arco poligonal de Euler. Sem perda de generalidade reindexamos $\{x_{\pi_j}\}$ como $\{x_j\}$.

Da proposição anterior existe $L > 0$ tal que

$$\|x_j^{\Delta}(t)\| \leq L \qquad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$$

para todo j. Sendo $x_j(a) = x_0$, da Proposição 3.5 existe uma subsequência $\{x_{j_k}\} \subset \{x_j\}$ e um arco $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $x_{j_k} \rightrightarrows x$. Portanto x é uma solução de Euler. □

5.2 Existência de Solução

Teorema 5.1. *Tome uma multifunção $F : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ não-vazia, compacta, convexa e cujo gráfico é fechado. Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ limitada tal que*

$$F(t,x) \subset (\gamma\|x\| + c(t))\overline{B}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) \in F(t, x(t)) & \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

possui solução.

Demonstração. Tome, arbitrariamente, uma seleção f de F. Do Corolário 5.1 existe uma solução de Euler x para o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)) & \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \\ x(a) = x_0. \end{cases}$$

Logo existe uma sequência de arcos poligonais de Euler $\{x_{\pi_j}\}$ cujo limite uniforme é x, sendo $\pi_j \in \mathcal{P}_{\delta_j}(\mathbb{T})$ e $\delta_j \downarrow 0$. Sem perda de generalidade reindexamos $\{x_{\pi_j}\}$ como $\{x_j\}$.

Suponha que $\pi_j = \{t_0^{(j)}, t_1^{(j)}, ..., t_{N(j)}^{(j)}\}$ e considere $t \in \mathbb{T}$. Se $t = b$ defina $\tau_j(b) = t_{N(j)-1}^{(j)}$ e se $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ defina $\tau_j(t) = t_i^{(j)}$, sendo $i \in \{0, 1, ..., N(j)-1\}$ tal que $t \in [t_i^{(j)}, t_{i+1}^{(j)})_{\mathbb{T}}$. Logo a função $\tau_j : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é Δ-mensurável.

Dado $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$, seja $i \in \{0,1,...,N(j)-1\}$ tal que $t \in [t_i^{(j)}, t_{i+1}^{(j)})_{\mathbb{T}}$. Se $\rho(t_{i+1}^{(j)}) = t_i^{(j)}$ segue que $t = t_i^{(j)} = \tau_j(t)$ e se $t_{i+1}^{(j)} - t_i^{(j)} \leq \delta_j$ temos que

$$| \tau_j(t) - t | = t - t_i^{(j)} < t_{i+1}^{(j)} - t_i^{(j)} \leq \delta_j \ .$$

Então $\tau_j(t) \to t$ para todo $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$.

Defina a função $y_j : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ como $y_j(t) = x_j(\tau_j(t)) - x_j(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$.

Da Proposição 5.1 existe $C > 0$ tal que a função x_j é de Lipschitz com constante C para cada j. Se $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ segue que

$$\|y_j(t)\| = \|x_j(\tau_j(t)) - x_j(t)\| \leq C \mid \tau_j(t) - t \mid \leq C\delta_j$$

e se $t = b$ temos que

$$\|y_j(b)\| \leq C \mid \tau_j(b) - b \mid = C \mid t_{N(j)-1}^{(j)} - b \mid \leq C(b-a).$$

Considere $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ tal que x_j é Δ-diferenciável em t. Tome $i \in \{0,1,...,N(j)-1\}$ tal que $t \in [t_i^{(j)}, t_{i+1}^{(j)})_{\mathbb{T}}$. Logo

$$\begin{aligned} x_j^{\Delta}(t) &= f(t_i^{(j)}, x_j(t_i^{(j)})) \in F(t_i^{(j)}, x_j(t_i^{(j)})) \\ &= F(\tau_j(t), x_j(\tau_j(t))) = F(\tau_j(t), x_j(t) + y_j(t)) \end{aligned}$$

e sendo $x_j(a) = x_0$, do Teorema 4.1 concluímos que existe $\{x_{j_m}\} \subset \{x_j\}$ e uma trajetória z de F tal que $x_{j_m} \rightrightarrows z$. Assim, como $x_{j_m} \rightrightarrows x$, concluímos que $z \equiv x$. □

Corolário 5.2. *Tome uma multifunção $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ não-vazia, compacta, convexa e semicontínua superior. Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0,+\infty)$ limitada tal que*

$$F(t,x) \subset (\gamma\|x\| + c(t))\overline{B}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) \in F(t,x(t)) & \Delta - q.t.p. \ \ t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

possui solução.

Demonstração. Ver observação após a Definição 2.10. □

Proposição 5.2. *Tome uma multifunção $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ não-vazia, convexa e fechada. Se F é semicontínua inferior então existe $b_1 \in \mathbb{T} \setminus \{a\}$ tal que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) \in F(t,x(t)) & \Delta - q.t.p. \ \ t \in [a,b_1)_{\mathbb{T}} \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

possui solução.

Demonstração. Do Teorema 2.4 existe uma seleção contínua $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de F.

Se $\sigma(a) > a$ tome $b_1 = \sigma(a)$. Defina o arco $x : [a, b_1]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ como $x(a) = x_0$ e $x(b_1) = \mu(a) f(a, x(a)) + x(a)$. Logo

$$x^{\Delta}(a) = \frac{x(\sigma(a)) - x(a)}{\mu(a)} = f(a, x(a))$$

e então

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)) \in F(t, x(t))$$

quando $t \in [a, b_1)_{\mathbb{T}} = a$.

Suponha que $\sigma(a) = a$. Fixado um número $L > 0$, como f é contínua existe $M > 1$ tal que

$$\|f(u, w)\| \leq M$$

quando $u \in \mathbb{T}$ e $\|w - x_0\| \leq L$. Tome $b_1 \in \mathbb{T}$ tal que $b_1 > a$ e $(b_1 - a)M \leq L$.

Considere o seguinte conjunto convexo

$$K := \{x \in C([a, b_1]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n) : x(a) = x_0 \text{ e sendo } x \text{ de Lipschitz com constante } M\}.$$

Se $x \in K$, para cada $t \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ temos

$$\|x(t)\| \leq M \mid t - a \mid + \|x_0\| \leq M(b_1 - a) + \|x_0\| \; .$$

Como K é equicontínuo, do Teorema 2.3 o conjunto K é compacto.

Defina a aplicação $T : K \to C([a, b_1]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ como

$$(T(x))(t) = x_0 + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f(\tau, x(\tau)) \Delta\tau$$

para cada $t \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ e $x \in K$.

Se $x \in K$, para todo $\tau \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ temos

$$\|x(\tau) - x_0\| \leq M \mid \tau - a \mid \leq M(b_1 - a) \leq L$$

e então $\|f(\tau, x(\tau))\| \leq M$. Assim, se $s, t \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ e $s > t$ segue que

$$\begin{aligned} \|(T(x))(s) - (T(x))(t)\| &= \|\int_{[a,s)_{\mathbb{T}}} f(\tau, x(\tau))\Delta\tau - \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f(\tau, x(\tau))\Delta\tau\| \\ &= \|\int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} f(\tau, x(\tau))\Delta\tau\| \leq \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} \|f(\tau, x(\tau))\|\Delta\tau \\ &\leq \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} M\Delta\tau = M(s - t). \end{aligned}$$

De modo análogo, se $s, t \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ e $s < t$ temos que

$$\|(T(x))(s) - (T(x))(t)\| \leq M(t-s)$$

e portanto $T(x) \in K$.

Se $D := \{w \in \mathbb{R}^n : \|w - x_0\| \leq L\}$ segue que f é uniformemente contínua em $\mathbb{T} \times D$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(u) - f(v)\| < \frac{\varepsilon}{b_1 - a}$$

quando $u, v \in \mathbb{T} \times D$ e $\|u - v\| < \delta$.

Tome $\overline{x} \in K$ arbitrariamente . Se $x \in K$ satisfaz

$$\|x - \overline{x}\|_\infty < \delta$$

para cada $s \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ temos

$$\begin{aligned}
\|(T(x))(s) - (T(\overline{x}))(s)\| &= \|x_0 + \int_{[a,s)_{\mathbb{T}}} f(\tau, x(\tau))\Delta\tau - x_0 - \int_{[a,s)_{\mathbb{T}}} f(\tau, \overline{x}(\tau))\Delta\tau\| \\
&= \|\int_{[a,s)_{\mathbb{T}}} \{f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \overline{x}(\tau))\}\Delta\tau\| \\
&\leq \int_{[a,s)_{\mathbb{T}}} \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \overline{x}(\tau))\|\Delta\tau \\
&\leq \int_{[a,s)_{\mathbb{T}}} \frac{\varepsilon}{b_1 - a}\Delta\tau \leq \int_{[a,b_1)_{\mathbb{T}}} \frac{\varepsilon}{b_1 - a}\Delta\tau = \varepsilon
\end{aligned}$$

e então $\|T(x) - T(\overline{x})\|_\infty \leq \varepsilon$. Portanto T é contínua em $\overline{x}$.

Do Teorema do Ponto Fixo de Schauder [5] existe $x_* \in K$ tal que $T(x_*) = x_*$.

Se $x \in K$, defina o arco $z : [a, b_1]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ como

$$z(s) = x_0 + \int_{[a,s)_{\mathbb{T}}} f(\tau, x(\tau))\Delta\tau$$

para cada $s \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$.

Para todo $t \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ temos

$$z(t) = z(a) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} z^\Delta(\tau)\Delta\tau \ .$$

Como $z(a) = x_0$, para cada $t \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ segue que

$$\int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} z^\Delta(\tau)\Delta\tau = \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} f(\tau, x(\tau))\Delta\tau \ .$$

Assim, se para cada $s \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ a função $g \in L_1([a, b_1)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ é definida como

$$g(s) = z^{\Delta}(s) - f(s, x(s))$$

temos que

$$\int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(\tau)\Delta\tau = 0$$

para todo $t \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$.

Tome $c, d \in [a, b_1]_{\mathbb{T}}$ tal que $c < d$. Logo

$$\int_{[c,d)_{\mathbb{T}}} g(\tau)\Delta\tau = \int_{[a,d)_{\mathbb{T}}} g(\tau)\Delta\tau - \int_{[a,c)_{\mathbb{T}}} g(\tau)\Delta\tau = 0$$

e da Proposição 3.4 concluímos que

$$g(t) = z^{\Delta}(t) - f(t, x(t)) = 0 \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b_1)_{\mathbb{T}}$$

isto é,

$$z^{\Delta}(t) = f(t, x(t)) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b_1)_{\mathbb{T}} \; .$$

Portanto

$$\begin{cases} x_*^{\Delta}(t) = f(t, x_*(t)) \in F(t, x_*(t)) & \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b_1)_{\mathbb{T}} \\ x_*(a) = x_0 \; . \end{cases}$$

□

5.3 Um Problema de Controle Ótimo

Nesta seção, fazemos uma breve discussão sobre uma das questões teóricas de maior relevância na teoria do controle: sob quais condições o problema de controle ótimo em escalas temporais possui solução ótima? O problema em questão é formulado sob o paradigma de inclusão dinâmica em escalas temporais.

A resposta a essa questão, como veremos a seguir, é consequência imediata da compacidade das trajetórias para inclusões dinâmicas em escalas temporais.

Seja $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferior e $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção. Considere o problema de controle ótimo

$$(P) \begin{cases} \min g(x(a), x(b)) \;\; \text{sobre} \;\; x \in AC([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n) \\ x^{\Delta}(t) \in F(t, x(t)) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \\ (x(a), x(b)) \in A \times B \end{cases}$$

sendo $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 5.3. *Dizemos que $x \in AC([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ é uma trajetória admissível do problema (P), se x é uma trajetória de F que satisfaz as condições de fronteira $(x(a), x(b)) \in A \times B$. Denotamos tal trajetória por $x \in (P)$.*

Definição 5.4. *Uma função $\overline{x} \in AC([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ é uma trajetória ótima do problema (P), se toda trajetória admissível x de (P) satisfizer*

$$g(\overline{x}(a), \overline{x}(b)) \leq g(x(a), x(b)) \ .$$

Teorema 5.2. *Seja F uma multifunção não-vazia, compacta, convexa e $\Delta \times \mathcal{B}^n$-mensurável. Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ em $L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$ tal que*

$$F(t,x) \subset (\gamma \|x\| + c(t))\overline{B}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Suponha que $\Delta - q.t.p.$ $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ a multifunção $F(t,.) : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ possui o gráfico fechado.

Suponha que A é um conjunto compacto e B é um conjunto fechado. Se o problema (P) possui uma trajetória admissível então existe uma trajetória ótima.

Demonstração. Seja $\{x_i\}$ uma sequência de trajetórias admissíveis satisfazendo

$$\lim g(x_i(a), x_i(b)) = \inf\{g(x(a), x(b)) : x \in (P)\} := I_P \ .$$

Do Teorema 4.2 existe $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}$ e uma trajetória $\overline{x}$ de F tal que $x_{i_k} \rightrightarrows \overline{x}$. Como $A \times B$ é um conjunto fechado, temos que $(\overline{x}(a), \overline{x}(b)) \in A \times B$. Logo $\overline{x}$ é uma trajetória admissível.

Sendo

$$I_P = \lim g(x_i(a), x_i(b)) = \liminf g(x_{i_k}(a), x_{i_k}(b)) \geq g(\overline{x}(a), \overline{x}(b)) \geq I_P$$

concluímos que $\overline{x}$ é uma trajetória ótima do problema (P). □

Lema 5.2. *Tome uma multifunção $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ não-vazia, compacta, convexa e cujo gráfico é fechado. Considere uma função $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ limitada tal que*

$$F(t,x) \subset (\gamma \|x\| + c(t))\overline{B}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$, sendo $\gamma > 0$. Suponha que A é um conjunto compacto e $B = \mathbb{R}^n$. Então o problema (P) possui uma trajetória ótima.

Demonstração. Do Teorema 5.1 o problema (P) possui uma trajetória admissível.

Considere uma sequência $\{x_i\}$ de trajetórias admissíveis satisfazendo

$$\lim g(x_i(a), x_i(b)) = \inf\{g(x(a), x(b)) : x \in (P)\} := I_P \ .$$

Do Teorema 4.1 existe $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}$ e uma trajetória $\overline{x}$ de F tal que $x_{i_k} \rightrightarrows \overline{x}$. Como $A \times B$ é um conjunto fechado, segue que $(\overline{x}(a), \overline{x}(b)) \in A \times B$. Assim, $\overline{x}$ é uma trajetória admissível.

Temos que

$$I_P = \lim g(x_i(a), x_i(b)) = \liminf g(x_{i_k}(a), x_{i_k}(b)) \geq g(\overline{x}(a), \overline{x}(b)) \geq I_P$$

e concluímos que $\overline{x}$ é uma trajetória ótima do problema (P).

□

5.4 Lema de Filippov

Em tempo contínuo, o problema central no estudo das inclusões diferenciais é a seleção de uma função satisfazendo determinadas propriedades que o problema ou aplicação necessita. Quanto mais regularidade é exigida da seleção, mais regularidade deve ser imposta na multifunção que dá origem à inclusão diferencial. Quando a motivação do estudo de inclusões diferenciais é a teoria do controle, as principais hipóteses requeridas para as multifunções são mensurabilidade com relação ao tempo e uma condição de Lipschitz ou semicontinuidade com relação a segunda variável, que é a variável de estado do sistema.

No Teorema 5.3, generalizamos um resultado clássico de seleção mensurável de grande importância na teoria do controle ótimo. Assim, provamos que é possível obter uma seleção Δ-mensurável do campo vetorial da inclusão dinâmica em escalas temporais exigindo as hipóteses usuais do caso contínuo [21].

Considere a seguinte restrição dinâmica

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \\ u(t) \in U(t) \;\; \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \; . \end{cases} \tag{5.2}$$

Se um par (x, u) satisfaz a restrição (5.2) também satisfaz a seguinte dinâmica

$$x^{\Delta}(t) \in \{f(t, x(t), u) : u \in U(t)\} \quad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \; . \tag{5.3}$$

No Teorema 5.3 provaremos a afirmação inversa. Isto é, se um arco $x \in AC([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ satisfaz (5.3) então satisfaz (5.2).

Definição 5.5. *Tome uma função $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que ϕ é uma Δ-função de Carathéodory se satisfizer as seguintes propriedades:*

(i) para cada $t \in \mathbb{T}$ a função $x \mapsto \phi(t, x)$ é contínua.

(ii) para cada $x \in \mathbb{R}^m$ a função $t \mapsto \phi(t, x)$ é Δ-mensurável.

Lema 5.3 ([29]). *Seja $\phi : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma $\mathcal{L}$-função de Carathéodory. Então ϕ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$-mensurável.*

Definição 5.6. *Considere uma função $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Definimos a função $\tilde{\phi} : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ como*

$$\tilde{\phi}(t,u) = \begin{cases} \phi(t,u), & t \in \mathbb{T} \\ \phi(t_i,u), & t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I \ . \end{cases}$$

Lema 5.4. *Seja $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma Δ-função de Carathéodory. Então $\tilde{\phi}$ é uma $\mathcal{L}$-função de Carathéodory.*

Demonstração. Se $t \in \mathbb{T}$ então a função $x \mapsto \tilde{\phi}(t,x) = \phi(t,x)$ é contínua por hipótese.

Se $t \in [a,b] \setminus \mathbb{T}$ seja $i \in I$ tal que $t \in (t_i, \sigma(t_i))$. Assim, para cada $u \in \mathbb{R}^m$ temos que $\tilde{\phi}(t,u) = \phi(t_i,u)$. Portanto a função

$$x \mapsto \tilde{\phi}(t,x) = \phi(t_i,x)$$

é contínua.

Tome $x \in \mathbb{R}^m$ arbitrariamente. Se para cada $t \in \mathbb{T}$ a função $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é definida como

$$\psi(t) = \phi(t,x)$$

do Corolário 3.2 temos que a função $\tilde{\psi} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{L}$-mensurável.

Sendo

$$\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t) = \phi(t,x), & t \in \mathbb{T} \\ \psi(t_i) = \phi(t_i,x), & t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I \end{cases}$$

temos que $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\phi}(t,x)$ e então a função

$$t \mapsto \tilde{\phi}(t,x) = \tilde{\psi}(t)$$

é $\mathcal{L}$-mensurável. Portanto $\tilde{\phi}$ é uma $\mathcal{L}$-função de Carathéodory. $\square$

Definição 5.7. *Tome uma multifunção $U : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$. Definimos a multifunção $\tilde{U} : [a,b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ como*

$$\tilde{U}(t) = \begin{cases} U(t), & t \in \mathbb{T} \\ U(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I \ . \end{cases}$$

Lema 5.5. *Seja $U : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ uma multifunção Δ-mensurável. Então a multifunção $\tilde{U} : [a,b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é $\mathcal{L}$-mensurável.*

Demonstração. Tome um conjunto compacto $V \subset \mathbb{R}^m$. Se para cada $i \in I$ definirmos os conjuntos Ω_i como

$$\Omega_i = \begin{cases} (t_i, \sigma(t_i)), & se \;\; U(t_i) \cap V \neq \emptyset \\ \emptyset, & se \;\; U(t_i) \cap V = \emptyset \end{cases}$$

temos que

$$\begin{aligned} (\tilde{U})^{-1}(V) &= \{t \in [a,b] : \tilde{U}(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in \mathbb{T} : U(t) \cap V \neq \emptyset\} \bigcup \left[\cup_{i \in I} \Omega_i \right] = U^{-1}(V) \bigcup \left[\cup_{i \in I} \Omega_i \right]. \end{aligned}$$

Como $U^{-1}(V)$ é Δ-mensurável, da Proposição 7.1 segue que $U^{-1}(V)$ é $\mathcal{L}$-mensurável. Temos também que Ω_i é $\mathcal{L}$-mensurável para cada $i \in I$. Portanto $(\tilde{U})^{-1}(V)$ é $\mathcal{L}$-mensurável e concluímos a demonstração. □

Teorema 5.3. *Seja $U : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ uma multifunção não-vazia, fechada e Δ-mensurável. Considere uma função $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua em (x, u) para cada t fixado, e Δ-mensurável em t para cada (x, u) fixado.*

Se $x \in AC([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ satisfaz (5.3) então existe uma seleção Δ-mensurável u de U que satisfaz (5.2).

Demonstração. Seja $u \in \mathbb{R}^m$ fixado arbitrariamente. Então a função $\varphi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t, x) = f(t, x, u)$$

é uma Δ-função de Carathéodory.

Do Lema 5.4 a função $\tilde{\varphi} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma $\mathcal{L}$-função de Carathéodory. Assim, do Lema 5.3 a função $\tilde{\varphi}$ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$-mensurável.

Sendo x uma função Δ-mensurável, do Corolário 3.2 a função $\tilde{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{L}$-mensurável. Logo, da Proposição 3.6 a função

$$t \mapsto \tilde{\varphi}(t, \tilde{x}(t))$$

é $\mathcal{L}$-mensurável.

Defina a função $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ como

$$g(t) = f(t, x(t), u).$$

Sendo

$$\tilde{\varphi}(t, \tilde{x}(t)) = \begin{cases} \varphi(t, \tilde{x}(t)) = \varphi(t, x(t)) = f(t, x(t), u), \; t \in \mathbb{T} \\ \varphi(t_i, \tilde{x}(t)) = \varphi(t_i, x(t_i)) = f(t_i, x(t_i), u), \;\; t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I \end{cases}$$

temos que $\tilde{\varphi}(t, \tilde{x}(t)) = \tilde{g}(t)$. Assim, a função

$$t \mapsto \tilde{g}(t)$$

é $\mathcal{L}$-mensurável.

Seja $m : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a função definida como

$$m(t, u) = \begin{cases} f(t, x(t), u), \ t \in \mathbb{T} \\ f(t_i, x(t_i), u), \ \ t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I \ . \end{cases}$$

Para cada $u \in \mathbb{R}^m$ já provamos que a função

$$t \mapsto m(t, u)$$

é $\mathcal{L}$-mensurável. Além disso, se $t \in \mathbb{T}$ então a função

$$u \mapsto m(t, u) = f(t, x(t), u)$$

é contínua. Por outro lado, se $t \in [a, b] \setminus \mathbb{T}$ seja $i \in I$ tal que $t \in (t_i, \sigma(t_i))$, logo a função

$$u \mapsto m(t, u) = f(t_i, x(t_i), u)$$

é contínua.

Como x é um arco, a função $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ definida como

$$h(s) = x^{\Delta}(s)$$

é Δ-mensurável. Logo, a função $\tilde{h} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{L}$-mensurável. Assim, a função $\phi : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(t, u) = m(t, u) - \tilde{h}(t)$$

é uma $\mathcal{L}$-função de Carathéodory.

Defina a multifunção $\Phi : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ como

$$\Phi(t) = \{u \in \mathbb{R}^m : \phi(t, u) = 0\}$$

para cada $t \in [a, b]$.

Para cada $t \in [a, b]$ a função

$$u \mapsto \phi(t, u)$$

é contínua. Assim, se $\Phi(t) \neq \emptyset$ então $\Phi(t)$ é um conjunto fechado.

Do Lema 5.3 temos que ϕ é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$-mensurável. Logo, o conjunto

$$\begin{aligned} Gr\Phi &= \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}^m : u \in \Phi(t)\} \\ &= \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}^m : \phi(t, u) = 0\} = \phi^{-1}(\{0\}) \end{aligned}$$

é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$-mensurável. Do Teorema 2.6 a multifunção Φ é $\mathcal{L}$-mensurável.

Como a multifunção $\tilde{U} : [a,b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é $\mathcal{L}$-mensurável, do Corolário 2.3 a multifunção $\Gamma : [a,b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$\Gamma(t) = \tilde{U}(t) \cap \Phi(t)$$

é $\mathcal{L}$-mensurável.

Considere os seguintes conjuntos

$$\mathcal{K} = \{t \in [a,b)_{\mathbb{T}} : (5.3) \text{ vale}\}$$

e

$$\mathcal{W} = \{t \in [a,b)_{\mathbb{T}} : U(t) \cap \Phi(t) \neq \emptyset\}.$$

Se $t \in \mathcal{K}$, existe $u_t \in U(t)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= f(t,x(t),u_t) - x^{\Delta}(t) \\ &= f(t,x(t),u_t) - h(t) = m(t,u_t) - \tilde{h}(t) = \phi(t,u_t) \end{aligned}$$

e então $u_t \in U(t) \cap \Phi(t)$. Logo, $t \in \mathcal{W}$ e portanto $\mathcal{K} \subset \mathcal{W}$.

No entanto, se $t \in \mathcal{W}$ existe $u_t \in U(t)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(t,u_t) = m(t,u_t) - \tilde{h}(t) \\ &= f(t,x(t),u_t) - h(t) = f(t,x(t),u_t) - x^{\Delta}(t) \end{aligned}$$

isto é,

$$x^{\Delta}(t) = f(t,x(t),u_t)$$

e então $t \in \mathcal{K}$. Concluímos que $\mathcal{W} = \mathcal{K}$.

Assim, o conjunto E dado por

$$E = \{t \in [a,b)_{\mathbb{T}} : U(t) \cap \Phi(t) = \emptyset\}$$

satisfaz

$$E = [a,b)_{\mathbb{T}} \setminus \mathcal{W} = [a,b)_{\mathbb{T}} \setminus \mathcal{K} \ .$$

Portanto

$$m^*(E) = m^*([a,b)_{\mathbb{T}} \setminus \mathcal{K}) = 0 \ .$$

Se definirmos a multifunção $\Lambda : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ como

$$\Lambda(t) = \begin{cases} U(t), \ t \in E \cup \{b\} \\ U(t) \cap \Phi(t) = \Gamma(t), \quad t \in \mathbb{T} \setminus \big\{E \cup \{b\}\big\} \end{cases}$$

então Λ é não-vazia e fechada.

Se $V \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto compacto, temos que

$$\Lambda^{-1}(V) = \{t \in \mathbb{T} : \Lambda(t) \cap V \neq \emptyset\}$$

$= \{t \in E \cup \{b\} : U(t) \cap V \neq \emptyset\} \bigcup \{t \in \mathbb{T} \setminus \big\{E \cup \{b\}\big\} : \big[U(t) \cap \Phi(t)\big] \cap V \neq \emptyset\}$
$= \big[\{t \in \mathbb{T} : U(t) \cap V \neq \emptyset\} \cap (E \cup \{b\})\big] \bigcup \big[\{t \in [a,b] : \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \cap \big(\mathbb{T} \setminus \big\{E \cup \{b\}\big\}\big)\big]$
$= \big[U^{-1}(V) \cap (E \cup \{b\})\big] \bigcup \big[\Gamma^{-1}(V) \cap \big(\mathbb{T} \setminus \big\{E \cup \{b\}\big\}\big)\big]$.

Como U é Δ-mensurável segue que $U^{-1}(V) \in \Delta$. Temos também que os conjuntos

$$E \cup \{b\},\ \mathbb{T} \setminus \big\{E \cup \{b\}\big\}$$

são Δ-mensuráveis. Como $\Gamma^{-1}(V) \in \mathcal{L}$, da Proposição 7.1 temos que $\Lambda^{-1}(V) \in \mathcal{L}$. Usando novamente a Proposição 7.1 concluímos que $\Lambda^{-1}(V) \in \Delta$. Portanto Λ é Δ-mensurável.

Do Teorema 2.5 a multifunção Λ admite uma seleção Δ-mensurável $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^m$. Logo, $u(t) \in U(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$ e então u também é uma seleção de U.

Se $t \in [a,b)_{\mathbb{T}} \setminus E$ temos que $u(t) \in U(t) \cap \Phi(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(t,u(t)) = m(t,u(t)) - \tilde{h}(t) = f(t,x(t),u(t)) - h(t) \\ &= f(t,x(t),u(t)) - x^{\Delta}(t) \end{aligned}$$

isto é,

$$x^{\Delta}(t) = f(t,x(t),u(t)).$$

Portanto

$$x^{\Delta}(t) = f(t,x(t),u(t)) \qquad \Delta - q.t.p. \;\; t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$$

já que $m^*(E) = 0$. Então (x,u) satisfaz a restrição dinâmica (5.2). $\square$

Capítulo 6

Considerações Finais

Esta tese contribuiu de várias formas para o avanço do conhecimento em escalas temporais. Por um lado, organiza num só texto a teoria da medida em escalas de tempo e extendeu a Δ-mensurabilidade, até então tratada apenas para o caso real, para campos vetoriais dados por funções e multifunções. Por outro lado, utilizando esta teoria, prova a compacidade das trajetórias de inclusões dinâmicas vetoriais sob hipóteses usuais utilizadas no caso contínuo, o que foi desenvolvido no Capítulo 4.

No Capítulo 5, provamos no Teorema 5.1 que é possível obter soluções de inclusões dinâmicas em escalas temporais para sistemas cuja variável de estado é vetorial. Este resultado é consequência da compacidade das trajetórias obtida no Capítulo 4 e da existência de solução de Euler, introduzida para escalas temporais no início do Capítulo 5.

Provamos também a existência de soluções para inclusões dinâmicas vetoriais sob a hipótese de que a multifunção que define o campo vetorial seja semicontínua inferior. Esta não é uma hipótese usual, mas serve ao propósito de justificar a existência de pelo menos uma solução da inclusão dinâmica.

Assim como no caso clássico [29] e [37], no Teorema 5.2 mostramos que a propriedade de compacidade de trajetórias também pode ser utilizada para a obtenção de soluções para problemas de controle ótimo no paradigma de inclusões dinâmicas.

Em [17], a propriedade de compacidade das trajetórias é usada para obter condições necessárias a otimalidade para problemas de controle ótimo no paradigma de inclusões diferencias. Assim, o Teorema 4.2 justifica a investigação de condições necessárias a otimalidade para problemas de controle ótimo no paradigma de inclusões dinâmicas.

No caso clássico [37], o Lema de Filippov é usado na obtenção de condições necessárias a otimalidade para problemas de controle ótimo padrão.

Nos trabalhos de controle ótimo em escalas temporais [26], [28], [30], inclusões dinâmicas em escalas temporais não são exploradas. Portanto, acreditamos que o Lema de Filippov em escalas temporais também justifica a busca por condições necessárias a otimalidade para problemas de controle ótimo no paradigma de inclusões dinâmicas. Isto abre um campo para ser explorado.

Para concluir, destacamos a observação de que a existência de trajetória para uma inclusão dinâmica corresponde à controlabilidade do sistema de controle que é definido pela inclusão dinâmica.

Capítulo 7

Apêndice: Δ-Integral de Lebesgue

Neste capítulo, provamos resultados básicos da teoria de medida específicos para a medida delta.

Os diversos conceitos e resultados citados neste capítulo trazem como referência [6], [12], [13], [23], [32] e [33].

Utilizamos as operações algébricas entre os símbolos $\pm\infty$ e elementos de $\mathbb{R}$ consideradas em [6].

Usamos uma escala temporal $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{T}}$, sendo $a, b \in \mathbb{T}$ e $a < b$.

7.1 Álgebras de Conjuntos

Definição 7.1. *Seja Γ uma coleção de subconjuntos de um conjunto X. Diz-se que Γ é uma álgebra de conjuntos se satisfizer as seguintes propriedades:*
(i) $A, B \in \Gamma \Longrightarrow A \cup B \in \Gamma$ *;*
(ii) $A \in \Gamma \Longrightarrow A^c \in \Gamma$ *.*

Observação Das leis de De Morgan segue que $A \cap B \in \Gamma$ quando $A, B \in \Gamma$.

Lema 7.1. *Se $A, B \in \Gamma$ então $B \setminus A \in \Gamma$.*

Demonstração. Temos que $B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = B \cap \{A \cap B\}^c \in \Gamma$. $\square$

Definição 7.2. *Seja Γ uma álgebra de conjuntos de X. Diz-se que Γ é uma σ-álgebra se satisfizer as seguintes condições:*
(i) $\emptyset$, $X \in \Gamma$.
(ii) para cada sequência $\{A_i\}$ de conjuntos em Γ tem-se

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \Gamma.$$

Observação Se Γ é uma σ-álgebra, das leis de De Morgan segue que $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \Gamma$ quando $A_i \in \Gamma$ para todo $i \geq 1$.

7.2 Medida Exterior

Considere a escala temporal $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{T}}$.

Denote por $\mathfrak{F}$ a coleção de subintervalos de $\mathbb{T}$ da forma $[\tilde{a}, \tilde{b})_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : \tilde{a} \leq t < \tilde{b}\}$, sendo $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{T}$. O intervalo $[\tilde{a}, \tilde{a})_{\mathbb{T}}$ é entendido como o conjunto vazio.

Seja $E \subset \mathbb{T}$ um subconjunto qualquer. Se existe pelo menos uma sequência de intervalos $[a_j, b_j)_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{F}$ tal que $E \subset \bigcup_j [a_j, b_j)_{\mathbb{T}}$, define-se a medida exterior de E como

$$m^*(E) = \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k) : E \subset \bigcup_k [a_k, b_k)_{\mathbb{T}} \ , \ [a_k, b_k)_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{F} \Big\} \ .$$

Se não existir uma tal cobertura de E define-se $m^*(E) = +\infty$.

Observação Convencionamos que $m^*(\emptyset) = 0$.

Observação Denotaremos a medida exterior em $\mathbb{R}$ por λ^* .

Lema 7.2. *Dado um conjunto $E \subset \mathbb{T}$, não existe cobertura de E por intervalos de $\mathfrak{F}$ se, e somente se, $b \in E$.*

Demonstração. Se não existe cobertura de E por intervalos de $\mathfrak{F}$ então $b \in E$, pois se $b \notin E$ então $E \subset [a, b)_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{F}$.

Se $b \in E$ e $[a_j, b_j)_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{F}$ temos que $b \notin [a_j, b_j)_{\mathbb{T}}$. Portanto não existe cobertura de E por intervalos de $\mathfrak{F}$. □

Lema 7.3. *Se $A \subset B \subset \mathbb{T}$ então $m^*(A) \leq m^*(B)$.*

Demonstração. O resultado é trivial quando $A = \emptyset$.

Se $b \in A$ então $m^*(A) = m^*(B) = +\infty$ e se $b \in B$ segue que

$$m^*(B) = +\infty \geq m^*(A).$$

Suponha que $b \notin B$. Seja $[a_j, b_j)_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{F}$ uma sequência de intervalos tal que $B \subset \bigcup_j [a_j, b_j)_{\mathbb{T}}$. Como $A \subset B$ temos que

$$m^*(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} (b_j - a_j)$$

e portanto $m^*(A) \leq m^*(B)$. □

Lema 7.4. *Se* $\{A_n\}$ *é uma sequência de subconjuntos de* $\mathbb{T}$ *então*

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) \ .$$

Demonstração. Se $b \in A_j$ para algum j então

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = +\infty = m^*(A_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) \ .$$

Assim, podemos supor que $b \notin A_j$ para todo $j \geq 1$.

Suponha inicialmente que $A_j \neq \emptyset$ para todo j.

Seja $\varepsilon > 0$ fixado arbitrariamente. Para cada $n \geq 1$ tome uma sequência $\{[a_i^{(n)}, b_i^{(n)})_{\mathbb{T}}\}$ em $\mathfrak{F}$ tal que

$$A_n \subset \bigcup_i [a_i^{(n)}, b_i^{(n)})_{\mathbb{T}}$$

e

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) < m^*(A_n) + \varepsilon/2^n.$$

Como

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{+\infty} [a_i^{(n)}, b_i^{(n)})_{\mathbb{T}}$$

segue que

$$\begin{aligned} m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} (b_i^{(n)} - a_i^{(n)}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon/2^n = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Sendo ε arbitrário concluímos que

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) \ .$$

Se $J = \{j : A_j \neq \emptyset\}$ segue que

$$m^*(\bigcup_{j \in J} A_j) \leq \sum_{j \in J} m^*(A_j) \ .$$

Para cada $j \notin J$ temos $A_j = \emptyset$ e então

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = m^*(\bigcup_{j \in J} A_j) \leq \sum_{j \in J} m^*(A_j) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n).$$

$\square$

Lema 7.5 ([23])**.** *Se $c, d \in \mathbb{T}$ e $c < d$ então*

$$m^*([c,d)_{\mathbb{T}}) = d - c.$$

Lema 7.6 ([13])**.** *Se $E \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$ então*

$$m^*(E) = \sum_{i \in I_E} (\sigma(t_i) - t_i) + \lambda^*(E).$$

Corolário 7.1. *Seja $E \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$. Se $m^*(E) = \lambda^*(E)$ então $E \cap RS = \emptyset$.*

Lema 7.7. *Seja $E \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$ tal que $E \subset \{t \in \mathbb{T} : \sigma(t) = t\}$. Então*

$$m^*(E) = \lambda^*(E).$$

Demonstração. Considere sequências de intervalos $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)})_{\mathbb{T}}$ em $\mathfrak{F}$ tal que

$$E \subset \bigcup_j [a_j^{(i)}, b_j^{(i)})_{\mathbb{T}}$$

e

$$m^*(E) = \lim_i \sum_{j=1}^{+\infty} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}).$$

Para cada j temos que $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \cap \mathbb{T} \subset [a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$, logo

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}) \geq \lambda^*(E)$$

e então $m^*(E) \geq \lambda^*(E)$.

Tome sequências de intervalos $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$E \subset \bigcup_j [a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$$

e

$$\lambda^*(E) = \lim_i \sum_{j=1}^{+\infty} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}).$$

Se $L_i = \{j : [a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \cap [a,b) = \emptyset\}$ temos que

$$E \subset \bigcup_{j \notin L_i} [a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$$

e

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{j \notin L_i} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}).$$

Se para cada $j \notin L_i$ definirmos $[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}) = [a,b) \cap [a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$ segue que

$$E \subset \bigcup_{j \notin L_i} [c_j^{(i)}, d_j^{(i)})$$

e então

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{j \notin L_i} (d_j^{(i)} - c_j^{(i)}) \leq \sum_{j \notin L_i} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}).$$

Assim, podemos supor que $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \subset [a,b)$ para todo j. Além disso, se

$$J_i = \{j : [a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \cap E = \emptyset\}$$

segue que

$$E \subset \bigcup_{j \notin J_i} [a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$$

e então

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{j \notin J_i} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}).$$

Assim, podemos supor também que $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \cap E \neq \emptyset$ para todo j.

Se

$$I_j^{(i)} = \inf\{t : t \in E \cap [a_j^{(i)}, b_j^{(i)})\}$$

temos que $I_j^{(i)} \in \mathbb{T}$ e $I_j^{(i)} \geq a_j^{(i)}$. De modo análogo, se

$$S_j^{(i)} = \sup\{t : t \in E \cap [a_j^{(i)}, b_j^{(i)})\}$$

segue que $S_j^{(i)} \in \mathbb{T}$ e $S_j^{(i)} \leq b_j^{(i)}$.

Se $b_j^{(i)} \in \mathbb{T}$ para algum j, defina

$$\begin{pmatrix} c_j^{(i)} \\ d_j^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_j^{(i)} \\ b_j^{(i)} \end{pmatrix}$$

e então

$$[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \cap E \subset [c_j^{(i)}, d_j^{(i)}) \cap \mathbb{T}.$$

Suponha que $b_j^{(i)} \notin \mathbb{T}$ para algum j. Se $S_j^{(i)} \notin E$, defina

$$\begin{pmatrix} c_j^{(i)} \\ d_j^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_j^{(i)} \\ S_j^{(i)} \end{pmatrix}$$

e obtenha

$$[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \cap E \subset [c_j^{(i)}, d_j^{(i)}) \cap \mathbb{T}.$$

No entanto, se $S_j^{(i)} \in E \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$ segue que $S_j^{(i)} < b_j^{(i)}$, já que $b_j^{(i)} \notin \mathbb{T}$.

Como $\sigma(S_j^{(i)}) = S_j^{(i)}$ podemos escolher $d_j^{(i)} \in \mathbb{T}$ tal que $d_j^{(i)} \in (S_j^{(i)}, b_j^{(i)})$. Novamente definimos $c_j^{(i)} = I_j^{(i)}$ e concluímos que

$$[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \cap E \subset [c_j^{(i)}, d_j^{(i)}) \cap \mathbb{T}.$$

Em todos os casos temos que $[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}] \subset [a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$, logo $d_j^{(i)} - c_j^{(i)} \leq b_j^{(i)} - a_j^{(i)}$. Além disso, como

$$E \subset \bigcup_j [a_j^{(i)}, b_j^{(i)}) \cap E \subset \bigcup_j [c_j^{(i)}, d_j^{(i)}) \cap \mathbb{T}$$

segue que

$$m^*(E) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} (d_j^{(i)} - c_j^{(i)}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} (b_j^{(i)} - a_j^{(i)}) \ .$$

Então $m^*(E) \leq \lambda^*(E)$ e portanto $m^*(E) = \lambda^*(E)$. □

7.3 Conjuntos Mensuráveis

Definição 7.3. *Um conjunto $E \subset \mathbb{T}$ é chamado de Δ-mensurável (Lebesgue Δ-mensurável) se*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E))$$

para cada conjunto $A \subset \mathbb{T}$.

Observação Como $A \subset (A \cap E) \cup (A \cap (\mathbb{T} \setminus E))$ segue que E é Δ-mensurável se, e somente se,

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E))$$

para cada conjunto $A \subset \mathbb{T}$.

Observação Como $m^*(\emptyset) = 0$ temos que $\emptyset$ e $\mathbb{T}$ são Δ-mensuráveis.

Lema 7.8. *Se $E \subset \mathbb{T}$ e $m^*(E) = 0$ então E é Δ-mensurável.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{T}$ um conjunto qualquer. Como $A \cap E \subset E$ segue que $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$, isto é, $m^*(A \cap E) = 0$. Além disso, como $A \cap (\mathbb{T} \setminus E) \subset A$ temos que

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E)) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E))$$

e portanto E é Δ-mensurável. □

Proposição 7.1 ([13])**.** *Tome $E \subset \mathbb{T}$. Então E é Δ-mensurável se, e somente se, E é Lebesgue mensurável.*

Corolário 7.2. *A família Δ de conjuntos Δ-mensuráveis é uma σ-álgebra em $\mathbb{T}$.*

Lema 7.9. *Sejam $E_1, E_2, ..., E_r \in \Delta$ conjuntos disjuntos e $A \subset \mathbb{T}$ um conjunto qualquer. Então*

$$m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{r} E_i]) = \sum_{i=1}^{r} m^*(A \cap E_i).$$

Demonstração. Provaremos o lema por indução sobre r. Claramente o resultado é válido para $r = 1$.

Suponha que o lema seja válido para $n \in \{1, ..., r-1\}$. Como os conjuntos $E_1, E_2, ..., E_{n+1}$ são disjuntos, temos que

$$A \cap [\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i] \cap E_{n+1} = \big\{[A \cap E_1] \cup ... \cup [A \cap E_{n+1}]\big\} \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1}$$

e

$$A \cap [\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i] \cap (\mathbb{T} \setminus E_{n+1}) = A \cap [\bigcup_{i=1}^{n} E_i].$$

Como E_{n+1} é Δ-mensurável segue que

$$\begin{aligned} m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i]) &= m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i] \cap E_{n+1}) + m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i] \cap (\mathbb{T} \setminus E_{n+1})) \\ &= m^*(A \cap E_{n+1}) + m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n} E_i]) \\ &= m^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n+1} m^*(A \cap E_i) \end{aligned}$$

e o lema está provado. □

Lema 7.10. *Seja $\{E_i\}$ uma sequência de conjuntos Δ-mensuráveis disjuntos. Então*

$$m^*(\bigcup_i E_i) = \sum_i m^*(E_i).$$

Demonstração. Considere o conjunto E dado por

$$E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \ .$$

Seja $A \subset \mathbb{T}$ um conjunto qualquer e defina $F_n = \cup_{i=1}^{n} E_i$. Então F_n é Δ-mensurável e $\mathbb{T} \setminus E \subset \mathbb{T} \setminus F_n$. Logo

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus F_n)) \geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E)).$$

Do Lema 7.9 segue que

$$m^*(A \cap F_n) = m^*(A \cap [\bigcup_{i=1}^{n} E_i]) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

e então

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E)).$$

Como a desigualdade anterior independe de n, concluímos que

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E)) \\ &\geq m^*(\bigcup_i (A \cap E_i)) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E)) \\ &= m^*(A \cap (\bigcup_i E_i)) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E)) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E)). \end{aligned}$$

Tomando $A = E$ o lema está provado. □

7.4 Medida de Lebesgue

Definição 7.4. *Seja $\mathbb{X}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de um conjunto X. Uma medida é uma função $\mu : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ que safisfaz as seguintes propriedades:*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$.
(ii) $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathbb{X}$.
(iii) para toda sequência disjunta de conjuntos $\{E_n\}$ em $\mathbb{X}$ tem-se

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

Definição 7.5. *A medida $m^* : \Delta \to [0, +\infty]$ é chamada de Δ-medida de Lebesgue e denotada por $m^* \equiv \mu_\Delta$.*

Lema 7.11. *Sejam $A, B \in \Delta$ tal que $A \subset B$ e $A \subset \mathbb{T} \setminus \{b\}$. Então*

$$\mu_\Delta(B \setminus A) = \mu_\Delta(B) - \mu_\Delta(A).$$

Demonstração. Como $B = \{B \setminus A\} \cup A$ e $\{B \setminus A\} \cap A = \emptyset$ temos que

$$\mu_\Delta(B) = \mu_\Delta(\{B \setminus A\} \cup A) = \mu_\Delta(B \setminus A) + \mu_\Delta(A)$$

e obtemos o resultado. □

Lema 7.12. *Tome $A, B \in \Delta$ tal que $A \subset \mathbb{T} \setminus \{b\}$. Então*

$$\mu_\Delta(A \cup B) = \mu_\Delta(A) + \mu_\Delta(B) - \mu_\Delta(A \cap B).$$

Demonstração. Sendo $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ e $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ do Lema 7.11 segue que

$$\begin{aligned} \mu_\Delta(A \cup B) &= \mu_\Delta(A \cup (B \setminus A)) = \mu_\Delta(A) + \mu_\Delta(B \setminus A) \\ &= \mu_\Delta(A) + \mu_\Delta(B \setminus (A \cap B)) = \mu_\Delta(A) + \mu_\Delta(B) - \mu_\Delta(A \cap B). \end{aligned}$$

□

Definição 7.6. *Diz-se que uma proposição P vale Δ-quase todo ponto (Δ-q.t.p.) em $\mathbb{T} \setminus \{b\}$, se o conjunto N dado por*

$$N = \{t \in \mathbb{T} \setminus \{b\} : P \text{ não vale em } t\}$$

é tal que $\mu_\Delta(N) = 0$.

Observação Se $M = \{t \in \mathbb{T} \setminus \{b\} : P$ vale em $t\}$ segue que $N = [a, b)_\mathbb{T} \setminus M$. Como $M = [a, b)_\mathbb{T} \setminus N$ e $N \in \Delta$ concluímos que $M \in \Delta$.

Lema 7.13. *Se duas proposições P e Q valem Δ-quase todo ponto em $\mathbb{T} \setminus \{b\}$, então $P \cap Q$ vale Δ-quase todo ponto em $\mathbb{T} \setminus \{b\}$.*

Demonstração. Se $N = \{t \in \mathbb{T} \setminus \{b\} : P \cap Q$ não vale em $t\}$ temos que $N \subset N_1 \cup N_2$, sendo

$$N_1 = \{t \in \mathbb{T} \setminus \{b\} : P \text{ não vale em } t\}$$

e

$$N_2 = \{t \in \mathbb{T} \setminus \{b\} : Q \text{ não vale em } t\}.$$

Então $\mu_\Delta(N) \leq \mu_\Delta(N_1 \cup N_2) \leq \mu_\Delta(N_1) + \mu_\Delta(N_2) = 0$. □

7.5 Funções Mensuráveis

Definição 7.7. *Diz-se que uma função $f : \mathbb{T} \to [-\infty, +\infty]$ é Δ-mensurável se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto*

$$\{t \in \mathbb{T} : f(t) < \alpha\}$$

é Δ-mensurável.

Definição 7.8. *Dada uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ define-se $\bar{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ como*

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t), \ t \in \mathbb{T} \\ f(t_i) + \frac{f(\sigma(t_i)) - f(t_i)}{\mu(t_i)}(t - t_i), \quad t \in (t_i, \sigma(t_i)) \ \textit{para algum} \ i \in I \end{cases}$$

sendo $I \subset \mathbb{N}$ e $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ tal que

$$RS := \{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i \in I} \ .$$

Observação Se uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é contínua então $\bar{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua. Logo f é Δ-mensurável.

Definição 7.9. *Denotaremos por $M(\mathbb{T})$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{T} \to [-\infty, +\infty]$ Δ-mensuráveis. Além disso, $M^+(\mathbb{T})$ denotará o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{T} \to [0, +\infty]$ Δ-mensuráveis.*

Lema 7.14. *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função $f : \mathbb{T} \to [-\infty, +\infty]$:*
(a) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{t \in \mathbb{T} : f(t) > \alpha\} \in \Delta$.
(b) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{t \in \mathbb{T} : f(t) \leq \alpha\} \in \Delta$.
(c) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{t \in \mathbb{T} : f(t) \geq \alpha\} \in \Delta$.
(d) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{t \in \mathbb{T} : f(t) < \alpha\} \in \Delta$.

Corolário 7.3. *Se $f \in M(\mathbb{T})$ então*

$$\{t \in \mathbb{T} : f(t) = \alpha\} = \{t \in \mathbb{T} : f(t) \leq \alpha\} \bigcap \{t \in \mathbb{T} : f(t) \geq \alpha\} \in \Delta$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corolário 7.4. *Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tal que $c < d$. Se $f \in M(\mathbb{T})$ então*

$$\{t \in \mathbb{T} : f(t) \in (c,d)\} = \{t \in \mathbb{T} : f(t) < d\} \bigcap \{t \in \mathbb{T} : f(t) > c\} \in \Delta \ .$$

Lema 7.15. *Se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto e $f \in M(\mathbb{T})$ então $f^{-1}(A) \in \Delta$.*

Demonstração. Existem $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ tal que $c_i < d_i$ e $A = \bigcup_i (c_i, d_i)$. Assim,

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup_i (c_i, d_i)) = \bigcup_i f^{-1}(c_i, d_i) \in \Delta \ .$$

□

Lema 7.16. *Sejam $f, g \in M(\mathbb{T})$ e suponha que $f + g$ está bem definida. Se $c \in \mathbb{R}$ então as funções*

$$cf \ , \ f + g \ , \ | \ f \ |$$

também são Δ-mensuráveis.

Lema 7.17. *Sejam* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *funções* Δ*-mensuráveis. Então a função* $f.g$ *é* Δ*-mensurável.*

Lema 7.18. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções em* $M(\mathbb{T})$*. Se as funções* $f, f^*, F : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ *são definidas como*

$$f(t) = \inf_n f_n(t) \ , \quad F(t) = \sup_n f_n(t) \ , \quad f^*(t) = \liminf f_n(t)$$

então f*,* f^* *e* F *são* Δ*-mensuráveis.*

Corolário 7.5. *Se* $f, g \in M(\mathbb{T})$ *então as funções* $h, w : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ *definidas como*

$$h(t) = \min\{f(t), g(t)\} \ , \qquad w(t) = \max\{f(t), g(t)\}$$

são Δ*-mensuráveis.*

Corolário 7.6. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções em* $M(\mathbb{T})$ *e suponha que existe* $\lim f_n(t) = f(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ *para cada* $t \in \mathbb{T}$*. Então a função* $f : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ *é* Δ*-mensurável.*

Lema 7.19. *Se* $f \in M^+(\mathbb{T})$ *então existe uma sequência* $\{\varphi_n\}$ *de funções em* $M(\mathbb{T})$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*
(a) $0 \leq \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$ *para cada* $t \in \mathbb{T}$ *e para todo* $n \geq 1$ *.*
(b) $\lim \varphi_n(t) = f(t)$ *para cada* $t \in \mathbb{T}$*.*
(c) Cada φ_n *tem apenas um número finito de números reais na sua imagem.*

7.6 Integral de Lebesgue

Definição 7.10. *Diz-se que* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *é uma função simples se ela possui apenas um número finito de valores em sua imagem.*

Observação Sejam $a_1, ..., a_n$ os valores distintos de uma função simples Δ-mensurável $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Então φ pode ser representada na forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \ \chi_{E_j} \tag{7.1}$$

sendo $\chi_{E_j} : \mathbb{T} \to \{0, 1\}$ a função característica do conjunto

$$E_j = \{t \in \mathbb{T} : \varphi(t) = a_j\} \in \Delta \ .$$

Como os números a_j são distintos então os conjuntos E_j são disjuntos. Além disso $\mathbb{T} = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Definição 7.11. *Seja $\varphi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ uma função simples Δ-mensurável com a representação (7.1). Define-se a Δ-integral de Lebesgue de φ como*

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(s)\Delta s = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_\Delta(E_j) \ .$$

Lema 7.20. *Se $\varphi, \psi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ são funções simples Δ-mensuráveis e $c \geq 0$ então*

$$\int_{\mathbb{T}} c\varphi(s)\Delta s = c \int_{\mathbb{T}} \varphi(s)\Delta s$$

e

$$\int_{\mathbb{T}} (\varphi(s) + \psi(s))\Delta s = \int_{\mathbb{T}} \varphi(s)\Delta s + \int_{\mathbb{T}} \psi(s)\Delta s \ .$$

Definição 7.12. *Se $f \in M^+(\mathbb{T})$, a Δ-integral de Lebesgue de f é dada por*

$$\int_{\mathbb{T}} f(s)\Delta s = \sup \int_{\mathbb{T}} \varphi(s)\Delta s$$

sendo o supremo tomado sobre todas as funções simples Δ-mensuráveis $\varphi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ tal que $0 \leq \varphi(t) \leq f(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Definição 7.13. *Dada uma função $f : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ e $E \in \Delta$, a função $f\chi_E : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ é dada por*

$$f\chi_E(s) = \begin{cases} 0, & s \notin E \\ f(s), & s \in E \ . \end{cases}$$

Observação Se $f \in M(\mathbb{T})$ então $f\chi_E$ também é Δ-mensurável.

Definição 7.14. *Se $f \in M^+(\mathbb{T})$ e $E \in \Delta$, a Δ-integral de Lebesgue de f sobre E é definida como*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\mathbb{T}} f\chi_E(s)\Delta s \ .$$

Lema 7.21. *Sejam $f, g : \mathbb{T} \to [0, +\infty]$ funções Δ-mensuráveis:*
(a) Se $f \leq g$ então

$$\int_{\mathbb{T}} f(s)\Delta s \leq \int_{\mathbb{T}} g(s)\Delta s \ .$$

(b) Se $E, F \in \Delta$ e $E \subset F$ tem-se

$$\int_E f(s)\Delta s \leq \int_F f(s)\Delta s \ .$$

Corolário 7.7. *Sejam $f, g \in M^+(\mathbb{T})$ e $E \in \Delta$. Se $f \leq g$ em E, então*

$$\int_E f(s)\Delta s \leq \int_E g(s)\Delta s \ .$$

Lema 7.22. *Seja* $f \in M^+(\mathbb{T})$ *e* $E \in \Delta$. *Se* $\mu_\Delta(E) = 0$ *então*

$$\int_E f(s)\Delta s = 0.$$

Demonstração. Seja $\varphi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ uma função simples Δ-mensurável tal que $\varphi \leq f\chi_E$. Se $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \ \chi_{E_j}$ suponha que $E_k = \{t \in \mathbb{T} : \varphi(t) = 0\}$. Como $\mathbb{T} \setminus E \subset E_k$ segue que $E_j \subset E$ quando $j \neq k$. Então

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(s)\Delta s = 0.\mu_\Delta(E_k) + \sum_{j \neq k} a_j \mu_\Delta(E_j) = 0$$

já que $\mu_\Delta(E_j) \leq \mu_\Delta(E) = 0$ se $j \neq k$. Portanto

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\mathbb{T}} f\chi_E(s)\Delta s = 0.$$

□

Teorema 7.1 (Convergência Monótona, [6],[33])**.** *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência monótona crescente de funções em* $M^+(\mathbb{T})$. *Se* $\lim f_n(t) = f(t) \in \overline{\mathbb{R}}$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$ *então*

$$\int_{\mathbb{T}} f(s)\Delta s = \lim \int_{\mathbb{T}} f_n(s)\Delta s \ .$$

Corolário 7.8. *Considere uma sequência monótona crescente* $\{f_n\}$ *de funções em* $M^+(\mathbb{T})$. *Suponha que*

$$\lim f_n(t) = f(t) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall \ t \in \mathbb{T} \ .$$

Se $E \in \Delta$ *então*

$$\int_E f(s)\Delta s = \lim \int_E f_n(s)\Delta s \ .$$

Demonstração. Para cada n defina a função $h_n : \mathbb{T} \to [0, +\infty]$ como $h_n = f_n\chi_E \in M^+(\mathbb{T})$. Se $t \in E$ temos que $h_n(t) = f_n(t) \leq f_{n+1}(t) = h_{n+1}(t)$. Porém, se $t \in \mathbb{T} \setminus E$ segue que $h_n(t) = 0 = h_{n+1}(t)$. Além disso, se $t \in E$ temos

$$\lim h_n(t) = \lim f_n(t) = f(t)$$

e se $t \in \mathbb{T} \setminus E$ então

$$\lim h_n(t) = 0 = f\chi_E(t).$$

Do Teorema anterior segue que

$$\begin{aligned} \int_E f(s)\Delta s &= \int_{\mathbb{T}} f\chi_E(s)\Delta s = \lim \int_{\mathbb{T}} h_n(s)\Delta s \\ &= \lim \int_{\mathbb{T}} f_n\chi_E(s)\Delta s = \lim \int_E f_n(s)\Delta s \ . \end{aligned}$$

□

Corolário 7.9. *Se $f, g \in M^+(\mathbb{T})$ e $c \geq 0$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{T}} cf(s)\Delta s = c\int_{\mathbb{T}} f(s)\Delta s$$

e

$$\int_{\mathbb{T}} \big(f(s) + g(s)\big)\Delta s = \int_{\mathbb{T}} f(s)\Delta s + \int_{\mathbb{T}} g(s)\Delta s\ .$$

Corolário 7.10. *Sejam $f, g \in M^+(\mathbb{T})$, $E \in \Delta$ e $c \geq 0$. Então*

$$\int_{E} cf(s)\Delta s = c\int_{E} f(s)\Delta s$$

e

$$\int_{E} \big(f(s) + g(s)\big)\Delta s = \int_{E} f(s)\Delta s + \int_{E} g(s)\Delta s\ .$$

Corolário 7.11. *Considere $f \in M^+(\mathbb{T})$ e $A, B \in \Delta$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Então*

$$\int_{A\cup B} f(s)\Delta s = \int_{A} f(s)\Delta s + \int_{B} f(s)\Delta s.$$

Demonstração. Como $f\chi_{A\cup B} = f\chi_A + f\chi_B$, do Corolário 7.9 segue que

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f(s)\Delta s &= \int_{\mathbb{T}} f\chi_{A\cup B}(s)\Delta s = \int_{\mathbb{T}} \{f\chi_A(s) + f\chi_B(s)\}\Delta s \\
&= \int_{\mathbb{T}} f\chi_A(s)\Delta s + \int_{\mathbb{T}} f\chi_B(s)\Delta s = \int_{A} f(s)\Delta s + \int_{B} f(s)\Delta s.
\end{aligned}$$

□

Lema 7.23. *Se $f \in M^+(\mathbb{T})$ e $f(b) = 0$ então*

$$\int_{\{b\}} f(s)\Delta s = 0\ .$$

Demonstração. Como $f\chi_{\{b\}} \equiv 0$ temos que

$$\int_{\{b\}} f(s)\Delta s = \int_{\mathbb{T}} f\chi_{\{b\}}(s)\Delta s = 0.\mu_\Delta(\mathbb{T}) = 0\ .$$

□

Corolário 7.12. *Se $f \in M^+(\mathbb{T})$ e $f(b) = 0$ então*

$$\int_{\mathbb{T}} f(s)\Delta s = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta s + \int_{\{b\}} f(s)\Delta s = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta s\ .$$

7.7 Funções Integráveis

Definição 7.15. *Dada uma função $f : \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}}$, define-se as funções $f^+, f^- : \mathbb{T} \to [0, +\infty]$ como*

$$f^+ = \max\{0, f\} \ , \quad f^- = \max\{0, -f\} \ .$$

Observação Se $E \in \Delta$ temos que

$$(f\chi_E)^+ = f^+\chi_E \ , \quad (f\chi_E)^- = f^-\chi_E \ .$$

Definição 7.16. *Seja $f \in M(\mathbb{T})$ e $E \in \Delta$. Se uma das integrais*

$$\int_{\mathbb{T}} (f\chi_E)^+(s)\Delta s \ , \ \int_{\mathbb{T}} (f\chi_E)^-(s)\Delta s$$

é finita, define-se

$$\begin{aligned} \int_E f(s)\Delta s &= \int_{\mathbb{T}} f\chi_E(s)\Delta s = \int_{\mathbb{T}} (f\chi_E)^+(s)\Delta s - \int_{\mathbb{T}} (f\chi_E)^-(s)\Delta s \\ &= \int_{\mathbb{T}} f^+\chi_E(s)\Delta s - \int_{\mathbb{T}} f^-\chi_E(s)\Delta s = \int_E f^+(s)\Delta s - \int_E f^-(s)\Delta s \ . \end{aligned}$$

Definição 7.17. *Considere $E \in \Delta$ e $f \in M(\mathbb{T})$. Se as integrais*

$$\int_E f^+(s)\Delta s \ , \ \int_E f^-(s)\Delta s$$

são finitas, diz-se que f é integrável em E.

Lema 7.24. *Seja $f \in M(\mathbb{T})$ e $E \in \Delta$. Se f é integrável em E então f é integrável cada subconjunto Δ-mensurável $A \subset E$.*

Demonstração. Do Lema 7.21 temos que

$$\int_A f^+(s)\Delta s \leq \int_E f^+(s)\Delta s$$

e

$$\int_A f^-(s)\Delta s \leq \int_E f^-(s)\Delta s.$$

Logo f é integrável em A. $\square$

Definição 7.18. *Se $E \in \Delta$, denotaremos por $L_1(E)$ o conjunto das funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ Δ-mensuráveis e integráveis em E.*

Lema 7.25. *Seja $E \in \Delta$ e $f, g \in L_1(E)$. Se $f \leq g$ em E então*

$$\int_E f(s)\Delta s \leq \int_E g(s)\Delta s.$$

Demonstração. Temos que $f^+ \leq g^+$ e $g^- \leq f^-$ em E. Logo

$$\int_E f^+(s)\Delta s \leq \int_E g^+(s)\Delta s$$

e

$$\int_E g^-(s)\Delta s \leq \int_E f^-(s)\Delta s.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_E f(s)\Delta s &= \int_E f^+(s)\Delta s - \int_E f^-(s)\Delta s \\ &\leq \int_E g^+(s)\Delta s - \int_E f^-(s)\Delta s \\ &\leq \int_E g^+(s)\Delta s - \int_E g^-(s)\Delta s = \int_E g(s)\Delta s.\end{aligned}$$

□

Lema 7.26. *Considere $A, B \in \Delta$. Se $f \in L_1(A) \cap L_1(B)$ e $A \cap B = \emptyset$ então*

$$\int_{A\cup B} f(s)\Delta s = \int_A f(s)\Delta s + \int_B f(s)\Delta s.$$

Demonstração. Do Corolário 7.11 temos que

$$\int_{A\cup B} f^+(s)\Delta s = \int_A f^+(s)\Delta s + \int_B f^+(s)\Delta s$$

e

$$\int_{A\cup B} f^-(s)\Delta s = \int_A f^-(s)\Delta s + \int_B f^-(s)\Delta s.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_A f(s)\Delta s + \int_B f(s)\Delta s &= \int_A f^+(s)\Delta s + \int_B f^+(s)\Delta s - \int_A f^-(s)\Delta s - \int_B f^-(s)\Delta s \\ &= \int_{A\cup B} f^+(s)\Delta s - \int_{A\cup B} f^-(s)\Delta s = \int_{A\cup B} f(s)\Delta s.\end{aligned}$$

□

Corolário 7.13. *Considere uma função* $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$*. Suponha que*

$$h(t) = 0 \quad \Delta - q.t.p. \ t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \ .$$

Se $E \subset [a, b)_{\mathbb{T}}$ *é* Δ*-mensurável e* $h \in L_1(E)$ *então*

$$\int_E h(s)\Delta s = 0 \ .$$

Corolário 7.14. *Tome uma função* $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$*. Suponha que*

$$h(t) \geq 0 \quad \Delta - q.t.p. \ t \in [a, b)_{\mathbb{T}} \ .$$

Se $E \subset [a, b)_{\mathbb{T}}$ *é* Δ*-mensurável e* $h \in L_1(E)$ *então*

$$\int_E h(s)\Delta s \geq 0 \ .$$

Demonstração. Se $A = \{t \in [a, b)_{\mathbb{T}} : h(t) < 0\}$ temos que $\mu_\Delta(E \cap A) \leq \mu_\Delta(A) = 0$. Do lema anterior segue que

$$\int_E h(s)\Delta s = \int_{E\cap A} h(s)\Delta s + \int_{E\setminus A} h(s)\Delta s = \int_{E\setminus A} h(s)\Delta s.$$

Como $(h^-)\chi_{E\setminus A} \equiv 0$ temos que

$$\int_{E\setminus A} h(s)\Delta s = \int_{E\setminus A} h^+(s)\Delta s \geq 0$$

e concluímos a prova. □

Teorema 7.2. *Considere* $E \in \Delta$ *e uma função* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$*. Então* $f \in L_1(E)$ *se, e somente se,* $\mid f \mid \in L_1(E)$*. Neste caso,*

$$\mid \int_E f(s)\Delta s \mid \leq \int_E \mid f(s) \mid \Delta s \ .$$

Demonstração. Suponha que $f \in L_1(E)$. Temos que $\mid f \mid^+ = \mid f \mid = f^+ + f^-$ e $\mid f \mid^- = 0$. Do Corolário 7.10 segue que

$$\int_E \mid f \mid^+ (s)\Delta s = \int_E f^+(s)\Delta s + \int_E f^-(s)\Delta s$$

e portanto $\mid f \mid \in L_1(E)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mid \int_E f(s)\Delta s \mid &= \mid \int_E f^+(s)\Delta s - \int_E f^-(s)\Delta s \mid \\ &\leq \int_E f^+(s)\Delta s + \int_E f^-(s)\Delta s = \int_E \mid f(s) \mid \Delta s \ . \end{aligned}$$

Se $| f | \in L_1(E)$, do Corolário 7.7 segue que

$$\max\{\int_E f^+(s)\Delta s \ , \int_E f^-(s)\Delta s\} \ \leq \int_E | f |^+ (s)\Delta s < +\infty$$

isto é, $f \in L_1(E)$. $\square$

Lema 7.27. *Seja $E \in \Delta$ e $f \in L_1(E)$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\alpha f \in L_1(E)$. Além disso,*

$$\int_E (\alpha f)(s)\Delta s = \alpha \int_E f(s)\Delta s.$$

Demonstração. Se $\alpha = 0$ temos que $\alpha f = 0$ e então

$$\int_E (\alpha f)(s)\Delta s = 0 = \alpha \int_E f(s)\Delta s.$$

Se $\alpha > 0$ temos que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ e $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Do Corolário 7.10 segue que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_E f(s)\Delta s &= \alpha \int_E f^+(s)\Delta s - \alpha \int_E f^-(s)\Delta s \\
&= \int_E \alpha f^+(s)\Delta s - \int_E \alpha f^-(s)\Delta s \\
&= \int_E (\alpha f)^+(s)\Delta s - \int_E (\alpha f)^-(s)\Delta s = \int_E (\alpha f)(s)\Delta s.
\end{aligned}$$

Se $\alpha < 0$ segue que $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ e $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Do Corolário 7.10 temos que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_E f(s)\Delta s &= \alpha \int_E f^+(s)\Delta s - \alpha \int_E f^-(s)\Delta s \\
&= -\int_E (-\alpha) f^+(s)\Delta s + \int_E (-\alpha) f^-(s)\Delta s \\
&= -\int_E (\alpha f)^-(s)\Delta s + \int_E (\alpha f)^+(s)\Delta s = \int_E (\alpha f)(s)\Delta s.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 7.28. *Seja $f = f_1 - f_2$, sendo $f_1, f_2 : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$. Se $E \in \Delta$ e $f_1, f_2 \in L_1(E)$ então*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_E f_1(s)\Delta s - \int_E f_2(s)\Delta s.$$

Demonstração. Como $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2$ segue que $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$. Do Corolário 7.10 temos que

$$\begin{aligned}
\int_E f^+(s)\Delta s + \int_E f_2(s)\Delta s &= \int_E (f^+(s) + f_2(s))\Delta s \\
&= \int_E (f_1(s) + f^-(s))\Delta s = \int_E f_1(s)\Delta s + \int_E f^-(s)\Delta s.
\end{aligned}$$

Como

$$| f |=| f_1 - f_2 | \leq | f_1 | + | f_2 |= f_1 + f_2$$

e

$$f^+, f^- \leq | f |$$

obtemos

$$\begin{aligned}\max\{\int_E f^+(s)\Delta s, \int_E f^-(s)\Delta s\} &\leq \int_E | f(s) | \Delta s \\ &\leq \int_E (f_1(s) + f_2(s))\Delta s \\ &= \int_E f_1(s)\Delta s + \int_E f_2(s)\Delta s.\end{aligned}$$

Então $f \in L_1(E)$ e

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_E f^+(s)\Delta s - \int_E f^-(s)\Delta s = \int_E f_1(s)\Delta s - \int_E f_2(s)\Delta s.$$

□

Lema 7.29. *Se $E \in \Delta$ e $f, g \in L_1(E)$ então $f + g \in L_1(E)$. Além disso,*

$$\int_E (f(s) + g(s))\Delta s = \int_E f(s)\Delta s + \int_E g(s)\Delta s.$$

Demonstração. Como $| f + g | \leq | f | + | g |$ segue que

$$\begin{aligned}\int_E | f(s) + g(s) | \Delta s &\leq \int_E (| f(s) | + | g(s) |)\Delta s \\ &= \int_E | f(s) | \Delta s + \int_E | g(s) | \Delta s.\end{aligned}$$

Sendo $| f |, | g |\in L_1(E)$ temos que $| f + g |\in L_1(E)$ e portanto $f + g \in L_1(E)$.

Temos que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

sendo $f^+ + g^+, f^- + g^- : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ funções em $L_1(E)$. Do Lema 7.28 concluímos que

$$\begin{aligned}\int_E (f(s) + g(s))\Delta s &= \int_E (f^+(s) + g^+(s))\Delta s - \int_E (f^-(s) + g^-(s))\Delta s \\ &= \int_E f^+(s)\Delta s - \int_E f^-(s)\Delta s + \int_E g^+(s)\Delta s - \int_E g^-(s)\Delta s \\ &= \int_E f(s)\Delta s + \int_E g(s)\Delta s.\end{aligned}$$

□

7.8 Continuidade de Medida e Convergência Dominada

Proposição 7.2 (Continuidade de Medida). *Seja $f : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ uma função em $L_1([a, b)_{\mathbb{T}})$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $A \in \Delta$ e $\mu_\Delta(A) < \delta$ então*

$$\int_A f(s)\Delta s < \varepsilon \ .$$

Demonstração. Para cada número inteiro $n \geq 1$ defina a função $f_n \in M^+(\mathbb{T})$ como

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & se \ f(t) \leq n \\ n, & se \ f(t) > n \ . \end{cases}$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$ temos $f_n(t) \leq n$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ e $\lim f_n(t) = f(t)$. Do Corolário 7.8 segue que

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta s = \lim \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f_n(s)\Delta s \ .$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta s - \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f_n(s)\Delta s = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} (f(s) - f_n(s))\Delta s < \frac{\varepsilon}{2}$$

quando $n \geq N$.

Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$. Se $A \in \Delta$ e $\mu_\Delta(A) < \delta$, então

$$\begin{aligned}
\int_A f(s)\Delta s &= \int_A (f(s) - f_N(s) + f_N(s))\Delta s \\
&= \int_A (f(s) - f_N(s))\Delta s + \int_A f_N(s)\Delta s \\
&\leq \int_A (f(s) - f_N(s))\Delta s + \int_A N\Delta s = \int_A (f(s) - f_N(s))\Delta s + N\mu_\Delta(A) \\
&< \int_A (f(s) - f_N(s))\Delta s + N\delta \leq \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} (f(s) - f_N(s))\Delta s + N\delta < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 7.3 (Convergência Dominada, [6],[33]). *Considere uma sequência $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ em $M(\mathbb{T})$ e uma função $\phi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ em $L_1(\mathbb{T})$. Suponha que para cada i, $\mid f_i(t) \mid \leq \phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$.*

Se $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(t) = \lim f_i(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$, então

$$\int_{\mathbb{T}} f(s)\Delta s = \lim \int_{\mathbb{T}} f_i(s)\Delta s.$$

Corolário 7.15. *Considere uma sequência* $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *em* $M(\mathbb{T})$ *e uma função* $\phi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ *em* $L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$. *Suponha que para cada* i, $\mid f_i(t) \mid \leq \phi(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$.

Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(t) = \lim f_i(t)$ *para cada* $t \in \mathbb{T}$. *Se* $A \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$ *é* Δ*-mensurável então*

$$\int_A f(s)\Delta s = \lim \int_A f_i(s)\Delta s.$$

Demonstração. Considere a sequência $g_i = f_i \chi_A$ em $M(\mathbb{T})$. Se $g = f\chi_A$ temos que

$$\lim g_i(t) = g(t).$$

para todo $t \in \mathbb{T}$.

Defina a função $\psi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ como $\psi = \phi\chi_{(\mathbb{T}\setminus\{b\})}$. Do Corolário 7.12 temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \psi(s)\Delta s &= \int_{\mathbb{T}\setminus\{b\}} \psi(s)\Delta s = \int_{\mathbb{T}} \psi\chi_{(\mathbb{T}\setminus\{b\})}(s)\Delta s \\ &= \int_{\mathbb{T}} \phi\chi_{(\mathbb{T}\setminus\{b\})}(s)\Delta s = \int_{\mathbb{T}\setminus\{b\}} \phi(s)\Delta s\end{aligned}$$

e então $\psi \in L_1(\mathbb{T})$.

Para cada i temos

$$\mid g_i(t) \mid \leq \psi(t)$$

para todo $t \in \mathbb{T}$. Do teorema anterior segue que

$$\int_{\mathbb{T}} g(s)\Delta s = \lim \int_{\mathbb{T}} g_i(s)\Delta s.$$

Sendo $g^+\chi_A = f^+\chi_A$ e $g^-\chi_A = f^-\chi_A$, do Lema 7.26 temos que

$$\int_{\mathbb{T}} g(s)\Delta s = \int_A g(s)\Delta s + \int_{\mathbb{T}\setminus\{A\}} g(s)\Delta s = \int_A g(s)\Delta s = \int_A f(s)\Delta s.$$

De modo análogo, para cada i temos

$$\int_{\mathbb{T}} g_i(s)\Delta s = \int_A f_i(s)\Delta s$$

e concluímos a prova. □

Corolário 7.16. *Considere uma sequência* $f_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *em* $M(\mathbb{T})$ *e uma função* $\phi : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ *em* $L_1([a,b)_{\mathbb{T}})$. *Suponha que para cada* n, $\mid f_n(t) \mid \leq \phi(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{T}$.

Se $A \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$ *é* Δ*-mensurável então*

$$\int_A \liminf f_n(s)\Delta s \leq \liminf \int_A f_n(s)\Delta s.$$

Demonstração. Para cada n defina a função $g_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ como

$$g_n(t) = \inf\{f_i(t) : i \geq n\}.$$

Então $g_n \in M(\mathbb{T})$. Além disso, para cada $t \in \mathbb{T}$ temos que $\{g_n(t)\}$ é crescente e $\mid g_n(t) \mid \leq \phi(t)$.

Como $\lim g_n(t) = \sup\{g_n(t) : n \geq 1\} = \liminf f_n(t)$, do Corolário 7.15 segue que

$$\int_A \liminf f_n(s)\Delta s = \lim \int_A g_n(s)\Delta s.$$

Para cada $m \geq 1$ temos que $g_m \leq f_k$ para todo $k \geq m$. Logo

$$\int_A g_m(s)\Delta s \leq \int_A f_k(s)\Delta s$$

e então

$$\int_A g_m(s)\Delta s \leq \liminf \int_A f_n(s)\Delta s.$$

Portanto

$$\int_A \liminf f_n(s)\Delta s \leq \liminf \int_A f_n(s)\Delta s.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Adivar, M., Raffoul, Y.N., Existence of resolvent for Volterra integral equations on time scales, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Vol. 82, No.1, pp. 139-155, 2010.

[2] Akin-Bohner, E., Raffoul, Y.N., Tisdell, C.C., Exponential stability in functional dynamic equations on time scales, *Communications in Mathematical Analysis*, Vol. 9, No.1, pp. 93-108, 2010.

[3] Akin-Bohner, E., Sun, S., Existence of solutions for second-order dynamic inclusions, *Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations*, Vol. 3, No.1-2, pp. 24-37, 2011.

[4] Atici, F.M., Biles, D.C., First order dynamic inclusions on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 292, No.1, pp. 222-237, 2004.

[5] Aubin, J.P., Cellina, A., Differential Inclusions, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] Bartle, R.G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure, John Wiley and Sons, New York, 1995.

[7] Belarbi, A., Benchohra, M., Ouahab, A., Existence results for impulsive dynamic inclusions on time scales, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 12, 22 pp., 2005.

[8] Bohner, M., Calculus of variations on time scales, *Dynamic Systems and Applications*, Vol. 13, No.3-4, pp. 339-349, 2004.

[9] Bohner, M., Erbe, L., Peterson,A., Oscillation for nonlinear second order dynamic equations on a time scale, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 301, No.2, pp. 491-507, 2005.

[10] Bohner, M., Peterson, A., Dynamic Equations on Time Scales, Birkhauser, Boston, 2001.

[11] Bohner, M., Tisdell, C.C., Second order dynamic inclusions, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 12, No.2, pp. 36-45, 2005.

[12] Cabada, A., Vivero, D.R., Criterions for absolute continuity on time scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 11, No. 11, pp. 1013-1028, 2005.

[13] Cabada, A., Vivero, D.R., Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 43, No.1-2, pp. 194-207, 2006.

[14] Castaing, C., Valadier, M., Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Vol. 580, Springer Lecture Notes in Mathematics, Berlin, 1977.

[15] Chang, Y.K., Li, W.T., Existence results for dynamic inclusions on time scales with nonlocal initial conditions, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 53, No. 1, pp. 12-20, 2007.

[16] Clarke, F.H., Ledyaev, Y.S., Stern, R.J., Wolenski, P.R., Nonsmooth Analysis and Control Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 178, Springer Verlag, New York, 1998.

[17] Clarke, F.H., Optimization and Nonsmooth Analysis, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1990.

[18] Erbe, L., Hassan, T.S., Peterson, A., Oscillation of third order nonlinear functional dynamic equations on time scales, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Vol. 18, No.1-2, pp. 199-227, 2010.

[19] Erbe, L., Peterson, A., Rehák, P., Comparison theorems for linear dynamic equations on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 275, No.1, pp. 418-438, 2002.

[20] Erbe, L., Peterson, A., Tisdell, C.C., Basic existence, uniqueness and approximation results for positive solutions to nonlinear dynamic equations on time scales, *Nonlinear Analysis*, Vol. 69, No.7, pp. 2303-2317, 2008.

[21] Filippov, A. F., On certain questions in the theory of Optimal Control, *SIAM J. Control Optimization*, Vol. 1, pp. 76-84, 1962.

[22] Guseinov, G.S., Kaymakçalan, B., Basics of Riemann delta and nabla integration on time scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 8, No.11, pp. 1001-1017, 2002.

[23] Guseinov, G.S., Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 285, No.1, pp. 107-127, 2003.

[24] Hilger, S., Analysis on measure chains- a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results in Mathematics*, Vol. 18, No.1-2, pp. 18-56, 1990.

[25] Hilscher, R., Zeidan, V., Calculus of variations on time scales: weak local piecewise C^1_{rd} solutions with variable endpoints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 289, No.1, pp. 143-166, 2004.

[26] Hilscher, R., Zeidan, V., Weak maximum principle and accessory problem for control problems on time scales, *Nonlinear Analysis*, Vol. 70, No.9, pp. 3209-3226, 2009.

[27] Liu, A., Bohner, M., Gronwall-OuIang-type integral inequalities on time scales, *Journal of Inequalities and Applications*, Vol. 10, 15 pp., 2010.

[28] Liu, G., Xiang, X., Peng, Y., Nonlinear integro-differential equations and optimal control problems on time scales, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 61, No. 2, pp. 155-169, 2011.

[29] Loewen, P.D., Optimal Control via Nonsmooth Analysis, CRM Proceedings Lecture Notes, Vol.2, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[30] Peng, Y., Xiang, X., Gong, Y., Liu, G., Necessary conditions of optimality for a class of optimal control problems on time scales, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 10, pp. 2035-2045, 2009.

[31] Peterson, A., Tisdell, C.C., Boundedness and uniqueness of solutions to dynamic equations on time scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 10, No.13-15, pp. 1295-1306, 2004.

[32] Royden, H.L., Real Analysis, Collier-Macmillan Limited, London, 1968.

[33] Rudin, W., Real and Complex Analysis, third edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[34] Smirnov, G.V., Introduction to the Theory of Differential Inclusions, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[35] Sivasundaram, S., Vasigh, B., Unified approach to continuous and discrete models in economics, *Nonlinear Studies*, Vol. 13, No.1, pp. 73-97, 2006.

[36] Tisdell, C.C., Zaidi, A., Basic qualitative and quantitative results for solutions to nonlinear, dynamic equations on time scales with an application to economic modelling, *Nonlinear Analysis*, Vol. 68, No.11, pp. 3504-3524, 2008.

[37] Vinter, R.B., Optimal Control, Birkhauser, Boston, 2000.

[38] Zhan, Z., Wei, W., Xu, H., Hamilton-Jacobi-Bellman equations on time scales, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 49, No.9-10, pp. 2019-2028, 2009.