

# RESSALVA

Atendendo solicitação do autor,  
o texto completo desta tese será  
disponibilizado somente a partir  
de 28/01/2024

Otavio Henrique Perez

Variedades singulares de impasse e fluxos em  
superfícies invariantes

São José do Rio Preto  
2022

Otávio Henrique Perez

Variedades singulares de impasse e fluxos em  
superfícies invariantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva  
Co-orientador: Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo

Financiadora: FAPESP (2016/22310-0 e 2018/24692-2) e CAPES (Código 001)

São José do Rio Preto  
2022

P438v      Perez, Otavio Henrique  
Variedades singulares de impasse e fluxos em superfícies  
invariantes / Otavio Henrique Perez. -- São José do Rio Preto, 2022  
110 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio  
Preto  
Orientador: Paulo Ricardo da Silva  
Coorientador: Daniel Cantergiani Panazzolo

1. Sistemas forçados. 2. Blow-up. 3. Classificação topológica. 4.  
Superfícies invariantes. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de  
Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Otávio Henrique Perez

Variedades singulares de impasse e fluxos em  
superfícies invariantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP (2016/22310-0 e 2018/24692-2) e CAPES (Código 001)

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Daniel C. Panazzolo  
Co-orientador - LMIA - UHA

---

Profa. Dra. Regilene D. S. Oliveira  
ICMC - USP

---

Prof. Dr. Claudio A. Buzzzi  
IBILCE - UNESP

---

Prof. Dr. Douglas D. Novaes  
IMECC - UNICAMP

---

Prof. Dr. Pedro T. Cardin  
FEIS - UNESP

São José do Rio Preto  
28 de Janeiro de 2022

*Dedico este trabalho às  
mais de 620 mil vidas ceifadas  
pela omissão e descaso durante  
a pandemia de COVID-19.*

## AGRADECIMENTOS

Quando comecei a escrever os primeiros rascunhos desta seção de agradecimentos, imediatamente começou a se passar um filme pela minha cabeça. E esse filme não tinha início em 2017, meu primeiro ano de doutorado, mas sim no ano de 2011, quando ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da UNESP Bauru.

Passar pelo ensino superior (graduação, mestrado e doutorado) é um processo intenso. É um verdadeiro desafio intelectual e psicológico, para citar apenas dois de tantos outros aspectos. Hoje, dez anos após ter colocado meus pés numa universidade pela primeira vez, olho para trás e vejo que tomei a decisão correta ao optar por estudar Matemática. Graças a ela cheguei a lugares que jamais sonhei chegar, realizei sonhos e, principalmente, conheci pessoas maravilhosas nas quais vou me lembrar para sempre com muito carinho.

Sei que é impossível agradecer a todos que me apoiaram e ajudaram nesta caminhada, e de certa forma é uma injustiça não poder fazer menção a todas elas nos parágrafos abaixo. Entretanto, penso que é uma injustiça ainda maior não citar pelo menos parte delas. Todo o apoio de vocês foi crucial para que eu chegasse até aqui.

Aos meus pais, Gilmar e Conceição, por todo o amor e apoio incondicionais, e por nunca medirem esforços para que eu pudesse realizar meus sonhos. Pai, mãe: esta conquista também é de vocês. Ao meu irmão, Guilherme, pelas inúmeras conversas e conselhos nos momentos bons e ruins. Ao Matheus, por ser uma criança maravilhosa e que, mesmo sem perceber, me ensina muito sobre amor e me inspira muito para melhorar sempre. Aos meus bichinhos, Pitica, Vitória, Fofinha e Neguinho, por encherem a minha casa de alegria e felicidade.

Agradeço também ao acaso, que cruzou a minha caminhada com a da Beatriz. Meu amor, não tenho palavras para agradecer todo o carinho e companheirismo. Conhecer você foi a melhor surpresa que o destino já guardou pra mim, e sou muito grato por podermos compartilhar nossas trajetórias e crescermos juntos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva, por toda a paciência, dedi-

cação, pelos conhecimentos (incluindo aqueles que vão além da Matemática) e ideias que me passou e, principalmente, por todas vezes em que me pegou pelos ombros e me chacoalhou para que eu pudesse sair do lugar. Ao meu Coorientador, Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo, que teve um papel decisivo na minha formação e no desenvolvimento da minha pesquisa, e a quem eu também agradeço por ter aceitado supervisionar minha estadia em Mulhouse. Aos meus orientadores de iniciação científica e mestrado, Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues e Prof. Dr. Tiago de Carvalho, por terem aberto tantas portas e por terem me preparado para a vida acadêmica.

A todos os meus professores, da graduação à pós-graduação, por terem me inspirado e me ensinado tanto. Todos, sem exceção, moldaram o matemático, professor e profissional que sou hoje. Em especial, deixo aqui meus agradecimentos à Profa. Dra. Ivete Baraldi (in memoriam). Agradeço aos membros da Banca Examinadora, pelo aceite em avaliar o meu trabalho e por todas as críticas e sugestões valiosas.

Também agradeço aos servidores do Ibilce, em especial aos funcionários do RU, sempre muito bem humorados, e aos funcionários da STAEPE, por toda a ajuda com questões burocráticas, e por serem tão prestativos e pacientes.

Aos meus amigos de pós graduação, que tornaram esta caminhada muito, mas muito mais leve: Alisson Reinol, Anderson Gonzaga, André Carvalho (Bot), Bruno Belorte, Bruno Caldeira, Carlos Vicente, Caroline Signorini (Lady Rayovac), Cheienne Chaves, Eduardo Machado, Fabrício Alves, Fabrício Rissão, Gabriel Rondon, Gino Maqui, Gustavo Marcato, Harison Brito, Heloísa Lopes, Jarne Donizetti, Juan Carlos Ortiz, Júnior Augusto, Laura Gambera, Lourenço Peixoto, Luiz Fernando Gonçalves (Luizão), Luiz Fernando Gouveia (Fofó), Plínio Sicuti, Rafael Paulino (Pão), Rafaela Soares, Raul Appis, Rodiak Figueroa, Rodrigo Bononi, Rodrigo Ishizaka, Ronísio Ribeiro, Rubens Pazim (Rubão), Samuel Santos, Paula Fukushima, Willian Nunes, Yagor Romano. Foram horas e mais horas, dias e mais dias dividindo a salinha do mestrado e o Laboratório de Sistemas Dinâmicos. Sempre me lembrarei com todo o carinho do mundo de todos os momentos que passei com vocês, até dos momentos mais rotineiros. Seja pela companhia na hora do café (e na hora da cerveja), pelos rachas aos finais de semana no Ibilce Sports Arena, e também para estudar, tirar dúvidas, ter conversas produtivas e improdutivas, desabafar, compartilhar angústias, jogar conversa fora, dar risada, almoçar no RU, jogar Saibro e PubG, apostar nos Bolões. A



todos vocês, meus mais profundos agradecimentos pela amizade.

Em especial, gostaria de agradecer à Ana Livia (Límpia), André Amaral, Eliton Moro (¿Eliton Muero?, também conhecido como Kumon), Lucas Arakaki e Jéssica Ventura (Rêssica Bentúra), com quem eu passava a maior parte do tempo no Laboratório de Sistemas Dinâmicos. Gostaria de fazer com que vocês conseguissem ter dimensão do quanto a amizade e companhia de vocês foram importantes para mim durante todos esses anos. Me inspiro muito em vocês, e espero um dia poder retribuir tudo isso de alguma forma.

À tout les Cacahuètes de l'Université de Haute-Alsace, surtout à Hamilton Araújo, Ícaro Chaves, Thomas Jacumin (Tomate), Aninda Chatterjee, Lucas David (lukinhas do brasil), Lucas Afonso (bodybuilder), Laura Cipriano, Madou Savigny, Célia Attabary, Elie Allemand et Salih Ouchtout, pour l'amitié, des blagues, des soirées, des bières et des histoires dont je me souviendrai toujours avec joie. Grâce à vous, Mulhouse a été la meilleure ville du monde pendant les 10 mois où j'y étais. Je remercie les professeurs de l'UHA, toujours très sympathiques, pour les discussions pendant le déjeuner.

Muitos dos sonhos que realizei só foram possíveis graças à Marília Delarissa Zuppi-rolí e à Milena Molinari. Vocês se tornaram grandes amigas ao longo desta caminhada e sempre me inspiraram muito, por serem excelentes professoras e pessoas incríveis. Muito obrigado pelas aulas de Inglês e Francês, que eram um dos meus momentos preferidos da minha rotina.

Aos amigos que a UNESP Bauru me deu, sobretudo a Henrique Della Barba (Guaxi), Matheus Moraes (Jaboto) e Thiago Correa (Jorge). Simplesmente não existe tempo ruim com vocês, e só tenho a agradecer por todos os papos e risadas, e me desculpar pelas vezes em que me fiz ausente após o fim da graduação. Também gostaria de agradecer ao Felipe Picoli, uma pessoa que faz absolutamente tudo para ver seus amigos com a autoestima lá em cima, e que me ajudou de inúmeras formas desde o início da nossa amizade, seja com palavras, seja com atitudes.

Também agradeço aos meus amigos da minha terra natal, Jaú: Felipe Maróstica, Hebert Santos, Joel Borges, Murilo Barbosa, Victor Kenzo e Vinícius Fuzinelli. Também agradeço aos meus eternos companheiros de banda: Bruno Boaretti, Octávio Valbueno e Renan Orleans. As risadas eram sempre mais gostosas com vocês, e

independentemente da distância, eu ainda nutro um carinho enorme por tudo o que a gente passou junto.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP (processos 2016/22310-0 e 2018/14692-2) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES (Código de Financiamento 001). Também agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro durante a Iniciação Científica e o Mestrado.

*Sou pessimista com a inteligência,  
mas um otimista com a vontade.*  
Antonio Gramsci, p. 195, [20].

## RESUMO

O principal objeto de estudo desta Tese é uma classe especial de equações diferenciais chamadas de sistemas forçados (ou sistemas com impasses). Este trabalho é dividido em duas partes, e em cada parte nós abordamos dois problemas clássicos oriundos do estudo de equações diferenciais ordinárias. O primeiro deles é o estudo de singularidades de sistemas forçados e a classificação de seus retratos de fase. Um algoritmo de resolução de singularidades para esta classe de sistemas é apresentado, e aplicamos esta teoria na classificação topológica de suas singularidades. Resultados clássicos a respeito da classificação topológica de campos de vetores analíticos são estendidos para o contexto de sistemas forçados analíticos. A segunda parte diz respeito ao estudo do fluxo de um campo de vetores polinomial tridimensional em superfícies algébricas invariantes. Provamos que, para uma certa classe de superfícies, o fluxo pode ser descrito por um sistema forçado polinomial planar. Além disso, as singularidades dos sistemas forçados estão profundamente relacionadas com propriedades geométricas da superfície, assim como com o fluxo do campo de vetores. Sistemas famosos vindos das ciências aplicadas exemplificam nossos resultados.

Palavras-chave: Sistemas forçados, Blow-up, Classificação topológica, Superfícies invariantes.

## **ABSTRACT**

*The main object of study of this Thesis is a special class of differential equations called constrained differential systems (or impasse systems). This work is divided in two parts, and in each part we address two classical problems from ordinary differential equations. The first one concerns the study of singularities of constrained systems and the classification their of phase portraits. An algorithm of resolution of singularities for such class of systems is presented, and we use this theory in the topological classification of singularities. Classical results on topological classification of analytic vector fields are extended to the context of analytic constrained systems. The second part concerns the study of flows of three-dimensional polynomial vector fields on invariant algebraic surfaces. We prove that, for a certain class of surfaces, the flow can be described by a polynomial constrained system defined on the plane. Moreover, the singularities of the constrained system are deeply related to geometric properties of the surface, as well as the flow of the vector field. Well-known systems from applied sciences exemplify our results.*

*Keywords: Constrained systems, Blow-up, Topological classification, Invariant surfaces.*

# Lista de Figuras

|     |                                                                                                                                                                                                          |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Sistema forçado em uma variedade com esquinas após blow-up. . . . .                                                                                                                                      | 18 |
| 1.2 | Retrato de fase de (1.2) (esquerda) e superfície $M$ (direita). O conjunto de impasse $\Delta$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ está destacado em azul. . . . . | 22 |
| 2.1 | Singularidades de um sistema forçado planar. O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                                   | 26 |
| 2.2 | Pontos não singulares de um sistema forçado planar. O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                            | 26 |
| 2.3 | Pontos elementares do sistema forçado. O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                                         | 27 |
| 2.4 | Equivalência entre os blow-ups quadrático e direcional. . . . .                                                                                                                                          | 28 |
| 2.5 | Polígono de Newton de um campo de vetores analítico. O vértice principal e o segmento principal estão destacados em azul. . . . .                                                                        | 30 |
| 2.6 | Retrato de fase de (2.7) (esquerda) e polígono de Newton de (2.8) (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho e o vértice e segmento principais estão destacados em azul. . . . .        | 31 |
| 2.7 | Segmento principal após blow-up na direção $y$ (acima) e após blow-up na direção $x$ (abaixo). . . . .                                                                                                   | 33 |
| 2.8 | Sistema forçado (2.7) antes (direita) e depois (esquerda) do blow-up com peso na origem. . . . .                                                                                                         | 33 |
| 2.9 | Tangência quadrática antes (direita) e depois (esquerda) do blow-up com peso na origem. . . . .                                                                                                          | 34 |
| 3.1 | Sistema forçado do Exemplo 3.7 após blow-up. . . . .                                                                                                                                                     | 39 |
| 3.2 | Segmento principal do polígono de Newton após blow-up na direção $y$ . . .                                                                                                                               | 44 |
| 3.3 | Segmento principal do polígono de Newton após blow-up na direção $x$ . . .                                                                                                                               | 45 |
| 3.4 | Polígono de Newton do campo de vetores auxiliar após uma mudança de coordenadas da forma (3.5). . . . .                                                                                                  | 50 |
| 4.1 | Diagrama da Proposição 4.1. . . . .                                                                                                                                                                      | 55 |
| 4.2 | Homeomorfismo $\tilde{H}$ que satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3). O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                         | 56 |
| 4.3 | Singularidades básicas da forma $V_1^{\alpha,\beta}$ . . . . .                                                                                                                                           | 57 |
| 4.4 | Singularidades básicas da forma $V_2^{\alpha,\beta}$ . . . . .                                                                                                                                           | 57 |
| 4.5 | Singularidades básicas da forma $V_3^\alpha$ (esquerda) e $V_4^\alpha$ (direita). . . . .                                                                                                                | 57 |
| 4.6 | Singularidades básicas da forma $C_1^{\alpha,\beta}$ . O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                         | 57 |

|      |                                                                                                                                                                                                  |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.7  | Singularidades básicas da forma $C_2^{\alpha,\beta}$ . O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                 | 57 |
| 4.8  | Singularidades básicas da forma $C_3^\alpha$ (esquerda) $C_4^\alpha$ (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                        | 58 |
| 4.9  | Singularidades de um sistema forçado. O ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto não possui órbita característica. . . . .                                                                | 59 |
| 4.10 | Neighborhoods $U$ , $\widehat{U}$ and $W$ . . . . .                                                                                                                                              | 59 |
| 4.11 | Setores $S_1^\alpha$ (esquerda) e $S_2^\alpha$ (direita). . . . .                                                                                                                                | 60 |
| 4.12 | Setores $S_3^\alpha$ (esquerda) e $F^\alpha$ (direita). . . . .                                                                                                                                  | 60 |
| 4.13 | Setores $SI_1^\alpha$ (esquerda) e $SI_2^\alpha$ (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                            | 61 |
| 4.14 | Setores $SI_3^\alpha$ (esquerda) e $SI_4^\alpha$ (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                            | 61 |
| 4.15 | Setores $SI_5^\alpha$ (esquerda) e $SI_6^\alpha$ (direita). O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                            | 61 |
| 4.16 | Setores $FI^\alpha$ . O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                                                  | 61 |
| 4.17 | Colagem de dois setores adjacentes. O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                                    | 61 |
| 4.18 | Polígonos de Newton $\mathcal{P}_X$ (esquerda) e $\mathcal{P}_{X_A}$ (direita). . . . .                                                                                                          | 63 |
| 4.19 | Blow-up na direção $y$ . . . . .                                                                                                                                                                 | 67 |
| 4.20 | Blow-up na direção $x$ . . . . .                                                                                                                                                                 | 67 |
| 4.21 | Segmento principal antes e depois do último blow-up no Caso 1, onde os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{X_A}$ não possuem um vértice da forma $(m, 1)$ . . . . . | 68 |
| 4.22 | Segmento principal antes e depois do último blow-up no Caso 2, em que os polígonos de Newton $\mathcal{P}_{X_{\Omega,A}}$ e $\mathcal{P}_{X_A}$ possuem um vértice da forma $(m, 1)$ . . . . .   | 68 |
| 4.23 | Polígono de Newton do campo de vetores auxiliar de (4.4). . . . .                                                                                                                                | 69 |
| 4.24 | Sistema forçado (4.4) antes e após blow-up. . . . .                                                                                                                                              | 69 |
| 4.25 | Da esquerda para a direita: curvas $A_k$ para $k = 1$ , $A_k$ para $k$ par e $A_k$ para $k$ ímpar e $k \geq 3$ . . . . .                                                                         | 70 |
| 4.26 | Da esquerda para a direita: curvas $D_k$ para $k = 4$ , $D_k$ para $k$ ímpar e $D_k$ para $k$ par e $k \geq 6$ . . . . .                                                                         | 70 |
| 4.27 | Da esquerda para a direita: curvas $E_6$ , $E_7$ e $E_8$ . . . . .                                                                                                                               | 71 |
| 4.28 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$ , para $\delta$ do tipo $A_k$ , $k$ ímpar. . . . .                                                                                                      | 73 |
| 4.29 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$ , para $\delta$ do tipo $A_k$ , $k$ par. . . . .                                                                                                        | 73 |
| 4.30 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$ , para $\delta$ do tipo $A_k$ , $k$ ímpar. . . . .                                                                                                         | 73 |
| 4.31 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$ , para $\delta$ do tipo $A_k$ , $k$ par. . . . .                                                                                                           | 73 |
| 4.32 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$ , para $\delta$ do tipo $D_k$ , $k$ par. . . . .                                                                                                           | 75 |
| 4.33 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$ , para $\delta$ do tipo $D_k$ , $k$ ímpar. . . . .                                                                                                         | 75 |
| 4.34 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$ , para $\delta$ do tipo $D_k$ , $k$ par. . . . .                                                                                                        | 75 |
| 4.35 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$ , para $\delta$ do tipo $D_k$ , $k$ ímpar. . . . .                                                                                                      | 76 |
| 4.36 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$ , para $\delta$ do tipo $D_k$ , $k$ par. . . . .                                                                                                           | 76 |
| 4.37 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$ , para $\delta$ do tipo $D_k$ , $k$ ímpar. . . . .                                                                                                         | 76 |
| 4.38 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$ , para $\delta$ do tipo $E_6$ . . . . .                                                                                                                 | 77 |
| 4.39 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$ , para $\delta$ do tipo $E_6$ . . . . .                                                                                                                    | 77 |
| 4.40 | Retrato de fase quando $b_{m_0,-1} = 0$ para todo $m_0 \geq 0$ , em que $\delta$ é do tipo $E_7$ . . . . .                                                                                       | 78 |
| 4.41 | Retrato de fase quando $b_{0,-1} \neq 0$ , para $\delta$ do tipo $E_7$ . . . . .                                                                                                                 | 78 |
| 4.42 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} \neq 0$ , para $\delta$ do tipo $E_8$ . . . . .                                                                                                                 | 79 |
| 4.43 | Retrato de fase quando $a_{-1,0} = 0$ , para $\delta$ do tipo $E_8$ . . . . .                                                                                                                    | 79 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1  | Conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ destacado em azul. . . . .                                                                                                                                                                    | 82  |
| 5.2  | Retrato de fase do Exemplo 5.11. O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                                                                               | 86  |
| 5.3  | Retrato de fase do Exemplo 5.12. O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                                                                               | 87  |
| 5.4  | Retrato de fase do Exemplo 5.13 para $\lambda > 1$ (esquerda) e para $\lambda < 1$ (centro). O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                   | 87  |
| 5.5  | Retrato de fase do Exemplo 5.14. O conjunto de impasse está destacado em vermelho. . . . .                                                                                                                                               | 88  |
| 5.6  | Retrato de fase do Exemplo 5.15. O conjunto de impasse está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse está destacado em azul. . . . .                                                                                         | 89  |
| 5.7  | Retrato de fase do campo de vetores adjunto (5.16) (esquerda) e superfície $M$ (direita). O conjunto de impasse $\Delta$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_M$ está destacado em azul. . . . .       | 95  |
| 5.8  | Retrato de fase de (5.20) (esquerda) e superfície $M_1$ (direita). O conjunto de impasse $\Delta_1$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1}$ está destacado em azul. . . . .                        | 97  |
| 5.9  | Retrato de fase de (5.23) (esquerda) e superfície $M_2^k$ (direita) quando $k \neq 0$ . O conjunto de impasse $\Delta_2$ está destacado em vermelho. . . . .                                                                             | 98  |
| 5.10 | Retrato de fase de (5.23) (esquerda) e superfície $M_2^k$ (direita) quando $k = 0$ . O conjunto de impasse $\Delta_2$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2^k}$ está destacado em azul. . . . .    | 98  |
| 5.11 | Retrato de fase de (5.27) (esquerda) e superfície $M_1$ (direita). O conjunto de impasse $\Delta_1$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_1}$ está destacado em azul. . . . .                        | 99  |
| 5.12 | Retrato de fase de (5.30) (esquerda) e superfície $M_2$ quando $r = 1$ (direita). O conjunto de impasse $\Delta_2$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2}$ está destacado em azul. . . . .         | 101 |
| 5.13 | Retrato de fase de (5.33) (left) (esquerda) e superfície $M_2$ quando $r > 1$ (direita). O conjunto de impasse $\Delta_2$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_2}$ está destacado em azul. . . . .  | 102 |
| 5.14 | Retrato de fase do Sistema (5.36) (esquerda) e superfície $M_3$ quando $s = 1$ (direita). O conjunto de impasse $\Delta_3$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_3}$ está destacado em azul. . . . . | 102 |
| 5.15 | Retrato de Fase do Sistema (5.40) (esquerda) e superfície $M_4$ (direita). O conjunto de impasse $\Delta_4$ está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse $\mathcal{I}_{M_4}$ está destacado em azul. . . . .                | 104 |



# Lista de Tabelas

|     |                                                                                                                                                                                                                     |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 | Singularidades do tipo ADE classificadas em [2]. Veja as Figuras 4.25, 4.26 e 4.27. . . . .                                                                                                                         | 70  |
| 4.2 | O sistema forçado (4.6) deve satisfazer uma das condições desta tabela para que seja equivalente a um sistema em $\mathcal{A}$ . O número $n_0$ é o primeiro inteiro positivo tal que $a_{-1,n_0} \neq 0$ . . . . . | 72  |
| 5.1 | Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Interação de Três Ondas (5.18) catalogadas em [30]. . . . .                                                                                                        | 96  |
| 5.2 | Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Lorenz (5.25) catalogadas em [27]. . . . .                                                                                                                         | 99  |
| 5.3 | Superfícies algébricas invariantes do Sistema de Chen (5.38) catalogadas em [29]. . . . .                                                                                                                           | 103 |

# Sumário

|          |                                                                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                                                       | <b>17</b> |
| <b>2</b> | <b>Conceitos preliminares</b>                                                                           | <b>24</b> |
| 2.1      | Sistemas forçados . . . . .                                                                             | 24        |
| 2.2      | Singularidades de sistemas forçados . . . . .                                                           | 26        |
| 2.3      | Blow-up quase-homogêneos . . . . .                                                                      | 27        |
| 2.4      | O polígono de Newton . . . . .                                                                          | 28        |
| 2.5      | Campo de vetores auxiliar . . . . .                                                                     | 30        |
| 2.6      | Exemplos . . . . .                                                                                      | 31        |
| <b>3</b> | <b>Resolução de singularidades de sistemas forçados</b>                                                 | <b>35</b> |
| 3.1      | Propriedades do polígono de Newton: controlabilidade e coordenadas admissíveis . . . . .                | 35        |
| 3.1.1    | Preparação de coordenadas . . . . .                                                                     | 35        |
| 3.1.2    | Mudança de coordenadas admissível . . . . .                                                             | 37        |
| 3.2      | Identificando pontos elementares usando o polígono de Newton . . . . .                                  | 38        |
| 3.3      | O Teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados . . . . .                                 | 41        |
| 3.3.1    | Dessingularização local . . . . .                                                                       | 42        |
| 3.3.2    | Resolução de singularidades: Teorema Global . . . . .                                                   | 52        |
| <b>4</b> | <b>Classificação topológica de retratos de fase de sistemas forçados no plano</b>                       | <b>54</b> |
| 4.1      | Construção da $C^0$ -equivalência orbital em torno do divisor excepcional . . . . .                     | 54        |
| 4.1.1    | Pontos básicos, intervalo singular básico e esquema elementar de singularidades . . . . .               | 56        |
| 4.1.2    | Prova do Teorema 4.10: Construção de uma $C^0$ -equivalência orbital que preserva orientação . . . . .  | 59        |
| 4.2      | Determinação topológica de um sistema forçado usando o polígono de Newton . . . . .                     | 62        |
| 4.2.1    | Coordenadas favoráveis . . . . .                                                                        | 62        |
| 4.2.2    | Condições de não degenerescência . . . . .                                                              | 64        |
| 4.2.3    | Prova do Teorema 4.19: Equivalência topológica entre um sistema forçado e sua parte principal . . . . . | 65        |
| 4.2.4    | Exemplo . . . . .                                                                                       | 69        |
| 4.3      | Sistemas forçados com conjunto de impasse singular e a prova do Teorema . . . . .                       | 70        |
| 4.3.1    | Curva $A_k$ , $k \geq 1$ . . . . .                                                                      | 71        |
| 4.3.2    | Curva $D_k$ , $k \geq 4$ . . . . .                                                                      | 73        |

|          |                                                                                        |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.3    | Curva $E_6$                                                                            | 75         |
| 4.3.4    | Curva $E_7$                                                                            | 77         |
| 4.3.5    | Curva $E_8$                                                                            | 78         |
| <b>5</b> | <b>Descrevendo fluxos em superfícies invariantes a partir de sistemas for-</b>         | <b>80</b>  |
|          | <b>çados</b>                                                                           |            |
| 5.1      | Estudando a Geometria da Superfície $M$                                                | 81         |
| 5.2      | Fluxos em superfícies invariantes que são descritos por sistemas forçados              | 83         |
| 5.3      | Caso particular: $\beta(x, y, z)$ é um polinômio de grau 1 com respeito a variável $z$ | 88         |
| 5.4      | Exemplos                                                                               | 94         |
| 5.4.1    | Equação de Falkner–Skan                                                                | 94         |
| 5.4.2    | O Sistema da Interação de Três Ondas                                                   | 95         |
| 5.4.3    | O Sistema de Lorenz                                                                    | 97         |
| 5.4.4    | O Sistema de Chen                                                                      | 103        |
| 5.5      | Fluxos em hiperfícies e sistemas forçados em dimensões maiores                         | 104        |
|          | <b>Referências</b>                                                                     | <b>106</b> |
|          | <b>Índice Remissivo</b>                                                                | <b>109</b> |

# 1 Introdução

Sistemas Dinâmicos, e em particular a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, é a área da Matemática que busca compreender o comportamento e o estado de fenômenos cuja evolução é dada por uma determinada regra (ou função). Seu estudo se inicia no final do século XIX com o matemático francês Henri Poincaré, a partir de seu célebre trabalho *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, onde cunhou a frase: “Investigar quais são as propriedades das equações diferenciais é uma questão do mais alto interesse”.

Desde então, o estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias se desenvolveu muito, motivado tanto pelos desafios intrínsecos da Matemática quanto pelas suas aplicações em várias áreas, tais como Física, Química, Biologia e Economia. Juntamente com esse desenvolvimento, várias classes de sistemas surgiram e ganharam destaque dentro da comunidade científica, como, por exemplo, equações diferenciais suaves por partes e equações diferenciais com várias escalas de tempo. O principal objeto de estudo deste trabalho é o estudo da classe dos chamados Sistemas Forçados (ou Sistemas com Impasse).

Sistemas Forçados são definidos por equações diferenciais da forma

$$A(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}),$$

em que  $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A$  é uma matriz  $n \times n$  cujas entradas são funções diferenciáveis e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  também é diferenciável. Nestas condições, um ponto  $\mathbf{p}$  tal que  $\det A(\mathbf{p}) = 0$  é chamado **ponto de impasse**, e o chamado **conjunto de impasse** é o conjunto  $\Delta = \{\mathbf{p} \in U; \det A(\mathbf{p}) = 0\}$ . As referências [25, 43, 44] são artigos clássicos a respeito de tais sistemas, e aplicações podem ser encontradas em [37, 38, 42].

Neste trabalho, exigiremos que a matriz  $A$  não tenha rank constante e que o conjunto de impasse possua codimensão maior ou igual a um. Uma característica interessante desta classe de sistemas é que o Teorema de Existência e Unicidade das EDO's só é válido fora do conjunto de impasse (veja o Capítulo 2).

Como ficará claro na Seção 2.1, sem perda de generalidade podemos escrever um sistema forçado como

$$\delta(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$$

em que  $X(\mathbf{x}) = A^*(\mathbf{x})F(\mathbf{x})$  é o chamado **campo de vetores adjunto** e  $\delta(\mathbf{x}) = \det A(\mathbf{x})$  é a função que define o conjunto de impasse.

Este trabalho essencialmente aborda dois problemas, cada um deles trazendo para o contexto de Sistemas Forçados questões que já foram estudadas para o caso das equações diferenciais ordinárias clássicas. O primeiro deles é o estudo de singularidades via blow-ups, bem como a classificação topológica de tais sistemas.

Singularidades de sistemas forçados na parte suave do conjunto de impasse foram estudados em [43, 44]. Um dos objetivos deste trabalho é estudar singularidades não

apenas na parte suave, mas também na parte singular do conjunto de impasse. Além do interesse matemático, é possível encontrar na literatura modelos das ciências aplicadas que apresentam este tipo de singularidade. Por exemplo, o sistema

$$\left(L \circ f(x)\right) \left(f'(x)\right)^2 \dot{x} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad C(y) \dot{y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

descreve a dinâmica de um circuito RLC. Veja o Exemplo 6 de [42] para mais detalhes, onde também podem ser encontrados outros exemplos.

Em [9] os autores usaram blow-ups homogêneos para estudar pontos singulares do conjunto de impasse de um sistema forçado real polinomial no plano. Além disso, foi adotada a hipótese de que o polinômio é homogêneo, dentre outras condições de não degenerescência. O primeiro resultado do nosso trabalho, que também pode ser encontrado na pré-publicação [34], é um teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados reais analíticos que não requer tais condições de não degenerescência.

Como nossa prova utiliza blow-ups com peso, precisamos trabalhar numa categoria mais geral de variedades, que são as variedades com esquinas. Ficará claro ao longo deste trabalho que, ao aplicar um blow-up em uma singularidade, estamos substituindo um ponto por um conjunto homeomorfo à  $\mathbb{S}^1$ , e este processo modifica o espaço ambiente, que agora será uma variedade com esquinas (veja a Figura 1.1). Dessa forma, para enunciar o teorema precisamos fazer menção ao espaço ambiente, e isto demandará também que definamos um sistema forçado globalmente. Esta definição é dada de forma precisa na Seção 2.1, mas vamos introduzi-la agora brevemente com o objetivo de enunciar nossos resultados.

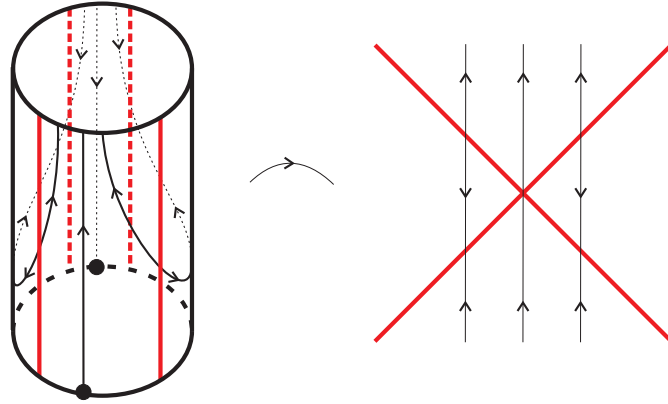


Figura 1.1: Sistema forçado em uma variedade com esquinas após blow-up.

Uma **variedade com esquinas 2-dimensional**  $\mathcal{M}$  é uma variedade analítica cujos abertos são homeomorfos a abertos de  $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ .

Uma **1-folheação orientada analítica**, por sua vez, é uma coleção de pares  $\mathcal{X} = \{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$  tal que  $\{U_i\}_{i \in I}$  é uma cobertura aberta de  $\mathcal{M}$ ,  $X_i = (P_i, Q_i)$  é um campo de vetores analítico definido em  $U_i$  e, na intersecção de dois abertos  $U_i \cap U_j$ , os campos  $X_i$  e  $X_j$  coincidem a menos de uma função estritamente positiva.

Finalmente, **feixe de ideais principais**  $\mathcal{I} = \{(U_i, \delta_i)\}_{i \in I}$  é uma coleção de pares tal que  $\{U_i\}_{i \in I}$  é uma cobertura aberta de  $\mathcal{M}$ ,  $\delta_i$  é uma função analítica irreduzível definida em  $U_i$  e, na intersecção de dois abertos  $U_i \cap U_j$ , as funções  $\delta_i$  e  $\delta_j$  coincidem a menos de uma função estritamente positiva. O conjunto de zeros deste ideal é o **conjunto de impasse**.

Um sistema forçado 2-dimensional analítico é a terna  $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$ .

De maneira intuitiva, o processo de resolução de singularidades consiste em substituir uma singularidade de um sistema forçado por um novo conjunto compacto. Neste novo conjunto compacto, singularidades menos degeneradas deverão aparecer. Novamente aplicamos este raciocínio para as novas singularidades que aparecem, e ao final do processo obtemos as singularidades mais “simples” possíveis. Esta noção de “simples” é justamente a noção de *ponto elementar*. Ambas as definições de singularidade e de ponto elementar de um sistema forçado estão apresentadas com detalhes na Seção 2.2.

Agora estamos aptos para enunciar nosso primeiro resultado.

**Resultado A.** Seja  $(\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$  um sistema forçado real analítico 2-dimensional definido numa variedade compacta com esquinas. Existe uma sequência finita de blow-ups com peso

$$(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{I}}) = (\mathcal{M}_n, \mathcal{X}_n, \mathcal{I}_n) \xrightarrow{\Phi_n} \cdots \xrightarrow{\Phi_0} (\mathcal{M}_0, \mathcal{X}_0, \mathcal{I}_0) = (\mathcal{M}, \mathcal{X}, \mathcal{I})$$

tal que  $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{I}})$  é elementar.

O enunciado preciso do Resultado A é o Teorema 3.19, que é o objeto de estudo de todo o Capítulo 3, e tanto seu enunciado quanto sua prova podem ser encontrados na Sub-seção 3.3.2. Para mais detalhes a respeito da noção de sistema forçado elementar, veja as Definições 2.6 e 3.6 e o Teorema 3.8.

O primeiro Teorema de resolução de singularidades para campos de vetores planares analíticos foi enunciado por Bendixson [5] e foi provado por Seidenberg [40]. Tal resultado foi generalizado por Dumortier [15] para campos de vetores reais  $C^\infty$ . Brunella e Miari [6] consideraram blow-ups com peso para resolver singularidades isoladas de campos de vetores analíticos sob algumas condições de não degenerescência. Pelletier [33] deu uma prova sem tais condições de não degenerescência, e no mesmo trabalho a autora também deu uma estimativa para o número de blow-ups com peso necessários para resolver uma singularidade. Panazzolo [32] provou o teorema de resolução de singularidades para campos de vetores analíticos em dimensão 3.

No que diz respeito a resolução de singularidades de sistemas forçados, o Teorema 3.19 pode ser provado da seguinte forma. Primeiro, aplicamos o resultado clássico de Bendixson–Seidenberg para resolver as singularidades da folheação  $\mathcal{X}$ , e em seguida aplicamos resultados da Geometria Algébrica a respeito de resolução de singularidades de conjuntos analíticos subordinados à folheações. De fato, uma vez que a folheação possui apenas pontos elementares, pelo teorema principal de [3] existe uma resolução de singularidades para o ideal de impasse  $\mathcal{I}$  de modo que os pontos da folheação continuam elementares.

Por outro lado, a abordagem utilizada neste trabalho não utiliza resultados de Geometria Algébrica, e a folheação e o conjunto de impasse são dessingularizados simultaneamente. Neste sentido, algumas ideias e definições utilizadas foram inspiradas em [4, 32, 33].

Uma vez que o Teorema de resolução de singularidades de sistemas forçados foi provado, podemos usar blow-ups para estudar e classificar retratos de fase dessa classe de sistemas. Este é justamente o conteúdo desenvolvido no Capítulo 4 e que podem ser encontrado também na pré publicação [35]. Como tal estudo é local, vamos denotar um sistema forçado definido em uma vizinhança de um ponto  $p$  pela terna  $(X, \delta, p)$ , em que  $X$  denota o campo de vetores adjunto e  $\delta$  é uma função analítica irredutível cujo conjunto de zeros é o conjunto de impasse  $\Delta_\delta$ . Quando  $p$  é a origem, denotamos o sistema forçado simplesmente por  $(X, \delta)$ .

Primeiramente, damos uma condição baseada na resolução de singularidades que determina quando dois sistemas forçados são equivalentes (ou mais precisamente,  $C^0$ -orbitalmente equivalentes). Esta condição é chamada *esquema elementar de singularidades* (veja a Definição 4.5, Seção 4.1). A grosso modo, provamos que se dois sistemas forçados possuem a mesma resolução de singularidades, então eles são equivalentes. Este resultado estende o Teorema B de [15] para o contexto de sistemas com impasses. Em outras palavras:

**Resultado B.** Se dois sistemas forçados possuem o mesmo esquema elementar de singularidades então, localmente, eles são equivalentes.

O enunciado preciso do Resultado B é exatamente o enunciado do Teorema 4.10 (veja Seção 4.1), e a definição de equivalência que adotamos ao longo deste trabalho pode ser encontrada na Seção 2.1. Tal teorema é um resultado chave para provar os Resultados C e D e no desenvolvimento do restante do Capítulo 4.

No que diz respeito ao Resultado C, suponha que  $0$  é uma singularidade do sistema forçado  $(X, \delta)$ , em que  $0$  é um ponto de equilíbrio do campo de vetores adjunto  $X$  e um ponto regular da curva de impasse  $\Delta$  simultaneamente. Associamos um polígono de Newton  $\mathcal{P}$  a este sistema forçado e mostramos no Resultado C que os termos que estão na fronteira  $\partial\mathcal{P}$  do polígono determinam topologicamente o retrato de fase. Em outras palavras, os termos na fronteira  $\partial\mathcal{P}$  definem a chamada *parte principal*  $(X_\Omega, \delta)$  do sistema forçado (veja a Definição 4.14, Seção 4.2), e provamos que, sob certas condições de não degenerescência, o sistema forçado original é orbitalmente equivalente a sua parte principal.

De um ponto de vista prático, o Resultado C diz que se quisermos estudar propriedades topológicas de uma singularidade próxima a parte regular de  $\Delta$ , podemos “descartar” os termos da expansão em Taylor que não estão na fronteira  $\partial\mathcal{P}$  do polígono. Este resultado estende o Teorema A de [6] para o contexto de sistemas forçados.

**Resultado C.** Sob certas condições de não degenerescência, um sistema forçado  $(X, \delta)$  é, localmente, equivalente a sua parte principal  $(X_\Omega, \delta)$ .

O enunciado preciso do Resultado C é o Teorema 4.19, cuja prova pode ser encontrado na Seção 4.2.

O próximo objetivo é classificar retratos de fase de sistemas forçados cuja curva de impasse é singular. Defina o conjunto  $\mathcal{A}$  como sendo o conjunto dos sistemas forçados  $(X, \delta)$  definidos numa vizinhança da origem tais que:

1. O campo de vetores adjunto é constante, isto é,  $X(x, y) = (a, b)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a^2 + b^2 \neq 0$ .
2. A função  $\delta$  é uma das funções dadas pela classificação das singularidades do tipo ADE de Arnold [2] (veja a tabela 4.1 na Seção 4.3).

O Resultado D dá condições para garantir quando um sistema forçado  $(X, \delta)$  é equivalente a um sistema em  $\mathcal{A}$ , em que os coeficientes  $a_{-1,0}$  e  $b_{0,-1}$  na expansão

$$\begin{cases} \delta(x, y)\dot{x} &= a_{-1,0} + a_{0,0}x + a_{-1,1}y + \dots, \\ \delta(x, y)\dot{y} &= b_{0,-1} + b_{0,0}y + b_{1,-1}x + \dots, \end{cases} \quad (1.1)$$

satisfazem  $a_{-1,0}^2 + b_{0,-1}^2 \neq 0$  e a função  $\delta$  é uma das dadas pela Tabela 4.1.

**Resultado D.** São dadas condições para que um sistema forçado da forma (1.1) seja equivalente a um sistema do conjunto  $\mathcal{A}$ , e também classificam-se todos os retratos de fase possíveis.

O enunciado preciso do Resultado D é o Teorema 4.20, Seção 4.3.

Já na segunda parte desta trabalho, no Capítulo 5, é realizado um estudo de fluxos de campos de vetores polinomiais tridimensionais em superfícies algébricas invariantes, cujos resultados estão na publicação [41]. Mais precisamente, o objetivo é criar uma ponte entre o estudo de sistemas forçados e o estudo de fluxo em tais superfícies. Para isso, vamos considerar campos de vetores tridimensionais cuja superfície algébrica invariante pode ser escrita da forma

$$M = \{(x, y, z); H(x, y, z) = f(x, y)z - g(x, y) = 0\},$$

onde  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são polinômios.

Como será explicitado mais adiante, superfícies como  $M$  podem ser conexas ou desconexas, regulares ou singulares, etc. Além disso, sistemas famosos na literatura de ciências aplicadas (Equação de Falkner–Skan, Sistema de Interação de Três ondas, Sistema de Lorenz, Sistema de Chen) possuem superfícies algébricas invariantes dessa forma.

A superfície  $M$  pode ser escrita como a união disjunta de dois subconjuntos:  $\mathcal{G}_M$  e  $\mathcal{I}_M$ . O primeiro deles é o gráfico da função  $z = (g/f)(x, y)$ , e o segundo deles representa o subconjunto de  $M$  que não pode ser escrito como gráfico com relação às variáveis  $x$  e  $y$ . O conjunto  $\mathcal{I}_M$  será chamado de **conjunto de pseudo-impasse**.

Devido à existência do conjunto de pseudo impasse, o fluxo do campo de vetores polinomial tridimensional  $X$  em  $M$  não pode ser globalmente descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias no plano. Por outro lado, provamos que o fluxo pode ser descrito por um sistema forçado.

**Exemplo 1.1.** Considere o campo de vetores  $X(x, y, z) = (2y, 2xz, (x^2 - 1)z - (y^2 - 1))$ , que possui  $H(x, y, z) = (x^2 - 1)z - (y^2 - 1)$  como polinômio de Darboux. Podemos escrever  $M = H^{-1}(0)$  da forma  $M = \mathcal{G}_M \cup \mathcal{I}_M$ , em que

$$\mathcal{G}_M = \{(x, y, z) \in M | z = (y^2 - 1)/(x^2 - 1), x \neq \pm 1\}, \text{ e}$$

$$\mathcal{I}_M = \{(x, y, z) \in M | y^2 - 1 = 0 = x^2 - 1, z \in \mathbb{R}\}.$$

Geometricamente,  $\mathcal{I}_M \subset M$  é formado por quatro retas paralelas ao eixo  $z$ . O fluxo de  $X$  em  $\mathcal{G}_M$  é descrito pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y; \\ \dot{y} &= \frac{2x(y^2 - 1)}{(x^2 - 1)}; \end{cases} \quad (1.2)$$

ao passo que o fluxo em toda a superfície  $M$  é descrito pelo sistema forçado

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y; \\ (x^2 - 1)\dot{y} &= 2x(y^2 - 1). \end{cases} \quad (1.3)$$



Observe que a projeção de  $\mathcal{I}_M$  no plano  $xy$  é um conjunto de pontos de equilíbrio do tipo nó hiperbólico do sistema adjunto

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 1); \\ \dot{y} = 2x(y^2 - 1). \end{cases} \quad (1.4)$$

Pode-se mostrar que  $\mathcal{I}_M$  não contém pontos de equilíbrio de  $X$ , e que essas quatro retas não são invariantes pelo fluxo de  $X$ . Veja a Figura 1.1.

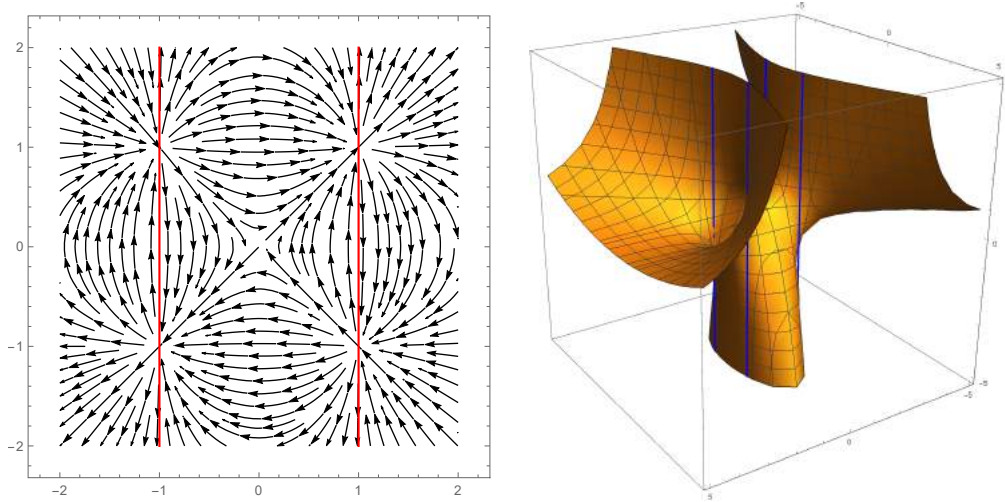


Figura 1.2: Retrato de fase de (1.2) (esquerda) e superfície  $M$  (direita). O conjunto de impasse  $\Delta$  está destacado em vermelho e o conjunto de pseudo impasse  $\mathcal{I}_M$  está destacado em azul.

A questão que norteia o desenvolvimento do quinto Capítulo é: como o estudo de sistemas forçados no plano pode ser útil no entendimento dos fluxos de campos de vetores tridimensionais em superfícies invariantes da forma  $M = \{f(x, y)z - g(x, y) = 0\}$ ? Para responder a esta pergunta, deve-se olhar para o conjunto de pseudo impasse  $\mathcal{I}_M$  e nossa abordagem buscou responder as seguintes questões:

1. Como uma singularidade de um sistema forçado pode nos ajudar a descrever o fluxo de  $X$  na superfície invariante  $M$ ?
2. As singularidades de um sistema forçado estão relacionadas com a geometria da superfície  $M$ , isto é, estão relacionadas com o fato de  $M$  ser regular ou singular, conexa ou desconexa?
3. Como é a projeção do conjunto de pseudo impasse no plano? Como são as dinâmicas do sistema forçado em torno do ponto projetado?
4. Quando o fluxo de  $X$  de em  $M$  é transversal a  $\mathcal{I}_M$ ? Quando  $\mathcal{I}_M$  é invariante por  $X$ ?

Equações diferenciais ordinárias descrevem o fluxo de  $X$  apenas em  $\mathcal{G}_M$ , ao passo que sistemas forçados podem descrever o fluxo em toda a superfície  $M$ . Nesta direção, nossos principais resultados são:

**Resultado E.** Seja  $M = \{f(x, y)z - g(x, y) = 0\}$  uma superfície algébrica invariante do campo de vetores polinomial  $X = \left(\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z)\right)$ . Então existe um sistema polinomial forçado definido em  $\mathbb{R}^2$  tal que

1. O conjunto de impasse de tal sistema é dado por  $\Delta = \{f(x, y) = 0\}$ ;
2. No conjunto aberto  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ , as curvas solução do sistema forçado são as projeções no plano  $xy$  das curvas solução de  $X$  em  $\mathcal{G}_M$ ;
3. A projeção do conjunto de pseudo impasse  $\mathcal{I}_M$  no plano  $xy$  está contida no conjunto de impasse  $\Delta$  e é um conjunto de pontos de equilíbrio do campo de vetores adjunto  $A^*F$ .

**Resultado F.** Se  $q = (x_0, y_0)$  é um ponto de impasse e equilíbrio hiperbólico do campo de vetores adjunto, então a reta  $r = \{(x_0, y_0, z) | z \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{I}_M$  satisfaz:

1. O fluxo do campo de vetores tridimensional em  $M$  é transversal à  $r$ ;
2. Não há pontos singulares de  $M$  em  $r$ ;
3. A linha  $r$  não contém pontos de equilíbrio do campo de vetores tridimensional.

Os Resultados E e F dizem respeito aos Teoremas 5.5 e 5.21, respectivamente. Além disso, mostramos que propriedades geométricas de  $M$  estão relacionadas com o tipo de singularidade do sistema forçado.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos os conceitos necessários para o entendimento e desenvolvimento dos resultados. Todo o Capítulo 3 é dedicado ao estudo do algoritmo de resolução de singularidades (também abordado na pré-publicação [34]), que será fundamental no desenvolvimento do Capítulo 4, onde nós usamos a resolução de singularidades como ferramenta para estudar e classificar retratos de fase de sistemas forçados (veja a pré-publicação [35]). Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos os resultados relacionados ao estudo de fluxos em superfícies invariantes, que também podem ser encontrados na publicação [41].

# Referências

- [1] ÁLVAREZ, M. J., FERRAGUT, A., AND JARQUE, X. A survey on the blow up technique. *Int. J. Bifurc. Chaos* 21 (2011), 3103–3118.
- [2] ARNOLD, V. Normal forms for functions near degenerate critical points, the weyl groups of  $a_k$ ;  $d_k$ ;  $e_k$  and lagrangian singularities. *Functional Anal. Appl.* 6 (1973), 254–272.
- [3] BELOTTO, A. Global resolution of singularities subordinated to a 1-dimensional foliation. *J. Algebra* 447 (2016), 397–423.
- [4] BELOTTO, A., AND PANAZZOLO, D. Global desingularization of a real-analytic planar vector field. Tech. rep., Université de Haute-Alsace, 2011.
- [5] BENDIXSON, I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math* 24 (1901), 1–88.
- [6] BRUNELLA, M., AND MIARI, M. Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra. *J. Differ. Equations* 85 (1990), 338–366.
- [7] CAO, J., CHEN, C., AND ZHANG, X. The Chen system having an invariant algebraic surface. *Int. J. Bifurc. Chaos* 18 (2008), 3753–3758.
- [8] CAO, J., AND ZHANG, X. Dynamics of the lorenz system having an invariant algebraic surface. *J. of Math. Physics* 48 (2007), 1–13.
- [9] CARDIN, P., SILVA, P., AND TEIXEIRA, M. Implicit differential equations with impasse singularities and singular perturbation problems. *Isr. J. Math.* 189 (2012), 189–307.
- [10] CHEN, G., AND UETA, T. Yet another chaotic attractor. *Int. J. Bifurc. Chaos* 9 (1999), 1465–1466.
- [11] CHUA, L., AND OKA, H. Normal forms for constrained nonlinear differential equations. I. Theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 35(7) (1988), 881–901.
- [12] CHUA, L., AND OKA, H. Normal forms for constrained nonlinear differential equations. II. Bifurcation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 36(1) (1988), 71–88.
- [13] CIMA, A., AND LLIBRE, J. Bounded polynomial vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* 318 (1990), 557–579.

- 
- [14] DEE, G., AND SAARLOOS, W. Bistable systems with propagating fronts leading to patternformation. *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988), 2641–2644.
  - [15] DUMORTIER, F. Singularities of vector fields on the plane. *J. Differ. Equations* 23 (1977), 53–106.
  - [16] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., AND ARTÉS, J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
  - [17] FALKNER, G., AND SKAN, S. Solutions of the boundary layer equations. *Phil. Magazine* 12 (1931), 865–896.
  - [18] FERRAGUT, A., AND GASULL, A. Seeking Darboux polynomials. *Acta Appl Math* 139 (2015), 167–186.
  - [19] FISHER, R. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics* 7-4 (1937), 353–369.
  - [20] GRAMSCI, A. *Cartas do Cárcere (Antologia)*. Editora Estaleiro, 2011.
  - [21] JOYCE, D. A generalization of manifold with corners. *Adv. Math.* 299 (2016), 760–862.
  - [22] LLIBRE, J., MESSIAS, M., AND SILVA, P. Global dynamics of the Lorenz system with invariant algebraic surfaces. *Int. J. Bifurc. Chaos* 20-10 (2010), 3137–3155.
  - [23] LLIBRE, J., MESSIAS, M., AND SILVA, P. Global dynamics of stationary solutions of the extended Fisher–Kolmogorov equation. *J. of Math. Physics* 52 (2011), 112701.
  - [24] LLIBRE, J., MESSIAS, M., AND SILVA, P. Global dynamics in the Poincaré ball of the Chen system having invariant algebraic surfaces. *Int. J. Bifurc. Chaos* 22 (2012), 1250154.
  - [25] LLIBRE, J., AND SOTOMAYOR, J. Structural stability of constrained polynomial systems. *Bulletin of the London Mathematical Society* 30-6 (1998), 589–595.
  - [26] LLIBRE, J., AND VALLS, C. On the Darboux integrability of Blasius and Falkner–Skan equation. *Computers and Fluids* 86 (2013), 71–76.
  - [27] LLIBRE, J., AND ZHANG, X. Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system. *J. of Math. Physics* 43 (2002), 1622–1645.
  - [28] LORENZ, E. Deterministic nonperiodic flow. *J. of the Atmospheric Sciences* 20 (1963), 130–141.
  - [29] LU, T., AND ZHANG, X. Darboux polynomials and algebraic integrability of the Chen system. *Int. J. Bifurc. Chaos* 17-8 (2007), 2739–2748.
  - [30] MAHDI, A., AND VALLS, C. Invariant algebraic surfaces for the reduced three-wave interaction system. *J. of Math. Phys.* 52 (2011), 122702.
  - [31] MUNKRES, J. *Topology*, 2 ed. Prentice Hall, New Jersey, 2000.
  - [32] PANAZZOLO, D. Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three. *Acta Math* 197(2) (2006), 167–289.

- 
- [33] PELLETIER, M. Éclatements quasi homogènes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 4 (1995), 879–937.
  - [34] PEREZ, O. H., AND SILVA, P. R. Resolution of singularities of 2-dimensional real analytic constrained differential systems. <https://arxiv.org/pdf/2012.00085> (2020), 1–35.
  - [35] PEREZ, O. H., AND SILVA, P. R. On the classification of planar constrained differential systems under topological equivalence. <https://arxiv.org/abs/2105.04748> (2021), 1–39.
  - [36] PIKOVSKII, A., AND RABINOVICH, M. Stochastic behavior of dissipative systems. *Soviet Scientific Reviews, Sec. C-Mathematical Physics Reviews* 2 (1981), 165–208.
  - [37] RABIER, P. J., AND RHEINBOLDT, W. C. Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. In *Handbook of Numerical Analysis* (North Holland, 2002), P. G. C. et al, Ed., vol. VIII, Elsevier, pp. 183–540.
  - [38] RIAZA, R. *Differential-Algebraic systems: Analytical aspects and circuit applications*. World Scientific Publishing, Singapura, 2008.
  - [39] SCHNEIDER, R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, 2 ed. Cambridge University Press, Reino Unido, 2013.
  - [40] SEIDENBERG, A. Reduction of singularities of the differential equation  $ady = bdx$ . *Amer. J. Math.* 90 (1968), 248–269.
  - [41] SILVA, P., AND PEREZ, O. Invariant algebraic surfaces and impasses. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 20(23) (2021), <https://doi.org/10.1007/s12346-021-00465-x>.
  - [42] SMALE, S. On the mathematical foundation of electrical networks. *J. of Diff. Geometry* 7 (1972), 193–210.
  - [43] SOTOMAYOR, J., AND ZHITOMIRSKII, M. Impasse singularities of differential systems of the form  $a(x)x' = f(x)$ . *J. Differ. Equations* 169 (2001), 567–587.
  - [44] ZHITOMIRSKII, M. Local normal forms for constrained systems on 2-manifolds. *B. da Soc. Bras. de Matematica* 24 (1993), 211–232.