



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Estudo de uma equação logística com um termo de advecção não linear

Willian Vinicius Felipe

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Março de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estudo de uma equação logística com um termo de advecção não linear

Willian Vinicius Felipe

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Março de 2024

F315e	Felipe, Willian Vinicius Estudo de uma equação logística com um termo de advecção não linear / Willian Vinicius Felipe. -- Presidente Prudente, 2024 54 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta 1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Princípio do Máximo. 3. Subsolução e supersolução. 4. Solução positiva. 5. Equação logística. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Estudo de uma equação logística com um termo de advecção não linear

AUTOR: WILLIAN VINICIUS FELIPE

ORIENTADOR: MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA (Participação Virtual)
Departamento de Matematica e Computacao / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Prof. Dr. MARCELO MESSIAS (Participação Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Prof. Dr. JOÃO RODRIGUES DOS SANTOS JÚNIOR (Participação Virtual)
Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Faculdade de Matemática / Universidade Federal do Pará

Presidente Prudente, 15 de março de 2024

*Dedico este trabalho à minha esposa, Leila,
ao meu filho, Caio.*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, ao Espírito Santo e ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, por terem me dado sabedoria e discernimento nas tomadas de decisões que me permitiram obter esta grande conquista, e por colocarem, ao longo da minha formação, pessoas que me auxiliaram e não permitiram que me desviasse dos objetivos planejados.

À minha família, minha mãe Maria Estela, meu pai Claudemir Felipe, a Cyntia Candido, minha prima Lúdia e minha sogra Patricia pelas orações, apoio e incentivo que foram essenciais para esta conquista. Em especial à minha esposa, Leila, que desde o início de nosso casamento me impulsionou aos estudos, sendo meu suporte neste período, e ao meu filho Caio, minha motivação particular para nunca desistir.

Aos amigos, que contribuíram de alguma maneira direta ou indiretamente para a execução deste trabalho, em especial ao Adriano, Agatha, Cláudia Zaupa, Eduardo, Enrico, Fran, Gabriel (GTL), Igor, Jhonatans, Joaquim Junior (Joka), Júlia Marques, Pr. Juliano Zaupa, Kelly Sumaia, Lucas de Oliveira, Leonardo Novaes, Maycon, Marcos Viana, Matheus Ferreira (Meta), Paulo (Paulão), Raul, Renan, Rodrigo (GPD), Rodolfo, William Gutierrez e Yino, os quais levarei em meu coração por toda minha vida.

A todos os professores do Departamento de Matemática da FCT-UNESP, no qual tive o privilégio de ser aluno durante a graduação e o mestrado, pelo excelente trabalho na construção do conhecimento e por não medirem esforços para ensinar.

Aos professores Dr. Marcelo Messias e Dr. João Rodrigues por aceitarem avaliar este trabalho e contribuir para a melhoria do mesmo.

Ao professor Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta por não me deixar desistir de minha formação acadêmica e pela excelente orientação durante a graduação e o mestrado, por toda disposição, paciência e maravilhosas sugestões que contribuíram na minha formação acadêmica e elaboração desse trabalho.

Ao professor Dr. Willian Cintra pela atenção e por todas as dúvidas sanadas via email.

Por fim, a UNESP, pelo apoio financeiro e por ser uma universidade pública, gratuita e de qualidade pela sua infraestrutura e recursos oferecidos para a realização dos meus estudos que possibilitou a construção desse trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“ E não nos cansemos de fazer o bem,
pois a seu tempo colheremos,
se não desanimarmos.”*
Gálatas 6:9

Resumo

Neste trabalho, será estudada a existência de solução positiva para uma equação logística com um termo de advecção não linear:

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p = \lambda u - u^2, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado com fronteira suave, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$, $p > 1$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. A equação (P) difere da equação logística clássica de dinâmica populacional pelo termo adicional não linear de advecção ($\vec{\alpha} \cdot \nabla u^p$). Do ponto de vista biológico, tal termo adicional representa a velocidade pela qual a espécie estudada se movimenta, sendo que sua densidade aumenta ou diminui dependendo da função u e da extensão do parâmetro p e do $|\vec{\alpha}|$. No entanto, do ponto de vista matemático, tal termo traz consigo uma nova complexidade. Além dos métodos já utilizados para a resolução de equações logísticas clássicas, como o princípio do máximo, as propriedades espectrais do autovalor principal do problema e o método de sub-supersolução, é necessário uma análise cuidadosa referente ao crescimento de p e do vetor $\vec{\alpha}$. Para isso, será utilizado o método de sub-supersolução levando em consideração o crescimento da função $f(x, u, \nabla) = \lambda u - u^2 - \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p$, e ainda utilizando a Identidade de Picone para mostrar a existência e unicidade de uma solução positiva para o problema. Por fim, é mostrado que ao modificar o parâmetro $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ por $\vec{\alpha} \in C_0^1(\overline{\Omega})$, se o $\text{div } \vec{\alpha} \equiv 0$ os resultados de unicidade de solução positiva permanecem, caso contrário, é demonstrado que se a bifurcação do caminho de soluções for subcrítica, em determinada região próxima de λ_1 é possível obter no mínimo duas soluções positivas para o problema (P).

Palavras-Chave: *Equações Diferenciais Parciais, Princípio do Máximo, Subsolução e supersolução, Identidade de Picone, Solução positiva, Equação logística.*

Abstract

In this work, we study the existence of a positive solution for a logistic equation with a nonlinear advection term:

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p = \lambda u - u^2, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P})$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, is a bounded domain with smooth boundary, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$, $p > 1$, and $\lambda \in \mathbb{R}$. Equation (P) differs from the classical logistic equation of population dynamics by the additional nonlinear advection term $(\vec{\alpha} \cdot \nabla u^p)$. From a biological perspective, such an additional term represents the velocity at which the studied species moves, with its density increasing or decreasing depending on the function u and the extent of the parameters p and $|\vec{\alpha}|$. However, from a mathematical standpoint, this term brings along a new complexity. In addition to the methods already used for solving classical logistic equations, such as the maximum principle, the spectral properties of the principal eigenvalue of the problem, and the sub-supersolution method, a careful analysis regarding the growth of p and the vector $\vec{\alpha}$ is necessary. For this, the sub-supersolution method will be used, taking into account the growth of the function $f(x, u, \nabla) = \lambda u - u^2 - \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p$, and also utilizing Picone's Identity to show the existence and uniqueness of a positive solution to the problem. Finally, it is shown that by modifying the parameter $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ to $\vec{\alpha} \in C_0^1(\Omega)$, if $\operatorname{div} \vec{\alpha} \equiv 0$, the results of uniqueness of positive solution remain, otherwise, it is demonstrated that if the bifurcation of the solution path is subcritical, in a certain region close to λ_1 , it is possible to obtain at least two positive solutions for the problem (P).

Keywords: Partial Differential Equations, Maximum Principle, Subsolution and Supersolution, Picone's Identity, Positive Solution, Logistic Equation.

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
1 Introdução	13
2 Resultados Preliminares	15
2.1 Princípio do máximo e o primeiro autovalor	15
2.2 Resultados de existência e regularidade	16
2.3 Problema de autovalores: caso de operadores autoadjuntos	17
2.4 Problemas de autovalores: caso de operadores não autoadjuntos.	20
2.5 Princípio do máximo forte e o primeiro autovalor	22
2.6 Método de sub-supersolução e Identidade de Picone	23
3 Critérios para existência e unicidade de solução clássica	29
4 Comportamento com respeito aos parâmetros $\vec{\alpha}$ e p	37
5 Caso $\vec{\alpha} \in C^1(\overline{\Omega})^N$	47
6 Considerações finais	53
Referências	53

Introdução

Consideremos a seguinte equação de reação, advecção e difusão:

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p = \lambda u - u^2, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado com fronteira suave, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$, $p > 1$, e $\lambda \in \mathbb{R}$.

A equação de reação, advecção e difusão modela fenômenos de dinâmica populacional. Neste contexto, segundo [8, 10, 17], temos que a função $u(x)$ representa a densidade populacional da espécie estudada habitada em Ω , e que a $\partial\Omega$ é letal para tal espécie. Este modelo não abrange apenas a densidade populacional, mas considera também a taxa de reprodução local do indivíduo através do termo de reação $f(\lambda, u) = \lambda u - u^2$. Neste modelo a espécie se move do local de menor densidade para o de maior densidade, e a direção é representada pelo termo de advecção $\vec{\alpha} \cdot \nabla u^p$ sendo que $\vec{\alpha}$ denota a direção do movimento da espécie e depende de u, p e $\vec{\alpha}$ a velocidade com que isso ocorre. Ou seja, quanto maior o valor de $u(x)$, p , e $|\vec{\alpha}|$, maior será a velocidade de difusão da espécie.

Em [7], Cantrell e Cosner estudaram o problema (P) para $p = 1$. Levando em conta o operador elíptico de segunda ordem $L_\alpha u = -\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \nabla u$, provaram que o primeiro autovalor $\lambda_1[L_\alpha] = |\vec{\alpha}|^2/4 + \lambda_1$, obtendo que a solução positiva encontrada é única se, e somente se, $\lambda > \lambda_1[L_\alpha]$.

Em [5], Belgacem e Cosner estudam a seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta u + \operatorname{div}(\alpha u \nabla m) = m(x)u - u^2, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde a função m está relacionada com a distribuição de recursos da espécie. Quanto maior o valor de m , mais recursos a espécie obtém na região $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Quando o valor de m se aproxima de 0, os recursos vão ficando escassos em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Sendo assim, $\operatorname{div}(\alpha u \nabla m)$ denota o deslocamento da espécie em direção ao valor máximo de m , pois trata-se do lugar onde se consegue a maior quantidade de recursos para a sobrevivência. Como a espécie estudada não sobrevive na fronteira de Ω , Belgacem e Cosner concluem que quanto mais afastada da fronteira a função m estiver, melhor será a distribuição de recursos.

Em [18], C. V. Pao estuda o seguinte problema não linear:

$$\begin{cases} -\Delta(a(x)D(u)\nabla u) + \vec{\alpha}(x) \cdot (D(u)\nabla u) = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $a(x) \in C^\gamma$ é uma função estritamente positiva em Ω , $\vec{\alpha}(x) = (\vec{\alpha}_1(x), \dots, \vec{\alpha}_n(x)) \in C^\gamma(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $D(u)$ é uma função positiva em $(0, \infty)$, com $D(0) = 0$ ou $D(0) > 0$. Assumindo que $\Omega \in C^{2+\gamma}$, Pao prova a existência de soluções positivas para alguns valores do parâmetro λ e a unicidade quando $\vec{\alpha}(x) \equiv 0$.

Neste trabalho, apresentaremos os resultados de Cintra, Montenegro, e Suárez em [9], onde é estudado o problema (P). Um dos resultados principais é dado por:

Teorema 1. *O problema (P) admite uma solução positiva em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \gamma < 1$, se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$. Além disso, a solução positiva encontrada é única.*

Tal resultado de unicidade é o primeiro na literatura para uma equação elíptica com termo de advecção não linear (P). Além disso, é feita uma análise sobre o comportamento assintótico da solução u com respeito ao parâmetro p , analisando o que ocorre com as soluções quando $p \rightarrow 1^+$ e com respeito ao parâmetro $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$, e verificando o comportamento da solução $u_{\lambda,\alpha}$ quando $|\vec{\alpha}| \rightarrow +\infty$ e quando $|\vec{\alpha}| \rightarrow 0$. Encerra-se com uma análise geral do caso em que $\vec{\alpha} \in C^1(\Omega)^N$.

No segundo capítulo, efetuaremos uma recapitulação sobre o princípio do máximo, operadores autoadjuntos e não autoadjuntos de problemas de autovalor, as propriedades espectrais do autovalor principal de um problema elíptico, o método de sub-supersolução e o enunciado da Identidade de Picone.

No terceiro capítulo, mostramos os critérios para que o problema (P) tenha uma solução positiva e única, utilizando algumas propriedades de imersão, método de sub-supersolução e a Identidade de Picone.

No quarto capítulo, faremos uma análise sobre o comportamento das soluções com respeito ao vetor $\vec{\alpha}$, demonstrando o Teorema 4.1. Em seguida é feita uma análise sobre o que ocorre com as soluções positivas quando o parâmetro p cresce, e quando se aproxima de 1 pela direita, demonstrando o Teorema 4.2.

No quinto capítulo, é modificado $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ por $\vec{\alpha} \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e é demonstrado através do gráfico de bifurcação que quando a bifurcação é subcrítica, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, se $\lambda \in (\lambda_1 - \epsilon, \lambda_1)$ o problema (P) admite no mínimo duas soluções positivas.

Resultados Preliminares

Com base em [1, 3, 6, 20, 13, 16], para o desenvolvimento deste trabalho apresentaremos alguns resultados de extrema importância, dentre eles estão os espaços de Sobolev e suas imersões nos espaços L^p , o princípio do máximo e as propriedades espectrais de operadores elípticos, assim como o método de sub-supersolução e a identidade de Picone.

2.1 Princípio do máximo e o primeiro autovalor

Começaremos com o Princípio do máximo clássico, e resultados sobre existência, unicidade e regularidade de problemas elípticos regulares.

Denotamos por

$$Lu := -\Delta u + c(x)u$$

$$u^+ := \max\{u, 0\}, \quad u^- := \min\{u, 0\},$$

onde $c \in L^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.1 (Princípio do máximo fraco). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado*

a) Suponhamos que $c \equiv 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfaz a hipótese. Então, o máximo de u em $\overline{\Omega}$ se alcança sobre $\partial\Omega$, isto é

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

b) Se $c \equiv 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ for tal que $Lu \geq 0$, então o mínimo de u em $\overline{\Omega}$ se obtém sobre $\partial\Omega$, logo

$$\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

c) Seja $c \geq 0$ e $Lu \leq 0$ com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

d) Seja $c \geq 0$ e $Lu \geq 0$ com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-.$$

e) Seja $c \geq 0$ e $Lu = 0$ com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Nota 2.1. O princípio do máximo fraco (especificamente os itens (c) e (d)) são válidos para funções $u \in H^1(\Omega)$, onde a desigualdade $Lu \leq 0$, significa que, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ positivo

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + c(x)uv \leq 0,$$

analogamente para $Lu \geq 0$. Recordemos que para uma função $u \in H^1(\Omega)$, dizemos que $u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ se $u^+ \in H_0^1(\Omega)$. Assumimos ainda,

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf\{k \in \mathbb{R} : u \leq k \text{ sobre } \partial\Omega\}, \quad \inf_{\partial\Omega} u = -\sup_{\partial\Omega} (-u).$$

Teorema 2.2 (Princípio do máximo forte de Hopf). Seja Ω satisfazendo a condição de esfera interior, $c \geq 0$ e a função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfaz as condições

$$\begin{cases} Lu \geq 0, & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \geq 0$ e $u > 0$ a menos que $Lu = 0$ e $u = 0$. Se $u \neq 0$, então $u(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$. Se $u(x_0) = 0$ em algum $x_0 \in \partial\Omega$, então neste ponto

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

onde η é o vetor normal externo a $\partial\Omega$.

2.2 Resultados de existência e regularidade

Para o encontro de existência e regularidade consideremos a seguinte equação linear

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = g(x), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado com fronteira regular de classe $C^{2,\gamma}$ e $c \geq 0$. Buscaremos três tipos de soluções:

- a) $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é solução clássica de (2.1) satisfaz a equação para todo $x \in \Omega$ e $u(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$.
- b) $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de (2.1) se para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + c(x)uv = \int_{\Omega} f v,$$

e $u - g \in H_0^1(\Omega)$.

- c) $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > 1$, se diz uma solução forte de (2.1), satisfaz a equação em quase todo ponto $x \in \Omega$, além disso $u - g \in W_0^{1,p}$.

A existência e unicidade de soluções clássicas para o problema (2.1), podem ser obtidas utilizando o Teorema 6.14 de [14].

Nos seguintes resultados, iremos considerar o espaço das funções Hölder contínuas com expoente γ ($C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $C^\gamma(\overline{\Omega})$ quando $m = 0$) onde $m \in \mathbb{N}$ e $0 < \gamma < 1$ é um número real (ver [1]).

Teorema 2.3. *Suponhamos que $c, f \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$ e que g tem uma extensão em Ω , $\hat{g} \in C^{2,\gamma}$. Então, (2.1) tem uma única solução $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, que satisfaz*

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}} \leq K(\|f\|_{C^\gamma} + \|\hat{g}\|_{C^{2,\gamma}}), \quad (2.2)$$

onde K é uma constante independente de f e $\hat{g}$.

Teorema 2.4. *Suponhamos agora que $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$, $f \in L^p(\Omega)$ para algum $p \in (1, +\infty)$, e $g \in W^{2,p}(\Omega)$. Então, (2.1) tem uma única solução $u \in W^{2,p}$ com $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e a seguinte estimativa de Agmon-Douglas-Nirenberg*

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C(\|f\|_p + \|g\|_{W^{2,p}}). \quad (2.3)$$

2.3 Problema de autovalores: caso de operadores auto-adjuntos

Nesta seção iremos estudar as propriedades do autovalor principal do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

com $c \in L^\infty(\Omega)$ ou $c \in C^\gamma(\overline{\Omega})$.

Suponhamos primeiramente que $c \geq 0$. Se considerarmos o operador

$$T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (\text{ou } C^\gamma(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\gamma(\overline{\Omega})) \quad f \mapsto u = T(f),$$

sendo u a solução do problema (2.1) com $g = 0$. Veremos que

- a) T está bem definido.
- b) T é compacto.
- c) $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um autovalor de T , isto é, existe $u \neq 0$ tal que $Tu = \mu u$ se, e somente se, $\frac{1}{\mu}$ é autovalor de (2.4)

Demonstração.

- a) Se $T : L^2 \rightarrow L^2$, temos que $T(u) = -\Delta u + c(x)u = u$, como a função u é a única solução do problema (2.4), pelo Teorema 2.4, T está bem definido. Analogamente se $T : C^\gamma \rightarrow C^\gamma$ pelo Teorema 2.3, T está bem definido.

- b) Sabemos que o operador T é compacto se dados X e Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear, se a imagem de conjuntos limitados em X é um pré-conjunto limitado em Y , ou seja, se $\overline{T(B)} \subset Y$ é compacto, para todo $B \subset X$ limitado. Equivalentemente, T é compacto se para toda sequência limitada (x_n) , existe uma sub-sequência $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ tal que $T(x_{n_k})$ é convergente.

Vejamos que T é compacto, de fato, dado uma sequência (f_n) limitada em $L^2(\Omega)$, no qual $u_n = T(f_n)$, podemos observar que pelo Teorema 2.4, $u_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e

$$\|u_n\|_{H^1} \leq K \|u_n\|_{H^2} \leq K \|f_n\|_{L^2} \leq K_1,$$

para algum $K_1 > 0$ real grande o suficiente, e portanto (u_n) é limitado em $H_0^1(\Omega)$. Pelas imersões compactas de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, temos que toda sequência convergente em $H_0^1(\Omega)$, possui uma subsequência convergente em $L^2(\Omega)$. Logo T é compacto.

- c) Considerando o autovalor de T como $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe $u \in L^2(\Omega)$ no qual $u \neq 0$, tal que $T(u) = \mu u$. Logo,

$$\begin{aligned} -\Delta(\mu u) + c(x)(\mu u) &= u \\ \Rightarrow \mu(-\Delta u + c(x)u) &= u \\ \Rightarrow -\Delta u + c(x)u &= \frac{1}{\mu}u, \end{aligned}$$

portanto $\frac{1}{\mu}$ é autovalor de (2.4).

Por outro lado, se $\frac{1}{\mu}$ é autovalor de (2.4), temos que

$$\begin{aligned} -\Delta u + c(x)u &= \frac{1}{\mu}u. \\ \Rightarrow \mu(-\Delta u + c(x)u) &= u \\ \Rightarrow -\Delta(\mu u) + c(x)(\mu u) &= u \\ \Rightarrow T(u) &= \mu u \end{aligned}$$

para $u \neq 0$, então μ é autovalor de $T(u)$. ■

Teorema 2.5. *O espectro do problema (2.4), consiste em uma sequência de autovalores $\{\lambda_n\}$, monótona crescente com $\lambda_n \rightarrow +\infty$ e $\lambda_1 > 0$. Existe uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$, $\{\varphi_n\}$, constituída por autofunções. Além disso, as autofunções pertencem a $W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > 1$, se $c \in L^\infty(\Omega)$, e pertencem a $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ se $c \in C^\gamma(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Veremos a regularidade das autofunções usando o argumento de "bootstrapping".

Seja $\varphi \in L^2(\Omega)$ uma autofunção, então φ é uma solução do problema linear (2.4), com segundo membro em $L^2(\Omega)$, e portanto a solução $\varphi \in H^2(\Omega)$. Pelas imersões contínuas de Sobolev (Corolário 9.14 de [6]), obtemos o seguinte resultado, se $\varphi \in W^{2,p_0}(\Omega)$ para algum p_0 com $2p_0 > N$, então $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$, e portanto $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > 1$. Como $\varphi \in H^2(\Omega)$, se $N = 4$, $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q > 2$. Quando $N < 4$, $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$. Logo em ambos os casos, $\varphi \in L^p(\Omega)$, para todo $p > 1$ e por tanto $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ pelo Teorema 2.4.

Sendo assim, podemos supor que $N > 4$. Nesse caso $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $2 \leq q \leq \frac{2N}{N-4}$, como consequência $\varphi \in L^{2N/(N-2)}(\Omega)$, pelo Teorema 2.4 $\varphi \in W^{2,2N/(N-2)}(\Omega)$, considerando p^* de tal forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^*} &= \frac{1}{\frac{2N}{N-4}} - \frac{2}{N} \Leftrightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{N-4}{2N} - \frac{4}{2N} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{N-8}{2N} \\ &\Leftrightarrow p^* = \frac{2N}{N-8}. \end{aligned}$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev obtemos que $W^{2N/(N-4)}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $2N/(N-4) \leq q \leq 2N/(N-8)$, consequentemente $\varphi \in L^{2,2N/(N-8)}(\Omega)$, com isso $\varphi \in W^{2,2N/(N-8)}(\Omega)$, sendo assim considerando p^* da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^*} &= \frac{1}{\frac{2N}{N-8}} - \frac{2}{N} \Leftrightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{N-8}{2N} - \frac{4}{2N} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p^*} = \frac{N-12}{2N} \\ &\Leftrightarrow p^* = \frac{2N}{N-12}. \end{aligned}$$

Novamente pelas imersões contínuas de Sobolev, $W^{2,2N/(N-8)}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $2N/(N-4) \leq q \leq 2N/(N-8)$. Repetindo o processo pelo Teorema 2.4 e pelo Colorário 9.14 de [6], obtemos que $\varphi \in W^{2,2N/(N-4n)}(\Omega)$ com $n \in \mathbb{N}$ se

$$\begin{aligned} &\frac{2 \cdot 2N}{N-4n} > N \\ \Leftrightarrow &4 > N-4n \\ \Leftrightarrow &N-4 < 4n. \end{aligned}$$

Considerando n suficientemente grande, temos que as autofunções $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p > 1$. ■

Proposição 2.1. *O primeiro autovalor do problema (2.4) é dado pela seguinte fórmula variacional*

$$\lambda_1(c) := \inf \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + c(x)u^2), u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_2 = 1 \right\}.$$

Além disso, se φ_1 é uma autofunção associada a $\lambda_1(c)$, então

$$\lambda_1(c) = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \varphi_1|^2 + c(x)\varphi_1^2)}{\int_{\Omega} \varphi_1^2}.$$

Reciprocamente, se $w \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\lambda_1(c) = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla w|^2 + c(x)w^2)}{\int_{\Omega} w^2}.$$

então w é uma autofunção associada a $\lambda_1(c)$.

Demonstração. [20, Proposição 1.8.]. ■

Observação 2.1. *Em particular, para $c \equiv 0$, se deduz que*

$$\lambda_1 \int_{\Omega} |u|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \Leftrightarrow \|u\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\nabla u\|_2, \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.5)$$

Dai segue a desigualdade de Poincaré (Corolário 9.19 de [6]).

Derivados da proposição anterior, se deduz os seguintes resultados de monotonia.

Corolário 2.1. a) *Se $c_1 \leq c_2$, então $\lambda_1(c_1) \leq \lambda_1(c_2)$.*

b) *Se $c(x) \equiv 0$, se tem que $\lambda_1 > 0$.*

Demonstração. [20, Corolário 1.10.]. ■

Proposição 2.2. *O primeiro autovalor $\lambda_1(c)$ é o único cujas autofunções têm sinal definido. Isto é, apenas as autofunções associadas a $\lambda_1(c)$ são estritamente positivas ou estritamente negativas.*

Demonstração. [20, Proposição 1.11.]. ■

2.4 Problemas de autovalores: caso de operadores não autoadjuntos.

Nesta seção vamos estudar a existência do autovalor principal e suas propriedades, para o caso em que o operador não é autoadjunto. Embora por simplicidade aplicaremos no mesmo operador das seções anteriores, tais resultados podem ser aplicados em operadores gerais da seguinte forma

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^N b_i(x) \partial_i u + c(x)u. \quad (2.6)$$

Seguindo [20], em primeiro lugar iremos enunciar o resultado clássico de Krein-Rutman. Para isso definiremos o conceito de cone de um espaço de Banach e seu interior.

Dado um espaço de Banach $E = (E, \|\cdot\|)$ que possui uma relação de ordem, definimos seu cone positivo como

$$P := \{u \in E : u \geq 0\}, \dot{P} := P \setminus \{0\}.$$

Diz-se que E é um espaço de Banach ordenado (e.B.o) se seu cone positivo for fechado.

Definição 2.1. *Seja (E, P_1) e (F, P_2) dois e.B.o, e $T : E \rightarrow F$ linear*

a) *Diz-se que T é positivo se $T(P_1) \subset P_2$.*

b) *Diz-se que T é estritamente positivo se $T(\dot{P}_1) \subset \dot{P}_2$.*

c) *Se $\text{int}(P_2) \neq \emptyset$, se diz que T é fortemente positivo se $T(\dot{P}_1) \subset \text{int}(P_2)$.*

De acordo com [20, 16], através dos definições acima podemos enunciar o seguinte Teorema de Krein-Rutman.

Teorema 2.6 (Krein-Rutman). *Seja (E, P) um e.B.o e $\text{int}(P) \neq \emptyset$. Seja $T : E \rightarrow E$ linear, continua, compacto e fortemente positivo. Então*

a) *O raio espectral de T , definido por*

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

é positivo.

b) *$r(T)$ é um autovalor simples de T com autovetor positivo e não existe nenhum outro autovalor que tenha um autovetor positivo.*

c) *Todo autovalor λ de T , verifica que $|\lambda| \leq r(T)$.*

d) *Para cada $f \in \dot{P}$, a equação $\lambda x - Tx = f$ tem exatamente uma solução positiva se $\lambda > r(T)$ e não tem solução positiva se $\lambda \leq r(T)$.*

Com isso podemos considerar as seguintes observações

Observação 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado*

a) *O espaço $C(\overline{\Omega})$ é um e.B.o. e seu cone positivo tem interior não vazio*

$$\text{int}(P) = \{f \in C(\overline{\Omega}); 0 < f(x), \forall x \in \Omega\}.$$

b) *O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ é um e.B.o. e seu cone positivo é dado por*

$$P = \{f \in L^p; 0 \leq f \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}.$$

Este cone tem interior vazio.

c) *O espaço L^∞ é um e.B.o., possui cone positivo,*

$$P = \{f \in L^\infty; 0 \leq f \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}$$

com interior não vazio.

d) *O espaço $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ é um e.B.o. e tem cone positivo com interior não vazio.*

e) *Os espaços de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$ constituem e.B.o. com respeito a ordem natural induzida por $L^p(\Omega)$. Em geral, seu cone positivo tem interior vazio, mas se o Teorema das imersões de Sobolev for aplicável e $N < mp$, então o cone obtido possui interior não vazio.*

f) *O espaço $C_0(\overline{\Omega})$ é um e.B.o. e possui cone positivo com interior não vazio.*

Vamos utilizar o Teorema de Krein-Rutman para provar a existência do autovalor principal do problema (2.4) e também estudar suas principais propriedades, (ver [20]).

Teorema 2.7. *O problema (2.4) possui um autovalor principal, denotado por $\lambda_1(c)$ com as seguintes propriedades:*

a) *$\lambda_1(c)$ é o único autovalor simples e é o único associado a uma autofunção positiva.*

b) *Para qualquer outro autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ se tem que*

$$\lambda_1(c) < \text{Re}(\lambda).$$

c) Para cada $f \geq 0$, $f \neq 0$ a equação

$$\begin{cases} (L - \lambda)u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem exatamente uma solução positiva se $\lambda < \lambda_1$ e não tem solução positiva se $\lambda \geq \lambda_1(c)$.

Demonstração. [20, Teorema 1.17.] ■

2.5 Princípio do máximo forte e o primeiro autovalor

Com base em [20, 16], nesta seção apresentamos alguns resultados relacionados ao princípio do máximo com o primeiro autovalor positivo. Seja

$$Lu = -\Delta u + c(x)u$$

com $c \in C^\gamma(\Omega)$, $\gamma \in (0, 1)$.

Definição 2.2. *L verifica o Princípio do máximo forte (PMF) se qualquer $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisfaz*

$$\begin{cases} Lu \geq 0, & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

sendo alguma das desigualdades estrita, conclui-se que

a) $u > 0$ em Ω e

b)

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega \text{ tal que } u(x_0) = 0.$$

Utilizando o resultado acima é possível definir uma função em $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que seja uma supersolução estritamente positiva.

Definição 2.3. *Uma função $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ se chama supersolução estritamente positiva de L se $h > 0$ em Ω e se verificar uma das seguintes condições*

- $L(h) > 0$ em Ω .
- $L(h) \geq 0$ em Ω e $h > 0$ sobre $\partial\Omega$.

Com isso obtemos os seguintes resultados.

Teorema 2.8. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de fronteira $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes*

- a) L admite uma supersolução estritamente positiva.
- b) L verifica o Princípio do Máximo Forte.
- c) Se tem que $\lambda_1(c) > 0$.

Demonstração. [20, Teorema 1.21]. ■

Proposição 2.3. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de fronteira $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Se verifica que:*

a) *Se $c_1, c_2 \in C^0(\overline{\Omega})$, com $c_1 < c_2$, então $\lambda_1(c_1) < \lambda_1(c_2)$.*

b) *A aplicação*

$$C^0(\overline{\Omega}) \ni c \mapsto \lambda_1(c) \in \mathbb{R}$$

é contínua.

c) *Se Ω_0 é um subdomínio próprio de Ω com fronteira de classe $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $\lambda_1^{\Omega_0}(c) > \lambda_1^\Omega(c)$.*

Demonstração. [20, Teorema 1.22]. ■

2.6 Método de sub-supersolução e Identidade de Picone

Nesta seção, apresentamos um método para mostrar a existência de solução de um problema elíptico não linear da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado conexo de fronteira $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < 1$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é $C^\gamma(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Definição 2.4. *Um par de funções $(\underline{u}, \overline{u}) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ se chama uma sub-supersolução para o problema (2.7), se verificar as três condições seguintes:*

a) $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \forall x \in \Omega$,

b) $\underline{u}(x) \leq 0 \leq \overline{u}(x), \forall x \in \partial\Omega$,

c) $-\Delta \underline{u}(x) \leq f(x, \underline{u}(x)), \quad -\Delta \overline{u}(x) \geq f(x, \overline{u}(x)) \quad \forall x \in \Omega$.

Neste momento demonstraremos através dos seguintes resultados, que é possível obter uma solução para o problema (2.7) que esteja entre o par de sub-supersolução $(\underline{u}, \overline{u})$.

Teorema 2.9. *Suponhamos que $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e que (2.7) admite uma sub-supersolução. Então, existem funções $u_*, u^* \in C^2(\overline{\Omega})$ (não necessariamente distintas), que são soluções de (2.7). Além disso:*

a) u_*, u^* são limites de uma sequência monótona.

b) Qualquer solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (2.7) que verifica

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x),$$

também satisfaz

$$u_*(x) \leq u(x) \leq u^*(x).$$

Demonstração.

Seja $f(x, s)$ de classe C^1 em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, então sua derivada $f_s(x, s)$ atinge mínimo no compacto

$$\bar{\Omega} \times \left[\min_{\bar{\Omega}} \underline{u}(x), \max_{\bar{\Omega}} \bar{u}(x) \right].$$

Assim, podemos obter $K > 0$ suficientemente grande de modo que $s \mapsto f(x, s) + Ks$ seja crescente em $s \in [\min_{\bar{\Omega}} \underline{u}(x), \max_{\bar{\Omega}} \bar{u}(x)]$, para todo $x \in \bar{\Omega}$. Além disso, também podemos tomar $K > 0$ suficientemente grande tal que o operador $-\Delta + K$ satisfaça o Princípio do Máximo.

Definindo agora uma sequência (u_n) de funções em $C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$, sendo $u_0 = \underline{u}$ e para $n \geq 1$, u_n é a única solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n + K u_n = f(x, u_{n-1}) + K u_{n-1}, & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.8)$$

Vejamos primeiramente que (u_n) está bem definida. Por hipótese $u_0 = \underline{u}$ é de classe C^2 e $f(x, s)$ é de classe C^1 , segue pelas imersões do Teorema 1.34 de [1] que

$$f(x, u_0) + K u_0 \in C^1(\bar{\Omega}) \subset C^\gamma(\bar{\Omega}),$$

sendo assim por (2.8)

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + K u_1 = f(x, u_0) + K u_0, & \text{em } \Omega, \\ u_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

pelo Teorema 2.3, $u_1 \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ é solução do problema acima e portanto é única. Utilizando o processo de indução finita supondo que u_{n-1} é de classe C^2 e $f(x, u_{n-1})$ é de classe C^1 , segue que

$$f(x, u_{n-1}) + K u_{n-1} \in C^1(\bar{\Omega}) \subset C^\gamma(\bar{\Omega}),$$

por (2.8) temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_n + K u_n = f(x, u_{n-1}) + K u_{n-1}, & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo assim, pelo Teorema 2.3, u_n é a única solução do problema acima. Demonstrando que (u_n) está bem definida para todo $n \geq 1$.

Analogamente é possível construir uma sequência bem definida (u^n) com $u^0 = \bar{u}$ e para $n \geq 1$

$$\begin{cases} -\Delta u^n + K u^n = f(x, u^{n-1}) + K u^{n-1}, & \text{em } \Omega, \\ u^n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Provaremos agora que as sequências (u_n) e (u^n) são crescentes e decrescentes e que seus limites são as funções u_* e u^* respectivamente.

Primeiramente vejamos que (u_n) é crescente. Provemos que $u_0 = \underline{u} \leq u_1$. De fato, por (2.8) e pela definição de subsolução, temos que:

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_0) + K(u_1 - u_0) &= -\Delta u_1 + K u_1 - (-\Delta u_0 + K u_0) \\ &= -\Delta u_1 + K u_1 - (-\Delta \underline{u} + K \underline{u}) \\ &\geq f(x, u_0) + K u_0 - (f(x, \underline{u}) + K \underline{u}) \\ &= f(x, u_0) + K u_0 - f(x, u_0) - K u_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na fronteira temos que $u_1 = 0$ por (2.8) e $u_0 = \underline{u} \leq 0$. Pela Definição 2.4 concluímos que

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_0) + K(u_1 - u_0) \geq 0, & \text{em } \Omega, \\ u_1 - u_0 \geq 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então pelo Princípio do máximo temos que $u_1 - u_0 \geq 0$, implicando que $u_1 \geq u_0$ para todo $x \in \Omega$.

Utilizando novamente o princípio de indução, considerando que $u_{n-1} \leq u_n$, mostremos que $u_n \leq u_{n+1}$. De fato, usando que as funções u_n e u_{n+1} são soluções de (2.8) temos que,

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - u_n) + K(u_{n+1} - u_n) = f(x, u_n) + K(u_n) - f(x, u_{n-1}) - K(u_{n-1}), & \text{em } \Omega, \\ u_{n+1} - u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

como a função $s \mapsto f(x, s) + Ks$ é crescente, temos que $f(x, u_n) + Ku_n \geq f(x, u_{n-1}) + Ku_{n-1}$ quando $u_n \geq u_{n-1}$, sendo assim $f(x, u_n) + Ku_n - f(x, u_{n-1}) - Ku_{n-1} \geq 0$. Portanto,

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - u_n) + K(u_{n+1} - u_n) \geq 0, & \text{em } \Omega, \\ u_{n+1} - u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando novamente o Princípio do Máximo obtemos que $u_{n+1} \geq u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \Omega$, demonstrando que a sequência (u_n) é crescente.

Analogamente é possível provar que a sequência (u^n) é decrescente. Aplicando $u^0 - u^1$ no problema (2.9) em Ω , pela Definição 2.4 obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(u^0 - u^1) + K(u^0 - u^1) \geq f(x, \bar{u}) + K\bar{u} - (f(x, u^0) + Ku^0) = 0, & \text{em } \Omega, \\ u^0 - u^1 \geq 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

portanto pelo Princípio do Máximo temos que $u^0 \geq u^1$. Supondo que $u^{n-1} \geq u^n$ e pelo fato da função $f(x, s) + Ks$ ser crescente, temos que

$$\begin{cases} -\Delta(u^n - u^{n+1}) + K(u^n - u^{n+1}) = f(x, u^{n-1}) + Ku^{n-1} - (f(x, u^n) + Ku^n) \geq 0, & \text{em } \Omega, \\ u^n - u^{n+1} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

novamente aplicando o Princípio do Máximo obtemos que $u^n - u^{n+1} \geq 0$ implicando que $u^n \geq u^{n+1}$, para todo $x \in \Omega$.

Com isso construímos a seguinte desigualdade,

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq u^n \leq u^{n-1} \leq \cdots \leq u^0 = \bar{u}. \quad (2.10)$$

Sendo tais sequências monótonas e limitadas, podemos afirmar que seus limites pontuais existem

$$u_*(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) \text{ e } u^*(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(x), \forall x \in \bar{\Omega}$$

sendo que,

$$\underline{u} \leq u_* \leq u^* \leq \bar{u}.$$

Por (2.10) temos que as sequências (u_n) e (u^n) são limitadas. Como a função $f(x, s) + Ks$ é crescente, temos que

$$f(x, u_n) + Ku_n \text{ e } f(x, u^n) + Ku^n$$

são limitadas em $L^\infty(\Omega)$. Pelo Teorema 2.4 as funções $u_n, u^n \in W^{2,p}(\Omega)$, para todo $p > 1$, logo da imersão contínua de Sobolev $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega})$, segue que (u_n) e (u^n) são

limitadas em $C^1(\overline{\Omega})$. Pela imersão $C^1 \hookrightarrow C^\gamma$, (u_n) e (u^n) são limitadas em $C^\gamma(\overline{\Omega})$, através do Teorema 2.3 temos que (u_n) e (u^n) são limitadas em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Como $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$, ou seja, é imerso compactamente, temos que, a menos de subsequência (u_n) e (u^n) são convergentes em $C^2(\overline{\Omega})$. Conhecendo seus limites pontuais, concluímos que

$$u_n \rightarrow u_* \text{ e } u^n \rightarrow u^*, \text{ em } C^2(\overline{\Omega}).$$

Então, fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (2.8) e (2.9), constatamos que

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\Delta u_* + Ku_* = f(x, u_*) + Ku_*, & \text{em } \Omega \\ u_* = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} -\Delta u_* = f(x, u_*), & \text{em } \Omega \\ u_* = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\Delta u^* + Ku^* = f(x, u^*) + Ku^*, & \text{em } \Omega \\ u^* = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} -\Delta u^* = f(x, u^*), & \text{em } \Omega \\ u^* = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Provando que u^* e u_* são soluções de (2.7).

Por último, seja u solução de (2.7) tal que $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$, temos que $u \in [u_n, u^n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, pois supondo que $u \geq u_{n-1}$ concluímos que

$$\begin{aligned} -\Delta(u - u_n) + K(u - u_n) &= f(x, u) + Ku - (f(x, u_{n-1}) + Ku_{n-1}) \\ &\geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega \end{aligned}$$

pois $f(x, u) + Ku$ é crescente, logo pelo Princípio do Máximo temos que $u \geq u_n$. Analogamente é possível demonstrar que $u \leq u^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, fazendo $n \rightarrow +\infty$ obtemos a seguinte desigualdade

$$u_* \leq u \leq u^*.$$

■

Nota 2.2. a) As soluções u_* e u^* são chamadas de solução minimal e maximal respectivamente.

b) Existem hipóteses diferentes sobre f que levam às mesmas conclusões. Por exemplo, se existe $K > 0$ tal que $f(x, s) + Ks$ é crescente em s para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Esta observação permite que o método seja aplicado a uma função $t \mapsto f(x, t)$ limitada. Na verdade, suponhamos que existe um par de sub-supersolução $(\underline{u}, \overline{u})$. Então se pode alterar o segundo membro de (2.7) por

$$\tilde{f}(x, u) = \begin{cases} f(x, \underline{u}) & \text{se } u \leq \underline{u}, \\ f(x, u) & \text{se } \underline{u} \leq u \leq \overline{u}, \\ f(x, \overline{u}) & \text{se } \overline{u} \leq u. \end{cases}$$

- c) O conceito de sub-supersolução pode ser definido em espaços de Sobolev, por exemplo, em $H_0^1(\Omega)$ ou em $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e provar que a solução fraca obtida é a solução clássica utilizando a teoria de regularidade de L^p . Por exemplo, $\underline{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é subsolução de (2.7), se verifica que $\underline{u} \leq 0$ em $\partial\Omega$ e

$$\int_{\Omega} (\nabla \underline{u} \cdot \nabla \psi - f(x, \underline{u})\psi) \leq 0, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \quad \psi \geq 0.$$

Esta observação é importante quando diminuimos a regularidade do segundo membro e só se pode esperar que encontremos uma solução fraca para o problema.

Veremos agora outro resultado sobre o par de sub-supersolução do problema (2.7).

Teorema 2.10. *Suponhamos que $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e que (2.7) admite uma sub-supersolução. Então, existe uma solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (2.7) que verifica*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x).$$

Demonstração. [20, Teorema 2.4]. ■

Os resultados apresentados são de extrema importância para nosso estudo, mas como a equação (P) que iremos trabalhar, dispõe de um vetor $\vec{\alpha}$ no $\mathbb{R}^N$ e um operador gradiente em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se torna necessário usarmos um método que aborda este contexto. Por esse motivo, usaremos o método de sub-supersolução do Teorema 1.1. de [3].

Para finalizar este capítulo, enunciaremos outro resultado que será de extrema importância para este trabalho, a identidade de Picone, desenvolvida com mais detalhes em [13].

Teorema 2.11 (Identidade de Picone). *Sejam $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $u, v \in C^2(\mathbb{R})$, $u > 0$. Temos a seguinte identidade*

$$\operatorname{div} \left[\psi \frac{v}{u} (u \nabla v - v \nabla u) \right] = \psi (u \Delta v - v \Delta u) + \psi' \frac{v}{u} u^2 \left| \nabla \left(\frac{v}{u} \right) \right|^2. \quad (2.11)$$

Demonstração. Ver artigo [13]. ■

Critérios para existência e unicidade de solução clássica

Seguindo o artigo [9], neste momento iremos desenvolver os critérios que garantem a existência e não existência de solução para o problema (P)

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p = \lambda u - u^2, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, um domínio limitado com fronteira suave, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$, $p > 1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considerando $\|\cdot\|_0$ a norma de $C^0(\overline{\Omega})$, iniciaremos estabelecendo um limite a priori para as soluções.

Lema 3.1. *Seja u uma solução clássica de (P), então*

$$\|u\|_0 \leq \lambda.$$

Demonstração. Seja $x_m \in \Omega$ tal que $u(x_m) = \max_{\overline{\Omega}} u(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Denotamos $u_m = u(x_m)$ e consideremos $L_\alpha u = -\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p$. Note que, pela definição de x_m , $-\Delta u_m \geq 0$ e $\nabla u_m = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} L_\alpha u_m &\geq 0 \Rightarrow \lambda u_m - u_m^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \lambda u_m \geq u_m^2 \\ &\Rightarrow \lambda \geq u_m \geq u(x), \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

■

A não existência de solução positiva é dado da seguinte forma.

Lema 3.2. *O problema (P) não admite solução positiva se $\lambda \leq \lambda_1$.*

Demonstração. Suponhamos que o problema (P) admita uma solução positiva denotada por $u > 0$. Multiplicando (P) por u e integrando em Ω ,

$$\int_{\Omega} ((-\Delta u)u + pu^p \vec{\alpha} \cdot \nabla u) = \int_{\Omega} (\lambda u^2 - u^3).$$

Pela formula de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} p u^p \vec{\alpha} \nabla u = \int_{\Omega} (\lambda u^2 - u^3) < \lambda \int_{\Omega} u^2, \quad (3.1)$$

como

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ pois } u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Pela integração por partes

$$\begin{aligned} p \int_{\Omega} u^p \vec{\alpha} \cdot \nabla u &= \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} \vec{\alpha} \cdot \nabla u^{p+1} \\ &= \frac{p}{p+1} \left(\int_{\partial\Omega} u^{p+1} \vec{\alpha} \eta - \int_{\Omega} u^{p+1} \operatorname{div} \vec{\alpha} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo $\eta = \eta(x)$ a representação do vetor normal unitário externo em $x \in \partial\Omega$. Consequentemente de (3.1) decorre que,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 < \lambda \int_{\Omega} u^2.$$

Porém pela Observação 2.1 conseguimos a seguinte inequação

$$\lambda_1 \int_{\Omega} u^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 < \lambda \int_{\Omega} u^2.$$

Provando que se a solução u for positiva, necessariamente $\lambda_1 < \lambda$, contrariando a hipótese. ■

Mostraremos a seguir as condições necessárias para a existência de soluções positivas para o problema (P).

Lema 3.3. *Para cada $\lambda > \lambda_1$, (P) tem uma solução positiva.*

Demonstração. Para encontrarmos uma função $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, que seja uma solução positiva seguindo a hipótese do teorema, utilizaremos o método de sub-supersolução. Sendo assim escreveremos (P) da seguinte forma,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^2 - p u^{p-1} \vec{\alpha} \nabla u := f(x, u, \nabla u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P')$$

Verifiquemos que f satisfaz a seguinte condição de crescimento ([3, 4]).

$$|f(x, s, \xi)| \leq c(\rho)(1 + |\xi|^2) \quad \forall \rho \geq 0 \text{ e } (x, s, \xi) \in \overline{\Omega} \times [-\rho, \rho] \times \mathbb{R}^N, \quad (3.3)$$

para alguma função decrescente $c : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$. De fato, pela desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} |f(x, s, \xi)| &\leq \lambda |s| + |s|^2 + p \sum_{i=1}^N |s|^{p-1} |\alpha_i \xi_i| \\ &\leq \lambda |s| + |s|^2 + \frac{p}{2} \sum_{i=1}^N (|s|^{2(p-1)} + |\alpha_i \xi_i|^2) \\ &\leq \lambda |\rho| + |\rho|^2 + \frac{pN}{2} |\rho|^{2(p-1)} + K \frac{p|\vec{\alpha}|^2}{2} |\xi|^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo K uma constante positiva. Definimos

$$c(\rho) := \max \left\{ \lambda|\rho| + |\rho|^2 + \frac{pN}{2}|\rho|^{2(p-1)}, K \frac{p|\vec{\alpha}|^2}{2}|\xi|^2 \right\},$$

desta maneira a condição de crescimento de (3.3) está satisfeita.

Para subsolução iremos considerar $\varepsilon\varphi_1^a$ onde φ_1 é a autofunção positiva associada a λ_1 normalizado em $C^0(\overline{\Omega})$, $\varepsilon > 0$ e $a > 1$ tal que $\lambda - a\lambda_1 > 0$. Por um cálculo direto,

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_1^a &= a\varphi_1^{a-1}\nabla\varphi_1 \\ \Delta(\varphi_1^a) &= a(a-1)\varphi_1^{a-2}|\nabla\varphi_1|^2 + a\varphi_1^{a-1}\Delta\varphi_1 \\ &= a(a-1)\varphi_1^{a-2}|\nabla\varphi_1|^2 - a\lambda_1\varphi_1^a. \end{aligned}$$

Portanto, $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1^a$ é uma subsolução de (P) para todo $x \in \Omega$, se, e somente se,

$$\begin{aligned} \varepsilon a(1-a)\varphi_1^{a-2}|\nabla\varphi_1|^2 + \varepsilon a\lambda_1\varphi_1^a + p\varepsilon^p\varphi_1^{a(p-1)}a\varphi_1^{a-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla\varphi_1 &\leq \lambda\varepsilon\varphi_1^a - \varepsilon^2\varphi_1^{2a} \Leftrightarrow \\ a(1-a)\varphi_1^{a-2}|\nabla\varphi_1|^2 + p\varepsilon^{p-1}\varphi_1^{a(p-1)-1}a\vec{\alpha} \cdot \nabla\varphi_1 + \varepsilon\varphi_1^a &\leq \lambda - a\lambda_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Desde que $a(p-1) - 1 > -2$ e $\varphi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$, é possível encontrar um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que para todo $0 < \varepsilon \leq 1$ obtemos

$$\varphi_1^{-2}a \left((1-a)|\nabla\varphi_1|^2 + p\varepsilon^{p-1}\varphi_1^{a(p-1)+1}\nabla\varphi_1 \right) < 0 \text{ em } \Omega_\delta, \quad (3.6)$$

onde

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \leq \delta\}.$$

De fato, sendo $\partial\varphi_1/\partial\eta = \nabla\varphi_1 \cdot \eta < 0$ em $\partial\Omega$, então $\nabla\varphi_1 \neq 0$ sobre $\partial\Omega$. Por continuidade, existe $\delta > 0$ e $\rho, K > 0$ tais que $K > |\nabla\varphi_1| \geq \rho > 0$ em Ω_δ . A existência de $\rho, K > 0$ segue da continuidade de $|\nabla\varphi_1|$ no compacto Ω_δ . Logo

$$\begin{aligned} \rho\varphi_1^{a(p-1)+1}\vec{\alpha}\nabla\varphi_1 &\leq p\varphi_1^{a(p-1)+1}|\vec{\alpha}||\nabla\varphi_1| < (a-1)|\nabla\varphi_1|^2 \\ \Leftrightarrow p\varphi_1^{a(p-1)+1}|\vec{\alpha}|\frac{1}{|\nabla\varphi_1|} &< a-1. \end{aligned}$$

Notemos que

$$p\varphi_1^{a(p-1)+1}|\vec{\alpha}|\frac{1}{|\nabla\varphi_1|} < p\varphi_1^{a(p-1)+1}|\vec{\alpha}|\frac{1}{\rho}.$$

Consequentemente, é suficiente que

$$p\varphi_1^{a(p-1)+1}|\vec{\alpha}|\frac{1}{\rho} < (a-1),$$

para isso, seja $\delta > 0$, tal que

$$\varphi_1(x) < \left(\frac{a-1}{|\vec{\alpha}|} \right)^{\frac{1}{a(p-1)+1}}, \quad \forall x \in \Omega_\delta.$$

Desta forma,

$$p\varphi_1^{a(p-1)+1}\vec{\alpha}\nabla\varphi_1 < (a-1)|\nabla\varphi_1|^2 \text{ em } \Omega_\delta,$$

a estimativa (3.6) é satisfeita.

Porém seja $K > 0$ real, tal que $\varphi_1(x) > K$ para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_1(x)^2} &< \frac{1}{K^2} \\ \frac{a(1-a)|\varphi_1(x)|^2}{\varphi_1(x)^2} &< \frac{a(1-a)|\varphi_1(x)|^2}{K^2} < 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Temos que $\varphi_1 \in C^2(\Omega)$, logo $\varphi_1 \in C(\Omega)$ e $\nabla \varphi_1 \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Considerando $K_1, K_2 > 0$ números reais, tais que $K \leq \varphi_1(x) \leq K_1$ e $|\nabla \varphi_1(x)| \leq K_2$, para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$. Levando em conta $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno onde a seguinte desigualdade ocorra

$$p\varepsilon^{p-1} \cdot \max\{K_1^{a(p-1)-1}, K^{a(p-1)-1}\} a \cdot |\vec{\alpha}| \cdot |\nabla \varphi_1| + \varepsilon K_1^a < \lambda - a\lambda_1,$$

consequentemente temos que,

$$p\varepsilon^{p-1} \varphi_1^{a(p-1)-1} a \cdot \vec{\alpha} \cdot \nabla \varphi_1 + \varepsilon \varphi_1^a < \lambda - a\lambda_1.$$

Satisfazendo assim (3.5) para todo $x \in \Omega$. Isso estabelece $\varepsilon \varphi_1^a$ como subsolução do problema (P) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Por outro lado, $\bar{u} = \lambda$ é uma supersolução em $\bar{\Omega}$. De fato,

$$-\Delta \lambda + \vec{\alpha} \nabla \lambda = 0 = \lambda^2 - \lambda^2, \text{ em } \Omega,$$

pois $\lambda \in \mathbb{R}$ e ainda $\lambda > 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, escolhendo

$$\varepsilon < \min \left\{ 1, \frac{\lambda - a\lambda_1}{\varphi_1^a} \right\},$$

temos que $\underline{u} = \varepsilon \varphi_1^a < \lambda = \bar{u}$ em $\bar{\Omega}$. Portanto pelo Teorema 1.1. de [3] existe uma solução $u \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ de (P) que satisfaz, $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$. ■

Agora provaremos a unicidade da solução para o problema (P) com um termo de reação monótona. Para este fim, usaremos a identidade de Picone (2.11) do Teorema 2.11.

Começaremos definindo Γ sendo um cone em $C_0^1(\bar{\Omega})$

$$\Gamma = \{u \in C_0^1(\bar{\Omega}) : u(x) \geq 0, \forall x \in \Omega\},$$

no qual seu interior é dado por

$$\text{int}(\Gamma) = \{u \in C_0^1(\bar{\Omega}) : u(x) > 0, \forall x \in \Omega \text{ e } \partial u(x)/\partial \eta < 0, \forall x \in \partial\Omega\}.$$

O seguinte resultado nos garante a unicidade da solução de (P).

Proposição 3.1. *Se $p > 1$, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}$, $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $\frac{f(t)}{t}$ é decrescente e considerando o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.8)$$

Se existir solução positiva $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap \text{int}(\Gamma)$, $q > 1$, então ela é única.

Demonstração. Suponhamos que $u, v \in W^{2,q}(\Omega) \cap \text{int}(\Gamma)$ são soluções positivas de (3.8) tais que $u \neq v$. Então

$$\begin{cases} -\Delta u + pu^{p-1} \vec{\alpha} \cdot \nabla u = f(u), & \text{q.t.p em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{I})$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v + pv^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla v = f(v), & \text{q.t.p em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{II})$$

Multiplicando (I) por v , e (II) por u e subtraindo (I) por (II) em Ω , obtemos

$$-v\Delta u + u\Delta v + puv^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla u - puu^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla v = vf(u) - uf(v) \text{ q.t.p. em } \Omega. \quad (3.9)$$

Definindo $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{(t^{p-1} - 1)^{2/(p-1)}}{t} & \text{se } t \geq 1 \\ -\frac{(1 - t^{p-1})^{2/(p-1)}}{t} & \text{se } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Notemos que $\psi(t) < 0$, se $t < 1$, $\psi(1) = 0$ e $\psi(t) > 0$, se $t > 1$. De fato,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= -\frac{(1 - t^{p-1})^{2/(p-1)}}{t} \\ &= -\frac{(1 - t^{p-1})^{2 \cdot (1/(p-1))}}{t}, \text{ se } t < 1. \end{aligned}$$

$$\psi(1) = \frac{(1-1)^{2/(p-1)}}{1} = 0.$$

$$\psi(t) = \frac{(t^{p-1} - 1)^{2/(p-1)}}{t}, \text{ se } t > 1.$$

Considerando a derivada de $\psi(t)$ por

$$\psi'(t) = \begin{cases} \frac{(t^{p-1} - 1)^{(3-p)/(p-1)} (t^{p-1} + 1)}{t^2} & \text{se } t \geq 1 \\ \frac{(1 - t^{p-1})^{(3-p)/(p-1)} (t^{p-1} + 1)}{t^2} & \text{se } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Se $t > 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{\frac{2}{p-1}(t^{p-1} - 1)^{\frac{2}{p-1}-1}(p-1)t^{p-2}t - (t^{p-1} - 1)^{\frac{2}{p-1}}}{t^2} \\ &= \frac{(t^{p-1} - 1)^{(3-p)/(p-1)} (2t^{p-1} - (t^{p-1} - 1))}{t^2} \\ &= \frac{(t^{p-1} - 1)^{(3-p)/(p-1)} (t^{p-1} + 1)}{t^2}, \end{aligned}$$

e se $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{-\frac{2}{p-1}(1 - t^{p-1})^{(3-p)/(p-1)} - (p-1)t^{p-2}t + (1 - t^{p-1})^{\frac{2}{p-1}}}{t^2} \\ &= \frac{(1 - t^{p-1})^{(3-p)/(p-1)} (2t^{p-1} + 1 - (t^{p-1}))}{t^2} \\ &= \frac{(1 - t^{p-1})^{(3-p)/(p-1)} (t^{p-1} + 1)}{t^2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que $\psi'(t) > 0$ se $t > 0$ e $t \neq 1$.

Multiplicando (3.9) por $\psi(v/u)$ e integrando obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v)\psi(v/u) + p(vu^{p-1}\alpha \cdot \nabla u - uv^{p-1}\alpha \cdot \nabla v)\psi(v/u) \\
&= \int_{\Omega} (v(-\Delta u + pu^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla u)\psi(v/u) + u(\Delta v - pv^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla v)\psi(v/u)) \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{u}{v}(vf(u))\psi(v/u) - \frac{v}{u}(uf(v))\psi(v/u) \right) \\
&= \int_{\Omega} uv \left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} \right) \psi(v/u).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Veremos que

$$I_1 = \int_{\Omega} vu^{p-1}\psi(v/u)\vec{\alpha} \cdot \nabla u - uv^{p-1}\psi(v/u)\vec{\alpha} \cdot \nabla v = 0 \tag{3.11}$$

e

$$I_2 = \int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v)\psi(v/u) \leq 0. \tag{3.12}$$

Primeiramente mostremos (3.11). Para isso definimos,

$$G(u, v) = -\frac{1}{p+1} |v^{p-1} - u^{p-1}|^{(p+1)/(p-1)} \text{ para } u, v \geq 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
G_u(u, v) &= \frac{\partial G(u, v)}{\partial u} \\
&= -\frac{p+1}{p-1} \left(\frac{1}{p+1} \right) |v^{p-1} - u^{p-1}|^{\left(\frac{p+1}{p-1}\right)-1} \cdot (-(p-1)u^{p-2}) \\
&= u^{p-1}u^{-1}|v^{p-1} - u^{p-1}|^{\left(\frac{2}{p-1}\right)} \\
&= u^{p-1} \frac{|v^{p-1} - u^{p-1}|^{\left(\frac{2}{p-1}\right)}}{u} \\
&= vu^{p-1}\psi\left(\frac{v}{u}\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Analogamente

$$G_v(u, v) = \frac{\partial G(u, v)}{\partial v} = -uv^{p-1}\psi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Então,

$$\nabla G(u, v) = \left(vu^{p-1}\psi\left(\frac{v}{u}\right), -uv^{p-1}\psi\left(\frac{v}{u}\right) \right).$$

Logo

$$\vec{\alpha} \nabla G(u, v) = \vec{\alpha} vu^{p-1}\psi\left(\frac{v}{u}\right) + \vec{\alpha} \left(-uv^{p-1}\psi\left(\frac{v}{u}\right) \right) = I_1.$$

Sabendo que

$$\operatorname{div}(\vec{\alpha} \cdot G(u, v)) = \vec{\alpha} \cdot \nabla G(u, v).$$

Pelo Teorema da Divergência (pag. 13 de [14]) obtemos

$$I_1 = \int_{\Omega} \vec{\alpha} \cdot \nabla G(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\alpha} G(u, v)) = \int_{\partial\Omega} G(u, v) \cdot \vec{\alpha} \cdot \eta = 0, \tag{3.14}$$

demonstrando a veracidade de (3.11).

Provaremos agora (3.12) em dois casos distintos.

Caso 1

Assumindo que $1 < p \leq 3$, temos que se $p = 3$,

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{v}{u}\right) &= \frac{v^2 - u^2}{vu} = \frac{v}{u} - \frac{u}{v} \\ \Rightarrow \nabla\psi\left(\frac{v}{u}\right) &= \left(v \ln(u) - \frac{1}{v}, 1 - u \ln(v)\right),\end{aligned}$$

logo $\psi \in C^1(0, +\infty)$. Portanto $u, v \in \text{int}(\Gamma)$ implicando que $(v/u) \in C^1(\overline{\Omega})$, pois $u \neq 0$, então podemos aplicar o Teorema 2.11 para obter,

$$\int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v)\psi(v/u) = - \int_{\Omega} \psi'(v/u)u^2|\nabla(v/u)| \leq 0. \quad (3.15)$$

Caso 2 Assumindo $p > 3$. Notemos que ψ não é diferenciável quando $t = 1$. De fato, sendo

$$\psi'(t) = \begin{cases} \frac{(t^{p-1} - 1)^{(3-p)/(p-1)}(t^{p-1} + 1)}{t^2} & \text{se } t \geq 1 \\ \frac{(1 - t^{p-1})^{(3-p)/(p-1)}(t^{p-1} + 1)}{t^2} & \text{se } 0 < t < 1, \end{cases}$$

temos que

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \psi'(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{t^2(t^{p-1} - 1)^{(p-3)/(p-1)}} \cdot (t^{p-1} + 1) = +\infty.$$

Logo ψ não é diferenciável em $t = 1$.

Para superar esta dificuldade usaremos um argumento de aproximação, para estudar o sinal de $\psi(t)$ próximo de $t = 1$. Fixando $\varepsilon > 0$, definimos a função $\psi_\varepsilon : (\varepsilon, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, para cada ε por

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon(t) &= \psi(t) * \eta_\varepsilon(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\eta_\varepsilon(t - y)dy \\ &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi(t - y)\eta_\varepsilon(y)dy,\end{aligned} \quad (3.16)$$

onde η_ε é de classe C^∞ tal que $\eta_\varepsilon \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(y)dy = 1$ e $\text{supp}(\eta_\varepsilon) \subset (-\varepsilon, +\varepsilon)$.

Considerando o Teorema 1 de [12] temos que $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ e,

$$\psi_\varepsilon \rightarrow \psi \text{ uniformemente em compactos de } (0, +\infty), \text{ com } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Além assim, temos que ψ_ε cresce uniformemente a partir do crescimento de $\psi(t)$. Em particular temos que $\psi'_\varepsilon(t) \geq 0$, para todo $t \in (\varepsilon, +\infty)$. De fato, seja $t_1, t_2 \in (\varepsilon, +\infty)$ com $t_1 \leq t_2$, sendo $\eta_\varepsilon \geq 0$, obtemos

$$\psi(t_1 - y)\eta_\varepsilon(y) \leq \psi(t_2 - y)\eta_\varepsilon(y).$$

Portanto, $\psi_\varepsilon(t_1) \leq \psi_\varepsilon(t_2)$.

Por outro lado, como $v(x)/u(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, para algum $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, temos que $v(x)/u(x) > \varepsilon$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então, aplicando a Identidade de Picone 2.11, obtemos

$$\int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v)\psi_{\varepsilon}\left(\frac{v}{u}\right) = - \int_{\Omega} \psi'_{\varepsilon}\left(\frac{v}{u}\right) u^2 \left|\nabla \frac{v}{u}\right| \leq 0.$$

Usando a propriedade de ψ_{ε} e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v)\psi_{\varepsilon}\left(\frac{v}{u}\right) \rightarrow \int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v)\psi\left(\frac{v}{u}\right) \text{ com } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Concluindo que,

$$I_2 = \int_{\Omega} (-v\Delta u + u\Delta v)\psi\left(\frac{v}{u}\right) \leq 0. \quad (3.17)$$

Sendo assim por (3.14) e (3.17) temos que

$$\int_{\Omega} uv \left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} \right) \psi\left(\frac{v}{u}\right) \leq 0.$$

Porém sabemos que $v \neq u$. Logo, pelo fato de $f(t)/t$ ser decrescente e por $\psi(t) > 0$ se $t > 1$ e $\psi(t) < 1$ quando $0 < t < 1$ temos que, se $u < v$ ou $v < u$ para todo $x \in \Omega$, em ambos os casos

$$\int_{\Omega} uv \left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} \right) \psi\left(\frac{v}{u}\right) \geq 0.$$

Portanto

$$\int_{\Omega} uv \left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} \right) \psi\left(\frac{v}{u}\right) = 0 \Rightarrow u = v.$$

■

Comportamento com respeito aos parâmetros $\vec{\alpha}$ e p

Neste capítulo completaremos a análise do comportamento assintótico da solução positiva de (P) $u_{\lambda, \vec{\alpha}}$ com respeito ao vetor $\vec{\alpha}$ e ao parâmetro p , conforme referenciado e demonstrado em [9].

Teorema 4.1. *Seja $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$. Para cada $\lambda > \lambda_1$, a única solução $u_{\lambda, \vec{\alpha}}$ para (P) que satisfaz*

$$u_{\lambda, \vec{\alpha}} \rightarrow 0 \text{ em } L^\infty(\Omega), \quad \text{com } |\vec{\alpha}| \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

e

$$u_{\lambda, \vec{\alpha}} \rightarrow u_\lambda \text{ em } C^1(\bar{\Omega}) \text{ com } |\vec{\alpha}| \rightarrow 0, \quad (4.2)$$

onde u_λ denota a única solução positiva de (P) com $\vec{\alpha} = 0$.

Demonstração. Primeiramente provaremos (4.1)

Se $|\vec{\alpha}| \rightarrow +\infty$, então existe α_i tal que $\alpha_i \rightarrow \pm\infty$ e denotamos por $u = u_{\lambda, \vec{\alpha}}$ a solução de (P). Suponha, por exemplo, que $\alpha_i \rightarrow +\infty$ para algum i fixo. Seja $M > 0$ uma constante real tal que $M - x_i > 0$ em $\bar{\Omega}$. Definindo assim $\phi(x) = M - x_i > 0$, multiplicando (P) por ϕ e integrando a equação resultante em Ω , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\phi(-\Delta u) + \phi \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p) &= \int_{\Omega} \phi(\lambda u - u^2) \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla u - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi + \int_{\Omega} \phi \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p &= \int_{\Omega} \phi(\lambda u - u^2) \\ \Rightarrow \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \int_{\Omega} (-\Delta \phi) u - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi + \int_{\Omega} \phi \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p &= \int_{\Omega} \phi(\lambda u - u^2). \end{aligned}$$

Note que $u = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Além disso, como $\partial\phi/\partial x_i = -1$, temos que $\Delta\phi = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
& - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi + \int_{\Omega} \phi \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p = \int_{\Omega} \phi (\lambda u - u^2) \\
\Rightarrow & - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi + \int_{\partial\Omega} u^p \phi \vec{\alpha} \cdot \eta - \int_{\Omega} u^p \vec{\alpha} \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) \phi \\
& \Rightarrow - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi - \int_{\Omega} u^p \vec{\alpha} \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) \phi \\
& \Rightarrow - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi + \int_{\Omega} u^p \alpha_i = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) \phi \\
& \Rightarrow - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) \phi - \int_{\Omega} u^p \alpha_i.
\end{aligned}$$

Como $\nabla \phi = (0, 0, \dots, -1, \dots, 0)$ temos que

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi + \int_{\Omega} u^p \alpha_i = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) \phi \\
& \Rightarrow - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) \phi - \int_{\Omega} u^p \alpha_i.
\end{aligned}$$

Sendo $\partial u / \partial \eta \leq 0$, $\lambda \geq 0$ e $\phi > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 & \leq - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \phi = \int_{\Omega} ((\lambda u - u^2) \phi - u^p \alpha_i) \leq \int_{\Omega} (\lambda u \phi - \alpha_i u^p) \\
0 & \leq \int_{\Omega} (\lambda u \|\phi\|_0 - \alpha_i u^p).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Desde que $p > 1$, para cada $\lambda > \lambda_1$, asseguramos pelo Lema 3.1

$$\begin{aligned}
\alpha_i \int_{\Omega} u^p & \leq \|\phi\|_0 \lambda \leq \|\phi\|_0 \lambda \|u\|_0 |\Omega| \\
& \leq \|\phi\|_0 \lambda^2 |\Omega|.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Considerando que $\alpha_i \rightarrow +\infty$, por (4.4) concluímos que

$$\int_{\Omega} u^p \rightarrow 0. \tag{4.5}$$

Multiplicando (P) por u^{p-1} e integrando obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (u^{p-1} (-\Delta u) + u^{p-1} \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p) = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) u^{p-1} \\
& \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^{p-1} - \int_{\partial\Omega} u^{p-1} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \int_{\Omega} u^{p-1} \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) u^{p-1} \\
& \int_{\Omega} (p-1) u^{p-1} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} u^{p-1} \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p = \int_{\Omega} (\lambda u - u^2) u^{p-1}.
\end{aligned}$$

Veremos que,

$$J_1 = (p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} |\nabla u|^2 = \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{p/2}|^2 \tag{4.6}$$

e

$$J_2 = \int_{\Omega} u^{p-1} \vec{\alpha} \nabla u^p = 0. \quad (4.7)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{p/2}|^2 &= \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} \left| \frac{p}{2} u^{(p-2)/2} \nabla u \right|^2 \\ &= \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} \frac{p^2}{4} u^{p-2} |\nabla u|^2 = J_1. \end{aligned}$$

E ainda temos que (4.7) é verdadeira por (3.2). Sendo assim, concluímos que

$$\frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{p/2}|^2 = \int_{\Omega} (\lambda u^p - u^{p-1}) \leq \lambda \int_{\Omega} u^p. \quad (4.8)$$

Logo, por (4.5) $\|\nabla u^{p/2}\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$ e sendo

$$\|u^{p/2}\|_{H_0^1}^2 = \|u^{p/2}\|_{L^2}^2 + \|\nabla u^{p/2}\|_{L^2}^2,$$

temos que $\|u^{p/2}\|_{H_0^1}^2 \rightarrow 0$.

Portanto

$$u^{p/2} \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente, por imersão

$$u^{p/2} \rightarrow 0 \text{ em } L^{q_0}, \quad q_0 < 2^* = \frac{2N}{N-2},$$

onde $N \geq 3$. Os casos em que $N = 1$ e $N = 2$, os resultados são análogos, já que nestes casos a compacidade acima ocorre para todo $q > 1$. Sendo assim, considerando

$$q_1 = \frac{p}{2} \cdot q_0 < \frac{p}{2} \cdot 2^* = \frac{pN}{N-2},$$

pela convergência acima, temos que

$$u \rightarrow 0 \text{ em } L^{q_1}(\Omega), \quad q_1 < p \left(\frac{2^*}{2} \right).$$

Então, multiplicando (P) por u^{q_1-1} e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4(q_1-1)}{q_1^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{q_1/2}|^2 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^{q_1-1} \\ &= \int_{\Omega} \lambda (u^{q_1} - u^{q_1+1}) \leq \lambda \int_{\Omega} u^{q_1}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$u^{q_1/2} \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$u^{q_1/2} \rightarrow 0 \text{ em } L^{q_2}(\Omega), \text{ com } q_2 < 2^*.$$

Novamente, considerando

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{q_1}{2} \cdot q_2 < \frac{q_1}{2} \cdot 2^* \\ &< \frac{p2^*}{2} \cdot \frac{2^*}{2} \\ &= p \left(\frac{2^*}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Sendo assim, pela convergência de $u^{q_1/2}$ em L^{q_2} temos que

$$u \rightarrow 0 \text{ em } L^{q_3}(\Omega), \quad q_3 < p \left(\frac{2^*}{2} \right)^2.$$

Utilizando este processo de interações até q_n , e considerando $q = q_n$ temos que

$$u \rightarrow 0 \text{ em } L^q(\Omega), \forall q < p \left(\frac{2^*}{2} \right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $2^*/2 > 1$, concluimos que

$$u \rightarrow 0 \text{ em } L^q(\Omega), \text{ para todo } q > 1. \quad (4.9)$$

Portanto multiplicando (P) por u e integrando, por (3.1) obtemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 < \lambda \int_{\Omega} u^2,$$

então por (4.9) temos que $\|u\|_{H_0^1} \rightarrow 0$.

Mediante ao analisado até o momento, provaremos que $\|u\|_{\infty} \rightarrow 0$. Multiplicando (P) por u^q e integrando em Ω , por (4.8) temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{(q+1)/2}| \leq \lambda \frac{(q+1)^2}{4q} \int_{\Omega} u^{q+1}.$$

Pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $2 < r < \frac{2N}{N-2}$, para algum $C > 0$, e pela Desigualdade de Poincaré, conseguimos

$$\begin{aligned} \|u^{(q+1)/2}\|_{L^r}^2 &= \left(\int_{\Omega} |u^{(q+1)/2}|^r \right)^{\frac{2}{r}} \leq C \|u^{(q+1)/2}\|_{H^{-01}}^2 = C (\|u^{(q+1)/2}\|_{L^2}^2 + \|\nabla u^{(q+1)/2}\|_{L^2}^2) \\ &= \left(\int_{\Omega} u^{r(q+1)/2} \right)^{\frac{2}{r}} \leq C \left(\int_{\Omega} |u^{(q+1)/2}|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u^{(q+1)/2}|^2 \right) \\ &\leq C(C_0 + 1) \int_{\Omega} |\nabla u^{(q+1)/2}|^2 \\ &= C_1 \int_{\Omega} |\nabla u^{q+1}| \\ &\leq C_1 \lambda \frac{(q+1)^2}{4q} \int_{\Omega} u^{q+1}. \end{aligned}$$

Sendo $\frac{(q+1)^2}{4q} \leq (q+1)$, pois caso contrário teríamos que,

$$\begin{aligned}
(q+1)^2 &> 4q(q+1) \\
\Leftrightarrow q^2 + 2q + 1 &> 4q^2 + 4q \\
\Leftrightarrow 0 &> 3q^2 + 2q - 1 \\
\Leftrightarrow 0 &> (q+1) \cdot \left(q - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow -1 < q < \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

o que contradiz o fato de $q > 1$.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} u^{\frac{r(q+1)}{2}}\right)^{\frac{2}{r}} &\leq C_1 \lambda (q+1) \int_{\Omega} u^{q+1} \\
\left(\int_{\Omega} u^{\frac{r(q+1)}{2}}\right)^{\frac{2}{r(q+1)}} &\leq (C_1 \lambda (q+1))^{\frac{1}{q+1}} \left(\int_{\Omega} u^{q+1}\right)^{\frac{1}{q+1}}.
\end{aligned}$$

Considerando $m = \frac{r}{2} > 1$ e $\theta = q + 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} u^m \theta\right)^{\frac{1}{m\theta}} &\leq (C_1 \lambda \theta)^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_{\Omega} u^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \\
\|u\|_{m\theta} &\leq (C_1 \lambda \theta)^{\frac{1}{\theta}} \cdot \|u\|_{\theta}.
\end{aligned}$$

Agora, seja $\theta = 2m^n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$ temos que
se $n = 0$

$$\|u\|_{2m} \leq (C\lambda 2)^{\frac{1}{2}} \|u\|_2,$$

se $n = 1$

$$\|u\|_{2m^2} \leq (C\lambda 2m)^{\frac{1}{2m}} \|u\|_{2m} \leq (C\lambda 2m)^{\frac{1}{2m}} (C\lambda 2)^{\frac{1}{2}} \|u\|_2.$$

Analogamente para todo $n \in \mathbb{N}$ obtemos,

$$\|u\|_{2m^n} \leq (2C\lambda)^{\frac{1}{2}} (2mC\lambda)^{\frac{1}{2m}} \cdots (2m^n C\lambda)^{\frac{1}{2m^n}} \|u\|_2.$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$, para alguma constante $C > 0$, se adquire

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|u\|_2.$$

Logo por (4.9) concluímos que $\|u\|_{\infty} \rightarrow 0$ completando a demonstração de (4.1).

Agora provaremos (4.2). Seja $(\vec{\alpha}_n)$ uma sequência tal que $|\vec{\alpha}_n| \rightarrow 0$ e seja $u_n = u_{\lambda, \vec{\alpha}}$ a única solução positiva para (P) com $\vec{\alpha}$ substituído por $(\vec{\alpha}_n)$. Sendo assim (u_n) verifica

$$\begin{cases} -\Delta u_n + u_n^{p-1} \vec{\alpha}_n \cdot \nabla u_n = \lambda u_n - u_n^2, & \text{em } \Omega \\ u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (Pu_n)$$

Onde $|u_n| \leq \lambda$ pelo Lema 3.1, pelo Teorema 2.4 e da estima de Agnan-Douglis-Nirenberg podemos concluir que $\|u_n\|_{W^{2,q}} < C$ para alguma constante independente de (u_n) e $q > 1$. Por imersão compacta de $W^{2,q} \hookrightarrow C^{\gamma}(\overline{\Omega})$, para $q > N > 1$ sendo $N \in \mathbb{N}$ e $0 < \gamma < 1$ [2, Teorema 6.3], existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$, tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u^* \text{ em } C^{\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (Pu_n) , obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u^* = \lambda u^* - (u^*)^2, & \text{em } \Omega \\ u^* = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 2.3 temos que $u^* \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, sendo a única solução positiva do problema acima. Portanto para completar a demonstração basta mostrar que $u^* \neq 0$ em Ω . Para isso, definimos $z_n = u_n / \|u_n\|_{L^2}$, $n \geq 1$, e seja $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ uma função teste. Multiplicando (Pu_n) por ζ , integrando em Ω e aplicando a integração por partes temos que

$$\begin{aligned} & -\Delta u_n \zeta + \zeta \vec{\alpha}_n \nabla u_n^p = \zeta (\lambda u_n - u_n^2) \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} -\Delta u_n \zeta + \int_{\Omega} \zeta \vec{\alpha}_n \nabla u_n^p = \int_{\Omega} \zeta (\lambda u_n - u_n^2) \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \zeta - \int_{\partial\Omega} \zeta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \int_{\partial\Omega} u_n^p \zeta \vec{\alpha}_n \eta_i d\sigma - \int_{\Omega} u_n^p \vec{\alpha}_n \nabla \zeta = \int_{\Omega} (\lambda u_n - u_n^2) \zeta. \end{aligned}$$

Dividindo por $\|u_n\|_{L^2}$ obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}} \nabla \zeta - \int_{\Omega} u_n^{p-1} \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}} \vec{\alpha}_n \nabla \zeta = \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}} - u_n \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}} \right) \zeta \\ & \int_{\Omega} \nabla z_n \nabla \zeta - \int_{\Omega} u_n^{p-1} z_n \vec{\alpha}_n \nabla \zeta = \int_{\Omega} (\lambda z_n - u_n z_n) \zeta. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se considerarmos $\zeta = z_n$ concluímos que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla z_n \nabla z_n - \int_{\Omega} u_n^{p-1} z_n \vec{\alpha}_n \nabla z_n = \int_{\Omega} (\lambda z_n - u_n z_n) z_n \\ & \int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 - \frac{1}{\|u_n\|_{L^2}^2} \int_{\Omega} u_n^p \vec{\alpha}_n \cdot \nabla u_n = \int_{\Omega} (\lambda z_n^2 - \|u_n\|_{L^2} \cdot z_n^3). \end{aligned}$$

Por (3.2) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 & < \lambda \int_{\Omega} z_n^2 \\ & = \lambda \|z_n\|_{L^2}^2 = \lambda, \end{aligned}$$

mostrando que (z_n) é limitado em $H_0^1(\Omega)$. Pelas imersões compactas e contínuas de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $q \in [1, 2^*)$ temos que existe uma subsequência $(z_{n_j}) \subset (z_n)$ e $z^* \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\begin{aligned} z_{n_j} & \rightharpoonup z^* \text{ em } H_0^1(\Omega) \\ z_{n_j} & \rightarrow z^* \text{ em } L^q(\Omega), \end{aligned}$$

com $\|z^*\|_{L^2} = 1$.

Por outro lado, temos que $u_n^{p-1} \rightarrow 0$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ pois supomos que $u^* = 0$. Além disso pelo Teorema 4.9. da referência [6] temos que a menos de subsequência, $z_n \rightarrow z^*$ quase sempre em Ω . Logo

$$u_n^{p-1} z_n \rightarrow 0.$$

Como $\vec{\alpha}_n \cdot \nabla \zeta$ são limitados, temos que $u_n^{p-1} \cdot z_n \cdot \vec{\alpha}_n \cdot \nabla \zeta \rightarrow 0$ q.t.p. x em Ω . Pelo fato de $u_n^{p-1} \in L^p(\Omega)$ e $z_n \in L^q(\Omega)$ sendo $1 \leq p, q \leq \infty$ pela Desigualdade de Hölder em [6] temos que $|u_n^{p-1} \cdot z_n \cdot \vec{\alpha}_n \cdot \nabla \zeta|$ é limitado em $L^1(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue conseguimos que,

$$\int_{\Omega} u_n^{p-1} \cdot z_n \cdot \vec{\alpha}_n \cdot \nabla \zeta \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla z_n \nabla \zeta - \int_{\Omega} u_n^{p-1} \cdot z_n \cdot \vec{\alpha}_n \cdot \nabla \zeta &= \int_{\Omega} (\lambda z_n - u_n z_n) \zeta \\ \int_{\Omega} \nabla z^* \nabla \zeta - 0 &= \int_{\Omega} \lambda z^* \zeta - 0. \end{aligned}$$

Considerando o fato de $u_n z_n \zeta \rightarrow 0$ q.t.p. x em Ω e $|u_n z_n \zeta| \leq |h \zeta| \in L^1(\Omega)$ para algum $h \in L^2(\Omega)$, pelo Teorema 4.9. da referência [6], e novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\Omega} u_n z_n \zeta \rightarrow 0.$$

Com isso concluímos que

$$\int_{\Omega} \nabla z^* \nabla \zeta = \lambda \int_{\Omega} z^* \zeta.$$

Como $z^* > 0$, temos que z^* é uma autofunção que não muda de sinal e seu autovalor associado é λ . Pelo Teorema 2.7, temos que $\lambda = \lambda_1$. Isso leva a uma contradição com o Lema 3.3. Portanto, concluímos que $u \neq 0$. ■

Para completar, analisaremos o comportamento das soluções de (P) quando $p \rightarrow 1^+$. Lembremos que $\lambda_1[L_{\vec{\alpha}}]$ denota o principal autovalor do operador $L_{\vec{\alpha}} = -\Delta + \vec{\alpha} \cdot \nabla$ com condições de fronteira de Dirichlet (veja [7]). Então, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *Fixado $\lambda > \lambda_1$, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ e denotando por $u_p = u_{\lambda, \vec{\alpha}}$ a única solução positiva de (P). Então*

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} u_p = \begin{cases} u_1 & \text{se } \lambda > \lambda_1[L_{\vec{\alpha}}], \text{ em } C^1(\overline{\Omega}), \\ 0 & \text{se } \lambda \leq \lambda_1[L_{\vec{\alpha}}], \text{ em } C^1(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

onde u_1 denota a única solução positiva de (P) com $p = 1$.

Demonstração. Seguindo a demonstração feita em [9], iremos provar tal resultado em dois casos.

Caso 1: Suponha $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_1[L_{\vec{\alpha}}]$. Seja (p_n) uma sequência tal que $p_n > 1$ com $p_n \rightarrow 1^+$ e denotemos $u_n = u_{p_n}$ a única solução positiva de (P) com o parâmetro p alterado por p_n ,

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \vec{\alpha} \nabla u_n^{p_n} = \lambda u_n - u_n^2, & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.12)$$

Sendo $\|u_n\|_0 \leq \lambda$ pelo Lema 3.1, e por regularidade elíptica, temos que $\|u_n\|_{W^{2,q}} < K$ para alguma constante K independente de p_n e $q > 1$. Pela imersão compacta de $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ para todo $q > N$, temos que a menos de subsequência, existe $u^* \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que,

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } C^1(\overline{\Omega}). \quad (4.13)$$

Multiplicando (4.12) pela função teste $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ e integrando obtemos,

$$\int_{\Omega} (\nabla u_n \cdot \nabla \zeta + \zeta \vec{\alpha} \cdot \nabla u_n^{p_n}) = \int_{\Omega} (\lambda u_n - u_n^2) \zeta, \quad (4.14)$$

e então,

$$\int_{\Omega} (\nabla u_n \cdot \nabla \zeta + u_n^{p_n} \vec{\alpha} \cdot \nabla \zeta) = \int_{\Omega} (\lambda u_n - u_n^2) \zeta. \quad (4.15)$$

Considerando $p_n \rightarrow 1^+$ e fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (4.15) obtemos,

$$\int_{\Omega} (\nabla u^* \cdot \nabla \zeta + u^* \vec{\alpha} \cdot \nabla \zeta) = \int_{\Omega} (\lambda u^* - (u^*)^2) \zeta. \quad (4.16)$$

Sendo assim, u^* é uma solução fraca não negativa de (P) com $p = 1$. Porém em [7] foi mostrado que (P) possui solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1[L_\alpha]$, com isso concluímos que a única solução possível neste caso é a solução trivial, ou seja, $u^* = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Caso 2: Suponha $\lambda > \lambda_1[L_\alpha]$. Com o intuito de aplicar o Teorema da Função Implícita, definimos $H : (0, +\infty) \times C_0^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ por

$$H(p, u) = u - (-\Delta)^{-1}(\lambda u - u^2 - \vec{\alpha} \nabla u^p), \quad (4.17)$$

onde $(-\Delta)^{-1}$ denota a inversa do operador $-\Delta$ sob condições de Dirichlet homogênea. Observemos que, para cada $p \geq 1$, $H(p, u) = 0$ se, e somente se, u é solução do problema (P). De fato, $H(p, u) = 0$ se, e somente se

$$\begin{aligned} u - (-\Delta)^{-1}(\lambda u - u^2 - \vec{\alpha} \nabla u^p) &= 0 \\ \Rightarrow u &= (-\Delta)^{-1}(\lambda u - u^2 - \vec{\alpha} \nabla u^p) \\ \Rightarrow -\Delta u &= \lambda u - u^2 - \vec{\alpha} \nabla u^p, \text{ para todo } x \in \Omega, \end{aligned}$$

mostrando que u é solução do problema (P).

Note que

$$H_u(p, u) = I - (-\Delta)^{-1}(\lambda - 2u - \vec{\alpha} p u^{p-1} \cdot \nabla u). \quad (4.18)$$

Seja u_1 a única solução positiva de (P) com $p = 1$. Temos que $H(1, u_1) = 0$ e

$$H_u(1, u_1) \xi = \xi - (-\Delta)^{-1}(\lambda \xi - 2\xi u_1 - \vec{\alpha} \cdot \nabla \xi). \quad (4.19)$$

Observe que $H_u(1, u_1)$ é uma perturbação compacta da identidade. De fato, seja $\xi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e considerando o operador $T : C_0^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$T(\xi) = (-\Delta)^{-1}(\lambda \xi - 2u_1 \xi - \vec{\alpha} \cdot \nabla \xi),$$

temos que $H_u(1, u_1) \xi = \xi - T(\xi)$ logo, para que tal operador seja uma perturbação compacta da identidade, basta que o operador T seja compacto. Seja $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em $C_0^1(\overline{\Omega})$ e seja

$$T_n = T(\xi_n) = (-\Delta)^{-1}(\lambda \xi_n - 2u_1 \xi_n - \vec{\alpha} \cdot \nabla \xi_n).$$

Note que

$$-\Delta T_n = \lambda \xi_n - 2u_1 \xi_n - \vec{\alpha} \cdot \nabla \xi_n.$$

Do Teorema 2.3, existe uma constante $K > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{C_0^2} &\leq K\|\lambda\xi_n - 2u_1\xi_n - \vec{\alpha} \cdot \nabla \xi_n\|_{C^\gamma} \\ &\leq K\|\lambda\xi_n\|_{C^\gamma} + \|2u_1\xi_n\|_{C^\gamma} + \|\vec{\alpha} \cdot \nabla \xi_n\|_{C^\gamma} \\ &\leq K + K + K = K_1. \end{aligned}$$

Logo, (T_n) é limitado em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Como $C_0^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ compactamente (ver [20, Teorema 5.2]), $T_n \rightarrow T$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$, a menos de subsequência. Então T é compacto.

Pelo fato de $H_u(1, u_1)$ ser uma perturbação compacta da identidade, tal operador é um isomorfismo se, e somente se, $\text{Nuc}[H_u(1, u_1)] = \{0\}$. Por outro lado, $\xi \in \text{Nuc}[H_u(1, u_1)]$ é equivalente a

$$\begin{aligned} H_u(1, u_1)\xi &= 0, \\ \Rightarrow \xi - (-\Delta)^{-1}(\lambda\xi + 2\xi u_1 + \vec{\alpha} \cdot \nabla \xi) &= 0, \\ \Rightarrow -\Delta\xi - \lambda\xi + 2\xi u_1 + \vec{\alpha} \cdot \nabla \xi &= 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Pela caracterização do Princípio do Máximo, é possível concluir que $\xi = 0$ é a única solução para a equação acima, desde que o operador $L = -\Delta - \lambda + 2u_1 + \vec{\alpha} \cdot \nabla$ admita uma supersolução estritamente positiva. De fato, u_1 é uma supersolução estritamente positiva do operador L ,

$$Lu_1 = -\Delta u_1 - \lambda u_1 + 2u_1^2 + \vec{\alpha} \cdot \nabla u_1 = \lambda u_1 - u_1^2 - \lambda u_1 + 2u_1^2 = u_1^2 > 0.$$

Logo (4.20) verifica o Princípio do Máximo. Consequentemente $H_u(1, u_1)$ é um isomorfismo. Agora, podemos usar o Teorema da Função Implícita para obter a existência de $\delta > 0$ e uma aplicação $p \in (1 - \delta, 1 + \delta) \mapsto u(p) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $u(p)$ é contínuo para $p = 1$, $u(1) = u_1$ e $(p, u(p))$ são as únicas soluções para $H(p, u) = 0$ em uma vizinhança de $(1, u_1)$. Como $u(1) = u_1 \in \text{int}(\Gamma)$, então $u(p)$ é uma função estritamente positiva. Sendo assim, $u(p)$ é uma solução positiva de (P). Pelo fato de (P) ter uma única solução positiva denotada por u_p , temos que $u(p) = u_p$. Por outro lado, a continuidade de $p \mapsto u(p)$, para $p = 1$ implica que

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} u(p) = \lim_{p \rightarrow 1^+} u_p = u(1) = u_1 \in C_0^1(\overline{\Omega}).$$

Finalizando a demonstração. ■

Caso $\vec{\alpha} \in C^1(\overline{\Omega})^N$

Assim como descrito na Seção 5 de [9], neste capítulo iremos considerar o problema (P) com um fluxo geral $\vec{\alpha} \in C^1(\overline{\Omega})^N$. O objetivo é estudar o que acontece com as soluções do problema (P) quando o parâmetro $\vec{\alpha}$ é modificado. Para este fim, iremos analisar a direção de bifurcação a partir da solução trivial de (P). Visando uma melhor compreensão dos resultados a seguir, iremos definir as condições necessárias para que uma bifurcação seja subcrítica ou supercrítica.

Definição 5.1. *Seja $(\lambda^*, 0)$ um ponto de bifurcação de $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times C_0^2(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega})$ a partir da solução trivial de (P). Dizemos que a bifurcação é*

- a) *Subcrítica, quando existe uma vizinhança V de $(\lambda^*, 0)$ em $\mathbb{R} \times C_0^2(\Omega)$, tal que toda solução não trivial $(\lambda, u) \in V$ onde $\lambda < \lambda^*$.*
- b) *Supercrítica, quando existe uma vizinhança V de $(\lambda^*, 0)$ em $\mathbb{R} \times C_0^2(\Omega)$, tal que toda solução não trivial $(\lambda, u) \in V$ onde $\lambda > \lambda^*$.*

Denotando por ϕ_1 a auto função associada ao autovalor λ_1 com $\|\phi_1\|_{L^2} = 1$, com isso temos o seguinte resultado

Teorema 5.1. *Seja $\vec{\alpha} \in C^1(\overline{\Omega})^N$. Então λ_1 é um ponto de bifurcação que parte da solução trivial de (P) e existe um contínuo ilimitado $\Sigma \subset \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega})$ de soluções positivas de (P), emanando de $(\lambda_1, 0)$, tal que $(\lambda_1, +\infty) \subset \text{Proj}_{\mathbb{R}} \Sigma \subset (0, +\infty)$. Além disso, a direção de bifurcação é*

- a) *subcrítica (resp. supercrítica) se $1 < p < 2$ e*

$$\int_{\Omega} \phi_1^{p+1} \operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)] dx > 0 \text{ (resp. } < 0),$$

- b) *subcrítica (resp. supercrítica) se $p = 2$ e*

$$\int_{\Omega} \phi_1^3 \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)] \right) dx < 0 \text{ (resp. } > 0).$$

- c) *supercrítica se $p > 2$.*

Demonstração. A prova deste teorema será feita conforme executada em [9], no qual primeiramente é provado que existe um contínuo ilimitado Σ de soluções positivas de P. Para este fim definimos $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0^1(\overline{\Omega})$ dado por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = u - (-\Delta)^{-1}(\lambda u - u^2 - pu^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla u). \quad (5.1)$$

Porém temos que,

$$\mathcal{F}_u(\lambda, u) = I - (-\Delta)^{-1}(\lambda - 2u - (p-1)u^{p-2}\vec{\alpha} \cdot \nabla u),$$

logo,

$$\mathcal{F}_u(\lambda_1, 0) = I - \lambda_1(-\Delta)^{-1}.$$

Pelo Teorema 2.12 de [19], e pelo Teorema 7.1.3 de [15], temos que de $(\lambda_1, 0)$ emana um contínuo ilimitado Σ de soluções positivas de (P).

Para provar que $Proj_{\mathbb{R}}\Sigma \subset (0, +\infty)$, é suficiente mostrar que (P) não admite uma solução positiva para $\lambda \leq 0$. Supondo por contradição que dado $\lambda \leq 0$ o problema (P) possui uma função u que é solução positiva, então,

$$\begin{cases} -\Delta u + pu^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla u = \lambda u - u^2 < 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabendo que o operador $Lu := -\Delta u + pu^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla u$ satisfaz o Princípio do Máximo, pela equação acima concluímos que $u \leq 0$. Portanto $u = 0$, provando que se $\lambda \leq 0$ o problema (P) não admite solução positiva.

Agora provaremos que $(\lambda_1, +\infty) \subset Proj_{\mathbb{R}}\Sigma$. Pelo comportamento global de Σ , é suficiente mostrar que existe cotas a priori em $C_0^1(\overline{\Omega})$, uniformes em $\lambda \in \Lambda \subset (0, +\infty)$, sendo Λ compacto. Repetindo o argumento da demonstração do Lema 3.1, obtemos um limite em $C_0(\overline{\Omega})$. Além disso, como $f(x, u, \nabla u) = \lambda u - u^2 - pu^{p-1}\vec{\alpha} \cdot \nabla u$ satisfaz a condição de crescimento (3.3), podemos aplicar a Proposição 2 de [4], obtendo assim a seguinte estimativa em $C_0^1(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq \lambda \|u\|_{C^1}.$$

Completando a análise global de Σ .

Agora, para obter a direção de bifurcação iremos considerar o seguinte operador não linear $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times C_0^2(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega})$

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) := -\Delta u + \vec{\alpha} \cdot \nabla u^p - \lambda u + u^2.$$

Por um cálculo direto obtemos que

$$\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0)\xi = -\Delta\xi - \lambda_1\xi,$$

e ainda que

$$\mathfrak{F}_{\lambda u}(\lambda_1, 0) = -1.$$

Iremos aplicar o Teorema de Crandall-Rabinowitz de [11, 20]. Para isso, considerando λ como o parâmetro principal de bifurcação, devemos mostrar que $\mathfrak{F}$ verifica as seguintes condições:

- a) $Nuc(\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0)) = \langle \phi_1 \rangle$
- b) $codim[Img(\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0))] = 1$
- c) $\mathfrak{F}_{\lambda u}(\lambda_1, 0) \notin Img[\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0)]$.

Condição a): Notemos que $\xi \in Nuc(\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0))$ se, e somente se, ξ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta \xi = \lambda_1 \xi, & \text{em } \Omega \\ \xi = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo,

$$Nuc[\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0)] = \langle \phi_1 \rangle.$$

Condição b): Dado $\phi \in Img[\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0)]$ existe $u \in C_0^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = \phi, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Considerando $L = (-\Delta)^{-1}$, obtemos

$$u - \lambda_1 L(u) = L(\phi).$$

Com isso, é possível definir o seguinte operador

$$\tau = I - \lambda_1 L,$$

o qual é uma perturbação compacta da identidade pois L é um operador compacto. Assim, τ é um operador de Freedholm de índice 0. Consequentemente, $codim[Img(\tau)] = dim[Nuc(\tau)]$, (ver [20]).

Condição c): Mostraremos que $\mathfrak{F}_{\lambda u}(\lambda_1, 0)\phi_1 \notin Img[\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0)]$. Supondo por contradição que isso ocorra, temos que $-\phi_1 \in Img[\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0)]$ logo, existe $u \in C_0^2(\overline{\Omega})$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = -\phi_1, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicando a equação acima por ϕ_1 em Ω obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\phi_1 \Delta u - \phi_1 \lambda_1 u) &= \int_{\Omega} -\phi_1^2 \\ \int_{\Omega} (-\Delta \phi_1 u - \phi_1 \lambda_1 u) &= \int_{\Omega} -\phi_1^2 \\ \int_{\Omega} (\phi_1 \lambda_1 u - \phi_1 \lambda_1 u) &= \int_{\Omega} -\phi_1^2 \\ 0 &= \int_{\Omega} -\phi_1^2 < 0 \end{aligned}$$

mostrando por contradição que $\mathfrak{F}_{\lambda u}(\lambda_1, 0)\phi_1 \notin Img[\mathfrak{F}_u(\lambda_1, 0)]$.

Então, pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz (ver [11, 20]), obtemos que as únicas soluções de (P) em uma vizinhança de $(\lambda_1, 0)$ são dadas por

$$(\lambda(s), u(s)) = (\lambda_1 + \mu(s), s(\phi_1 + \psi(s))) \text{ com } s \in (-\epsilon, \epsilon) \quad (5.2)$$

onde $\epsilon > 0$ pequeno, $\mu(0) = 0$ e $\psi(0) = 0$. Além disso, para $0 < s < \epsilon$ a solução $u(s)$ é positiva. Considerando ϕ_1 como função teste em (P), obtemos que $(\lambda, u) = (\lambda(s), u(s))$ satisfaz

$$\int_{\Omega} (\nabla u(s) \cdot \nabla \phi_1 + p u^{p-1} \phi_1 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla u(s)) = \int_{\Omega} (\lambda(s) u(s) - u(s)^2) \phi_1. \quad (5.3)$$

Usando (5.2) em (5.3) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (ps^p(\phi_1 + \psi(s))^{p-1} \phi_1 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla(\phi + \psi(s))) = \int_{\Omega} (\mu(s)s(\phi_1 + \psi(s))\phi_1 - s^2(\phi_1 + \psi(s))^2\phi_1) \\ \Rightarrow & \int_{\Omega} (ps^{p-1}(\phi_1 + \psi(s))^{p-1} \phi_1 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla(\phi + \psi(s)) + s(\phi_1 + \psi(s))^2\phi_1) = \mu(s) \int_{\Omega} (\phi_1 + \psi(s))\phi_1. \end{aligned}$$

Se $p > 2$, podemos escrever a equação acima da seguinte forma

$$\int_{\Omega} (ps^{p-2}(\phi_1 + \psi(s))^{p-1} \phi_1 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla(\phi + \psi(s)) + (\phi_1 + \psi(s))^2\phi_1) = \frac{\mu(s)}{s} \int_{\Omega} (\phi_1 + \psi(s))\phi_1. \quad (5.4)$$

Fazendo $s \rightarrow 0^+$ em (5.4), temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mu(s)}{s} = \int_{\Omega} \phi_1^3 > 0.$$

Neste caso, temos que $\lambda_1 + \mu(s) > \lambda_1$. Pela Definição 5.1, concluímos que a bifurcação é supercrítica.

Se $p = 2$, podemos reescrever (5.4) como

$$\int_{\Omega} (2(\phi_1 + \psi(s))\phi_1 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla(\phi + \psi(s)) + (\phi_1 + \psi(s))^2\phi_1) = \frac{\mu(s)}{s} \int_{\Omega} (\phi_1 + \psi(s))\phi_1. \quad (5.5)$$

Fazendo $s \rightarrow 0^+$ em (5.5) temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mu(s)}{s} = \int_{\Omega} (2\phi_1^2 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla \phi_1 + \phi_1^3). \quad (5.6)$$

Utilizando a integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\phi_1^2 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla \phi_1 &= \int_{\Omega} 2\phi_1^2 \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^N 2 \int_{\Omega} \phi_1^2 \alpha_i(x) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \\ &= - \sum_{i=1}^N 2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_1^2 \cdot \alpha_i(x)) \phi_1 \\ &= - \sum_{i=1}^N 2 \int_{\Omega} 2\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \alpha_i(x) - \sum_{i=1}^N 2 \int_{\Omega} \phi_1^3 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \\ &= -4 \int_{\Omega} \phi_1^2 \vec{\alpha} \nabla \phi_1 - 2 \int_{\Omega} \phi_1^3 \operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)] \\ \Rightarrow 6 \int_{\Omega} \phi_1^2 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla \phi_1 &= -2 \int_{\Omega} \phi_1^3 \cdot \operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)] \\ \Rightarrow 2 \int_{\Omega} \phi_1^2 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla \phi_1 &= -\frac{2}{3} \int_{\Omega} \phi_1^3 \cdot \operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por (5.6) e (5.7) concluímos que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mu(s)}{s} = \int_{\Omega} \phi_1^3 \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)] \right). \quad (5.8)$$

Portanto, temos que se

$$\frac{2}{3} \operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)] < 1,$$

por (5.8) concluimos que $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mu(s)}{s} > 0$ e, portanto a bifurcação é supercrítica. Caso contrário, temos que a bifurcação é subcrítica.

Finalizando, se $1 < p < 2$ em (5.4) obtemos a seguinte equação

$$\int_{\Omega} \left(p(\phi_1 + \psi(s))^{p-1} \phi_1 \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla(\phi_1 + \psi(s)) + \frac{(\phi_1 + \psi(s))^2 \phi_1}{s^{p-2}} \right) = \frac{\mu(s)}{s^{p-1}} \int_{\Omega} (\phi_1 + \psi(s)) \phi_1. \quad (5.9)$$

Novamente, fazendo $s \rightarrow 0^+$ em (5.9) obtemos

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\mu(s)}{s^{p-1}} = p \int_{\Omega} \phi_1^p \vec{\alpha}(x) \cdot \nabla \phi_1 = -\frac{p}{p+1} \int_{\Omega} \phi_1^{p+1} \operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)]. \quad (5.10)$$

Portanto, se $\operatorname{div}[\vec{\alpha}(x)] < 0$ a bifurcação em λ_1 será supercrítica, caso contrário a bifurcação será subcrítica. ■

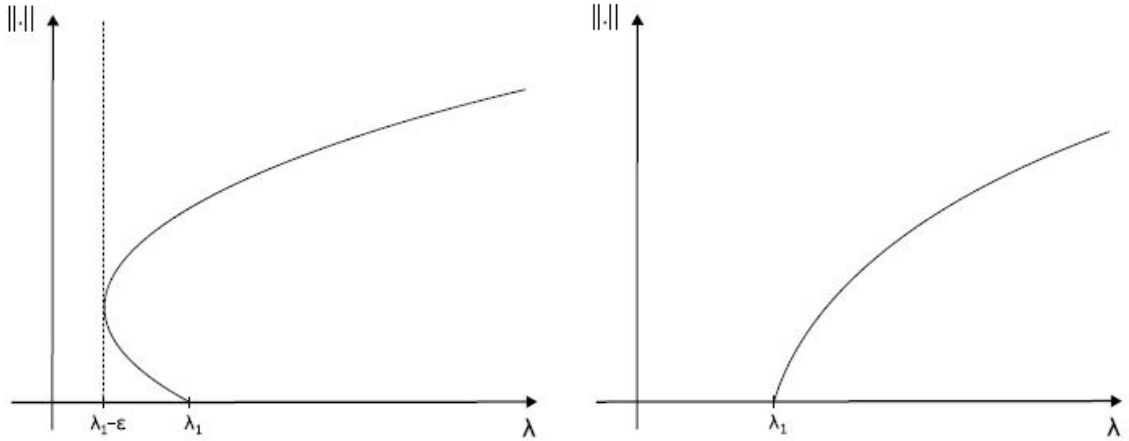


Figura 5.1: Bifurcação subcrítica a esquerda e bifurcação supercrítica a direita (Fonte: Cintra, Montenegro e Suarez [9]).

Observação 5.1. É possível notar que o Teorema 1 continua sendo válido caso $\operatorname{div}[\vec{\alpha}] \equiv 0$. Além disso, no caso geral de $\vec{\alpha} \in C_0^1(\overline{\Omega})$, só é possível considerar unicidade de soluções para o problema (P) se a bifurcação for supercrítica, caso contrário, a unicidade é quebrada, pois dado $\epsilon > 0$, é possível obter no mínimo duas soluções positivas para $\lambda \in (\lambda_1 - \epsilon, \lambda_1)$ (ver Figura 5.1).

Considerações finais

Neste trabalho, mostramos as condições necessárias para a existência, não existência e unicidade de solução para uma equação logística com um termo de advecção, efetuando inclusive uma análise sobre o comportamento assintótico da solução do problema em relação ao vetor $\vec{\alpha}$ e ao parâmetro p .

No Capítulo 3, demonstramos as condições necessárias para se obter uma solução clássica para (P) através do Princípio do Máximo. Consequentemente, tal solução é positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$. Este fato é concluído mediante as propriedades espectrais do autovalor principal e pelo método de sub-supersolução de [3], devido ao termo de advecção do problema. Inclusive, concluímos que tal solução é única por intermédio da Proposição 3.1, e através do Teorema de Picone 2.11.

No Capítulo 4, efetuamos uma análise sobre o comportamento da função u em relação ao vetor $\vec{\alpha}$, verificando que quando $|\vec{\alpha}| \rightarrow +\infty$, a solução $u_{\lambda, \vec{\alpha}}$ tende a 0 em $L^\infty(\Omega)$ e tende à única solução positiva do problema quando $|\vec{\alpha}| \rightarrow 0$ em $C^1(\Omega)$. Porém, ao analisar as soluções com respeito ao parâmetro p , em [9] foi verificado que se o autovalor $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1[L_\alpha]$, a solução não negativa $u_{\lambda, p}$ tende a solução trivial do problema, caso contrário, a solução $u_{\lambda, p}$ tende a solução positiva u_1 do problema (P) quando $p = 1$, estudada por Cantrell e Cosner em [7].

No Capítulo 5, foi estudado o comportamento das soluções de (P) quando $\vec{\alpha} \in C_0^1(\overline{\Omega})$, e verificamos que se o parâmetro p estiver entre $1 < p \leq 2$, a unicidade de soluções pode ser perdida. De fato, dependendo do valor do $\text{div}[\vec{\alpha}]$ a bifurcação do caminho das soluções positivas do problema será subcrítica ou supercrítica. Se tal bifurcação for subcrítica o problema (P) admite pelo menos duas soluções positivas distintas. Porém se $\text{div}[\vec{\alpha}] \equiv 0$ todos os resultados estudados nos Capítulos 3 e 4 são válidos.

Referências

- [1] R. Adams and J.F. Fournier. *Sobolev spaces, Acad*, volume 19. 1975.
- [2] R. Adams and J.F. Fournier. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [3] H. Amann. Existence and multiplicity theorems for semi-linear elliptic boundary value problems. *Mathematische Zeitschrift*, 150:281–295, 1976.
- [4] H. Amann and M.G. Crandall. On some existence theorems for semi-linear elliptic equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 27(5):779–790, 1978.
- [5] F. Belgacem and C. Cosner. The effects of dispersal along environmental gradients on the dynamics of populations in heterogeneous environment. *Canad. Appl. Math. Quart*, 3(4):379–397, 1995.
- [6] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, NY, November 2010.
- [7] R.S. Cantrell and C. Cosner. Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments ii. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22(4):1043–1064, 1991.
- [8] R.S. Cantrell and C. Cosner. *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*. John Wiley & Sons, 2004.
- [9] W. Cintra, M. Montenegro, and A. Suárez. The logistic equation with nonlinear advection term. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 65:103503, 2022.
- [10] C. Cosner. Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal. *Discrete Contin. Dyn. Syst*, 34(5):1701–1745, 2014.
- [11] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. *Journal of Functional Analysis*, 8(2):321–340, 1971.
- [12] L.C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.
- [13] S. Fernández-Rincón and J. López-Gómez. The picone identity: A device to get optimal uniqueness results and global dynamics in population dynamics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 60:103285, 2021.
- [14] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in mathematics. Springer, Berlin, Germany, January 2001.
- [15] J. López-Gómez. *Spectral theory and nonlinear functional analysis*. CRC Press, 2001.

-
- [16] J. López-Gómez. *Linear second order elliptic operators*. World Scientific Publishing Company, 2013.
 - [17] A. Okubo. Diffusion and ecological problems: mathematical models. *Biomath*, 10, 1980.
 - [18] C.V. Pao. Eigenvalue problems of a degenerate quasilinear elliptic equation. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pages 305–311, 2010.
 - [19] P.H. Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *Journal of Functional Analysis*, 7(3):487–513, 1971.
 - [20] A. Suárez. *Resúmenes teóricos de la asignatura - Métodos topológicos para ecuaciones elípticas (parte 2)*. Programa de Doctorado de la Universidad Federal de Pará, Belém, Brasil, Apuntes de class (2014-2015).