

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RAÍ DA SILVA MACHADO DE OLIVEIRA

Proposta de uso de material concreto no ensino de quádricas.

Guaratinguetá

2022

Raí da Silva Machado de Oliveira

Proposta de uso de material concreto no ensino de quádricas.

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática .

Orientador: Profº Dr. Othon Cabo Winter

Guaratinguetá

2022

O48p	Oliveira, Raí da Silva Machado de Proposta de uso de material concreto no ensino de quádricas / Raí da Silva Machado de Oliveira – Guaratinguetá, 2022. 64 f : il. Bibliografia: f. 54-55 Trabalho de Graduação em Matemática (Licenciatura) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2022. Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter 1. Geometria analítica. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Impressão tridimensional. I. Título. CDU 51
------	--

Raí da Silva Machado de Oliveira

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Profª. Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

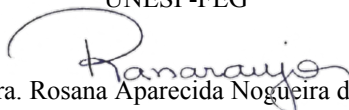
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Orientador/UNESP-FEG



Profª. Dra. Ana Paula Marins Chiaradia
UNESP-FEG



Profª. Dra. Rosana Aparecida Nogueira de Araújo
INPE

Março, 2022

DADOS CURRICULARES

RAÍ DA SILVA MACHADO DE OLIVEIRA

NASCIMENTO 15/06/1998 - Campos do Jordão / SP

FILIAÇÃO Alcino Machado de Oliveira
Ivanilda Aparecida da Silva Oliveira

A todas pessoas que, assim como eu, por vezes
não entenderam os sinuosos caminhos que
a vida forneceu.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, minha mãe Ivanilda, meu pai Alcino (in memoriam), meu outro pai Ronaldo e ao meu irmão Renan. Mesmo que por muitas vezes nossos pensamentos se divergissem ao longo do tempo, eu sei que o amor um pelo outro sempre irá prevalecer.

Agradeço aos meus amigos de infância, Tayná, Vinicius, Pietra, Gabriel e Felipe. Um agradecimento em especial a Tayná e ao Vinicius, por sempre terem sido os amigos mais verdadeiros que uma pessoa pode ter. Muito da pessoa sou hoje é graças as longas conversas e conselhos destes dois.

Agradeço aos meus amigos de graduação, Henrique, Julia e Alex, que sempre compartilharam comigo os desafios da vida acadêmica.

Agradeço ao meu orientador, professor Othon Winter, por ter sido sempre paciente e acreditar em meu potencial desde o meu segundo ano de graduação.

Agradeço aos meus colegas de trabalho do Grupo de Asteroides, Giulia, professor Rafael, Tamires e Gabriel, por compartilharem comigo seus conhecimentos em quase todas manhãs de sexta-feira nos últimos três anos.

Agradeço ao professor Marcelo Sampaio, coordenador do Laboratório de Prototipagem, por sempre ter se prontificado a me ajudar durante o desenvolvimento deste estudo.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que de alguma maneira passaram pela minha vida nestes últimos quatro anos e me ajudaram a me tornar quem eu sou.

*“Eu já estou com o pé nessa estrada
Qualquer dia a gente se vê
Sei que nada será como antes amanhã.”
(Milton Nascimento/Ronaldo Ribeiro)*

RESUMO

O trabalho consiste em apresentar uma proposta pedagógica para o uso de materiais concretos no ensino de Geometria Analítica nos cursos de ensino superior. Para isso, serão construídas através de uma impressora 3D, modelos de superfícies quádricas. O intuito é que a partir de determinados cortes feitos por secções planas, os estudantes consigam visualizar o formato dos objetos no espaço, as superfícies cônicas que os compõem e também conseguir associá-los a sua representação analítica. Assim, tendo em vista a forma de construção dos objetos, será apresentado uma possibilidade de ensino que seja conduzida a partir das interpretações visuais que podem ser obtidas das projeções bidimensionais e tridimensionais dos modelos. A proposta consiste em apresentar formas de relacionar a expressão analítica ao material concreto, de modo que possam ser superadas as dificuldades de associação entre a visualização e a Álgebra. Além disso, todos os arquivos feitos para a construção das superfícies serão, eventualmente, organizados e disponibilizados para domínio público para poderem ser utilizados em outras impressoras 3D.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Analítica. Superfícies Quádricas. Educação e Ensino. Materiais Concretos. Visualização 3D. Impressão 3D.

ABSTRACT

The present study consists of presenting a pedagogical proposal for the use of concrete materials in the teaching of Analytical Geometry in college courses. For this, models of quadric surfaces will be built using a 3D printer. The aim is that from certain cuts made by flat sections, students can visualize the shape of objects in space, the conical surfaces that compose them and also be able to associate them with their analytical representation. Thus, in view of the way objects are constructed, a teaching possibility will be presented that is conducted from the visual interpretations that can be obtained from the two-dimensional and three-dimensional projections of the models. The proposal is to present ways of relating the analytical expression to the concrete material, so that the difficulties of association between visualization and algebra can be overcome. In addition, all files made for the construction of surfaces will eventually be organized and made available to the public domain to be used in other 3D printers.

KEYWORDS: Analytical Geometry. Quadrics Surfaces. Education and Teaching. Concrete Materials. 3D Visualization. 3D Printing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1	Quadro com as habilidades necessárias para o desenvolvimento do raciocínio da visualização.	20
Quadro 2	Etapas do conhecimento de Piaget.	22
Figura 1	Interface inicial do Blender na versão 3.1.2.	26
Figura 2	Laboratório de Prototipagem da FEG.	27
Figura 3	Impressora GTmax3D A1V2.	28
Figura 4	Impressora GTmax3D core H5.	28
Figura 5	Impressora GTmax3D AB 400.	29
Figura 6	Elipsoide gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 3.	31
Figura 7	Representação no plano xy de secções planas feitas no elipsoide. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	32
Figura 8	Hiperboloide de uma folha gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 8.	32
Figura 9	Representação no plano xy de secções planas feitas no hiperboloide de duas folhas. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	33
Figura 10	Representação no plano xz de secções planas feitas no hiperboloide de uma folha determinado a partir da Equação 8. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	34
Figura 11	Hiperboloide de duas folhas gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 14.	34
Figura 12	Representação no plano xy de secções planas feitas no hiperboloide de duas folhas a partir da Equação 14. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	35
Figura 13	Representação no plano yz de secções planas feitas no hiperboloide de duas folhas a partir da Equação 14. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	36
Figura 14	Paraboloide elíptico gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 20.	37
Figura 15	Representação no plano xy de secções planas feitas no paraboloide elíptico determinado a partir da Equação 20. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	37
Figura 16	Representação no plano xz de secções planas feitas no paraboloide elíptico determinado a partir da Equação 20. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	38
Figura 17	Paraboloide hiperbólico gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 26.	39

Figura 18	Representação no plano xy de secções planas feitas no parabolóide hiperbólico determinado a partir da Equação [26]. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	39
Figura 19	Representação no plano xz de secções planas feitas no parabolóide hiperbólico determinado a partir da Equação [26]. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	40
Figura 20	Cone gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação [30].	40
Figura 21	Representação no plano xy de secções planas feitas no cone determinado a partir da Equação [30]. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	41
Figura 22	Representação no plano xz de secções planas feitas no cone determinado a partir da Equação [30]. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).	42
Figura 23	Curva parabólica gerada através software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação [34].	43
Figura 24	Curva elíptica gerada através software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação [36].	44
Figura 25	Curva hiperbólica gerada através software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação [38].	44
Figura 26	Modelo do cone impresso com as impressora do Laboratório de Protogipagem.	47
Figura 27	Modelo do cone impresso com as impressora do Laboratório de Protogipagem. O material do exemplo tem cerca de 25 cm.	48
Figura 28	Modelo do cone impresso com as impressora do Laboratório de Protogipagem.	48
Figura 29	Modelo do cone impresso com as impressora do Laboratório de Protogipagem. O material do exemplo tem cerca de 25 cm.	49
Figura 30	Modelos construídos para o elipsoide. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.	56
Figura 31	Modelos construídos para o hiperboloide de uma folha. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.	57
Figura 32	Modelos construídos para o hiperboloide de duas folhas. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.	58
Figura 33	Modelos construídos para o parabolóide elíptico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.	59
Figura 34	Modelos construídos para o parabolóide hiperbólico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.	60
Figura 35	Modelos construídos para o cone. O modelo mostrado nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.	61
Figura 36	Modelos construídos para o cilindro elíptico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.	62
Figura 37	Modelos construídos para o cilindro parabólico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.	63

Figura 38 Modelos construídos para o cilindro hiperbólico. Os protótipos mostrados nas

figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender. 64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS	14
3	EMBASAMENTO TEÓRICO	16
3.1	PROBLEMÁTICA DA VISUALIZAÇÃO	16
3.2	VANTAGENS DO USO DE MATERIAIS CONCRETOS	20
4	METODOLOGIA	25
5	LABORATÓRIO E FERRAMENTAS UTILIZADAS	26
5.1	BLENDER	26
5.2	LABORATÓRIO DE PROTOTIPAGEM	27
6	INTERPRETAÇÕES SOBRE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	30
6.1	ELIPSOIDE	30
6.2	HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA	31
6.3	HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS	33
6.4	PARABOLOIDE ELÍPTICO	36
6.5	PARABOLOIDE HIPERBÓLICO	38
6.6	CONE	40
6.7	SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS	41
6.7.1	CILINDRO PARABÓLICO	42
6.7.2	CILINDRO ELÍPTICO	43
6.7.3	CILINDRO HIPERBÓLICO	43
7	MODELOS CONSTRUÍDOS E PROPOSTA DE ENSINO	46
7.1	OBJETOS	47
7.2	PROPOSTA DE ENSINO	50
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	REFERÊNCIAS	54
	APÊNDICE A – MODELOS DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	56

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho traz uma proposta para o uso de maquetes feitas em impressoras 3D no ensino em cursos de nível superior. O estudo, a princípio, surge da possibilidade de desenvolvimento dos objetos no contexto do Campus de Guaratinguetá, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", que possui junto a Faculdade de Engenharia algumas impressoras 3D. Entretanto, observando as possibilidades de exploração que o tema permite, foi realizado um trabalho mais aprofundado, abordando os aspectos pedagógicos que podem ser estudados com as formas construídas.

Visando superar a dicotomia entre os aspectos da visualização e os algébricos, serão apresentadas possibilidades de interpretações a partir de materiais concretos, auxiliando na construção da visualização de curvas cônicas nas superfícies quádricas. É exibida a importância de conseguir unir os aspectos algébricos e geométricos dos objetos, mostrando como estes dois pontos são relevantes na construção do pensamento matemático do indivíduo e como este processo pode ser facilitado através de objetos tangíveis. São discutidas questões presentes no processo de aprendizagem de Geometria, mostrando como a capacidade de visualização de objetos tridimensionais pode estar unificado ao desenvolvimento de suas interpretações algébricas.

Para uma estruturação mais clara, o trabalho está dividido em oito capítulos, sendo o primeiro este de Introdução. No segundo capítulo são apresentados os objetivos e justificativas para a elaboração do projeto, mostrando os fatores determinantes para a construção do estudo. O terceiro capítulo apresenta o embasamento teórico que ressalta a problemática da visualização no ensino de Geometria e aponta os benefícios da utilização do uso de materiais concretos para a aprendizagem.

O quarto capítulo apresenta as metodologias de pesquisa utilizadas, sendo neste caso um estudo exploratório que aborda a problemática da visualização e também as vantagens do uso dos materiais concretos. Além disso, são abordados aspectos de caracterização da sequência didática, que será a abordagem pedagógica explorada ao longo do texto. O quinto capítulo traz considerações a respeito das ferramentas e do laboratório usado para a construção dos modelos 3D. Será feita uma breve discussão a respeito do programa utilizado para a construção dos modelos, apresentando as justificativas para o seu emprego. Além disso, é feita também uma descrição do Laboratório de Prototipagem da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, indicando as principais especificações das impressoras utilizadas.

No sexto capítulo é feita uma discussão a respeito das superfícies quádricas, apresentando como o conteúdo é normalmente exposto em livros de nível superior. No sétimo capítulo serão apresentadas quais foram as formas criadas e a proposta de ensino a partir dos modelos elaborados. São apresentados os principais pontos considerados na elaboração de cada um dos modelos e também é feito o detalhamento da sequência didática proposta para se trabalhar com os materiais criados. Por fim, no oitavo e último capítulo serão feitas as considerações finais sobre o estudo.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

O objetivo deste trabalho é mostrar uma possibilidade de aprendizado de superfícies quádricas, através de materiais concretos construídos em impressoras 3D. Pretende-se elaborar modelos que auxiliem no desenvolvimento da visualização tridimensional e contribuam para a análise algébrica dos objetos.

Para desenvolver estas habilidades de visualização propostas pela pesquisa, os modelos foram construídos com cortes paralelos aos planos coordenados, de modo que cada intersecção fossem colocadas em posições específicas que permitissem explorar certas perspectivas de sua representação visual e algébrica no plano.

Um ponto importante que deve ser destacado é que, apesar de a questão principal de estudo ser a exploração destes materiais para o aprendizado de superfícies quádricas, pode haver também uma relevância significativa para sua utilização nos estudos de cônicas. Entretanto, a proposta que será apresentada parte do pressuposto de que este tema já foi explorado com os estudantes, de modo que as abordagens que envolvem este tópico permitam a compreensão das ideias norteadoras da pesquisa. É importante deixar isso claro, pois, mais adiante no Capítulo 6, quando forem apresentadas as possíveis análises das superfícies, estaremos partindo do princípio que os estudantes já têm fundamentado as concepções destes tópicos de cônicas.

Vale destacar também que reconhecemos a existência de recursos tecnológicos como softwares que trabalham com a representação de figuras tridimensionais. Normalmente, estes recursos cumprem bem o seu papel e oferecem potencialidades interessantes para o ensino. Entretanto, com este estudo queremos mostrar uma outra alternativa que pode ser utilizada, destacando os pontos positivos e valores dos materiais concretos.

A primeira grande motivação para elaboração do projeto surgiu da possibilidade de criar uma solução para um recorrente problema observado nas aulas de Geometria Analítica na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá (FEG). Muitas vezes durante as aulas, era observado que existia uma constante dificuldade por parte dos professores em conseguir fazer com que os alunos conseguissem enxergar as representações das superfícies e associar seus formatos a sua expressão algébrica. Sendo assim, surge então a ideia de utilizar das impressoras da faculdade para elaborar materiais que pudessem servir de auxílio no ensino da disciplina. Esta possibilidade de criar materiais concretos já havia sido proposto anteriormente pelo professor orientador deste trabalho, entretanto a execução para criar os modelos não tiveram grandes êxitos.

No ano de 2019, o Departamento de Engenharia Mecânica da FEG foi contemplado com a compra de três impressoras 3D. Uma vez à disposição da faculdade, a utilização das impressoras tornou-se possível para todos os cursos do campus, o que fez com que fossem abertas novas possibilidades de pesquisa em diferentes áreas do campus. Dessa forma, ressurgiu então a possibilidade de criar os materiais concretos que pudessem auxiliar no aprendizado durante as aulas, pois, diferente do que havia sido tentado anteriormente, as impressoras 3D permitem elaborar com maior facilidade os objetos a serem impressos. Para isso, bastaria encontrar um programa para criar os modelos que seriam

construídos e colocar o projeto em prática.

A princípio, o propósito seria construir os materiais para eles poderem contribuir para as aulas ofertadas nos cursos da FEG. O Campus de Guaratinguetá oferta os cursos de Licenciatura em Matemática, Licenciatura e Bacharelado em Física, Bacharelado em Engenharia Civil, Engenharia Mecânica, Engenharia Produção Mecânica, Engenharia Materiais e Engenharia Elétrica. Todos estes cursos passam por um ciclo de disciplinas que incluem Geometria Analítica. Para as Engenharias, o tema é visto em uma disciplina ofertada em período anual sob o nome de Álgebra Linear e Cálculo Vetorial, que como o próprio nome indica, aborda também tópicos de Álgebra Linear durante seu andamento. Para o curso de Licenciatura em Matemática, o tema também é visto numa disciplina ofertada em período anual, porém abrangendo apenas tópicos de Geometria Analítica. Já para os cursos de Licenciatura e Bacharelado em Física, a disciplina também é oferecida apenas como Geometria Analítica, porém sendo ministrada apenas em um semestre.

Porém, mesmo que no próprio campus houvesse uma grande demanda a ser ofertada, as possibilidades de comunicação que temos atualmente facilitam a expansão e compartilhamento de nossos modelos criados. Sendo assim, um estudo que nos primeiros passos tinha a ambição de apenas atender as necessidades FEG, deu a possibilidade de tornar este trabalho uma contribuição maior para os estudos na área de educação. Todos os modelos criados foram elaborados para serem compartilhados com toda a comunidade educacional, para que todos possam utilizar livremente, resguardando apenas os devidos créditos aos autores. Evidentemente, apesar de os modelos estarem a disposição para serem utilizados, a maior parte das interpretações e análises propostas partem da explanação definida neste trabalho. Sendo assim, a maneira como elas foram criadas foi feita de forma que certos aspectos, considerados pertinentes pelos autores, fossem valorizados.

Além destas circunstâncias favoráveis encontradas na FEG para a construção do trabalho, houve também motivações didáticas que justificassem a elaboração do projeto. Os dois principais pontos que se apresentaram como significativos estão relacionados a problemática da visualização no aprendizado de Geometria e também sobre as vantagens do uso de materiais concretos para a superação destas dificuldades. Estas motivações foram os principais tópicos norteadores que buscamos considerar para levarmos adiante este estudo, julgando assim pertinente o desenvolvimento destes objetos como ferramentas auxiliares no ensino. Estas discussões requerem uma atenção especial, pois engloba aspectos mais complexos para a validação do emprego de materiais concretos para superar estes dois desafios. Sendo assim, discutiremos com maior profundidade estes dois tópicos no Capítulo [3](#).

3 EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo abordaremos o referencial teórico que deu embasamento para a construção do estudo. Iremos analisar dois tópicos, um primeiro que foca em abordar os pontos referentes a visualização e um segundo que explora os aspectos que corroboram para o uso de materiais concretos em práticas de ensino.

3.1 PROBLEMÁTICA DA VISUALIZAÇÃO

A discussão sobre o modo do aprendizado de Matemática é alvo de discussão ao longo dos diferentes anos de ensino. Por vezes, podemos observar o estudo de Matemática sendo reduzido a mecanização e aplicação de fórmulas, sem a elaboração de um pensamento crítico sobre o que está sendo desenvolvido. Apesar disso, vemos que este prosseguimento é algo que difere totalmente do que é proposto em documentos normativos que começam desde a Educação Básica, como no caso do que é observado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que dentre uma das Competências Gerais da Educação Básica tem por objetivo:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9)

Sendo a Geometria um dos ramos da Matemática presente em currículos de ensino, inevitavelmente ela também sofre as consequências deste processo de automatização e não reflexivo do ensino, pois a sua compreensão está diretamente associada a sucessivas reflexões sobre o mundo que nos cerca. De acordo com Barros (1999), um dos seus papéis é interferir e interpretar o espaço em que vivemos a partir das representações e visualizações dos objetos. Não obstante, Barros (1999) ainda ressalta a relevância que ela pode ter ao atribuirmos um papel unificador com outros conceitos da Matemática. Isto pode ser observado de maneira mais clara quando consideramos serem historicamente diversos os problemas de outras naturezas, como a Álgebra ou Números, que obtiveram suas soluções a partir de métodos ou pensamentos geométricos (ROQUE; CARVALHO, 2012). Dessa forma, vemos que a Geometria passa a ter um papel muito relevante não somente em auxiliar na caracterização do espaço que nos cerca, mas também no desenvolvimento do pensamento abstrato tão recorrente na Matemática.

Com base nisso, podemos inferir que a Geometria Analítica torna-se um reflexo mais direto deste pensamento de conjunção entre o abstrato e o real, visto que ela conecta aspectos vinculados a Geometria e a Álgebra. Roque e Carvalho (2012) trazem reflexões sobre o pensamento de René Descartes, mostrando o papel inovador que o matemático francês trouxe ao desenvolver análises baseadas em raciocínios de ordens dedutivas através da Álgebra. Por meio destes raciocínios, a Álgebra permitiu com que deduções geométricas se tornassem equações e o processo mediativo entre

as duas partes fosse possível de ocorrer. Entretanto, este processo só é possível de ser realizado se as técnicas necessárias para ao desenvolvimento do raciocínio algébrico e geométrico estiverem bem fundamentados. Isto é, se em certo momento a compreensão de algumas dessas duas áreas não estiverem devidamente embasadas, o aprendizado e a integração entre o abstrato e o real torna-se comprometido.

A partir deste ponto, podemos dividir o raciocínio do nosso estudo entre entender os problemas que envolvem a dificuldade de compreensão da Geometria e da Álgebra separadamente, de modo a encontrar os tópicos que impedem com que elas sejam difundidas. Evidentemente não podemos descaracterizar e dissociar todas as questões que surgem quando ambas estão relacionadas, porém, conseguimos estabelecer pensamentos pelo quais conseguimos analisar as problemáticas de cada uma em particular. Pavanello (2004), abordando considerações de Atiyah (1982), destaca que no estudo de Geometria não podemos desconsiderar o papel da Álgebra, salientando as contribuições do procedimento visual da Geometria com o procedimento sequencial da Álgebra. Porém, podemos tentar compreender as lacunas de aprendizado deixadas em cada uma que fazem com que a associação entre ambas não ocorra corretamente.

De princípio consideramos que os aspectos de visualização, provenientes da Geometria, são os que mais causam transtornos durante o aprendizado dos tópicos de superfícies quádricas no ensino de Geometria Analítica. Obviamente que os conteúdos que envolvem a Álgebra também possuem sua relevância, porém seu aperfeiçoamento é mais acessível de ser contornado. Sendo assim, focaremos em inferir sobre os pontos mais pertinentes nas questões que envolvem principalmente a Geometria, enfatizando os processos de visualização. Os aspectos de Álgebra que incluímos estarão associados a operações mais simples ou associados aos tópicos de cônicas, já destacado anteriormente como sendo requisito do conhecimento do estudante para o desenvolvimento deste estudo. Entretanto, deixamos salientado que o papel da Álgebra é de suma importância para poder criar generalizações das superfícies estudadas, fazendo com que o pensamento abstrato possa ser cada vez mais desenvolvido.

Trazendo reflexões sobre o papel da Álgebra na Matemática, Pavanello (2004) afirma que a prioridade dada a ela, tanto no ensino como na pesquisa, acabou favorecendo somente um tipo de pensamento, sendo necessário restabelecer um equilíbrio ao retomar o foco nos estudos de Geometria. Mesmo que estas considerações sejam feitas para estudantes da Educação Básica, vemos que estes mesmos problemas ainda são pertinentes aos alunos que chegam ao nível superior, pois muitos acabam carregando as mesmas dificuldades até a universidade. Sendo assim, focaremos os apontamentos do estudo em tentar compreender qual a importância do papel da visualização e quais são suas implicações no aprendizado.

Quando falamos em visualização estamos tratando de um processo que envolve muitos aspectos subjetivos e individualizados pelo estudante. Costa (2000) argumenta que a visualização recebe na literatura diferentes conotações, das quais por vezes está restrita a mente do aluno, em outras a algum meio em que é transmitida e por outras em um processo que passa por estes dois domínios. Bishop (1989) nos afirma que a visualização é uma habilidade muito particular, estando associadas a experiências visualmente vividas por cada um. Entretanto, ela não é restrita unicamente aos aspectos individuais, podendo assim serem desenvolvidas habilidades que permitam seu aprimoramento.

Segundo Zimmermann e Cunningham (1991), este aprimoramento, chamado processo de formação de imagens, pode ser superado de diferentes formas utilizando mecanismos variados como materiais concretos ou recursos tecnológicos. Zimmermann e Cunningham (1991) afirmam ainda que quando desenvolvido este processo de visualização, conseguimos interpretar desenhos, representar formas e elaborar representações mentais que facilitem a compreensão matemática. Entretanto, os grandes desafios associados ao desenvolvimento desta habilidade é justamente em conseguir compreender como realizar este processo de desenvolvimento de maneira efetiva.

Para conseguir compreender os processos que envolvem a visualização, é necessário identificar certos objetos que a caracteriza. Bishop (1989) apresenta no seu trabalho considerações a respeito destes aspectos que envolvem a visualização. Em um dos pontos levantados, o autor se refere a imagens visuais, como sendo as figuras ou ideias que cada indivíduo já carrega com si e que foram obtidas por experimentações diversas ao longo da vida. Estas imagens em geral são favoráveis aos aspectos de visualização, afinal elas podem facilitar a compreensão de formas matemáticas quando trabalhadas certas atividades. Ele ainda define este aspecto como imagens vividas, onde para Presmeg (1986) estas imagens vividas podem ajudar os estudantes através de lembranças que possam ter ao visualizar certos formatos. Certamente estas imagens são favoráveis ao aprendizado, porém não devem ser a única fonte para a compreensão matemática, pois podem partir do pressuposto de que todo indivíduo já possui um apontamento memorial sobre o tópico visual estudado.

Algumas interpretações sobre a visualização necessita da compreensão de trabalhos que envolvem alguns aspectos da Psicologia, justamente pelo fato de certos pontos estarem relacionados a características individuais. Dois conceitos são destacados por Costa (2000): a imagética visual e a capacidade espacial. Estas duas concepções auxiliam nas capacidades para a construção do pensamento matemático e, de acordo com Costa (2000), por vezes seus estudos são desenvolvidos separadamente, mesmo existindo um consenso entre psicólogos de que a imagética visual está associada a tarefas espaciais.

Por serem dois conceitos de ampla discussão na literatura, a definição sobre o que é cada uma é abordada em diversos trabalhos. A imagética visual, por exemplo, pode ser vista de forma ampla em trabalhos como os de Presmeg (1992), Brown e Presmeg (1993) e Owens (1999). Da mesma forma, a capacidade espacial é determinada em obras como as Young (1982), Tartre (1990) e Mitchelmore (1976). Para a elucidação das ideias deste trabalho, a definição que Costa (2000) aborda a partir do trabalho de Clements (1981) vai de acordo com os pensamentos discutidos até então. Dessa forma (COSTA, 2000 apud CLEMENTS, 1981, p. 171) ¹:

Para Clements, o termo capacidade espacial significa a capacidade de formular imagens mentais e de manipular essas imagens na mente enquanto que imagética visual significa uma atividade mental que percepçiona um objecto quando ele não está presente, figura na mente (COSTA, 2000 apud CLEMENTS, 1981, p. 171).

Estas duas ideias corroboram com a concepção de que ao pensarmos na visualização, precisamos entendê-la não somente com o fato de enxergar um objeto, mas sim como uma maneira de raciocinar

¹ CLEMENTS, K. Visual imagery and school mathematics. For the learning of mathematics, JSTOR, v. 2, n. 2, p. 2–9, 1981.

diante de um problema proposto. Considerando ainda que, em linhas gerais, as definições de capacidade espacial e imagética visual trabalham com manipulações mentais de imagens, indiretamente podemos associá-las ao desenvolvimento de abstrações matemáticas. Logo, visto que "a matemática é uma disciplina que se preocupa em objetivar representações da realidade, das quais muitas representações aparecem na forma visual" (HOZ, 1981), trabalhar estímulos que incentivam a capacidade da manipulação, é também colaborar para o desenvolvimento de outros tópicos. Isto é, a abstração é algo necessariamente recorrente para o aprendizado e desenvolvimento da Matemática em qualquer nível de ensino, pois ela permite com que seja possível desenvolver pensamentos lógicos a cerca de diferentes assuntos.

Como nosso propósito é definir os processos que envolvem a visualização de objetos tridimensionais, precisamos encontrar na literatura obras que estabelecem habilidades importantes de possuir para poder desenvolvê-la. Pittalis e Christou (2010) estabelece em seu trabalho um modelo que abrange cinco raciocínios necessários para caracterizar as habilidades que os estudantes precisam ter ao trabalhar com Geometria em três dimensões. Em seu estudo, para elaboração do seu modelo de raciocínio, o artigo revisa algumas pesquisas que discutem as habilidades de Geometria em três dimensões e as capacidades espaciais que estudantes precisam possuir ao trabalhar com estes raciocínios. Estes dois tópicos, isto é, as habilidades geométricas em três dimensões e as capacidades espaciais, são vistos separadamente, pois o primeiro envolve pesquisas qualitativas de áreas que se aproximam mais da Educação Matemática, enquanto o segundo aborda processos cognitivos que são oriundos de pesquisas da Psicologia.

A partir da sumarização destes dois tópicos, Pittalis e Christou (2010) desenvolveram e aplicaram a duzentos e setenta e seis estudantes do Ensino Infantil e Fundamental, testes com tarefas que envolviam o desenvolvimento das habilidades de visualização. Settimy e Bairral (2019) sumarizaram as principais ideias de raciocínio definidas por Pittalis e Christou (2010) sobre a visualização em Geometria 3D no Quadro 1.

Vejamos que os raciocínios levantados por Pittalis e Christou (2010) e sumarizados por Settimy e Bairral (2019) podem ser adaptados às análises deste estudo e, consequentemente, potencializados com a construção de objetos concretos. Para o nosso caso, alguns deles vão além dos objetivos propostos pelo trabalho. Porém, ainda assim possuem validade se considerarmos outras disciplinas matemáticas vistas no Ensino Superior. Isto é, o primeiro, segundo e quarto raciocínio do quadro se assimilam diretamente aos objetivos propostos na elaboração deste estudo. Por sua vez, o terceiro e quinto não estão associados de maneira direta, mas podem ter sua legitimidade quando consideramos os aspectos de desenvolvimento do raciocínio lógico, já citado anteriormente, que pode ser contribuinte para outras áreas.

Analisando cada um dos raciocínios associados diretamente a este trabalho, vemos que o primeiro e segundo possuem uma certa relação, pois o desenvolvimento de um pode acarretar uma facilidade de compreensão do outro. Mais adiante, no Capítulo 7 quando abordarmos os modelos construídos, veremos que a elaboração das formas foram feitas com cortes transversais, justamente para poder ser destacado a representação planificadas das superfícies quádricas, que está relacionado a descrição do primeiro e segundo raciocínio. Além disso, o quarto aspecto de conseguir reconhecer e comparar

Quadro 1 – Quadro com as habilidades necessárias para o desenvolvimento do raciocínio da visualização.

Raciocínio	Descrição
Manipular diferentes modos de representação de objetos 3D	As representações planas são as mais utilizadas para representar objetos 2D na Matemática escolar, no entanto os estudantes apresentam grandes dificuldades em desenhar objetos 3D, pois não se trata de algo trivial e que não é ensinado na escola. Como consequência, os alunos podem interpretar mal um desenho e não entender se ele representa um objeto 2D ou 3D.
Reconhecer e construir planificações	Exige a capacidade dos alunos para fazer traduções de objetos 3D para planificações 2D, focalizando as partes componentes dos objetos em ambos os modos de representação.
Estruturar matrizes 3D de cubos	Significa identificar quantos cubos de menor aresta cabem no cubo maior. O desenvolvimento desta habilidade não é simples, pois exige que os alunos estabeleçam um modelo mental que forneça diferentes visões da estrutura.
Reconhecer e comparar as propriedades das formas 3D	Mesmo que qualquer tipo de poliedro seja composto pelas mesmas partes, seu tamanho, número e forma definem as particularidades de cada poliedro. É entender como os elementos do sólido estão inter-relacionados e que esta compreensão pode se referir ao mesmo objeto ou entre objetos diferentes.
Calcular o volume e a área de sólidos	O pensamento de Geometria tridimensional está intimamente ligado à capacidade dos estudantes de calcular o volume e a área de superfície de um sólido. Os alunos tendem a se concentrar principalmente nas fórmulas e nas operações numéricas necessárias para calcular o volume ou a superfície de um sólido e ignorar completamente a estrutura das medidas da unidade.

fonte: adaptado de [Settimy e Bairral \(2019\)](#)

propriedades entre formas 3D também caminha em concordância com o que proposto pelos objetivos do trabalho, pois as formas com que são geradas a partir das superfícies cônicas se relacionam entre si.

Em linhas gerais, vemos que a visualização é uma habilidade inserida em características do pensamento lógico e cognitivo, sendo de extrema importância para o desenvolvimento da aprendizagem. Suas potencialidades conseguem permitir um aperfeiçoamento em questões de todas as áreas da Matemática. Vejamos por fim que os raciocínios definidos por [Pittalis e Christou \(2010\)](#) podem ser aprimorados com o auxílio de materiais concretos. Esta ideia ficará mais clara na seção seguinte, mas os conceitos descritos no [Quadro 1](#) trazem uma validade para a produção deste trabalho, pois os apontamentos levantados na descrição de cada um dos raciocínios mostram que as dificuldades da visualização podem ser superadas através de práticas pedagógicas.

3.2 VANTAGENS DO USO DE MATERIAIS CONCRETOS

Para a abordagem sobre a utilização dos materiais concretos no ensino de Matemática, vamos apresentar algumas discussões teóricas de diferentes autores, entretanto, iremos recorrer principalmente à teoria de ensino-aprendizagem de Piaget. Na literatura de estudos da área de educação, existem bastantes trabalhos consolidados que envolvem a discussão da aprendizagem de crianças e adolescentes,

sendo a abordagem para jovens adultos e adultos de menor frequência. Dessa maneira, tendo em vista o tópico do trabalho e as ideias já estabelecidas por Piaget, as concepções do autor se apresentaram como as mais adequadas para a argumentação para o uso de materiais concretos.

Cunha (2003) apresentando discussões sobre a teoria de ensino-aprendizagem de Piaget, diz que para o autor, quando nos referimos aos métodos pedagógicos discutidos pelo pensador, o que se considera não é o dualismo entre o acerto e o erro, mas sim o progresso intelectual que a atividade pode oferecer aos estudantes. Não obstante, ainda segundo Cunha (2003), os conceitos epistemológicos considerados pelo autor são baseados entre o Sujeito e o Objeto. Cunha (2003) define para estes dois pontos a partir dos conceitos epistemológicos de Piaget da seguinte maneira:

Seus conceitos epistemológicos fundamentam-se em concepções da esfera filosófica, originadas antes mesmo de sua época, que consistem em considerar o conhecimento como possível somente quando o Sujeito, aquele que irá conhecer, e o Objeto, aquilo que será conhecido, relacionam-se de uma determinada maneira: o Sujeito age sobre o Objeto (CUNHA, 2003, p. 4).

Dessa maneira, a partir desta concepção, durante o período de aprendizagem, o aluno deve ser despertado para aquilo que lhe será ensinado. Isto é, para que o Sujeito, aluno, possa agir sobre o Objeto, tópico ou item a ser estudado, deve existir algum tipo de impulso que o leve a esta ação. De acordo com Cunha (2003), caso isso ocorra, o Sujeito supera um desequilíbrio existente entre ele e o Objeto e assim passa a dominá-lo. Com desequilíbrio devemos entender como um estado de nível de progresso pelo qual o Sujeito ainda não faz parte, isto é, um estado de conhecimento do qual o estudante ainda não domina.

Estas relações de equilíbrio ou não entre Sujeito e Objeto caracterizam etapas da concepção de conhecimento segundo Piaget (CUNHA, 2003), definidas pela: assimilação, acomodação e equilíbrio. A seguir, no Quadro 2, são explicadas em linhas gerais estas três etapas segundo as interpretações de Cunha (2003).

Para elucidá-las, Cunha (2003) usou um exemplo de uma criança que já possui a capacidade de exercer movimentos sensoriais com as mãos e dedos. A criança uma vez dotada destas capacidades, ao tocar um objeto, como uma bola de formato desconhecida para a mesma, irá impor-lhe seus aspectos cognitivos para poder assimilá-la. Após um certo tempo, a criança irá se acomodar com o objeto, isto é, irá reconhecê-lo por posicionamentos musculares que irão gerar aspectos de caracterização para a bola. Feito isso, ela irá atingir o patamar de equilíbrio com a bola e, conseqüentemente, a reconhecerá, não sendo mais a mesma do começo do processo.

Todo este processo, como ocorrido no exemplo com a criança, colabora para o desenvolvimento intelectual do indivíduo, que para Piaget é caracterizada na Teoria do Desenvolvimento Cognitivo. De acordo com as interpretações de Cunha (2003):

"O desenvolvimento intelectual envolve a passagem do indivíduo por quatro grandes períodos, vivenciados necessariamente em sequência[...]. Cada período estabelece alicerces para o seguinte, de modo que as aquisições ocorridas em um constituem pré-condições para o seguinte." (CUNHA, 2003, p. 8)

O primeiro período deste desenvolvimento é o chamado sensorial-motor. Segundo Cunha (2003), neste período a principal característica que o determina é a inexistência de representações e imagens mentais dos objetos que cercam o indivíduo. O conhecimento é constituído por impressões que chegam através do aparelho motor e órgãos de sentido. Assim, utilizando novamente um exemplo de uma criança, ela "[...] age sobre aquilo que alcança com as mãos, aquilo que ouve e vê, aquilo que chega à sua boca, sem, contudo, formar imagens mentais desses objetos" (CUNHA, 2003). Neste período predomina a etapa da assimilação, ou seja, o indivíduo começa a ter os primeiros contatos com o mundo que o cerca de modo a entendê-lo gradualmente.

Segundo Cunha (2003), o segundo período, conhecido como pré-operatório, é marcado pelo desenvolvimento da representação de ações que agora conseguem começar a elaborar esquemas e imagens mentais. É nesta etapa então que a criança passa a atribuir significados as representações que as cerca, entretanto, ela ainda é incapaz de realizar operações mentais como imagens construídas. Neste período as operações mentais geradas pelas crianças podem causar certas confusões, fazendo com que elas não sejam totalmente corretas.

No terceiro período, chamado operatório-concreto, a criança agora consegue gerar as operações mentais (CUNHA, 2003). Assim, "uma operação é constituída por várias propriedades, entre as quais está a reversibilidade, muito mencionada por Piaget e demonstrada no experimento da água colocada em recipientes de formatos diferentes" (CUNHA, 2003). Este exemplo da água aborda uma mesma quantidade de água colocada em dois recipientes diferentes, um formado por um tubo alto e fino, e outro por uma vasilha larga e baixa. Ao passar a água de um recipiente para o outro, obviamente teremos a mesma quantidade de líquido em ambos. Entretanto, a criança por vezes pode se confundir e acreditar que um tem mais água que o outro por ser mais alto ou por ter uma superfície de área maior. A criança que se encontra nesta etapa do operatório-concreto, já consegue identificar que ambos recipientes possuem a mesma quantidade de água, diferentemente daquela que ainda se encontra no

Quadro 2 – Etapas do conhecimento de Piaget.

Etapa	Descrição
Assimilação	Etapa do conhecimento em que o Sujeito começa a estabelecer um contato com o Objeto que está sendo conhecido. "O [...] Sujeito age sobre o Objeto na tentativa de conhecê-lo por meio dos referenciais cognitivos que já possui. O Sujeito procura desvendar o Objeto trazendo-o para dentro desses referenciais, chamados esquemas cognitivos, ainda que estes sejam insuficientes para dominar toda a complexidade do Objeto." (CUNHA, 2003, p. 6)
Acomodação	"[...] consiste nas modificações sofridas pelo Sujeito em função do exercício assimilador desencadeado. O Sujeito tem, então, seus esquemas cognitivos alterados por causa da relação que mantém com o Objeto, o que representa um esforço adaptativo para superar o desnível existente entre um e outro." (CUNHA, 2003, p. 6)
Equilíbrio	É a etapa seguinte do processo anterior, pois uma vez superadas os desníveis existentes entre Sujeito e Objeto, é atingido o equilíbrio entre ambos (CUNHA, 2003).

fonte: Adaptado de Cunha (2003)

pré-operatório e confunde este critério.

No período anterior, mesmo que exista um domínio sobre certas operações matemáticas como aritmética de somas e subtrações, por exemplo, a criança ainda não consegue fazer abstrações, formular hipóteses e desenvolver raciocínios lógico-matemáticos (CUNHA, 2003). Estas operações começam a ocorrer no quarto período, o operatório-formal. Neste último período então a criança desenvolve seu último estágio de desenvolvimento cognitivo.

Apesar deste desenvolvimento intelectual seguir uma linha pré-definida, ou seja, ir se ocorrendo de maneira sequencial como mostrado nos períodos acima, estes períodos de aprimoramento podem acontecer em tempos diferentes de acordo com cada indivíduo (CUNHA, 2003). Além disso, segundo Cunha (2003):

"Para que haja conhecimento é preciso que o indivíduo estabeleça contato íntimo com o conteúdo a ser aprendido e que se posicione ativamente frente a esse mesmo conteúdo, o que propiciará mudança em seus esquemas cognitivos. Esse processo ocorre em todos os momentos da vida da pessoa, diferentemente em cada faixa etária, mas independentemente do ambiente social e cultural em que o indivíduo esteja inserido." (CUNHA, 2003, p. 7)

Estes contatos com o conteúdo citados são determinados a partir das etapas e dos períodos descritos anteriormente. Vejamos que deste modo, mesmo que a pedagogia proposta por Piaget seja baseada em estudos com crianças e adolescentes, ela pode ter sua validade para jovens-adultos e adultos, visto que os processos ocorrem a todo momento e em diferentes faixas etárias. Dessa forma, como para o desenvolvimento de cada período, Piaget valoriza a participação pedagógica ativa do professor para que os alunos possam atingir o desenvolvimento intelectual (CUNHA, 2003), os objetos concretos têm a possibilidade de serem peças que provoquem este aperfeiçoamento dos indivíduos e ajudem na superação das problemáticas da visualização abordadas na seção anterior.

Em outros trabalhos da literatura, também conseguimos encontrar estudos que valorizam e apontam as potencialidades do uso de materiais concretos em ensinos de Geometria. Fiorentini, Miorim et al. (1990) citam concepções do teórico suíço Johann Pestalozzi e do pedagogo alemão Friedrich Fröbel, dos quais desde o século XVIII valorizam o desenvolvimento de uma escola que prega atividades criativas como a manipulação de objetos. Em uma outra pesquisa, Azevedo (1979) aborda estudos da médica e pedagoga italiana Maria Montessori (1870 - 1952), do qual desenvolveu trabalhos com materiais manipulativos em classes de crianças consideradas excepcionais. No decorrer de sua pesquisa, Maria Montessori viu que estes materiais faziam forte apelo a percepções visuais e tátil, exercendo um grande desenvolvimento de habilidades visuais dos estudantes. Desta maneira, seus estudos foram estendidos a alunos de classes normais dos quais constatou seus pontos obtendo progressos no aprendizado. Assim, trabalhos como estes deram por acreditar que o aprendizado não existe sem uma ação concreta que faça a pessoa pensar, experimentar, descobrir, para somente depois entranhar na abstração matemática (AZEVEDO, 1979 apud FIORENTINI; MIORIM et al., 1990, p. 2) ².

² FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. et al. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. Boletim da SBEM-SP, v. 4, n. 7, 1990.

Esta mesma questão da abstração é levatada por Luciano (2017), onde em seu estudo é argumentado sobre a capacidade de o material concreto fazer com que o estudante transite entre os conhecimentos matemáticos. Entretanto, para que essa transição ocorra, o professor deve elaborar atividades concretas e significativas que permitam o desenvolvimento da aprendizagem.

Em suma, o uso de materiais concretos no ensino de matemática possui incentivo de práticas pedagógicas desenvolvidas com crianças e adolescentes, mas que podem ser aplicadas com as devidas adaptações a jovens-adultos e adultos. As possibilidades de utilizá-los para superar os obstáculos que existem entre os aspectos concretos e abstratos da Matemática, fazem com que eles sejam ferramentas propícias para o aperfeiçoamento dos raciocínios da visualização citadas na seção anterior. Porém, assim como Fiorentini, Miorim et al. (1990) aponta a partir de reflexões de Carraher, Carraher e Schliemann (1988) e Luciano (2017) indica em seu estudo, as questões envolvidas destes objetos devem ser pautadas em processos de grande reflexão sobre as maneiras de seu uso, para que assim, eles possam ter suas devidas efetividades.

4 METODOLOGIA

Pela perspectiva da pesquisa científica, a metodologia do estudo tinha por objetivo, a princípio, trabalhar com uma investigação de cunho qualitativo e que procedesse através da pesquisa experimental. A escolha por essas duas abordagens haviam sido definidas devido às intenções iniciais durante a elaboração do projeto. Esperava-se que pudéssemos utilizar os materiais criados durante as aulas de Geometria Analítica da FEG. Dessa maneira, o experimento de ensino seria o modo que iríamos proceder nossa pesquisa, onde através do método estudaríamos as variáveis capazes de influenciar e modificar o pensamento matemático dos estudantes (CEDRO; MOURA, 2016), enquanto a pesquisa qualitativa serviria como embasamento teórico para análise dos resultados obtidos (BICUDO, 2012).

Entretanto, devido às restrições da pandemia de COVID-19 e as mudanças para o ensino remoto emergencial, esta ideia teve que ser deixada de lado, visto que a aplicação presencial do estudo não seria possível de ocorrer e tentar fazê-la de forma remota não compreenderia as propostas do estudo. Dessa forma, a nossa pesquisa científica mudou para uma proposta de sequência didática, elaborada através de um estudo exploratório sobre o uso de materiais concretos e a problemática da visualização em Geometria.

A sequência didática é "de modo simples e numa resposta direta, [...] um modo de o professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentais" (ARAÚJO, 2013). Ainda segundo Araújo (2013), normalmente há a necessidade de elaborá-las a partir de algumas etapas como, a apresentação da situação de estudo, uma análise diagnóstica do conhecimento da turma sobre o tópico ou a assuntos correlatos ao que será discutido, uma sequência de módulos que irão constituir os raciocínios propostos pela sequência e, por fim, uma fase de produção final onde os alunos colocam em prática os conhecimentos adquiridos durante a sequência.

Os modelos construídos serão apresentados no Capítulo 7, porém, antecipadamente destacamos que iremos elaborar uma sequência didática que valorize a superação dos desafios da visualização e extraia o potencial dos materiais concretos destacados no Capítulo 3 através de análises de planificações das superfícies quádras. Acreditamos que este modo de abordagem, mesmo que possa parecer bastante tradicional e já presentes em livros de Geometria Analítica como Winterle e Steinbruch (2000), se utilizadas com o auxílio dos materiais concretos tem a capacidade de superar os desafios que envolvem este conteúdo.

As ferramentas utilizadas na elaboração do estudo se dividiram entre a busca na literatura para o embasamento teórico do trabalho, a pesquisa referencial para a construção das superfícies e a utilização de programas de modelagem que permitissem a construção dos modelos. O embasamento teórico para as superfícies ocorreu por diferentes obras, entretanto a principal utilizada foi a Winterle e Steinbruch (2000). Por sua vez, o programa de modelagem utilizado para a elaboração das formas foi o Blender. Uma explicação mais detalhada sobre o programa e outras ferramentas utilizadas são discutidos no Capítulo 4.

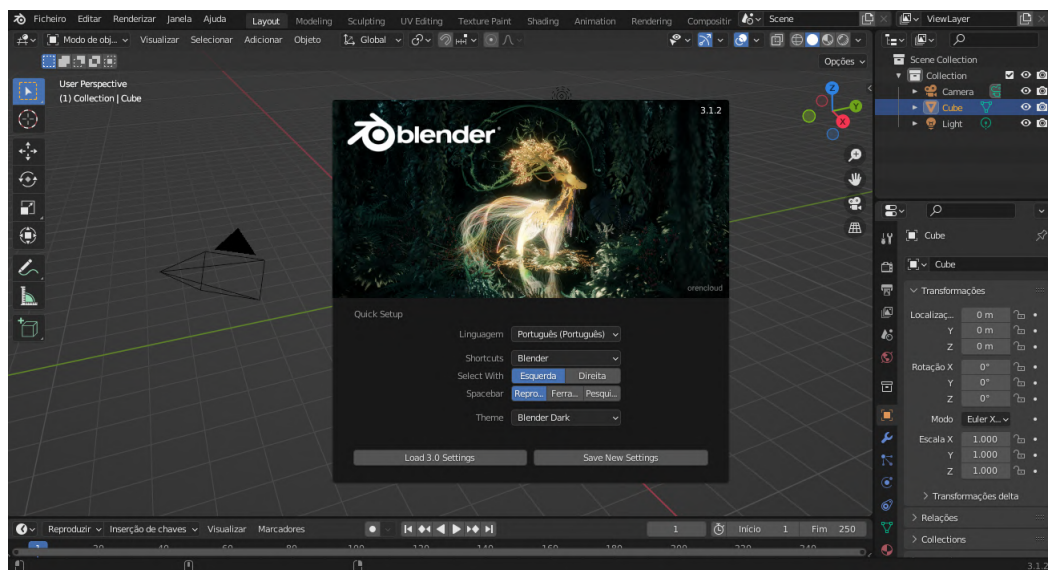
5 LABORATÓRIO E FERRAMENTAS UTILIZADAS

Neste capítulo iremos descrever brevemente algumas informações a respeito do laboratório e das ferramentas utilizadas para o desenvolvimento dos objetos. Acreditamos ser necessário este tipo de explanação, pois, ao apresentarmos os objetos que foram criados é preciso detalhar as especificações da impressora e dos materiais utilizados caso os modelos sejam reproduzidos novamente por terceiros.

5.1 BLENDER

O programa usado para gerar os objetos foi o Blender, um software de código aberto e multi-plataforma, com aplicação para sistemas operacionais baseados no Linux, MacOS e Windows. O programa foi desenvolvido pela Blender Foundation e tem aplicações voltadas principalmente para áreas de modelagem, animação, texturização, composição, renderização e edição de vídeo (FOUNDATION, 2022). A escolha para o uso deste programa foi determinada pelo fato de ser gratuito e com as funcionalidades adequadas (Blender Foundation, 2022).

Figura 1 – Interface inicial do Blender na versão 3.1.2.



fonte: Produção do próprio autor.

É importante destacar que as ferramentas utilizadas durante o uso do programa foram usadas basicamente para gerar, agrupar e cortar objetos. Vale ressaltar este ponto apenas para destacar que nesta etapa não foi necessário se intensificar em utilizar todas as funcionalidades do programa, mas somente utilizar seus recursos mais básicos. Sendo assim, não vamos nos aprofundar em explicar como os objetos foram feitos detalhando passo a passo, pois isto acabaria fugindo do objetivo principal do trabalho. Entretanto, deixamos como referência o manual do programa (Blender Foundation, 2022) e um site utilizado por usuários onde pode ser encontrado diversas perguntas e respostas para problemas que podem ser enfrentados ao utilizá-lo (Blender Stack Exchange, 2022).

5.2 LABORATÓRIO DE PROTOTIPAGEM

O laboratório de prototipagem da FEG faz parte do Departamento de Engenharia Mecânica, sendo coordenado pelo professor Marcelo Sampaio Martins. Sua criação ocorreu no ano de 2019, e desde então tem atendido diferentes projetos de todos os cursos da faculdade. Um trabalho de destaque do laboratório ocorreu durante a pandemia da COVID-19, onde foram produzidos mais de 100 *Face Shields* (MATTOS et al., 2021) que foram disponibilizados a comunidade de saúde da região. O trabalho contou com a participação de estudantes do Programa de Educação Tutorial (PET) da FEG, sob tutoria do professor coordenador do laboratório. Na Figura 2 é apresentada uma foto do laboratório.

Figura 2 – Laboratório de Prototipagem da FEG.



fonte: Produção do próprio autor.

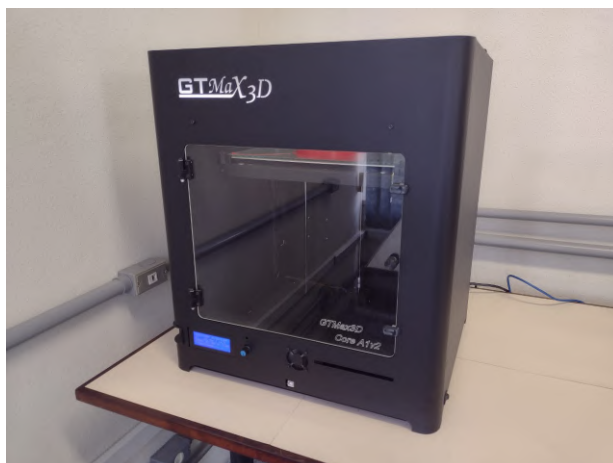
O laboratório conta com 3 impressoras da marca GTmax3D e dois computadores utilizados para manipulação dos modelos 3D. Durante o desenvolvimento do projeto, os modelos criados no Blender eram salvos em arquivos de formato ".stl" e através do programa Simplify3D, que é licenciado nos computadores do laboratório, eram gerados os arquivos lidos pelas impressoras. Cada arquivo deveria ser salvo conforme o modelo de impressora que seria usada para imprimir. Os objetos deste trabalho foram impressos com filamentos do tipo OBS sendo feitos para ter em média tamanhos que variam entre 20 cm e 25 cm. A seguir são apresentadas algumas especificações obtidas no site do fabricante sobre as impressoras do laboratório.

- **GTmax3D Core A1V2**

Esta impressora é a menor das três presentes no laboratório. É compatível com diferentes tipos de filamento como ABS, PLA, PETG, etc. Dentre às três, é a que possui menor velocidade de impressão. As dimensões externas da impressora, considerando o suporte para o posicionamento do filamento é de 490 mm de largura, 540 mm de profundidade e 555 mm de altura. A área de impressão é de 300 mm de largura, 200 mm de profundidade e 300 mm de altura. Possui conexão via USB e cartão SD, sendo a impressão determinada diretamente pelo monitor da máquina. Na Figura 3 é possível ver o modelo da impressora.

- **GTmax3D Core H5**

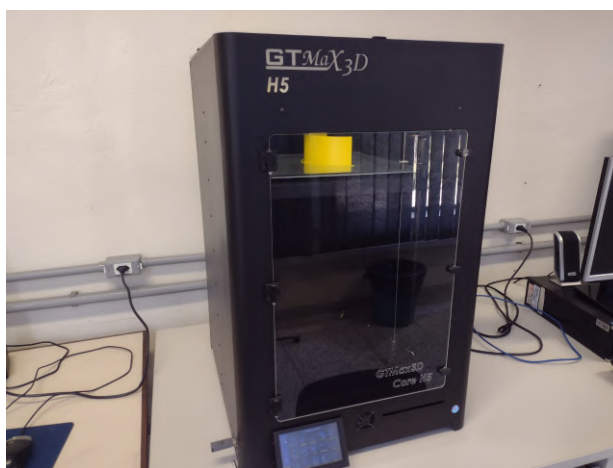
Figura 3 – Impressora GTmax3D A1V2.



fonte: Produção do próprio autor.

Esta impressora é a segunda maior do laboratório. Assim como a anterior, é compatível com diferentes tipos de filamento como ABS, PLA, PETG, etc. As dimensões externas da impressora, considerando o suporte para o posicionamento do filamento é de 500 mm de largura, 700 mm de profundidade e 770 mm de altura. Sua área de impressão é maior que a anterior, tendo dimensões com 300 mm de largura, 300 mm de profundidade e 500 mm de altura. Esta impressora possui entradas por conexão USB, cabo de rede e Wi-Fi. Na [Figura 4](#) é possível observar o modelo da impressora.

Figura 4 – Impressora GTmax3D core H5.

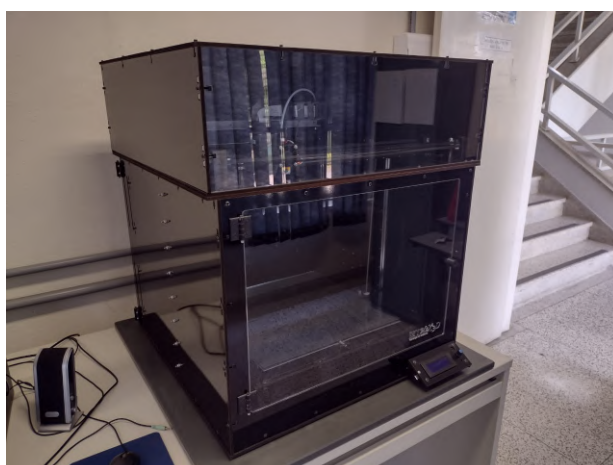


fonte: Produção do próprio autor.

• GTmax3D Core H5

Por fim, temos a última e maior impressora do laboratório. Também possui compatibilidade com diferentes filamentos como ABS, PLA, PETG, etc. As dimensões externas da impressora com o suporte para o posicionamento do filamento é de 690 mm de largura, 740 mm de profundidade e 700 mm de altura. Sua área de impressão é de 400 mm de largura, 400 mm de profundidade e 400 mm de altura. Possui entrada para cartão SD e a impressão é determinada diretamente pelo monitor da máquina. Na [Figura 5](#) é possível visualizar o modelo da impressora.

Figura 5 – Impressora GTmax3D AB 400.



fonte: Produção do próprio autor.

6 INTERPRETAÇÕES SOBRE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Neste capítulo vamos apresentar algumas considerações sobre o conteúdo de superfícies quádricas. A abordagem que faremos é baseada na forma exposta do conteúdo encontrada no livro de Winterle e Steinbruch (2000). Sabemos que os conceitos e definições do conteúdo estão presentes em inúmeros livros de Geometria Analítica de nível superior. Sendo assim, a escolha pela abordagem como exposta em Winterle e Steinbruch (2000) não tem uma motivação específica, se tratando apenas de uma decisão por considerar conveniente a abordagem proposta pelo autor. Iremos expor uma análise interpretativa das seguintes superfícies:

- Elipsoide;
- Hiperboloide de uma folha;
- Hiperboloide de Duas Folhas;
- Paraboloide Elíptico;
- Paraboloide Hiperbólico;
- Cone;
- Superfícies cilíndricas

De acordo com Winterle e Steinbruch (2000) a equação:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \quad (1)$$

é a equação geral de uma superfície quádrica, no qual pelos menos um dos coeficientes a, b, c, d, e ou f devem ser diferentes de zero. Se a superfície quádrica da Equação 1 for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma cônica. A partir deste raciocínio, a seguir serão explanadas as análises de algumas superfícies quádricas. Nestas análises serão feitas considerações com as superfícies centradas na origem. Porém, que fique claro que caso estiverem deslocadas, a interpretação seria análoga. Além disso, em todos os casos que serão definidas nas equações a seguir, x, y e z são números reais e a, b e c são os valores de semi-eixo das superfícies, também reais e positivos.

6.1 ELIPSOIDE

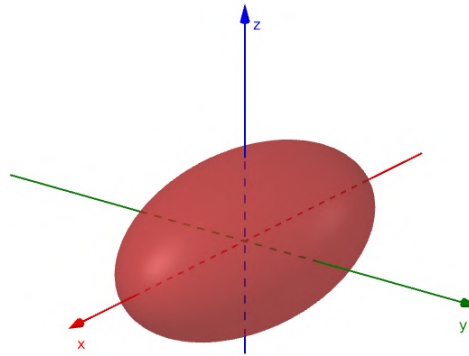
De acordo com Winterle e Steinbruch (2000), a equação do elipsoide na sua forma canônica é representada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

A representação de um elipsoide é apresentado na [Figura 6](#), sendo esta superfície determinada pela Equação [3](#)

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1. \quad (3)$$

Figura 6 – Elipsoide gerado através do software Geogebra ([GeoGebra](#), [2022](#)) e determinado pela Equação [3](#).



fonte: Produção do próprio autor.

Para exemplificarmos o raciocínio, se tomarmos a Equação [3](#) e traçarmos um plano paralelo ao plano coordenado xy a partir de um dado valor de $z = k$, sendo $k = cte$, podemos reescrevê-la do seguinte modo:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{4} \quad (4)$$

Como k é um termo que está ao quadrado, para qualquer valor real que ele assumir que seja menor que 2, temos que neste caso a Equação [3](#) será sempre uma elipse. Caso os valores de semi-eixo no lado esquerdo fossem iguais, teríamos a equação de uma circunferência. Além disso, para superfícies centradas na origem o corte terá a elipse ou circunferência máxima quando $k = 0$ e apenas um ponto quando $k = \pm 2$. A [Figura 25](#) traz uma representação de cortes feitos por planos paralelos a xy em um elipsoide definido pela Equação [3](#).

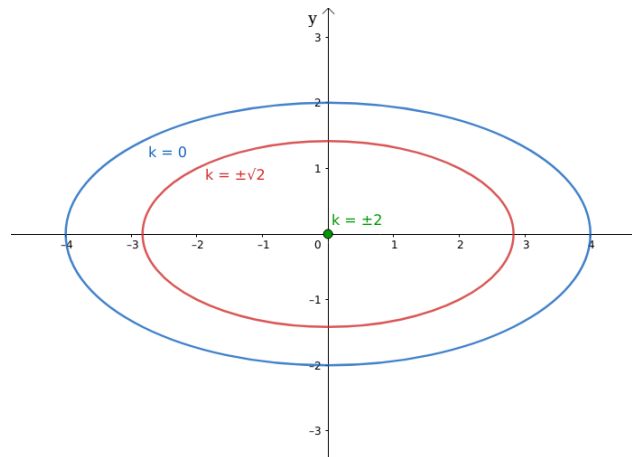
As interpretações para os planos paralelos a xz e yz são análogas a xy . Ou seja, a projeção da superfície em um dos planos irá sempre gerar elipses ou circunferências. Pelo fato do raciocínio ser análogo, não iremos prolongar a interpretação para os cortes paralelos aos outros planos coordenados.

6.2 HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA

O hiperboloide de uma folha tem, de acordo com [Winterle e Steinbruch](#) ([2000](#)), sua equação na forma canônica representada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

Figura 7 – Representação no plano xy de seções planas feitas no elipsoide. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

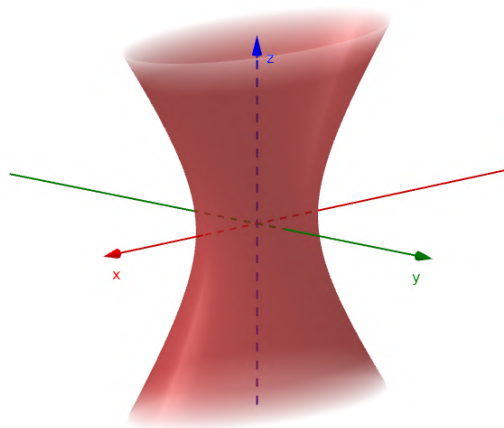
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7)$$

Em cada um dos casos das Equações 5, 6 e 7, a diferença de sinal na frente de cada um dos termos determina a posição do hiperboloide em relação aos eixos coordenados. Vamos focar em examinar a Equação 5, uma vez que o raciocínio para as outras é análogo. A Figura 8 traz a representação desta superfície determinada pela Equação 8.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1 \quad (8)$$

Figura 8 – Hiperboloide de uma folha gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 8.



fonte: Produção do próprio autor.

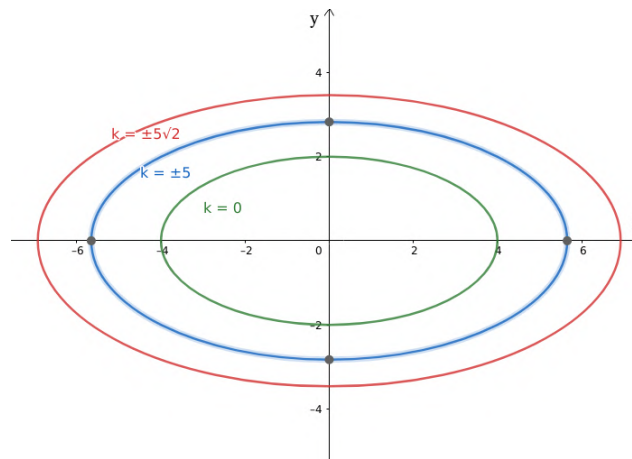
Tomando a Equação 8 e traçando um plano paralelo ao eixo xy para um dado valor de z , vemos

que ela pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{25} \quad (9)$$

em que $k = z$. Para qualquer valor de k temos que a Equação 9 é a de uma curva elíptica. A medida que o plano determinado por $k = z$ se afasta do plano xy , a elipse aumenta de tamanho, obtendo seu valor mínimo em $k = 0$. A Figura 9 mostra a projeção no plano xy para um hiperboloide de duas folhas determinado pela Equação 8.

Figura 9 – Representação no plano xy de seções planas feitas no hiperboloide de duas folhas. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

Agora, se traçarmos um plano paralelo ao eixo xz para um dado valor de y , a Equação 8 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1 - \frac{k^2}{4} \quad (10)$$

em que, desta vez $k = y$. Neste caso, temos que a Equação 10 é uma hipérbole para qualquer valor de k . Caso tenhamos $1 - \frac{k^2}{4} > 0$, a hipérbole tem o semi-eixo real ao longo do eixo x . Do contrário, caso $1 - \frac{k^2}{4} < 0$ o semi-eixo real fica determinado ao longo do eixo z . Em $k = \pm 2$ temos as assíntotas da hipérbole. A Figura 10 mostra a projeção no plano xz para um hiperbolóide de uma folha determinado pela Equação 8.

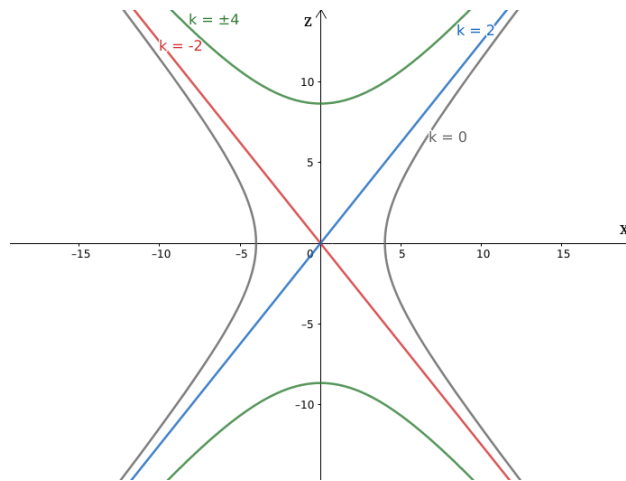
Para cortes paralelos ao plano yz , a análise é análoga ao raciocínio desenvolvido para xz . Isto é, conforme forem feitos cortes por planos paralelos a yz , surgem hipérboles que trocam a posição do semi-eixo real conforme o plano $k = x$ se aproxima ou se afasta de yz .

6.3 HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS

Para o hiperboloide de duas folhas, a equação canônica que o descreve é apresentada nas Equações 11, 12 e 13 (WINTERLE; STEINBRUCH, 2000):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (11)$$

Figura 10 – Representação no plano xz de secções planas feitas no hiperboloide de uma folha determinado a partir da Equação 8. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

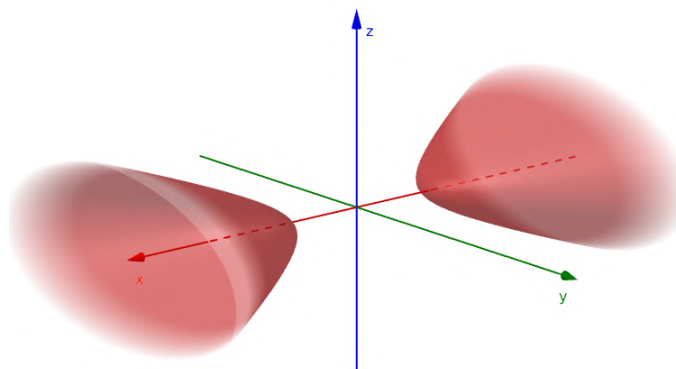
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (12)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (13)$$

Observemos que em cada uma das equações 11, 12 e 13, temos sempre um termo positivo e outros dois negativos. A diferença entre cada uma determina a posição do hiperboloide em relação aos eixos. A Figura 11 mostra um hiperboloide de duas folhas determinado pela Equação 14.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1 \quad (14)$$

Figura 11 – Hiperboloide de duas folhas gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 14.



fonte: Produção do próprio autor.

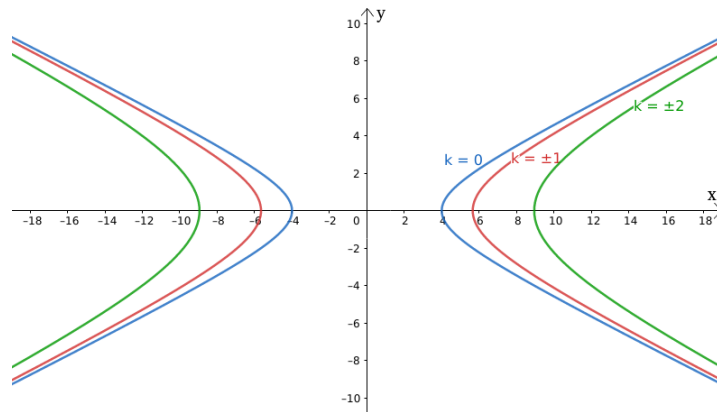
Tomando a Equação 14 como exemplo e traçando planos paralelo a xy para um dado valor de z ,

podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 + k^2 \quad (15)$$

em que $k = z$. A Equação 15 para um dado valor k determina uma curva hiperbólica. Neste caso, a hipérbole tem eixo real ao longo do eixo x e é mínima quando $k = 0$. Assim, para diferentes planos traçados ao longo do eixo z , irão surgir novas hipérboles. Neste caso, quanto maior o valor de k , maior a distância da hipérbole em relação a origem. A Figura 12 apresenta as curvas de um hiperbolóide de duas folhas gerado pela Equação 14.

Figura 12 – Representação no plano xy de secções planas feitas no hiperboloide de duas folhas a partir da Equação 14. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

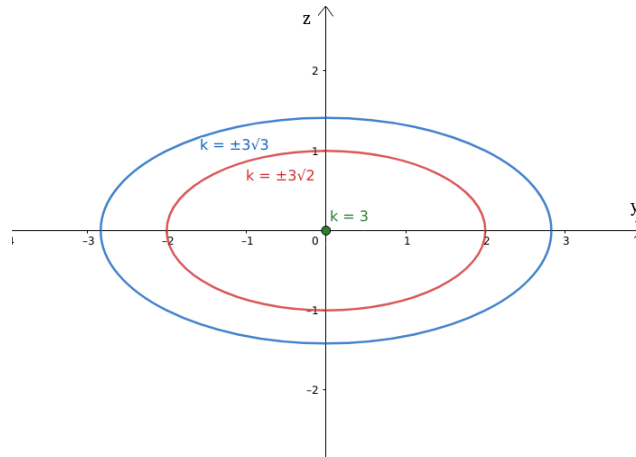
Fazendo agora cortes paralelos a yz a partir de um valor de x , temos que a Equação 14 fica na forma:

$$\frac{y^2}{4} + z^2 = \frac{k^2}{9} - 1 \quad (16)$$

em que $k = x$. Nesta Equação 16 temos uma curva elíptica para todo $\frac{k^2}{9} > 1$. Se observarmos o hiperboloide de duas folhas gerado na Figura 11, vemos que quando $\frac{k^2}{a^2} < 1$, estamos tomando um plano para um valor de x que está na região onde a superfície não existe. Por sua vez, se tomarmos um plano que passa justamente em $k = \pm 3$, a Equação 16 ficará na forma $\frac{y^2}{4} + z^2 = 0$, fazendo com que, neste caso, só exista um ponto em $y = z = 0$ que satisfaça a Equação. A projeção no plano por curvas geradas por secções planas paralelas a yz é apresentada na Figura 13.

A secções planas geradas por cortes paralelos ao plano xz tem interpretação análoga as apresentadas por planos paralelo a xy . Além disso, o raciocínio de análise é o mesmo para as demais Equações apresentadas em 12 e 13, mudando em cada um dos casos apenas a posição da superfície em relação aos eixos.

Figura 13 – Representação no plano yz de secções planas feitas no hiperboloide de duas folhas a partir da Equação 14. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

6.4 PARABOLOIDE ELÍPTICO

A representação canônica do parabolóide elíptico é dada pelas seguintes Equações 17, 18, 19:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm cz \quad (17)$$

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm by \quad (18)$$

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm ax \quad (19)$$

Em cada um dos casos das Equações 17, 18 e 19, o sinal na frente de cada um dos termos determina o posicionamento da superfície em relação aos eixos coordenados. Nas Equações 17, 18 e 19, para a superfície ser um parabolóide elíptico ambos os lados da igualdade devem ter o mesmo sinal. Assim como para os exemplos anteriores, vamos tomar um caso a partir de uma das equações acima e generalizar a análise para as demais. A Figura 14 apresenta as curvas geradas para um parabolóide elíptico determinado pela Equação 20.

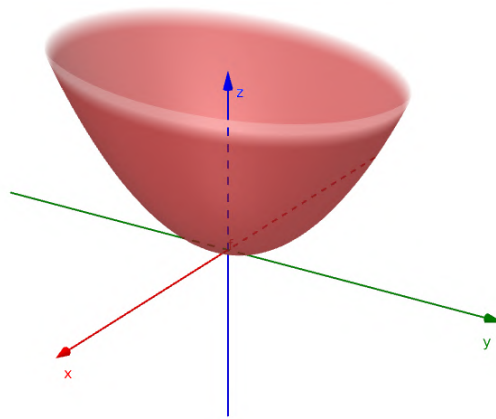
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z \quad (20)$$

Traçando planos paralelos a xy para um parabolóide elíptico determinado a partir da Equação 20, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = k \quad (21)$$

sendo $k = z$. Neste caso, para quaisquer valores de $k > 0$ teremos sempre uma elipse que aumenta de tamanho conforme o plano se afasta de xy . Em $k = 0$ teremos um ponto e para $k < 0$ a superfície não existe. Este último ponto é fácil de visualizar, pois não há como a soma dos dois termos da direita resultar em um valor negativo devido a potência quadrática. A Figura 15 traz a projeção no plano xy

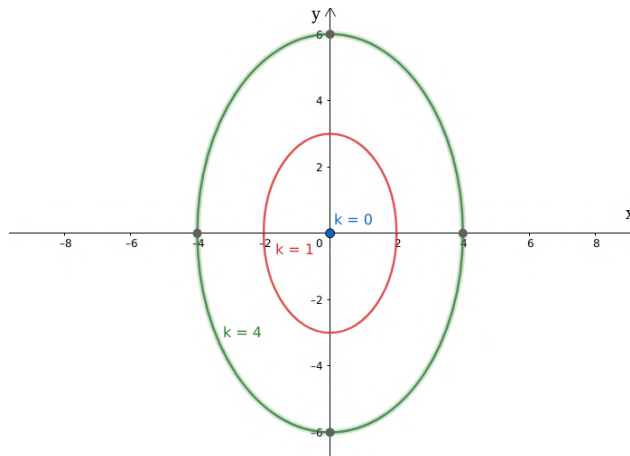
Figura 14 – Paraboloide elíptico gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 20.



fonte: Produção do próprio autor.

feita por planos que interceptam um paraboloide elíptico determinado pela Equação 20.

Figura 15 – Representação no plano xy de secções planas feitas no paraboloide elíptico determinado a partir da Equação 20. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

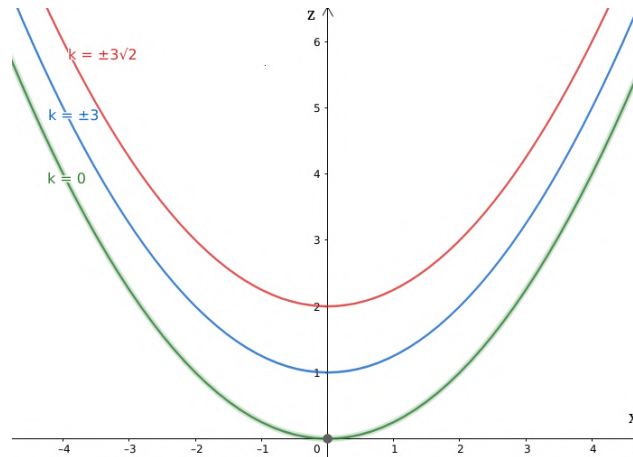
Traçando agora planos paralelo a xz iremos reescrever a Equação 20 do seguinte modo:

$$\frac{x^2}{4} = z - \frac{k^2}{9} \quad (22)$$

sendo $k = y$. A Equação 22 é a de uma parábola com vértice em $(0, \frac{k^2}{9})$. Os cortes por planos paralelos a xz irão gerar sucessivas parábolas, sendo a curva mínima determinada em $k = 0$. A Figura 19 traz a projeção no plano xz feita por cortes que interceptam um paraboloide elíptico determinado pela Equação 20.

Neste caso, a análise para cortes paralelos ao plano yz é análoga ao plano coordenado xz , mudando apenas os termos presente em cada uma das equações. Além disso, para o paraboloide elíptico representado pelas equações 18 e 19 a análise também é análoga, mudando apenas a posição da superfície em relação aos eixos.

Figura 16 – Representação no plano xz de secções planas feitas no parabolóide elíptico determinado a partir da Equação 20. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

6.5 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

A Equação do parabolóide hiperbólico na sua forma canônica determinada por Winterle e Steinbruch (2000) pode ser escrita como:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm cz \quad (23)$$

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm by \quad (24)$$

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm ax \quad (25)$$

Podemos perceber que as equações são as mesmas determinadas anteriormente em 17, 18 e 19. Entretanto, o que diferencia a equação do parabolóide hiperbólico para o parabolóide elíptico, é o fato de que os termos de segundo grau devem ter sempre sinais opostos. A Figura 17 mostra um parabolóide hiperbólico determinado pela Equação 26.

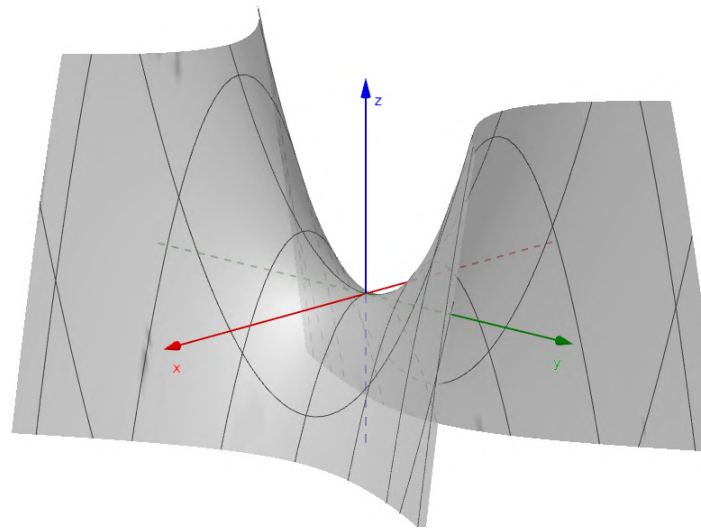
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = z \quad (26)$$

Traçando planos paralelos ao eixo xy a partir de um dado valor de z podemos reescrever a Equação 26 de modo que:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = k \quad (27)$$

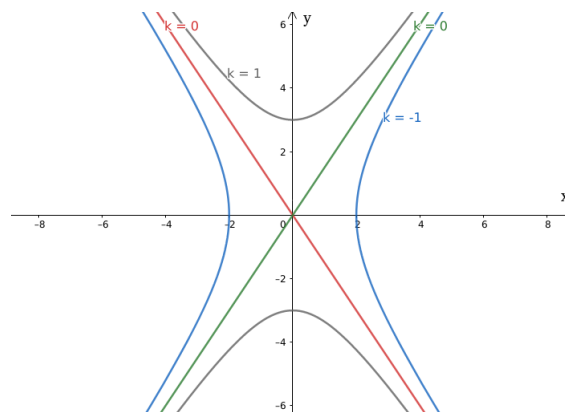
em que $k = z$. A Equação 27 é a de uma hipérbole que tem o semi-eixo real determinado pelo sinal de z . Neste caso, para $k > 0$, teremos sucessivas hipérboles com semi-eixo real ao longo do eixo y . Do contrário, isto é, para $k < 0$, teremos sucessivas hipérboles com semi-eixo real em x . Para $k = 0$, temos as assíntotas da hipérbole. A Figura 18 traz a projeção no plano xy para um parabolóide hiperbólico determinado pela Equação 26.

Figura 17 – Paraboloide hiperbólico gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 26.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 18 – Representação no plano xy de secções planas feitas no paraboloide hiperbólico determinado a partir da Equação 26. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

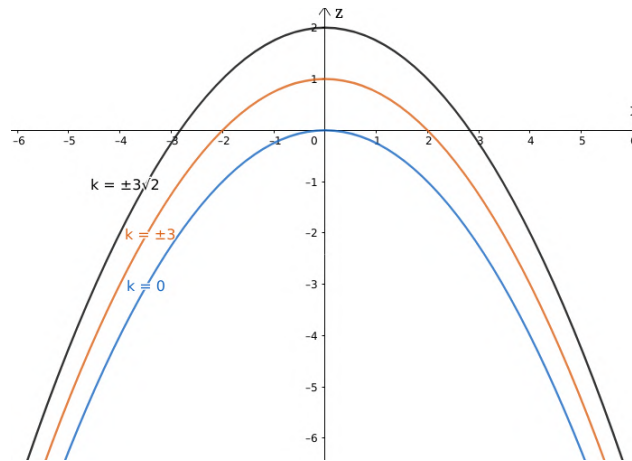
Considerando novamente a Equação 26, porém desta vez interseccionando por planos paralelos ao eixo xz para um dado valor de y , nossa Equação 26 pode ser reescrita na forma:

$$\frac{x^2}{4} = -(z - \frac{k^2}{9}) \quad (28)$$

em que $k = y$. Neste caso, temos uma parábola com vértice em $(0, -\frac{k^2}{9})$. O sinal na frente dos termos no lado direito nos mostra que a concavidade da parábola está determinada para baixo. Conforme o plano se afasta de xz , a parábola fica mais distante da origem, caminhando com o vértice no sentido positivo de z . O vértice desta parábola é mínimo em $k = 0$. A Figura 19 traz a projeção no plano, gerada por cortes paralelos a xz na superfície determinada pela Equação 26.

A análise para os planos cortados paralelamente a yz são análogas as do plano xz . A diferença ocorre apenas pelos fatos de que a parábola tem concavidade para cima, tem vértice máximo em $k = 0$ e caminha com o vértice no sentido negativo de z conforme o plano se afasta de yz . Além disso, assim como visto nos casos anteriores, a interpretação para os paraboloides hiperbólicos determinados pelas

Figura 19 – Representação no plano xz de seções planas feitas no parabolóide hiperbólico determinado a partir da Equação 26. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

equações 24 e 25 é análogo ao caso apresentado.

6.6 CONE

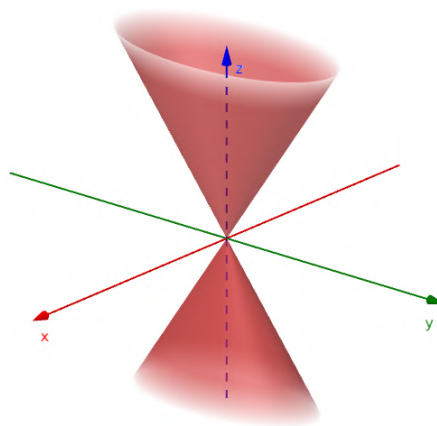
De acordo com Winterle e Steinbruch (2000), a equação canônica que o define o cone é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (29)$$

Exemplificando, a Figura 20 traz uma representação desta superfície determinada pela Equação 30.

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0. \quad (30)$$

Figura 20 – Cone gerado através do software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 30.



fonte: Produção do próprio autor.

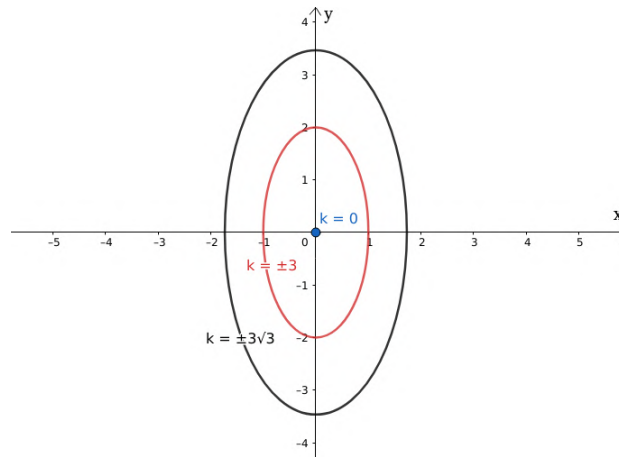
Quando traçado um plano paralelo a xy a partir de um dado valor de z , a Equação 30 pode ser

reescrita na forma:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{k^2}{9} \quad (31)$$

sendo $k = z$. Como k é um termo que está ao quadrado, para qualquer valor real que ele assumir a Equação 31 será sempre uma elipse. Neste exemplo, caso tenhamos $k = 0$, o plano intercepta um ponto na origem. A Figura 21 traz uma representação de cortes feitos por planos paralelos a xy em um cone definido pela Equação 30.

Figura 21 – Representação no plano xy de secções planas feitas no cone determinado a partir da Equação 30. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

De maneira análoga podemos fazer uma análise observando planos que cortam paralelamente o plano coordenado xz para um dado valor de y . Reescrevendo a Equação 30 temos:

$$\frac{z^2}{9} - x^2 = \frac{k^2}{4} \quad (32)$$

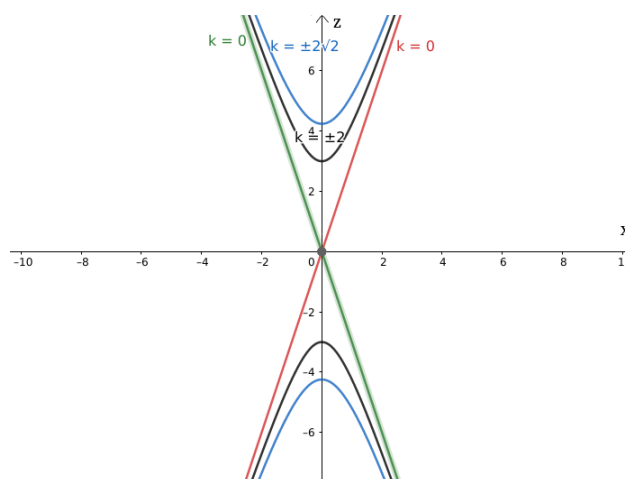
em que $k = y$. Neste caso, a Equação 32 para qualquer valor de k será sempre uma hipérbole com semi-eixo real ao longo de z . Caso $k = 0$ temos as assíntotas desta hipérbole. A Figura 22 traz uma representação de cortes feitos por planos paralelos a xz em um cone definido pela Equação 30.

Para cortes feitos paralelamente a yz , os resultados serão análogos aos do plano coordenado xz , mudando apenas os valores de semi-eixo e posição da hipérbole gerada. No caso do cone, a posição da superfície em relação aos eixos muda quando os valores de semi-eixo a , b ou c variam em relação aos denominadores da Equação 29.

6.7 SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

Podemos analisar também as superfícies cilíndricas. De acordo com Winterle e Steinbruch (2000), uma superfície cilíndrica surge quando uma reta r se move ao longo de uma curva C e paralelamente a uma outra reta f , que não está contida na curva. A reta r que se move é chamada de geratriz e a curva C de diretriz da superfície cilíndrica. Assim como definido por Winterle e Steinbruch (2000) iremos considerar superfícies geradas por diretrizes que estão nos planos coordenados e a geratrizes são

Figura 22 – Representação no plano xz de secções planas feitas no cone determinado a partir da Equação 30. Figura gerada no software Geogebra (GeoGebra, 2022).



fonte: Produção do próprio autor.

paralelas ao eixo coordenado não contido no plano. Dessa forma, em geral, as superfícies cilíndricas dependem apenas de duas coordenadas, onde a independente é justamente aquela paralela à reta geratriz.

6.7.1 CILINDRO PARABÓLICO

A parábola pode estar determinada ao longo de qualquer um dos planos coordenados. Tomando como exemplo uma que está definida ao longo do plano xy , temos que sua equação reduzida fica na forma como definida pela Equação 33:

$$x^2 = 2py \quad (33)$$

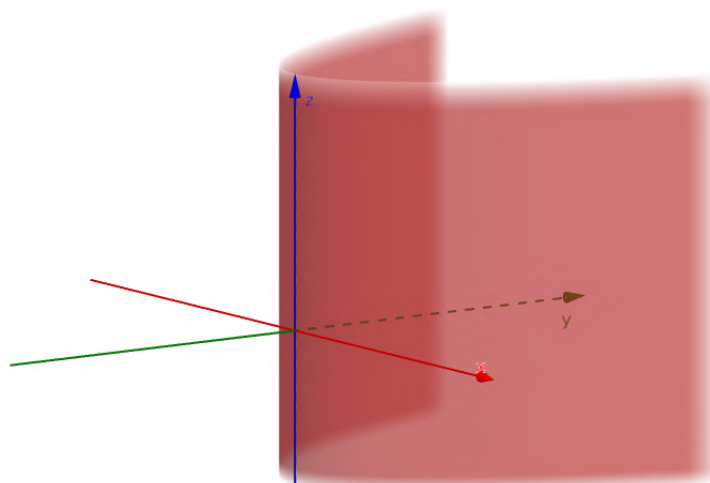
em que, p é a distância do foco até a reta diretriz. Vamos considerar agora uma parábola determinada pela Equação 34:

$$x^2 = 2y \quad (34)$$

Vemos que Equação 34 independe do valor de z , fazendo com que, caso fizéssemos cortes por planos paralelos a xy , teríamos sempre a mesma parábola da Equação 34. Por sua vez, se fizermos cortes paralelos a xz , podemos reescrever a Equação 34 na forma $x^2 = 2k$, sendo $k = y$. Esta nova equação resulta em dois valores possíveis para x caso $k > 0$. Por fim, se fizermos um corte paralelo a yz a Equação 34 pode ser reescrita como $y = \frac{k^2}{2}$, sendo agora $k = x$, fazendo com que y possa assumir um único valor.

Caso a parábola fosse determinada ao longo de qualquer outro eixo coordenado, a análise seria a mesma, mudando apenas a posição a sua posição.

Figura 23 – Curva parabólica gerada através software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 34.



fonte: Produção do próprio autor.

6.7.2 CILINDRO ELÍPTICO

Assim como a parábola, elipse pode ser determinada ao longo de qualquer um dos planos coordenados. Tomando como exemplo uma que está definida ao longo do plano xy , temos que sua equação reduzida fica na forma como definida pela Equação 35

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (35)$$

Vamos considerar agora uma elipse determinada pela Equação 36.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (36)$$

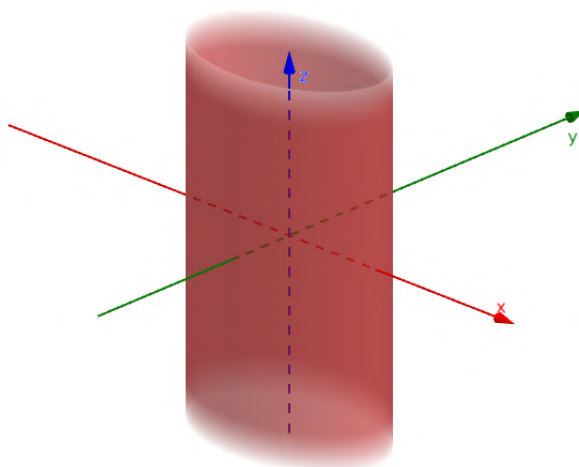
Novamente, vemos que Equação 36 independe do valor de z , fazendo com que caso traçamos planos paralelos a xy , teremos sempre a mesma elipse. Caso façamos um corte paralelo a xz , teremos a Equação 36 reescrita na forma $x = \pm 3\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$, sendo $k = y$, resultando em dois valores possíveis para x caso $1 - \frac{k^2}{4} > 0$ e um único valor caso $1 - \frac{k^2}{4} = 0$. Finalmente, se fizermos um corte paralelo a yz a Equação 36 pode ser reescrita como $y = 2\sqrt{1 - \frac{k^2}{9}}$, sendo agora $k = x$, fazendo com que y também possa assumir dois valores possíveis caso $1 - \frac{k^2}{9} > 0$ e um único valor caso $1 - \frac{k^2}{9} = 0$.

Caso a elipse fosse determinada ao longo de qualquer outro eixo coordenado, a análise também seria a mesma, mudando apenas a posição a sua posição.

6.7.3 CILINDRO HIPERBÓLICO

A hipérbole também pode ser determinada ao longo de qualquer um dos planos coordenados. Tomando como exemplo uma que está definida ao longo do plano xy , temos que sua equação reduzida

Figura 24 – Curva elíptica gerada através software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 36.



fonte: Produção do próprio autor.

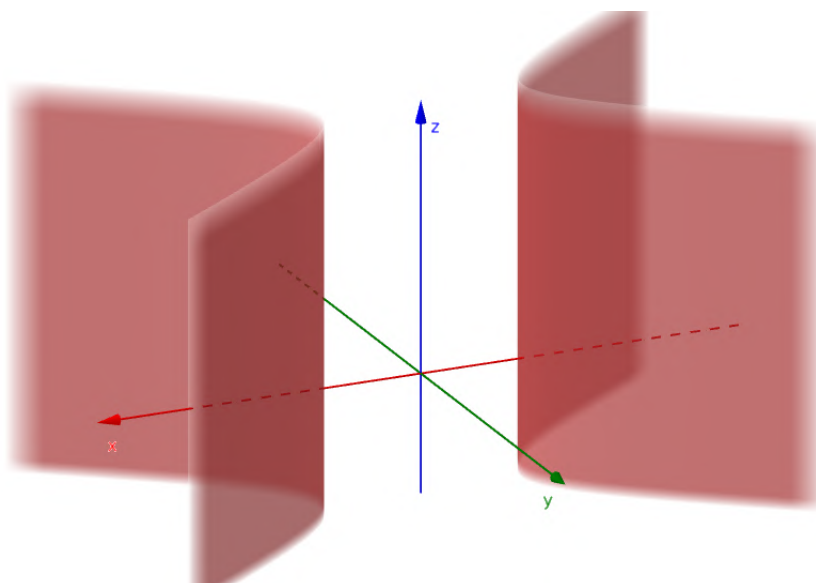
fica na forma como definida pela Equação 37

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (37)$$

Vamos tomar então como exemplo uma hipérbole determinada pela Equação 38.

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1 \quad (38)$$

Figura 25 – Curva hiperbólica gerada através software Geogebra (GeoGebra, 2022) e determinado pela Equação 38.



fonte: Produção do próprio autor.

Novamente, vemos que Equação 38 independe do valor de z , fazendo com que caso traçamos planos paralelos a xy , teremos sempre a mesma hipérbole definida em 38. Agora, caso façamos um

corte paralelo a xz , teremos a Equação 38 reescrita na forma $x = \pm 2\sqrt{\frac{k^2}{9} - 1}$, sendo $k = y$. Esta nova equação resulta em dois valores possíveis para x caso $\frac{k^2}{9} - 1 > 0$ e em um único valor caso $\frac{k^2}{9} - 1 = 0$. Da mesma forma, se fizermos um corte paralelo a yz a Equação 38 pode ser reescrita como $y = \pm 3\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}$, onde agora $k = x$. Desta vez, temos que y pode assumir dois valores para qualquer k dado.

Novamente, caso a hipérbole fosse determinada ao longo de qualquer outro eixo coordenado, a análise seria a mesma, mudando apenas a sua posição.

7 MODELOS CONSTRUÍDOS E PROPOSTA DE ENSINO

Neste capítulo vamos expor como os modelos foram construídos e explicar a proposta de ensino do estudo. Antecipadamente, é importante salientar que boa parte dos modelos não pôde ser impressa devido a atrasos no projeto causados pela pandemia de COVID-19. Durante um certo tempo de elaboração do projeto, o campus da FEG manteve algumas restrições quanto ao uso de suas dependências. Assim, considerando as etapas de aprendizagem para utilizar as máquinas e as tentativas para conseguir montar os objetos no programa de modelagem, bastante tempo foi despendido. Entretanto, os modelos foram gerados e estão prontos para serem impressos.

As superfícies construídas foram feitas considerando cortes paralelos aos planos coordenados, assim como os elucidados no Capítulo 6. O objetivo foi que pudessem evidenciar a planificação destas superfícies, que por ventura, dependendo da maneira que é feita o corte, mostram o objeto como sendo composto por curvas cônicas ou retas. Este tipo de abordagem se ajustou adequadamente a pesquisa não somente pelo fato de corroborar para uma visualização planificada proposta pelo trabalho, mas também por contribuir num problema estratégico de impressão. Nosso objetivo é de que os materiais sejam impressos em tamanhos que variem entre 20 *cm* e 30 *cm* de altura. Porém, em impressões 3D, dependendo da impressora e do material utilizado, fazer uma peça com essas dimensões de uma só vez pode levar bastante tempo. Além disso, muitas vezes o próprio formato do objeto não favorece a impressão, visto que peças com formas muito singulares podem sofrer certas deformações durante o processo.

Quando dividimos estes objetos em mais de uma parte, o tempo de impressão diminui e a proposta de gerar materiais com dimensões maiores é alcançada. Entretanto, mesmo que essa condição seja atendida, é importante pontuar dois aspectos muito significativos para que as impressões possam ocorrer de maneira correta. A primeira é de que a impressora utilizada deve estar bem regulada, de modo que as impressões ocorram de maneira precisa. E a segunda é de que o tipo de material utilizado na impressão permita que seja possível manipulá-lo posteriormente, para que assim se possa unir as partes impressas. Se estes dois aspectos forem atendidos, é possível gerar peças em tempos menores e com tamanhos significativos.

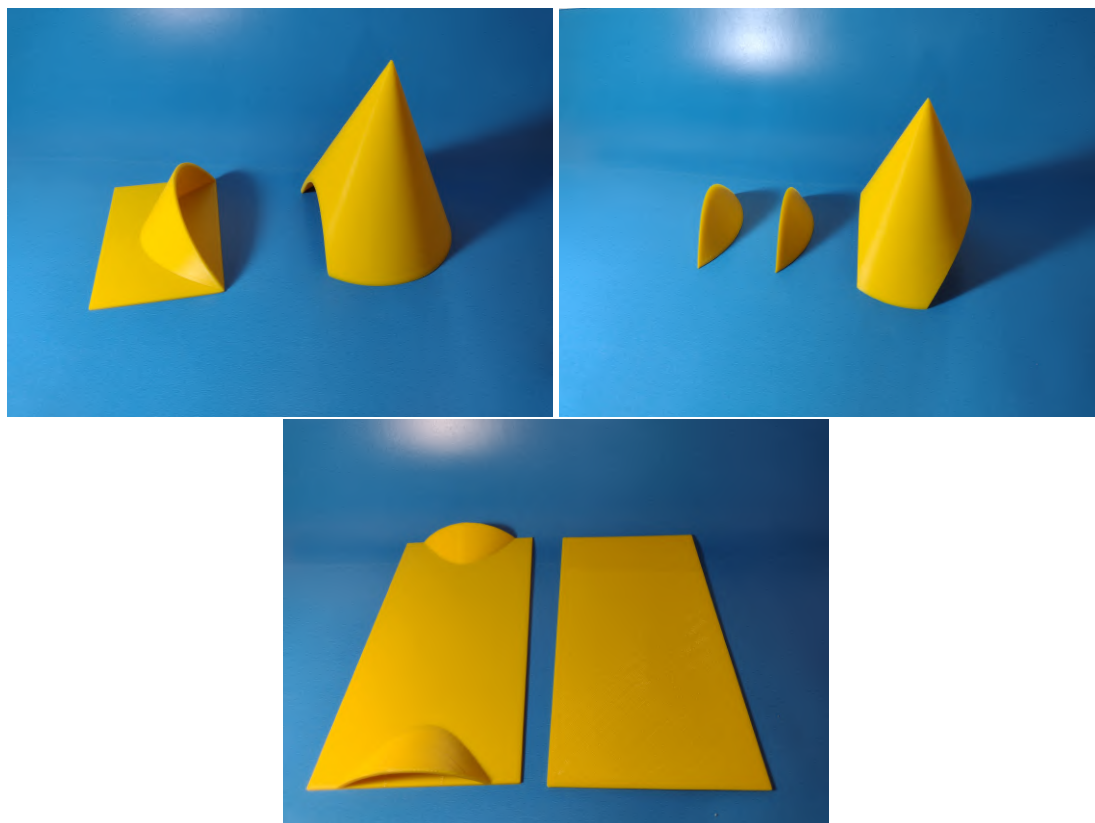
No ponto de vista do autor do trabalho, a questão do tamanho dos objetos é importante por considerarmos cenários onde a superfície é exibida para os estudantes durante uma aula. Caso fossem muito pequenas, o professor poderia ter dificuldades em destacar certas partes ao mostrá-las para os estudantes. Além disso, mesmo em situações onde o aluno, sozinho ou em grupo, esteja manipulando ou tocando objeto, enxergamos que dimensões maiores são mais favoráveis para o entendimento.

A seguir, serão apresentados quais critérios foram considerados durante a elaboração de cada modelo, mostrando um exemplo do cone impresso. Em seguida apresentaremos a proposta de sequência didática para se trabalhar com estas formas. Para melhor visualização dos modelos, as imagens de cada um estão inseridas no Apêndice A.

7.1 OBJETOS

Como exemplo de um modelo impresso, a [Figura 26](#), [Figura 27](#), [Figura 28](#) e [Figura 29](#) mostram um cone feito com as impressoras do laboratório. As imagens presente na [Figura 26](#) e [Figura 28](#) mostram suas partes separadas, enquanto que as da [Figura 27](#) e [Figura 29](#) já apresentam o objeto montado. Os cortes feitos evidenciam a parábola, hipérbole, elipse e circunferência presente na superfície.

Figura 26 – Modelo do cone impresso com as impressora do Laboratório de Protogipagem.



fonte: Produção do próprio autor.

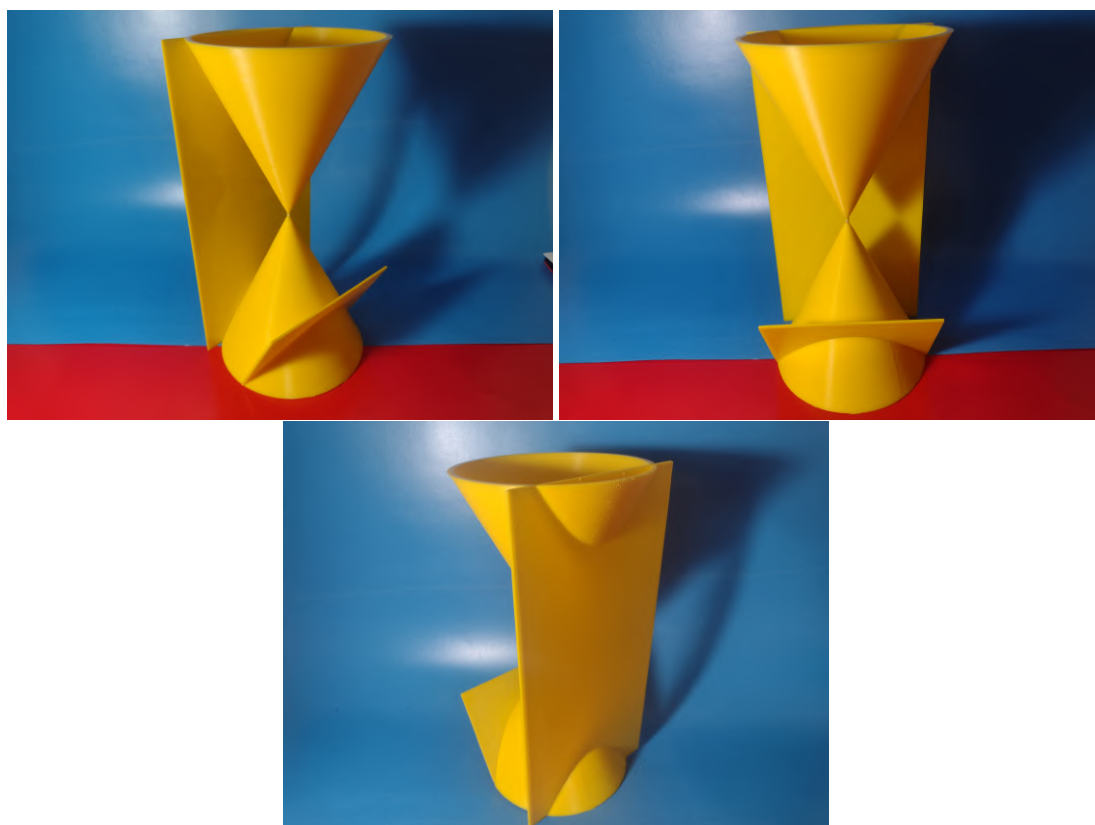
Da mesma maneira, a [Figura 28](#) e [Figura 29](#) mostram outro cone feito nas impressoras do laboratório. Assim como no caso anterior, as imagens da [Figura 28](#) mostram as partes do cone separadas, enquanto que as da [Figura 29](#) mostram o objeto montado. Os cortes feitos evidenciam a circunferência e elipse presente na superfície.

O modelo construído para o elipsoide possui planos que passam pela maior elipse e por uma elipse de tamanho intermediário. Foram feitos modelos para superfícies seccionadas por planos paralelos a dois eixos coordenados diferentes. A [Figura 30](#) traz uma representação das formas construídas para esta superfície.

Da mesma maneira, os modelos para o hiperboloide de uma folha foram construídos gerando planos que evidenciassem as elipses e hipérboles da superfície. Temos uma representação desta superfície na [Figura 31](#)

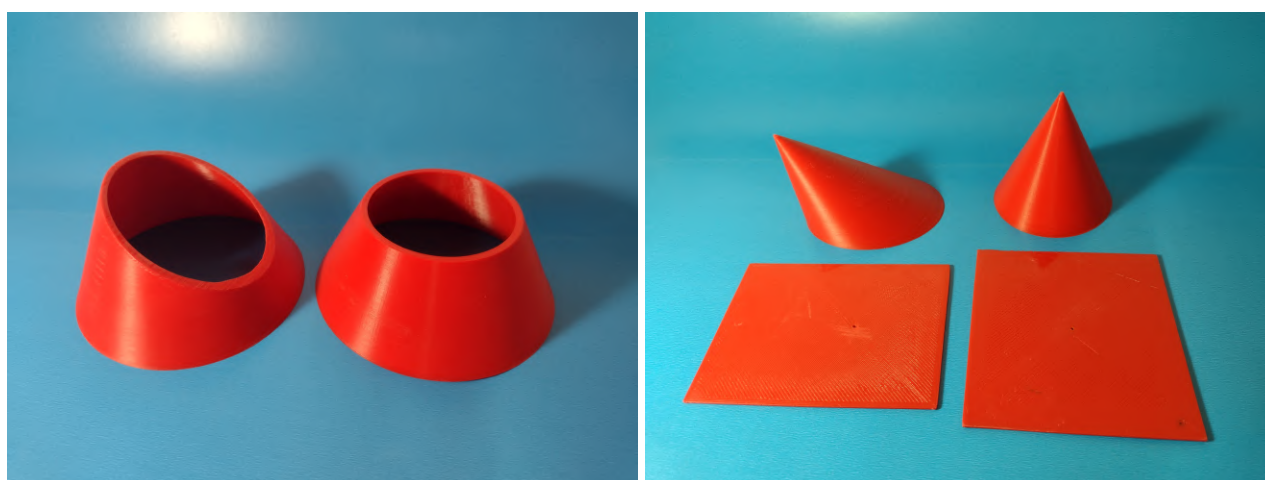
Para o hiperboloide de duas folhas foram feitos cortes que mostrassem as elipses e hipérboles da quádrlica. As formas são apresentados na [Figura 32](#). Na [Figura 32](#), a imagem na parte de baixo a esquerda, mostra uma haste entre as duas partes da superfície. Esta haste é meramente ilustrativa,

Figura 27 – Modelo do cone impresso com as impressora do Laboratório de Protogipagem. O material do exemplo tem cerca de 25 cm.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 28 – Modelo do cone impresso com as impressora do Laboratório de Protogipagem.



fonte: Produção do próprio autor.

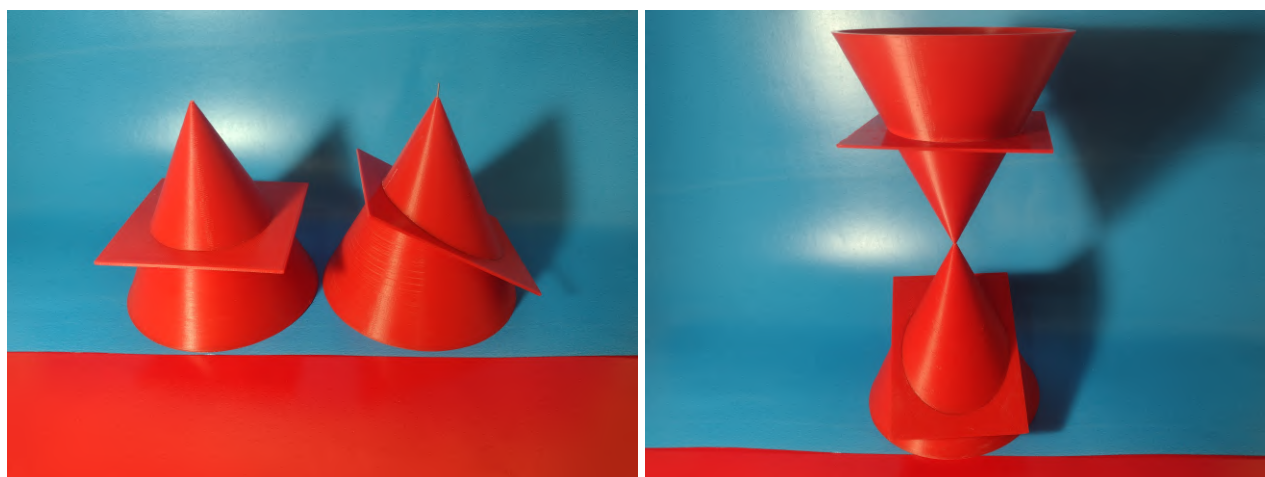
estando na figura apenas para mostrar que por aquela parte deve passar algum tipo de material que mantenha o objeto fixo.

Para o paraboloide elíptico foram feitos cortes que mostrassem as elipses e parábolas que o compõem. Os modelos são apresentados na [Figura 33](#).

Devido a sua complexidade, o paraboloide hiperbólico foi construído de modo que fossem feitos cortes pelos três planos coordenados. Os protótipos são apresentados na [Figura 34](#).

O cone foi construídos não somente por cortes paralelos aos planos coordenados, mas também de

Figura 29 – Modelo do cone impresso com as impressora do Laboratório de Prototipagem. O material do exemplo tem cerca de 25 cm.



fonte: Produção do próprio autor.

modo que ficassem evidenciados outras curvas cônicas como a parábola e a elipse. Os modelos são apresentados na [Figura 35](#).

Das superfícies cilíndricas, a elipse foi construída por dois cortes que evidenciassem duas retas e a própria curva elíptica quando a quádrlica é seccionada. Os modelos são apresentados na [Figura 36](#).

Da mesma forma, a parábola foi construída de por cortes que mostrassem a curva parabólica e as duas retas que as compõem quando a superfície é seccionada. Os modelos são apresentados na [Figura 37](#).

Por fim, temos a superfície gerada pela hipérbole, que foram criadas de modo que exibissem duas retas da superfície e a própria hipérbole quando cortadas pelos planos. Os modelos são apresentados na [Figura 38](#).

7.2 PROPOSTA DE ENSINO

A proposta de ensino para a utilização destes materiais se baseia em uma sequência didática que visa destacar as secções planas feitas nas superfícies. Espera-se que através das etapas que serão propostas nesta sequência didática, o estudante consiga visualizar as planificações das superfícies quádricas, bem como as curvas cônicas e retas que as compõem.

Antes de prosseguirmos com a discussão da sequência proposta, é importante lembrar que a abordagem visa a discussão dos assuntos com estudantes de nível superior e que no momento de sua aplicação, já possuam uma certa familiaridade com o assunto de curvas cônicas. Este último ponto, inclusive, talvez seja o mais importante, visto que toda a discussão será baseada nos tópicos expostos no Capítulo 6. Evidentemente que, o aluno não precisa necessariamente ter um domínio total sobre cônicas, entretanto, caso não exista nenhum tipo de conhecimento prévio sobre o assunto, as discussões propostas pela sequência poderão ser prejudicadas. Contudo, acreditamos também que é normal e até mesmo de se esperar que eventualmente algumas dúvidas sobre este conteúdo venha surgir, sendo importante sempre lembrar seus principais tópicos.

Para que a proposta possa ocorrer de forma mais efetiva, recomendamos que ela seja realizada em pequenos grupos de estudantes, de modo que cada grupo trabalhe com diferentes materiais, que posteriormente devem ser trocados entre si. Desse modo, o professor pode ficar transitando entre os estudantes, atendendo as dúvidas dos grupos conforme a atividade se desenvolve. A proposta em grupo, além de colaborar para a discussão e debate entre os alunos, poderia se adequar melhor também caso os objetos impressos não fossem grandes o suficiente para que todos pudessem enxergar de maneira clara. Entretanto, a forma como a sequência está elaborada também se adapta bem caso seja feita individualmente.

Assim como visto no Capítulo 4 a primeira etapa da sequência didática é determinada pela apresentação do conteúdo através da exposição das superfícies quádricas. Nesta parte, o professor apenas apresentaria aos estudantes algumas figuras das superfícies, sem se preocupar em defini-las algebricamente. A ideia é de que se crie uma certa familiaridade sobre as superfícies com os estudantes. É interessante que neste momento o professor incentive os alunos a participarem e interajam nas discussões propostas, de modo que o docente possa ir tomando conhecimento de como está o desenvolvimento dos alunos sobre o assunto.

Ainda nesta etapa de apresentação, o professor deve começar a trabalhar ideias que valorizem a visualização dos objetos através de algumas perguntas desencadeadoras que desenvolvam o conteúdo das curvas cônicas em cada uma das superfícies. A ideia de fazer perguntas desencadeadoras é uma abordagem de exposição do conteúdo que possui um valor pedagógico interessante. Piovezan e Gama (2019) em seu trabalho traz considerações sobre a perspectiva de Moura (2010) a respeito das perguntas desencadeadoras, argumentando que elas permitem poder analisar o desenvolvimento psicológico dos sujeitos em relação ao conteúdo. Consequentemente, elas possibilitam com que o professor tenha um discernimento para planejar as etapas pedagógicas seguintes.

As perguntas podem ser elaboradas da maneira que o professor achar melhor. O ideal, seria de que nesta parte o professor ainda não abordasse a questão dos cortes das superfícies através de secções planas, fazendo apenas perguntas mais abrangentes sobre o assunto de modo a tentar exercitar a

imaginação do estudante. Deixamos abaixo algumas sugestões de perguntas, porém que fique claro que podem ser elaborados outros tipos de questionamentos que o professor achar mais conveniente.

- De que maneira eu consigo visualizar uma elipse nesta superfície?
- De que forma é possível visualizar uma hipérbole nesta quádrlica?
- É possível encontrar uma parábola nesta superfície?
- Há a possibilidade de nesta superfície quádrlica enxergamos duas retas?

Dessa maneira, já nesta primeira etapa de apresentação do conteúdo com as perguntas desencadeadoras, o professor consegue ter uma noção de qual é o conhecimento dos estudantes a respeito das superfícies quádrlicas e sobre como estão desenvolvidas as potencialidades de visualização de cada um. Além disso, esta etapa também pode ser um momento adequado para o professor tomar ciência de como está o conhecimento dos estudantes a respeito de curvas cônicas.

Na segunda parte, os estudantes devem anotar e, posteriormente, entregar ao professor as considerações sobre as perguntas norteadoras geradas na etapa anterior. Se a sequência estiver sendo feita em grupo, os estudantes devem debater as perguntas entre si e entregar as respostas que chegarem em comum acordo. Porém, mesmo que ela esteja sendo feita individualmente, os estudantes também podem debater as perguntas entre si, mas entregar as respostas de forma individualizada. Nesta etapa, o professor deve deixar claro aos estudantes que as perguntas não são de cunho avaliativo, mas apenas para o desenvolvimento da prática pedagógica sobre o conteúdo.

Na terceira etapa, após ter em mãos as respostas dos estudantes a respeito das perguntas desencadeadoras, o professor deve discutir com os alunos aquelas que achar mais pertinente. Caso o estudante se sinta confortável, ele pode até mesmo ler alguma resposta e debater sobre quais foram os raciocínios que os alunos tiveram para chegar até ela. A partir deste debate, ele deve conduzir a discussão para uma explicação mais direta sobre as maneiras que as curvas cônicas podem surgir nas superfícies quádrlicas. Neste ponto, o professor já pode mostrar aos estudantes os materiais impressos, para que assim se possa reforçar os conceitos apresentados. Esta etapa ainda é reduzida a discussão dos conceitos sem nenhum tipo de abordagem algébrica, apenas explorando o debate sobre os materiais concretos para o desenvolvimento abstrato da visualização nos objetos.

Na quarta etapa, após os alunos já terem em mãos os materiais, o professor entra com a abordagem algébrica das superfícies. Isto é, apresenta aos estudantes as equações que definem cada uma e faz uma abordagem expositiva do conteúdo, da mesma forma como apresentado no Capítulo 6. O modo como o professor irá expor o conteúdo pode ser até mesmo de maneira mais tradicional, usando como material de apoio o quadro ou algum outro recurso. Nesta parte, o objetivo principal é explorar os materiais impressos para validar a aprendizagem do conteúdo. Por isso, é preciso que ele sempre considere as superfícies impressas para destacar as demonstrações algébricas. Esta etapa é uma das mais importantes a ser trabalhada, pois, será através do desenvolvimento do pensamento algébrico que o estudante conseguirá elaborar métodos de pensamento que generalizem o conhecimento adquirido com as discussões de visualização anteriores.

Por fim, a produção final da sequência didática pode ser elaborada a partir da resolução de exercícios que valorizem novamente os aspectos de visualização em cada um dos objetos. A partir deste ponto, espera-se que o aluno consiga tomar uma equação que defina a superfície quádrlica, conseguindo visualizar e generalizar o que é exposto. Estes exercícios podem ser do mesmo tipo das perguntas desencadeadoras com o adicional de que agora a abordagem pode ter com um rigor matemático mais conceituado. Assim, o professor pode mesclar aspectos algébricos encontrados nas equações, com as propriedades de abstração das visualizações dos objetos. Pode ser dado, por exemplo, a equação de uma superfície e a posição de alguns planos que cortam mesma, onde no decorrer da atividade os alunos são indagados sobre quais curvas estes cortes geram. Em outro exemplo, para uma mesma superfície pode ser dada mais de uma equação que a posiciona de diferentes maneiras ao longo dos eixos, gerando assim interpretações que necessitam de análises diferentes para cada um dos casos.

A proposta desta sequência pode ser executada com qualquer uma das superfícies quádrlicas. Entretanto, a partir do momento que os estudantes tenham tido contato com mais de uma superfície, há a possibilidade deles já conseguirem desenvolver de forma autônoma raciocínios que os levem a compreensão de como elas se formam. Sendo assim, o professor pode ter a liberdade de a partir de um certo ponto, pular algumas etapas desta sequência e ir direto a terceira ou quarta, visto que algumas interpretações serão análogas para cada um dos casos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo propôs apresentar uma maneira de superar as dificuldades encontradas no ensino de Geometria Analítica em cursos de nível superior. Ao longo do trabalho foram discutidos aspectos teóricos que mostraram como a visualização tridimensional é importante para o desenvolvimento do pensamento matemático abstrato e para a compreensão do espaço que nos cerca. Para tentar desenvolvê-la e superar as dificuldades associadas a ela, foram apresentadas argumentações que mostram como os materiais concretos podem ser uma solução imediata para esta questão. Assim, com a pesquisa focada no entendimento das superfícies quádricas, foram desenrolados modelos feitos em impressoras 3D que permitissem a superação os desafios relacionados a este tema.

Assim como já citado anteriormente, a utilização destes objetos no ensino não descaracteriza ou invalida outras ferramentas que possam ser contribuintes para a educação, como no caso dos recursos tecnológicos, por exemplo. A argumentação apresentada ao longo do texto, mostra justamente que estes dois instrumentos podem trabalhar em conjunto para a superação dos obstáculos que causam entraves no aprendizado de Geometria Analítica. Além disso, as reflexões definidas longo do texto e também sobre as obras literárias estudadas para sua elaboração, nos permite inferir que a criação de novas alternativas didáticas, como a apresentada neste trabalho, tem um papel colaborador significativo para o ensino. Isto por que, estas alternativas permitem com que cada vez mais o estudo possa se tornar plural e atinja diferentes dificuldades dos estudantes.

Com a investigação apresentada ao longo do texto, espera-se que se tenha sido possível mostrar existem maneiras evoluir as práticas pedagógicas de ensino através da utilização e da busca por novos recursos. Neste caso, as impressoras 3D, que num primeiro momento podem parecer não ter uma relação direta com investigações da área de Educação Matemática, mostraram que através de processos reflexivos podem servir como instrumentos de uma abordagem de aprendizado.

Pode-se observar também que é possível difundir cada vez mais o uso de impressoras 3D para o desenvolvimento de pesquisas na área da educação. As diversas potencialidades que a impressão 3D fornece, permite com que cada vez mais novos leques de pesquisa possam ser desenvolvidas. A maneira como foram feitas e pretendem ser compartilhadas, mostram também que a produção destes materiais consegue ser difundida em diversos âmbitos educacionais. Com uma disseminação adequada, é possível fazer estes modelos alcançarem diferentes instituições de ensino, de modo que o acesso a eles seja livre e sem fronteiras do conhecimento. Assim, esperamos que tenha sido possível mostrar uma alternativa de ensino no ensino de Matemática e que este estudo possa servir de exploração para outras investigações da área.

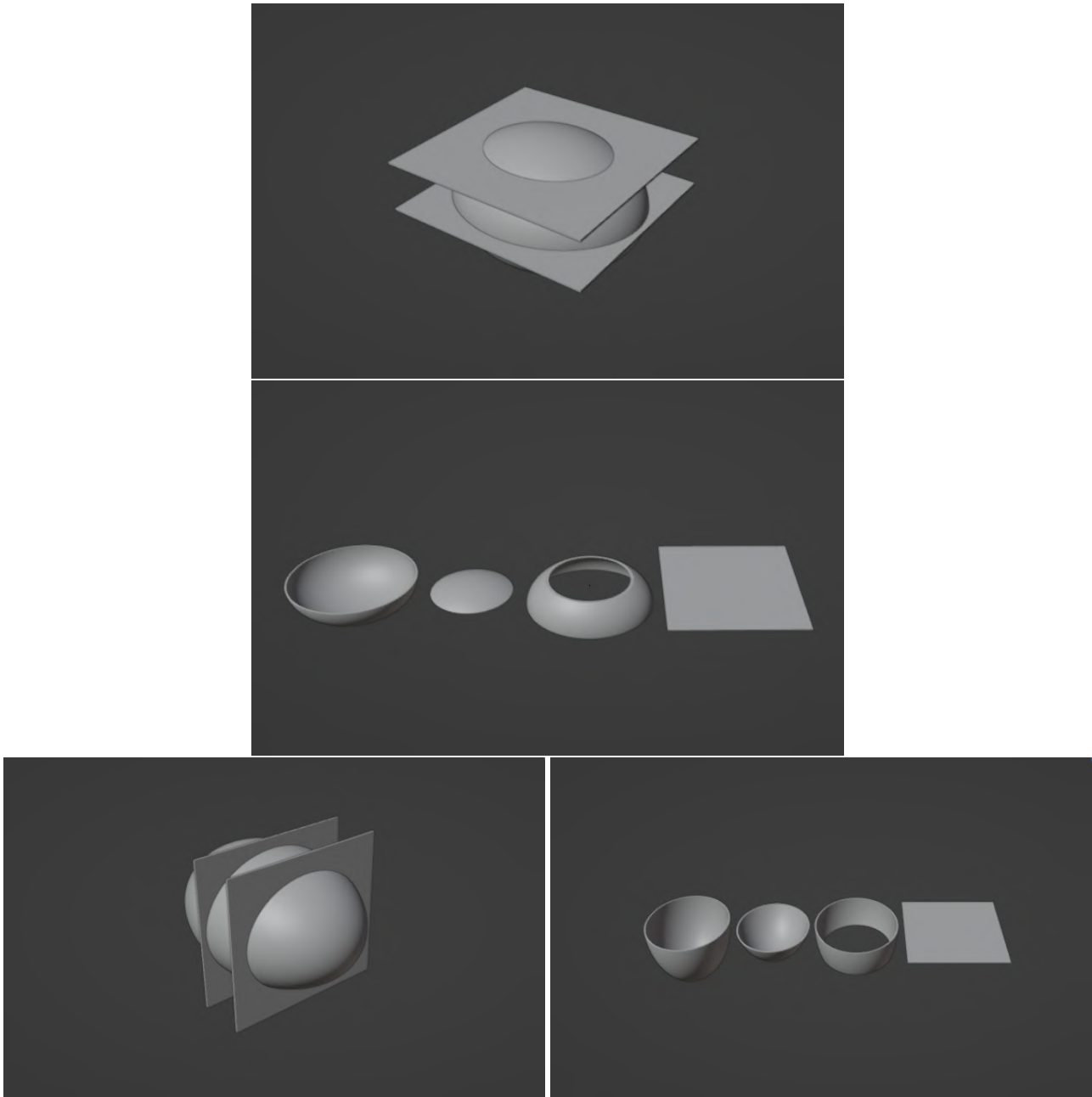
REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, D. L. de. O que é (e como faz) sequência didática? **Entrepalavras**, v. 3, n. 1, p. 322–334, 2013.
- ATIYAH, M. What is geometry? **The Mathematical Gazette**, Cambridge University Press, v. 66, n. 437, p. 179–184, 1982.
- AZEVEDO, E. D. Apresentação do trabalho montessoriano. **Ver. de Educação & Matemática**, n. 3, p. 26–27, 1979.
- BARROS, R. Geometria no currículo e pensamento matemático. **Educação e Matemática**, n. 52, p. 1–2, 1999.
- BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 5, n. 2, 2012.
- BISHOP, A. J. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on learning problems in mathematics**, ERIC, v. 11, n. 1, p. 7–16, 1989.
- Blender Foundation. **Blender 3.0 Reference Manual**. 2022. Disponível em: <https://docs.blender.org/manual/en/latest/index.html>.
- Blender Stack Exchange. **Explore our Questions**. 2022. Disponível em: <https://blender.stackexchange.com/>.
- BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular**, Brasília, 2018.
- BROWN, D. L.; PRESMEG, N. Types of imagery used by elementary and secondary school students in mathematical reasoning. In: **Proceedings of the Seventeenth International Conference of Psychology of Mathematics Education**. [S.l.: s.n.], 1993. p. 137–144.
- CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Na vida dez, na escola zero. Cortez São Paulo, 1988.
- CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. de. Possibilidades metodológicas na pesquisa em educação matemática: o experimento didático. **Revista Educativa-Revista de Educação**, v. 19, n. 1, p. 121–138, 2016.
- COSTA, C. Visualização, veículo para a educação em geometria. **Encontro de investigação em educação matemática, ensino e aprendizagem de geometria**, p. 157–184, 2000.
- CUNHA, M. V. d. Piaget-psicologia genética e educação. **Psicologia da Educação**. 3ªed. DP&A: RJ, 2003.
- FOUNDATION, B. **Free Software Never Looked This Awesome**. 2022. Disponível em: <https://www.blender.org/features/>.
- GeoGebra. **GeoGebra Classic Manual**. 2022. Disponível em: <https://wiki.geogebra.org/en/Manual>.
- HOZ, R. The effects of rigidity on school geometry learning. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, v. 12, n. 2, p. 171–190, 1981.

- LUCIANO, K. M. d. F. O uso de material concreto no ensino e aprendizagem da matemática. n. 11. **Cadernos do IME-Série Matemática**, 2017.
- MATTOS, V. de O. et al. Inserção da prototipagem 3d nos âmbitos acadêmico e social. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 4, p. 39070–39077, 2021.
- MITCHELMORE, M. C. Cross-cultural research on concepts of space and geometry. **Martin (1976a)**, p. 143–184, 1976.
- MOURA, M. O. d. **A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural**. [S.l.]: Liber Livro, 2010.
- OWENS, K. The role of visualization in young students' learning. In: **PME CONFERENCE**. [S.l.: s.n.], 1999. v. 1, p. 1–220.
- PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/aprender geometria. **VII Encontro Paulista de Educação Matemática**, 2004.
- PIOVEZAN, A. C. T.; GAMA, L. D. Astronomia e matemática: uma proposta interdisciplinar para o ensino fundamental ii. **Educação Por Escrito**, v. 10, n. 1, p. e32716–e32716, 2019.
- PITTALIS, M.; CHRISTOU, C. Types of reasoning in 3d geometry thinking and their relation with spatial ability. **Educational Studies in mathematics**, Springer, v. 75, n. 2, p. 191–212, 2010.
- PRESMEG, N. C. Visualisation and mathematical giftedness. **Educational studies in mathematics**, Springer, v. 17, n. 3, p. 297–311, 1986.
- PRESMEG, N. C. Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. **Educational studies in mathematics**, Springer, v. 23, n. 6, p. 595–610, 1992.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de história da matemática**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- SETTIMY, T. F. de O.; BAIRRAL, M. A. Visualização em sala de aula: Revelando descobertas de estudantes do sexto ano do ensino fundamental. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 12, n. 3, p. 258–267, 2019.
- TARTRE, L. A. Spatial orientation skill and mathematical problem solving. **Journal for research in Mathematics Education**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 21, n. 3, p. 216–229, 1990.
- WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A. **Geometria Analítica**. [S.l.]: Makron Books, São Paulo, 2000.
- YOUNG, J. L. Improving spatial abilities with geometric activities. **The Arithmetic Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 30, n. 1, p. 38–43, 1982.
- ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor's introduction: What is mathematical visualization. **Visualization in teaching and learning mathematics**, Mathematical Association of America Washington, DC, p. 1–7, 1991.

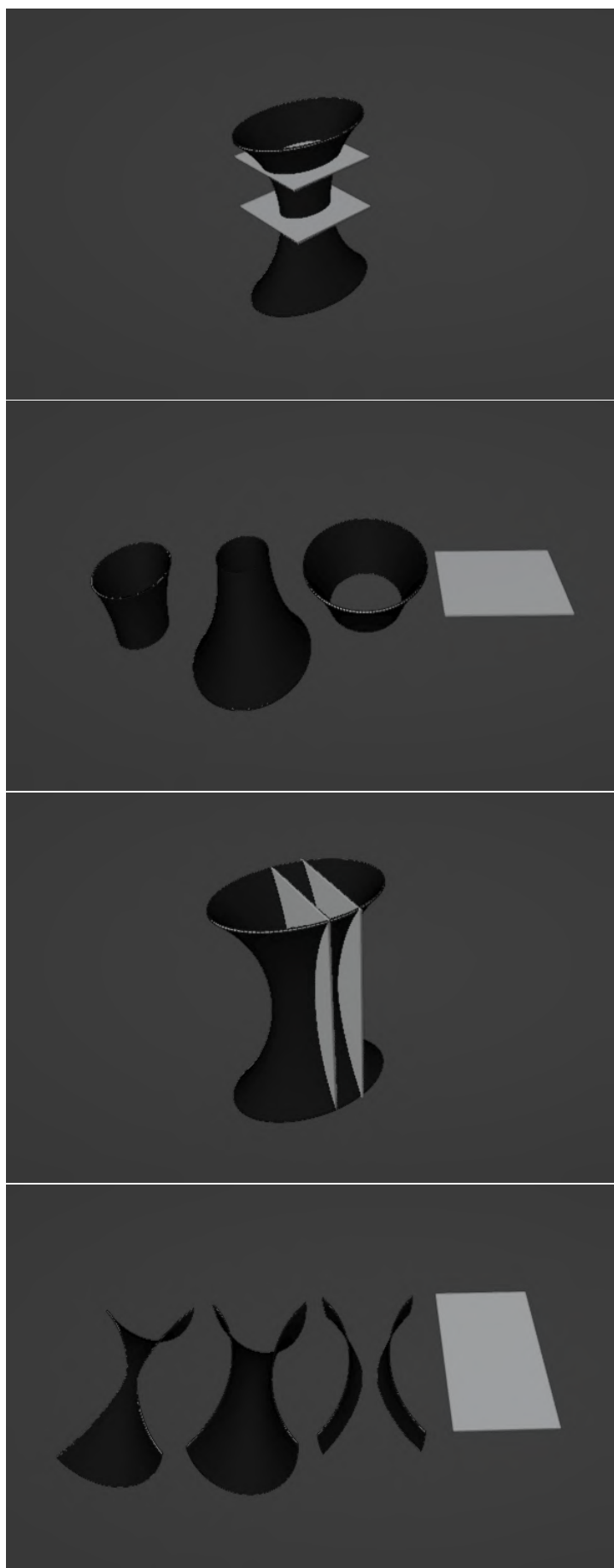
APÊNDICE A – MODELOS DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Figura 30 – Modelos construídos para o elipsoide. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



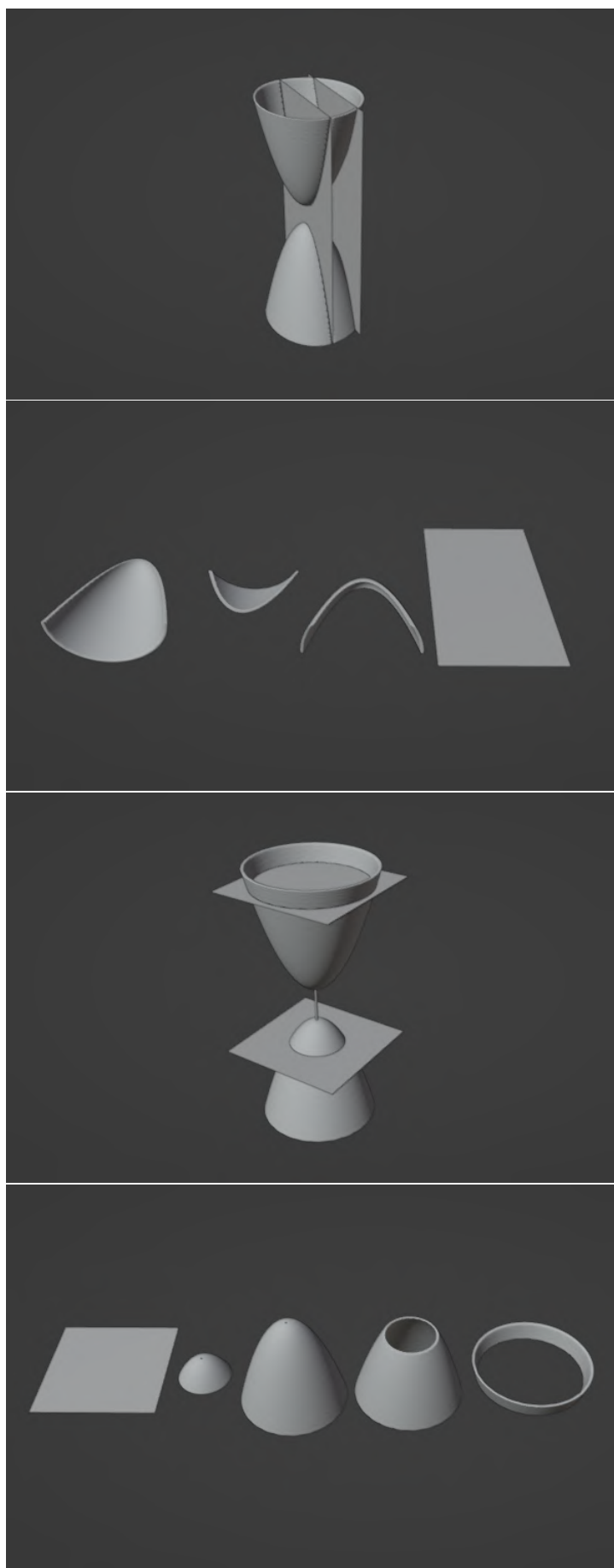
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 31 – Modelos construídos para o hiperboloide de uma folha. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



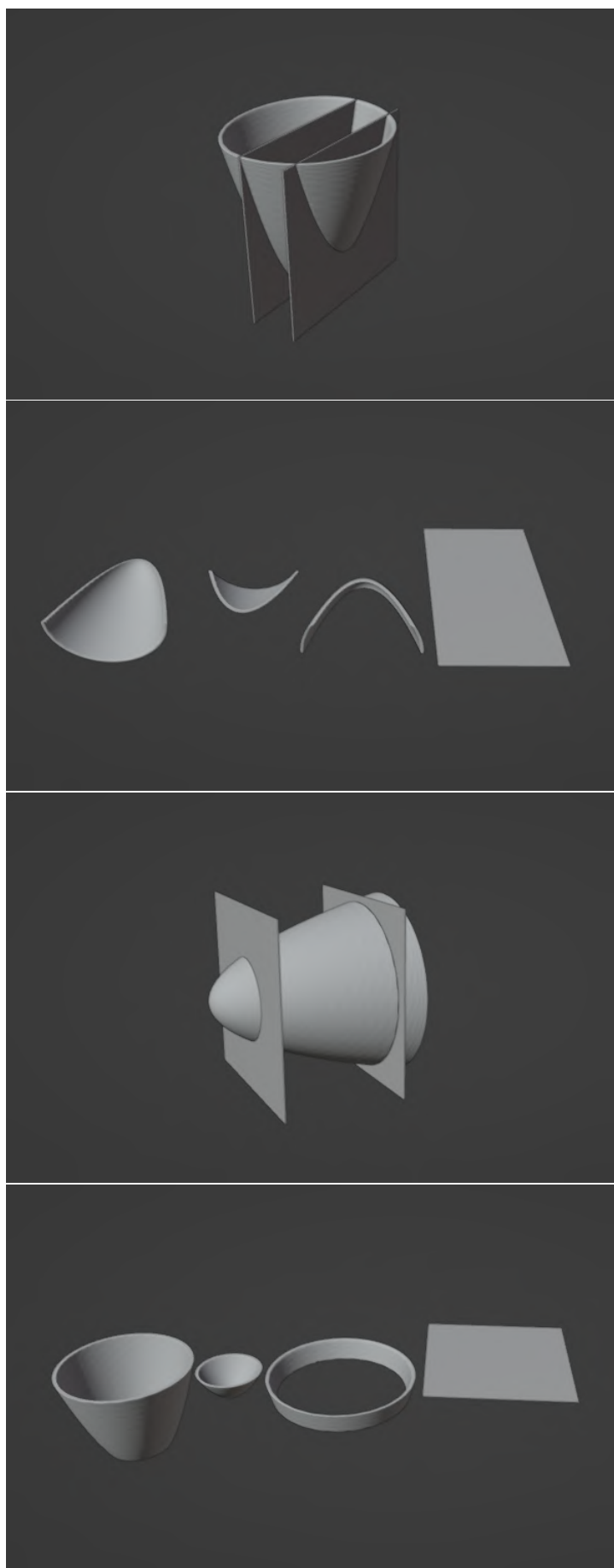
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 32 – Modelos construídos para o hiperboloide de duas folhas. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



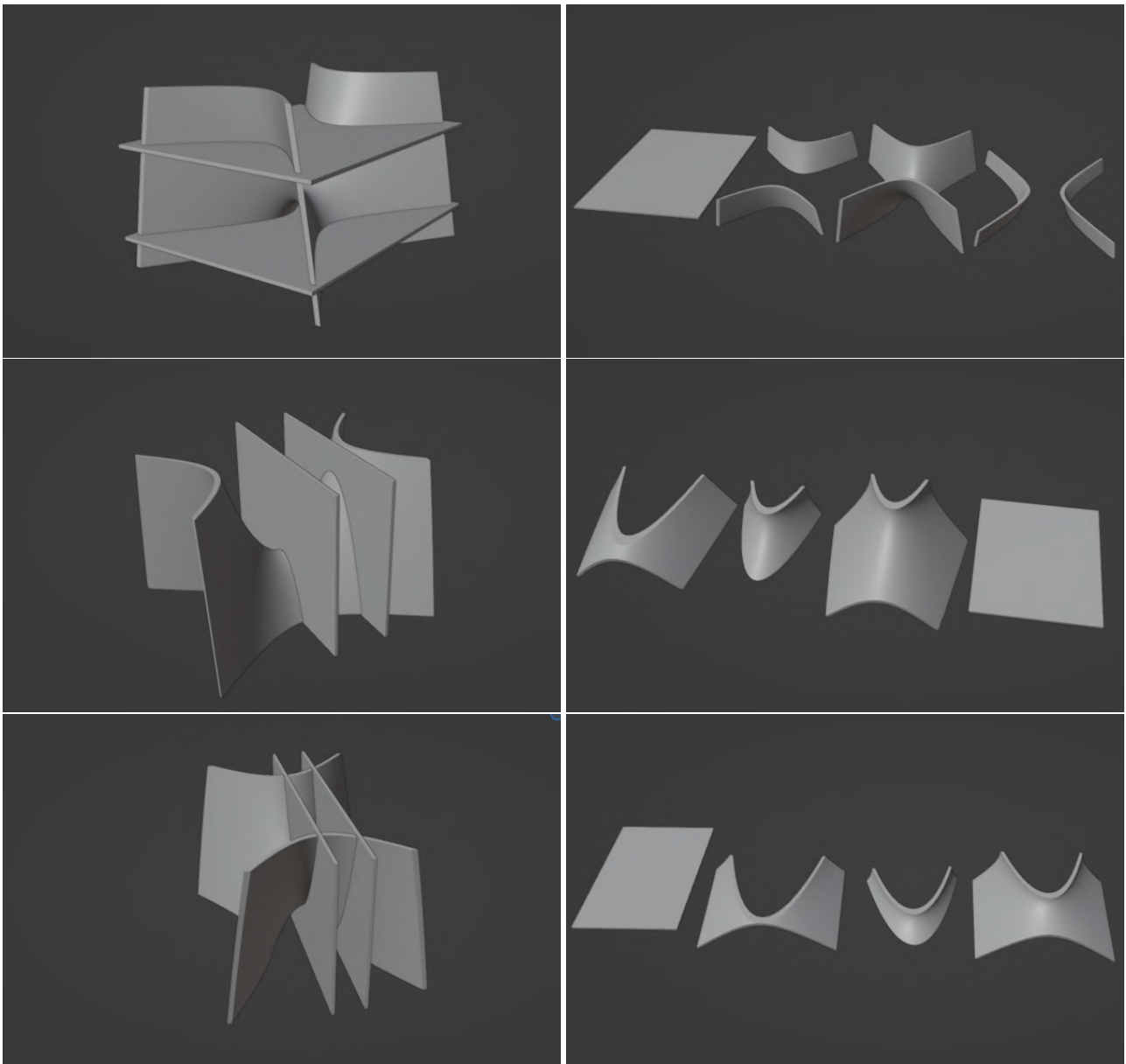
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 33 – Modelos construídos para o parabolóide elíptico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



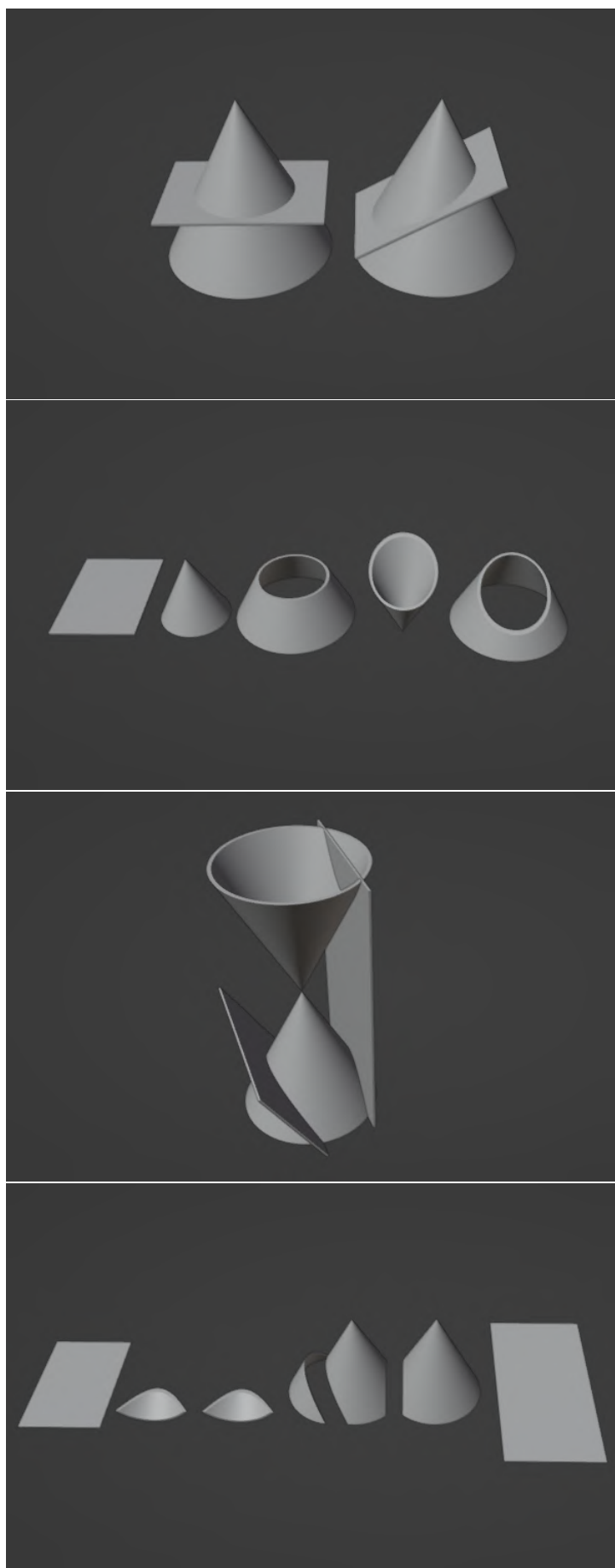
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 34 – Modelos construídos para o parabolóide hiperbólico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



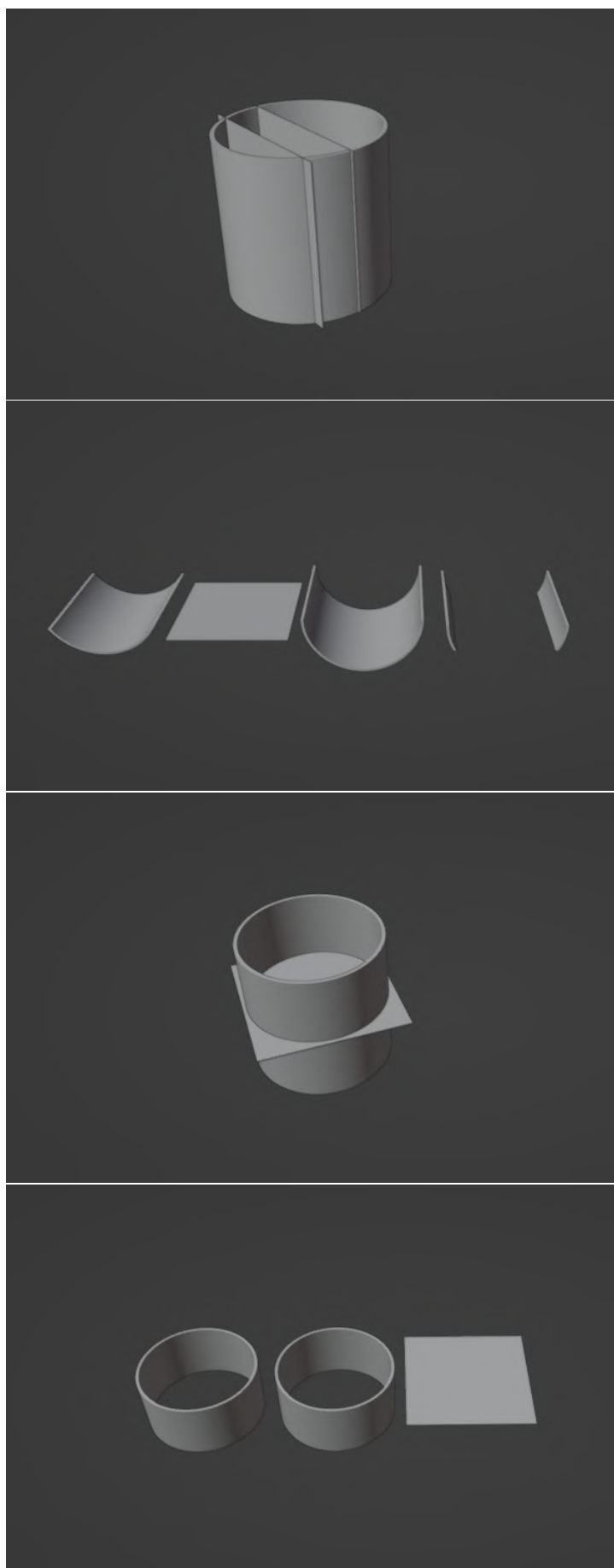
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 35 – Modelos construídos para o cone. O modelo mostrado nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



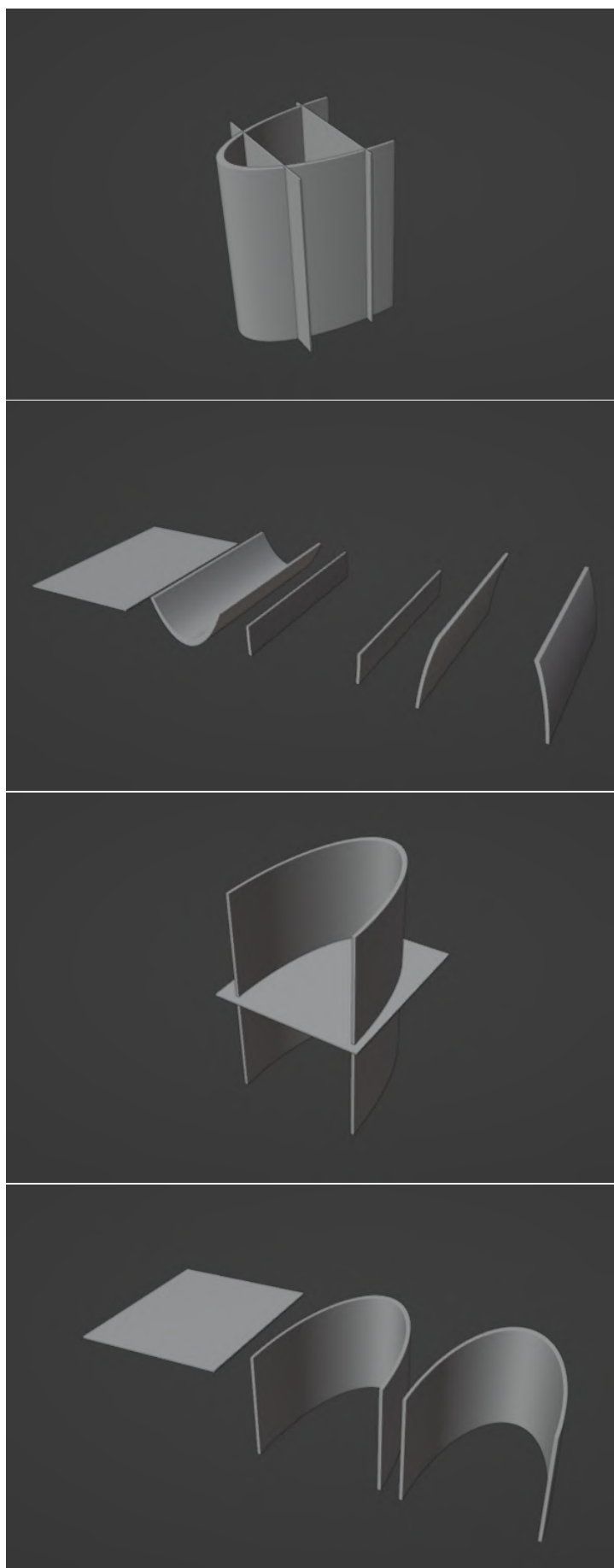
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 36 – Modelos construídos para o cilindro elíptico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



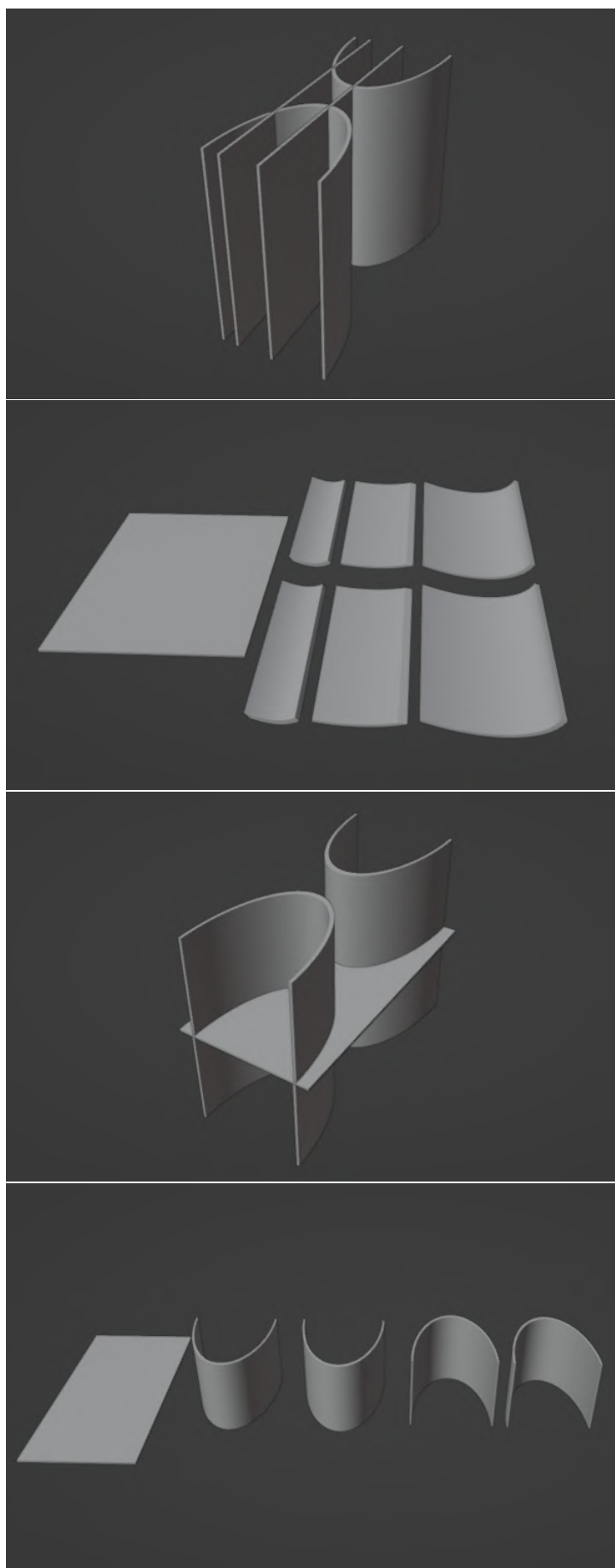
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 37 – Modelos construídos para o cilindro parabólico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 38 – Modelos construídos para o cilindro hiperbólico. Os protótipos mostrados nas figuras são exibidos a partir de uma janela visual do Blender.



fonte: Produção do próprio autor.