



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Giane Casari Rampasso

Soluções quase periódicas para equações diferenciais funcionais

São José do Rio Preto - SP

2015

Giane Casari Rampasso

Soluções quase periódicas para equações diferenciais funcionais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Equações Diferenciais Parciais, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a Dr^a Andréa Cristina Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto - SP

2015

Rampasso, Giane Casari.

Soluções quase periódicas para equações diferenciais funcionais /
Giane Casari Rampasso. – São José do Rio Preto, 2015
93 f. : il.

Orientador: Andréa Cristina Prokopczyk Arita

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Funções quase
periódicas. 4. Semigrupos. 5. Operadores lineares. 6. Banach, Espaços
de. I. Arita, Andréa Cristina Prokopczyk. II. Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.91

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Giane Casari Rampasso

Soluções quase periódicas para equações diferenciais funcionais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Equações Diferenciais Parciais, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof^a. Dr^a. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Professora Assistente Doutora
UNESP - São José do Rio Preto - SP
Orientadora

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto - SP

Prof. Dr. Sandro Marcos Guzzo
Professor Adjunto
Unioeste - Cascavel - PR

São José do Rio Preto - SP

24 de fevereiro de 2015

Aos meus pais,
dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por caminhar ao meu lado, por ter me dado força interior para superar as dificuldades, mostrar o caminho nas horas incertas e me suprir de todas as minhas necessidades.

Aos meus pais, Silvana e José Carlos, que incentivaram-me na constante busca pelo conhecimento, pelo amor incondicional e dedicação.

À minha irmã, Gilcele, pelos conselhos, pelas palavras amigas e pelo companheirismo.

A toda minha família, por sempre me ouvir, me orientar, me aconselhar, por ter me dado todo amor.

Ao meu namorado, Lucas, por todo apoio, carinho, paciência, compreensão nos momentos em que não pude estar presente e por me fazer sorrir nos momentos em que queria chorar.

À minha orientadora, Andréa, que me acompanha desde os tempos de iniciação científica, por acreditar em mim, pelos ensinamentos, pela amizade, pela sua dedicação e competência. Um fator fundamental para a conclusão deste trabalho.

À minha psicóloga e amiga, Alessandra, por me fazer descobrir uma força interior que não imaginava possuir.

Aos professores do Departamento de Matemática do IBILCE-UNESP, pela colaboração e convivência desde os tempos de graduação.

Aos meus amigos, em especial, Pedro, Monisse e Janaína, que fizeram desta jornada mais prazerosa e com os quais compartilhei angústias e alegrias.

À banca examinadora.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

E a todos, que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse subir mais esse degrau, não canso de agradecer.

*“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos
não é senão uma gota de água no mar. Mas
o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.”*

Madre Teresa de Calcutá

RESUMO

O objetivo deste trabalho é encontrar soluções fracas quase periódicas para equações diferenciais que podem ser escritas na forma

$$u'(t) = Au(t) + f(u(t), t), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo exponencialmente estável, X é um espaço de Banach e $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função apropriada.

Para isto, estudaremos as principais propriedades da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados e da teoria de funções quase periódicas. Além disso, apresentaremos resultados que garantem a existência e a unicidade de solução para o problema de Cauchy abstrato, utilizando como ferramenta, a teoria de semigrupos.

Palavras-chave: equação diferencial, funções quase periódicas, solução fraca, semigrupos de operadores lineares limitados.

ABSTRACT

The purpose of this work is to find almost periodic mild solutions for differential equations that can be written in the form

$$u'(t) = Au(t) + f(u(t), t), \quad t \in \mathbb{R},$$

where A is the infinitesimal generator of an exponentially stable C_0 - semigroup, X is a Banach space and $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ is an appropriate function.

For this, we will study the main properties of the theory of semigroup of bounded linear operators and the theory of almost periodic functions. Moreover, we will present results that ensure the existence and uniqueness of solution for the abstract Cauchy problem, using as a tool, the semigroup theory.

Key-words: differential equations, almost periodic functions, mild solutions, semigroup of bounded linear operators.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Conceitos e resultados preliminares	3
2 Semigrupos de operadores lineares limitados	6
2.1 Semigrupos uniformemente contínuos	6
2.2 Semigrupos fortemente contínuos	16
2.3 O Teorema de Hille-Yosida	24
3 Funções quase periódicas da reta real em um espaço de Banach	36
4 Problema de Cauchy abstrato	61
5 Existência de soluções quase periódicas para equações diferenciais abstratas	74
Bibliografia	84

INTRODUÇÃO

Desde muito tempo atrás, as equações diferenciais têm sido objeto de intensa pesquisa. Uma das razões para isso é sua grande utilidade na modelagem de diversos fenômenos, que ocorrem nas mais diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, dinâmica populacional, física, química e engenharia, bem como o interesse intrinsecamente matemático que elas possuem.

No entanto, encontrar soluções para uma equação diferencial nem sempre é uma tarefa simples. Embora muito já tenha sido feito, várias técnicas e ferramentas ainda estão sendo desenvolvidas para auxiliar na resolução desses problemas. Uma dessas ferramentas é a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, que será utilizada neste trabalho.

Além disso, é crescente o número de artigos que estudam a existência de soluções com algum tipo de periodicidade. Citamos a seguir alguns trabalhos que apresentam condições para a existência de soluções periódicas [9, 12, 13, 18], quase periódicas [1, 6, 10, 11, 22], assintoticamente quase periódicas [8, 14, 15] e pseudo quase periódicas [24].

Em particular, nesta dissertação, apresentamos os resultados de [23] que tratam da existência de solução fraca quase periódica para a equação

$$u'(t) = Au(t) + f(u(t), t), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo exponencialmente estável em um espaço de Banach X e $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função apropriada.

Assim, este texto está dividido em cinco capítulos, que abordam desde as ferramentas que serão utilizadas, até os resultados de existência de solução. Mais especificamente, no capítulo 1, apresentamos alguns pré requisitos fundamentais, como o Lema de Dini e o Teorema do ponto fixo de Banach, necessários para o desenvolvimento do texto.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, dando maior ênfase aos semigrupos de classe C_0 , que foi estabelecido por E. Hille e K. Yoshida em 1940 e tem aplicações importantes no desenvolvimento das técnicas de resolução para equações diferenciais abstratas.

No capítulo 3, apresentamos a teoria das funções quase periódicas, uma generalização das funções periódicas, que foi introduzida por H. Bohr em 1925, e no capítulo 4, é feito um estudo do problema de Cauchy abstrato, com o objetivo de demonstrar a

existência e a unicidade de solução fraca usando a teoria de semigrupos.

Enfim, no último capítulo, apresentamos os resultados encontrados no artigo [23], de S. Zaidman, e assim, obtemos um teorema que estabelece uma solução fraca quase periódica para a equação diferencial não linear abstrata descrita acima, atingindo o objetivo deste trabalho.

Conceitos e resultados preliminares

Neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos, terminologias e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Definição 1.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O espaço $L^p(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis f em Ω tais que*

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Uma norma em $L^p(\Omega)$ é dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty.$$

Quando $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis f em Ω tais que são essencialmente limitadas em Ω , isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é limitada quase sempre em } \Omega\}.$$

Uma norma em L^∞ é dada por

$$\|f\|_\infty = \text{supess}(f) = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Teorema 1.1. *O espaço $L^p(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [21, Teorema 3.11]

Teorema 1.2. *O espaço $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ é suave e possui suporte compacto}\}$ é denso em $L^1(\Omega, \mathbb{R})$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [3, Teorema 4.3]

Teorema 1.3. (*Teorema da convergência dominada de Lebesgue*) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para uma função de valor real mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [2, Teorema 5.6] .

Lema 1.1. Seja X um espaço de Banach. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A\| < 1$, então $I - A$ é inversível.

Demonstração: O operador $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ é linear e limitado em X . Como A comuta com suas potências, então, pela série de potências, obtém-se

$$(I - A)f(A) = f(A)(I - A) = I$$

Portanto, $I - A$ é inversível e $(I - A)^{-1} = f(A)$. ■

Corolário 1.1. Sejam X um espaço de Banach e $G \in \mathcal{L}(X)$, com $\|G\| < 1$. Então, $I - G$ tem inversa limitada, isto é, $(I - G)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Demonstração: O resultado é um caso particular do Lema 1.1. ■

Lema 1.2. (*Lema de Dini*) Seja X um espaço de Banach. Se $f : (a, b) \rightarrow X$ é contínua em (a, b) e admite derivada à direita, f'_+ , contínua em (a, b) , então f é continuamente diferenciável em (a, b) .

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7, Lema A.3.2] .

Teorema 1.4. (*Teorema do ponto fixo de Banach*) Seja Y um subconjunto fechado de um espaço de Banach X . Se a aplicação $f : Y \rightarrow Y$ é uma contração, então f possui um único ponto fixo em Y .

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [16, Teorema 5.1-2] .

Teorema 1.5. (*Princípio da limitação uniforme*) Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares limitados de um espaço de Banach X em um espaço normado E tal que $(\|T_n x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado para todo $x \in X$, ou seja,

$$\|T_n x\| \leq C_x, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde C_x é um número real positivo. Então a sequência $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, isto é, existe um $C > 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [16, Teorema 4.7-3].

Teorema 1.6. Se K é um subconjunto de um espaço métrico M , as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) K é sequencialmente compacto;
- (ii) $\overline{K}$ é compacto;
- (iii) K é totalmente limitado e $\overline{K}$ é completo.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5, Teorema 15]

Semigrupos de operadores lineares limitados

2.1 Semigrupos uniformemente contínuos

Nesta seção, introduziremos o conceito de semigrupo de operadores lineares limitados. Em seguida, serão apresentadas a definição de semigrupo uniformemente contínuo, sua relação com seu gerador infinitesimal e condições para que dois semigrupos uniformemente contínuos sejam iguais. Também serão vistas algumas propriedades para este tipo de semigrupo.

Ao longo de todo este capítulo, X representará um espaço de Banach, com norma $\|\cdot\|$, e $\mathcal{L}(X)$, o conjunto dos operadores lineares limitados de X em X .

Definição 2.1. *Uma família a um parâmetro $(T(t))_{t \geq 0}$, de operadores lineares limitados em X , é um semigrupo se:*

- (i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade de X ;
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in [0, \infty)$.

Definição 2.2. *Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é uniformemente contínuo se a seguinte condição é satisfeita em $\mathcal{L}(X)$:*

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0,$$

onde $t \downarrow 0$ significa que estamos fazendo t tender a zero pela direita.

Observação 2.1. *Observe que o limite tomado acima nos diz que a função $t \mapsto T(t)$, de $[0, +\infty)$ em $\mathcal{L}(X)$, é contínua à direita em $t = 0$.*

Mais ainda, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo, obtemos a continuidade à direita da função $t \mapsto T(t)$, para todo $t \geq 0$. De fato, dados $t \in [0, +\infty)$ e $h > 0$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \|T(t+h) - T(t)\| &= \lim_{h \downarrow 0} \|T(t)T(h) - T(t)\| \\ &\leq \lim_{h \downarrow 0} \|T(t)\| \|T(h) - I\| \\ &= \|T(t)\| \lim_{h \downarrow 0} \|T(h) - I\| \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $T(t)$ é um operador linear limitado e $\lim_{h \downarrow 0} \|T(h) - I\| = 0$ pela definição anterior.

A continuidade à esquerda desta função também é válida, porém esse fato será provado mais adiante.

Definição 2.3. O operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ dado por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde $x \in D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$, é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$.

Observação 2.2. (1) $D(A) \neq \emptyset$ e $D(A)$ é um subespaço vetorial de X .

De fato, $0 \in D(A)$ pois,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)0 - 0}{t} = 0.$$

Também, para todo $x, y \in D(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)(x + \lambda y) - (x + \lambda y)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} + \lambda \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)y - y}{t} = Ax + \lambda Ay,$$

o que implica que $(x + \lambda y) \in D(A)$, ou seja, $D(A)$ é um subespaço vetorial de X .

(2) Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow X$ definida por $f(t) = T(t)x$, com $x \in D(A)$. Note que,

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_+(0) = \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=0},$$

onde f'_+ representa a derivada à direita de f .

A seguir, apresentamos um resultado que relaciona um semigrupo uniformemente contínuo com seu gerador infinitesimal.

Teorema 2.1. Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é limitado.

Demonstração: Suponha que A é um operador linear limitado e considere a família de operadores

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

Mostraremos a seguir que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, com gerador infinitesimal igual a A .

Observe inicialmente que $T(t)$ está bem definido para todo $t \geq 0$, pois

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A^n\|}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \\ &= e^{t\|A\|} < +\infty. \end{aligned}$$

Agora, seja $s_k = \sum_{n=0}^k \frac{t^n A^n}{n!}$, $k \in \mathbb{N}$. Note que $s_k \in \mathcal{L}(X)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, dados $k, m \in \mathbb{N}$, com $k < m$, temos

$$\begin{aligned} \|s_m - s_k\| &= \left\| \sum_{n=0}^m \frac{t^n A^n}{n!} - \sum_{n=0}^k \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=k+1}^m \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^m \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!}. \end{aligned}$$

Logo, como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} < \varepsilon$. Assim, se $k, m \geq n_0$, então

$$\|s_m - s_k\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} < \varepsilon,$$

o que garante que $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X)$.

Mais ainda, visto que X é um espaço de Banach, $\mathcal{L}(X)$ também é um espaço de Banach. Logo, $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s \in \mathcal{L}(X)$.

Note também que

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = T(t),$$

ou seja, $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$.

Vejamos, agora, que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo:

$$(i) T(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n A^n}{n!} = I.$$

(ii) Dados $t, s \in [0, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned} T(t+s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} \\ &= I + (t+s)(A) + \frac{(t+s)^2 A^2}{2!} + \frac{(t+s)^3 A^3}{3!} + \frac{(t+s)^4 A^4}{4!} + \dots \\ &= I + (tA + sA) + \left(\frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{2tsA^2}{2!} + \frac{s^2 A^2}{2!} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{t^3 A^3}{3!} + \frac{3! t^2 s A^3}{2! 3!} + \frac{3! ts^2 A^3}{2! 3!} + \frac{s^3 A^3}{3!} \right) + \dots \\ &= I + tA \left[I + sA + \frac{(s)^2 A^2}{2!} + \frac{(s)^3 A^3}{3!} + \dots \right] + \\ &\quad + \frac{(t)^2 A^2}{2!} \left[I + sA + \frac{(s)^2 A^2}{2!} + \frac{(s)^3 A^3}{3!} + \dots \right] \\ &\quad + \dots + \left[sA + \frac{(s)^2 A^2}{2!} + \frac{(s)^3 A^3}{3!} + \dots \right] \\ &= tAT(s) + \frac{(t)^2 A^2}{2!} T(s) + \frac{(t)^3 A^3}{3!} T(s) + \dots + T(s) \\ &= \left[I + tA + \frac{(t)^2 A^2}{2!} + \frac{(t)^3 A^3}{3!} + \dots \right] T(s) \\ &= T(t)T(s). \end{aligned}$$

Assim, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo.

Para provarmos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo, observe que

$$T(t) - I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = tA \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(n-1)} A^{(n-1)}}{n!} \right)$$

e então,

$$\begin{aligned}
\|T(t) - I\| &= \left\| tA \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(n-1)} A^{(n-1)}}{n!} \right) \right\| \\
&\leq t\|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(n-1)} \|A\|^{(n-1)}}{n!} \right) \\
&\leq t\|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(n-1)} \|A\|^{(n-1)}}{(n-1)!} \right) \\
&= t\|A\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \right) \\
&= t\|A\| e^{t\|A\|}.
\end{aligned}$$

Logo, tomando o limite quando t tende a zero na expressão acima, obtemos que

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| \leq \lim_{t \downarrow 0} t\|A\| e^{t\|A\|} = 0,$$

isto é, $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo.

Para finalizarmos, mostraremos que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Para isso, note que

$$\frac{T(t) - I}{t} - A = \frac{1}{t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right] - A = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(n-1)} A^{(n-1)}}{n!} \right) - A = A \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right) - I \right].$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &\leq \|A\| \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} - I \right\| \\
&= \|A\| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{(n+1)!} \right\| \\
&\leq \|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{(n+1)!} \right) \\
&\leq \|A\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \right) \\
&= \|A\| (e^{t\|A\|} - 1)
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \lim_{t \downarrow 0} \|A\| (e^{t\|A\|} - 1) = 0,$$

ou seja, $A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t}$.

Observe ainda que essa convergência ocorre em $\mathcal{L}(X)$ e assim, em particular, temos $Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}$, para todo $x \in X$.

Portanto, neste caso, $D(A) = X$ e A é o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, o que finaliza a demonstração da primeira parte do teorema.

Reciprocamente, suponha que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados e mostremos que A é um operador linear limitado. Assim, visto que o semigrupo é uniformemente contínuo, a função $t \mapsto T(t)$ é contínua em $t = 0$ e então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(s) - I\| < \varepsilon$ para todo $0 \leq s < \delta$.

Logo, para $0 < t < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds - I \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t I ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (T(s) - I) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|T(s) - I\| ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon ds \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Em particular, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, podemos encontrar $\rho > 0$, com $0 < \rho < \delta$, tal que

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds - I \right\| < 1.$$

Dessa forma, pela Proposição 1.1, $\left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds \right)$ tem inversa limitada, ou seja, $\left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Além disso, podemos observar que

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) &= \frac{1}{h} \left(T(h) \int_0^\rho T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(h+s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right). \end{aligned}$$

Mais ainda, tomando o limite na igualdade acima, obtemos que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = \lim_{h \downarrow 0} \left(\frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) \right) = T(\rho) - I.$$

De fato, temos $\lim_{h \downarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) = T(0) = I$, pois, para $0 < h < \delta$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds - I \right\| &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s) - I\| ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \varepsilon ds \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds \right) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^h T(s + \rho) ds \right) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^h T(s) T(\rho) ds \right) \\ &= T(\rho) \lim_{h \downarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) \\ &= T(\rho). \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$A \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^\rho T(s) ds \right) = T(\rho) - I,$$

ou seja,

$$A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}.$$

Portanto, $A \in \mathcal{L}(X)$, isto é, A é limitado, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Proposição 2.1. *Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo, então a função $t \mapsto T(t)$ é contínua.*

Demonstração: Seja $t \geq 0$. Pela Observação 2.1, sabemos que a função $t \mapsto T(t)$ é contínua à direita de t , para todo $t \geq 0$. Mostremos então que $t \mapsto T(t)$ também é contínua à esquerda para $t > 0$.

Dado $t > 0$, observe que $\|T(s)\|$ é limitada em $[0, t + 1]$. De fato, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(s) - I\| < 1$, para todo $s \in [0, \delta]$. Logo,

$$\|T(s)\| \leq \|T(s) - I\| + \|I\| < 1 + 1 = 2, \text{ para } s \in [0, \delta].$$

Tomando n o menor natural tal que $t + 1 < n\delta$, se $s \in [0, t + 1]$, então, pelo algoritmo da divisão, $s = k\delta + \zeta$, onde $0 \leq k \leq n$ e $0 \leq \zeta \leq \delta$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}\|T(s)\| &= \|T(k\delta + \zeta)\| \\ &= \|T(k\delta)T(\zeta)\| \\ &\leq \|T(\delta)\|^k \|T(\zeta)\| \\ &< 2^k 2 \\ &= 2^{k+1} \\ &\leq 2^{n+1},\end{aligned}$$

ou seja, $\|T(s)\| \leq 2^{n+1}$, para todo $s \in [0, t + 1]$.

Agora, seja $h > 0$ tal que $h < t$. Temos então $0 < t - h < t < t + 1$ e assim,

$$\begin{aligned}\lim_{h \downarrow 0} \|T(t - h) - T(t)\| &= \lim_{h \downarrow 0} \|T(t - h) - T(t - h + h)\| \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \|T(t - h) - T(t - h)T(h)\| \\ &\leq \lim_{h \downarrow 0} \|T(t - h)\| \|I - T(h)\| \\ &\leq \lim_{h \downarrow 0} 2^{n+1} \|I - T(h)\| \\ &= 0,\end{aligned}$$

já que $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo, isto é, $\lim_{h \downarrow 0} \|I - T(h)\| = 0$.

Logo, $t \mapsto T(t)$ é contínua à esquerda para todo $t > 0$.

Portanto, segue que $t \mapsto T(t)$ é contínua em $[0, +\infty)$.

■

O Teorema 2.1 nos garante que todo operador linear limitado A gera um semigrupo uniformemente contínuo. O próximo resultado nos assegura que este semigrupo é único.

Teorema 2.2. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ semigrupos de operadores lineares limitados uniformemente contínuos. Se*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t) - I}{t},$$

então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Seja $T > 0$ qualquer. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ são semigrupos uniformemente contínuos, as funções $t \mapsto T(t)$ e $t \mapsto S(t)$ são contínuas. Assim, as funções $t \mapsto \|T(t)\|$ e $t \mapsto \|S(t)\|$ são também contínuas.

Logo, como $[0, T]$ é compacto, existem constantes c_1 e c_2 positivas tais que $\|T(t)\| \leq c_1$ e $\|S(t)\| \leq c_2$, $\forall t \in [0, T]$.

Tomando $c = c_1 c_2$, segue que $\|T(t)\| \|S(s)\| \leq c$, para todo $t, s \in [0, T]$.

Por outro lado, por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| < \frac{\varepsilon}{2Tc}$, para todo $0 < t < \delta_1$, e $\left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| < \frac{\varepsilon}{2Tc}$, para todo $0 < t < \delta_2$. Observe que, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $0 < t < \delta$, essas desigualdades continuam válidas e então,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t)}{t} - \frac{S(t)}{t} \right\| &= \left\| \frac{T(t)}{t} - \frac{I}{t} - A - \frac{S(t)}{t} + \frac{I}{t} + A \right\| \\ &\leq \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| + \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2Tc} + \frac{\varepsilon}{2Tc} \\ &= \frac{\varepsilon}{Tc}, \end{aligned}$$

isto é, $\|T(t) - S(t)\| < \frac{\varepsilon}{Tc}t$, para $0 < t < \delta$.

Seja $t \in [0, T]$ e tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right] S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-1-k)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} c \frac{\varepsilon}{Tc} \frac{t}{n} \\ &\leq nc \frac{\varepsilon}{Tc} \frac{T}{n} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, temos $\|T(t) - S(t)\| < \varepsilon$, para todo $t \in [0, T]$. Assim, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e,

posteriormente, $T \rightarrow \infty$, concluímos que $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$, o que conclui a demonstração do resultado. ■

Corolário 2.1. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo. Então:*

- (i) *Existe um único operador linear A tal que $T(t) = e^{tA}$, para todo $t \geq 0$;*
- (ii) *O operador A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$;*
- (iii) *Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$;*
- (iv) *A função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Seja A o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Vejamos a demonstração de cada item separadamente.

(i) Pelo Teorema 2.1, sabemos que A é limitado. Defina, então, $S(t) = e^{tA}$, para $t \geq 0$.

Como provado na demonstração do Teorema 2.1, $(S(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo, com gerador infinitesimal igual a A . Logo, do Teorema 2.2, segue que $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$, ou seja, $T(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$.

Além disso, como o gerador infinitesimal de um semigrupo é único, obtemos que o operador linear A é o único tal que $T(t) = e^{tA}$, para todo $t \geq 0$.

(ii) Esta propriedade é consequência direta do item (i) e dos resultados obtidos na demonstração do Teorema 2.1.

(iii) Sabemos que $T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$, $\forall t \geq 0$. Logo, temos

$$\|T(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^n}{n!} = e^{t\|A\|} = e^{t\omega}, \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde $\omega = \|A\|$.

Portanto, existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.

(iv) Sejam $t \geq 0$ e $h > 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - T(t)A \right\| &= \left\| \frac{T(t)T(h) - T(t)}{h} - T(t)A \right\| \\ &= \left\| T(t) \left[\frac{T(h) - I}{h} - A \right] \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \\
&\leq e^{\omega t} \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\|.
\end{aligned}$$

Como A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, segue que $\left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, ou seja, $\left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - T(t)A \right\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Logo, a função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável à direita de t , com $\frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A$.

Além disso, sabemos que a função $t \mapsto T(t)$ é contínua. Assim, como A é limitado, a função $t \mapsto T(t)A$ também é contínua. Portanto, pelo Lema de Dini (Lema 1.2), $t \mapsto T(t)$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d^+}{dt}T(t) = T(t)A.$$

Da mesma forma, temos

$$\left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| \leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \|T(t)\|.$$

Assim, pelo mesmo argumento acima, segue que

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{d^+}{dt}T(t) = AT(t).$$

Portanto,

$$AT(t) = \frac{d}{dt}T(t) = T(t)A, \forall t \geq 0.$$

■

2.2 Semigrupos fortemente contínuos

Nesta seção, estudaremos outra classe de semigrupos, os semigrupos fortemente contínuos, que será nossa ferramenta de trabalho ao longo do texto.

Definição 2.4. *Um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é um semigrupo fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x,$$

para todo $x \in X$.

Observação 2.3. (1) De acordo com a definição acima, segue que a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à direita em $t = 0$, para todo $x \in X$.

(2) Um semigrupo fortemente contínuo é também chamado de semigrupo de classe C_0 , ou simplesmente, C_0 - semigrupo.

A seguir, estudaremos as principais propriedades de um C_0 - semigrupo.

Teorema 2.3. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 - semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado para $t \in [0, \eta]$ pois, se isso não acontecesse, para todo $\eta > 0$ e todo $M > 0$, existiria $t_{M,\eta} \in [0, \eta]$ tal que $\|T(t_{M,\eta})\| > M$. Em particular, tomando $\eta = \frac{1}{n}$ e $M = n$, $n \in \mathbb{N}$, existiria $t_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ tal que $\|T(t_n)\| > n$. Logo, variando $n \in \mathbb{N}$, obteríamos uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para zero, quando $n \rightarrow \infty$, e, além disso, com $\|T(t_n)\| > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, teríamos $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|T(t_n)\|\} = +\infty$ e, pelo Princípio da limitação uniforme, existiria $x_0 \in X$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|T(t_n)x_0\|\} = +\infty$. Desse modo, existiria uma subsequência $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(\|T(t_{n_k})x_0\|)_{k \in \mathbb{N}}$ é ilimitado.

Mas, por outro lado, teríamos $t_{n_k} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, e, pelo fato de $(T(t))_{t \geq 0}$ ser um C_0 - semigrupo, $\lim_{k \rightarrow \infty} T(t_{n_k})x_0 = x_0$, ou seja, $(\|T(t_{n_k})x_0\|)_{k \in \mathbb{N}}$ seria limitada, o que é uma contradição.

Portanto, existem $\eta > 0$ e $M > 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, \eta]$.

Observe também que, como $\|T(0)\| = 1$, então $M \geq 1$.

Agora, seja $t > 0$ qualquer. Pelo algoritmo da divisão, $t = n\eta + \delta$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in [0, \eta]$. Disso, segue que

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(n\eta + \delta)\| \\ &\leq \|T(\eta)\|^n \|T(\delta)\| \\ &\leq M^n M \\ &\leq M^{\frac{t}{\eta}} M \\ &= Me^{\omega t}, \end{aligned}$$

onde $\omega = \frac{\ln M}{\eta} > 0$.

Portanto, existem $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$. ■

Corolário 2.2. Se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 - semigrupo então, para cada $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua de $[0, +\infty)$ em X .

Demonstração: Sabemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo, ou seja, $\lim_{h \downarrow 0} T(h)x = x$ para todo $x \in X$. Assim, dados $x \in X$, $t > 0$ fixo e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(h)x - x\| < \frac{\varepsilon}{Me^{\omega t}}$, se $0 < h < \delta$.

Mostraremos que $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $t > 0$ tanto à direita, quanto à esquerda.

Se $0 < h < \delta$, então

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t} \frac{\varepsilon}{Me^{\omega t}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Da mesma forma, se, além da condição acima, $h \leq t$, então

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)x - T(t-h+ h)x\| \\ &= \|T(t-h)x - T(t-h)T(h)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{\omega t} \frac{\varepsilon}{Me^{\omega t}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua à direita e à esquerda de $t > 0$, para todo $x \in X$. Consequentemente, $t \mapsto T(t)x$ é contínua de $[0, +\infty)$ em X , para todo $x \in X$ fixo. ■

Teorema 2.4. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 - semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:*

(a) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, temos*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x;$$

(b) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, segue que $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e*

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x;$$

(c) *Para todo $x \in D(A)$ e todo $t \geq 0$, temos $T(t)x \in D(A)$ e*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

(d) Para todo $x \in D(A)$ e $t, s \geq 0$, obtemos

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)A x d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Demonstração: (a) Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$. Pelo corolário anterior, segue que $t \mapsto T(t)x$ é uniformemente contínua em $[0, a]$, $a > 0$ fixo, com $t < a$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, para todo $t, s \in [0, a]$ com $|t - s| < \delta$, $\|T(t)x - T(s)x\| < \varepsilon$.

Seja $h \in \mathbb{R}$ com $0 < |h| < \delta$ e tal que $t + h < a$, então

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t)x ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [T(s)x - T(t)x] ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon ds \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x = 0$. Portanto,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(b) Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$. Tomando $y = \int_0^t T(s)x ds$ e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{T(h)y - y}{h} &= \frac{1}{h} \left(T(h) \int_0^t T(s)x ds - \int_0^t T(s)x ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_0^t T(h+s)x ds - \int_0^t T(s)x ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{t+h} T(u)x du - \int_0^t T(s)x ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^t T(s)x ds + \int_t^{t+h} T(s)x ds - \int_0^t T(s)x ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds. \end{aligned}$$

Assim, pelo item (a), segue que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)y - y}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{0+h} T(s)x ds$$

$$\begin{aligned}
&= T(t)x - T(0)x \\
&= T(t)x - x.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)y - y}{h}$ existe, ou seja, $y = \int_0^t T(s)x ds \in D(A)$, e

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = Ay = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)y - y}{h} = T(t)x - x.$$

(c) Sejam $x \in D(A)$ e $t \geq 0$. Para $h > 0$, observe que

$$\frac{T(h)[T(t)x] - T(t)x}{h} = \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h}.$$

Assim, como $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(t)(T(h)x) - T(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \downarrow 0} T(t) \left[\frac{T(h)x - x}{h} \right] \\
&= T(t) \lim_{h \downarrow 0} \left[\frac{T(h)x - x}{h} \right] \\
&= T(t)Ax.
\end{aligned}$$

Portanto, $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Assim, obtemos

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax = AT(t)x.$$

Para calcularmos a derivada à esquerda, seja $0 < h < t$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| &= \left\| \frac{-T(t-h)x + T(t-h+h)x}{h} - T(t)Ax \right\| \\
&= \left\| T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] \right. \\
&\quad \left. + T(t-h)Ax - T(t)Ax \right\| \\
&\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
&\quad + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
&\leq Me^{\omega(t-h)} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
&\quad + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|.
\end{aligned}$$

Dessa forma, segue que

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| = \lim_{h \downarrow 0} Me^{\omega(t-h)} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\|$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{h \downarrow 0} \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
& = Me^{\omega t}0 + 0 \\
& = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax.$$

Portanto,

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax = \frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x,$$

garantindo que

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

(d) Pelo item (c), segue que $T(\tau)Ax = AT(\tau)x$ para todo $\tau \geq 0$ e $x \in D(A)$. Assim, temos

$$\int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Além disso, $\frac{d}{d\tau}T(\tau)x = T(\tau)Ax$, e portanto, segue do Teorema fundamental do cálculo (em espaços vetoriais) que

$$\int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

■

Corolário 2.3. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então $D(A)$ é denso em X e $A : D(A) \rightarrow X$ é fechado.*

Demonstração: Seja $x \in X$. Para mostrarmos que $\overline{D(A)} = X$, devemos exibir uma sequência em $D(A)$ que converge para x . Com esse objetivo, defina

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds, \quad t \geq 0.$$

Observe que, pelo teorema anterior, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x_t - x_t}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) \left(\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \right) - \left(\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \right)}{h} \\
&= \frac{1}{t} \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) \left(\int_0^t T(s)x ds \right) - \left(\int_0^t T(s)x ds \right)}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} A \left(\int_0^t T(s) x ds \right) \\
&= \frac{1}{t} [T(t)x - x].
\end{aligned}$$

Logo, segue que $x_t \in D(A)$, para todo $t \geq 0$. Além disso, do item (a) do teorema anterior, temos

$$\lim_{t \downarrow 0} x_t = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) x ds = T(0)x = x.$$

Portanto, podemos encontrar uma sequência em $D(A)$ cujo limite é x (por exemplo, tomemos $t = \frac{1}{n}$), o que mostra que $\overline{D(A)} = X$.

Para mostrarmos que A é fechado, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$, para algum $x \in X$, e $Ax_n \rightarrow y$, para algum $y \in X$. Devemos mostrar que $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

Pelo item (d) do teorema anterior, segue que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(\tau)Ax_n d\tau, \quad (2.1)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$.

Como, por hipótese, $x_n \rightarrow x$ e $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, temos $T(t)x_n \rightarrow T(t)x$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t T(\tau)Ax_n d\tau - \int_0^t T(\tau)y d\tau \right\| &\leq \int_0^t \|T(\tau)Ax_n - T(\tau)y\| d\tau \\
&\leq \int_0^t \|T(\tau)\| \|Ax_n - y\| d\tau \\
&\leq \int_0^t M e^{\omega\tau} \|Ax_n - y\| d\tau \\
&\leq M e^{\omega t} \int_0^t \|Ax_n - y\| d\tau.
\end{aligned}$$

Assim, como $Ax_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$, segue que $\int_0^t T(\tau)Ax_n d\tau \rightarrow \int_0^t T(\tau)y d\tau$.

Logo, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em (2.1), obtemos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)y d\tau.$$

Portanto, pelo item (a) do Teorema anterior, temos

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y d\tau = T(0)y = y,$$

ou seja, $x \in D(A)$ e $Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = y$, garantindo que A é fechado e então, concluindo a demonstração do resultado. ■

Teorema 2.5. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ dois C_0 - semigrupos com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Por hipótese $A = B$, ou seja, $D(A) = D(B)$. Assim, dado $x \in D(A)$, segue que $x \in D(B)$ e as funções $t \mapsto T(t)x$ e $t \mapsto S(t)x$ são diferenciáveis, com $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$ e $\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Bx = BS(t)x$.

Agora, dado $t > 0$, considere a função $\psi : [0, t] \rightarrow X$ definida por

$$\psi(s) = T(t-s)S(s)x, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x + \left(\frac{d}{ds}T(t-s)\right)S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x - AT(t-s)S(s)x \\ &= T(t-s)BS(s)x - T(t-s)AS(s)x \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que $A = B$.

Logo, segue que $\psi(s)$ é constante para $0 \leq s \leq t$. Então, $\psi(t) = \psi(0)$, ou seja, $S(t)x = T(t-t)S(t)x = \psi(t) = \psi(0) = T(t-0)S(0)x = T(t)x$, isto é, $S(t)x = T(t)x$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in D(A)$.

Para o caso geral, seja $x \in X$. Como $\overline{D(A)} = X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, como provado anteriormente, temos $T(t)x_n = S(t)x_n$ para todo $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Também, como $T(t), S(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$, temos $T(t)x_n \rightarrow T(t)x$ e $S(t)x_n \rightarrow S(t)x$.

Dessa forma, pela unicidade do limite, concluímos que $T(t)x = S(t)x$, para todo $t \geq 0$.

Portanto, $T(t)x = S(t)x, \forall t \geq 0$ e $\forall x \in X$, e assim segue o resultado. ■

A seguir apresentamos uma generalização do conceito de semigrupo.

Definição 2.5. *Uma família a um parâmetro $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$, de operadores lineares limitados em X , é um grupo se:*

- (i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade de X ;
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

2.3 O Teorema de Hille-Yosida

Nesta seção vamos estudar o Teorema de Hille-Yosida, que nos fornece condições para que um operador linear A seja o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo.

Como visto na seção anterior, se $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 - semigrupo, então $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, onde M e ω são constantes tais que $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$. Usaremos esta notação ao longo desta seção.

Definição 2.6. Um C_0 - semigrupo é chamado uniformemente limitado se a constante ω acima é nula, ou seja, se $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$.

Definição 2.7. Um C_0 - semigrupo é chamado semigrupo de contrações quando as constantes M e ω acima são tais que $M = 1$ e $\omega = 0$, ou seja, $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

Definição 2.8. Um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável se existem constantes $M \geq 1$ e $\beta < 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}$, para todo $t \geq 0$.

Definição 2.9. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, não necessariamente limitado. O conjunto resolvente de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais o operador $(\lambda I - A)$ é inversível e limitado, isto é,

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

O espectro do operador A é o complementar do conjunto resolvente, isto é, $\sigma(A) = \rho(A)^c$.

Definição 2.10. A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, para $\lambda \in \rho(A)$, de operadores lineares limitados é chamada de resolvente de A .

A seguir apresentaremos alguns lemas que serão utilizados na demonstração do Teorema de Hille-Yosida.

Lema 2.1. Seja A um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Então,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração: Seja $x \in D(A)$. Então, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda : A)x - R(\lambda : A)(\lambda I - A)x\| \\ &= \|R(\lambda : A)\lambda x - R(\lambda : A)\lambda x + R(\lambda : A)Ax\| \\ &\leq \|R(\lambda : A)\| \|Ax\| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\|.$$

Assim, segue que,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\|Ax\|}{\lambda} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Agora, sejam $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Logo, para $\lambda \in (0, +\infty)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda : A)x - \lambda R(\lambda : A)x_n + \lambda R(\lambda : A)x_n - x_n + x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda : A)(x - x_n)\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq |\lambda| \|R(\lambda : A)\| \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \lambda \frac{1}{\lambda} \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &= 2\|x_n - x\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $x_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Em particular, tomando $n_1 \in \mathbb{N}$ fixo, com $n_1 > n_0$, temos $\|x_{n_1} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e, como $x_{n_1} \in D(A)$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_1} - x_{n_1}\| = 0$.

Portanto, usando a desigualdade anterior para n_1 , segue que

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &\leq 2\|x_{n_1} - x\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_1} - x_{n_1}\| \\ &< 2\frac{\varepsilon}{2} + \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_1} - x_{n_1}\| \\ &= \varepsilon + \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_1} - x_{n_1}\|. \end{aligned}$$

Assim, tomando o limite quando $\lambda \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

■

Definição 2.11. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$. Para cada $\lambda > 0$, definimos a aproximação de Yosida de A por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Observação 2.4. A igualdade acima é válida pois, $I = (\lambda I - A)R(\lambda : A) = \lambda R(\lambda : A) - AR(\lambda : A)$. Assim, $AR(\lambda : A) = \lambda R(\lambda : A) - I$ e, portanto,

$$\lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Lema 2.2. *Seja A um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Demonstração: Observe primeiramente que A e $R(\lambda : A)$ comutam. De fato, para todo $\lambda \in \rho(A)$, temos

$$(i) I = (\lambda I - A)R(\lambda : A), \text{ ou seja, } AR(\lambda : A) = \lambda R(\lambda : A) - I.$$

$$(ii) I = R(\lambda : A)(\lambda I - A) = R(\lambda : A)(\lambda I) - R(\lambda : A)A = \lambda R(\lambda : A) - R(\lambda : A)A, \text{ de onde segue que } R(\lambda : A)A = \lambda R(\lambda : A) - I.$$

Logo, de (i) e (ii), concluímos que $AR(\lambda : A) = R(\lambda : A)A$.

Além disso, pelo lema anterior, temos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)y = y$, para todo $y \in X$. Assim, em particular, se $y = Ax$, com $x \in D(A)$, segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda : A)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

■

Lema 2.3. *Seja A um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$. Suponha que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo de contrações uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, onde $T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}$, para todo $t \geq 0$. Além disso, para todo $x \in X$ e todo $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$, temos*

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| = \|(e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x)\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Demonstração: Seja $\lambda \in (0, +\infty)$. Por definição, $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$ e assim, A_λ é um operador linear limitado. Logo, pelo Teorema 2.1, segue que A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo

$$T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA_\lambda)^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0.$$

Observe ainda que, para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)\| &= \|e^{A_\lambda t}\| &= \|e^{(\lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I)t}\| \\ &= \|e^{\lambda^2 R(\lambda : A)t} e^{-\lambda I t}\| \\ &\leq \|e^{\lambda^2 R(\lambda : A)t}\| \|e^{-\lambda I t}\| \\ &\leq e^{(\lambda^2 t) \|R(\lambda : A)\|} e^{(-\lambda t) \|I\|} \\ &\leq e^{\lambda^2 t \frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda t} \\ &= e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$= 1,$$

de onde segue que o semigrupo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações.

Para mostrarmos a desigualdade (2.2), note que:

(i) $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ comutam, para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

De fato, temos

$$R(\lambda : A)R(\mu : A)(\mu I - A)(\lambda I - A) = I,$$

ou seja,

$$R(\lambda : A)R(\mu : A)(\mu I - A) = R(\lambda : A).$$

Além disso, como provamos do Lema 2.2, $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ comutam com o operador A , assim, temos $(\mu I - A)R(\lambda : A)R(\mu : A) = R(\lambda : A)$.

Logo,

$$R(\lambda : A)R(\mu : A) = R(\mu : A)R(\lambda : A).$$

(ii) A_λ e A_μ comutam, para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Neste caso, sabemos que $A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A)$ e $A_\mu = \mu AR(\mu : A)$. Assim, como A comuta com $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ e, por (i), $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ também comutam, segue a propriedade.

(iii) A_λ e e^{tA_λ} comutam, para todo $t \geq 0$ e $\lambda \in \rho(A)$.

Isso segue pois,

$$\begin{aligned} A_\lambda e^{tA_\lambda} &= [\lambda AR(\lambda : A)] \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda AR(\lambda : A))^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\lambda AR(\lambda : A))^{n+1}}{n!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda AR(\lambda : A))^n}{n!} \right) [\lambda AR(\lambda : A)] \\ &= e^{tA_\lambda} A_\lambda. \end{aligned}$$

(iv) A_λ e e^{tA_μ} comutam, para todo $t \geq 0$ e $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Isto acontece visto que

$$\begin{aligned} A_\lambda e^{tA_\mu} &= \lambda AR(\lambda : A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mu AR(\mu : A))^n}{n!} \right) \\ &= \lambda AR(\lambda : A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mu^n A^n R(\mu : A)^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mu^n A^n R(\mu : A)^n}{n!} \right) (\lambda A R(\lambda : A)) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t \mu A R(\mu : A))^n}{n!} \right) (\lambda A R(\lambda : A)) \\
&= e^{t A \mu} A_{\lambda}.
\end{aligned}$$

Assim, sejam $\lambda, \mu > 0$, $t \geq 0$ e $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned}
e^{t A \lambda} x - e^{t A \mu} x &= (e^{t s A \lambda} e^{t(1-s) A \mu} x) \big|_{s=1} - (e^{t s A \lambda} e^{t(1-s) A \mu} x) \big|_{s=0} \\
&= \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{t s A \lambda} e^{t(1-s) A \mu} x) ds \\
&= \int_0^1 (t A_{\lambda} e^{t s A \lambda} e^{t(1-s) A \mu} x + e^{t s A \lambda} (-t A_{\mu}) e^{t(1-s) A \mu} x) ds \\
&= \int_0^1 (e^{t s A \lambda} e^{t(1-s) A \mu} (t A_{\lambda}) x + e^{t s A \lambda} e^{t(1-s) A \mu} (-t A_{\mu}) x) ds \\
&= \int_0^1 e^{t s A \lambda} e^{t(1-s) A \mu} [t A_{\lambda} x - t A_{\mu} x] ds.
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}
\|e^{t A \lambda} x - e^{t A \mu} x\| &\leq \int_0^1 \|e^{t s A \lambda}\| \|e^{t(1-s) A \mu}\| \|t(A_{\lambda} x - A_{\mu} x)\| ds \\
&\leq \int_0^1 t \|A_{\lambda} x - A_{\mu} x\| ds \\
&= t \|A_{\lambda} x - A_{\mu} x\|.
\end{aligned}$$

Portanto, temos a desigualdade desejada. ■

Teorema 2.6. (Teorema de Hille-Yosida) Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ se, e somente se,

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(ii) $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.

Demonstração: Suponha que A gera um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ de contrações. Já sabemos, pelo Corolário 2.3, que A é fechado e $\overline{D(A)} = X$. Agora, sejam $\lambda \in (0, +\infty)$ e $x \in X$. Defina

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Vejamos a seguir algumas propriedades de $R(\lambda)$:

(a) $R(\lambda)x$ está bem definido.

De fato, sabemos que $\|T(t)x\| \leq \|x\|$, para todo $t \geq 0$, já que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)\| \|x\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\| dt \\ &= \|x\| \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda t}}{(-\lambda)} - \frac{e^0}{(-\lambda)} \right] \\ &= \frac{\|x\|}{\lambda} < +\infty, \end{aligned}$$

o que implica que $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$ existe.

(b) $R(\lambda) : X \rightarrow X$ é um operador linear.

Isso ocorre pois, dados $x, y \in X$ e $\alpha \in K$, onde K é o corpo de X , temos

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\alpha x + y) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)(\alpha x + y) dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)y dt \\ &= \alpha R(\lambda)x + R(\lambda)y, \end{aligned}$$

já que $T(t) \in \mathcal{L}(X), \forall t \geq 0$.

(c) $R(\lambda)$ é um operador limitado visto que, como calculado em (a),

$$\|R(\lambda)x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

(d) Para todo $x \in X$, $R(\lambda)x \in D(A)$.

De fato, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) R(\lambda)x &= \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left[T(h) \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h+t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \int_h^0 e^{-\lambda s} e^{\lambda h} T(s) x ds \\
&\quad + \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} e^{\lambda h} T(s) x ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds \right] \\
&= \frac{-1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} e^{\lambda h} T(s) x ds + \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds.
\end{aligned}$$

Logo, tomando o limite, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h \downarrow 0} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) R(\lambda)x &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{-e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s) x ds + \lim_{h \downarrow 0} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) R(\lambda)x \\
&= \left(\lim_{h \downarrow 0} e^{-\lambda h} \right) \left(- \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{0+h} e^{-\lambda s} T(s) x ds \right) + \lambda R(\lambda)x \\
&= -e^{-\lambda 0} T(0)x + \lambda R(\lambda)x \\
&= \lambda R(\lambda)x - Ix.
\end{aligned}$$

Portanto, $R(\lambda)x \in D(A)$ e $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - Ix$, para todo $x \in X$.

Disto, segue que $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$, ou ainda, $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$.

Assim, $R(\lambda)$ é uma inversa à direita de $(\lambda I - A)$.

Por outro lado, seja $x \in D(A)$. Observe que,

$$\begin{aligned}
R(\lambda)(\lambda I - A)x &= \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax \\
&= \lambda R(\lambda)x - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) Ax dt \\
&= \lambda R(\lambda)x - A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \right) \\
&= \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x \\
&= (\lambda I - A)R(\lambda)x \\
&= x,
\end{aligned}$$

ou seja, $R(\lambda)(\lambda I - A) = I$, com $I : D(A) \rightarrow D(A)$, o que implica que $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ é a inversa de $(\lambda I - A)$. Dessa forma, $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda) = R(\lambda : A)$.

Como isso é válido para todo $\lambda \in (0, +\infty)$, segue que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e, para todo $\lambda > 0$, temos

$$\|R(\lambda : A)\| = \|R(\lambda)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(\lambda)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|x\|}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Reciprocamente, suponha que as condições (i) e (ii) sejam satisfeitas. Mostraremos que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações. Para isso, seja A_λ a aproximação de Yosida de A e considere o semigrupo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, onde $T_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}$, para todo $t \geq 0$.

Pelo Lema 2.3, sabemos que $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, com $\|T_\lambda(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$ e $\lambda \in (0, +\infty)$. Além disso, A_λ é o seu gerador infinitesimal e

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &= \|e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x\| \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|A_\mu x - Ax\|, \forall x \in D(A), t \geq 0, \lambda, \mu \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Agora, dado $x \in D(A)$, pelo Lema 2.2, temos $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$ e $\lim_{\mu \rightarrow \infty} A_\mu x = Ax$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $c > 0$ tal que, se $\lambda, \mu > c$, então $\|A_\lambda x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2t}$ e $\|A_\mu x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2t}$, para $t \neq 0$ fixo.

Logo, para $\lambda, \mu > c$, temos

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| < t\frac{\varepsilon}{2t} + t\frac{\varepsilon}{2t} = \varepsilon.$$

Em particular, se $t = 0$, então $\|T_\lambda(0)x - T_\mu(0)x\| = \|x - x\| = 0 < \varepsilon$, independente do valor de ε .

Assim, concluímos que $(T_\lambda(t)x)_{\lambda \in (0, +\infty)}$ satisfaz uma condição de Cauchy em X , e portanto, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x$ existe para todo $t \geq 0$ e $x \in D(A)$.

Defina então $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x$, para todo $t \geq 0$ e $x \in D(A)$. Observe ainda que essa convergência é uniforme para t em intervalos limitados de $[0, +\infty)$.

Para estendermos essa definição para todo X , lembremos que, por hipótese, $\overline{D(A)} = X$. Assim, se $x \in X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Logo, como $T_\lambda(t) \in \mathcal{L}(X)$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x_n = T_\lambda(t)x$. Neste caso, defina $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x_n \right)$.

Dessa forma, obtemos uma família $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares.

Vejamos a seguir as propriedades de $(T(t))_{t \geq 0}$:

(a) Seja $x \in X$. Observe que

$$\|T(t)x\| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|T_\lambda(t)x\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|T_\lambda(t)\|\|x\| \leq \|x\|, \forall x \in X.$$

Logo, $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$.

(b) Da desigualdade acima, obtemos que

$$\|T(t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|T(t)x\|\} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|x\|\} = 1,$$

ou seja, $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

(c) Note que $T(0) = I$, pois

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x = x, \quad \forall x \in X,$$

uma vez que $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo.

(d) Sejam $x \in X$ e $t, s \in [0, +\infty)$. Então,

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x = T(t)T(s)x, \quad \forall x \in X,$$

já que $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo e o último limite ocorre pois,

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x\| &\leq \|T_\lambda(t)T_\lambda(s) - T_\lambda(t)T(s)x\| \\ &\quad + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\leq \|T_\lambda(t)\| \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| \\ &\quad + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\leq \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| + \|T_\lambda(t)y - T(t)y\|, \end{aligned}$$

onde $y = T(s)x$, e assim, como a última expressão à direita tende a zero quando $\lambda \rightarrow \infty$,
 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s)x - T(t)T(s)x = 0$.

Portanto, $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Concluimos então, de (a)-(d), que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações.

(e) Sabemos também que as funções $t \mapsto T_\lambda(t)x$, com $\lambda \in (0, +\infty)$ e $x \in X$, são contínuas. Além disso, $T_\lambda(t)x \rightarrow T(t)x$ uniformemente em $[0, a]$, para algum $a \in (0, +\infty)$. Logo, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, a]$. Em particular, ela é contínua em zero e assim, $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo.

(f) Seja $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Mostraremos que $D(A) = D(B)$ e $A = B$.

Seja $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(0)x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [T_\lambda(t)x - T_\lambda(0)x] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x ds \right] \\ &= \int_0^t \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(s)A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax ds, \end{aligned}$$

sendo essa convergência possível pois $T_\lambda(s)A_\lambda x \rightarrow T(s)Ax$ uniformemente em intervalos limitados de $[0, +\infty)$, visto que

$$\|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| \leq \|T_\lambda(s)A_\lambda x - T_\lambda(s)Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|T_\lambda(s)\| \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \\
&\leq \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\|
\end{aligned}$$

e $T_\lambda(s)Ax \rightarrow T(s)Ax$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, uniformemente em intervalos limitados de $[0, +\infty)$.

Dessa forma, segue que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds = T(0)Ax = Ax,$$

o que implica que $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$.

Logo, $D(A) \subset D(B)$ e $A = B$ em $D(A)$.

Por outro lado, pela primeira parte desta demonstração, sabemos que $(0, +\infty) \subset \rho(B)$. Em particular, $1 \in \rho(B)$. Sabemos também, por hipótese, que $1 \in \rho(A)$. Então $(I - A)$ e $(I - B)$ são bijeções e suas inversas são limitadas.

Consequentemente, $(I - A)D(A) = X$ e, como $D(A) \subset D(B)$ e $A = B$ em $D(A)$, obtemos que

$$(I - A)D(A) = (I - B)D(A) = X.$$

Usando a inversa, temos $D(A) = (I - B)^{-1}(I - B)D(A) = (I - B)^{-1}X = D(B)$.

Portanto, $D(A) = D(B)$ e $A = B$, ou seja, A é o gerador infinitesimal do C_0 - semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$.

■

Corolário 2.4. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \forall t \geq 0, x \in X.$$

Demonstração: Considere o semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$, onde $S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x$, para todo $t \geq 0$ e $x \in X$. Pela demonstração do Teorema de Hille-Yosida, segue que $(S(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 - semigrupo de contrações com gerador infinitesimal igual a A .

Dessa forma, como $(T(t))_{t \geq 0}$ e $(S(t))_{t \geq 0}$ são C_0 - semigrupos com o mesmo gerador infinitesimal, o Teorema 2.5 nos garante que $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.

$$\text{Portanto, } T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \forall t \geq 0, x \in X.$$

■

Corolário 2.5. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$. O conjunto resolvente de A contém o semiplano direito aberto, isto é, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ e, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda > 0$, temos*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dado $x \in X$, considere o operador

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Observe que $R(\lambda)$ está bem definido, pois

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| &\leq \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \|T(t)\| \|x\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t} \|x\| dt \\ &= \|x\| \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t} dt \\ &= \|x\| \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(\operatorname{Re}\lambda)t}}{-(\operatorname{Re}\lambda)} + \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda)} \right] \\ &= \frac{\|x\|}{\operatorname{Re}\lambda} < +\infty. \end{aligned}$$

Além disso, da mesma forma que na demonstração do Teorema de Hille-Yosida, concluímos que

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda : A).$$

Portanto, segue que $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ e, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda : A)\| = \|R(\lambda)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|R(\lambda)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|x\|}{\operatorname{Re}\lambda} = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

■

Observação 2.5. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 - semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ e algum $\omega > 0$. Dessa forma, a família $(S(t))_{t \geq 0}$, onde $S(t) = e^{-\omega t} T(t)$ para todo $t \geq 0$, é um C_0 - semigrupo de contrações.

Além disso, se A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$, então $(A - \omega I)$ é o gerador infinitesimal de $(S(t))_{t \geq 0}$. Analogamente, se A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$, então $(A + \omega I)$ é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ satisfazendo $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ (basta considerarmos $S(t) = e^{\omega t} T(t)$, para todo $t \geq 0$).

Corolário 2.6. Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$ e algum $\omega > 0$, se, e somente se,

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(ii) $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$, para todo $\lambda > \omega$.

Demonstração: Suponha, primeiramente, que A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$ e algum $\omega > 0$.

Pelo Corolário 2.3, sabemos que A é fechado e $\overline{D(A)} = X$. Falta mostrarmos que vale a propriedade (ii). Para isso, seja $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, para todo $t \geq 0$. Pela Observação 2.5, segue que $(S(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 - semigrupo de contrações com gerador infinitesimal $B = A - \omega I$. Além disso, pelo Teorema de Hille-Yosida, segue que $(0, +\infty) \subset \rho(B)$ e $\|R(\lambda : B)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda \geq 0$.

Agora, considere $\mu \in (\omega, +\infty)$. Então $\mu = \omega + \beta$, para algum $\beta > 0$. Assim,

$$(\mu I - A) = (\omega I + \beta I - A) = (\beta I - (A - \omega I)) = (\beta I - B).$$

Como $\beta > 0$, $\beta \in \rho(B)$ e então, $(\beta I - B)^{-1}$ existe. Logo, $(\mu I - A)^{-1}$ existe, ou seja, $\mu \in \rho(A)$. Mais ainda, se $\mu > \omega$, temos

$$\|R(\mu : A)\| = \|(\mu I - A)^{-1}\| = \|(\beta I - B)^{-1}\| = \|R(\beta : B)\| \leq \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\mu - \omega}.$$

Reciprocamente, suponha que valem as propriedades (i) e (ii) e mostremos que A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.

Nesse caso, seja $B = A - \omega I$. Se $\lambda > 0$, temos $(\lambda I - B) = (\lambda I - A + \omega I) = ((\lambda + \omega)I - A)$. Observe que $((\lambda + \omega)I - A)^{-1}$ existe, pois $\lambda + \omega > \omega$, e então, $(\lambda I - B)^{-1}$ existe, ou seja, $(0, +\infty) \subset \rho(B)$ e, para todo $\lambda > 0$, temos

$$\|R(\lambda : B)\| = \|(\lambda I - B)^{-1}\| = \|((\lambda + \omega)I - A)^{-1}\| = \|R(\lambda + \omega : A)\| \leq \frac{1}{(\lambda + \omega) - \omega} = \frac{1}{\lambda}.$$

Note também que $D(B) = D(A)$ e então $\overline{D(B)} = X$. Além disso, B é fechado, já que A é fechado.

Portanto, pelo Teorema de Hille-Yosida, B é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$.

Assim, tomando $T(t) = e^{\omega t}S(t)$, para todo $t \geq 0$, obtemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 - semigrupo, com $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, e com gerador infinitesimal $B + \omega I = (A - \omega I) + \omega I = A$. ■

Teorema 2.7. (Caso geral do Teorema de Hille-Yosida) *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, com $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$, se, e somente se,*

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(ii) $(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$, para todo $\lambda > \omega$ e $n \in \mathbb{N}$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [20, Teorema 5.3] .

Funções quase periódicas da reta real em um espaço de Banach

Neste capítulo vamos estudar uma classe especial de funções, as funções quase periódicas. Iremos, inicialmente, considerar sua definição clássica, dada por Bohr em 1925, que é feita através do conceito de conjuntos relativamente densos, e analisaremos suas principais propriedades. Na sequência, buscaremos uma equivalência entre a definição inicial e o conceito de funções normais, que envolve convergência.

Finalizamos este capítulo apresentando alguns exemplos de funções quase periódicas.

Definição 3.1. *Sejam E um espaço vetorial normado e $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ uma função. O número real ξ é chamado um ε -quase período para a função f se, para todo número real t , a desigualdade*

$$\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$$

é satisfeita.

Observação 3.1. *Se a função f é periódica com período $\omega > 0$, ou seja, se $f(t + \omega) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o número ω será um quase período para f para qualquer $\varepsilon > 0$. Note também que os períodos de uma função periódica, $n\omega$, com $n \in \mathbb{Z}$, formam um conjunto relativamente denso de números reais, isto é, existe um período de f em qualquer intervalo de comprimento maior que ω .*

Este conceito de conjunto relativamente denso de números reais é fundamental na teoria de funções quase periódicas, como veremos no decorrer deste capítulo.

Definição 3.2. *Sejam $l > 0$ e $P \subset \mathbb{R}$. Dizemos que P é l -denso em $\mathbb{R}$ se a interseção $[a, a + l] \cap P$ é não vazia, para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Definição 3.3. *Um conjunto $P \subset \mathbb{R}$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$ se é l -denso para algum $l > 0$.*

Exemplo 3.1. *O conjunto $\{\pm\sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é relativamente denso.*

De fato, observe que, para qualquer $a \geq 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[a^2] = n$, ou seja, $n \leq a^2 < n + 1$. Assim,

$$[a^2] \leq a^2 < [a^2] + 1 \leq a^2 + 1 \leq a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2.$$

Portanto,

$$a \leq \sqrt{[a]^2 + 1} \leq a + 1,$$

isto é, $\sqrt{[a]^2 + 1} \in [a, a + 1] \cap \{\pm\sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

No caso em que $a < 0$, temos duas possibilidades: se $a > -1$, então $a < 0 < a + 1$, ou seja, $0 \in [a, a + 1] \cap \{\pm\sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Já se $a < -1$, temos $b = -a - 1 > 0$ e, pelo que foi feito inicialmente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b \leq \sqrt{k} \leq b + 1$, ou seja, $-a - 1 \leq \sqrt{k} \leq -a$, implicando assim em $a \leq -\sqrt{k} \leq a + 1$.

Logo, a interseção $[a, a + 1] \cap \{\pm\sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é não vazia para qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, o que garante que o conjunto $\{\pm\sqrt{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é 1-denso e então, relativamente denso.

Definição 3.4. Sejam E um espaço vetorial normado e $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ uma função contínua. A função f é quase periódica se, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um conjunto relativamente denso de ε -quase períodos para f .

Em outras palavras, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é quase periódica se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número positivo $l = l(\varepsilon)$ tal que, em qualquer intervalo real de comprimento l , existe pelo menos um número ξ tal que

$$\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observação 3.2. A mesma classe de funções pode ser obtida se assumirmos na definição acima a desigualdade estrita $\|f(t + \xi) - f(t)\| < \varepsilon$.

De fato, se vale a Definição 3.4, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tome $\varepsilon_1 > 0$ de modo que $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Assim, da Definição 3.4, obtemos que $\{\xi \in \mathbb{R}; \|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon_1\}$ é relativamente denso. Além disso, como $\varepsilon_1 < \varepsilon$, segue que $\{\xi \in \mathbb{R}; \|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon_1\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}; \|f(t + \xi) - f(t)\| < \varepsilon\}$, o que implica que $\{\xi \in \mathbb{R}; \|f(t + \xi) - f(t)\| < \varepsilon\}$ também é relativamente denso. Logo, vale a Definição 3.4 com a desigualdade estrita.

Analogamente, se vale a Definição 3.4 com a desigualdade estrita, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tome $\varepsilon_2 > 0$, com $\varepsilon_2 < \varepsilon$. Dessa forma, temos $\{\xi \in \mathbb{R}; \|f(t + \xi) - f(t)\| < \varepsilon_2\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}; \|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon\}$ e então, como $\{\xi \in \mathbb{R}; \|f(t + \xi) - f(t)\| < \varepsilon_2\}$ é relativamente denso, $\{\xi \in \mathbb{R}; \|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon\}$ também o será, garantindo a validade da Definição 3.4.

Seja E um espaço vetorial normado. Vamos denotar por $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ o conjunto de todos os números ε -quase períodos da função $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ e por $\mathfrak{L}(f; \varepsilon)$ o conjunto de todo número positivo $l = l(\varepsilon)$ que aparece na Definição 3.4.

Propriedades 3.1. Usando a notação acima, valem os seguintes resultados:

(1) Sejam ε e ε' reais positivos tais que $\varepsilon < \varepsilon'$, então $\mathcal{T}(f; \varepsilon) \subset \mathcal{T}(f; \varepsilon')$.

(2) Dado $\varepsilon > 0$, se $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$, então $-\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$.

(3) Dados ε_1 e ε_2 reais positivos, se $\xi_1 \in \mathcal{T}(f; \varepsilon_1)$ e $\xi_2 \in \mathcal{T}(f; \varepsilon_2)$, então $\xi_1 \pm \xi_2 \in \mathcal{T}(f; \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

(4) Se $l \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$ e $l_1 > l$, então $l_1 \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$.

Demonstração: (1) Dados ε e ε' positivos tais que $\varepsilon < \varepsilon'$, seja $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$. Assim, segue que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon < \varepsilon',$$

ou seja, $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon')$. Portanto, $\mathcal{T}(f; \varepsilon) \subset \mathcal{T}(f; \varepsilon')$.

(2) Seja $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$. Então, $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, substituindo t por $s - \xi$, $s \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\|f(s - \xi) - f(s)\| \leq \varepsilon.$$

Como a desigualdade acima vale para todo $s \in \mathbb{R}$, concluímos que $-\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$.

(3) Sejam $\xi_1 \in \mathcal{T}(f; \varepsilon_1)$ e $\xi_2 \in \mathcal{T}(f; \varepsilon_2)$. Observe que

$$\begin{aligned} \|f(t + (\xi_1 \pm \xi_2)) - f(t)\| &= \|f(t + (\xi_1 \pm \xi_2)) - f(t + \xi_1) + f(t + \xi_1) - f(t)\| \\ &\leq \|f((t + \xi_1) \pm \xi_2) - f(t + \xi_1)\| + \|f(t + \xi_1) - f(t)\| \\ &\leq \varepsilon_2 + \varepsilon_1, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo, segue que $\xi_1 \pm \xi_2 \in \mathcal{T}(f; \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

(4) Seja $l \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$. Assim, em qualquer intervalo real de comprimento l , existe pelo menos um número ξ com a propriedade: $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $l_1 > l$, segue que qualquer intervalo real de comprimento l_1 contém um intervalo de comprimento l , e então, existe pelo menos um número ξ no intervalo de comprimento l_1 com a propriedade: $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $l_1 \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$.

■

Daqui por diante, vamos considerar E um espaço vetorial normado e $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ uma função contínua.

Lema 3.1. Para qualquer número positivo ε , o conjunto $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ é fechado.

Demonstração: Seja $\xi \in \overline{\mathcal{T}(f; \varepsilon)}$. Logo, existe uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ tal que $\xi_n \rightarrow \xi$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como $\xi_n \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\|f(t + \xi_n) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, observe que $(t + \xi_n) \rightarrow (t + \xi)$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, como f é contínua, temos $f(t + \xi_n) \rightarrow f(t + \xi)$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, aplicando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados da desigualdade $\|f(t + \xi_n) - f(t)\| \leq \varepsilon$, obtemos $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$, e então, $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ é fechado. ■

Proposição 3.1. *Seja $\bar{l}(\varepsilon) = \inf \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$. Então, $\bar{l}(\varepsilon) \geq 0$ e $\bar{l}(\varepsilon) \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$.*

Demonstração: Observe inicialmente que, pela forma como foi definido, $\mathfrak{L}(f; \varepsilon)$ é formado por números positivos. Logo, $\bar{l}(\varepsilon) \geq 0$. Mais ainda, pela definição de ínfimo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $l_n \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$ tal que $\bar{l}(\varepsilon) \leq l_n < \bar{l}(\varepsilon) + \frac{1}{n}$.

Agora, seja $a \in \mathbb{R}$ e considere os intervalos $[a, a + l_n]$ e $[a, a + (\bar{l}(\varepsilon) + \frac{1}{n})]$, com $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que existe $\xi_n \in [a, a + l_n]$ tal que $\xi_n \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$ e então, como $l_n < \bar{l}(\varepsilon) + \frac{1}{n}$, $\xi_n \in [a, a + (\bar{l}(\varepsilon) + \frac{1}{n})]$.

Assim, quando fazemos n variar em $\mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $[a, a + (\bar{l}(\varepsilon) + 1)]$ e, como este intervalo é compacto, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(\xi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente. Digamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k} = \bar{\xi}$, com $\bar{\xi} \in \mathbb{R}$.

Observe que $a \leq \xi_{n_k} \leq a + \bar{l}(\varepsilon) + \frac{1}{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que implica que $a \leq \bar{\xi} \leq a + \bar{l}(\varepsilon)$, isto é, $\bar{\xi} \in [a, a + \bar{l}(\varepsilon)]$.

Além disso, pelo Lema 3.1, sabemos que $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ é fechado, e então, segue que $\bar{\xi} \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$.

Portanto, existe pelo menos um número $\bar{\xi} \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$ tal que $\bar{\xi} \in [a, a + \bar{l}(\varepsilon)]$, ou seja, $\bar{l}(\varepsilon) \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$. ■

Observação 3.3. (1) *Da definição de $\mathfrak{L}(f; \varepsilon)$ e da proposição anterior, segue que $\mathfrak{L}(f; \varepsilon) = [\bar{l}(\varepsilon), \infty)$.*

(2) *Dado $\bar{\varepsilon} > 0$ fixo, seja $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$. Se assumirmos que $\bar{l}(\varepsilon) = 0$, então, para qualquer número natural n , existe um número $l_n \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$ tal que $0 \leq l_n < \frac{1}{n}$. Assim, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, todo intervalo da forma $[a, a + \frac{1}{n}]$ contém um número $\xi_n \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$, com $\|f(t + \xi_n) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, quando $n \rightarrow \infty$, ξ_n converge para a e obtemos $\|f(t + a) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Entretanto, a*

é um número real qualquer e então, tomando em particular $t = 0$ na desigualdade acima, ficamos com $\|f(a) - f(0)\| \leq \varepsilon$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Assim, concluímos que, se $\bar{l}(\varepsilon) = 0$ para todo $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, então $f(a) = f(0)$ para todo $a \in \mathbb{R}$, ou seja, f é uma função constante.

(3) Dados $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, então $\mathfrak{L}(f; \varepsilon_1) \subset \mathfrak{L}(f; \varepsilon_2)$ e $\bar{l}(\varepsilon_2) \leq \bar{l}(\varepsilon_1)$.

De fato, se $l \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon_1)$, segue que $[a, a+l] \cap \mathcal{T}(f; \varepsilon_1)$ é não vazia, para todo $a \in \mathbb{R}$. Logo, existe $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon_1)$, isto é, existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(t+\xi) - f(t)\| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon_2)$, e mais, $[a, a+l] \cap \mathcal{T}(f; \varepsilon_2)$ é não vazia, para todo $a \in \mathbb{R}$. Portanto, $l \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon_2)$, ou seja, $\mathfrak{L}(f; \varepsilon_1) \subset \mathfrak{L}(f; \varepsilon_2)$ e $\bar{l}(\varepsilon_2) \leq \bar{l}(\varepsilon_1)$ por causa dessa inclusão e da definição de ínfimo.

Proposição 3.2. Suponha que o conjunto numérico $\{\bar{l}(\varepsilon) \in \mathbb{R}; 0 < \varepsilon < 1\}$ é limitado. Então, $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é uma função periódica.

Demonstração: Suponha que $\{\bar{l}(\varepsilon) \in \mathbb{R}; 0 < \varepsilon < 1\}$ é limitado. Assim, para algum número positivo l , temos $0 < \bar{l}(\varepsilon) < l$ para todo $0 < \varepsilon < 1$.

Além disso, como $\bar{l}(\varepsilon) \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$, sabemos que $[a, a + \bar{l}(\varepsilon)] \cap \mathcal{T}(f; \varepsilon) \neq \emptyset$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Logo, como $\bar{l}(\varepsilon) < l$, segue que $[a, a + l] \cap \mathcal{T}(f; \varepsilon) \neq \emptyset$, para todo $a \in \mathbb{R}$, ou seja, $l \in \mathfrak{L}(f; \varepsilon)$.

Deste modo, visto que a propriedade acima é válida para todo $0 < \varepsilon < 1$, tomando, em particular, $\varepsilon = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, obtemos que o intervalo $[l, 2l]$ possui um elemento $\xi_n \in \mathcal{T}(f; \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\|f(t + \xi_n) - f(t)\| \leq \frac{1}{n}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Mais ainda, como $[l, 2l]$ é compacto, existe uma subsequência $(\xi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para algum ξ^* pertencente ao intervalo $[l, 2l]$.

Portanto, como f é contínua, aplicando o limite com $n \rightarrow \infty$ em (3.1), obtemos

$$\|f(t + \xi^*) - f(t)\| = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

ou seja, $f(t + \xi^*) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou ainda, f periódica, com período ξ^* . ■

A seguir apresentamos algumas propriedades das funções quase periódicas.

Propriedades 3.2. (1) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é quase periódica e $\alpha \in K$, onde K é o corpo de E , então a função $t \mapsto (\alpha f)(t)$ é também quase periódica.

(2) Se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é quase periódica, então a translação f_a , definida por $f_a(t) = f(t + a)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ fixo, e a reflexão $\check{f}$, definida por $\check{f}(t) = f(-t)$, para $t \in \mathbb{R}$, são também quase periódicas.

(3) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é quase periódica, então a função $\|f\|$, dada por $t \mapsto \|f(t)\|$, para $t \in \mathbb{R}$, também é quase periódica.

(4) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ uma função quase periódica, com $\inf_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = m > 0$ e K o corpo de E . Então a função inversa $g : \mathbb{R} \rightarrow K$, definida por $g(t) = \frac{1}{f(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, é quase periódica.

(5) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é quase periódica, então f é limitada em $\mathbb{R}$.

(6) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é quase periódica, então a função $t \mapsto g(t) = (f(t))^2$, $t \in \mathbb{R}$ é também quase periódica.

(7) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é quase periódica, então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Demonstração: (1) Seja $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$, então $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\|(\alpha f)(t + \xi) - (\alpha f)(t)\| \leq |\alpha| \|f(t + \xi) - f(t)\| \leq |\alpha| \varepsilon, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

o que implica que $\xi \in \mathcal{T}(\alpha f; |\alpha| \varepsilon)$.

Dessa forma, temos $\mathcal{T}(f; \varepsilon) \subset \mathcal{T}(\alpha f; |\alpha| \varepsilon)$ e mais, como f é quase periódica, $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$ e assim, $\mathcal{T}(\alpha f; |\alpha| \varepsilon)$ também é relativamente denso.

Agora, para $\alpha \neq 0$, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ qualquer, tomando $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{|\alpha|}$ no resultado acima, obtemos que $\mathcal{T}(\alpha f; \tilde{\varepsilon})$ é relativamente denso.

Portanto, αf é quase periódica.

(2) Suponha que f é quase periódica. Assim, existe $l > 0$ tal que $[a, a + l] \cap \mathcal{T}(f; \varepsilon) \neq \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{R}$, ou seja, existe $\xi \in [a, a + l]$ tal que $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Logo, como $t = a + s \in \mathbb{R}$, para todo $s \in \mathbb{R}$, segue que $\|f(s + a + \xi) - f(s + a)\| \leq \varepsilon$, isto é, $\|f_a(s + \xi) - f_a(s)\| \leq \varepsilon$, para todo $s \in \mathbb{R}$, ou ainda, $\xi \in \mathcal{T}(f_a; \varepsilon)$. Assim, $\mathcal{T}(f_a; \varepsilon)$ é relativamente denso e, portanto, f_a é quase periódica.

Da mesma forma, agora tomando $t = -s$, temos

$$\|\check{f}(s - \xi) - \check{f}(s)\| = \|f(-s + \xi) - f(-s)\| \leq \varepsilon, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Logo, $-\xi \in \mathcal{T}(\check{f}; \varepsilon)$ e então, pelo item (2) da Propriedade 3.1, concluímos que $\xi \in \mathcal{T}(\check{f}; \varepsilon)$.

Portanto, $\mathcal{T}(f; \varepsilon) \subseteq \mathcal{T}(\check{f}; \varepsilon)$, ou seja, $\mathcal{T}(\check{f}; \varepsilon)$ é relativamente denso e, assim, $\check{f}$ é quase periódica.

(3) Suponha que f é quase periódica, então existe $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$ tal que $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, sabemos que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\| \|f(t + \xi)\| - \|f(t)\| \| \leq \|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Logo, $\xi \in \mathcal{T}(\|f\|; \varepsilon)$ e, portanto, $\mathcal{T}(f; \varepsilon) \subseteq \mathcal{T}(\|f\|; \varepsilon)$, ou seja, como $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ é relativamente denso, $\mathcal{T}(\|f\|; \varepsilon)$ também é relativamente denso. Assim, $\|f\|$ é quase periódica.

(4) Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ é quase periódica e que $\inf_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = m > 0$. Se $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon m^2)$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t + \xi) - g(t)| = \left| \frac{1}{f(t + \xi)} - \frac{1}{f(t)} \right| = \frac{|f(t) - f(t + \xi)|}{|f(t + \xi)||f(t)|} \leq \frac{1}{m^2} |f(t + \xi) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Logo, $\xi \in \mathcal{T}(g; \varepsilon)$. Consequentemente, $\mathcal{T}(f; \varepsilon m^2) \subset \mathcal{T}(g; \varepsilon)$ e, visto que $\mathcal{T}(f; \varepsilon m^2)$ é relativamente denso, pois f é quase periódica, $\mathcal{T}(g; \varepsilon)$ é relativamente denso.

Portanto, g é quase periódica.

(5) Defina $\bar{l}(1) = \inf \mathfrak{L}(f; 1)$. Como f é quase periódica, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, existe $\xi \in \mathcal{T}(f; 1) \cap [-t, -t + \bar{l}(1)]$. Assim, como $-t \leq \xi \leq -t + \bar{l}(1)$, temos $0 \leq t + \xi \leq \bar{l}(1)$. Consequentemente, $\|f(t + \xi)\| \leq \sup_{s \in [0, \bar{l}(1)]} \|f(s)\|$, observando que este supremo existe pois f é contínua e $[0, \bar{l}(1)]$ é compacto. Assim,

$$\|f(t)\| \leq \|f(t) - f(t + \xi)\| + \|f(t + \xi)\| \leq 1 + \sup_{s \in [0, \bar{l}(1)]} \|f(s)\|.$$

Portanto, f é limitada em $\mathbb{R}$.

(6) Suponha que f é quase periódica e seja $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$, lembrando que este supremo existe por causa da propriedade anterior. Dado $\xi \in \mathcal{T}(f; \frac{\varepsilon}{2M})$, observe que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t + \xi) - g(t) = (f(t + \xi))^2 - (f(t))^2 = f(t + \xi)[f(t + \xi) - f(t)] + f(t)[f(t + \xi) - f(t)].$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \|g(t + \xi) - g(t)\| &\leq \|f(t + \xi)\| \|f(t + \xi) - f(t)\| + \|f(t)\| \|f(t + \xi) - f(t)\| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\xi \in \mathcal{T}(g; \varepsilon)$, de onde segue que $\mathcal{T}(f; \frac{\varepsilon}{2M}) \subset \mathcal{T}(g; \varepsilon)$ e então, $\mathcal{T}(g; \varepsilon)$ é relativamente denso. Assim, concluímos que g é quase periódica.

(7) Sejam $\varepsilon > 0$ e $l \in \mathfrak{L}(f; \frac{\varepsilon}{3})$. Como o intervalo fechado $[0, l + 2]$ é compacto e f é contínua, segue que f é uniformemente contínua em $[0, l + 2]$. Dessa forma, existe δ , com $0 < \delta < 1$, tal que, para todo $t_1, t_2 \in [0, l + 2]$ com $|t_1 - t_2| < \delta$, temos $\|f(t_1) - f(t_2)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por outro lado, sejam $t', t'' \in \mathbb{R}$ tais que $|t' - t''| < \delta$. Como f é quase periódica, existe $\xi \in \mathcal{T}(f; \frac{\varepsilon}{3}) \cap [-t'+1, -t'+1+l]$, e assim, $-t'+1 \leq \xi \leq -t'+1+l$ e $\|f(t+\xi) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como $-\delta < t'' - t' < \delta$, temos $t' - \delta \leq t'' \leq t' + \delta$ e $t' - \delta + \xi \leq t'' + \xi \leq t' + \delta + \xi$.

Mas, $1 \leq t' + \xi \leq 1+l$, o que implica em $1-\delta \leq t' + \xi - \delta \leq t'' + \xi \leq t' + \xi + \delta \leq 1+l+\delta$, ou, $1 - \delta \leq t'' + \xi \leq 1 + \delta + l$. Assim, $0 \leq t'' + \xi \leq 2 + l$. Observe também que, como $1 \leq t' + \xi \leq 1 + l$, $t' + \xi \in [0, l+2]$.

Logo, como f é uniformemente contínua em $[0, l+2]$ e $|t' - t''| < \delta$, temos $\|f(t' + \xi) - f(t'' + \xi)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Então,

$$\begin{aligned} \|f(t') - f(t'')\| &\leq \|f(t') - f(t' + \xi)\| + \|f(t' + \xi) - f(t'' + \xi)\| + \|f(t'' + \xi) - f(t'')\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. ■

Observação 3.4. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ é uniformemente contínua se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $[-\delta, \delta] \subset \mathcal{T}(f; \varepsilon)$.

De fato, se f é uniformemente contínua, segue que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon$ sempre que $|t' - t''| \leq \delta$.

Agora, seja $\xi \in [-\delta, \delta]$. Então, $|\xi| < \delta$ e, pela continuidade uniforme, $\|f(t + \xi) - f(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica que $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$.

Reciprocamente, suponha que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $[-\delta, \delta] \subset \mathcal{T}(f; \varepsilon)$. Sejam $t', t'' \in \mathbb{R}$ com $|t' - t''| < \delta$. Assim, $\xi = t'' - t' \in [-\delta, \delta]$ e então, pela hipótese, $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$.

Dessa forma, $\|f(t') - f(t'')\| = \|f(t') - f(t' + \xi)\| \leq \varepsilon$ e portanto, f é uniformemente contínua.

Teorema 3.1. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções quase periódicas de $\mathbb{R}$ em E , que converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow E$. Então, f também é quase periódica.

Demonstração: Pelo fato de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para f uniformemente em $\mathbb{R}$, quando $n \rightarrow \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|f(t) - f_{n_0}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como f_{n_0} é quase periódica, dado $\xi \in \mathcal{T}(f_{n_0}; \frac{\varepsilon}{3})$, temos $\|f_{n_0}(t + \xi) - f_{n_0}(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, obtemos que

$$\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \|f(t + \xi) - f_{n_0}(t + \xi)\| + \|f_{n_0}(t + \xi) - f_{n_0}(t)\| + \|f_{n_0}(t) - f(t)\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Disso, segue que $\xi \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$. Logo, $\mathcal{T}(f_{n_0}; \frac{\varepsilon}{3}) \subset \mathcal{T}(f; \varepsilon)$, e então, como $\mathcal{T}(f_{n_0}; \frac{\varepsilon}{3})$ é relativamente denso, $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ também é relativamente denso.

Portanto, f é quase periódica. ■

Proposição 3.3. *Sejam X um espaço de Banach e $AP(X)$ o espaço das funções quase periódicas de $\mathbb{R}$ em X , com a norma $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$. Então, $(AP(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $AP(X)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n, m \geq n_0$.

Observe que, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $n, m \geq n_0$, temos

$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_n(t) - f_m(t)\| = \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.2)$$

ou seja, $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo, como X é um espaço de Banach, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ existe. Dessa forma, podemos definir uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ por $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$. Então, para provarmos esta proposição, basta mostrarmos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f na norma $\|\cdot\|_\infty$ e que $f \in AP(X)$.

Para isso, voltando na desigualdade (3.2), temos $\|f_n(t) - f_m(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n, m \geq n_0$. Assim, mantendo n fixo e fazendo $m \rightarrow +\infty$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $n \geq n_0$, obtemos

$$\|f_n(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consequentemente, para $n \geq n_0$, temos

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ou seja, $f_n \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.

Além disso, da definição de $\|\cdot\|_\infty$, concluímos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X , quando $n \rightarrow \infty$, e então, pelo fato de f_n ser quase periódica para todo $n \in \mathbb{N}$, o Teorema 3.1 nos garante que f é quase periódica.

Portanto, $(AP(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. ■

O próximo resultado estabelece uma conexão entre uma função quase periódica e sua derivada.

Teorema 3.2. (Teorema de Bochner) *Sejam X um espaço de Banach e $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica tal que sua derivada f' é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Então, f' também é quase periódica.*

Demonstração: Observe primeiramente que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a função $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida por $g(t) = f_a(t) - f(t) = f(t+a) - f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é quase periódica. De fato, para todo $\varepsilon > 0$ dado e $\xi \in \mathcal{T}(f; \frac{\varepsilon}{2})$, temos

$$\begin{aligned} \|g(t+\xi) - g(t)\| &\leq \|f(t+\xi+a) - f(t+a)\| + \|f(t+\xi) - f(t)\| \\ &= \|f((t+a)+\xi) - f(t+a)\| + \|f(t+\xi) - f(t)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que $\xi \in \mathcal{T}(g; \varepsilon)$ e então, $\mathcal{T}(f; \frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathcal{T}(g; \varepsilon)$, com $\mathcal{T}(f; \frac{\varepsilon}{2})$ relativamente denso, o que implica que $\mathcal{T}(g; \varepsilon)$ é relativamente denso, ou seja, g é quase periódica.

Mais ainda, a função $\frac{1}{a}g$ também é quase periódica para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Agora, tomemos a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Então, $(n[f(t+a_n) - f(t)])_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções quase periódicas, onde

$$f'(t) = \lim_{a_n \rightarrow 0} \left[\frac{f(t+a_n) - f(t)}{a_n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t) \right],$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, como f' é uniformemente contínua, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $\|f'(s) - f'(t)\| < \varepsilon$, sempre que $|t - s| < \delta$. Assim, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$, com $\frac{1}{n_0} < \delta$, e usando o Teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{aligned} \left\| n \left[f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t) \right] - f'(t) \right\| &= \left\| n \int_t^{t+\frac{1}{n}} [f'(\sigma) - f'(t)] d\sigma \right\| \\ &\leq n \int_t^{t+\frac{1}{n}} \|f'(\sigma) - f'(t)\| d\sigma \\ &\leq n \int_t^{t+\frac{1}{n}} \varepsilon d\sigma \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Isso significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f \left(t + \frac{1}{n} \right) - f(t) \right] = f'(t)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, ou ainda, f' é o limite uniforme de funções quase periódicas.

Portanto, pelo Teorema 3.1, obtemos que f' é uma função quase periódica. ■

Corolário 3.1. *Sejam X um espaço de Banach e $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica tal que sua segunda derivada f'' é limitada e uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Então, as derivadas f' e f'' são também quase periódicas.*

Demonstração: Inicialmente, observe que, do Teorema fundamental do cálculo, temos a igualdade

$$f'(t) - f'(s) = \int_s^t f''(\xi) d\xi,$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Assim, segue que, para todo $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\|f'(t) - f'(s)\| \leq \int_s^t \|f''(\xi)\| d\xi \leq |t - s|M,$$

onde $M = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} \|f''(\sigma)\|$, já que f'' é limitada.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ tal que, se $|t - s| < \delta$, para $t, s \in \mathbb{R}$, então

$$\|f'(t) - f'(s)\| \leq |t - s|M < \delta M = \varepsilon,$$

ou seja, f' é uniformemente contínua. Portanto, pelo Teorema de Bochner, concluímos que f' é quase periódica.

Além disso, por hipótese temos também que f'' é uniformemente contínua. Assim, visto que f' é quase periódica, novamente pelo Teorema de Bochner, obtemos que f'' é quase periódica. ■

Proposição 3.4. *Sejam X um espaço de Banach e $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica. Então, a imagem de f , $\text{Im}(f)$, é um conjunto totalmente limitado em X e com fecho compacto.*

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$ e $l \in \mathcal{L}(f; \frac{\varepsilon}{2})$. Note que a imagem de f em $[0, l]$ é compacta, pois $[0, l]$ é compacto e f é contínua, e assim, é totalmente limitada em X . Logo, existe um número finito de elementos de X , digamos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tais que, para qualquer $t \in [0, l]$, existe um $e_{i(t)} \in \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, com a propriedade que $\|f(t) - e_{i(t)}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Considere agora um número real t qualquer e seja $\xi \in \mathcal{T}(f; \frac{\varepsilon}{2}) \cap [-t, -t + l]$. Desse modo, $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $t + \xi \in [0, l]$. Assim, existe $e_j \in \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que $\|f(t + \xi) - e_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e mais,

$$\|f(t) - e_j\| \leq \|f(t) - f(t + \xi)\| + \|f(t + \xi) - e_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, a imagem de f é totalmente limitada.

Finalmente, como o fecho da imagem de f , $\overline{Im(f)}$, é fechado e X é um espaço de Banach, então $\overline{Im(f)}$ é um espaço de Banach. Além disso, $\overline{Im(f)}$ também é totalmente limitado, o que nos permite concluir que $\overline{Im(f)}$ é compacto (ver Teorema 1.4). ■

Na sequência deste capítulo vamos considerar o conceito de funções normais. Estudaremos algumas de suas propriedades e analisaremos a relação entre esta classe de funções e as funções quase periódicas.

A partir daqui, consideremos X um espaço de Banach.

Definição 3.5. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que f é uma função normal se, dada qualquer sequência de números reais $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é possível encontrar uma subsequência $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + h_{n_k})$ existe uniformemente para t em $\mathbb{R}$.*

Observação 3.5. (1) *Qualquer função normal é limitada. De fato, se f não for limitada, existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ com $\|f(t_n)\| > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, não existe subsequência $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(f(t + t_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ seja convergente quando $t = 0$, o que é uma contradição.*

(2) *A imagem de qualquer função normal é sequencialmente compacta, pois, se $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é qualquer sequência na imagem de f , então podemos extrair da sequência $(f(t + t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ uma subsequência $(f(t + t_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ que é uniformemente convergente para t em $\mathbb{R}$. Portanto, para $t = 0$, segue que $(f(t_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$.*

Proposição 3.5. *A soma e a diferença de duas funções normais ainda é uma função normal.*

Demonstração: Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$ funções normais. Então, para qualquer sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, podemos extrair uma subsequência $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de modo que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_1(t + h_{n_k})$ existe uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Digamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_1(t + h_{n_k}) = g_1(t), t \in \mathbb{R}$.

Agora, para a função f_2 , sabemos que a sequência $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(h_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f_2(t + h_{n_{k_i}})$ existe uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{i \rightarrow \infty} f_2(t + h_{n_{k_i}}) = g_2(t), t \in \mathbb{R}$.

Assim, em particular, como $(h_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ é subsequência de $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} f_1(t + h_{n_{k_i}}) = g_1(t)$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.

Logo, para toda sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, existe uma subsequência, neste caso $(h_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} (f_1 \pm f_2)(t + h_{n_{k_i}}) &= \lim_{i \rightarrow \infty} f_1(t + h_{n_{k_i}}) \pm \lim_{i \rightarrow \infty} f_2(t + h_{n_{k_i}}) \\ &= g_1(t) \pm g_2(t), \end{aligned}$$

uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $f_1 \pm f_2$ é uma função normal. ■

Proposição 3.6. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função normal. Então, $\sup_{t \geq 0} \|f(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$.*

Demonstração: Sabemos que $\sup_{t \geq 0} \|f(t)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$. Assim, para obtermos o resultado desejado, basta mostrarmos que $\|f(t_0)\| \leq \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$, para todo $t_0 < 0$.

Note inicialmente que, como f é normal, da sequência $(f(t + n))_{n \in \mathbb{N}}$, podemos extrair uma subsequência $(f(t + n_k))_{k \in \mathbb{N}}$, com $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + n_k) = g(t)$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Em particular, tomando $t = s - n_k$ na definição de limite para o limite anterior, obtemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} g(s - n_k) = f(s)$, com essa convergência sendo uniforme para $s \in \mathbb{R}$.

Agora, dado qualquer $t_0 < 0$, para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, temos $t_0 + n_k \geq 0$ para todo $k \geq k_0$. Logo, $\|f(t_0 + n_k)\| \leq \sup_{u \geq 0} \|f(u)\|$ para todo $k \geq k_0$. Consequentemente, tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$, temos $\|g(t_0)\| \leq \sup_{u \geq 0} \|f(u)\|$.

Da mesma forma, se $t_0 \geq 0$, $\|g(t_0)\| \leq \sup_{u \geq 0} \|f(u)\|$. Portanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\|g(t)\| \leq \sup_{u \geq 0} \|f(u)\|$ e assim, $\sup_{u \in \mathbb{R}} \|g(u)\| \leq \sup_{u \geq 0} \|f(u)\|$.

Consequentemente, segue que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|f(t)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|g(t - n_k)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathbb{R}} \|g(u)\| = \sup_{u \in \mathbb{R}} \|g(u)\| \leq \sup_{u \geq 0} \|f(u)\|,$$

ou seja, $\|f(t)\| \leq \sup_{u \geq 0} \|f(u)\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e então, segue o resultado. ■

Corolário 3.2. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow X$, uma sequência de funções normais tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = g(t)$, uniformemente para $t \in [0, \infty)$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = g(t)$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Como vimos anteriormente, a soma e a diferença de funções normais é uma função normal. Assim, pela proposição anterior e pelo fato de $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma sequência de Cauchy, uniformemente para $t \in [0, \infty)$, pois $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente convergente em $[0, \infty)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n_0$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f_n(t) - f_m(t)\| = \sup_{t \geq 0} \|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon$.

Logo, segue que $\|f_n(t) - f_m(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $h(t)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Desse modo, como o limite é único, segue que $g(t) = h(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, concluindo que a convergência é uniforme em $\mathbb{R}$. ■

Observação 3.6. Na proposição anterior, podemos substituir o semi eixo positivo por qualquer outro intervalo da forma $[\alpha, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, para qualquer função normal f , temos $\sup_{t \geq \alpha} \|f(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$.

Como consequência, podemos ver que:

(1) se f é uma função normal e $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, então $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, como $\sup_{t \geq A} \|f(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$, para todo $A > 0$, e $f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, $\sup_{t \geq A} \|f(t)\|$ converge para 0 quando $A \rightarrow \infty$. Então, $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| = 0$, ou seja, $f(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(2) Para uma função normal f , $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|f(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$, pois $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|f(t)\| = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sup_{t \geq A} \|f(t)\|) = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$.

Considere agora uma função normal $f : \mathbb{R} \rightarrow X$. Assim, $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, X)$, isto é, f pertence ao espaço de Banach formado por todas as funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em X , munido da norma $\|g\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\|$, $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, X)$.

Considere também o subconjunto $H(f) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, X)$ formado pelas funções $h : \mathbb{R} \rightarrow X$ que são limites uniformes em $\mathbb{R}$ de alguma sequência da forma $(f(t + \alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, este subconjunto é o fecho em $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, X)$ do conjunto de todas as translações $\{f_a : \mathbb{R} \rightarrow X; a \in \mathbb{R}\}$, com $f_a(t) = f(t + a)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, qualquer função em $H(f)$ é contínua e limitada em $\mathbb{R}$. Logo, dada qualquer função normal f e $g \in H(f)$, temos $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \alpha_n)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$.

Proposição 3.7. Para qualquer função normal f , $H(f)$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, X)$.

Demonstração: Vamos mostrar que, para qualquer sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $H(f)$, existe uma subsequência $(g_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que é convergente, uniformemente em $\mathbb{R}$, para uma função em $H(f)$.

Da definição de $H(f)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar uma sequência de números reais $(\alpha_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $g_n(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t + \alpha_n^k)$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Assim, dado um número positivo $\varepsilon > 0$, existe um número $N_{\varepsilon, n} \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq N_{\varepsilon, n}$, $\|f(t + \alpha_n^k) - g_n(t)\| < \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Tomando sucessivamente $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, temos

$$\begin{aligned} \|f(t + \alpha_n^{N_{1,n}}) - g_n(t)\| &\leq 1, t \in \mathbb{R}; \\ &\vdots \\ \|f(t + \alpha_n^{N_{\frac{1}{p}, n}}) - g_n(t)\| &\leq \frac{1}{p}, t \in \mathbb{R}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Em particular, quando $n = p \in \mathbb{N}$, obtemos $\|f(t + \alpha_p^{N_{\frac{1}{p}, p}}) - g_p(t)\| \leq \frac{1}{p}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e, usando a notação $\beta_n = \alpha_n^{N_{\frac{1}{n}, n}}$, segue que $\|f(t + \beta_n) - g_n(t)\| \leq \frac{1}{n}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Agora, pelo fato de f ser normal, seja $(\beta_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + \beta_{n_k}) = F(t)$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Logo, $F \in H(f)$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \|g_{n_k}(t) - F(t)\| &\leq \|g_{n_k}(t) - f(t + \beta_{n_k})\| + \|f(t + \beta_{n_k}) - F(t)\| \\ &\leq \frac{1}{n_k} + \|f(t + \beta_{n_k}) - F(t)\|, \end{aligned}$$

com o lado direito convergindo para zero uniformemente em $\mathbb{R}$, quando $k \rightarrow \infty$.

Portanto, $g_{n_k}(t) \rightarrow F(t)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, com $F \in H(f)$. Assim, concluímos que $H(f)$ é compacto. ■

Observação 3.7. Vale uma espécie de recíproca da proposição anterior, isto é, se $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, X)$ e $H(f)$ é um conjunto compacto em $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, X)$, então f é uma função normal. De fato, para toda sequência $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f(\cdot + \beta_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset H(f)$. Assim, denotando $g_n(t) = f(t + \beta_n)$, $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, como $H(f)$ é compacto, existe $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, subsequência de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $g_{n_k}(t) \rightarrow g(t)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, quando $k \rightarrow \infty$, para alguma função $g \in H(f)$. Logo, $f(t + \beta_{n_k}) \rightarrow g(t)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$ quando $k \rightarrow \infty$.

Portanto, f é normal.

Proposição 3.8. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow X$ tais que f é quase periódica e $g \in H(f)$. Então g é quase periódica e $H(g) = H(f)$.

Demonstração: Mostraremos primeiramente que $H(f) \subset H(g)$. Para isso, seja $f^* \in H(f)$ então, $f^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + h_n)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, para alguma sequência real $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Por outro lado, da hipótese, $g \in H(f)$ e assim, $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + k_n)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, para alguma sequência real $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$ e todo $t \in \mathbb{R}$, temos $\|f(t + h_n) - f^*(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\|f(t + k_n) - g(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Em particular, substituindo t por $s + h_n - k_n$ na segunda desigualdade, ficamos com $\|f(s + h_n) - g(s + h_n - k_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para $n \geq N$ e $s \in \mathbb{R}$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} \|g(t + h_n - k_n) - f^*(t)\| &\leq \|g(t + h_n - k_n) - f(t + h_n)\| + \|f(t + h_n) - f^*(t)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n \geq N$ e $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $f^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + h_n - k_n)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $f^* \in H(g)$ e então, $H(f) \subset H(g)$.

Para a inclusão contrária, note que, como $g \in H(f)$, $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + k_n)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, para alguma sequência $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$. Assim, tomando $t = s - k_n$, com $s \in \mathbb{R}$, na definição do limite anterior, obtemos que $f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s - k_n)$ uniformemente para $s \in \mathbb{R}$. Logo, $f \in H(g)$.

Além disso, sabemos que o limite uniforme de funções quase periódicas ainda é uma função quase periódica. Dessa forma, como $g(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t + k_n)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $f_n(t) = f(t + k_n)$, $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de funções quase periódicas, pois são translações de f , concluímos que g é quase periódica.

Portanto, usando a inclusão anterior para $f \in H(g)$ e g quase periódica, obtemos que $H(g) \subseteq H(f)$.

Consequentemente, $H(f) = H(g)$ e, como já visto, g é quase periódica. ■

Proposição 3.9. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função normal se, e somente se, o conjunto de todas as translações de f , $\{f_a : \mathbb{R} \rightarrow X; a \in \mathbb{R}\}$, com $f_a(t) = f(t + a)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é totalmente limitado em $C_b(\mathbb{R}, X)$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma quantidade finita de números reais $\{a_1, a_2, \dots, a_{N_\varepsilon}\}$, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, existe um número natural $n_a \in \{1, 2, \dots, N_\varepsilon\}$ com a seguinte propriedade: $\|f(t + a) - f(t + a_{n_a})\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Se f é normal, então $H(f)$ é compacto e assim, $H(f)$ é totalmente limitado. Mais ainda, como $H(f)$ é o fecho do conjunto das translações de f , segue que $\{f_a : \mathbb{R} \rightarrow X; a \in \mathbb{R}\}$ é totalmente limitado.

Reciprocamente, se o conjunto das translações $\{f_a : \mathbb{R} \rightarrow X; a \in \mathbb{R}\}$ é totalmente limitado, então, pelo Teorema 1.4, $H(f)$ é compacto, pois, por definição, $H(f)$ é fechado e assim, completo.

Logo, da Observação 3.7, concluímos que f é normal.

■

Teorema 3.3. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase periódica se, e somente se, é normal.*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica. Então, f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe um número positivo $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ com $|t - s| < \delta$, temos $\|f(u + t) - f(u + s)\| \leq \varepsilon$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Agora, considere $L \in \mathfrak{L}(f; \frac{\varepsilon}{2})$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > L$, e defina os números reais $a_1 = \delta, a_2 = 2\delta, \dots, a_n = n\delta$. Note que, por definição do conjunto $\mathfrak{L}(f; \frac{\varepsilon}{2})$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, existe um número $\xi \in [-a, -a + L] \cap \mathcal{T}(f; \frac{\varepsilon}{2})$. Dessa forma, $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e também $0 \leq \xi + a \leq L$.

Além disso, existe um número natural $m = m(a)$, entre 1 e n , tal que $\xi + a \in [m\delta, (m + 1)\delta]$. Assim, temos $|a_m - (\xi + a)| \leq \delta$ e, consequentemente, pela continuidade uniforme de f ,

$$\|f(t + a_m) - f(t + \xi + a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|f(t + a_m) - f(t + a)\| &\leq \|f(t + a_m) - f(t + \xi + a)\| + \|f(t + \xi + a) - f(t + a)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, o conjunto das translações $\{f_a : \mathbb{R} \rightarrow X; a \in \mathbb{R}\}$ é totalmente limitado.

Portanto, pela proposição anterior, segue que f é normal.

Reciprocamente, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função normal. Assim, pela proposição anterior, o conjunto das translações de f , $\{f_a : \mathbb{R} \rightarrow X; a \in \mathbb{R}\}$ é totalmente limitado. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existem números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que, para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $i(a) \in \{1, 2, \dots, n\}$ de maneira que a desigualdade $\|f(t + a) - f(t + a_{i(a)})\| \leq \varepsilon$ é válida para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso é equivalente a dizer que a desigualdade $\|f(s) - f(s - a + a_{i(a)})\| \leq \varepsilon$ é válida para todo $s \in \mathbb{R}$.

Agora, defina $L = \max\{|a_i|; i = 1, 2, \dots, n\}$. Disso, segue que $a - L \leq a - a_{i(a)} \leq a + L$ e assim, como $\|f(s) - f(s + a - a_{i(a)})\| \leq \varepsilon$ para todo $s \in \mathbb{R}$, $a - a_{i(a)} \in \mathcal{T}(f; \varepsilon)$. Portanto, $\mathcal{T}(f; \varepsilon)$ é $2L$ -denso na reta real, ou seja, f é quase periódica.

■

Corolário 3.3. *A soma e a diferença de duas funções quase periódicas, é também quase periódica.*

Demonstração: Como acabamos de provar, toda função quase periódica é uma função normal. Então, pela Proposição 3.5, sabemos que a soma e a diferença dessas funções também é uma função normal, o que é equivalente a ser quase periódica. ■

Corolário 3.4. *Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow X$ quase periódicas e dado qualquer $\varepsilon > 0$, o conjunto $\mathcal{T}(f; \varepsilon) \cap \mathcal{T}(g; \varepsilon)$ é relativamente denso na reta real.*

Demonstração: Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow X \times X$ definida por $F(t) = (f(t), g(t))$, com $\|F(t)\|_{X \times X} = \|f(t)\| + \|g(t)\|$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como f é uma função normal, dada uma sequência qualquer de números reais $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + h_{n_k})$ existe e é uniforme para $t \in \mathbb{R}$. Além disso, visto que g também é uma função normal, tomando, em particular, a sequência $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, obtemos uma subsequência $(h_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ de modo que $\lim_{i \rightarrow \infty} g(t + h_{n_{k_i}})$ existe e é uniforme para $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, já que $(h_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ ainda é subsequência de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obtemos que $\lim_{i \rightarrow \infty} f(t + h_{n_{k_i}})$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} g(t + h_{n_{k_i}})$ existem uniformemente para $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, para qualquer sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(h_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} F(t + h_{n_{k_i}}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (f(t + h_{n_{k_i}}), g(t + h_{n_{k_i}}))$ existe uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, F é normal e assim, quase periódica. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $\mathcal{T}(F, \varepsilon)$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$.

Agora, para $\xi \in \mathcal{T}(F, \varepsilon)$, temos

$$\|f(t + \xi) - f(t)\| + \|g(t + \xi) - g(t)\| = \|F(t + \xi) - F(t)\| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

ou seja, $\|f(t + \xi) - f(t)\| \leq \varepsilon$ e $\|g(t + \xi) - g(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\xi \in \mathcal{T}(f, \varepsilon) \cap \mathcal{T}(g, \varepsilon)$ e então, $\mathcal{T}(F, \varepsilon) \subset \mathcal{T}(f, \varepsilon) \cap \mathcal{T}(g, \varepsilon)$. Portanto, visto que $\mathcal{T}(F, \varepsilon)$ é relativamente denso, $\mathcal{T}(f, \varepsilon) \cap \mathcal{T}(g, \varepsilon)$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$. ■

Observação 3.8. *Os corolários anteriores podem ser estendidos para qualquer soma finita de funções quase periódicas, de onde obtemos que séries uniformemente convergentes em $\mathbb{R}$, da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$, onde $a_n \in X, \lambda_n, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, são quase periódicas.*

De fato, sabemos que cada termo $a_n e^{i\lambda_n t} = a_n(\cos \lambda_n t + i \sin \lambda_n t)$ é quase periódico. Assim, $s_k = \sum_{n=1}^k a_n e^{i\lambda_n t}$ é quase periódica. Logo, como $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n e^{i\lambda_n t} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$, uniformemente em $\mathbb{R}$, e o limite uniforme de funções quase periódicas é uma função quase periódica, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ é quase periódica.

Proposição 3.10. *Se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase periódica e a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow K$, para $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, também é quase periódica, então $\varphi f : \mathbb{R} \rightarrow X$, com $(\varphi f)(t) = \varphi(t)f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é quase periódica.*

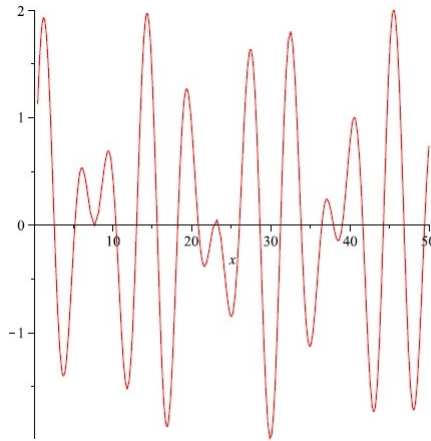
Demonstração: Como φ e f são quase periódicas, φ e f são funções normais. Assim, dada a sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, existem subsequências $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(h_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(h_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tais que os limites $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + h_{n_k})$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t + h_{n_{k_i}})$ existem uniformemente em $\mathbb{R}$.

Portanto, para toda sequência de números reais $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(h_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} (\varphi f)(t + h_{n_{k_i}}) = \lim_{i \rightarrow \infty} [\varphi(t + h_{n_{k_i}})f(t + h_{n_{k_i}})]$ existe uniformemente em $\mathbb{R}$. Logo, a função φf é normal e assim, quase periódica. ■

Finalizamos este capítulo com uma série de exemplos de funções quase periódicas.

Exemplo 3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \sin t + \sin(t\sqrt{2})$. Então, f não é periódica, mas é quase periódica.*

Podemos observar, pelo gráfico de f , que esta função não é periódica.



Agora, seja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Observe que:

- $(\sin(s_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset [-1, 1];$
- $(\cos(s_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset [-1, 1];$
- $(\sin(s_n\sqrt{2}))_{n \in \mathbb{N}} \subset [-1, 1];$
- $(\cos(s_n\sqrt{2}))_{n \in \mathbb{N}} \subset [-1, 1].$

Assim, como $[-1, 1]$ é um conjunto compacto, segue que:

- Existe uma subsequência $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(\sin(s_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente, ou seja, $(\sin(s_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$;
- Existe uma subsequência $(s_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $(\cos(s_{n_{k_j}}))_{j \in \mathbb{N}}$ é convergente, ou seja, $(\cos(s_{n_{k_j}}))_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$;
- Existe uma subsequência $(s_{n_{k_{j_i}}})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(s_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $(\sin(s_{n_{k_{j_i}}} \sqrt{2}))_{i \in \mathbb{N}}$ é convergente, ou seja, $(\sin(s_{n_{k_{j_i}}} \sqrt{2}))_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$;
- Existe uma subsequência $(s_{n_{k_{j_{ip}}}})_{p \in \mathbb{N}}$ de $(s_{n_{k_{j_i}}})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $(\cos(s_{n_{k_{j_{ip}}} \sqrt{2}}))_{p \in \mathbb{N}}$ é convergente, ou seja, $(\cos(s_{n_{k_{j_{ip}}} \sqrt{2}}))_{p \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Denote $s_{n_{k_{j_{ip}}}} = \beta_p$, com $p \in \mathbb{N}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, para a subsequência $(\beta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtemos que:

- Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sin(\beta_p) - \sin(\beta_m)\| < \frac{\varepsilon}{4}$, para todo $p, m \geq n_1$;
- Existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\cos(\beta_p) - \cos(\beta_m)\| < \frac{\varepsilon}{4}$, para todo $p, m \geq n_2$;
- Existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sin(\beta_p \sqrt{2}) - \sin(\beta_m \sqrt{2})\| < \frac{\varepsilon}{4}$, para todo $p, m \geq n_3$;
- Existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\cos(\beta_p \sqrt{2}) - \cos(\beta_m \sqrt{2})\| < \frac{\varepsilon}{4}$, para todo $p, m \geq n_4$.

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$. Logo, segue que, para todo $p, m \geq n_0$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|f(t + \beta_p) - f(t + \beta_m)\| &= \|\sin(t + \beta_p) + \sin[(t + \beta_p)\sqrt{2}] - \sin(t + \beta_m) - \sin[(t + \beta_m)\sqrt{2}]\| \\
&\leq \|\sin(t + \beta_p) - \sin(t + \beta_m)\| \\
&\quad + \|\sin[(t + \beta_p)\sqrt{2}] - \sin[(t + \beta_m)\sqrt{2}]\| \\
&\leq \|\sin(t)\| \|\cos(\beta_p) - \cos(\beta_m)\| \\
&\quad + \|\cos(t)\| \|\sin(\beta_p) - \sin(\beta_m)\| \\
&\quad + \|\sin(t\sqrt{2})\| \|\cos(\beta_p \sqrt{2}) - \cos(\beta_m \sqrt{2})\| \\
&\quad + \|\cos(t\sqrt{2})\| \|\sin(\beta_p \sqrt{2}) - \sin(\beta_m \sqrt{2})\| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja, $(f(t + \beta_p))_{p \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto, o $\lim_{p \rightarrow \infty} f(t + \beta_p)$ existe. Observe ainda que a desigualdade acima independe da escolha de t em $\mathbb{R}$ e então, obtemos que o limite $\lim_{p \rightarrow \infty} f(t + \beta_p)$ existe uniformemente para t em $\mathbb{R}$. Dessa forma, f é uma função normal e, então, concluímos que f é uma função quase periódica.

Exemplo 3.3. *Sejam X um espaço de Banach, $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em X e $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ uma função tal que $G_x : \mathbb{R} \rightarrow X$, dada por $t \mapsto G(t)x$, é quase periódica para todo $x \in X$ fixado. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função quase periódica, então a função $Gf : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase periódica.*

De fato, como G_x é quase periódica, sabemos que G_x é limitada. Assim, existe $M_x > 0$ tal que $\|G(t)x\| \leq M_x$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de onde segue que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|G(t)x\| \leq M_x$, para todo $x \in X$. Portanto, pelo Princípio da limitação uniforme, concluímos que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty$.

Agora, dado $t \in \mathbb{R}$, consideremos uma sequência de números reais $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n \rightarrow t$, quando $n \rightarrow \infty$. Observe que

$$\|G(t_n)f(t_n) - G(t)f(t)\| \leq \|G(t_n)\| \|f(t_n) - f(t)\| + \|G(t_n)f(t) - G(t)f(t)\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desse modo, como f e G_x são contínuas, para qualquer que seja $x \in X$ fixo, o lado direito da desigualdade acima converge para zero quando $n \rightarrow \infty$ e então, segue que Gf é uma função contínua em t , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Além disso, como f é quase periódica, a Proposição 3.4 nos garante que sua imagem, isto é, $\text{Im}(f) = \{f(t); t \in \mathbb{R}\}$, é um conjunto totalmente limitado em X . Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_\varepsilon}\} \subset X$, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que $\text{Im}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(x_i, \varepsilon)$, onde $B(x_i, \varepsilon)$ é a bola aberta de centro em x_i e raio ε em X .

Por fim, consideremos o conjunto de funções quase periódicas $\{G_{x_1}, G_{x_2}, \dots, G_{x_{N_\varepsilon}}, f\}$. Logo, para cada G_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$, e f , existem $\mathcal{T}_i(\varepsilon) = \mathcal{T}(G_{x_i}; \varepsilon)$ e $\mathcal{T}_f(\varepsilon) = \mathcal{T}(f; \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$, conjuntos relativamente densos em $\mathbb{R}$, e então, pela Observação 3.8, o conjunto $\mathcal{T}_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{N_\varepsilon} \mathcal{T}_i(\varepsilon) \cap \mathcal{T}_f(\varepsilon)$ é também relativamente denso em $\mathbb{R}$. Disso, segue que para todo $\xi \in \mathcal{T}_\varepsilon$ e $j = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|G(t + \xi)x_j - G(t)x_j\| < \varepsilon \text{ e } \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + \xi) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Dessa forma, fixando $t \in \mathbb{R}$ e escolhendo x_j tal que $\|f(t) - x_j\| < \varepsilon$, dado qualquer $\xi \in \mathcal{T}_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} \|G(t + \xi)f(t + \xi) - G(t)f(t)\| &\leq \|G(t + \xi)[f(t + \xi) - f(t)]\| + \|G(t + \xi)f(t) - G(t)f(t)\| \\ &\leq L\varepsilon + \|G(t + \xi)[f(t) - x_j]\| + \|G(t + \xi)x_j - G(t)x_j\| \\ &\quad + \|G(t)[x_j - f(t)]\| \\ &\leq L\varepsilon + L\varepsilon + \varepsilon + L\varepsilon \\ &= 3L\varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

onde $L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$.

Consequentemente, como a desigualdade acima é válida para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|G(t + \xi)f(t + \xi) - G(t)f(t)\| \leq 3L\varepsilon + \varepsilon,$$

para todo $\xi \in \mathcal{T}_\varepsilon$, isto é, $\xi \in \mathcal{T}(Gf; \varepsilon)$. Então, $\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}(Gf; \varepsilon)$, com $\mathcal{T}_\varepsilon$ sendo um conjunto relativamente denso, garantindo assim que $\mathcal{T}(Gf; \varepsilon)$ é relativamente denso.

Portanto, Gf é quase periódica.

Exemplo 3.4. Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e considere um operador linear $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, tal que $(Ah, k) = -(h, Ak)$, para todo $h, k \in D(A)$. Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow H$ uma função continuamente diferenciável tal que $u(t) \in D(A)$ e $u'(t) = Au(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se a imagem de u , $\{u(t); t \in \mathbb{R}\}$, tem fecho compacto em H , então a função u é quase periódica.

De fato, se v é qualquer solução da equação $v'(t) = Av(t)$ em $\mathbb{R}$ e se $\phi(t) = \|v(t)\|^2$, vemos que $\phi'(t)$ existe e é igual a $(v'(t), v(t)) + (v(t), v'(t)) = (Av(t), v(t)) + (v(t), Av(t)) = -(v, Av) + (v, Av) = 0$. Assim, $\phi(t)$ é constante e $\|v(t)\|^2 = \|v(0)\|^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sabemos que se u é solução de $u'(t) = Au(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então as translações $u(\cdot + \sigma_1)$ e $u(\cdot + \sigma_2)$ também são soluções desta equação, para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$. Mais ainda, a diferença $[u(\cdot + \sigma_1) - u(\cdot + \sigma_2)]$ também é solução de $u'(t) = Au(t)$, para todo $t, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$. Então, tomando $v = u(\cdot + \sigma_1) - u(\cdot + \sigma_2)$ no parágrafo anterior, obtemos

$$\|u(t + \sigma_1) - u(t + \sigma_2)\| = \|u(\sigma_1) - u(\sigma_2)\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Agora, dada uma sequência de números reais $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se $g_n = u(\beta_n)$, $n \in \mathbb{N}$, então $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\overline{\{u(t); t \in \mathbb{R}\}}$, que é compacto. Assim, existe uma subsequência $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que é convergente. Logo, $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g_{n_k} - g_{n_j}\| < \varepsilon$, para todo $k, j \geq n_0$. Dessa forma, usando a igualdade anterior, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|u(t + \beta_{n_k}) - u(t + \beta_{n_j})\| = \|u(\beta_{n_k}) - u(\beta_{n_j})\| = \|g_{n_k} - g_{n_j}\| < \varepsilon,$$

para todo $k, j \geq n_0$.

Portanto, $(u(t + \beta_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, como H é completo, $(u(t + \beta_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. Observe ainda que a convergência acima é uniforme para t em $\mathbb{R}$, o que implica que u é uma função normal e então, quase periódica.

Exemplo 3.5. Seja X um espaço de Banach e considere um C_0 -grupo de operadores lineares limitados de X em X , $(G(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Assuma que, para algum $x \in X, x \neq 0$, a função $t \mapsto G(t)x$ é quase periódica. Então $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|G(t)x\| > 0$.

De fato, suponha que $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|G(t)x\| = 0$. Então existe uma sequência de números reais $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|G(\alpha_n)x\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Considere a função $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ dada por $u(t) = G(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, que é quase periódica. Então, como $(G(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo, $u(t + \alpha_n) = G(t)G(\alpha_n)x$. Além disso, pelo fato de u ser uma função normal, existe uma subsequência $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $u(t + \alpha_{n_k}) \rightarrow v(t)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, quando $k \rightarrow \infty$, ou seja, $G(t)G(\alpha_{n_k})x \rightarrow v(t)$ uniformemente para $t \in \mathbb{R}$, quando $k \rightarrow \infty$. Logo, $G(\alpha_{n_k})x \rightarrow G(-t)v(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $\|G(\alpha_{n_k})x\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Assim, $\|G(-t)v(t)\| = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica que $v(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Finalmente, sabemos que $u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(t - \alpha_{n_k})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $u(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, $x = Ix = G(0)x = u(0) = 0$, o que contradiz a hipótese.

Portanto, $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|G(t)x\| > 0$.

Exemplo 3.6. Considere uma solução $u(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, da equação do calor $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$. Se $u(x, t)$ é contínua e limitada em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, com $M > 0$ tal que $|u(x, t)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, e $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}} f(\xi) d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é quase periódica, então, para qualquer $t_0 > 0$ fixo, a função $x \mapsto u(x, t_0)$ é também quase periódica.

De fato, por uma mudança de variável, obtemos a igualdade

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{4t}} f(x - s) ds$$

e assim, dado $\varepsilon > 0$, se λ é um ε -quase período de f , temos

$$\begin{aligned} |u(x + \lambda, t_0) - u(x, t_0)| &= \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{4t_0}} [f(x + \lambda - s) - f(x - s)] ds \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{4t_0}} |f(x + \lambda - s) - f(x - s)| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi t_0}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{4t_0}} ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi t_0}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{t_0}}} \\ &\leq \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, $x \mapsto u(x, t_0)$ é quase periódica.

Exemplo 3.7. Considere a solução regular $u(x, t)$ em $\mathbb{R}^2$ da equação da onda $u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$. Se $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds.$$

Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são quase periódicas, então, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto u(x, t_0)$ é quase periódica.

Pra provarmos este fato, observamos inicialmente que a soma das funções translações $f(x+t_0) + f(x-t_0)$, $x \in \mathbb{R}$ é quase periódica. Agora, considere

$$H_{t_0}(x) = \int_{x-t_0}^{x+t_0} g(s) ds = \int_{-t_0}^{t_0} g(x+s) ds, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, se λ é um ε -quase período de g , temos

$$|H_{t_0}(x+\lambda) - H_{t_0}(x)| \leq \int_{-t_0}^{t_0} |g(x+\lambda+s) - g(x+s)| ds \leq 2t_0\varepsilon.$$

Assim, segue que H_{t_0} é quase periódica e, como $f(\cdot+t_0) + f(\cdot-t_0)$ é quase periódica, $x \mapsto u(x, t_0)$ é quase periódica.

Exemplo 3.8. Sejam X um espaço de Banach, Ω um subconjunto de X e $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto X$ uma função contínua. Suponha que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $L = L(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $\xi \in [a, a+L]$ com a propriedade $\|f(x, t+\xi) - f(x, t)\| \leq \varepsilon$, para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, isto é, temos quase periodicidade com respeito a t , uniformemente em Ω . Se Ω é compacto em X , então f é limitada em $\Omega \times \mathbb{R}$.

De fato, como f é contínua, f é limitada sobre o conjunto compacto $\Omega \times [0, L]$. Agora, considere $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = 1$ e $\xi \in [-t, -t+L]$ tal que a propriedade da hipótese é válida, ou seja, $\|f(x, t+\xi) - f(x, t)\| \leq 1$, para todo $x \in \Omega$. Logo, $0 \leq t+\xi \leq L$ e

$$\|f(x, t)\| \leq \|f(x, t) - f(x, t+\xi)\| + \|f(x, t+\xi)\| \leq 1 + \sup_{\Omega \times [0, L]} \|f(x, s)\|,$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, f é limitada em $\Omega \times \mathbb{R}$.

Exemplo 3.9. Sejam X um espaço de Banach e $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica. Então, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, a função $F_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida por $F_\gamma(t) = \int_t^{t+\gamma} f(s) ds$ é também quase periódica.

De fato, por uma mudança de variável, temos $F_\gamma(t) = \int_0^\gamma f(\sigma+t) d\sigma$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, considere $\xi \in \mathcal{T}\left(f; \frac{\varepsilon}{|\gamma|}\right)$, isto é, ξ é um $\frac{\varepsilon}{|\gamma|}$ -quase período de f . Então, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} \|F_\gamma(t + \xi) - F_\gamma(t)\| &= \left\| \int_0^\gamma [f(\sigma + t + \xi) - f(\sigma + t)] d\sigma \right\| \\ &\leq \int_0^\gamma \|f(\sigma + t + \xi) - f(\sigma + t)\| d\sigma \\ &\leq |\gamma| \frac{\varepsilon}{|\gamma|} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é, $\xi \in \mathcal{T}(F_\gamma; \varepsilon)$.

Portanto, como $\mathcal{T}\left(f; \frac{\varepsilon}{|\gamma|}\right)$ é relativamente denso e $\mathcal{T}\left(f; \frac{\varepsilon}{|\gamma|}\right) \subset \mathcal{T}(F_\gamma; \varepsilon)$, concluimos que F_γ é quase periódica.

Problema de Cauchy abstrato

Neste capítulo vamos estudar formas de se obter soluções para certos problemas envolvendo equações diferenciais. Consideremos inicialmente o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e procuramos por uma função $u = u(x, t)$ que seja uma solução do problema (4.1) no sentido da definição a seguir.

Definição 4.1. *Uma função $u(x, t)$ é uma solução clássica de (4.1) se as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial x}$ existem e são contínuas em todo ponto (x, t) de seu domínio e (4.1) é satisfeita pontualmente.*

Note que a função $u(x, t)$ dada por

$$u(x, t) = g(x + t), \text{ com } x > 0 \text{ e } t \geq 0,$$

será uma solução clássica de (4.1) quando g for uma função continuamente diferenciável.

Porém, se g não é continuamente diferenciável mas é, por exemplo, contínua ou localmente integrável, será que podemos considerar um conceito mais fraco de solução?

Para responder a esta pergunta, consideremos $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x > 0, t > 0\}$ e o conjunto de funções testes $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ é suave e possui suporte compacto}\}$. Assim, se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, φ possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens em Ω , e também, existem números reais a, b, c, d , com $0 < a < b < +\infty$ e $0 < c < d < +\infty$, tais que $\varphi(x, t) = 0$ para $(x, t) \in \Omega \setminus [a, b] \times [c, d]$.

Considere ainda uma função u localmente integrável em Ω . Então,

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{c_1}^{d_1} |u(x, t)| dx dt < +\infty$$

para todo retângulo fechado $[a_1, b_1] \times [c_1, d_1] \subset \Omega$.

Logo, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, a integral

$$\int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x, t) dx dt$$

existe, já que esta integral é, essencialmente, a integral sobre $[a, b] \times [c, d]$, para a, b, c, d apropriados, dependendo de φ . Além disso, temos

$$\left| \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x, t) dx dt \right| \leq M \int_a^b \int_c^d |u(x, t)| dx dt < +\infty,$$

onde $M = \sup_{[a, b] \times [c, d]} |\varphi(x, t)| < +\infty$.

Agora, defina um funcional linear $\tilde{u}$, de $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$, do seguinte modo

$$(\tilde{u}, \varphi) = \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x, t) dx dt,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Então, $\tilde{u}$ é uma distribuição, ou seja, $\tilde{u}$ é uma transformação linear contínua do espaço das funções testes nos números complexos. Assim, $\tilde{u}$ é infinitamente diferenciável.

Logo, podemos definir distribuições $D_t \tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $D_x \tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial x}$ por

$$(D_t \tilde{u}, \varphi) = \left(\tilde{u}, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = - \int_{\Omega} u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}),$$

e

$$(D_x \tilde{u}, \varphi) = \left(\tilde{u}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = - \int_{\Omega} u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dx dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}).$$

Dizemos que u satisfaz a equação $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ no sentido fraco, ou de distribuição, se $D_t \tilde{u} = D_x \tilde{u}$, isto é, se as expressões anteriores são iguais para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Uma função u nessas condições será chamada de solução fraca, ou solução no sentido de distribuição, de (4.1).

Dessa maneira, supondo que g é apenas localmente integrável em $(0, +\infty)$, com $\int_{\alpha}^{\beta} |g(y)| dy < +\infty$ sempre que $0 < \alpha < \beta < +\infty$, então, $u(x, t) = g(x + t)$ satisfaz $u(x, 0) = g(x)$ e é uma solução fraca de $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$. De fato, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ com suporte contido em $[a, b] \times [c, d]$ e considere $\alpha = a + c$ e $\beta = b + d$. Defina G em $(0, +\infty)$ por

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, $G \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R})$, ou seja, G é integrável em $(0, +\infty)$, pois $\int_0^\infty |G(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} |g(y)| dy < +\infty$.

Por outro lado, pelo Teorema 1.2, $C_0^\infty((0, +\infty), \mathbb{R})$ é denso em $L^1((0, +\infty), \mathbb{R})$ e então, podemos encontrar uma sequência $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty((0, +\infty), \mathbb{R})$ tal que

$$\|G - G_n\|_{L^1} = \int_0^\infty |G(v) - G_n(v)| dv \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Em particular, tomando g_n como a restrição de G_n ao intervalo (α, β) , para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\int_\alpha^\beta |g(v) - g_n(v)| dv = \int_\alpha^\beta |G(v) - G_n(v)| dv \leq \int_0^\infty |G(v) - G_n(v)| dv,$$

o que implica que $\int_\alpha^\beta |g(v) - g_n(v)| dv \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, para $x > 0$ e $t \geq 0$, seja $u_n(x, t) = G_n(x + t)$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos

$$\left(\tilde{u} - \tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = - \int_\Omega [u(x, t) - u_n(x, t)] \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx dt.$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned} \left| \left(\tilde{u} - \tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right| &\leq \int_c^d \int_a^b |G(x + t) - G_n(x + t)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right| dx dt \\ &\leq K \int_c^d \int_a^b |G(x + t) - G_n(x + t)| dx dt \\ &= K \int_c^d \left(\int_{a+t}^{b+t} |G(v) - G_n(v)| dv \right) dt \\ &\leq K \int_c^d \left(\int_{a+c}^{b+d} |G(v) - G_n(v)| dv \right) dt \\ &= K(d - c) \int_\alpha^\beta |g(v) - g_n(v)| dv, \end{aligned}$$

onde $K = \sup_{(x,t) \in [a,b] \times [c,d]} \left\{ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \right| \right\}$. Consequentemente, quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\left| \left(\tilde{u} - \tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right| \rightarrow 0.$$

$$\text{Logo, } \left(\tilde{u}, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

$$\text{Analogamente, prova-se que } \left(\tilde{u}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Por fim, como g_n é suave em (α, β) , integrando a expressão da distribuição por partes, segue que

$$\left(\tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = - \int_a^b \left(\int_c^d g_n(x + t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt \right) dx$$

$$= - \int_a^b \left([g_n(x+t)\varphi(x,t)]_c^d - \int_c^d g'_n(x+t)\varphi(x,t)dt \right) dx,$$

pois $\alpha = a + c \leq x + t \leq b + d = \beta$.

Sabemos ainda que o suporte de φ está contido em $[a, b] \times [c, d]$. Assim, temos

$$\left(\tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \int_a^b \int_c^d g'_n(x+t)\varphi(x,t)dt dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De modo semelhante, mostra-se que

$$\left(\tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \int_a^b \int_c^d g'_n(x+t)\varphi(x,t)dt dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, temos $\left(\tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \left(\tilde{u}_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(D_t \tilde{u}, \varphi) = (D_x \tilde{u}, \varphi)$, com $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ arbitrário, o que nos permite concluir que, como distribuições, $D_t \tilde{u} = D_x \tilde{u}$, ou seja, u é uma solução fraca de (4.1).

Até agora pensamos em $u(x, t)$ como uma função nas variáveis x e t , com $x > 0$ e $t \geq 0$. Porém, fixando $t \geq 0$, podemos definir uma função u_t da seguinte forma: $u_t(x) = u(x, t)$, com $x > 0$.

Logo, $\{u_t\}_{t \geq 0}$ é uma família de funções com variável x e assim, podemos pensar em uma função u que associa, a cada $t \geq 0$, uma função u_t desta família, ou seja, $u(t) = u_t$. Logo, u aplica $[0, \infty)$ em uma certa classe de funções, que podemos assumir pertencer a um espaço de Banach, tal como o espaço $(C([0, +\infty), \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, das funções contínuas de $[0, \infty)$ em $\mathbb{R}$, ou $(L^p((0, +\infty), \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, das funções p -integráveis de $(0, +\infty)$ em $\mathbb{R}$.

Desta maneira, a equação $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ pode ser interpretada da seguinte maneira: no lado direito podemos fixar t e podemos pensar em $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ como Au_t , onde A é o operador derivada aplicado à função fixa u_t . No lado esquerdo, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ pode ser interpretado como a derivada com respeito ao parâmetro t da aplicação $u : [0, \infty) \rightarrow X$ dada por $u(t) = u_t$, onde X é um espaço de Banach apropriado. Já a condição inicial $u(x, 0) = g(x)$ agora, se torna $u(0) = g$, que podemos denotar por u_0 .

Portanto, estudar o problema (4.1) é o mesmo que estudar equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ é um operador linear apropriado, $u_0 \in X$ é dado e queremos encontrar $u : [0, \infty) \rightarrow X$.

A equação $u' = Au$ é um exemplo de equação de evolução e a igualdade $u(0) = u_0$ é a condição inicial. Assim, por causa de sua conexão com as equações diferenciais parciais, diremos que a equação (4.2) define um problema de Cauchy abstrato, que iremos denotar por PCA.

Também, podemos generalizar a equação (4.2) do seguinte modo

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $f : (0, \infty) \rightarrow X$ é uma função dada.

Na sequência, vamos definir quando uma função $u : [0, \infty) \rightarrow X$ é uma solução de (4.2), ou (4.3), e vamos estudar alguns resultados de existência de soluções para essas equações.

Definição 4.2. *Sejam X um espaço de Banach complexo, $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear e $u_0 \in X$. Uma função $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ é solução (solução clássica) de (4.2), ou (4.3), se:*

- (a) u é contínua em $[0, +\infty)$;
- (b) u é continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$;
- (c) $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$;
- (d) as equações em (4.2), ou (4.3), são satisfeitas.

A seguir, apresentamos um resultado de existência de solução para o PCA (4.2).

Teorema 4.1. *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 - semigrupo de operadores lineares limitados em X e A o seu gerador infinitesimal. Se $u_0 \in D(A)$, então o PCA (4.2) possui somente uma solução u , com*

$$u(t) = T(t)u_0, \quad t \geq 0.$$

Em particular, quando A é limitado, $u(t) = e^{tA}u_0$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Seja $u(t) = T(t)u_0$, $t \geq 0$. Então, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 - semigrupo, segue que u é contínua e mais, como $u_0 \in D(A)$, u é diferenciável, com $u'(t) = AT(t)u_0 = Au(t)$. Logo, u é solução de (4.2).

Agora, seja u uma solução qualquer de (4.2). Logo, para $0 < s < t$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[T(t-s)u(s)] &= T(t-s)u'(s) - T(t-s)Au(s) \\ &= T(t-s)[u'(s) - Au(s)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema fundamental do cálculo, integrando de 0 a t , com relação a s , em ambos os lados da equação acima, obtemos que $u(t) - T(t)u_0 = 0$, ou seja,

$$u(t) = T(t)u_0.$$

O caso particular ocorre pois, pelo Corolário 2.1, $T(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$.

■

Para os próximos resultados vamos assumir que o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Além disso, pelo que fizemos no Capítulo 2, sabemos que existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.

Teorema 4.2. *Sejam $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ convergindo para a função nula na norma de X e u_n , $n \in \mathbb{N}$, a única solução do PCA*

$$\begin{cases} u'_n(t) = Au_n(t), & t > 0, \\ u_n(0) = g_n. \end{cases}$$

Então, a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero em qualquer intervalo da forma $[0, t_0]$, com $t_0 > 0$.

Demonstração: A existência e a unicidade de u_n é garantida pelo Teorema 4.1, com $u_n(t) = T(t)g_n$ para $t \geq 0$.

Em particular, para $0 \leq t \leq t_0$, temos

$$\|u_n(t)\| \leq \|T(t)\| \|g_n\| \leq Me^{\omega t} \|g_n\| \leq Me^{\omega t_0} \|g_n\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, como a sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a função nula, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N$, temos

$$\|g_n\| < \frac{\varepsilon}{Me^{\omega t_0}}.$$

Portanto, para todo $n \geq N$ e $t \in [0, t_0]$, segue que

$$\|u_n(t)\| \leq Me^{\omega t_0} \|g_n\| < \varepsilon,$$

ou seja, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para 0 em qualquer intervalo da forma $[0, t_0]$.

■

Corolário 4.1. *Dados $g_n, g \in D(A)$, $n \in \mathbb{N}$, sejam u_n , $n \in \mathbb{N}$, e u soluções do PCA (4.2) com condições iniciais g_n e g , respectivamente. Se $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para g quando $n \rightarrow \infty$, então $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para u quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, essa convergência é uniforme em intervalos da forma $[0, t_0]$, com $t_0 > 0$.*

Demonstração: Defina $G_n = g_n - g$ e $U_n = u_n - u$, $n \in \mathbb{N}$. Como $D(A)$ é um espaço vetorial, $G_n \in D(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, por linearidade, U_n é a única solução do PCA (4.2) com condição inicial G_n .

Mais ainda, observe que G_n converge para zero quando $n \rightarrow \infty$. Assim, pelo Teorema 4.2, U_n converge para zero, uniformemente em qualquer intervalo da forma $[0, t_0]$. Consequentemente, segue que u_n converge uniformemente para u em qualquer intervalo da forma $[0, t_0]$. ■

Proposição 4.1. *Sejam $f \in L^1([0, \tau], X)$, $\tau > 0$ e $u_0 \in X$. Então, a equação (4.3) tem no máximo uma solução clássica. Além disso, essa solução, quando existe, é dada por*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0. \quad (4.4)$$

Demonstração: Suponhamos que o problema (4.3) tenha uma solução clássica u . Fixando $t \geq 0$, defina a função $g : [0, t] \rightarrow X$ por $g(s) = T(t-s)u(s)$. Assim, segue que g é diferenciável, com

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{d}{ds}T(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Além disso, por hipótese, $f \in L^1([0, \tau], X)$ e então, a função $s \mapsto T(t-s)f(s)$ é integrável. Logo, aplicando o Teorema fundamental do cálculo, obtemos que

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s)ds = \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

ou seja,

$$u(t) - T(t)u_0 = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Portanto, temos

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \geq 0.$$
■

A expressão (4.4) e a situação apresentada no início deste capítulo motivam a definição de um conceito mais fraco de solução para a equação (4.3), como apresentado a seguir.

Definição 4.3. A função $u \in C([0, +\infty), X)$ definida em (4.4) é chamada solução fraca de (4.3) em $[0, +\infty)$.

Podemos observar, pela expressão (4.4), que (4.3) sempre possui uma solução fraca, para todo $u_0 \in X$. No próximo teorema iremos mostrar quando essa solução fraca também é uma solução clássica.

Teorema 4.3. Sejam $f \in L^1([0, +\infty), X) \cap C((0, +\infty), X)$ e $y(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$, $t \geq 0$. Então, o problema de valor inicial (4.3) terá solução clássica u em $[0, +\infty)$, para todo $u_0 \in D(A)$, se uma das seguintes condições for satisfeita:

- (i) y é continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$;
- (ii) $y(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e a função $t \mapsto Ay(t)$ é contínua em $(0, +\infty)$.

Reciprocamente, se (4.3) possui uma solução clássica em $[0, +\infty)$ para algum $u_0 \in D(A)$, então y satisfaz as condições (i) e (ii) acima.

Demonstração: Primeiramente, vamos estabelecer a recíproca do teorema.

Seja u uma solução clássica de (4.3) para algum $u_0 \in D(A)$. Assim, pela Proposição 4.1, temos $y(t) = u(t) - T(t)u_0$ para todo $t \geq 0$ e então, y é diferenciável em $(0, +\infty)$, já que y é a diferença de duas funções diferenciáveis. Mais ainda,

$$y'(t) = u'(t) - T(t)Au_0,$$

isto é, y' é uma função contínua em $(0, +\infty)$, visto ser a diferença de duas funções contínuas. Logo, a condição (i) é satisfeita.

Para provarmos a condição (ii) note que, como $u_0 \in D(A)$, os resultados da teoria de semigrupos nos garantem que $T(t)u_0 \in D(A)$ para todo $t \geq 0$. Além disso, visto que u é solução clássica de (4.3), temos $u(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$. Consequentemente, pelo fato de $y(t) = u(t) - T(t)u_0 \in D(A)$ ser um espaço vetorial, segue que $y(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$.

Mais ainda,

$$Ay(t) = Au(t) - AT(t)u_0 = u'(t) - f(t) - T(t)Au_0, \quad \forall t \geq 0,$$

de onde segue que a função $t \mapsto Ay(t)$ é contínua em $(0, +\infty)$. Portanto, (ii) também é satisfeita.

Agora, suponha que a condição (i) seja satisfeita e mostremos que o problema (4.3) possui uma solução clássica.

Para isso, sejam $t > 0$ e $h > 0$. Observe que

$$\frac{T(h) - I}{h}y(t) = \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right] \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\
&= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds = f(t)$, para todo $t \geq 0$. De fato, para $s \in [t, t+h]$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - f(t) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(t)ds \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)[f(s) - f(t)]ds \right\| \\
&\quad + \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [T(t+h-s)f(t) - T(0)f(t)]ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)\| \|f(s) - f(t)\| ds \\
&\quad + \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s)f(t) - T(0)f(t)\| ds \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} M e^{\omega(t+h-s)} \|f(s) - f(t)\| ds \\
&\quad + \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s)f(t) - T(0)f(t)\| ds \\
&\leq \frac{M e^{\omega(t+h)}}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\| ds \\
&\quad + \frac{1}{h} \int_0^h \|T(s)f(t) - T(0)f(t)\| ds.
\end{aligned}$$

Dessa forma, como as funções f e $s \mapsto T(s)f(t)$ são contínuas, elas são uniformemente contínuas em intervalos fechados. Em particular, elas são uniformemente contínuas em $[0, a]$, para algum $a > t$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(t) - f(s)\| < \frac{\varepsilon}{2M e^{\omega a}} \quad \text{e} \quad \|T(s)f(t) - T(0)f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sempre que $0 < h < \delta$ e $t+h < a$.

Consequentemente, nas condições acima, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - f(t) \right\| &\leq \frac{Me^{\omega(t+h)}}{h} \int_t^{t+h} \frac{\varepsilon}{2Me^{\omega a}} ds + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\varepsilon}{2} ds \\ &\leq \frac{Me^{\omega a}}{h} \frac{\varepsilon}{2Me^{\omega a}} (t+h-t) + \frac{1}{h} h \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds = f(t)$. Portanto, segue que $\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} y(t) = y'(t) - f(t)$, o que nos mostra que $y(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e

$$Ay(t) = y'(t) - f(t).$$

Logo, tomando $u(t) = T(t)u_0 + y(t)$, para $t \geq 0$, podemos concluir que u é contínua em $[0, +\infty)$, u é continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, +\infty)$, $u(0) = u_0 + y(0) = u_0$ e $u'(t) = AT(t)u_0 + y'(t) = A(T(t)u_0 + y(t)) + f(t) = Au(t) + f(t)$, para todo $t \in (0, +\infty)$, isto é, u é solução clássica de (4.3) em $[0, +\infty)$.

Por fim, suponha que a condição (ii) é válida. Novamente mostremos que o problema (4.3) possui uma solução clássica.

Já estabelecemos, no caso anterior, a seguinte igualdade

$$\frac{T(h) - I}{h} y(t) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, como $y(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$, fazendo $h \rightarrow 0$ à direita na expressão acima, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} y(t) + \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\ &= Ay(t) + f(t), \end{aligned}$$

isto é, a derivada à direita de y , $D^+y(t)$, é igual a $Ay(t) + f(t)$ e portanto, é contínua em $(0, +\infty)$. Além disso, pelo Lema de Dini, segue que y é continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$. Desta forma, procedendo como no caso anterior, concluímos que a função $u : [0, \infty) \mapsto X$, definida por $u(t) = T(t)u_0 + y(t)$, $t \geq 0$, é solução clássica do problema de valor inicial (4.3). ■

Agora, vamos estudar o problema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais abstratas que podem ser escritas da forma

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(u(t), t), & t > 0, \\ u(0) = x \in X, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, X é um espaço de Banach e $f : X \times [0, +\infty) \rightarrow X$ é uma função contínua.

Definição 4.4. Dizemos que $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ é uma solução (solução clássica) de (4.5) em $[0, +\infty)$ se:

- (i) u é contínua em $[0, +\infty)$;
- (ii) u é continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$;
- (iii) $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, +\infty)$;
- (iv) u satisfaz as equações de (4.5).

Além disso, procedendo como no problema de Cauchy estudado inicialmente, se u é solução clássica de (4.5) em $[0, +\infty)$, então podemos mostrar que u satisfaz a equação integral

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(u(s), s)ds, \quad t \in [0, +\infty). \quad (4.6)$$

Observe que se u satisfaz a equação integral (4.6), então u é contínua. Mas, não podemos garantir que u seja continuamente diferenciável. Isso nos leva a uma definição mais fraca de solução para (4.5).

Definição 4.5. Dizemos que $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ é uma solução fraca de (4.5) se u satisfaz a equação integral (4.6).

Definição 4.6. Seja $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é uniformemente lipschitziana com relação a primeira variável se, para todo $x_1, x_2 \in X$ e todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

para algum $L > 0$.

O próximo resultado nos fornece condições para que o problema de valor inicial (4.5) possua uma solução fraca.

Teorema 4.4. Sejam A o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ e $f : X \times [0, +\infty) \rightarrow X$ uma função contínua e uniformemente lipschitziana com relação a primeira variável com $L > 0$ a constante de Lipschitz. Então, o problema de valor inicial (4.5) possui uma única solução fraca em $[0, +\infty)$.

Demonstração: Do Teorema 2.3 existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{t\omega}, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Vamos provar este teorema para um intervalo $[0, \tau]$, onde $\tau > 0$ é um número real positivo qualquer. Logo, pela unicidade de solução, obtemos uma solução única em $[0, +\infty)$.

Seja $\tau > 0$ e considere o espaço $\mathcal{C}([0, \tau], X)$ das funções contínuas de $[0, \tau]$ em X , com a norma

$$\|u\|_{\tilde{L}} = \max_{t \in [0, \tau]} \{e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \|u(t)\|\},$$

com $u \in \mathcal{C}([0, \tau], X)$ e $\tilde{L} > ML > 0$.

Mostraremos, primeiramente, que a norma $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_{\infty}$, onde $\|u\|_{\infty} = \max_{t \in [0, \tau]} \{\|u(t)\|\}$, com $u \in \mathcal{C}([0, \tau], X)$. Para isso, note que, como a função $t \mapsto e^{-(\tilde{L}+\omega)t}$ é decrescente para $t \in [0, \tau]$,

$$e^{-(\tilde{L}+\omega)\tau} \|u(t)\| \leq e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \|u(t)\| \leq \|u(t)\|, \text{ para todo } t \in [0, \tau].$$

Logo, segue que

$$\max_{t \in [0, \tau]} \{e^{-(\tilde{L}+\omega)\tau} \|u(t)\|\} \leq \max_{t \in [0, \tau]} \{e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \|u(t)\|\} \leq \max_{t \in [0, \tau]} \{\|u(t)\|\},$$

ou seja,

$$e^{-(\tilde{L}+\omega)\tau} \|u\|_{\infty} \leq \|u\|_{\tilde{L}} \leq \|u\|_{\infty}.$$

Portanto, as normas $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$ e $\|\cdot\|_{\infty}$ são equivalentes e assim, $\mathcal{C}([0, \tau], X)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$.

Agora, considere o operador $S : \mathcal{C}([0, \tau], X) \rightarrow \mathcal{C}([0, \tau], X)$ dado por

$$Su(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(u(s), s)ds, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Observe que, dado $u \in \mathcal{C}([0, \tau], X)$, a função $s \mapsto f(u(s), s)$ é contínua em $[0, \tau]$ e logo, integrável em $[0, t]$, para todo $t \in (0, \tau]$. Assim, concluímos que a função $t \mapsto \int_0^t T(t-s)f(u(s), s)ds$ é contínua em $[0, \tau]$. Além disso, como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, $t \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, \tau]$, e então, Su é uma função contínua de $[0, \tau]$ em X . Portanto, S está bem definido.

Mostraremos também que S é uma contração. Para isso, dados $u, v \in \mathcal{C}([0, \tau], X)$ e $t \in [0, \tau]$, note que

$$\begin{aligned} \|Su(t) - Sv(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)[f(u(s), s) - f(v(s), s)]ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(u(s), s) - f(v(s), s)\| ds. \end{aligned}$$

Disso, segue que, para todo $t \in [0, \tau]$,

$$e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \|Su(t) - Sv(t)\| \leq e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(u(s), s) - f(v(s), s)\| ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \int_0^t M e^{(t-s)\omega} L \|u(s) - v(s)\| ds \\
&= e^{-(\tilde{L}+\omega)t} M L e^{t\omega} \int_0^t e^{-s\omega} \|u(s) - v(s)\| ds \\
&= M L e^{-\tilde{L}t} \int_0^t e^{-s\omega} e^{(\tilde{L}+\omega)s} e^{-(\tilde{L}+\omega)s} \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq M L e^{-\tilde{L}t} \|u - v\|_{\tilde{L}} \int_0^t e^{-s\omega} e^{(\tilde{L}+\omega)s} ds \\
&= M L e^{-\tilde{L}t} \left(\frac{e^{\tilde{L}t}}{\tilde{L}} - \frac{1}{\tilde{L}} \right) \|u - v\|_{\tilde{L}} \\
&= \frac{M L}{\tilde{L}} (1 - e^{-\tilde{L}t}) \|u - v\|_{\tilde{L}} \\
&\leq \frac{M L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\max_{t \in [0, \tau]} \{e^{-(\tilde{L}+\omega)t} \|Su(t) - Sv(t)\|\} \leq \frac{M L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}},$$

isto é,

$$\|Su - Sv\|_{\tilde{L}} \leq \frac{M L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}},$$

com $\frac{M L}{\tilde{L}} < 1$, pois $\tilde{L} > M L$.

Portanto, S é uma contração e assim, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, S tem um único ponto fixo $u \in \mathcal{C}([0, \tau], X)$, ou seja, existe uma única função contínua $u : [0, \tau] \rightarrow X$ tal que

$$u(t) = Su(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(u(s), s)ds, \text{ para todo } t \in [0, \tau].$$

Dessa forma, concluímos que o problema de valor inicial (4.5) possui uma única solução fraca. ■

Existência de soluções quase periódicas para equações diferenciais abstratas

Ao longo deste capítulo vamos considerar X um espaço de Banach, $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo exponencialmente estável e A seu gerador infinitesimal.

Nosso objetivo aqui é estabelecer uma solução fraca quase periódica para a equação diferencial não linear abstrata dada por

$$u'(t) = Au(t) + f(u(t), t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

onde $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função apropriada.

Para isso, precisamos de algumas definições e propriedades básicas.

Proposição 5.1. *Sejam $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ funções contínuas em $\mathbb{R}$. Se f é uniformemente lipschitziana com relação a primeira variável, então a função $t \mapsto f(\varphi(t), t)$ também é contínua.*

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $L > 0$ a constante de Lipschitz de f . Como φ é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 = \delta_1(a, \varepsilon) > 0$ tal que, se $|t - a| < \delta_1$, então $\|\varphi(t) - \varphi(a)\| < \frac{\varepsilon}{2L}$.

Além disso, como f é contínua em $\mathbb{R}$, existe $\delta_2 = \delta_2(a, \varepsilon) > 0$ tal que, se $|t - a| < \delta_2$, então $\|f(\varphi(a), t) - f(\varphi(a), a)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $|t - a| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \|f(\varphi(t), t) - f(\varphi(a), a)\| &\leq \|f(\varphi(t), t) - f(\varphi(a), t)\| + \|f(\varphi(a), t) - f(\varphi(a), a)\| \\ &\leq L\|\varphi(t) - \varphi(a)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< L\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, a função $t \mapsto f(\varphi(t), t)$ é contínua em a , para todo $a \in \mathbb{R}$.

Portanto, segue o resultado. ■

Agora, tomando como base o Capítulo 4, estabelecemos a definição a seguir.

Definição 5.1. *Uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução fraca em $\mathbb{R}$ para a equação diferencial (5.1) se a equação integral*

$$u(t) = T(t-a)u(a) + \int_a^t T(t-s)f(u(s), s)ds \quad (5.2)$$

é satisfeita para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $t \geq a$.

Lema 5.1. *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função quase periódica. Então existe uma, e somente uma, função quase periódica v , satisfazendo a relação*

$$v(t) = T(t-a)v(a) + \int_a^t T(t-s)g(s)ds, \quad (5.3)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $t \geq a$.

Demonstração: Sejam v_1 e v_2 duas funções que satisfazem a equação (5.3) e considere a função $\omega : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida por $\omega(t) = v_1(t) - v_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Assim, $\omega(t) = T(t-a)v_1(a) - T(t-a)v_2(a) = T(t-a)\omega(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ e $t \geq a$, ou seja, ω é uma solução fraca para a equação homogênea $u'(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Observe que ω é limitada pois,

$$\sup_{t \geq a} \|\omega(t)\| \leq \sup_{t \geq a} \|T(t-a)\| \|\omega(a)\| \leq \|\omega(a)\| \sup_{t \geq a} Me^{\beta t} < +\infty.$$

Mais ainda, $\omega(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, dado $t \in \mathbb{R}$ e tomando uma sequência de números reais $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n < t$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$, temos $\omega(t) = T(t-t_n)\omega(t_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\|\omega(t)\| \leq \|T(t-t_n)\| \|\omega(t_n)\| \leq M \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\omega(t)\| \right) e^{[\beta(t-t_n)]},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, tomando o limite na expressão acima quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que $\|\omega(t)\|$ tende a zero, isto é, $\omega(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, existe uma única função v satisfazendo a equação integral (5.3).

Mostraremos agora a existência de uma função quase periódica que satisfaz (5.3).

Para isso, seja $v(t) = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^t T(t-s)g(s)ds$, com $t \in \mathbb{R}$ e $t \geq R$.

Primeiramente, observe que v está bem definida pois,

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \left\| \int_R^t T(t-s)g(s)ds \right\| \\
&\leq \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^t \|T(t-s)\| \|g(s)\| ds \\
&\leq \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^t M e^{\beta(t-s)} \|g\|_\infty ds \\
&= \lim_{R \rightarrow -\infty} \left[M \|g\|_\infty e^{\beta t} \left(\frac{e^{-\beta s}}{-\beta} \Big|_R^t \right) \right] \\
&= \frac{M}{|\beta|} \|g\|_\infty - \frac{M}{|\beta|} \|g\|_\infty e^{\beta t} \lim_{R \rightarrow -\infty} e^{-\beta R} \\
&= \frac{M}{|\beta|} \|g\|_\infty < +\infty,
\end{aligned}$$

onde $\|g\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|g(s)\| < +\infty$ já que g é quase periódica.

Na sequência, provaremos que $v : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função quase periódica que satisfaz a limitação

$$\|v(t)\| \leq \frac{M}{|\beta|} \|g\|_\infty, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, como g é quase periódica, existe um número $l = l(\varepsilon) > 0$ de modo que, para todo intervalo real de comprimento l , existe ξ tal que $\|g(t+\xi) - g(t)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, dado $R < 0$, defina $u_R : [R, +\infty) \rightarrow X$ por

$$u_R(t) = \int_R^t T(t-s)g(s)ds, \quad t \geq R.$$

Então, para $t \geq R$,

$$\begin{aligned}
u_R(t+\xi) - u_R(t) &= \int_R^{t+\xi} T(t+\xi-s)g(s)ds - \int_R^t T(t-s)g(s)ds \\
&= \int_{R-\xi}^t T(t-s)g(s+\xi)ds - \int_R^t T(t-s)g(s)ds \\
&= \int_{R-\xi}^R T(t-s)g(s+\xi)ds + \int_R^t T(t-s)g(s+\xi)ds \\
&\quad - \int_R^t T(t-s)g(s)ds \\
&= \int_{R-\xi}^R T(t-s)g(s+\xi)ds + \int_R^t T(t-s)[g(s+\xi) - g(s)]ds
\end{aligned}$$

$$= I_1 + I_2.$$

Analisando as integrais I_1 e I_2 separadamente, observe que

$$\begin{aligned} \|I_1\| &= \left\| \int_{R-\xi}^R T(t-s)g(s+\xi)ds \right\| \\ &\leq M\|g\|_{\infty} e^{\beta t} \int_{R-\xi}^R e^{-\beta s} ds \\ &= M\|g\|_{\infty} e^{\beta t} \frac{1}{|\beta|} (e^{-\beta R} - e^{-\beta(R-\xi)}) \\ &\leq \frac{M\|g\|_{\infty}}{|\beta|} e^{\beta(t-R)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|I_2\| &= \left\| \int_R^t T(t-s)[g(s+\xi) - g(s)]ds \right\| \\ &\leq \int_R^t \|T(t-s)\| \|g(s+\xi) - g(s)\| ds \\ &\leq \int_R^t [M e^{\beta(t-s)} \varepsilon] ds \\ &= M e^{\beta t} \varepsilon \int_R^t e^{-\beta s} ds \\ &= M e^{\beta t} \varepsilon \frac{1}{|\beta|} (e^{-\beta t} - e^{-\beta R}) \\ &\leq \frac{M\varepsilon}{|\beta|}. \end{aligned}$$

Logo, segue que $\|u_R(t+\xi) - u_R(t)\| \leq \frac{M\|g\|_{\infty}}{|\beta|} e^{\beta(t-R)} + \frac{M\varepsilon}{|\beta|}$, para todo $t \geq R$.

Portanto, dados $t \in \mathbb{R}$ e $R < t$, temos

$$\begin{aligned} \|v(t+\xi) - v(t)\| &= \left\| \lim_{R \rightarrow -\infty} u_R(t+\xi) - \lim_{R \rightarrow -\infty} u_R(t) \right\| \\ &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \|u_R(t+\xi) - u_R(t)\| \\ &\leq \lim_{R \rightarrow -\infty} \left(\frac{M\|g\|_{\infty}}{|\beta|} e^{\beta(t-R)} + \frac{M\varepsilon}{|\beta|} \right) \\ &= \frac{M\varepsilon}{|\beta|}. \end{aligned}$$

Assim, tomando qualquer $\varepsilon' > 0$ e escolhendo ε tal que $\frac{M\varepsilon}{|\beta|} < \varepsilon'$, segue que $\|v(t+\xi) - v(t)\| < \varepsilon'$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, v é uma função quase periódica.

Basta mostrarmos agora que v satisfaz a relação (5.3).

Tome $a \in \mathbb{R}$ qualquer e $t \geq a$. Como $v(a) = \int_{-\infty}^a T(a-s)g(s)ds$, segue que

$$T(t-a)v(a) = \int_{-\infty}^a T(t-a)T(a-s)g(s)ds = \int_{-\infty}^a T(t-s)g(s)ds.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} T(t-a)v(a) + \int_a^t T(t-s)g(s)ds &= \int_{-\infty}^a T(t-s)g(s)ds + \int_a^t T(t-s)g(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^t T(t-s)g(s)ds \\ &= v(t). \end{aligned}$$

Portanto, existe uma, e somente uma, função quase periódica v satisfazendo

$$v(t) = T(t-a)v(a) + \int_a^t T(t-s)g(s)ds,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $t \geq a$.

■

Para estabelecermos o objetivo deste capítulo, precisamos de uma definição e alguns resultados, onde $C_b(\mathbb{R}, X)$ denotará o conjunto das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em X .

Teorema 5.1. (Teorema de Lyusternik) *Sejam $C_b(\mathbb{R}, X)$ o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas e $AP(X)$ o subespaço de $C_b(\mathbb{R}, X)$ consistindo das funções quase periódicas. Um conjunto $M \subset AP(X)$ é compacto se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) *Para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ fixo, o conjunto $E_{t_0} = \{f(t_0); f \in M\} \subset X$ é compacto;*
- (ii) *O conjunto M é equicontínuo, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|f(t') - f(t'')\| < \varepsilon$ sempre que $|t' - t''| < \delta$, para toda $f \in M$;*
- (iii) *O conjunto M é equiquase periódico, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe um $l = l(\varepsilon) > 0$ tal que todo intervalo $(\alpha, \alpha + l) \subset \mathbb{R}$ contém um ε -quase período comum para toda $f \in M$.*

A prova do Teorema 5.1 pode ser encontrada em [17, página 7].

A seguir, apresentamos o conceito de função quase periódica para uma função de duas variáveis.

Definição 5.2. Dizemos que a função contínua $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ é uniformemente quase periódica se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo subconjunto compacto $K \subset X$, existe um conjunto relativamente denso $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ tal que $\|f(x, t + \xi) - f(x, t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathcal{T}$ e $x \in K$, ou seja, o conjunto $\bigcap_{x \in K} \mathcal{T}(\varepsilon, f(x, \cdot))$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$.

Proposição 5.2. Seja $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função uniformemente quase periódica. Se K é qualquer subconjunto compacto de X , então a família de funções quase periódicas $\{f(x, \cdot)\}_{x \in K}$ é uma família relativamente compacta em $C_b(\mathbb{R}, X)$.

Demonstração: Para mostrarmos este fato, vamos usar o Teorema de Lyusternik. Dessa forma, seja $M = \{f(x, \cdot)\}_{x \in K}$ e fixe $t_0 \in \mathbb{R}$. Observe que o conjunto $E_{t_0} = \{f(x, t_0)\}_{x \in K}$ é a imagem do conjunto compacto $K \times \{t_0\}$ pela função contínua f e, por isso, ele é compacto em X . Assim, a condição (i) do Teorema de Lyusternik é satisfeita.

Agora, vamos mostrar que M é equiquase periódico. Isso ocorre pois, como f é uniformemente quase periódica, o conjunto $\bigcap_{x \in K} \mathcal{T}(\varepsilon, f(x, \cdot))$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$ para todo $\varepsilon > 0$ e assim, existe $l = l(\varepsilon, K) > 0$ tal que todo intervalo da forma $(\alpha, \alpha + l)$ possui um ε -quase período ξ .

Logo, $\|f(x, t + \xi) - f(x, t)\| < \varepsilon$, para todo $x \in K$ e todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, ξ é um ε -quase período comum a toda função de M . Consequentemente, M é equiquase periódico, satisfazendo a condição (iii) do Teorema de Lyusternik.

Por último, mostraremos que M é equicontínuo. Para isso, usando que $\mathcal{T} = \bigcap_{x \in K} \mathcal{T}(\varepsilon, f(x, \cdot))$ é relativamente denso para todo $\varepsilon > 0$, seja $l' = l'(\varepsilon, K) > 0$ tal que existe $\xi \in [-t, -t + l'] \cap \mathcal{T}$, para todo $t \in \mathcal{T}$. Assim, $0 \leq t + \xi \leq l'$ e $\|f(x, t) - f(x, t + \xi)\| < \frac{\varepsilon}{9}$, para todo $x \in K$.

Em seguida, vamos provar que, fixando $t \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto f(x, t)$ é uniformemente contínua em K .

Para isso, observe primeiramente que, como f é contínua e $K \times [0, l']$ é compacto, f é uniformemente contínua em $K \times [0, l']$. Logo, existe $\delta > 0$ de modo que, se $x, y \in K$ e $\|x - y\| < \delta$, então $\|f(x, s) - f(y, s)\| < \frac{\varepsilon}{9}$, para todo $0 \leq s \leq l'$.

Assim, dado $t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in K$, com $\|x - y\| < \delta$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(x, t) - f(y, t)\| &\leq \|f(x, t) - f(x, t + \xi)\| + \|f(x, t + \xi) - f(y, t + \xi)\| \\ &\quad + \|f(y, t + \xi) - f(y, t)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, dado $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ é uma função uniformemente contínua em K . Observe ainda que a escolha de δ independe de t .

Sabemos também que K é compacto e então, totalmente limitado. Dessa forma, existe um subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset K$, $n \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $y \in K$, $\|y - x_i\| < \delta$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Além disso, tomemos a família finita de funções quase periódicas, e assim, uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$, $\{f(x_1, \cdot), f(x_2, \cdot), \dots, f(x_n, \cdot)\}$. Logo, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e todo $t', t'' \in \mathbb{R}$, existe $\delta_i > 0$, tal que, se $|t' - t''| < \delta_i$, então $\|f(x_i, t') - f(x_i, t'')\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Em particular, se $\rho = \min\{\delta_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ então, para todo $t', t'' \in \mathbb{R}$ com $|t' - t''| < \rho$, temos $\|f(x_i, t') - f(x_i, t'')\| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Por fim, dado $y \in K$, tome $x_i \in K$ tal que $\|x_i - y\| < \delta$. Assim, para $|t' - t''| < \rho$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|f(y, t') - f(y, t'')\| &\leq \|f(y, t') - f(x_i, t')\| + \|f(x_i, t') - f(x_i, t'')\| + \|f(x_i, t'') - f(y, t'')\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

o que nos mostra que o conjunto $\{f(x, \cdot)\}_{x \in K}$ é equicontínuo, ou seja, a condição (ii) do Teorema de Lyusternik é satisfeita.

Portanto, a família $\{f(x, \cdot)\}_{x \in K}$ é relativamente compacta em $C_b(\mathbb{R}, X)$. ■

No próximo resultado, mostraremos que certa composição de funções quase periódicas também é uma função quase periódica.

Proposição 5.3. *Seja $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função uniformemente quase periódica. Se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função quase periódica, então a função composta $t \mapsto f(\varphi(t), t)$, de $\mathbb{R}$ em X , é também quase periódica.*

Demonstração: Sabemos que, como φ é quase periódica, então o fecho de sua imagem, $K = \overline{Im\varphi}$, é um conjunto compacto em X . Assim, pela proposição anterior, a família de funções $\{f(x, \cdot)\}_{x \in K}$ é relativamente compacta em $C_b(\mathbb{R}, X)$.

Além disso, se adicionarmos apenas um elemento a $\{f(x, \cdot)\}_{x \in K}$, isto é, se tomarmos o conjunto de funções quase periódicas $\{f(x, \cdot)\}_{x \in K} \cup \{\varphi\}$, ainda teremos um conjunto relativamente compacto em $C_b(\mathbb{R}, X)$.

Logo, pelo item (iii) do Teorema de Lyusternik, o conjunto $\mathcal{T}_1 = \bigcap_{x \in K} \mathcal{T}(\varepsilon', f(x, \cdot)) \cap \mathcal{T}(\varepsilon', \varphi)$ é relativamente denso na reta real para qualquer que seja $\varepsilon' > 0$.

Por outro lado, como provamos na proposição anterior, fixado $t \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto f(x, t)$ é uniformemente contínua em K . Desse modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (independente de t) tal que, se $x, y \in K$ e $\|x - y\| < \delta$, então $\|f(x, t) - f(y, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Agora, tomando $\varepsilon' = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \delta \right\}$ na definição de $\mathcal{T}_1$ e usando as propriedades do capítulo 3, sobre os conjuntos de ε' -quase períodos, encontramos $l = l(\varepsilon') > 0$ tal que, em todo intervalo de comprimento l da reta real, existe $\xi \in \left[\bigcap_{x \in K} \mathcal{T} \left(\frac{\varepsilon}{3}, f(x, \cdot) \right) \right] \cup \mathcal{T}(\delta, \varphi)$.

Dessa forma, para $\xi \in \left[\bigcap_{x \in K} \mathcal{T} \left(\frac{\varepsilon}{3}, f(x, \cdot) \right) \right] \cup \mathcal{T}(\delta, \varphi)$, temos

$$\|f(x, t + \xi) - f(x, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e

$$\|\varphi(t + \xi) - \varphi(t)\| < \delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in K$.

Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$ e ξ como acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(\varphi(t + \xi), t + \xi) - f(\varphi(t), t)\| &\leq \|f(\varphi(t + \xi), t + \xi) - f(\varphi(t), t + \xi)\| \\ &\quad + \|f(\varphi(t), t + \xi) - f(\varphi(t), t)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a função composta $t \mapsto f(\varphi(t), t)$ é quase periódica. ■

Agora temos as condições necessárias para exibir uma solução fraca quase periódica para a equação diferencial (5.1), como pode ser visto no próximo resultado.

Teorema 5.2. *Seja $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função uniformemente quase periódica e uniformemente lipschitziana com relação a primeira variável, com constante de Lipschitz $L > 0$ suficientemente pequena. Então, existe uma, e somente uma, solução fraca quase periódica para a equação diferencial (5.1).*

Demonstração: Por hipótese, f é uniformemente quase periódica e assim, pela Proposição 5.3, para toda função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$ quase periódica, a função composta $t \mapsto f(\varphi(t), t)$, de $\mathbb{R}$ em X , também é quase periódica.

Dessa forma, podemos considerar a aplicação $T : AP(X) \rightarrow AP(X)$ dada por

$$T\varphi = u,$$

onde u é a solução fraca da equação diferencial $u'(t) = Au(t) + f(\varphi(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$. Observe que a função u existe, pertence a $AP(X)$ e satisfaz a relação (5.3) por causa do Lema 5.1, com $g(t) = f(\varphi(t), t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, segue que a aplicação T está bem definida. Mostremos também que, quando a constante de Lipschitz L é suficientemente pequena, T é uma contração. Para isso, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in AP(X)$ e $t \in \mathbb{R}$, e observe que, pela demonstração do Lema 5.1,

$$(T\varphi_i)(t) = u_i(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)f(\varphi_i(s), s)ds, \quad i = 1, 2.$$

Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)[f(\varphi_1(s), s) - f(\varphi_2(s), s)]ds$$

e então, segue que

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|L\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|ds \\ &\leq ML \left(\int_{-\infty}^t e^{\beta(t-s)}ds \right) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \frac{ML}{|\beta|} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty},$$

garantindo que T é uma contração quando $L < \frac{|\beta|}{M}$.

Portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, T possui um único ponto fixo em $AP(X)$. Seja $v \in AP(X)$ este ponto fixo. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$v(t) = (Tv)(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)f(v(s), s)ds.$$

Em particular, para $a \in \mathbb{R}$,

$$v(a) = \int_{-\infty}^a T(a-s)f(v(s), s)ds$$

e, desse modo, para $t \geq a$, temos

$$\begin{aligned} T(t-a)v(a) &+ \int_a^t T(t-s)f(v(s), s)ds \\ &= T(t-a) \int_{-\infty}^a T(a-s)f(v(s), s)ds + \int_a^t T(t-s)f(v(s), s)ds \\ &= \int_{-\infty}^a T(t-s)f(v(s), s)ds + \int_a^t T(t-s)f(v(s), s)ds \\ &= \int_{-\infty}^t T(t-s)f(v(s), s)ds \end{aligned}$$

$$= v(t),$$

o que significa que v é solução fraca de (5.1), com v sendo única e quase periódica, ou seja, existe uma, e somente uma, solução fraca quase periódica da equação diferencial (5.1).

■

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAHAJ, M.; SIDKI, O. *Almost periodic solutions of semilinear equations with analytic semigroups in Banach spaces*. Electron. J. Differential Equations, Vol 2002, No. 98, 1–11, 2002.
- [2] BARTLE, G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons. Inc., 1995.
- [3] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equation*. Springer, 2010.
- [4] DE ANDRADE, B. *Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução*. Tese (Doutorado em Matemática)-Programa de Pós-Graduação em Matemática-PPGM, UFPE, 2010.
- [5] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J. T. *Linear operators*. Interscience Publishers, INC., New York, 1958.
- [6] FURUMOCHI, T.; NAITO, T.; VAN MINH, N. *Boundedness and Almost Periodicity of Solutions of Partial Functional Differential Equations*. Journal of Differential Equations, 180, 125-152, 2002.
- [7] GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução. 2ª ed.*, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2012.
- [8] HENRÍQUEZ, H. R. *Asymptotically almost periodic solutions of abstract differential equations*. J. Math. Anal. Appl., 160, 157-175, 1991.
- [9] HENRÍQUEZ, H. R. *Periodic solutions of quasi-linear partial functional differential equations with unbounded delay*. Funk. Ekvac., 37, 329-343, 1994.
- [10] HENRÍQUEZ, H.; CASTILLO, G. *Almost-periodic solutions for a second order abstract Cauchy problem*. Acta Math. Hungar., 106 (1-2), 27-39, 2005.
- [11] HENRÍQUEZ, H. R.; VÁSQUEZ, C. H. *Almost Periodic Solutions of Abstract Retarded Functional Differential Equations with Unbounded Delay*. Acta Applicandae Mathematicae, 57, 105-132, 1999.

- [12] HERNÁNDEZ, E. *A Massera type criterion for a partial neutral functional differential equation*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002, No. 40, 1-17, 2002.
- [13] HERNÁNDEZ, E.; HENRÍQUEZ, H. *Existence of periodic solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay*. J. Math. Anal. Appl., 221, no. 2, 499-522, 1998.
- [14] HERNÁNDEZ, E.; PELICER, M. *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for partial neutral differential equations*. Applied Mathematics Letters, 18, 1265-1272, 2005.
- [15] HERNÁNDEZ, E.; PELICER, M. L.; SANTOS, J. P. C. *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for a class of evolution equations*. Electron. J. Diff. Eqns., 61, 1-15, 2004.
- [16] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons. Inc., 1989.
- [17] LEVITAN, B.M.; ZHIKOV, V.V. *Almost periodic functions and differential equations*. Cambridge University Press. Cambridge, London, New York 1982.
- [18] MASSERA, J. L. *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*. Duke Math. J., 17, 457-475, 1950.
- [19] MUNKRES, J. R. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [20] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied mathematical sciences; v. 44. Springer-Verlag, New York, Inc., 1983.
- [21] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. McGraw Hill, 1991.
- [22] ZAIDMAN, S. *Almost-periodic functions in abstract spaces*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1985.
- [23] ZAIDMAN, S. *A non-linear abstract differential equation with almost-periodic solution*. Rivista di Matematica della Università di Parma (4) 10, 331-336, 1984.
- [24] ZHANG, C. *Pseudo almost periodic solutions of some differential equation*. J. Math. Anal. Appl., 181, 67-76, 1994.