

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

SABRINA CAROLINA FERREIRA

**DINÂMICA DE ROTAÇÃO DE SATÉLITES NATURAIS: OS CASOS DE
PHOBOS, ENCELADUS E GANIMEDES**

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO - SP

2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Sabrina Carolina Ferreira

Dinâmica de Rotação de Satélites Naturais: os
casos de Phobos, Enceladus e Ganimedes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: prof. Dr. Nelson Callegari Júnior

Rio Claro – SP

2021

F383d

Ferreira, Sabrina Carolina

Dinâmica de Rotação de Satélites Naturais : os casos de Phobos,
Enceladus e Ganimedes / Sabrina Carolina Ferreira. -- Rio Claro, 2022
89 f. : il., tabs., fotos, mapas

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Nelson Callegari Júnior

1. Astronomia. 2. Mecânica Celeste. 3. Problema dos dois corpos. I.
Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Sabrina Carolina Ferreira

Dinâmica de Rotação de Satélites Naturais: os
casos de Phobos, Enceladus e Ganimedes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física Aplicada.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Profa. Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

Conceito: Aprovada

Rio Claro, SP 30 de novembro de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente os meus pais e minha irmã, por todo o apoio dado em todos os aspectos, por terem me guiado durante toda a minha vida, por todo o amor em nossa família.

Ao meu orientador prof. Dr. Nelson Callegari Jr., por todos os conselhos, por todo o suporte, pela confiança e principalmente pela paciência. Este trabalho não existiria se não fosse a sua imensa contribuição.

A todos os meus amigos; aos amigos que tenho desde o Ensino Médio, e aos amigos que Rio Claro me trouxe. Essa trajetória seria muito mais difícil se eu não tivesse todo o carinho, compreensão e apoio de vocês.

Ao Departamento de Física e ao Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação da Unesp de Rio Claro, agradeço todos os professores pelos ensinamentos, os técnicos e todos os profissionais pelo suporte dado em todos esses anos.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

O estudo da dinâmica rotacional de satélites naturais acompanha a Mecânica Celeste desde os primórdios e a cada dia se mostra mais relevante. A maioria dos chamados “satélites regulares” do Sistema Solar estão em estados dinâmicos chamados “síncronos”. Devido à ação de torques de diferentes naturezas, oscilações em torno destes estados de equilíbrio definem a denominada libração física do corpo do satélite. A partir de medidas observacionais da libração física determinadas por sondas espaciais ou outros métodos, é possível inferir informações acerca do interior dos satélites comparando-as com as amplitudes estimadas analiticamente. O foco do projeto é o estudo da dinâmica rotacional dos satélites naturais regulares: Ganimedes (satélite de Júpiter), Enceladus (Saturno), Phobos (Marte) e Lua. Neste trabalho: i) Deduzimos analiticamente aproximações lineares integráveis da equação do movimento de rotação dos satélites, nos casos homogêneo e com camadas (diferenciado); ii) Resolvemos as equações diferenciais de rotação exatas numericamente, explorando propriedades gerais do espaço de fase de rotação por meio de superfícies de seção desses satélites no caso homogêneo; iii) Calculamos os espectros das soluções a partir da Transformada Rápida de Fourier a fim de se estimar as amplitudes e períodos da libração física no caso homogêneo, e aplicamos a técnica a diferentes modelos de estrutura interna para Enceladus calculando mapas dinâmicos. Nossas análises podem ser comparadas com diversos trabalhos já publicados ou em progresso acerca da detecção da libração física. No caso das análises do espaço de fase, os resultados esperados são originais no sentido de que a dinâmica global das regiões do espaço de fase de rotação dos satélites em questão em torno da configuração de equilíbrio 1:1 é pouco explorada.

Palavras Chave: Astronomia, Mecânica Celeste, Problema dos dois corpos.

ABSTRACT

The study of the rotational dynamics of natural satellites accompanied by Celestial Mechanics from the beginning and every day proves to be more relevant. Most of so called "regular satellites" of the Solar System are in dynamic states called "synchronous". Due to the action of torques of different natures, oscillations around these equilibrium states defined the name physical libration of the satellite body. From observational measurements of physical libration determined by space probes or other methods, it is possible to infer information about the interior of satellites by comparing them with the amplitudes estimated analytically. The focus of the project is to study the rotational dynamics of regular natural satellites: Ganymede (Jupiter satellite), Enceladus (Saturn), Phobos (Mars) and Moon. In this work: i) We analytically deduce integrable linear approximations from the equation of rotational motion of satellites, in homogeneous cases and with differentiated layers; ii) We solve numerically exact rotational differential equations, exploring general properties of the rotational phase space by means of the section surfaces of these satellites in the homogeneous case; iii) We calculate the spectra of the solutions from the Fast Fourier Transform in order to estimate the amplitudes and periods of the physical libration in the homogeneous case, and we apply the technique to different internal structure models for Enceladus, calculating dynamic maps. Our analyzes can be compared with several works already published or in progress on the detection of physical libration. In the case of phase space analyses, the expected results are original in the sense that the global dynamics of the phase space regions of rotation of the satellites in question around the 1:1 equilibrium configuration is little explored.

Keywords: Astronomy, Celestial Mechanics, Two body problem.

Sumário

Capítulo 1 – Introdução	7
1.1 Librações	8
1.2 Ganimedes.....	9
1.3 Enceladus	11
1.4 Phobos.....	14
1.5 Lua	16
Capítulo 2 – Equação do movimento de rotação	18
2.1 Equações do movimento rotacional	18
2.2 Modelo integrável	25
Capítulo 3 – Análise das librações	30
3.1 Ganimedes.....	31
3.2 Enceladus	34
3.3 Phobos.....	38
3.4 Lua	41
Capítulo 4 – Superfície de Seção	43
4.1 Introdução	43
4.2 Ganimedes.....	46
4.3 Enceladus	47
4.4 Phobos.....	53
4.5 Lua	56
Capítulo 5 – Camadas.....	57
5.1 Modelo A	57
5.2 Modelo B	58
5.2.1 Modelo B – Cálculo da libração forçada de forma analítica	68
Capítulo 6 – Mapas Espectrais de Enceladus	75
Capítulo 7 – Conclusão	79
REFERENCIAS.....	81
Apêndice A. Transformada Rápida de Fourier (FFT)	84

Capítulo 1 – Introdução

Satélites naturais do Sistema Solar pertencentes à uma classe denominada genericamente por “satélites regulares”¹ se encontram atualmente em estados de equilíbrio dinâmico tal que o período de rotação de um satélite é múltiplo de seu período orbital. Quando a razão dos períodos é 1, define-se o sincronismo 1:1, ou ressonância spin-órbita 1:1. Do ponto de vista de um observador localizado no planeta, devido à ressonância, somente uma face desses satélites é voltada para seu planeta central. No entanto, oscilações harmônicas – librações – permitem que mais de 50% possa ser observado. Além disso, com a medição da amplitude da chamada “libração forçada”, pode-se inferir informações sobre a distribuição de massa do corpo estudado, uma vez que, podemos comparar a amplitude da libração forçada medida no satélite (a partir de imagens obtidas com sondas espaciais) com a amplitude calculada com modelos de estrutura interna (por exemplo, podemos considerar o satélite homogêneo, com duas camadas, etc.). Assim, pode-se verificar quais modelos de interior o valor da amplitude observada corresponde; isso ocorre porque a resposta rotacional do corpo a torques externos depende sensivelmente de sua distribuição de massa interna, em particular, da razão dos principais momentos de inércia $\Sigma = \frac{B-A}{C}$ (B e A são os momentos principais de inércia equatorial e C é o momento principal de inércia polar). Σ é um parâmetro importante no cálculo do ângulo da libração forçada. Através da medida do ângulo da libração, obtêm-se hipóteses da existência de oceanos em satélites como Ganimedes e Enceladus.

Os principais objetivos desta dissertação são: i) estudar e deduzir em seus detalhes todos os conceitos e grandezas físicas listados no parágrafo acima; ii) estudar as propriedades gerais do espaço de fase de rotação desses corpos, considerando diferentes modelos de estrutura interna para os casos de Ganimedes e Enceladus. Para melhor compreensão acerca dos assuntos abordados nesta dissertação, este trabalho se constituirá da seguinte maneira: neste capítulo, tem-se uma breve revisão bibliográfica acerca dos conceitos de libração física e suas principais componentes. No capítulo 2 encontra-se a dedução da equação diferencial do problema de rotação no caso em que o eixo de rotação é fixo e perpendicular ao plano da órbita (problema spin-órbita). Tal modelo não é integrável, de modo que é deduzida uma aproximação da equação do movimento; com essa aproximação são calculadas as amplitudes

¹ Exemplos de satélites regulares são Io, Europa, Ganimedes, Calisto (Júpiter); Mimas, Enceladus, Dione, Titã (Saturno). Eles assumem órbitas quase equatoriais, possuem formas quase esféricas, se localizam a distâncias de poucos raios planetários do planeta.

das librações forçada e ótica, e os períodos relacionados à frequência forçada e à frequência livre. No capítulo 3, mostramos análises dos gráficos da libração física dos satélites aqui estudados no caso homogêneo, calculados de forma analítica, e calculados numericamente. Espectros das soluções feitos com a Transformada rápida de Fourier (FFT) também são obtidos. No capítulo 4 é investigada a dinâmica de rotação que ocorre no espaço de fase do problema spin-órbita no caso homogêneo, a partir da superfície de seção. No capítulo 5, é estudada a equação do movimento de rotação de Ganimedes e Enceladus para o caso com duas camadas sólidas: casca e núcleo, separados por um oceano global. O sistema que rege esse movimento é estudado analiticamente, e algumas estimativas de libração física com o modelo de camadas são relatadas. No capítulo 6, tem-se a conclusão deste trabalho. No Apêndice A são desenvolvidos elementos da teoria sobre série e transformada de Fourier utilizada para realizar os espectros das librações.

1.1 Librações

As librações físicas são variações (oscilações) forçadas periódicas na taxa de rotação de um corpo; para excentricidades pequenas ($e \sim 0$) é possível distinguir duas componentes na libração física: a libração forçada e a libração livre. A **libração forçada** ocorre devido a torques variáveis no tempo que o corpo (não esférico) sofre devido às interações gravitacionais com o planeta central e outros corpos próximos (Murray; Dermott, 1999, p. 215; Yang et al., 2017, p. 1). Para que ocorram librações forçadas o corpo deve se mover em uma órbita não circular e deve não ser esférico. A **libração livre** é “livre” pois podemos incitá-la escolhendo condições iniciais apropriadas (e.g. Sussman et al., 2000, p. 161). A amplitude da libração livre pode decair com o tempo devido à dissipação de energia, então são necessárias fontes de excitação que podem ocorrer no corpo. Assim, segundo Yang et al. (2017, p. 6) a amplitude da libração livre depende dos processos de excitação e amortecimento, e se o corpo não sofre nenhum outro efeito externo (e.g. colisões) as librações livres podem ser amortecidas a zero.

Se a rotação for síncrona, temos ainda a **libração ótica**² cujo efeito é puramente geométrico, sua amplitude é definida como duas vezes a excentricidade ($\phi = 2e$) (e.g. Murray; Dermott, 1999, p. 190). A libração ótica ocorre devido às diferenças entre a velocidade de rotação (constante) e a velocidade orbital instantânea do corpo em uma órbita

² Nesse trabalho definimos e calculamos somente a libração ótica longitudinal, porém, há três componentes da libração ótica: a longitudinal, latitudinal e a diurna.

excêntrica. Sua amplitude depende somente da excentricidade, e ela existe mesmo se o corpo for esférico. Assim, a libração ótica ocorre, pois o satélite em órbita excêntrica tem o módulo da velocidade variável (2ª lei de Kepler), ocasionando oscilações em relação à linha que conecta o satélite e o planeta (Tiscareno et al., 2009, p. 255).

Se o torque que produz a libração física pode ser modelado, as medições das amplitudes podem nos dar informações sobre a distribuição de massa do corpo, pois as librações dependem sensivelmente da distribuição de massa interna do corpo. As librações podem ser separadas em dois grupos: i) períodos curtos da ordem do período orbital; as amplitudes das librações de curto período podem fornecer informações sobre o interior das luas, ii) librações de longo período relacionadas a interações gravitacionais com as outras luas e com o Sol. As librações de longo período podem ter amplitudes tão grandes ou até maiores do que a amplitude da libração principal no período orbital, implicando a necessidade de introduzi-las nas análises de observações vinculadas à rotação.

1.2 Ganimedes

Figura 1.2.1 – Foto de Ganimedes feita pela sonda espacial *Galileo*.



Fonte: NASA³.

³ Disponível em: <<https://www.nasa.gov/sites/default/files/thumbnails/image/ganymede-image-from-galileo-spacecraft.jpg>>. Acesso em: 3 Abr. 2021. Para visualizar o modelo 3D acesse: <<https://solarsystem.nasa.gov/moons/jupiter-moons/ganymede/in-depth/>>.

Ganimedes é a maior lua do Sistema Solar, com raio médio $\bar{R}$ igual a $2634 \pm 10 \text{ km}$ e tem o menor valor do momento de inércia axial medido de um corpo sólido do nosso Sistema: $\frac{C}{MR^2} = 0,3105 \pm 0,0028$ (M é a massa total e $\bar{R}$ é o raio médio). Isso indica que sua massa é concentrada em direção ao centro⁴, o que implica em um interior separado por camadas (Anderson et al., 1996, p. 542). Dados da sonda espacial *Galileo* permitiram grandes avanços na nossa compreensão acerca de Ganimedes. Análises feitas com espectroscopia de infravermelho e do albedo⁵ na superfície do satélite indicam que a camada externa consiste principalmente de água congelada e o fato da existência de um campo magnético sugere a presença de um núcleo metálico; estudos de modelos de estrutura interna indicam que ele se compõe de uma camada de gelo sobreposta por um manto de silicato e, um núcleo central de ferro (Showman; Malhotra, 1999, p. 79). Ganimedes pode conter oceanos submersos comprimidos por camadas de gelo; entretanto, a partir dos dados de *Galileo* e de medições de um campo magnético induzido, não é possível inferir inequivocadamente a espessura e a densidade das camadas de gelo e do oceano líquido (Steinbrugge et al., 2019, p. 1 – 2). A missão espacial *JUICE*⁶ – *JUpiter ICy moons Explorer*, planejada para ser lançada em 2022, tem como objetivo estudar Júpiter e as suas luas Galileanas Europa, Ganimedes e Calisto, com foco principal em Ganimedes, o que trará dados mais precisos acerca de sua libração (Grasset et al., 2013, p. 1 – 2).

Os satélites Io, Europa e Ganimedes estão na ressonância de Laplace 1:2:4. Cinematicamente, isso significa que a cada quatro revoluções orbitais de Io, Europa completa duas e Ganimedes, uma. Essa configuração orbital exerce uma força nos satélites em órbitas excêntricas, fazendo com que eles fiquem sujeitos às forças gravitacionais periódicas entre eles.

Devido às forças gravitacionais de Júpiter gera-se uma resposta nos satélites dependentes de sua estrutura interna fazendo com que ocorra aquecimento por marés intensas,

⁴ Em Anderson et al. (1996, p. 542) é explicado que o momento de inércia axial fornece restrição direta na distribuição de massa interna do corpo. Para um corpo de densidade uniforme o valor de $\frac{C}{MR^2} = 0,4$. O momento de inércia expressa a dificuldade de um corpo rotacionar, e dessa forma, ele depende da distribuição de massa do corpo; quanto mais próxima a massa estiver do eixo de rotação, menor é o momento de inércia.

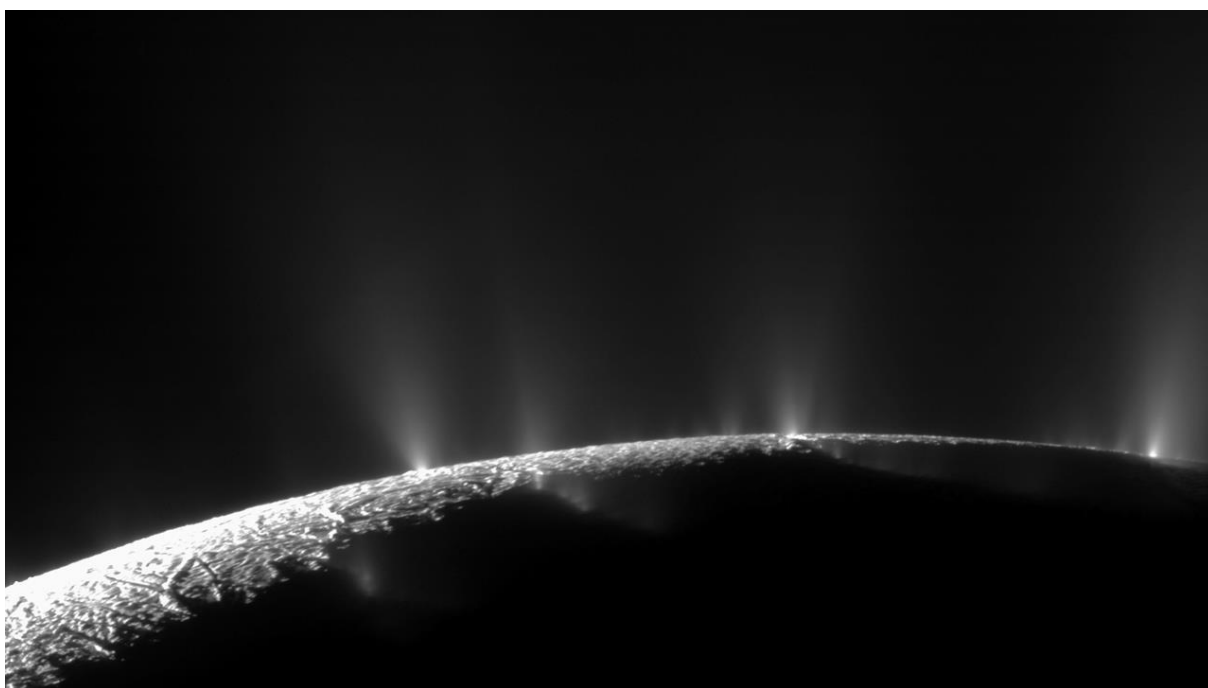
⁵ Albedo ou coeficiente de reflexão, expressa a fração de radiação visível refletida pela superfície. Superfícies que possuem um albedo muito alto são, areia, neve, etc. Dessa forma, o albedo absoluto pode indicar a existência de gelo na superfície de satélites.

⁶ JUICE - JUpiter ICy moons Explorer - é a primeira missão de grande porte do programa Cosmic Vision 2015-2025 da ESA. Planejado para lançamento em 2022 e chegada a Júpiter em 2029, ele passará pelo menos três anos fazendo observações detalhadas de Júpiter e três de suas maiores luas, Ganimedes, Calisto e Europa. Fonte: ESA Science & Technology – JUICE. <https://sci.esa.int/web/juice>.

o que permite a sustentação de oceanos subsuperficiais (Steinbrugge et al., 2019, p. 1). A presença de oceanos próximos à superfície aumenta a amplitude da libração da camada de gelo em relação a um satélite completamente sólido. Assim, as medidas de libração podem corroborar com hipóteses de existência de camadas líquidas e restringir a espessura de camadas sólidas sobrepostas (Baland; Van Hoolst, 2010, p. 651).

1.3 Enceladus

Figura 1.3.1 – Foto de Enceladus feita pela sonda espacial *Cassini*⁷.



Fonte: NASA⁸

A partir de observações das imagens da sonda espacial *Cassini*⁹ feitas com base em medições de pontos de controle na superfície de Enceladus, Thomas et al. (2016, p. 37) encontraram uma amplitude de libração forçada de $0,120^\circ \pm 0,014^\circ$. Com isso, eles

⁷ Esta imagem é um mosaico criado a partir de duas imagens de alta resolução capturadas quando a espaçonave Cassini da NASA passou por Enceladus e pelos jatos em 21 de novembro de 2009. Ela mostra os gêiseres saindo das fraturas. Da esquerda para a direita, as fraturas são Alexandria, Cairo, Bagdá e Damasco. Fonte: <https://solarsystem.nasa.gov/resources/14852/bursting-at-the-seams/>.

⁸ Disponível em: < <https://solarsystem.nasa.gov/news/13148/complex-organics-bubble-up-from-ocean-world-enceladus/> >. Acesso em: 3 Abr. 2021.

⁹ A nave espacial *Cassini-Huygens* foi um projeto da NASA em conjunto com a ESA (Agência Espacial Europeia) e a ASI (Agência Espacial Italiana). A espaçonave fez diversos sobrevoos em Saturno, estudando o planeta e suas luas. Fonte: NASA. Solar System Exploration. <https://solarsystem.nasa.gov/missions/cassini/overview/>.

investigaram vários modelos de estrutura interna representativos para entender melhor a amplitude da libração forçada observada de $0,120^\circ$. Como Ganimedes, Enceladus também é possivelmente diferenciado (Iess et al., 2014, p. 78). Thomas et al. (2016) concluem que o valor $0,120^\circ$ é muito alto para ser consistente com o núcleo de Enceladus sendo rigidamente conectado à sua superfície, implicando, portanto, na presença de um oceano global em vez de um mar localizado. Além disso, a partir de imagens obtidas da *Cassini Imaging Science Subsystem (ISS)* descobriu-se gêiseres¹⁰ ativos na região polar sul de Enceladus (Figura 1.3.1), o que reforça a hipótese que o satélite tenha um reservatório líquido (Porco et al., 2006, p. 1393). Seguindo Thomas et al. (2016, p. 40), considerando o modelo de estrutura interna homogêneo, a amplitude da libração forçada pode ser obtida teoricamente a partir da equação:

$$\gamma \approx \frac{2e}{1 - \left(\frac{1}{3\Sigma}\right)}, \quad (1.3.1)$$

onde, $\Sigma = \frac{B-A}{C}$, com A , B e C os principais momentos de inércia do satélite onde, $A \leq B \leq C$ ¹¹. Os momentos de inércia de um esferoide podem ser escritos como:

$$A = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2), \quad B = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2), \quad C = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2). \quad (1.3.2)$$

Onde, m é a massa do satélite e a , b e c são os semi-eixos do satélite. Então, o valor de Σ é,

$$\Sigma = \frac{B - A}{C} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (1.3.3)$$

A partir de 1.3.3 e dos valores das dimensões dos semi-eixos triaxiais $a = 256,2 \text{ km}$, $b = 251,4 \text{ km}$, $c = 248,6 \text{ km}$ determinados por Thomas et al. (2016), temos que a razão dos momentos de inércia $\Sigma = \frac{B-A}{C} \approx 0,01891$, com o período da libração livre de 5,77 dias, e amplitude da libração forçada $\gamma = 0,032^\circ$. Esse valor é muito menor que a amplitude observada a partir da *Cassini*.

Ao usarem o modelo incluindo um oceano subsuperficial global, Thomas et al. (2016, p. 42) chegaram em um resultado consistente com a libração física observada. Para isso, foi

¹⁰Gêiser é uma fonte termal que entra em erupção periodicamente fazendo com que seja lançado água quente e vapor de água.

¹¹A dedução da eq. (1.3.1) será feita na seção 2.2.

usado o valor do momento de inércia sendo $0,335M\bar{R}^2$, valor obtido a partir de medições da gravidade em Iess et al. (2014), onde M é a massa e $\bar{R}$ o raio médio de Enceladus. Com esse modelo, Thomas et al. (2016) obtiveram que um oceano de 26 a 31 km, sob uma crosta de gelo de 21 a 26 km de espessura é consistente com a amplitude da libração observada. Pode-se ter alterações na espessura da casca devido às suas possíveis deformações, as quais não foram incluídos nos cálculos. Na seção 5.2.2.1 nós calculamos a amplitude da libração forçada de Enceladus de acordo com os dados considerados por Thomas et al. (2016) e encontramos o valor de $0,0115^\circ$, o que é consistente com o valor encontrado a partir da sonda espacial *Cassini*. Thomas et al. (2016, p. 42) concluem que a amplitude da libração medida só é alcançada se a casca e o núcleo não são conectados, possuindo assim, um oceano global.

A partir do valor da amplitude da libração forçada encontrada em Thomas et al. (2016) de $0,120^\circ \pm 0,014^\circ$, é possível determinar o valor de $\frac{B-A}{C}$ considerando Enceladus homogêneo, a partir da equação 1.3.1, encontrando o valor $\frac{B-A}{C} \approx 0,0607$ (Hemingway et al., 2018, p. 71).

Em Wisdom (2004, p. 484) é considerado as análises feitas pelas imagens de Enceladus da *Voyager*¹² por Dermott e Thomas (1994) supondo a forma de Enceladus como um elipsóide triaxial com os semi-eixos principais $a = 256,3 \pm 0,3$ km, $b = 247,3 \pm 0,3$ km e $c = 244,6 \pm 0,3$ km. Assim, assumindo uma densidade uniforme encontrou-se $\frac{B-A}{C} = 0,03573 \pm 0,0017$. Porém, Wisdom (2004, p. 491), considerou o valor de $\Sigma = 0,03853$ para construir o gráfico da superfície de seção (a razão disso ficará clara na seção 4.3).

Neste trabalho estudaremos as librações de Enceladus a partir desses três valores de $\Sigma = \frac{B-A}{C}$ para o caso homogêneo: i) o valor obtido a partir de Wisdom (2004, p. 484): $\Sigma = 0,03573 \pm 0,0017$; ii) Thomas et al. (2016, p. 40): $\Sigma \approx 0,01891$; iii) o valor de Hemingway et al. (2018, p. 71) $\Sigma \approx 0,0607$. E estudaremos as librações de Enceladus para o caso com camadas a partir dos valores dos semi-eixos triaxiais encontrados por Thomas et al. (2016, p. 40), $\Sigma \approx 0,01891$.

¹² A missão principal das naves espaciais Voyager 1 e 2 era a exploração de Júpiter e Saturno, nos quais foram feitas várias descobertas sobre os planetas e suas luas. Fonte: NASA. Jet System Exploration. <https://voyager.jpl.nasa.gov/mission/>.

1.4 Phobos

Figura 1.4.1 – Foto feita pela câmera *HiRISE* da NASA.



Fonte: NASA¹³.

Phobos orbita Marte e, assim como os outros satélites aqui estudados, está em uma ressonância síncrona spin-órbita 1:1. Dessa forma, em média ele mostra a mesma face em direção ao planeta, porém, como a excentricidade é diferente de zero, há variações na velocidade orbital de modo que o satélite apresenta 52% de sua superfície voltada para Marte (Rambaux et al., 2012, p. 2).

Ainda não temos dados precisos acerca do interior de Phobos. Sendo um satélite de pequena dimensão (~ 22 km de diâmetro médio), espera-se que ele seja homogêneo; porém, segundo Rambaux et al. (2012, p. 2), a partir do ângulo de libração medido por Willner et al. (2010), heterogeneidades no interior de Phobos não devem ser descartadas; há a sugestão que Phobos é constituído de material rochoso, porosidade e gelo (Le Maistre et al., 2019, p. 272).

Duxbury e Callahan (1982), analisando os dados da sonda *Viking*¹⁴ determinaram que a amplitude da libração forçada é $0,8^\circ \pm 0,2^\circ$, o que implica em $\frac{B-A}{C} \approx 0,10453$ (Wisdom, 1987, p. 1352). Porém, dados mais recentes realizados pelas medições da missão

¹³ Disponível em: < <https://solarsystem.nasa.gov/moons/mars-moons/phobos/in-depth/>>. Acesso em: 3 Abr. 2021. O modelo 3D se encontra no mesmo site.

¹⁴ No projeto *Viking* feito pela NASA foram construídas duas espaçonaves idênticas *Viking 1*, lançada em 1975, a qual coletou dados de Phobos – e *Viking 2*, lançada em 1976; cada uma consistindo de uma sonda e um orbitador, as quais coletaram dados científicos e conduziram experimentos projetados para procurar possíveis sinais de vida em Marte. Fonte: NASA. Viking 1 & 2 Missions. <https://mars.nasa.gov/mars-exploration/missions/viking-1-2/>.

espacial *European Mars Express (MEX)*¹⁵ indicam que o valor da amplitude da libração forçada de Phobos é $1,2^\circ \pm 0,15^\circ$. Willner et al. (2010), ao calcularem a amplitude da libração forçada para o caso homogêneo com os dados encontrados de $\frac{B-A}{C}$, obtiveram uma amplitude da libração forçada de $1,1^\circ$. Em Willner et al. (2014), os dados foram atualizados com o (HSRC) – *high super resolution channel*¹⁶ e a partir das imagens do projeto *MEX*, estimou-se o valor dos momentos principais de inércia: $A = 0,3605$, $B = 0,4267$ e $C = 0,4998$. Com isso, a partir da equação 1.3.1, eles obtiveram um valor da amplitude da libração forçada de Phobos da ordem de $1,14^\circ$, mais próximo do valor encontrado com as medições da sonda espacial (Willner et al., 2014, p. 5).

O valor de $\frac{B-A}{C} = 0,13245$ considerado em nosso estudo, para Phobos homogêneo, de suas librações (seção 3.3) e de sua superfície de seção (seção 4.4), foi o valor encontrado por Willner et al. (2014, p. 8) a partir da *MEX*. Utilizamos também o valor calculado por Wisdom (1987, p. 1352), onde, em seu trabalho, determinou-se $\frac{B-A}{C} \approx 0,24653$ para construir a figura da superfície de seção do satélite (para mais informações ver Wisdom, 1987, p. 1351- 1352).

¹⁵ Mars Express é uma missão da ESA em Marte, ela foi lançada em 2003. O principal objetivo é procurar água subterrânea e implantar um módulo de pouso na superfície de Marte. Fonte: ESA. Mars Express operations. https://www.esa.int/Enabling_Support/Operations/Mars_Express_operations.

¹⁶ O HRSC é a primeira câmera estéreo totalmente funcional na história da pesquisa planetária. As imagens 3D permitem reproduções exatas do relevo, o que permite aos cientistas fazerem um trabalho detalhado acerca da superfície de Marte e fazer estudos como a formação de camadas. Fonte: ESA. Mars Express HRSC images. https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Mars_Express/Frequently_asked_questions.

1.5 Lua

Figura 1.5.1. Visão da Lua fotografada pela missão Apollo 11.



Fonte: NASA¹⁷.

Devido, principalmente, à libração ótica, 59% de sua superfície é voltada para a Terra (Rambaux et al., 2012, p. 2). Para estudar a libração física da Lua, consideramos o valor de $\frac{B-A}{C} = 0,0002278$ obtido a partir da missão *GRAIL* – *Gravity Recovery and Interior Laboratory*¹⁸ (Makarov et al., 2016, p. 668). Neste trabalho estuda-se a dinâmica de rotação da Lua considerando-a homogênea; encontramos o valor da amplitude da libração forçada de aproximadamente $0,0043^\circ$, a qual é próximo do valor apresentado em Murray e Dermott (1999, p. 217) de $0,00416^\circ$.

Estima-se que seu momento de inércia (MOI) é $\frac{C}{MR^2} = 0,3931 \pm 0,0002$, um valor muito próximo ao de uma esfera de densidade uniforme (0,4). Dessa forma, a Lua tem um leve aumento de densidade em direção ao seu centro, com isso, ela provavelmente tem camadas (Weber, 2014, p. 541). Estudos sísmicos, rotacionais e de medição de gravidade obtiveram informações das possíveis composições das camadas da Lua. Décadas de estudos indicam que ela consiste de uma casca de silicato, um manto em grande parte homogêneo e

¹⁷ Disponível em: < https://www.nasa.gov/mission_pages/apollo/40th/images/apollo_image_25.html >. Acesso em: 3 Abr. 2021.

¹⁸ A missão *GRAIL* do programa da NASA foi projetada para criar o mapa gravitacional mais preciso da Lua até o momento, pois combinado com dados topográficos pode-se fornecer informações acerca da estrutura interna da Lua. As duas pequenas espaçonaves *GRAIL A* e *GRAIL B* foram lançadas em 2011. Fonte: NASA. <https://www.jpl.nasa.gov/missions/gravity-recovery-and-interior-laboratory-grail>.

um pequeno núcleo de ferro, que se compõe de uma camada externa fluida e uma camada interna sólida (Weber, 2014, p. 549).

Os dados necessários para calcular a libração física, no caso homogêneo, dos satélites aqui estudados são resumidos na tabela abaixo:

Tabela 1. Dados de Ganimedes, Enceladus, Phobos e Lua, necessários para calcular suas librações físicas.

	Ganimedes	Enceladus	Phobos	Lua
Massa (kg)	$1,482 \times 10^{23}$	$1,083 \times 10^{20}$	$1,080 \times 10^{16}$	$7,349 \times 10^{22}$
Semi-Eixo Maior (Km)	1070400	238,020	9377,2	384400
Período Sideral Orbital (dias)	7,154553	1,370218	0,318910	27,321661
Excentricidade	0,0013	0,0047	0,0151	0,0549
$\frac{B-A}{C}$	0,00049 ¹⁹	0,01891 0,03573 0,06070	0,13245 0,24653	0,00023
n (rad/dia)	0,878208	4,585537	19,702065	0,229971

Fonte: Dados de Ganimedes obtidos de Murray e Dermott (1999, p. 532), Schubert et al. (2004, p. 4 - 5) e do site da NASA (https://solarsystem.nasa.gov/moons/jupiter_moons/ganymede/by-the-numbers/). Dados de Enceladus obtidos de Murray e Dermott (1999, p. 533), Wisdom (2004, p. 484), Thomas et al. (2016, p. 40) e Hemingway et al. (2018, p. 71). Dados de Phobos obtidos de Murray e Dermott (1999, p. 531), Wisdom (1987, p.1352) e Willner et al. (2014, p. 8). Dados da Lua obtidos de Murray e Dermott (1999, p. 531) e Makarov et al. (2016, p. 668).

Tabela 2. Valor da massa dos planetas: Júpiter, Saturno, Marte e Terra.

	Júpiter	Saturno	Marte	Terra
Massa (kg) ($\times 10^{24}$)	1898,6	568,46	0,64185	5,9736

Fonte: Murray e Dermott (1999, p. 531).

¹⁹ Valor obtido a partir da fórmula $\frac{B-A}{C} = \frac{4C_{22}}{\frac{C}{M\bar{R}^2}}$ (Callegari; Rodríguez, 2013, p. 395) com os valores do coeficiente gravitacional de grau e ordem 2, C_{22} , e de $C/M\bar{R}^2$ dados em Schubert et al. (2004, p. 4 - 5), encontrados pela sonda espacial *Galileo*.

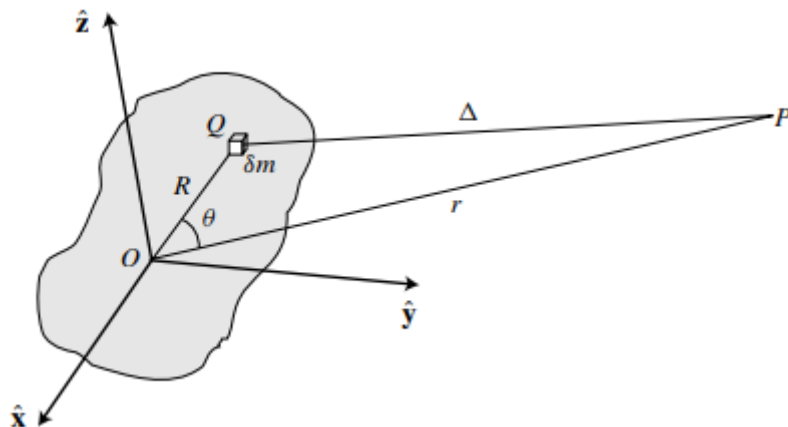
Capítulo 2 – Equação do movimento de rotação

2.1 Equações do movimento rotacional

O objetivo nesta seção é calcular o movimento rotacional de um satélite sob influência de um torque externo exercido em seu momento de quadrupolo permanente por um planeta distante.

Considera-se o satélite com a forma de um elipsóide, tendo um sistema de coordenadas com origem no seu centro de massa O , e as direções x , y , z ao longo dos principais eixos de inércia. Ilustramos na Fig. 2.1.1 esse sistema, onde P está a uma distância r de O ; $\overline{OP}$ faz um ângulo θ com a linha $\overline{OQ}$, e em Q está localizado um elemento de massa δm (Murray; Dermott, 1999, p. 197).

Figura 2.1.1. Representação dos parâmetros do satélite.



Fonte: Murray e Dermott, 1999, p.197.

O potencial criado pela massa δm no ponto arbitrário P externo ao satélite é dado por

$$V = - \int \frac{G \delta m}{\Delta}, \quad (2.1.1)$$

onde, G é a constante gravitacional. Pela lei dos cossenos, temos que $\Delta = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$, e dessa forma a equação (2.1.1) fica:

$$V = - \int \frac{G dm}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}}, \quad (2.1.2)$$

a Eq. (2.1.2) é tomada sobre todos os elementos de massa, e temos que, $\cos \theta = \left(\frac{r \cdot R}{rR}\right)$. Então, a equação (2.1.2) fica:

$$V = - \frac{G}{r} \int dm \left(1 + \frac{R^2}{r^2} - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right)^{-1/2}. \quad (2.1.3)$$

Assumindo $R \ll r$, ou seja, quando o ponto P está posicionado a uma grande distância do satélite, a expressão em parênteses pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} V &= - \frac{G}{r} \int dm \left[1 + \frac{R}{r} \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} \cos^2 \theta + O \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ &= - \frac{G}{r} \int dm \left[1 + \frac{R}{r} \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} (1 - \sin^2 \theta) + O \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ &= - \frac{G}{r} \int dm \left[1 + \frac{R}{r} \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \theta + O \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ &= - \frac{G}{r} \int dm \left[1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{2}{2} \frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \theta + O \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right], \\ &= - \frac{G}{r} \left[\int dm + \frac{1}{r} \int dm (R \cos \theta) + \frac{1}{2r^2} \int dm (2R^2 - 3R^2 \sin^2 \theta) + O \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Sabemos que a massa total do satélite é $m_s = \int dm$; como o centro de massa coincide com a origem do sistema, então a segunda integral é nula. Para calcular a terceira integral em (2.1.4), vamos utilizar os momentos de inércia do corpo deformado ao redor da linha $\overline{OP}$ passando pelo centro de massa O ,

$$I = \int dm R^2 \sin^2 \theta. \quad (2.1.5)$$

Os momentos de inércia ao redor de cada eixo do sistema de coordenadas x, y, z são

$$A = \int dm (y'^2 + z'^2) \quad B = \int dm (x'^2 + z'^2) \quad C = \int dm (x'^2 + y'^2), \quad (2.1.6)$$

x', y', z' são as coordenadas do ponto Q, ou, $\mathbf{R} = (x', y', z')$. Os produtos de inércia são,

$$F = \int dm(y'z') \quad G = \int dm(x'z') \quad H = \int dm(x'y'). \quad (2.1.7)$$

Ao considerar um sistema principal de eixos com origem no centro de massa – definido os principais momentos de inércia (A, B, C) – os produtos de inércia $F = G = H = 0$. Com essas definições podemos observar que:

$$\begin{aligned} 2 \int dm R^2 &= 2 \int dm(x'^2 + y'^2 + z'^2), \\ 2 \int dm R^2 &= \int dm(y'^2 + z'^2) + \int dm(x'^2 + z'^2) + \int dm(x'^2 + y'^2), \\ 2 \int dm R^2 &= A + B + C. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Assim, substituindo (2.1.5) e (2.1.8) na equação (2.1.4), temos

$$V = -\frac{Gm_s}{r} - \frac{G(A + B + C - 3I)}{2r^3}. \quad (2.1.9)$$

A Eq. (2.1.9) é a fórmula de MacCullagh (Murray; Dermott, 1999). Usando as equações (2.1.5) e (2.1.8), o momento de inércia (I) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} I &= \int dm \left[R^2 - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})^2}{r^2} \right], \\ I &= \int dm \left[R^2 - \frac{(r \cdot R \cdot \cos \theta)^2}{r^2} \right], \\ I &= \frac{A + B + C}{2} - \frac{1}{r^2} \int dm (x'x + y'y + z'z)^2, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$. A partir de (2.1.6) e (2.1.8),²⁰

$$\int dm(x'^2) = \frac{1}{2}(A + B + C) - A, \quad (2.1.11)$$

²⁰ seguindo (Colucci, 2010, p. 28), ver (Rodríguez, 2010 e Beutler, 2005, p. 71).

$$\int dm(y'^2) = \frac{1}{2}(A + B + C) - B, \quad (2.1.12)$$

$$\int dm(z'^2) = \frac{1}{2}(A + B + C) - C. \quad (2.1.13)$$

Substituindo (2.1.13) na equação (2.1.10), obtemos:

$$I = \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{r^2}. \quad (2.1.14)$$

Desta forma, a fórmula de MacCullagh fica,

$$V = -\frac{Gm_s}{r} - \frac{G}{2r^3} \left[(A + B + C) - 3 \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{r^2} \right]. \quad (2.1.15)$$

Desenvolvendo (2.1.15), temos:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{Gm_s}{r} - \left[\frac{G}{2r^3} (A + B + C) - 3G \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{2r^5} \right], \\ &= -\frac{Gm_s}{r} - \left[\frac{Gr^2(A + B + C) - 3G(Ax^2 + By^2 + Cz^2)}{2r^5} \right], \\ &= -\frac{Gm_s}{r} - \left[\frac{G(x^2 + y^2 + z^2)(A + B + C) - 3G(Ax^2 + By^2 + Cz^2)}{2r^5} \right], \\ &= -\frac{Gm_s}{r} - \left[\frac{G[(A + B + C)x^2 + (A + B + C)y^2 + (A + B + C)z^2] - 3G(Ax^2 + By^2 + Cz^2)}{2r^5} \right], \\ &= -\frac{Gm_s}{r} - \frac{G}{2r^5} [(Bx^2 + Cx^2 - 2Ax^2) + (Ay^2 + Cy^2 - 2By^2) + (Az^2 + Bz^2 - 2Cz^2)]. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever o potencial do satélite na forma:

$$V = -\frac{Gm_s}{r} - \frac{G}{2r^5} f(A, B, C, x, y, z), \quad (2.1.16)$$

onde,

$$f(A, B, C, x, y, z) = (B + C - 2A)x^2 + (A + C - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2. \quad (2.1.17)$$

Ver Murray e Dermott (1999, p. 198). Como $\mathbf{F} = -m_p \nabla V$, onde m_p é a massa do planeta, então a força gravitacional no ponto P (no planeta) é:

$$\begin{aligned} F_x &= -m_p \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= -\frac{Gm_p m_s x}{r^3} + \frac{Gm_p (B + C - 2A)x}{r^5} - \frac{5m_p Gx}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z), \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

$$\begin{aligned} F_y &= -m_p \frac{\partial V}{\partial y} \\ &= -\frac{Gm_p m_s y}{r^3} + \frac{Gm_p (C + A - 2B)y}{r^5} - \frac{5m_p Gy}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z), \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

$$\begin{aligned} F_z &= -m_p \frac{\partial V}{\partial z} \\ &= -\frac{Gm_p m_s z}{r^3} + \frac{Gm_p (A + B - 2C)z}{r^5} - \frac{5m_p Gz}{2r^7} f(A, B, C, x, y, z). \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Essas forças atuam no ponto P , e forças iguais e opostas atuam no satélite em torno do seu centro de massa.

A partir das componentes da força $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, podemos calcular as componentes do torque, pois $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times (-\mathbf{F})$, onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Ao fazermos a multiplicação vetorial temos que

$$N_x = zF_y - yF_z, \quad (2.1.21)$$

$$N_y = xF_z - zF_x, \quad (2.1.22)$$

$$N_z = yF_x - xF_y. \quad (2.1.23)$$

Dessa forma, podemos obter:

$$N_x = -\frac{Gm_p m_s yz}{r^3} + \frac{Gm_p (C + A - 2B)yz}{r^5} + \frac{Gm_p m_s zy}{r^3} - \frac{Gm_p (A + B - 2C)zy}{r^5}, \quad (2.1.24)$$

$$N_y = -\frac{Gm_p m_s zx}{r^3} + \frac{Gm_p (A + B - 2C)zx}{r^5} + \frac{Gm_p m_s xz}{r^3} - \frac{Gm_p (B + C - 2A)xz}{r^5}, \quad (2.1.25)$$

$$N_z = -\frac{Gm_p m_s xy}{r^3} + \frac{Gm_p (B + C - 2A)xy}{r^5} + \frac{Gm_p m_s yx}{r^3} - \frac{Gm_p (C + A - 2B)yx}{r^5}. \quad (2.1.26)$$

Portanto,

$$N_x = \frac{3Gm_p(C - B)yz}{r^5}, \quad (2.1.27)$$

$$N_y = \frac{3Gm_p(A - C)zx}{r^5}, \quad (2.1.28)$$

$$N_z = \frac{3Gm_p(B - A)xy}{r^5}. \quad (2.1.29)$$

Note que os torques não dependem da massa do satélite. As equações de Euler do movimento do corpo rígido do satélite são:

$$A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z = N_x, \quad (2.1.30)$$

$$B\dot{\omega}_y - (C - A)\omega_x\omega_z = N_y, \quad (2.1.31)$$

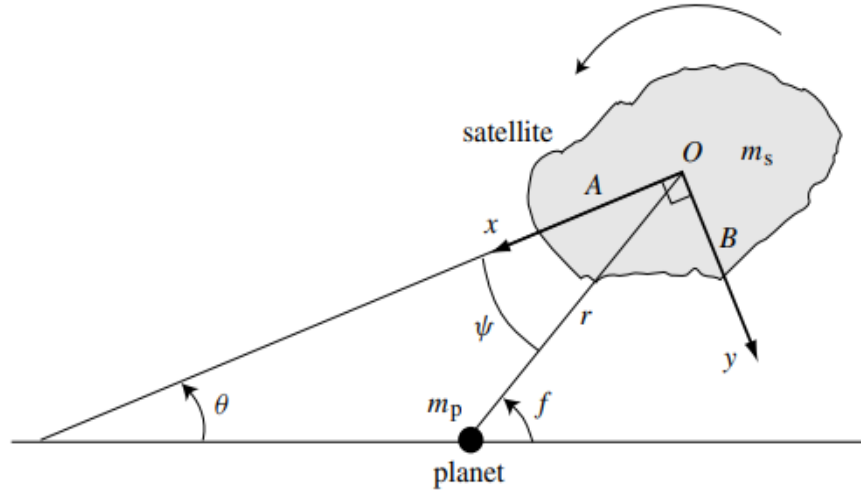
$$C\dot{\omega}_z - (A - B)\omega_x\omega_y = N_z, \quad (2.1.32)$$

onde $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ são as projeções do vetor de rotação $\boldsymbol{\omega}$ nos eixos principais.

Desejamos calcular o movimento rotacional de um satélite devido ao torque exercido em seu momento de quadrupolo por um planeta distante (em P). Assumiremos que o eixo de rotação do satélite é normal ao seu plano orbital, sendo ω_x e ω_y iguais a zero e $\omega_z = \dot{\theta}$ (obliquidade do satélite é negligenciável). Dessa forma, nosso problema se reduz somente à Eq. (2.1.32).

Como podemos observar na figura 2.1.2, os cossenos diretores do planeta em relação ao eixo x e ao eixo y são dados por $\frac{x}{r} = \cos(\psi)$ e $\frac{y}{r} = \sin(\psi)$, respectivamente (Murray; Dermott, 1999, p.198).

Figura 2.1.2. Representação da rotação de um satélite.



Fonte: Murray e Dermott, 1999, p. 199.

Na figura 2.1.2 ilustramos a rotação de um satélite com seu eixo de rotação normal ao seu plano orbital. ψ é o ângulo entre a linha planeta-satélite, ψ define a libração física em função do tempo. O ângulo θ é o ângulo de rotação, ele é medido em relação a uma direção fixada no espaço inercial, m_s é a massa do satélite, m_p é a massa do planeta, f é a anomalia verdadeira. A é o eixo principal (eixo x) associado ao momento mínimo de inércia do satélite, B é o outro momento de inércia (eixo y), e C é o momento de inércia em relação ao eixo normal ao plano orbital (eixo z) (C é o maior momento de inércia, em geral).

Ao utilizarmos os cossenos diretores na Eq. (2.1.29), e sabendo que, $\psi(t) = f(t) - \theta(t)$, e que $\sin 2\psi = 2 \sin \psi \cos \psi$, (Murray; Dermott, 1999, p. 198). A Eq. (2.1.32) fica:

$$C\ddot{\theta} - \frac{3}{2} (B - A) \frac{Gm_p}{r(t)^3} \sin 2(\psi(t)) = 0. \quad (2.1.33)$$

Esta é a equação fundamental do modelo de rotação utilizado neste trabalho. r e f são dados por:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{c}{r(t)^2}, \quad (2.1.34)$$

$$r(t) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f(t)}, \quad (2.1.35)$$

$c = \sqrt{G(m_p + m_s)a(1 - e^2)}$, onde e é a excentricidade orbital e a é o semi-eixo maior, ambos são definidos dentro do domínio do problema de dois corpos, (o que constitui uma aproximação em primeiro momento). Com a equação (2.1.33) podemos calcular a dinâmica rotacional de um satélite.

2.2 Modelo integrável

Como r e ψ variam com f , que é uma função não linear do tempo, a Eq. (2.1.33) não é integrável. No entanto, nos casos de interesse aqui, a taxa de rotação $\dot{\theta}$ é proporcional ao movimento médio n ($n = 2\pi/T$, onde T é o período orbital), e podemos derivar uma equação de movimento aproximada integrável. É comum definirmos uma nova variável γ :

$$\gamma \equiv \theta - pM, \quad (2.2.1)$$

onde p é um racional, M é a anomalia média:

$$M = n(t - \tau), \quad (2.2.2)$$

τ é o tempo de passagem do satélite pelo pericentro. M tem dimensão de ângulo e cresce linearmente com o tempo a uma taxa constante igual ao movimento médio n , mas podemos ver que, quando $t = \tau$ (passagem pelo pericentro), $M = f = 0$, e quando $t = \tau + T/2$ (passagem pelo apocentro), $M = f = \pi$ (Murray; Dermott, 1999, p. 32).

A partir das expansões elípticas do problema de dois corpos para primeira ordem em excentricidade (Murray; Dermott, 1999, p. 192), temos:

$$f = nt + 2e \sin(nt) + O(e^2), \quad (2.2.3)$$

$$f - M \approx 2e \sin(nt). \quad (2.2.4)$$

Considerando o caso síncrono, $p = 1$ na eq. (2.2.1), temos então, que $\gamma = \theta - M$. Logo, $\theta = \gamma + M$, e como $\psi = f - \theta$, temos:

$$\psi = f - M - \gamma. \quad (2.2.5)$$

Por (2.2.4):

$$\psi \approx 2e \sin(nt) - \gamma. \quad (2.2.6)$$

O termo $2e \sin nt$ representa a libração ótica. γ representa a libração física, que na presença de torque causa pequenas variações adicionais na orientação do satélite de modo que $\theta(t) = nt + \gamma(t)$. Como pM é constante, $\ddot{\theta} = \ddot{\gamma}$ então a partir de (2.1.33), a equação do movimento para γ fica,

$$C\ddot{\gamma} = \frac{3}{2} (B - A) \frac{Gm_p}{r^3} \sin(4e \sin(nt) - 2\gamma). \quad (2.2.7)$$

Pode-se mostrar através das expansões elípticas (Murray e Dermot, 1999, p. 216) que para pequenos desvios da configuração de equilíbrio, a contribuição devido à variação radial é $(a/r)^3 \approx 1 + 3e \cos(nt)$. Dessa forma, assumindo uma aproximação da terceira lei de Kepler $n^2 a^3 = G(m_p + m_s) \approx Gm_p$, $m_p \gg m_s$ e adotando $(a/r)^3 \approx 1$, $\sin(x) \approx x$ para $x \approx 0$, temos:

$$C\ddot{\gamma} = \frac{3}{2} (B - A) n^2 (4e \sin(nt) - 2\gamma). \quad (2.2.8)$$

Essa aproximação da equação (2.1.33) é válida para órbitas quase circulares ($e \approx 0$). Seja também a mudança de variável na equação original (2.1.33) $u = nt - \theta$. Adotando as aproximações acima para $(a/r)^3$, a eq; (2.2.8) fica:

$$\ddot{u} = -\frac{3}{2} \left(\frac{B - A}{C} \right) n^2 \sin 2u(t). \quad (2.2.9)$$

Para pequenos desvios na rotação síncrona, ou seja, $u \approx 0$ (ou $n \approx \dot{\theta}$), e $\sin(2(u)) \approx 2u$. Temos,

$$\ddot{u} = -3 \left(\frac{B-A}{C} \right) n^2 u(t). \quad (2.2.10)$$

Tem-se definida a frequência de *libração livre* (Murray; Dermott, 1999, p. 204),

$$\omega_0 = n \sqrt{3 \left(\frac{B-A}{C} \right)}. \quad (2.2.11)$$

Finalmente, a partir das equações (2.2.8) e (2.2.11), temos um modelo de rotação integrável aproximado:

$$\ddot{\gamma} = -\omega_0^2 \gamma + 2\omega_0^2 e \sin(nt). \quad (2.2.12)$$

A solução geral dessa equação diferencial ordinária linear de segunda ordem não homogênea é igual a solução geral da equação homogênea associada, (γ_h), adicionada à uma solução particular (γ_p): $\gamma_g(t) = \gamma_h + \gamma_p$. Temos que, a solução homogênea é:

$$\gamma_h(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t), \quad (2.2.13)$$

onde a, b são as constantes a serem determinadas pelas condições iniciais, enquanto que uma solução particular pode ser dada por:

$$\gamma_p(t) = -\frac{2\omega_0^2 e}{n^2 - \omega_0^2} \sin(nt). \quad (2.2.14)$$

A Eq. (2.2.14) define a *libração forçada*, que varia com frequência n . Vamos definir, $k \equiv \frac{2\omega_0^2 e}{-n^2 + \omega_0^2}$ como a amplitude da libração forçada. Observe que k depende da frequência natural ω_0 , que está dada em função dos momentos de inércia (Eq. 2.2.11). Portanto, k depende da distribuição de massa interna do satélite.

A solução geral de (2.2.12) é, portanto, dada por:

$$\gamma_g(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) + k \sin(nt). \quad (2.2.15)$$

Sejam as seguintes condições iniciais no sincronismo²¹ para a equação (2.2.12):

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \theta_0, \\ \dot{\gamma}(0) &= 0.\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}a &= \theta_0, \\ b &= -\frac{kn}{\omega_0}.\end{aligned}\tag{2.2.17}$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial (2.2.15) em função das condições iniciais (2.2.17) é,

$$\gamma(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{kn}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + k \sin(nt).\tag{2.2.18}$$

Esta é a expressão analítica aproximada da libração física do problema rotacional no caso de ressonância 1:1.

Temos, portanto os períodos e amplitudes das librações ótica (Eq. 2.2.4), livre (Eq. 2.2.11), e forçada (Eq. 2.2.14). Na tabela 3 são mostrados os períodos e amplitudes calculados para os satélites estudados neste trabalho.

Os cálculos dessa seção foram feitos considerando o caso de rotação síncrona, porém, eles podem ser estendidos para outras configurações de equilíbrio spin-orbit (rotação-órbita) considerando valores distintos do meio inteiro p dado pela definição $\gamma = \theta - pM$, equação (2.2.1).

²¹ $\dot{\gamma}(0) = 0$ justifica-se pois $\dot{\gamma} = \dot{\theta} - n \approx 0$ no sincronismo.

Tabela 3. Dados referentes às amplitudes da libração forçada²² e ótica, e os períodos relacionados à frequência forçada e à frequência livre dos satélites Ganimedes, Enceladus, Phobos e Lua respectivamente, para o caso homogêneo.

	Amplitude da libração forçada (°)	Amplitude da libração ótica (°)	T_n (dias)	T_{ω_0} (dias)
Ganimedes	0,0002	0,1489	7,1545	186,3582
Enceladus com $\frac{B-A}{C} = 0,01891$	0,0324	0,5385	1,3702	5,7528
Enceladus com $\frac{B-A}{C} = 0,03573$	0,0647	0,5385	1,3702	4,1852
Enceladus com $\frac{B-A}{C} = 0,06070$	0,1199	0,5385	1,3702	3,2109
Phobos com $\frac{B-A}{C} = 0,13245$	1,1409	1,7303	0,3189	0,5059
Phobos com $\frac{B-A}{C} = 0,24653$	4,9143	1,7303	0,3189	0,3708
Lua	0,0043	6,2911	27,3217	1045,1283

Fonte: Autoral (2020).

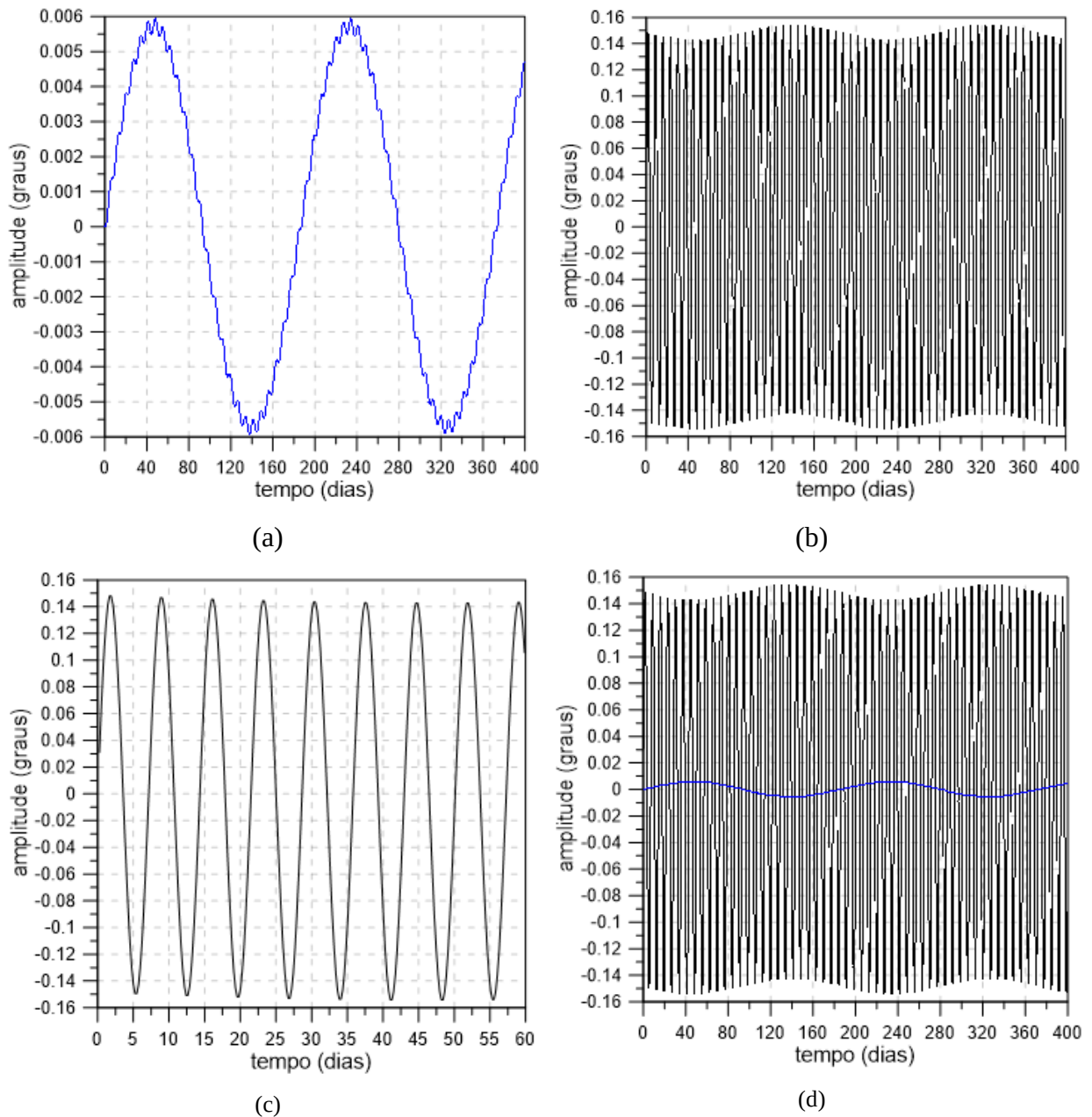
²² As amplitudes das librações forçada dos satélites tem o valor negativo, porém, utilizamos o módulo dos valores. Os valores serem negativos indica que $n > \omega_0$, e então as librações e a força estão 180° fora de fase (Murray; Dermot, 1999, p. 217).

Capítulo 3 – Análise das librações

Neste capítulo vamos analisar as librações físicas dos satélites. Primeiramente, vamos considerar o caso homogêneo, calculado de **forma analítica** com a equação (2.2.18) a partir do modelo apresentado no capítulo 2. As soluções serão comparadas com os resultados obtidos com a **equação exata** (2.1.33) desenvolvida numericamente. Em todos os casos as condições iniciais foram, $f(0) = 0$ (satélite partindo do pericentro), $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta} = n$ (rotação síncrona). Os gráficos obtidos a partir da equação exata foram desenvolvidos numericamente com um código análogo ao Runge Kutta de 15ª ordem em linguagem Fortran (Everhart, 1985). Também foram feitos os espectros das librações calculados analiticamente e numericamente a partir da equação exata; desta forma, pode-se visualizar o período e a amplitude das librações. Os espectros foram obtidos em linguagem Fortran por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT) (ver Apêndice A).

3.1 Ganimedes

Figura 3.1.1. Gráfico da libração física de Ganimedes (a) Resolvida analiticamente (equação 2.2.18). (b) e (c) Desenvolvida numericamente a partir da equação exata (equação 2.1.33). (d) Comparação da libração física resolvida analiticamente (azul) e numericamente (preto).

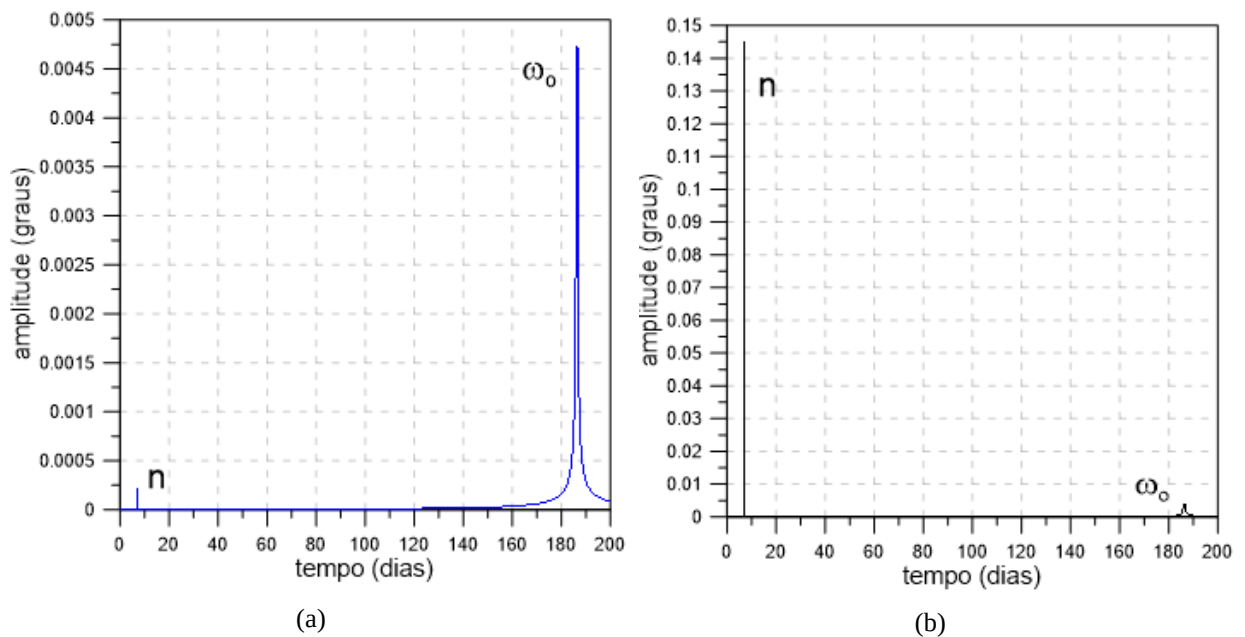


Fonte: Autoral (2020).

Na Figura 3.1.1(a), por ser o gráfico da libração desenvolvido a partir do modelo analítico, há somente duas oscilações: i) oscilações de longo período e maior amplitude, onde seu período é de aproximadamente 180 *dias*, o que é condizente com o período da libração

livre (ver Tabela 3); ii) em torno dessa libração ocorrem pequenas variações com período da ordem de 7 *dias*, correspondendo à libração forçada. Na Figura 3.1.1(b), ao resolvermos a equação exata Eq. (2.1.33) numericamente, temos as três librações: livre, forçada e ótica. Como o valor da excentricidade ($e = 0,0013$) é maior que o valor de $\frac{B-A}{C}$ para o caso de Ganimedes, a maior amplitude corresponde à libração ótica, pois ela é igual a $2e$ (ver seção 1.1). Dessa forma, as amplitudes das librações livre e forçada não são perceptíveis, porém, pode-se observar o período da libração livre que é de aproximadamente 180 *dias*. Na Figura 3.1.1(c), ao fazermos o recorte do período até 60 dias podemos ver que o menor período é condizente com o período rotacional/orbital, $T \approx 7,15$ dias, o qual corresponde ao período das librações forçada e ótica (ambas têm a mesma frequência). Na Figura 3.1.1(d) temos a comparação entre as librações resolvidas analiticamente e numericamente.

Figura 3.1.2. Gráficos da Transformada Rápida de Fourier (FFT) de Ganimedes. (a) Libração física obtida analiticamente. (b) Libração física obtida numericamente.



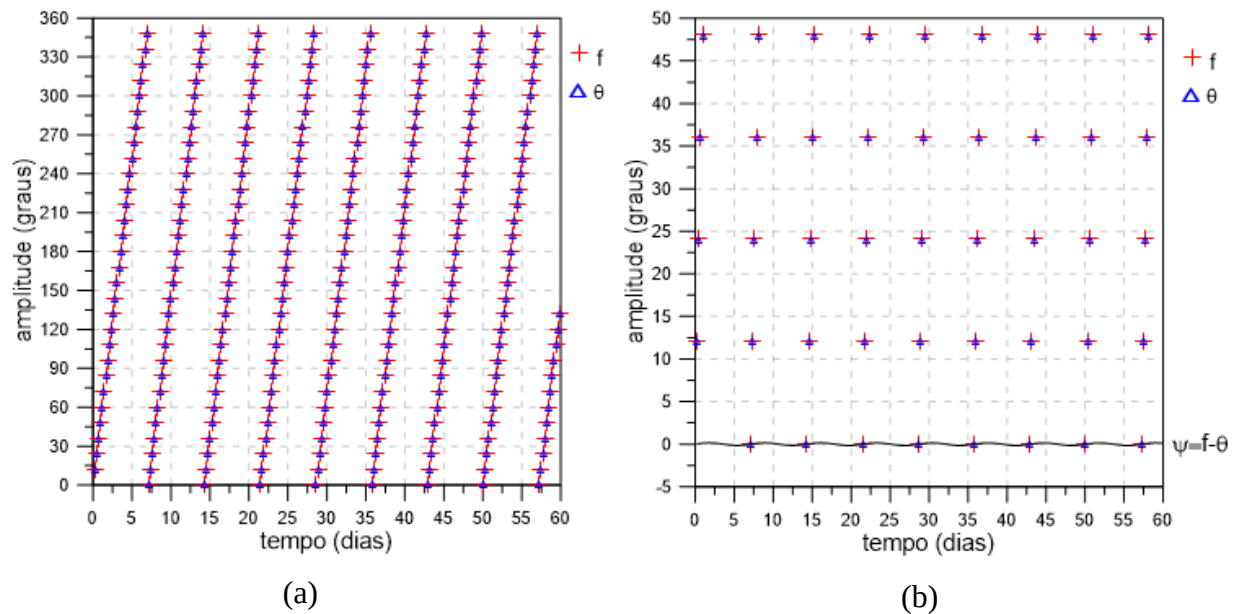
Fonte: Autoral (2020).

Ao fazermos os espectros das librações resolvidas a partir da equação analítica (em azul) e a partir da equação exata (em preto), podemos observar a amplitude das librações forçada, livre e ótica. Na Figura 3.1.2(a) temos o espectro da libração desenvolvida analiticamente. Podemos observar a amplitude da libração forçada, referente à frequência (n) e a amplitude da libração livre, referente à frequência (ω_0). Assim, considerando o caso homogêneo, a amplitude da libração forçada de Ganimedes é de aproximadamente $0,0002^\circ$, o

qual condiz com a Tabela 5. Ainda não temos o valor medido da libração de Ganimedes, porém, temos indícios de que ele não é homogêneo, como discutido na seção 1.2, teremos mais informações a partir da missão espacial JUICE (Steinbrugge et al., 2019).

Na Figura 3.1.2(b), temos o espectro da libração desenvolvida a partir da equação exata. Temos as amplitudes das librações forçada e ótica, referente à frequência (n) e à amplitude da libração livre, referente à frequência (ω_0). Como a amplitude da libração forçada é muito pequena em comparação com a amplitude da libração ótica, o primeiro pico de aproximadamente $0,145^\circ$ é praticamente a amplitude da libração ótica, o qual é bem maior que as outras librações por ela só depender da excentricidade: $2e = 2 \cdot 0,0013 = 0,0026$ radianos, convertendo em graus, temos: $0,0026 \cdot 57,2958 = 0,149^\circ$ (ver tabela 3).

Figura 3.1.3. Gráficos da evolução temporal em dias de Ganimedes. (a) Os pontos vermelhos correspondem ao $f(t)$ e os triângulos azuis correspondem ao $\theta(t)$. (b) Comparação da evolução temporal de $f(t)$ e $\theta(t)$ com $\psi(t)$ calculado numericamente. O recorte para até 40° foi feito para poder visulizar melhor, pois a amplitude da libração física é pequena.



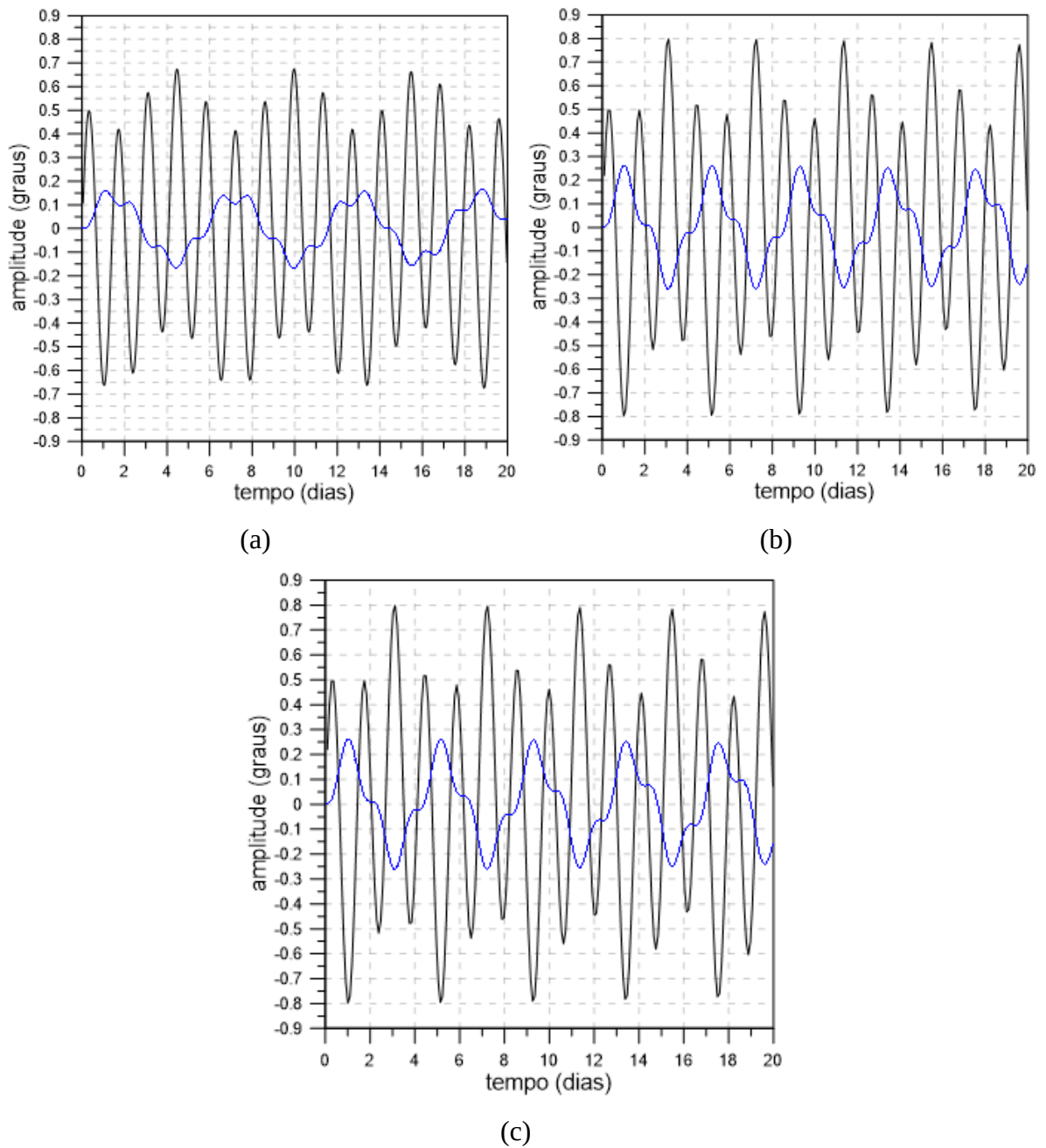
Fonte: Autoral (2020).

Os satélites aqui estudados estão em um movimento síncrono, logo o período orbital e o período de rotação são iguais. Dessa forma, podemos observar na Figura 3.1.3(a) que a anomalia verdadeira (f) e o ângulo de rotação do satélite medido em relação a uma linha inercial (θ) circulam com um período igual ao período orbital, assim como o ângulo $\psi(t) = f(t) - \theta(t)$, que é o ângulo da libração física, como podemos observar na Figura 3.1.3(b).

Isso ocorre com todos os satélites aqui estudados, já que todos estão em uma ressonância síncrona spin-órbita 1: 1.

3.2 Enceladus

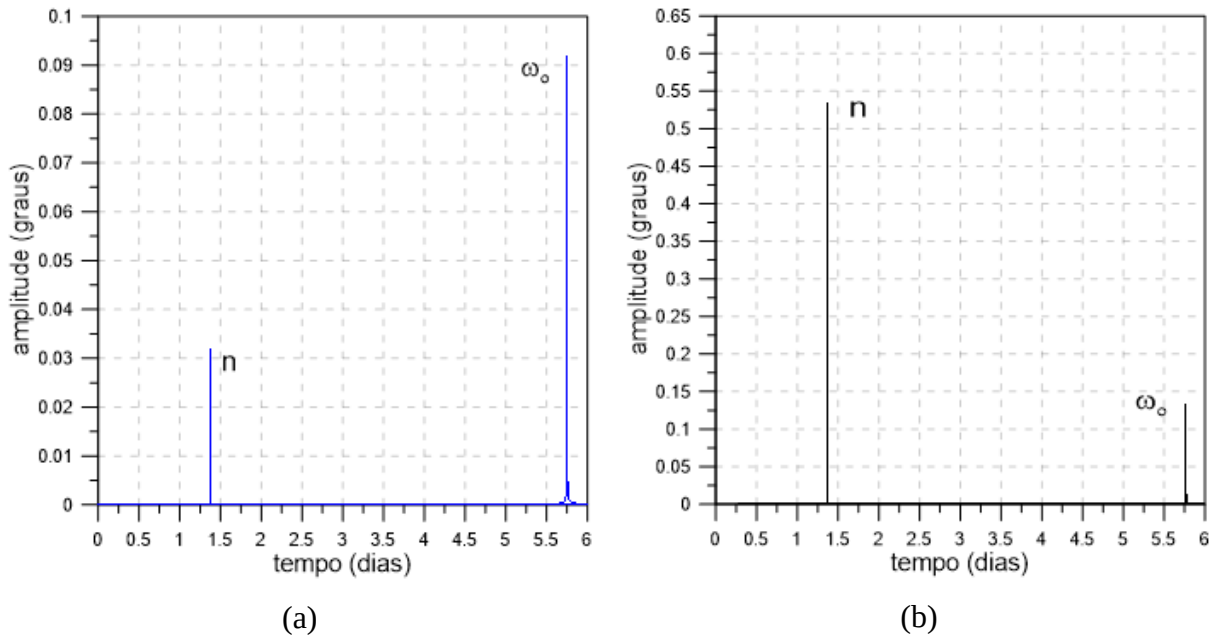
Figura 3.2.1. Gráfico comparação da libração física de Enceladus, resolvida a partir da equação analítica (equação 2.2.18) (azul) e a partir da equação exata (equação 2.1.33) (preto). (a) $\frac{B-A}{c} = 0,01891$. (b) $\frac{B-A}{c} = 0,03573$. (c) $\frac{B-A}{c} = 0,0607$.



Fonte: Autoral (2020).

A Figura 3.2.1 mostra as variações temporais de γ (Eq. 2.2.18) e ψ (Eq. 2.1.33) para três valores de $\frac{B-A}{c}$ do satélite de Enceladus. Como a excentricidade considerada nos três gráficos é a mesma, as diferenças de amplitude ocorrem devido às librações forçada e livre. Além disso, conforme aumentamos o valor de $\frac{B-A}{c}$, o período da libração livre diminui, e os períodos das librações ótica e forçada não mudam, pois ambas tem o período igual ao período rotacional/orbital, que é de aproximadamente 1,37 dias.

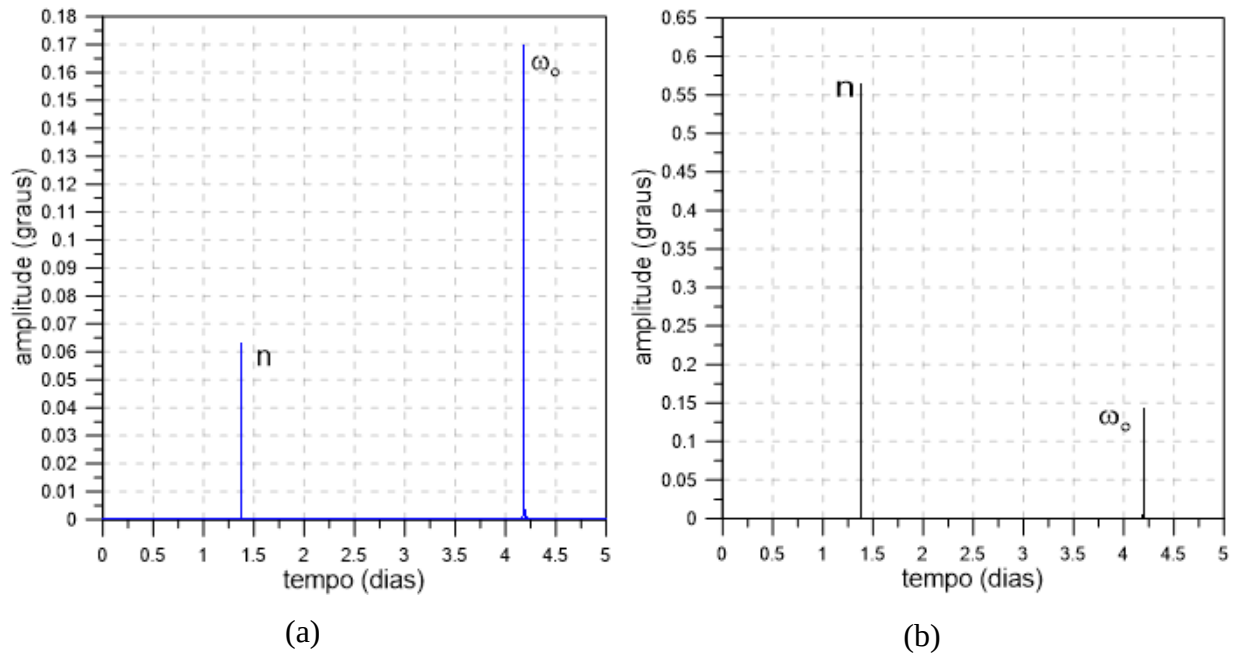
Figura 3.2.2. Gráficos da Transformada de Fourier (FFT) para Enceladus com $\frac{B-A}{c} = 0,01891$. (a) Libração física desenvolvida analiticamente. (b) Libração física desenvolvida numericamente.



Fonte: Autoral (2020).

Na Figura 3.2.2(a) temos o espectro da libração desenvolvida analiticamente. Podemos observar a amplitude da libração forçada, é aproximadamente $0,03^\circ$, o que condiz com a Tabela 3. Este é o valor da amplitude da libração forçada obtido a partir do valor mais atual de $\frac{B-A}{c}$ de Enceladus encontrado a partir das imagens da *Cassini* por Thomas et al. (2016). Como discutido na Seção 1.3, esta amplitude ($0,03^\circ$) é muito menor que o valor da amplitude da libração forçada de Enceladus ($0,120^\circ \pm 0,014^\circ$), o que sugere que o satélite não é homogêneo. Na Figura 3.2.2(b) temos as amplitudes das três librações, novamente notamos que a amplitude referente à frequência n é maior, devido à libração ótica.

Figura 3.2.3. Gráficos da Transformada de Fourier (FFT) para Enceladus com $\frac{B-A}{c} = 0,03573$. (a) Libração física obtida analiticamente. (b) Libração física obtida numericamente.

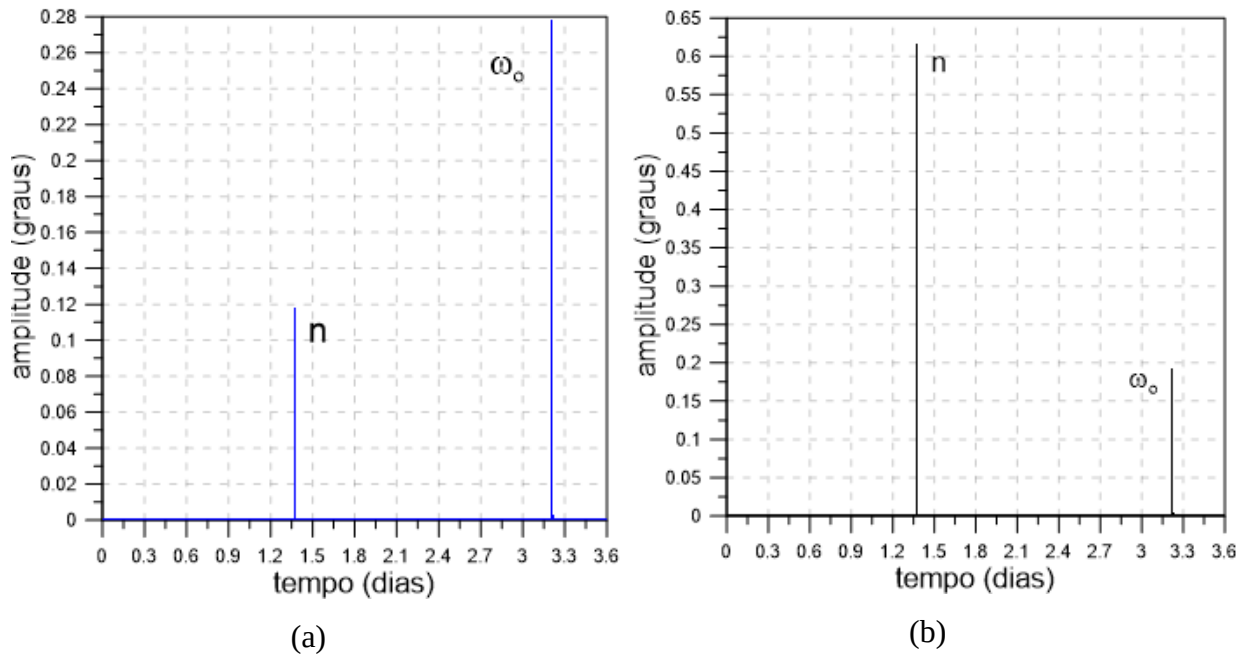


Fonte: Autoral (2020).

Na Figura 3.2.3 temos os espectros das librações física de Enceladus calculados com o valor de $\frac{B-A}{c}$ obtido a partir das imagens da *Voyager* por Dermott e Thomas (1994), o qual é um valor maior que o encontrado atualmente a partir das imagens da *Cassini* por Thomas et al. (2016). A Figura 3.2.3(a) mostra que a amplitude da libração forçada nesse caso é de aproximadamente $0,065^\circ$, maior que o valor obtido anteriormente (Figura 3.2.2(a)).

Na Figura 3.2.3(b), observa-se que a amplitude da libração relacionada à frequência n é maior comparada com a amplitude encontrada na Figura 3.2.2(b). Isso ocorre, pois a amplitude da libração forçada é maior do que no caso anterior, já que a amplitude da libração ótica não muda.

Figura 3.2.4. Gráfico da Transformada de Fourier (FFT) para Enceladus com $\frac{B-A}{c} = 0,0607$. (a) Libração física obtida analiticamente. (b) Libração física obtida numericamente.

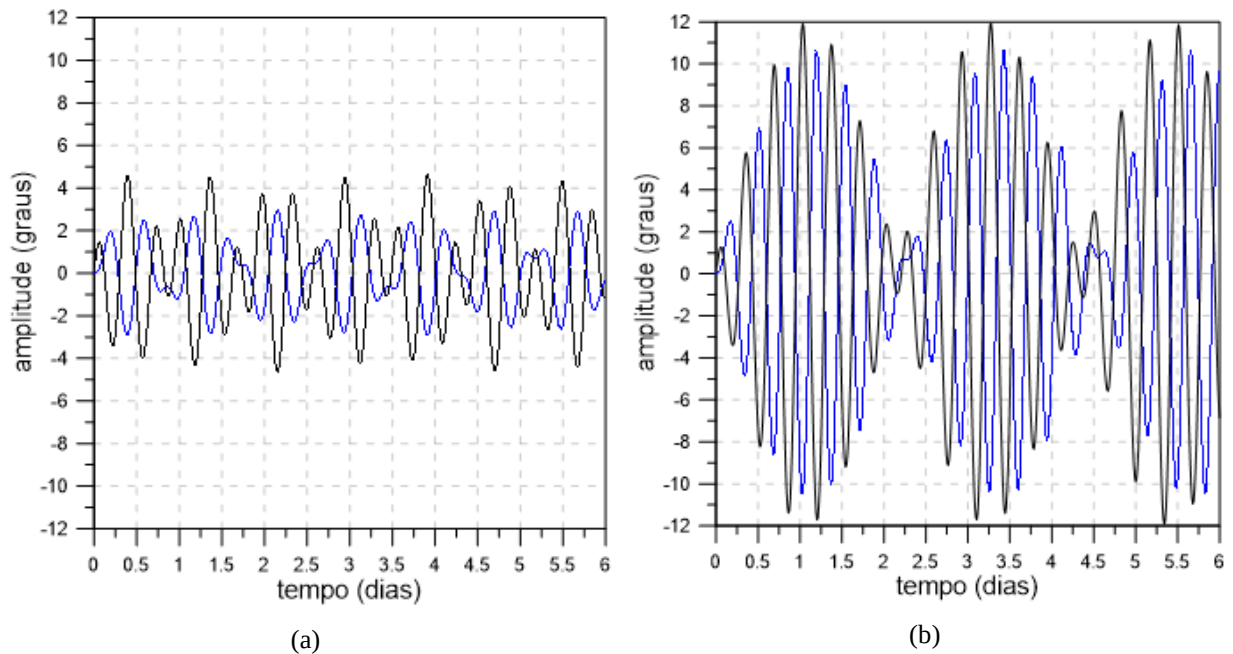


Fonte: Autoral (2020).

Na Figura 3.2.4(a) podemos observar que a amplitude da libração forçada é de aproximadamente $0,12^\circ$, já que usamos o valor de $\frac{B-A}{c}$ obtido para que a amplitude da libração forçada seja a encontrada em Enceladus. Devido a isso, temos o maior valor de $\frac{B-A}{c}$ considerado nesse trabalho para esse satélite e, dessa forma, observa-se que no caso de Enceladus ser homogêneo, o valor de $\frac{B-A}{c}$ deveria ser maior que o medido pela sonda espacial *Cassini*.

3.3 Phobos

Figura 3.3.1. Gráfico comparação da libração física de Phobos, resolvida a partir da equação analítica (equação 2.2.18) (azul) e a partir da equação exata (equação 2.1.33) (preto). (a) $\frac{B-A}{c} = 0,13245$. (b) $\frac{B-A}{c} = 0,24653$.



Fonte: Autoral (2020).

A Figura 3.3.1 mostra as amplitudes das librações para Phobos. Ao compararmos os gráficos acima, observamos que a amplitude da libração física para $\frac{B-A}{c} = 0,24653$ é maior que a amplitude da libração física para $\frac{B-A}{c} = 0,13245$. Isso ocorre devido às amplitudes das librações forçada e livre, pois a libração ótica só depende da excentricidade. Além disso, na Figura 3.3.1(b), uma vez que as frequências livre (ω_0) e forçada (n) de Phobos são relativamente próximas, (considerando o valor de $\frac{B-A}{c} = 0,24653$, $\omega_0 = 16,94366 \text{ rad/dia}$ e $n = 19,70206 \text{ rad/dia}$), as ondas se sobrepõem produzindo um padrão de intensidade conhecido como batimento. Com o decorrer do tempo as ondas vão ficando defasadas (ocorrendo interferências destrutivas), e em fase (ocorrendo interferências construtivas). A frequência do batimento é igual à diferença entre as frequências individuais das duas ondas, ou seja,

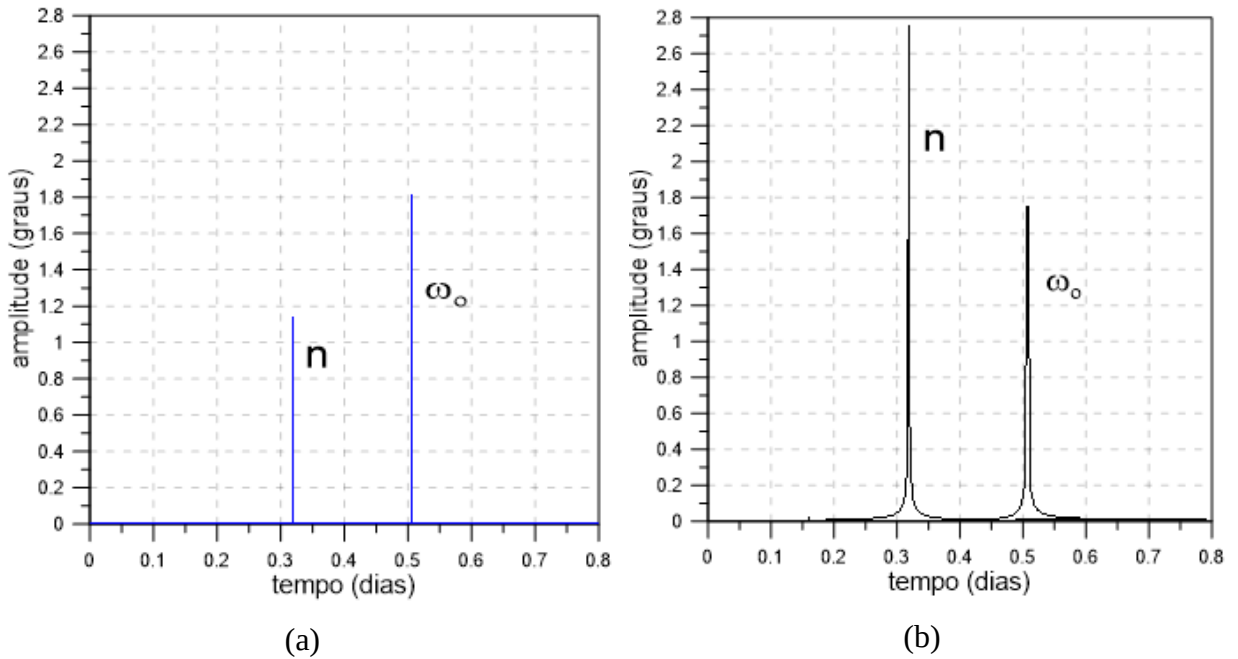
$$f_b = |\omega_0 - n|, \quad (3.1)$$

onde, f_b é a frequência do batimento, ω_0 a frequência livre e n a frequência forçada (Tipler; Mosca, 2009, p. 543 – 544). Ao calcularmos a frequência do batimento, temos $f_b = 2,76 \text{ rad/dia}$. Como a frequência é igual ao inverso do período, $f = \frac{1}{T}$, temos:

$$\frac{1}{T_b} = \left| \frac{1}{T_{\omega_0}} - \frac{1}{T_n} \right|, \quad (3.2)$$

onde, T_b é o período de batimento. $T_n = 0,3189 \text{ dias}$ e $T_{\omega_0} = 0,3708 \text{ dias}$ (tabela 5), resultando em $T_b = 2,2778 \text{ dias}$. Na figura 3.3.1(b) podemos notar que o gráfico se repete aproximadamente a cada $2,27 \text{ dias}$, correspondendo ao período de batimento.

Figura 3.3.2. Gráficos da Transformada Rápida de Fourier (FFT) de Phobos com $\frac{B-A}{c} = 0,13245$. (a) Libração física obtida analiticamente. (b) Libração física obtida numericamente.

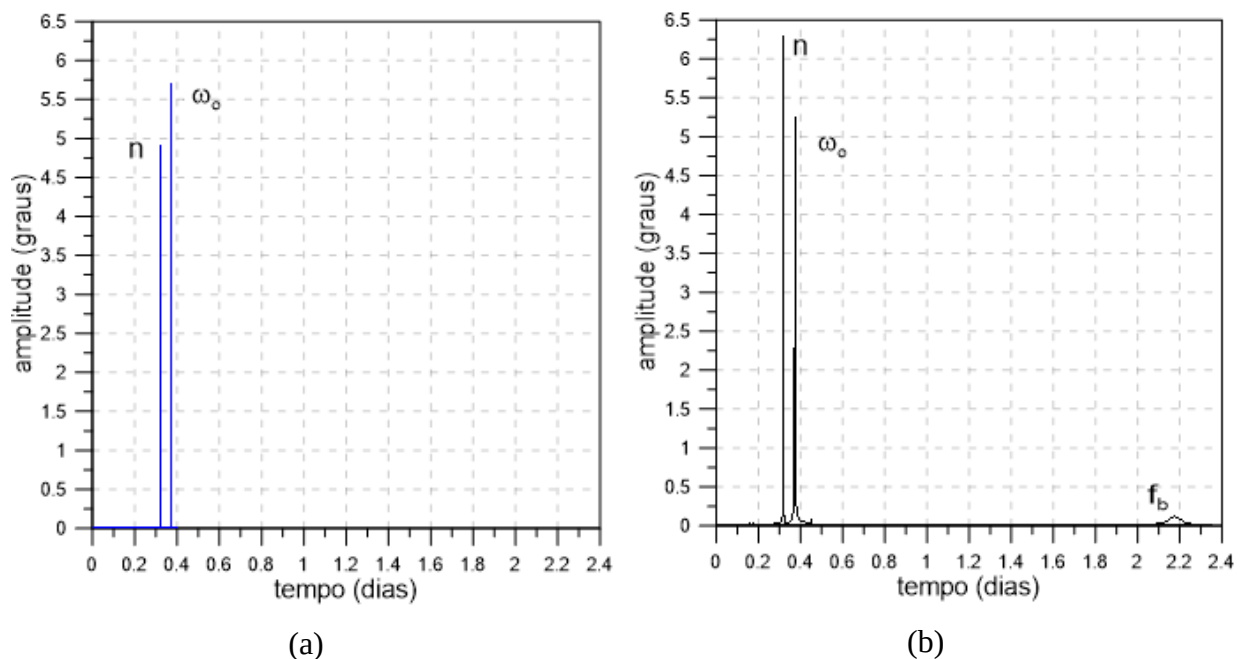


Fonte: Autoral (2020).

Na Figura 3.3.2(a) podemos observar que a amplitude da libração forçada é de aproximadamente $1,15^\circ$, o que é próximo do valor da amplitude da libração forçada de $1,2^\circ \pm 0,15^\circ$ obtido por Willner et al. (2010) a partir da sonda espacial *MEX* (ver Seção 1.4). Como a amplitude da libração obtida a partir da sonda espacial é coerente com o valor da amplitude da libração calculada analiticamente no modelo de estrutura interna homogênea, isso sugere que Phobos seja homogêneo. Porém, novos trabalhos vêm discutindo o nível de

heterogeneidade no interior de Phobos. Na Figura 3.3.2(b) observamos que a diferença entre as amplitudes da libração relacionada à frequência n obtidas numericamente não é tão alta como nos casos anteriores (Enceladus e Ganimedes). Isso ocorre, pois os valores das amplitudes da libração forçada e da libração ótica são próximos (ver Tabela 3).

Figura 3.3.3. Gráficos da Transformada Rápida de Fourier (FFT) de Phobos com $\frac{B-A}{c} = 0,24653$. (a) Libração física obtida analiticamente. (b) Libração física obtida numericamente.

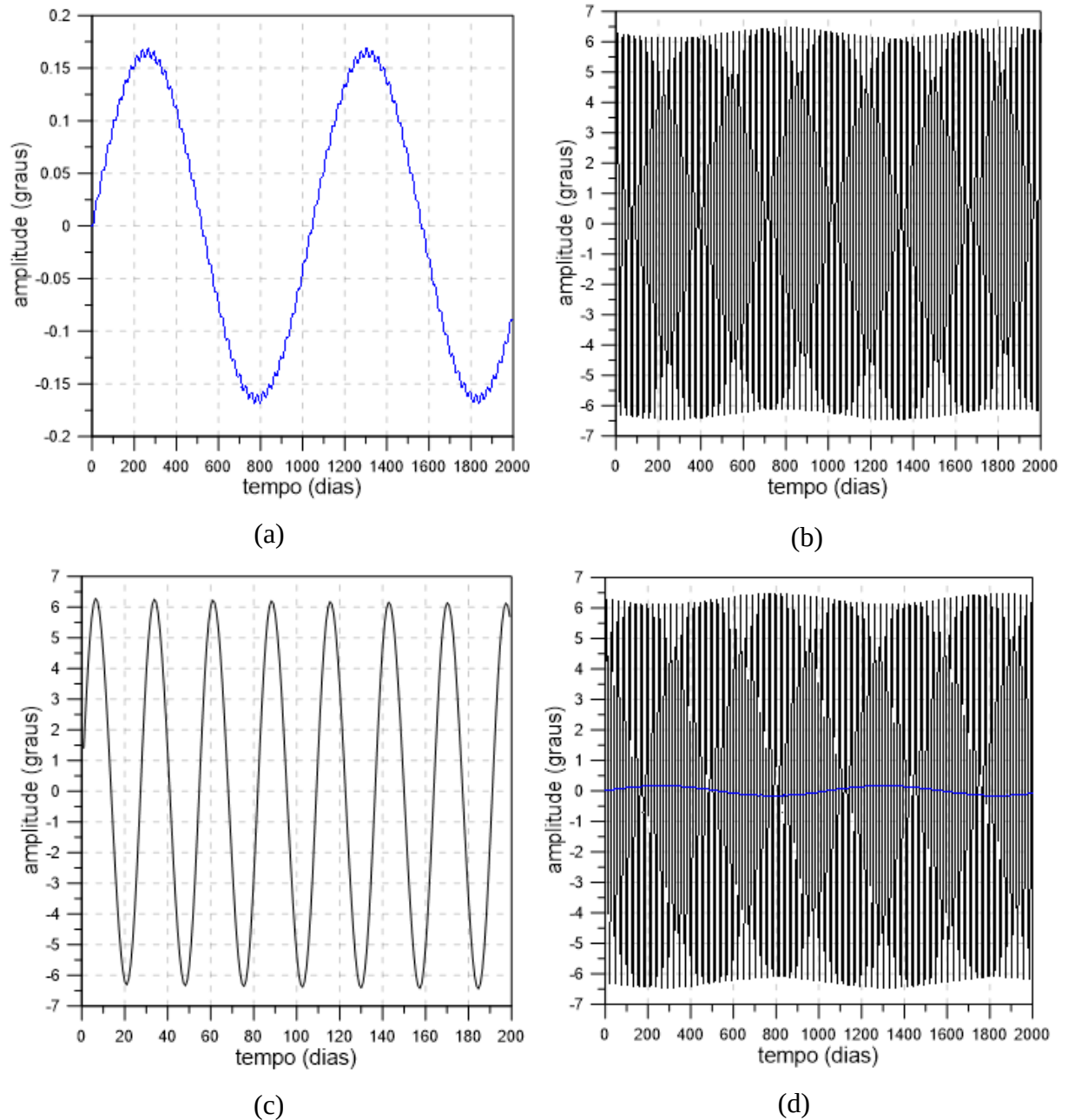


Fonte: Autoral (2020).

Seja agora o caso $\frac{B-A}{c} = 0,24653$. Temos aqui o maior valor da amplitude da libração forçada estudada nesse trabalho. Podemos observar na Figura 3.3.3(a) que a amplitude da libração forçada, é de aproximadamente 5° , o que condiz com a Tabela 3. Na Figura 3.3.3(b), podemos observar que a amplitude da libração forçada é maior que a amplitude da libração livre (a amplitude da libração relacionada à frequência n é de aproximadamente $6,5^\circ$). Dessa forma, a amplitude da libração ótica é aproximadamente $1,5^\circ$, o que é próximo do valor obtido na Tabela 3 ($1,7303^\circ$). Além disso, também temos um outro pico que é relacionado à frequência de batimento, um valor próximo do período calculado anteriormente $T_b = 2,2778 \text{ dias}$.

3.4 Lua

Figura 3.4.1. Gráfico da libração física da Lua: (a) Resolvida analiticamente (equação 2.2.18). (b) e (c) Desenvolvida numericamente a partir da equação exata (equação 2.1.33). (d) Comparação da libração física resolvida analiticamente (azul) e numericamente (preto).



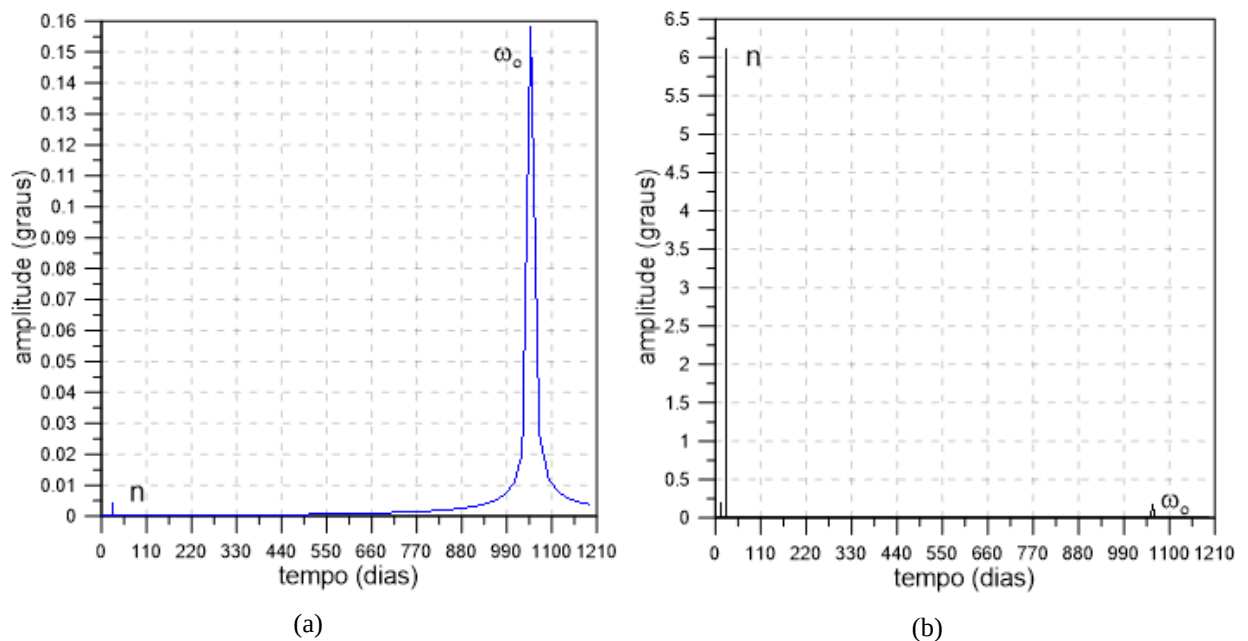
Fonte: Autoral (2020).

A Lua, assim como Ganimedes, tem os valores de $\frac{B-A}{c}$ e da excentricidade pequenos, sendo que, o valor de $\frac{B-A}{c}$ da Lua é o menor considerado nesse trabalho. Devido a isso, o período da libração livre, $T_{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$, é bem maior que os períodos das librações ótica e

forçada, $T = \frac{2\pi}{n}$. Porém, como o valor da excentricidade é maior que de $\frac{B-A}{C}$, a amplitude da libração ótica ($2e$) é bem maior em comparação com as outras amplitudes de libração.

Na Figura 3.4.1(a) temos o gráfico da libração desenvolvida analiticamente. Podemos observar duas librações: a libração livre, a qual tem maior amplitude e período, aproximadamente $0,16^\circ$ e o período aproximadamente 1000 dias; e a libração forçada. Na Figura 3.4.1(b) temos também a libração ótica e, devido a isso, a amplitude é de aproximadamente 6° . Também podemos observar o período da libração livre de aproximadamente 1000 dias. Na Figura 3.4.1(c), ao fazermos o recorte até 200 dias podemos ver que o menor período, referente à frequência (n), é condizente com o período rotacional/orbital, $T \approx 27$ dias, o qual corresponde ao período das librações forçada e ótica. Na Figura 3.4.1(d) temos a comparação entre as librações física obtidas analiticamente e numericamente; devido à libração ótica, a libração física resolvida a partir da equação exata (em preto), tem maior amplitude.

Figura 3.4.2. Gráficos da Transformada de Fourier (FFT) para Lua. (a) Libração física obtida analiticamente. (b) Libração física obtida numericamente.



Fonte: Autoral (2020).

Na Figura 3.4.2(a) podemos observar que a amplitude da libração forçada da Lua para o caso homogêneo é muito pequena, aproximadamente $0,005^\circ$, o que condiz com a Tabela 3. A amplitude e o período da libração forçada de Ganimedes é menor que o da Lua. Na Figura 3.4.2(b) o primeiro pico de aproximadamente 6° é praticamente a amplitude da libração ótica, pois a amplitude da libração forçada é pequena.

Capítulo 4 – Superfície de Seção

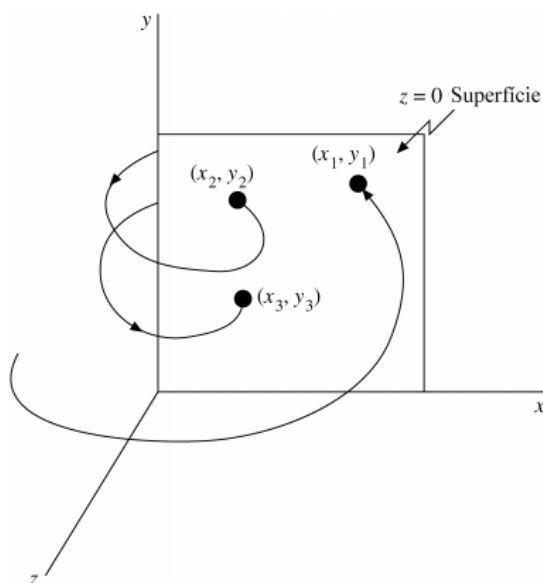
4.1 Introdução

O problema spin-órbita Eq. (2.1.33) é um sistema não autônomo com um grau de liberdade já que o eixo de rotação é restrito a ser perpendicular ao plano da órbita.

A equação do movimento depende do tempo periodicamente tanto por meio da anomalia verdadeira (f) quanto da distância instantânea (r). Sistemas com um grau de liberdade não autônomos são chamados de sistemas com 1,5 graus de liberdade.

Para investigar a dinâmica de rotação do problema spin-órbita, o qual é uma equação diferencial não linear (EDN), podemos aplicar o método das superfícies de seção. Seguindo Arfken (2007, p. 825 - 826) a superfície de seção, ou seção de Poincaré, é uma forma de analisar as soluções das (EDNs) em termos de mapas discretos: a trajetória da solução de uma EDN intercepta um plano transversal em uma série de pontos em tempos discretos crescentes que são registrados e analisados por meios gráficos. Esta técnica pode ser útil quando solucionamos uma EDN numericamente por meio de simulações computacionais fazendo com que possamos gerar superfícies de seção das trajetórias. Dessa forma, a superfície de seção reduz um sistema contínuo no tempo (fluxo) em um espaço de fase de dimensão N em um de dimensão $N-1$. Ilustramos abaixo uma superfície de seção quando as trajetórias cruzam o plano $z = 0$; o conjunto de marcações das órbitas no plano transversal, $z = 0$, nos dá a superfície de seção (Arfken, 2007, p. 825).

Figura 4.1.1. Figura esquemática de uma superfície de seção, ou seção de Poincaré.



Fonte: Arfken, 2007, p. 825.

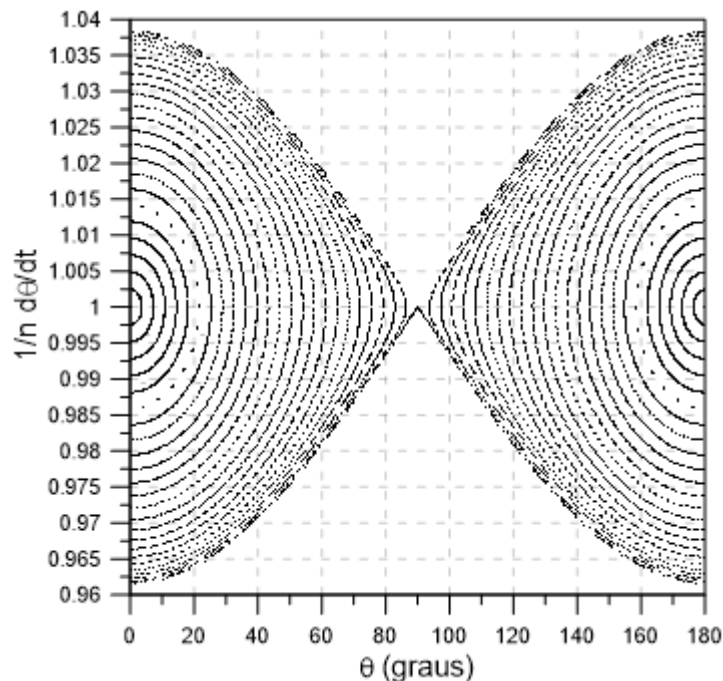
Os satélites aqui estudados encontram-se na natureza em um movimento síncrono, $\dot{\theta} = n$ (ressonância spin-órbita 1:1). Logo, o período orbital e o período de rotação são equivalentes, de modo que a anomalia verdadeira (f) e o ângulo de rotação do planeta medido em relação a uma linha inercial (θ) circulam com um período igual ao período orbital (como observado no capítulo 3).

De acordo com o modelo conservativo, os efeitos do torque do planeta na rotação do satélite dependem basicamente de dois parâmetros: a excentricidade da órbita e o formato elipsoidal com $A < B < C$, onde A, B, C são os momentos principais de inércia. No nosso caso, veja novamente a EDN de rotação (Eq. 2.1.33), $\ddot{\theta} = \frac{3}{2} \frac{(B-A)}{C} \frac{Gm_p}{r(t)^3} \sin 2(\theta - f)$.

As superfícies de seção são definidas com os valores de $\frac{\dot{\theta}}{n} \times \theta$ dos satélites sempre que eles passam pelo periastro. Ou seja, para dada condição inicial $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$, sempre que a anomalia verdadeira do satélite completa um período, $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ são registrados.

Assim, devido ao fato desses satélites serem síncronos podemos observar, a partir das superfícies de seção que, $\dot{\theta} \times \theta$ variam regularmente obtendo órbitas fechadas e movimento periódico, aproximadamente em torno do ponto fixo $\dot{\theta} = n$. Essas curvas fechadas em torno do estado síncrono mostram a amplitude da libração física do eixo principal do satélite em relação ao planeta, tal como mostrado no exemplo da Figura 4.1.2.

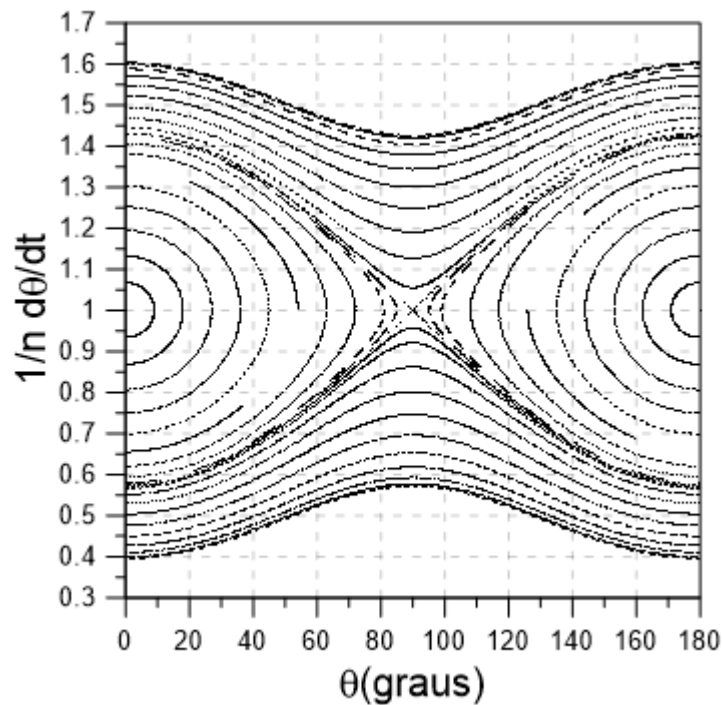
Figura 4.1.2 Exemplificação das curvas em torno do estado síncrono.



Fonte: Autoral (2020).

Nas separatrizes da ressonância das superfícies de seção, em geral, a dinâmica é caótica, pois a libração física se torna instável em amplitudes maiores. Quanto menor o valor da excentricidade e de $\frac{B-A}{C}$ (achatamento, ou prolatidade do corpo), mais fina será a camada caótica observada nas separatrizes, pois menor será o efeito do torque. Com $e = 0$, ou seja, uma órbita circular, não temos caos, como observado na Figura 4.1.3, sendo o achatamento (ou prolatidade) do satélite responsável pelo tamanho das ilhas de ressonância spin-órbita.

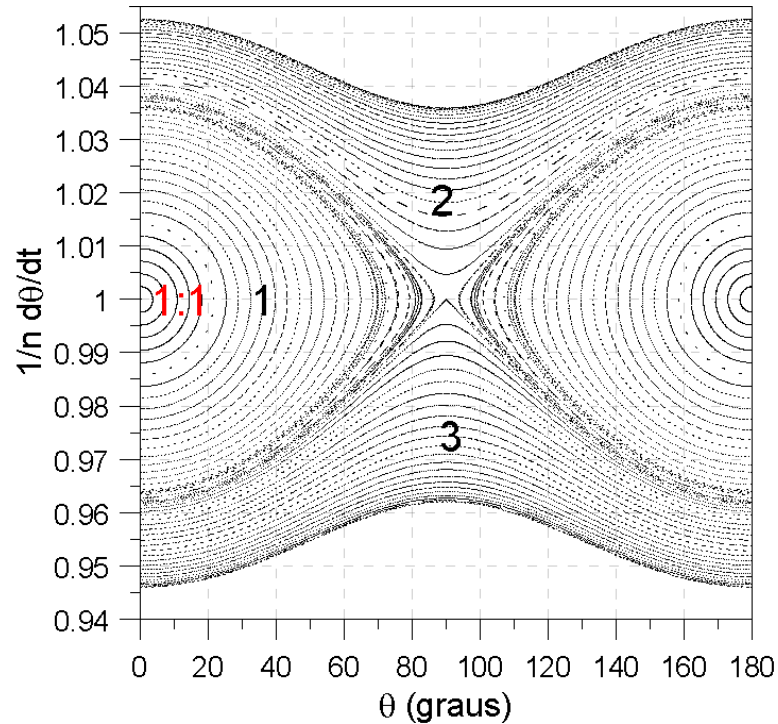
Figura 4.1.3 Superfície de seção de Enceladus com $\frac{B-A}{C} = 0,0607$ e com $e = 0$.



Fonte:Autorial (2020).

4.2 Ganimedes

Figura 4.2.1. Superfície de seção de Ganimedes.

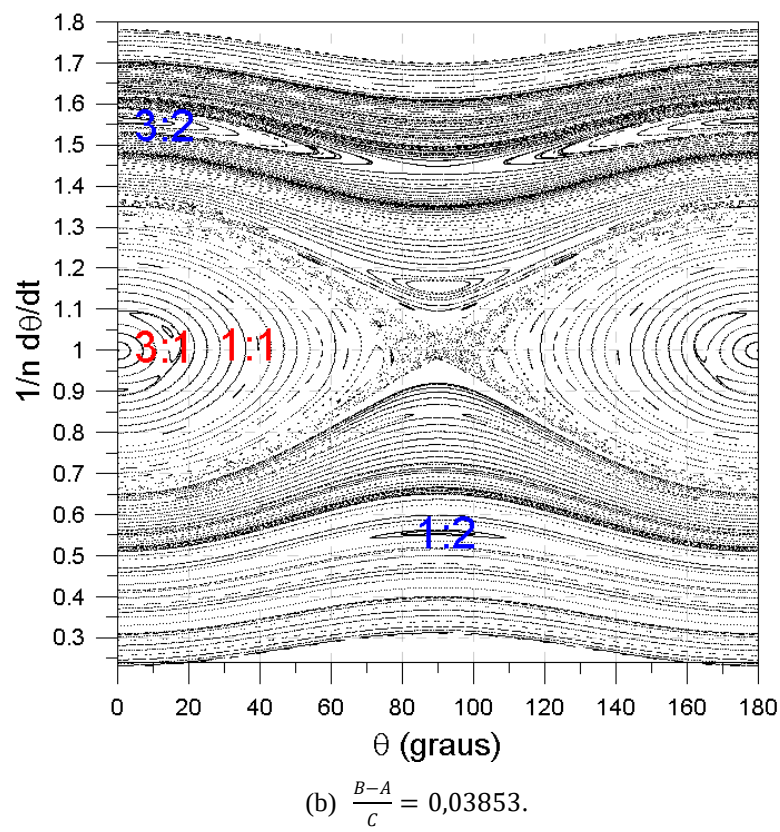
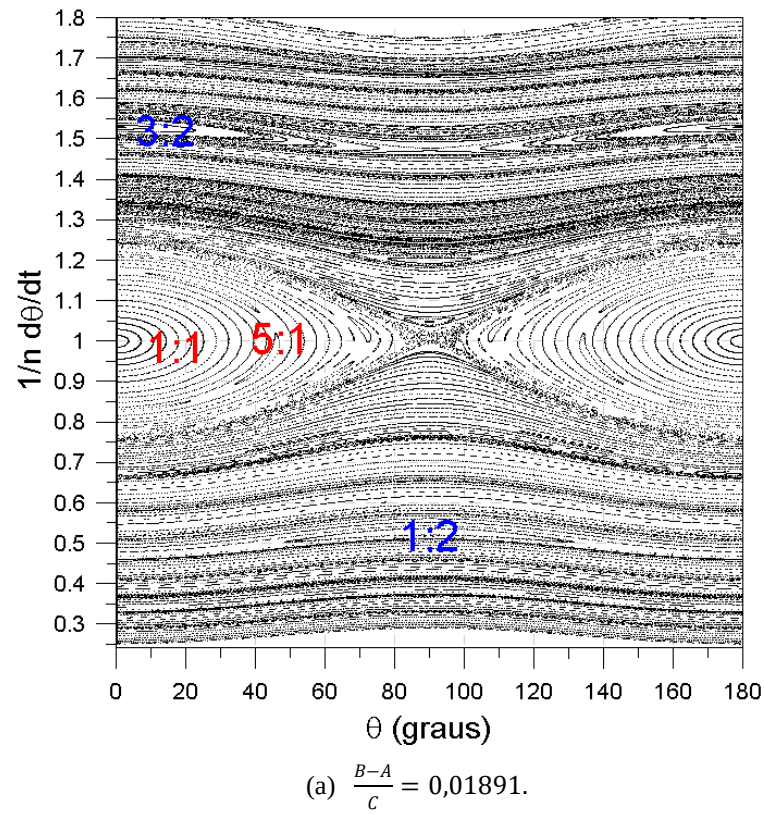


Fonte: Autoral (2020).

Podemos observar que Ganimedes tem uma dinâmica de rotação bem regular: a ilha síncrona (região 1) domina o espaço de fase, e não notamos nenhuma faixa caótica ao redor da separatriz. As áreas indicadas pelos números 2 e 3 correspondem a regiões de espaço de fase onde $\psi = \theta - nt$ circula, de modo que as condições iniciais se encontram distintas do sincronismo 1:1. As librações ocorrem somente na ilha síncrona, onde temos uma comensurabilidade spin-órbita 1:1, assim como foi representado na Figura 4.2.1. A dinâmica rotacional é bem regular devido ao fato de sua excentricidade ser muito pequena, $e = 0,0015$, assim como o achatamento do satélite $\frac{B-A}{C} = 0,0004913$.

4.3 Enceladus

Figura 4.3.1. Superfície de seção de Enceladus.



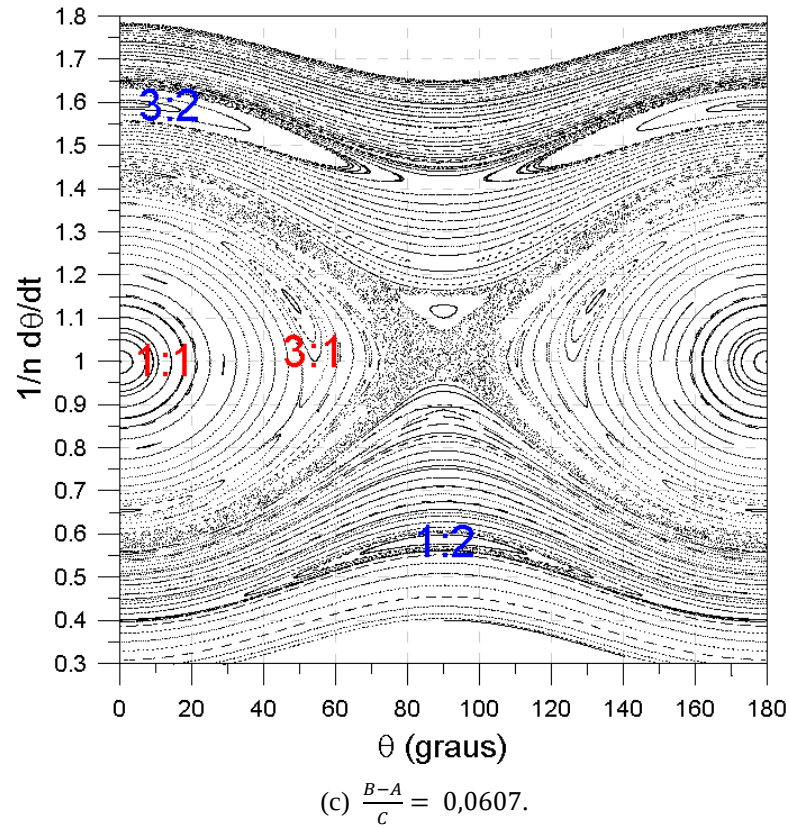
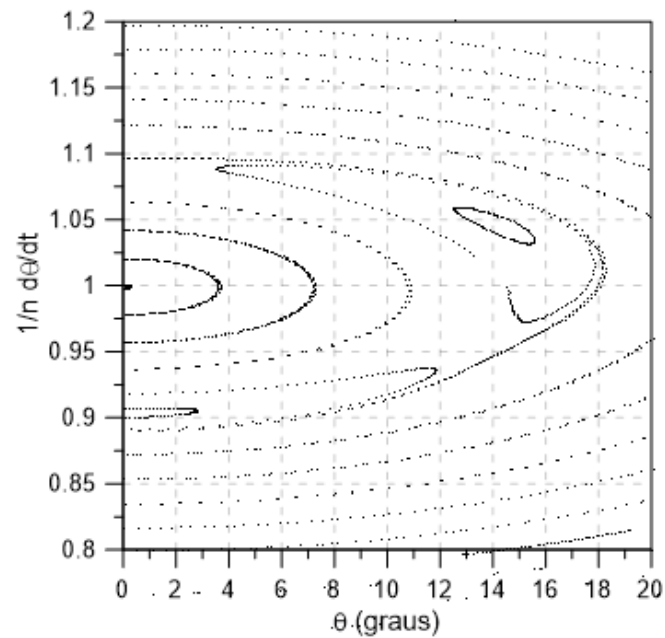


Figura 4.3.2 Zoom em torno do ponto fixo da superfície de seção de Enceladus com $\frac{B-A}{C} = 0,03853$, para melhor visualizar a ressonância secundária.



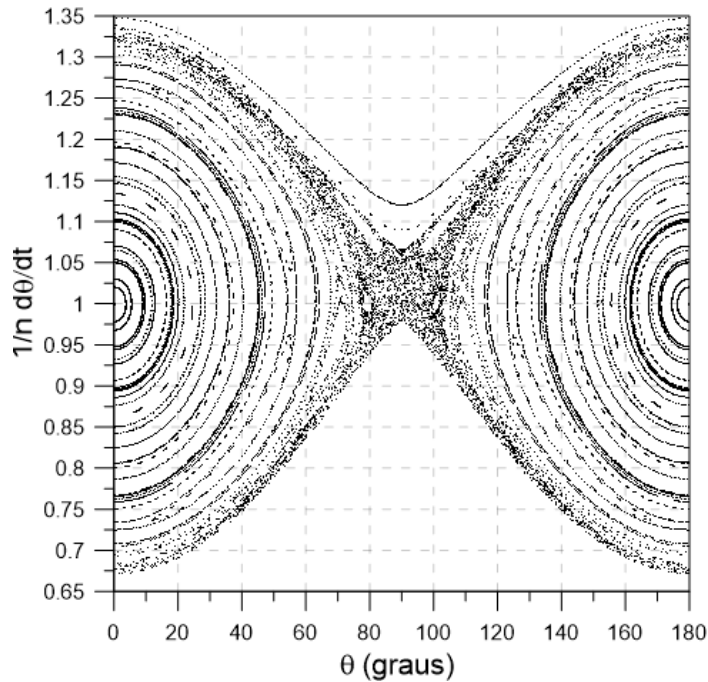
Fonte: Autoral (2020)

Na Figura 4.3.1(a), temos o menor valor de $\frac{B-A}{C}$ de Enceladus considerado nesse trabalho. Observamos duas ressonâncias spin-órbita, 3:2 (o corpo gira três vezes a cada duas

órbitas²³) e a 1:2 (uma vez a cada duas órbitas) abaixo do sincronismo. Vemos na Figura 4.3.1 (a) uma cadeia de cinco ilhas secundárias ao redor do sincronismo. Isso ocorre, pois considerando a razão dos momentos de inércia $\frac{B-A}{C} = 0,01891$, existe uma quase comensurabilidade entre a frequência de libração e a frequência orbital, sendo $\frac{\omega_0}{n} = \sqrt{3(B-A)/C} = 0,2381$, o que implica em $\omega_0 \approx \frac{1}{5}n$; logo a frequência da libração está em uma ressonância 5:1 com o movimento orbital.

Na Figura 4.3.1(b), onde, $\frac{B-A}{C} = 0,03853$, ocorre outra ressonância secundária entre a frequência de libração e a frequência orbital, sendo $\frac{\omega_0}{n} = \sqrt{3(B-A)/C} \approx 0,34$, o que implica em $\omega_0 \approx \frac{1}{3}n$. Assim, a frequência da libração está em uma ressonância 3:1 com o movimento orbital (podemos observar melhor na Fig. 4.3.2), o que ocasiona em uma cadeia de três ilhas secundárias ao redor do ponto de equilíbrio síncrono, como indicado na figura (e.g. Wisdom, 2004, p. 485). Caso considerássemos $\frac{B-A}{C} = 0,03573$, teríamos $\frac{\omega_0}{n} = \sqrt{3(B-A)/C} \approx 0,327$ o que implica em $\omega_0 \approx \frac{1}{3}n$, porém, ao fazermos a superfície de seção não é possível enxergar as três ilhas secundárias ao redor do sincronismo 1:1, como mostra a Figura 4.3.3.

Figura 4.3.3. Superfície de seção de Enceladus com $\frac{B-A}{C} = 0,03573$.

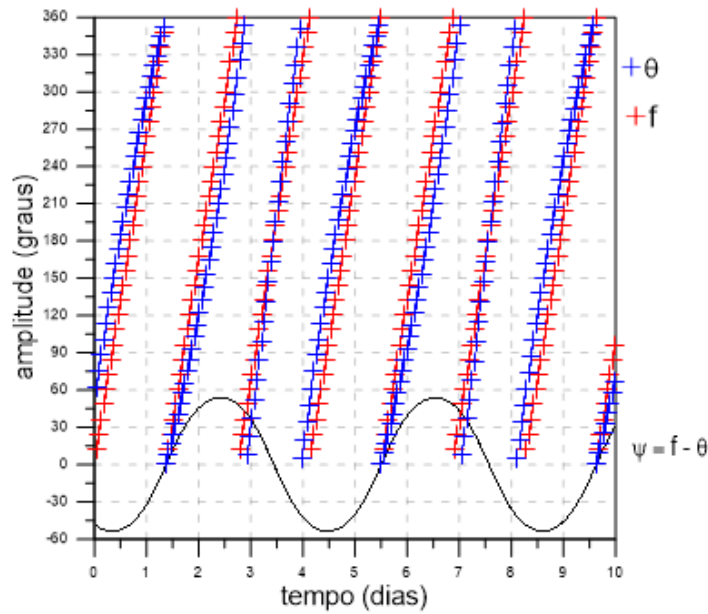


Fonte: Autoral (2020).

²³No caso 3:2, temos $\frac{\dot{\theta}}{n} = \frac{3}{2}$, assim $3n = 2\dot{\theta}$. Dessa forma, $3 \cdot \frac{2\pi}{T_n} = 2 \cdot \frac{2\pi}{T_{\dot{\theta}}}$, o que nos dá: $3T_{\dot{\theta}} = 2T_n$.

Na Figura 4.3.1(c), temos o maior valor de $\frac{B-A}{c}$ de Enceladus estudado aqui, com isso, podemos observar que a dinâmica de rotação de Enceladus é mais perturbada. Há uma faixa maior de caos em torno da separatriz da superfície de seção, e as ressonâncias spin-órbita 3:2 e 1:2 tem maior extensão. Na Figura 4.3.4 temos o gráfico da evolução temporal de f, θ e ψ com as condições iniciais adequadas: $\dot{\theta} = 1,14n$ e $\theta = 48^\circ$ (Figura 4.3.1 (c)), e podemos observar que ocorre uma ressonância secundária 3:1 entre a frequência de libração e o movimento médio, ou seja ocorrem três librações a cada período orbital.

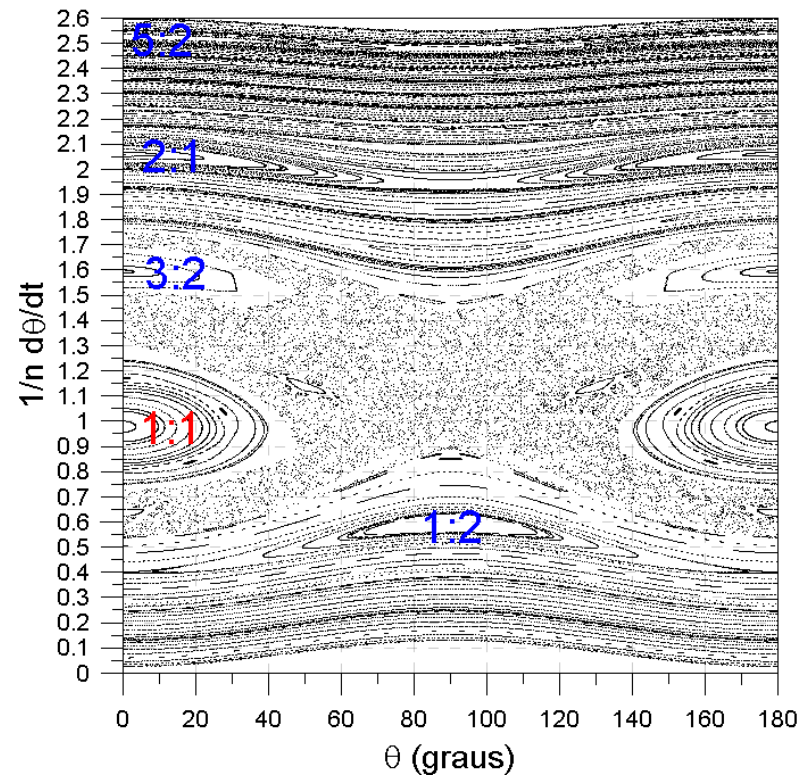
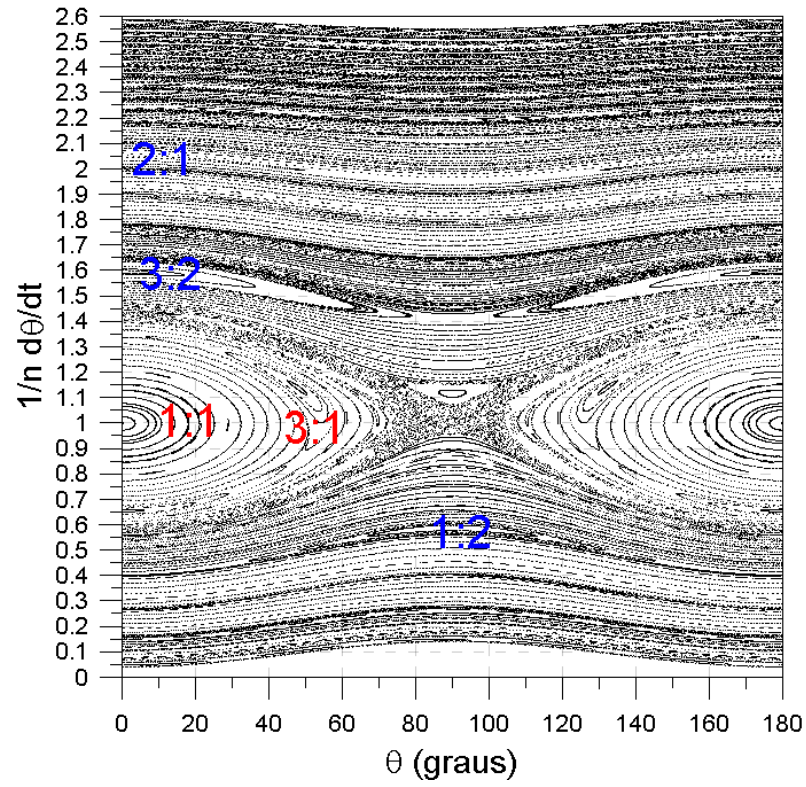
Figura 4.3.4. Evolução temporal de f, θ e ψ para Enceladus com $\frac{B-A}{c} = 0,0607$ com as condições iniciais correspondentes à ressonância secundária 3:1 estudada em Wisdom (2004).

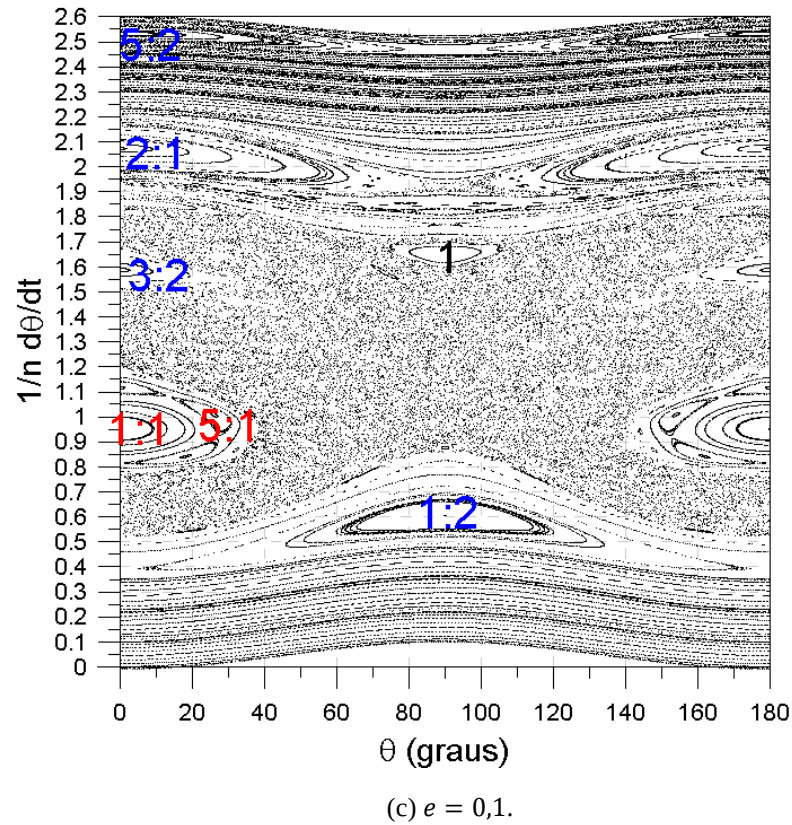


Fonte: Autoral (2020).

Nas Figuras (4.3.5 (a, b, c)) temos o exemplo de Enceladus considerando $\frac{B-A}{c} = 0,0607$; e as respectivas excentricidades: $e = 0,0047$, $e = 0,047$ e $e = 0,1$.

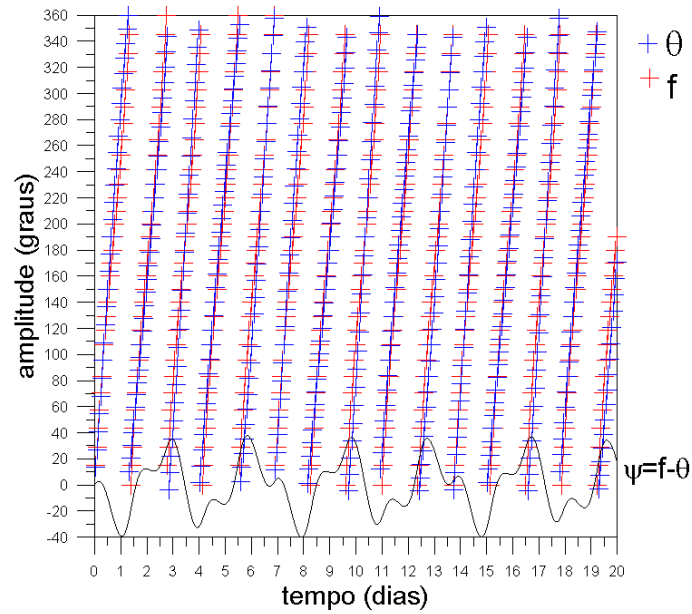
Figura 4.3.5. Superfície de seção de Enceladus com $\frac{B-A}{c} = 0,0607$.





Observa-se que ao aumentarmos o valor da excentricidade, aumenta-se a faixa caótica, o que deforma a ilha associada ao sincronismo. Aumentam-se também as áreas no espaço de fase das ilhas spin-órbita próximas, tais como, 3:2, 2:1 e 1:2. E, aparecem novas ressonâncias spin-órbitas (região 1, e a ressonância spin-órbita 5:2). Além disso, ao considerarmos $e = 0,1$ surgem ressonâncias secundárias. A partir do gráfico da evolução temporal de f , θ e ψ com as condições iniciais adequadas: $\dot{\theta} = 1,13n$ e $\theta = 0^\circ$ (Fig. 4.3.6), observa-se uma ressonância secundária 5:1.

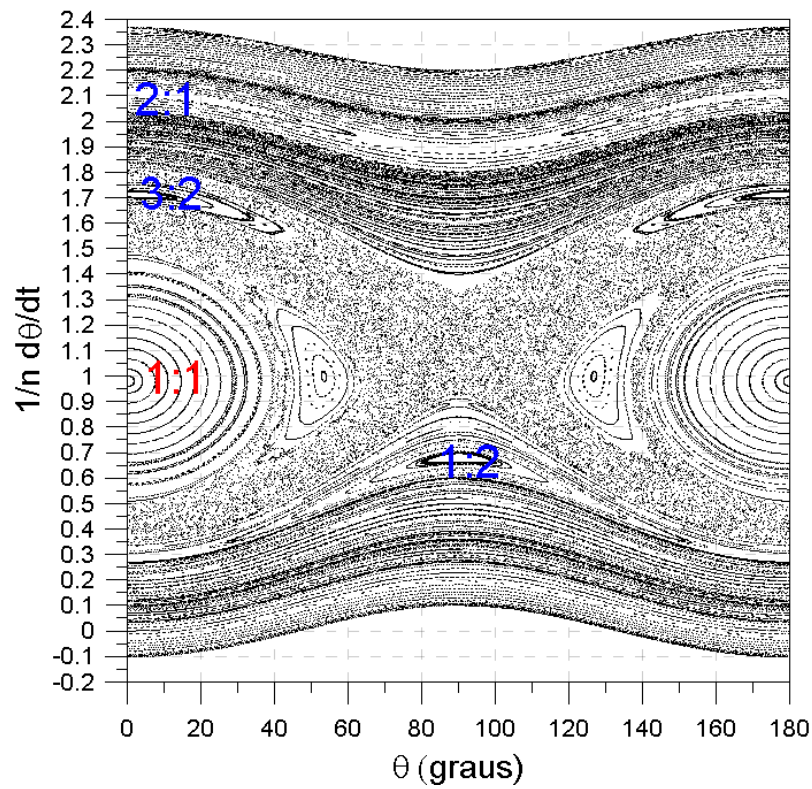
Figura 4.3.6. Evolução temporal de f , θ e ψ para Enceladus com $e = 0,1$ com as condições iniciais correspondentes à ressonância secundária.



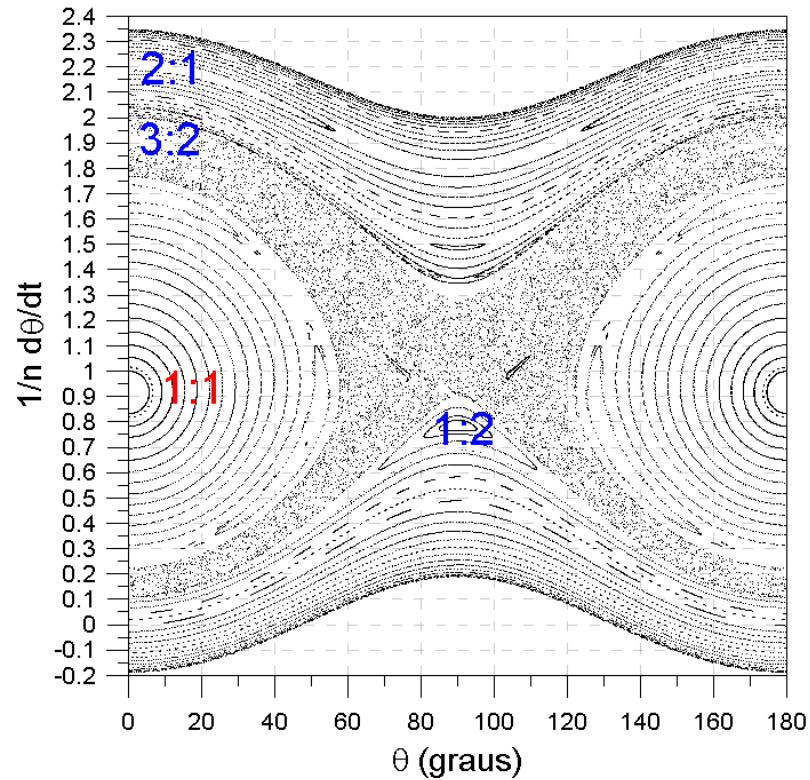
Fonte: Autoral (2020).

4.4 Phobos

Figura 4.4.1. Superfície de seção de Phobos.



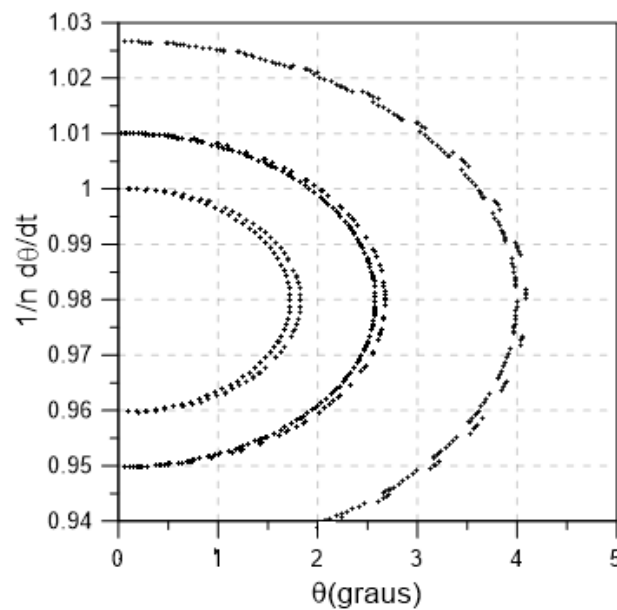
(a) $\frac{B-A}{c} = 0,13245$.



(b) $\frac{B-A}{C} = 0,24653$.

Nas Figuras 4.4.1(a,b) podemos notar uma grande faixa caótica na separatriz da superfície de seção. Temos ressonâncias spin – órbita: 2:1 , 3:2 (que está no centro da zona caótica) e 1:2, que é a ilha na separatriz logo abaixo da faixa caótica. Na Figura 4.2.2 vemos que o ponto fixo correspondente ao equilíbrio do sistema da Figura 4.4.1(a) não é exatamente em $\dot{\theta} = n$.

Figura 4.4.2 Zoom no ponto fixo da imagem 4.2.1(a).



Fonte: Autoral (2020).

Podemos calcular esse deslocamento a partir da equação de $\dot{\theta}/n$. A dedução de $\dot{\theta}/n$ é feita a partir da Eq. (2.2.1), na qual defini-se: $\gamma \equiv \theta - pM$, onde $M = n(t - \tau)$. Considerando $\tau = 0$ e $p = 1$, temos,

$$\gamma = \theta - nt. \quad (4.4.1)$$

Ao derivar a Eq. (4.4.1) e dividi-la por n , temos que:

$$\frac{\dot{\theta}}{n} = \frac{\dot{\gamma}}{n} + 1. \quad (4.4.2)$$

A partir da Eq. (2.2.14), a libração forçada é dada por, $\gamma = \frac{2\omega_0^2 e}{-n^2 + \omega_0^2} \sin(nt)$. Então, $\dot{\gamma} = n \frac{2\omega_0^2 e}{-n^2 + \omega_0^2} \cos(nt)$, o que resulta em:

$$\frac{\dot{\gamma}}{n} = -\frac{2\omega_0^2 e}{n^2 - \omega_0^2} \cos(nt), \quad (4.4.3)$$

sendo $k_{1:1} = \frac{2\omega_0^2 e}{-n^2 + \omega_0^2}$, onde k é a amplitude da libração forçada. Portanto, o ponto de equilíbrio da ressonância 1:1 está localizada em (Callegari; Rodríguez, 2013, p. 400):

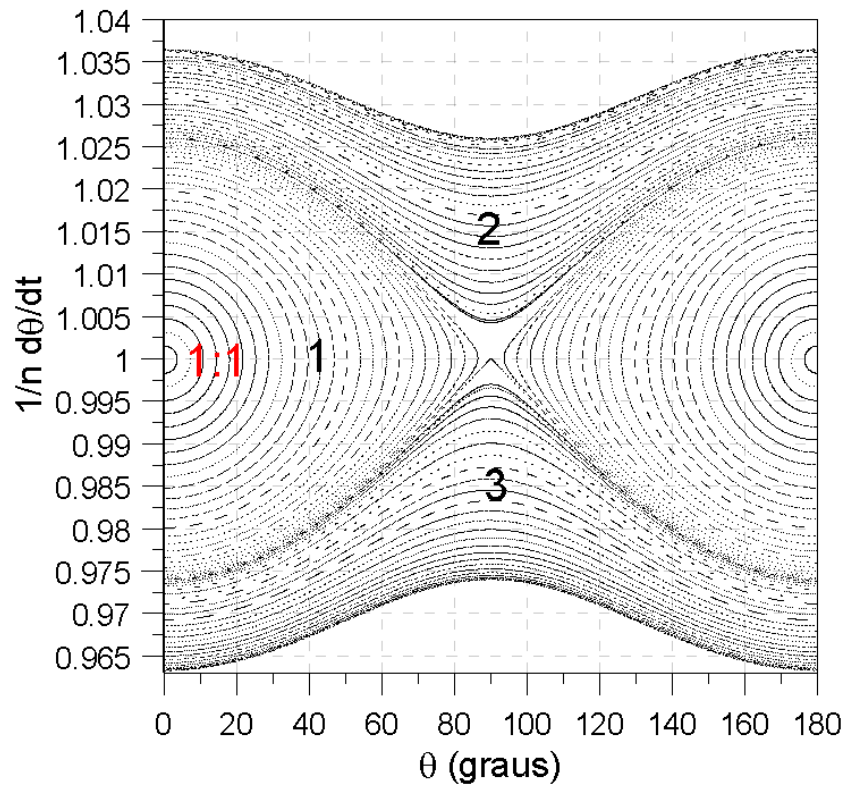
$$\frac{\dot{\theta}}{n} \approx 1 + k_{1:1} < 1. \quad (4.4.4)$$

Desta forma, a amplitude do deslocamento do ponto fixo é igual à amplitude da libração forçada. Na Figura 4.4.1(a), $\dot{\theta} \approx 0,98n$, e na Figura 4.4.1(b) observa-se o deslocamento do ponto fixo de $\dot{\theta} = n$ para $\dot{\theta} \approx 0,91n$. Esse deslocamento é maior comparado à Figura 4.4.1(a). Isso ocorre pois a amplitude da libração forçada em Phobos com $\frac{B-A}{C} = 0,24653$, é a maior entre os satélites aqui estudados.

Como discutido em Wisdom (1987, p. 1353) a faixa de caos em Phobos é muito grande, inclusive considerando a amplitude da libração forçada encontrada por Duxbury e Callahan (1982) como $0,8^\circ$ (ver seção 1.4).

4.5 Lua

Figura 4.5.1. Superfície de seção da Lua.



Fonte: Autoral (2020).

O valor da excentricidade da Lua é $e = 0,054900$ e o valor de $\frac{B-A}{C}$ é o menor valor entre os satélites estudados neste trabalho, sendo $\frac{B-A}{C} = 0,0002278$ (Makarov et al., 2016, p. 668). Observa-se que a ilha síncrona domina o espaço de fase (região 1), sendo a camada caótica imperceptível. As librações ocorrem na ilha síncrona, neste caso, temos somente a comensurabilidade spin-órbita 1:1. Acima (região 2) e abaixo (região 3) do sincronismo ocorrem órbitas correspondentes à circulação.

Comparando as Figuras 4.2.1 e 4.5.1, podemos observar que o espaço de fase de rotação da Lua apresenta um aspecto similar ao de Ganimedes, já que ambas as superfícies de seção são regulares por terem os valores da excentricidade e de $\frac{B-A}{C}$ pequenos.

Capítulo 5 – Camadas

Neste capítulo, vamos estudar a dinâmica rotacional de Ganimedes e Enceladus considerando que os seus interiores sejam diferenciados, ou sejam compostos por camadas com diferentes propriedades físicas (densidade, espessura etc). O modelo mais simples é o que considera um núcleo interior sólido, sobreposto por uma camada fluida (oceano global) e uma casca externa com as propriedades de gelo (Schubert et al., 1996; Hussmann et al., 2010; Thomas et al., 2016). Em nosso estudo a casca será representada pelo índice “s”, o núcleo pelo índice “i”, e o oceano global pelo índice “o”.

5.1 Modelo A

Neste primeiro modelo consideramos o interior do satélite (oceano e o núcleo) esfericamente simétrico e homogêneo. Nesse caso, o torque do planeta neste interior é nulo, de modo que, o movimento no interior do satélite é desprezado. Considera-se também neste modelo A que o movimento da casca seja independente de seu interior, ou seja, não há nenhuma forma de acoplamento entre eles. Assim, a libração da superfície corresponde somente à libração da casca de gelo. Com essas hipóteses, nós podemos expressar a libração da casca de acordo com a equação da rotação para o caso homogêneo (eq. 2.1.33), porém, neste modelo, usa-se o índice “s” por se tratar do movimento da casca:

$$C_s \ddot{\theta}_s - \frac{3}{2} (B_s - A_s) \frac{G m_p}{r(t)^3} \sin 2(f - \theta_s) = 0, \quad (5.1.1)$$

onde, A_s , B_s e C_s são os momentos de inércia da casca. Como assumimos um interior esfericamente simétrico e homogêneo, o interior não contribui na diferença do momento de inércia, então, a diferença do momento de inércia equatorial é igual para todo o satélite ($B - A$).

Temos que, a frequência da libração livre da casca ω_s é (análogo à eq. 2.2.11):

$$\omega_s = n \sqrt{\frac{3(B - A)}{C_s}} = \omega_o \sqrt{\frac{C}{C_s}}, \quad (5.1.2)$$

como no caso homogêneo $\omega_o \sqrt{C} = n \sqrt{3(B-A)}$, eq. (2.2.11), onde C é o momento de inércia polar do corpo todo. A amplitude da libração forçada considerando a casca desacoplada é (análogo ao caso homogêneo, eq. 2.2.14):

$$k_s = -\frac{2e\omega_s^2}{n^2 - \omega_s^2}. \quad (5.1.3)$$

Substituindo ω_s^2 (Eq. (5.2.2)) na Eq. 5.1.3, temos:

$$k_s = -6 \frac{(B-A)}{C_s} \frac{n^2 e}{n^2 - \omega_s^2} = -6 \frac{C}{C_s} \left(\frac{n^2 e}{n^2 - \omega_s^2} \right). \quad (5.1.4)$$

A partir da Eq. (5.1.2), temos que, a frequência da libração livre neste modelo é um fator $\sqrt{C/C_s}$ maior em relação o satélite totalmente homogêneo. E, considerando o valor da frequência forçada longe da ressonância com a frequência livre, (denominador da Eq. (5.1.4)) a amplitude da libração forçada para a casca desacoplada do interior (Eq. (5.1.4)) é aproximadamente um fator $3(C/C_s)$ maior que amplitude correspondente no caso homogêneo (Van Hoolst et al., 2016, p. 388).

5.2 Modelo B

Neste modelo, as camadas terão o formato elipsoidal (Fig. 5.1.1), e o movimento das camadas será acoplado. Logo, a libração da superfície também depende do movimento no interior do satélite. Vamos considerar somente o movimento da casca e do interior sólido, e iremos negligenciar o movimento do oceano. Dessa forma, o papel do oceano é permitir o movimento de uma camada em relação à outra. Os efeitos da força de contato envolvendo o oceano serão vistos no cálculo do momento de inércia (Eqs. (5.2.34) e (5.2.35)) dadas a seguir.

As equações que descrevem o movimento de libração na casca e no núcleo são obtidas de forma análoga ao caso homogêneo (Eq. 2.1.33). Entretanto, neste caso, vamos definir os eixos principais da casca como x, y, z , e os eixos principais do núcleo como X, Y, Z . O núcleo rotaciona em torno do eixo principal Z , e a casca rotaciona em torno do eixo principal z , sendo que, z e Z são colineares (ver Figura 5.2.1). Dessa forma, os eixos principais da casca e do núcleo partem do centro de massa (comum para todas as camadas).

Ocorre um torque entre a casca e o núcleo (Γ_z) devido à força gravitacional, quando a casca se movimenta fora do alinhamento em relação ao núcleo, ela gera um torque no interior sólido. Desde que, o oceano preencha a cavidade entre as camadas, a distribuição de massa no topo do oceano se altera em relação ao núcleo, e isso faz com que o oceano também exerça um torque no interior sólido. Logo:

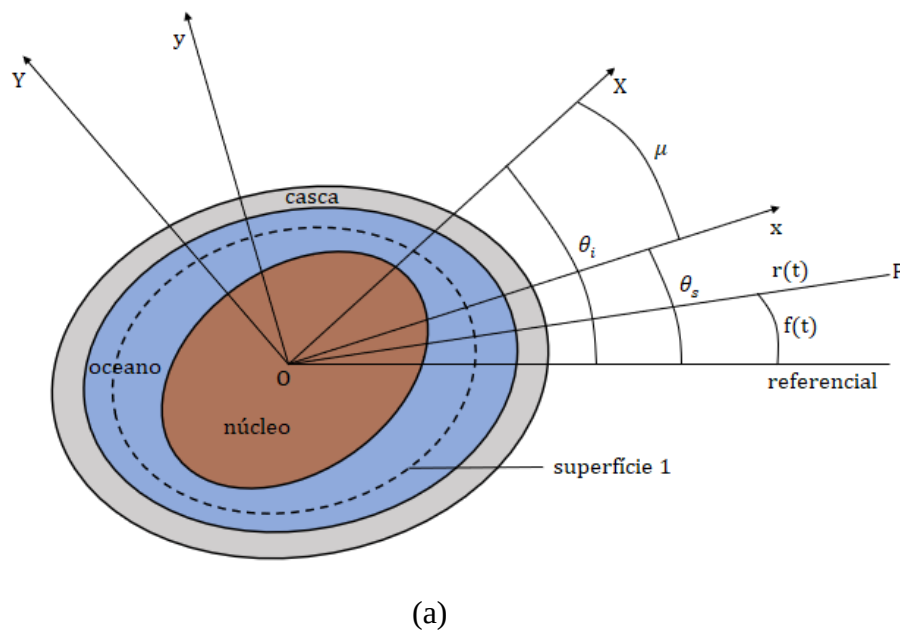
$$C_s \ddot{\theta}_s + \frac{3}{2}(B_s - A_s) \frac{Gm_p}{r(t)^3} \sin 2(\theta_s - f) = -\Gamma_z, \quad (5.2.1)$$

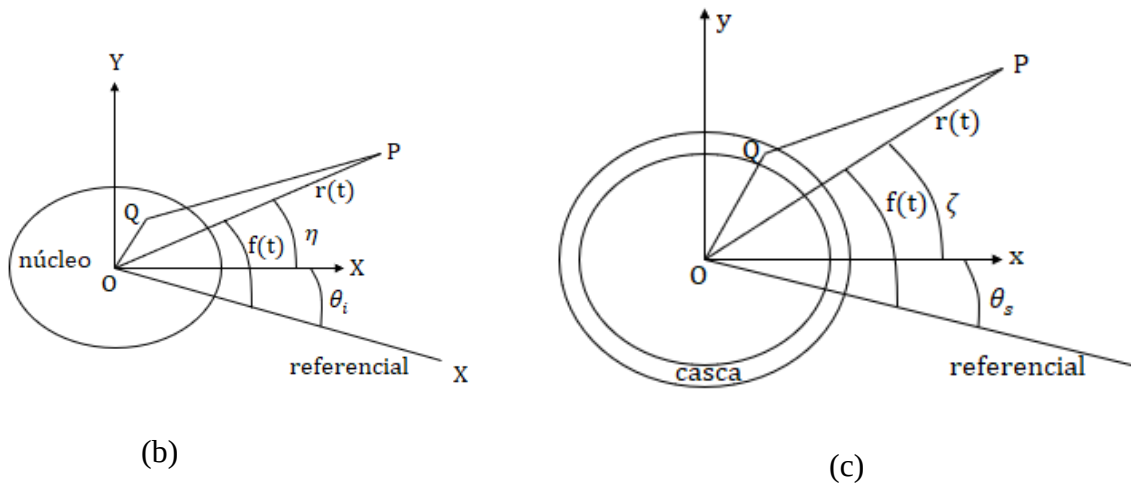
$$C_i \ddot{\theta}_i + \frac{3}{2}(B_i - A_i) \frac{Gm_p}{r(t)^3} \sin 2(\theta_i - f) = \Gamma_z, \quad (5.2.2)$$

onde, temos que, θ_i é o ângulo de rotação do núcleo, A_i, B_i e C_i são os momentos de inércia do núcleo e, como no modelo A, θ_s é o ângulo de rotação da casca, A_s, B_s e C_s são os momentos de inércia da casca.

Obtém-se o torque gravitacional na casca e no núcleo devido ao planeta (segundo termo à esquerda das Eqs. (5.2.1) e (5.2.2) respectivamente), de forma análoga ao caso homogêneo. Essas expressões são determinadas a partir das expansões no campo gravitacional do satélite em séries de potências, tal como descrito na seção 2.1.

Figura 5.2.1 Representações da estrutura interna com as coordenadas do sistema e com algumas quantidades geométricas utilizadas na dedução das equações (5.2.1) e (5.2.2), ver texto para maiores detalhes. (a) Representação da rotação da estrutura interna do satélite. (b) Representação da rotação do núcleo. (c) Representação da rotação da casca.





Fonte: Autoral (2021)²⁴.

Na Fig. (5.2.1 (a)) ilustramos a rotação do interior do satélite com seu eixo de rotação normal ao seu plano orbital. O é o centro de massa comum a todas as camadas. (x, y, z) são as coordenadas da casca do satélite e (X, Y, Z) são as coordenadas do núcleo do satélite. No ponto P temos o planeta central fixado a uma distância $r(t)$ do centro de massa. $f(t)$ é a anomalia verdadeira, θ_s , θ_i são os ângulos de rotação da casca e do núcleo, respectivamente. A superfície 1 representa uma elipse escolhida arbitrariamente dentro do oceano, a qual será importante na dedução do torque gravitacional casca-núcleo.

As Fig. (5.2.1 (b)) e (5.2.2(c)) são análogas à Fig. (2.1.1), onde P está a uma distância r de O ; $\overline{OP}$ faz um ângulo com a linha $\overline{OQ}$, e em Q está localizado um elemento de massa δm . Os ângulos η e ζ são os ângulos entre a linha planeta-satélite utilizados na dedução do torque planetário do núcleo e da casca, respectivamente.

Então, a partir da fórmula de MacCullagh (Eq. (2.1.9)) aplicada na casca e no núcleo, temos o potencial gravitacional em P dessas camadas dadas por:

$$V_s = -\frac{Gm_s}{r} - \frac{G(A_s + B_s + C_s - 3I_s)}{2r^3}, \quad (5.2.3)$$

$$V_i = -\frac{Gm_i}{r} - \frac{G(A_i + B_i + C_i - 3I_i)}{2r^3}, \quad (5.2.4)$$

²⁴ imagens análogas às fig. (1(a), (c),(d)) do preprint de Callegari et al. (2021, p. 2).

m_s neste caso, refere-se à massa da casca (no caso homogêneo m_s se referia à massa do satélite), m_i é a massa do núcleo e, I_s e I_i são momentos de inércia sobre a linha $\overline{OP}$ da casca e do núcleo, respectivamente.

A partir do potencial calcula-se a força, no caso da casca $\mathbf{F}_s = -m_p \nabla V_s$ e no núcleo $\mathbf{F}_i = -m_p \nabla V_i$, e, com isso, obtemos o torque da casca $\mathbf{N}_s = \mathbf{r} \times (-\mathbf{F}_s)$ e do núcleo $\mathbf{N}_i = \mathbf{r} \times (-\mathbf{F}_i)$. Considera-se somente as componentes axiais do torque, componentes z e Z , pois esse é o eixo de rotação (normal ao plano orbital) da casca e do núcleo, respectivamente. Assim, temos:

$$N_{sz} = \frac{3Gm_p(B_s - A_s)xy}{r^5}, \quad (5.2.5)$$

$$N_{iz} = \frac{3Gm_p(B_i - A_i)XY}{r^5}. \quad (5.2.6)$$

Os cossenos diretores do planeta em relação ao eixo x e ao eixo y são dados (ver Fig. 5.2.1(c)) por $\frac{x}{r} = \cos(\zeta)$ e $\frac{y}{r} = \sin(\zeta)$, respectivamente. E, em relação aos eixos X e Y são dados por (ver Fig. 5.2.1(b)) $\frac{X}{r} = \cos(\eta)$ e $\frac{Y}{r} = \sin(\eta)$, respectivamente. Sendo que, $\zeta = (f - \theta_s)$, e $\eta = (f - \theta_i)$, e sabendo que $\sin 2\zeta = 2 \sin \zeta \cos \zeta$, e, $\sin 2\eta = 2 \sin \eta \cos \eta$, temos,

$$N_{sz} = \frac{3Gm_p(B_s - A_s) \sin 2(f - \theta_s)}{r^3}, \quad (5.2.7)$$

$$N_{iz} = \frac{3Gm_p(B_i - A_i) \sin 2(f - \theta_i)}{r^3}. \quad (5.2.8)$$

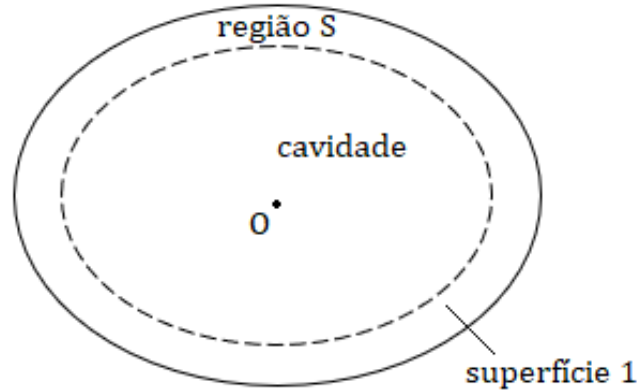
Dessa forma, temos a dedução das expressões do torque gravitacional na casca e no núcleo, respectivamente, devido ao planeta central, consideradas nas Equações (5.2.1) e (5.2.2).

A geometria para a interpretação do torque gravitacional entre a casca e o núcleo (Γ_z) foi desenvolvida por, por exemplo, Szeto e XU (1997)²⁵.

Temos, como hipótese, que o núcleo é englobado por uma casca elipsoidal homogênea, onde, as superfícies internas e externas são coaxiais e concêntricas, centralizadas em O .

²⁵ sua dedução poderá ser observada no trabalho de Callegari et al. (2021). Aqui, vamos deduzi-la de acordo com o trabalho de Callegari et al. (2021) e de Szeto e Xu (1997).

Figura 5.2.2 Representação da casca elipsoidal (região S) entre a superfície 1 e a superfície do satélite.



Fonte: Autoral (2021)²⁶.

Como podemos observar na Fig. (5.2.2), chamamos essa casca elipsoidal de região S. Essa região inclui a casca de gelo e uma parte do oceano, a sua camada externa é a superfície do satélite. Definimos a superfície interna como uma superfície escolhida arbitrariamente dentro do oceano (superfície 1), que engloba o núcleo sólido. Assim, o potencial gravitacional criado na região S em um ponto localizado em sua cavidade é dado por:

$$-\Phi = \vartheta + \epsilon d^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \Theta - \frac{1}{2} \right) + 3Yd^2 \sin^2 \Theta \cos 2\phi, \quad (5.2.9)$$

onde, ϑ , ϵ e Y dependem de várias propriedades da região S, como sua densidade e formato, e seus valores numéricos requerem muitos detalhes (ver Szeto e Xu, 1997, p. 652)²⁷. Dessa forma, vamos apresentar posteriormente somente o termo Y , pois o torque gravitacional dependerá somente deste termo. d , Θ , ϕ , são as coordenadas esféricas de um ponto no *interior* da cavidade. Em um sistema de rotação x, y, z , (isto é, o sistema é fixado na casca) temos:

$$x = d \sin \Theta \cos \phi, \quad (5.2.10)$$

$$y = d \sin \Theta \sin \phi, \quad (5.2.11)$$

$$z = d \cos \Theta, \quad (5.2.12)$$

onde, ϕ é o ângulo em relação ao eixo x , no plano xy , e Θ é o ângulo em relação ao eixo z .

²⁶ imagem análoga à Fig. (1(b)) de Callegari et al. (2021, p. 2) (preprint).

²⁷ O potencial que utilizamos nesse trabalho é $V = -1/r$ (como na Eq. (2.1.9)). No trabalho de Szeto e Xu (1997) o potencial tem o sinal trocado, uma prática comum em textos fundamentais da área. Por essa razão o sinal do potencial na Equação (5.2.9) tem o sinal trocado em relação a Equação (5a) de Szeto e Xu (1997).

Substituindo as Eqs. (5.2.10) até (5.2.12) na equação (5.2.9), utilizando as identidades trigonométricas $\cos 2\phi = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi$, e $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, temos:

$$-\Phi = \vartheta + \frac{\epsilon}{2}(2z^2 - x - y^2) + 3Y(x^2 - y^2). \quad (5.2.13)$$

Ao colocar o núcleo na cavidade da região S , podemos escrever a eq. (5.2.13) em coordenadas retangulares fixado no núcleo (X, Y, Z) . Supondo os eixos polares das camadas como paralelos, ou seja, a casca e o núcleo alinhados, não consideramos o movimento espacial. Dessa forma:

$$x = X \cos \mu + Y \sin \mu \quad (5.2.14)$$

$$y = -X \sin \mu + Y \cos \mu \quad (5.2.15)$$

$$z = Z \quad (5.2.16)$$

Substituindo as Eqs. (5.2.14) até (5.2.16) na eq. (5.2.13), utilizando $\cos \mu \sin \mu = \sin 2\mu$, e $\cos^2 \mu - \sin^2 \mu = \cos 2\mu$. Temos:

$$-\Phi = \vartheta + 3Y(X^2 \cos 2\mu - Y^2 \cos 2\mu + 2XY \sin 2\mu) - \frac{\epsilon}{2}(X^2 + Y^2) + \epsilon Z^2. \quad (5.2.17)$$

A força por unidade de massa, gerada pelo potencial gravitacional (Eq. (5.2.17)) é:

$$\mathbf{F}_k = -\Delta m_k \nabla_k (-\Phi), \quad (5.2.18)$$

onde, o índice “k” representa o sistema x, y, z . Δm_k é um elemento de massa do núcleo, localizado dentro da cavidade da região S . O torque será:

$$\mathbf{\Gamma}_k = \mathbf{d}_k \times \Delta m_k \nabla_k \Phi; \quad (5.2.19)$$

aqui temos que $\mathbf{d}_k = (X, Y, Z)$ é o vetor posição de Δm_k no sistema X, Y, Z fixado no núcleo. Neste caso temos que o torque na região S do núcleo é:

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_k (\mathbf{d}_k \times \nabla \Phi \rho_k \Delta V_k), \quad (5.2.20)$$

V e ρ representam o volume e a densidade do núcleo, respectivamente. Ao integrarmos sobre o volume do corpo, temos:

$$\mathbf{\Gamma} = \iiint (\mathbf{d} \times \nabla \Phi) \rho dV, \quad (5.2.21)$$

Da eq. (5.2.21) temos que as componentes do torque são:

$$\Gamma_x = \iiint [-3Y(-2YZ \cos \mu + 2XZ \sin \mu) + \epsilon YZ] \rho dV, \quad (5.2.22)$$

$$\Gamma_y = \iiint [+3Y(+2XZ \cos \mu + 2YZ \sin \mu) - 3\epsilon XZ] \rho dV, \quad (5.2.23)$$

$$\Gamma_z = \iiint [+3Y(-4XY \cos \mu + 2(X^2 - Y^2) \sin 2\mu)] \rho dV, \quad (5.2.24)$$

Podemos observar que o sistema x, y, z é um sistema de eixo principal de inércia. Dessa forma, todas as integrais (Eqs. (5.2.22) até (5.2.24)), exceto a parte proporcional a $2(X^2 - Y^2)$ são produtos de inércia. Logo:

$$\Gamma_x = 0, \quad (5.2.25)$$

$$\Gamma_y = 0, \quad (5.2.26)$$

$$\Gamma_z = 6Y \iiint [(X^2 - Y^2) \sin 2\mu] \rho dV. \quad (5.2.27)$$

A diferença do momento de inércia equatorial é definida por:

$$\begin{aligned} B_i - A_i &= \iiint (X + Z^2) \rho dV - \iiint (Y^2 + Z) \rho dV \\ &= \iiint (X^2 - Y^2) \rho dV, \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

onde, o índice “i” se refere ao núcleo. Então, temos:

$$\Gamma_z = 6Y(B_i - A_i) \sin 2\mu, \quad (5.2.29)$$

onde, $\mu = \theta_s - \theta_i$. A equação (5.2.29) é o torque gravitacional da entre a casca e o núcleo. Observe que ele depende do termo Y , que é definido como²⁸:

$$Y = \frac{2\pi G}{15} \int_{r_{int}}^R \rho(r) \frac{d\beta(r)}{dr} dr, \quad (5.2.30)$$

temos que, R é o raio médio, r é o raio médio de uma superfície interna, r_{int} é o raio médio da camada interna, θ é o ângulo de rotação, ρ é a densidade, e β é o achatamento equatorial, onde (Van Hoolst et al., 2008, p. 389):

$$\beta(r) = \frac{a(r) - b(r)}{a(r)} \quad (5.2.31)$$

onde, $a(r)$ e $b(r)$ são os semi-eixos da superfície.

Tem-se então, que a expressão dada por Szeto e Xu (1997), do torque gravitacional exercido pela casca no núcleo interno sólido é:

$$\Gamma_z = \frac{4\pi G}{5} \left[\int_{r_{int}}^R \rho(r) \frac{d\beta(r)}{dr} dr \right] (B_i - A_i) \sin 2(\theta_s - \theta_i), \quad (5.2.32)$$

Podemos representar a diferença do momento de inércia axial como (ver Folonier et al., 2015 e referências):

$$B - A = \frac{8\pi}{15} \int_0^R \rho(r) \frac{d(\beta r^5)}{dr} dr. \quad (5.2.33)$$

Para resolver a Eq. (5.2.33) para as camadas externa e interna, considera-se a superfície 1 esférica. Dessa forma, a diferença dos momentos de inércia equatoriais da casca e do núcleo são, respectivamente:

²⁸ Essa definição foi utilizada no preprint de Callegari et al. (2021, p. 10).

$$= \frac{8\pi}{15} [\rho_i \beta_i r_i^5 + (\rho_o \beta_1 r_1^5 - \rho_o \beta_i r_i^5)], \quad (5.2.37)$$

Como consideramos a superfície 1 esférica, o β_1 (achatamento no interior do oceano) é nulo, então, temos:

$$(B'_i - A'_i) + (B_{ob} - A_{ob}) = \frac{8\pi}{15} (\rho_i - \rho_o) \beta_i r_i^5, \quad (5.2.38)$$

Resolvendo o momento de inércia da casca mais a contribuição do oceano na casca:

$$\begin{aligned} (B_{ot} - A_{ot}) + (B'_s - A'_s) &= \frac{8\pi}{15} \int_{r_1}^{r_o} \rho(r') \frac{d(\beta r'^5)}{dr'} dr' + \frac{8\pi}{15} \int_{r_o}^R \rho(r') \frac{d(\beta r'^5)}{dr'} dr' \\ &= \frac{8\pi}{15} [(\rho_o \beta_o r_o^5 - \rho_o \beta_1 r_1^5) + (\rho_s \beta_s R^5 - \rho_s \beta_o r_o^5)] \\ &= \frac{8\pi}{15} [(\rho_o - \rho_s) \beta_o r_o^5 + \rho_s \beta_s R^5], \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

Então, o torque gravitacional (Eq. 5.2.32) fica:

$$\Gamma_z = \frac{4\pi G}{5} \left[\int_{r_1}^R \rho(r') \frac{d\beta(r')}{dr'} dr' \right] [(B'_i - A'_i) + (B_{ob} - A_{ob})] \sin 2(\theta_s - \theta_i), \quad (5.2.40)$$

dessa forma,

$$\Gamma_z = \frac{4\pi G}{5} \frac{8\pi}{15} [\rho_s \beta_s + (\rho_o - \rho_s) \beta_o] [(\rho_i - \rho_o) \beta_i r_i^5] \sin 2(\theta_s - \theta_i) \quad (5.2.41)$$

$$\Gamma_z = -K \sin 2(\theta_s - \theta_i). \quad (5.2.42)$$

Note que a força de acoplamento gravitacional K depende do achatamento e da densidade da casca e do núcleo.

Assumindo o interior com densidade constante ρ_i , podemos reescrever a eq. (5.2.41) como:

$$B_i - A_i = \frac{8\pi}{15} \rho_i \beta_i r_i^5 \left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_i} \right). \quad (5.2.43)$$

Como, $B'_i - A'_i = \frac{8\pi}{15} \rho_i \beta_i r_i^5$, a equação do torque gravitacional no interior é simplificada como:

$$\Gamma_z = \frac{4\pi G}{5} [\rho_s \beta_s + (\rho_o - \rho_s) \beta_o] \left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_i}\right) (B'_i - A'_i) \sin 2(\theta_s - \theta_i). \quad (5.2.44)$$

Isso mostra que o torque gravitacional é nulo quando a densidade do oceano e do núcleo são iguais.

5.2.1 Modelo B – Cálculo da libração forçada de forma analítica

Resolvendo as equações (5.2.1) e (5.2.2) analiticamente, de forma análoga ao caso homogêneo (seção 2.2). Introduzimos a variável γ , onde:

$$\gamma_s = \theta_s - pM, \quad (5.2.1.1)$$

$$\gamma_i = \theta_i - pM, \quad (5.2.1.2)$$

onde, M é a anomalia média ($M = nt$, considera-se $\tau = 0$) e, p é um racional, no caso síncrono, $p = 1$. Ao derivarmos em segunda ordem no tempo ficamos com $\ddot{\theta}_s = \ddot{\gamma}_s$ e, $\ddot{\theta}_i = \ddot{\gamma}_i$. Como na equação do torque gravitacional (eq. (5.2.42)) temos que $\mu = \theta_s - \theta_i$. Neste caso:

$$\mu = \gamma_s - \gamma_i. \quad (5.2.1.3)$$

Logo, o torque gravitacional $\Gamma_z = K \sin 2(\gamma_s - \gamma_i)$.

A partir dessas hipóteses temos que as Eqs. (5.2.1.1) e (5.2.1.2) ficam, respectivamente:

$$C_s \ddot{\gamma}_s + \frac{3}{2} (B_s - A_s) n^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2(\gamma_s + M - f) = -K \sin 2(\gamma_s - \gamma_i), \quad (5.2.1.4)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_i + \frac{3}{2} (B_i - A_i) n^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2(\gamma_i + M - f) = K \sin 2(\gamma_s - \gamma_i). \quad (5.2.1.5)$$

A partir da Eq. 2.2.4, na seção 2.2, temos que $M - f \approx -2e \sin(nt)$. Assumindo, como na seção 2.2, $(a/r)^3 \approx 1$ e $\sin(x) \approx x$. Considerando o efeito do oceano na casca e no núcleo, de acordo com as Eqs. (5.2.34) e (5.2.35), temos:

$$C_s \ddot{\gamma}_s + \frac{3}{2} [(B'_s - A'_s) + (B_{ot} - A_{ot})] n^2 (2\gamma_s - 4e \sin(nt)) = -2K(\gamma_s - \gamma_i), \quad (5.2.1.6)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_i + \frac{3}{2} [(B'_i - A'_i) + (B_{ob} - A_{ob})] n^2 (2\gamma_i - 4e \sin(nt)) = 2K(\gamma_s - \gamma_i). \quad (5.2.1.7)$$

Dessa forma, as equações que regem os movimentos de libração da casca rígida e do núcleo interno perturbados por forças gravitacionais externas e internas ficam:

$$C_s \ddot{\gamma}_s + 3n^2 [(B'_s - A'_s) + (B_{ot} - A_{ot})] (\gamma_s - 2e \sin(nt)) = -2K(\gamma_s - \gamma_i), \quad (5.2.1.8)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_i + 3n^2 [(B'_i - A'_i) + (B_{ob} - A_{ob})] (\gamma_i - 2e \sin(nt)) = 2K(\gamma_s - \gamma_i). \quad (5.2.1.9)$$

Considerando:

$$K = \frac{4\pi G}{5} \frac{8\pi}{15} [\rho_s \beta_s + (\rho_o - \rho_s) \beta_o] [(\rho_i - \rho_o) \beta_i r_i^5], \quad (5.2.1.10)$$

$$K_s = 3n^2 [(B'_s - A'_s) + (B_{ot} - A_{ot})], \quad (5.2.1.11)$$

$$K_i = 3n^2 [(B'_i - A'_i) + (B_{ob} - A_{ob})], \quad (5.2.1.12)$$

onde, K_s é a amplitude do torque gravitacional efetivo exercido pelo planeta central na casca, K_i é a amplitude do torque gravitacional efetivo exercido pelo planeta na figura dinâmica do núcleo interno. K_s e K_i são funções dos momentos de inércia da casca e do núcleo, assim como da contribuição do oceano em cada camada. K é a amplitude do torque gravitacional interno exercido pela casca no núcleo interno devido ao seu desalinhamento.

As equações (5.2.1.8) e (5.2.1.9), podem ser escritas como:

$$C_s \ddot{\gamma}_s(t) + K_s \gamma_s(t) + 2K(\gamma_s(t) - \gamma_i(t)) = 2eK_s \sin(nt), \quad (5.2.1.13)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_i(t) + K_i \gamma_i(t) - 2K(\gamma_s(t) - \gamma_i(t)) = 2eK_i \sin(nt), \quad (5.2.1.14)$$

As frequências livres que correspondem ao sistema (5.2.1.13) – (5.2.1.14), são definidas anulando o acoplamento gravitacional entre a casca e o núcleo, considerando ($K = 0$), são:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K_s}{C_s}} = n \sqrt{\frac{3[(B'_s - A'_s) + (B_{ot} - A_{ot})]}{C_s}}, \quad (5.2.1.15)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{C_i}} = n \sqrt{\frac{3[(B'_i - A'_i) + (B_{ob} - A_{ob})]}{C_i}}. \quad (5.2.1.16)$$

Essas equações são análogas à Eq. (2.2.11) definida no caso homogêneo (seção 2.2).

Então, a frequência de oscilação da casca e do núcleo devido somente ao torque gravitacional casca-núcleo (isto é, não consideramos o torque do planeta ($K_s = K_i = 0$)) é definido como (Richard et al., 2014, p.26):

$$\mu = \sqrt{2K \left(\frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_s} \right)}. \quad (5.2.1.17)$$

As frequências próprias do sistema forçado pelo torque do planeta central e pelo torque gravitacional interno são definidas por Richard et al. (2014, p. 26) como:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} (\omega_i^2 + \omega_s^2 + \mu^2 + \sqrt{\Delta}), \quad (5.2.1.18)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} (\omega_i^2 + \omega_s^2 + \mu^2 - \sqrt{\Delta}), \quad (5.2.1.19)$$

onde, $\Delta = \omega_s^4 + \omega_i^4 + \mu^4 + 2\omega_i^2\mu^2 + 2\omega_s^2\mu^2 - 2\omega_i^2\omega_s^2 - 8\omega_i^2K_{int}/C_s - 8\omega_s^2K_{int}/C_i$.

As quantidades definidas nas Eqs. (5.2.1.10) até (5.2.1.19) são grandezas utilizadas no cálculo da amplitude da libração forçada da superfície no caso de um satélite com estrutura interna de multi-camadas contendo um oceano global abaixo da superfície. O modelo ainda leva em conta os efeitos do torque gravitacional núcleo-casca (Eq. (5.2.1.41)). Além do mais, as contribuições do oceano nos movimentos do núcleo e da casca são levadas em consideração, e são expressas como incrementos nos momentos de inércia (ver Eqs. (5.2.1.38) e (5.2.1.39)). Neste trabalho, utilizamos a expressão para amplitude de libração forçada da casca dada pela equação 11 da página 41 de Thomas et al. (2016):

$$\gamma_s = \frac{1}{C_s C_i} \frac{2e[K_s(K_i + 2K_{int} - n^2 C_i) + 2K_{int} K_i]}{(n^2 - \omega_1^2)(n^2 - \omega_2^2)}. \quad (5.2.1.20)$$

A dedução de (5.2.1.20) advém da busca de uma solução particular do sistema linear (5.2.1.13) e (5.2.1.14). Os principais passos estão dados em Van Hoolst et al. (2008); sua dedução detalhada está além dos nossos objetivos.

Além das grandezas definidas acima, é necessário calcular o momento de inércia polar da casca e da camada interna. Podemos representar o momento de inércia polar como²⁹:

$$C = \frac{8\pi}{3} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} \rho(r) r^4 dr, \quad (5.2.1.21)$$

onde, r_{ext} e r_{int} são os raios médios das superfícies interna e externa da camada. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{8\pi}{3} \int_{r_o}^R \rho(r) r^4 dr, \\ C_s &= \frac{8\pi}{15} \rho_s [R^5 - r_o^5]. \end{aligned} \quad (5.2.1.22)$$

E, temos:

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_i} \rho(r) r^4 dr, \\ C_i &= \frac{8\pi}{15} \rho_i r_i^5. \end{aligned} \quad (5.2.1.23)$$

Vemos também, que a amplitude dos torques Eqs. (5.2.1.10) até (5.2.1.12), grandezas importantes para calcular a amplitude da libração forçada Eq. (5.2.1.20), dependem das densidades assumidas para as camadas, assim como, das diferentes formas das camadas do satélite, que são funções do achatamento equatorial (β).

Para determinarmos os valores dos achatamentos equatorial do núcleo e do oceano, segue-se a mesma abordagem de Thomas et. al. (2016) e Tajeddine et al. (2014). Temos:

$$\beta_i = \frac{6(\rho_o - \rho_s)\beta_o + 6\rho_s\beta_s + 15\rho_i q_i}{6\rho_s + 4\rho_i}, \quad (5.2.1.24)$$

²⁹ Eq. 5.2.1.21 está em preprint Callegari et al., 2021, p. 261

$q_i = (M/m_i)(r_i/R')^3$, M é a massa do planeta central, m_i é a massa do núcleo do satélite, r_i é o raio médio do núcleo do satélite e R' é a distância do planeta central até o satélite. E o achatamento equatorial do oceano, é definido como:

$$\beta_o = \frac{6(\rho_i - \rho_o)\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^5 \beta_i + 6\rho_s \beta_s + 15\rho_{oi} q_o}{10(\rho_i - \rho_o)\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^3 + 4\rho_s + 6\rho_o}, \quad (5.2.1.25)$$

de acordo com Thomas et al. (2016, p. 41) ρ_{oi} é a densidade média da massa ponderada entre o núcleo e o oceano, calculamos $\rho_{oi} = \text{massa ponderada}/(\frac{V_i + V_o}{2})$, e, $q_o = (M/m_{oi})(r_o/R')^3$, $m_{oi} = m_o + m_i$, m_o é a massa do oceano do satélite e m_i é a massa do núcleo do satélite. Resolvendo as equações (5.2.1.24) e (5.2.1.25) como um sistema:

$$\left(10(\rho_i - \rho_o)\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^3 + 4\rho_s + 6\rho_o\right)\beta_o - 6(\rho_i - \rho_o)\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^5 \beta_i = 6\rho_s \beta_s + 15\rho_{oi} q_o, \quad (5.2.1.26)$$

$$-6(\rho_o - \rho_s)\beta_o + (6\rho_s + 4\rho_i)\beta_i = 6\rho_s \beta_s + 15\rho_i q_i, \quad (5.2.1.27)$$

obtemos o achatamento equatorial do núcleo e do oceano.

Os dados necessários para calcular a amplitude da libração forçada de Ganimedes e Enceladus estão nas tabelas abaixo:

Tabela 4 – Parâmetros internos de Ganimedes.

	C (kg.m ²)	ρ (kg/m ³)	β (x10 ⁻⁴)	Raio médio (km)	Massa (x 10 ²¹ kg)
Casca	$C_s = 1,796 \times 10^{35}$	$\rho_s = 850$	$\beta_s = 5,15$	$R = 2631,2$	$M_s = 9,86$
Oceano	-	$\rho_o = 1000$	$\beta_o = 5,10$	$r_o = 2481,2$	$M_o = 35,20$
Núcleo	$C_i = 1,665 \times 10^{35}$	$\rho_i = 4000$	$\beta_i = 4,09$	$r_i = 1901,2$	$M_i = 115,14$

Fonte: Autorial (2021) – o valor do achatamento equatorial (β) considerado foi encontrado em Bursa (1997).

Há evidências de que Ganimedes constitui-se de 5 camadas (ver seção 1.2): casca de gelo, oceano líquido, manto de gelo, manto de silicato e um núcleo de ferro, além de, possivelmente também conter um núcleo fluido (Baland; Hoolst, 2010). Porém, iremos considerar todas as camadas abaixo do oceano sendo somente uma camada (núcleo)

constituída de uma mistura de ferro e silicato hidratado, pois dessa forma, podemos calcular os achatamentos do núcleo e do oceano de acordo com as Equações (5.2.1.24) e (5.2.1.25).

Tem-se apenas três dados para restringir os parâmetros do modelo: o raio total, a densidade média e o momento de inércia. Dessa forma, pode-se construir uma infinidade de modelos de estrutura interna. O raio total equatorial de Ganimedes é $R = 2631,2 \text{ km}$ e a densidade média é $\rho = 1942 \text{ kg/m}^3$ ³⁰.

Os valores dos raios foram limitados pelo valor do raio total equatorial e pelas espessuras da casca de gelo e do oceano global. Baland e Hoolst (2010, p. 657) consideraram a espessura máxima entre as duas camadas de aproximadamente 730 km . E com base na análise do campo magnético induzido de Ganimedes, Kivelson et al. (2002, p. 507) consideraram a espessura da casca como sendo da ordem de 150 km . Dessa forma, consideramos a espessura da casca de gelo sendo 150 km , e do oceano 580 km . Pode-se utilizar inúmeros valores para as densidades de cada camada, já que não se sabe suas características físicas e as composições exatas. Aqui, consideramos a densidade de cada camada de acordo com a Tabela 4.

Dessa forma, ao calcularmos a Eq. (5.2.1.20) encontramos que o valor de $\gamma_s = 0,000261^\circ$. Ainda não temos o valor da amplitude da libração forçada de Ganimedes. Porém, isso é um dos principais objetivos da sonda espacial *JUICE*, planejada para ser lançada em 2022 (ver seção 1.2).

Tabela 5 – Parâmetros internos de Enceladus.

	C (kg.m ²)	ρ (kg/m ³)	β	Raio médio (km)	Massa (x 10 ¹⁹ kg)
Casca	$C_s = 5,134 \times 10^{29}$	$\rho_s = \mathbf{850}$	$\beta_s = \mathbf{0,0187}$	$R = \mathbf{252,1}$	$M_s = 1,3158$
Oceano	-	$\rho_o = \mathbf{1000}$	$\beta_o = 0,0210$	$r_o = \mathbf{231}$	$M_o = 1,8122$
Núcleo	$C_i = 1,233 \times 10^{30}$	$\rho_i = \mathbf{2300}$	$\beta_i = 0,01855$	$r_i = \mathbf{200}$	$M_i = 7,7074$

Fonte: Autiral (2021) - os dados em negrito foram encontrados de Thomas et al. (2016).

Thomas et al. (2016) consideram o raio do núcleo de $\sim 200 \text{ km}$, a espessura do oceano de $26 - 31 \text{ km}$, e a espessura da casca de $21 - 26 \text{ km}$. Consideramos a espessura do oceano de 31 km e a espessura da casca de $21,1 \text{ km}$. A partir desses dados calculamos a

³⁰ O raio e a densidade foram encontrados em: <https://solarsystem.nasa.gov/moons/jupiter-moons/ganymede/by-the-numbers/>, e em Baland e Hoolst (2010, p. 653).

amplitude da libração forçada (Eq. 5.2.1.20) e encontramos o valor de $\gamma_s = 0,117^\circ$. Esse valor é compatível com a amplitude da libração forçada medida, observada a partir da sonda espacial *Cassini* de $0,120^\circ \pm 0,014^\circ$, o que sugere que Enceladus tem uma casca de gelo, um oceano global e um núcleo rochoso. Thomas et al. (2016, p. 42) conclui que independentemente da mudança de detalhes no modelo de camadas, a amplitude da libração medida é alcançada somente se a casca está separada do núcleo por um oceano global.

Capítulo 6 – Mapas Espectrais de Enceladus

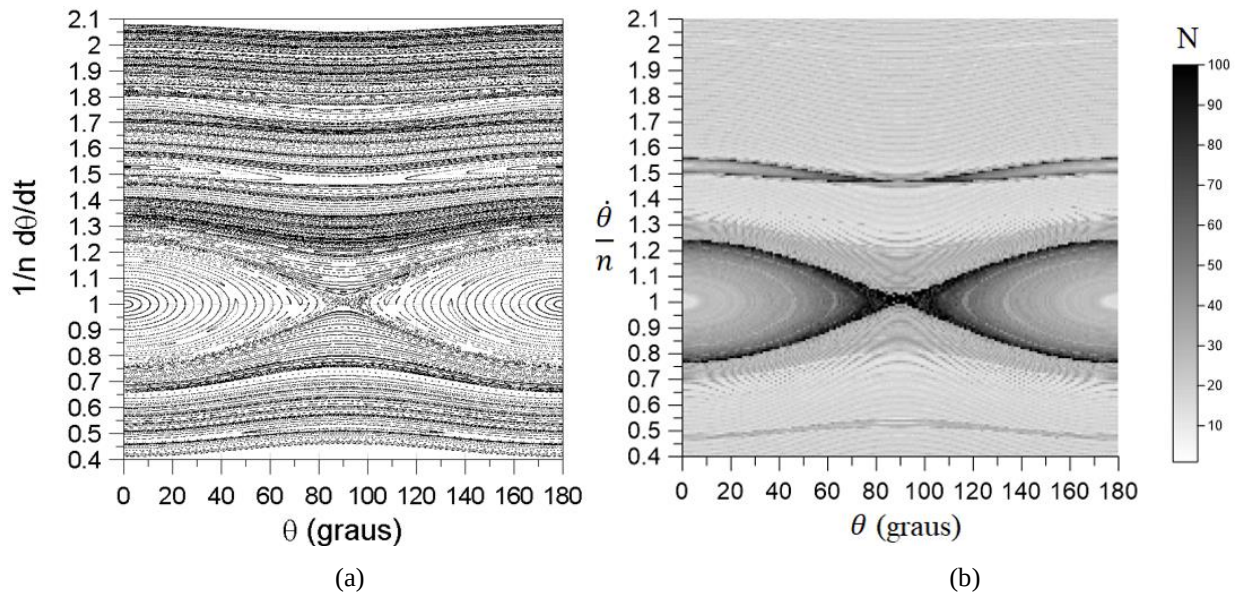
Para investigar os espaços de fases, temos mapas espectrais, onde, traçamos o número espectral N – número de picos significativos apresentados no espectro de Fourier (apêndice A) de uma determinada variável do problema. Determina-se uma grade de condições iniciais; para cada condição inicial, são considerados os picos nos espectros que são maiores do que uma fração numérica da maior amplitude do espectro (Callegari; Ribeiro, 2015, p. 431). As variáveis consideradas são, $\dot{\theta}_s, \dot{\theta}_i, \theta_s, \theta_i$ – velocidade angular da casca, velocidade angular do núcleo, ângulo de rotação da casca e ângulo de rotação do núcleo, respectivamente. Então, constroi-se os gráficos com conjuntos distintos de condições iniciais para $\frac{\dot{\theta}}{n}, \theta$. Consideramos as condições iniciais para núcleo-casca alinhados.

Ao lado dos mapas dinâmicos temos uma grade a qual está representado o número espectral por uma cor na escala de cinza, onde:

- i) Os pontos brancos representam o número espectral igual a 1, $N = 1$.
- ii) Na escala de cinza temos os números espectrais com valor entre 1 e um valor máximo, $1 < N < N_m$, (N_m é o valor máximo de N , consideramos, $N_m = 100$).
- iii) E, os pontos pretos representam os números espectrais maiores que o valor máximo $N \geq N_m$.

Dessa forma, nas regiões brancas e cinzas o número espectral assume valores pequenos e intermediários, e representam regiões onde o movimento é regular. Já, nas regiões escuras, o espectro tem um grande número de picos, e representam regiões onde o movimento não é regular, ou é possivelmente caótico (Callegari; Yokoyama, 2010, p. 1908; Callegari; Rodríguez, 2013, p. 405).

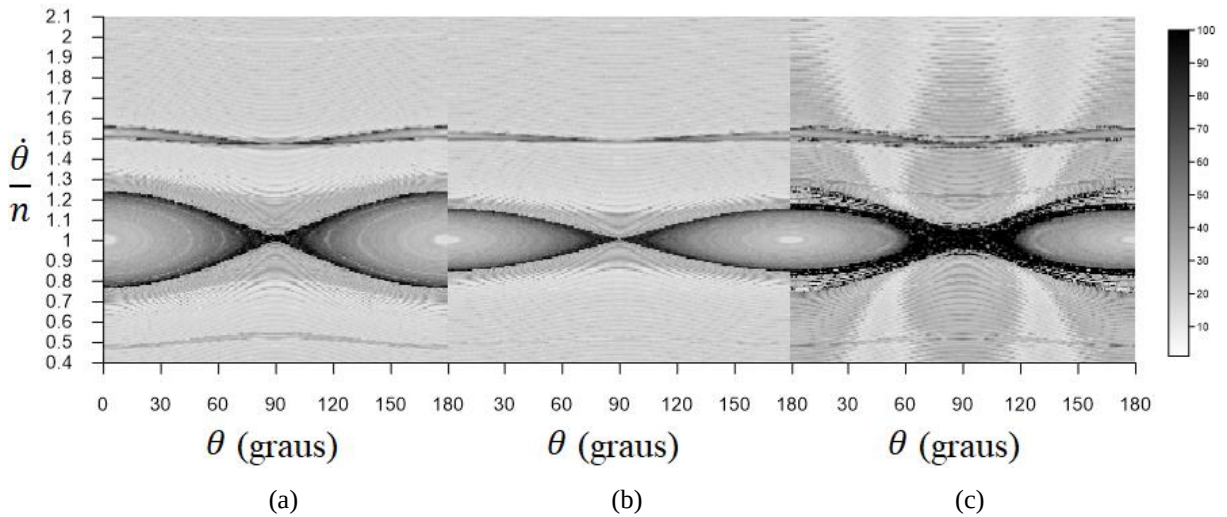
Figura 6.1 Espaço de fase de Enceladus homogêneo. (a) Superfície de seção. (b) Mapa espectral.



Fonte: Autoral (2021).

Na Figura 6.1 podemos comparar o espaço de fase de Enceladus homogêneo construído a partir da superfície de seção e do mapa espectral. O mapa dinâmico é equivalente à superfície de seção, em ambos podemos observar os principais regimes dinâmicos.

Figura 6.2. Mapa espectral de Enceladus. (a) homogêneo. (b) modelo A. (c) modelo B.



Fonte: Autoral (2021).

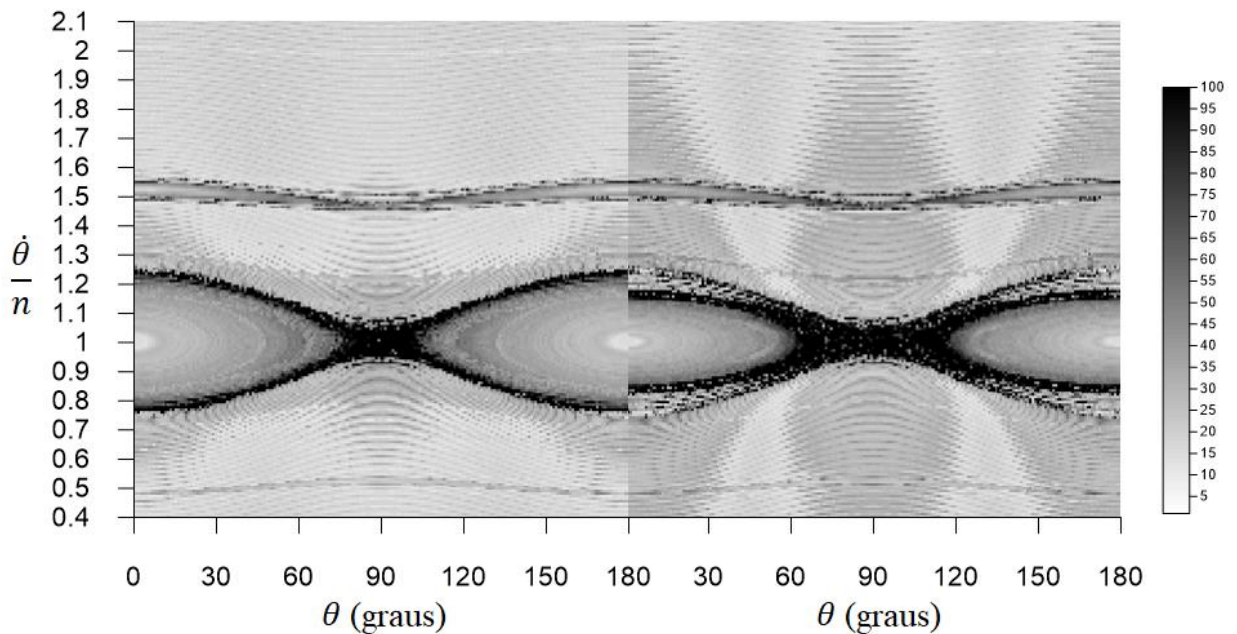
Na Figura 6.2 temos os mapas espectrais de Enceladus considerando o modelo homogêneo (seção 2.1), modelo A (seção 5.1) e o modelo B (seção 5.2.), com os dados da *Cassini*.

Ao compararmos as Fig. 6.2(a), (b) e (c) podemos observar que no caso homogêneo a ilha associada ao sincronismo 1:1 é maior em comparação aos outros modelos, então a amplitude da libração física do eixo principal do satélite em relação ao planeta é maior.

O modelo B tem uma maior faixa caótica. Dessa forma, a dinâmica de rotação nesse caso é mais caótica em comparação com os outros modelos.

O modelo A tem uma faixa caótica bem estreita, e em comparação com os outros casos há uma maior região onde as órbitas periódicas correspondem a circulação. Em todos os modelos temos as ressonâncias spin-órbita 1:2 e 3:2.

Figura 6.3. Mapa espectral de Enceladus. (a) do interior sólido com o modelo B. (b) da casca com o modelo B.

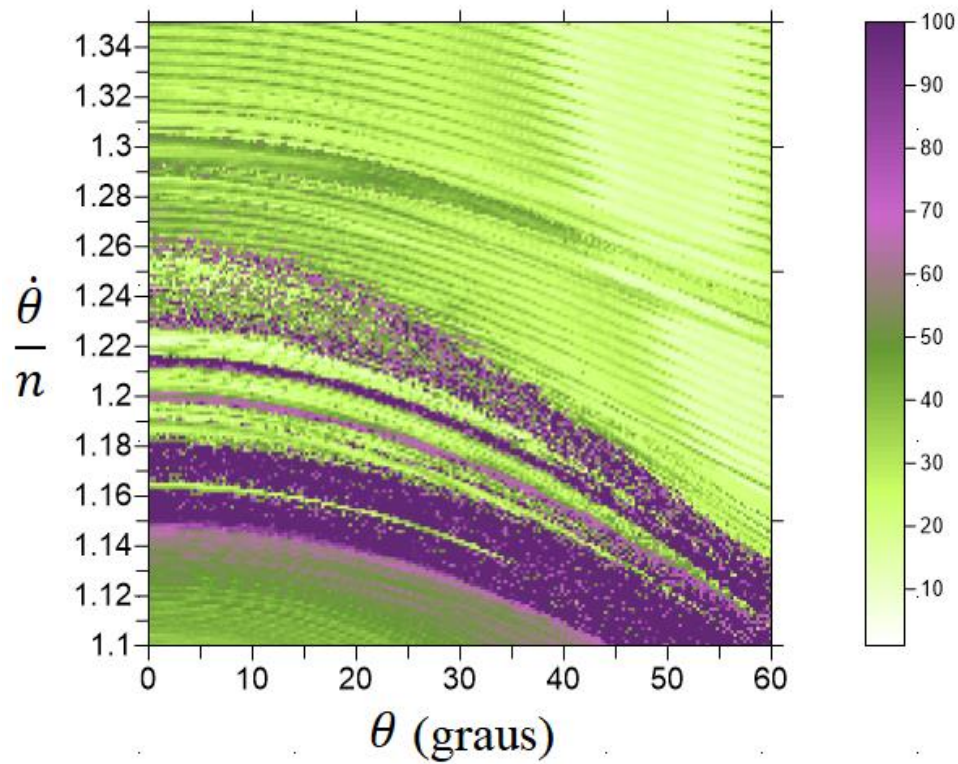


Fonte: Autoral (2021).

Na Figura 6.3(a) temos o mapa espectral da libração do interior sólido considerando o elipsoidal e o núcleo-casca acoplados. Para isso, foi utilizado o Modelo B com os valores do núcleo. Na Figura 6.3(b) temos o mapa dinâmico da libração da casca de gelo considerando o Modelo B. Assim, podemos comparar a dinâmica rotacional na casca e no núcleo.

Observa-se que os mapas tem as ressonâncias spin-órbita 3:2 e 1:2 com as mesmas áreas no espaço de fase. Porém, a ilha correspondente ao sincronismo 1:1 é consideravelmente maior no núcleo sólido. Observa-se que a dinâmica rotacional da casca de gelo tem uma maior faixa caótica, e existe uma região associada à separatriz da ressonância 1:1 que possivelmente apresenta movimento caótico (Figura 6.4). Isso ocorre pois a casca de gelo sofre maiores perturbações.

Figura 6.4 – Zoom na zona caótica das Figuras 6.2(c) e 6.3(b).



Fonte: Autoral (2021).

Na Figura 6.4 podemos observar com mais detalhes uma parte da dinâmica rotacional considerando o modelo B para a casca de Enceladus. Para melhor visualização mudamos a escala de cores.

Percebe-se a presença de outras estruturas na faixa caótica (separatriz). Essas regiões podem estar associadas a ressonâncias spin-órbita de alta ordem envolvendo as frequências fundamentais núcleo-casca. Porém, não conseguimos identificá-las até esse momento, essas regiões serão estudadas em trabalhos posteriores.

Capítulo 7 – Conclusão

Neste trabalho estudou-se o movimento libracional para o caso homogêneo dos satélites Ganimedes, Enceladus, Phobos e Lua, e para o caso com duas camadas sólidas separadas por um oceano global, os satélites Ganimedes e Enceladus. No caso homogêneo foi feita a análise da dinâmica rotacional calculando uma aproximação da equação do movimento analiticamente e calculando a equação exata numericamente; a partir da aproximação calculou-se os períodos e as amplitudes das librações forçada, livre e ótica, os quais foram condizentes com os valores que foram encontrados nos artigos considerados nesta dissertação. Verificamos que a amplitude da libração forçada observada em Enceladus para o caso homogêneo é diferente da libração forçada obtida a partir da sonda espacial *Cassini* como encontrado por Thomas et al. (2016), o que foi discutido na seção 1.3; e que o valor da amplitude da libração forçada de Phobos é bem próxima do valor encontrado a partir da sonda espacial *MEX* por Willner et al. (2010), como discutido na seção 1.4. Também foi feita a análise da dinâmica no caso homogêneo utilizando a técnica de superfície de seção, a partir da qual mostramos os pontos de equilíbrio (ressonância spin-órbita), pontos de sela, separatrizes, regiões caóticas, ilhas secundárias e outras ressonâncias spin-órbita, e pode-se constatar que o valor de $(B - A)/C$ e da excentricidade estão relacionados com o tamanho das ilhas de equilíbrio.

No caso com camadas foram estudados dois modelos: o modelo A com a casca e o núcleo desacoplados, e o modelo B com a casca e o núcleo acoplados pelo torque gravitacional casca-núcleo. No modelo A, observamos que ao considerar somente o movimento da casca, a amplitude da libração forçada (ao considerar a frequência forçada longe da ressonância com a frequência livre) é aproximadamente um fator $3(C/C_s)$ maior que amplitude correspondente no caso homogêneo. No modelo B, utilizamos a expressão da amplitude de libração forçada da casca e os seus parâmetros internos de acordo com as expressões consideradas por Thomas et al. (2016). Com isso, calculamos a amplitude da libração forçada de Ganimedes, considerando que suas camadas são uma casca de gelo, e um núcleo composto de uma mistura de silicato hidratado e ferro, separados por um oceano global, e encontramos $\gamma_s = 0,000261^\circ$. Esse valor pode ser comparado posteriormente com dados futuros da sonda espacial *JUICE*, planejada para ser lançada em 2022. Também calculamos a amplitude da libração forçada da casca de Enceladus e encontramos $\gamma_s = 0,117^\circ$, o qual é compatível com o valor observado a partir da sonda espacial *Cassini* de

$0,120^\circ \pm 0,014^\circ$, isso sugere que Enceladus tem uma casca de gelo, um oceano global e um núcleo rochoso.

Foi estudado o espaço de fase de Enceladus do Modelo homogêneo, do Modelo A e do Modelo B, a partir de mapas espectrais. Com isso, observamos que a dinâmica de rotação considerando o corpo homogêneo tem uma maior região com sincronismo 1:1. Ao considerarmos a casca desacoplada do núcleo (modelo A), a faixa caótica é menor em relação aos outros casos e a região onde as órbitas correspondem à circulação é maior. Já, no caso da casca e o núcleo acoplados pelo torque gravitacional núcleo-casca (modelo B), a dinâmica rotacional tem uma maior faixa caótica em relação aos outros modelos. Também comparamos a dinâmica rotacional do núcleo e da casca no modelo B, e observou-se que a casca de gelo tem uma maior faixa caótica.

REFERENCIAS

- Anderson, J. D. et. al. **Gravitational constraints on the internal structure of Ganymede.** *Nature*, v. 384, 541-543, 1996, doi: <https://doi.org/10.1038/384541a0>.
- Arfken, G. B. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física.** 6 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- Baland, R. M.; Van Hoolst, T. V. **Librations of the Galilean satellites: The influence of global internal liquid layers.** *Icarus*, v. 209, p.651-664, 2010, doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2010.04.004>
- Brigham, E. O. **The Fast Fourier Transform and its applications.** New Jersey: Prentice-Hall, 1998.
- Callegari Jr., N.; Ribeiro, F. B. **The spin-orbit problem including core-mantle gravitational coupling,** 2015.
- Callegari Jr., N.; Rodríguez, A. **Dynamics of rotation of super-Earths.** *Celestial Mechanics and Dynamics Astronomy*. v. 116 p. 389–416, 2013. doi: 10.1007/s10569-013-9496-5.
- Callegari Jr., N.; Yokoyama T. **Numerical exploration of resonant dynamics in the system of Saturnian major satellites.** *Planetary and Space Science*, v. 58, p. 1906-1921, 2010, doi: <https://doi.org/10.1016/j.pss.2010.08.025>
- Callegari Jr., N.; Ferreira, S. C.; Hussman, H. **Numerical investigation of rotational dynamics of differentiated satellites: the cases of Ganimedes, Europa, Titan and Enceladus.** Preprint, última atualização 2021.
- Collucci, A. R. **Evolução Orbital de Planetas Quentes Atribuída ao Efeito de Maré.** 2010. São Paulo, 141 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
- Duxbury, T. C.; Callahan, J. D. **Lunar Planet.** *Abst.* v. 13, p. 190, 1982.
- Dermott, S. F.; Thomas, P. C. **The Determination of the Mass and Mean Density of Enceladus from Its Observed Shape.** *Icarus*, v. 109, 241-257, 1994, doi: <https://doi.org/10.1006/icar.1994.1090>.
- Figueiredo, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** Rio de Janeiro: Projeto Euclides IMPA, 1997.
- Folonier, A. H.; Ferraz-Mello, S.; Kholshchevnikov, K. V. **The flattenings of the layers of rotating planets and satellites deformed by a tidal potential.** *Celestial Mechanics and Dynamics Astronomy*, v. 122, 183-198, 2015, doi: [10.1007/s10569-015-9615-6](https://doi.org/10.1007/s10569-015-9615-6).
- Grasset, O. et al. **Jupiter ICy moons Explorer (JUICE): An ESA mission to orbit Ganymede and to characterise the Jupiter system.** *Planetary and Space Science*, v. 78, p. 1-21, 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.pss.2012.12.002>.

Hemingway, D. et al. **The interior of Enceladus**. In: Enceladus and the Icy Moons of Saturn (P. M. Schenk et al., eds.). Univ. of Arizona, Tucson, p. 57-77, 2018, doi: 10.2458/azu_uapress_9780816537075-ch004.

Hussmann, H. et al. **Implications of rotation, orbital states, energy sources, and heat transport for internal processes in icy satellites**. Space Science Reviews, v. 153, p. 317–348, 2010, doi: 10.1007/s11214-010-9636-0.

Iess, L. et. al. **The Gravity Field and Interior Structure of Enceladus**. Science, v. 344, p. 78-80, 2014, doi: 10.1126/science.1250551

Kivelson, M. G.; Khurana K. K.; Volwerk, M. **The Permanent and Inductive Magnetic Moments of Ganymede**. Icarus, v. 157, p. 507-522, 2002, doi: 10.1006/icar.2002.6834

Le Maistre, S.; Rivoldini, A.; Rosenblatt, P. **Signature of Phobos' interior structure in its gravity field and libration**. Icarus, v. 301, p. 272-290, 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.11.022>.

Lourenço Junior, L. **Transformada de Fourier: teoria como base para aplicações em mecânica celeste**. 2014. Rio Claro, 119 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Universitária) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

Makarov, V. V.; Frouard, J.; Dorland, B. **Forced libration of tidally synchronized planets and moons**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 456, p. 665-671, 2016 doi: <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2735>.

Murray, C. D., Dermott, S. F. **Solar System Dynamics**. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1999.

Porco, C. C. et al. **Cassini Observes the Active South Pole of Enceladus**. Science, v. 311, p. 1393-1401, 2006, doi: 10.1126/science.1123013.

Press, W. H. et al. **Numerical Recipes in Fortran**. 2 ed. Cambridge University Press, 1994.

Rambaux, N. et. al. **Rotational motion of Phobos**. Astronomy & Astrophysics, v. 548, 2012, doi: 10.1051/0004-6361/201219710.

Ribeiro, F. B. **Ressonâncias Planetárias Spin-Órbita com Perturbação de Terceiro Corpo**, 2015. 66 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.

Richard, A.; Rambaux, N.; Charnay, B. **Libration response of a deformed 3-layer Titan perturbed by non-Keplerian orbit and atmospheric couplings**. Planetary and Space Science, v. 93-94, p. 22-34, 2014, doi: <https://doi.org/10.1016/j.pss.2014.02.006>.

Steinbrügge, G. et al. **Measuring Ganymede's Librations with Laser Altimetry**. Geosciences, v. 9, p. 1-15, 2019. doi: <https://doi.org/10.3390/geosciences9070320>

Showman, A. P., Malhotra, R. **The Galilean Satellites**. Science, v. 286, p. 77-84, 1999, doi: 10.1126/science.286.5437.77

Sussman, G. J.; Wisdom, J.; Mayer, M. E. **Structure and Interpretation of Classical Mechanics**. 1 ed. The Massachusetts Institute of Technology, 2000.

Szeto, A. M. K.; Xu, S. **Gravitational coupling in a triaxial ellipsoidal Earth**. Journal of Geophysical Research, vol. 102, p.27,651-27,657, 1997, doi: [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(96\)03157-3](https://doi.org/10.1016/0031-9201(96)03157-3).

Tajeddine, R. et al. **Constraints on Mima's interior from Cassini ISS libration measurements**. Science, vol. 346, p. 322-324, 2014, doi: 10.1126/science.1255299

Tipler, P., Mosca, G. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed, v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

Tiscareno, M. S.; Thomas, P. C.; Burns, J. A. **The rotation of Janus and Epimetheus**. Icarus, v. 204, p. 254-261, 2009, doi: [10.1016/j.icarus.2009.06.023](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2009.06.023).

Thomas, P. C. et. al. **Enceladus's measured physical libration requires a global subsurface ocean**. Icarus, v. 264, p. 37- 47, 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2015.08.037>.

Van Hoolst, T. et. al. **The librations, shape, and icy shell of Europa**. Icarus, v. 195, p. 386-399, 2008, doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2007.12.011>.

Van Hoolst, T., Baland, R.M., Trinh, A. **The diurnal libration and interior structure of Enceladus**. Icarus, vol. 277, p. 311-318, 2016, doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.05.025>.

Weber, R. C. **Interior of the Moon**. In: Encyclopedia of the Solar System. 3 ed. (Spohn, T.; Breuer, D.; Johnson, T. V.). Huntsville: Elsevier, 2014, p. 529-554, doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-415845-0.00024-4>.

Willner, K. et. al. **Phobos control point network, rotation, and shape**. Earth and Planetary Science Letters, v. 294, p. 541-546, 2010, doi: 10.1016/j.epsl.2009.07.033.

Willner, K.; Shi, X.; Oberst, J. **Phobo's shape and topography models**. Planetary and Space Science, v. 102, p. 51-59, 2014, doi: [10.1016/j.pss.2013.12.006](https://doi.org/10.1016/j.pss.2013.12.006).

Wisdom, J. **Rotational Dynamics of irregularly shaped satellites**. The Astronomical Journal, v. 94, p. 1350-1360, 1987.

Wisdom, J. **Spin-orbit secondary resonance dynamics of Enceladus**. The Astronomical Journal, Vol. 128, 2004, doi: <https://doi.org/10.1086/421360>.

Yang, Y. et. al. **Determination of the free lunar libration modes from ephemeris DE430**. Research in Astronomy and Astrophysics, v. 17, 2017, doi: [10.1088/1674-4527/17/12/127](https://doi.org/10.1088/1674-4527/17/12/127).

Apêndice A. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Por todo o trabalho, em particular no cap. 3, utilizamos um código para se obter espectros de séries temporais denominadas FFT. Vamos neste apêndice dar uma explicação sucinta sobre o assunto.

Seguindo (Brigham, 1988, p. 131) FFT (*Fast Fourier Transform*) é um método para realizar uma série de cálculos, o qual pode calcular a transformada discreta de Fourier (DFT – *Discrete Fourier Transform*) muito mais rapidamente do que outros algoritmos. A partir da transformada de Fourier passamos do estudo de funções periódicas no domínio do tempo para o domínio da frequência, nos casos aqui estudados convertemos a frequência angular (ω) para o período (T) dado em dias, sendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. No caso da DFT o sinal é definido em um intervalo finito de sua variável independente. Para entender a DFT, definiremos a série de Fourier.

A série de Fourier é uma representação de uma função periódica por uma série trigonométrica (formada por senos e cossenos).

Considerando uma função periódica $h(t)$, com período T_o , seccionalmente diferenciável, integrável e absolutamente integrável, pode ser expressa em série de Fourier da seguinte forma:

$$h(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_o t) + b_n \sin(2\pi n f_o t)], \quad (\text{A.1})$$

onde, $f_o = \frac{1}{T_o}$ é a frequência, sendo $\omega = 2\pi f_o$ a frequência angular. De acordo com (Figueiredo, 1977, p. 13) o menor período positivo T_o é chamado de período fundamental, sendo, por exemplo, 2π o período fundamental da função $\sin t$.

Os coeficientes da equação (3.1.1) são dados por:

$$a_n = \frac{2}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} h(t) \cos(2\pi n f_o t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

$$b_n = \frac{2}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} h(t) \sin(2\pi n f_o t) dt. \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

A partir de Figueiredo (1988, p. 18 – 20), temos as condições suficientes para que a função $h(t)$ seja igual à sua série de Fourier.

- a) A função deve ser seccionalmente contínua, o que ocorre se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades;
- b) A função deve ser seccionalmente diferenciável, o que ocorre se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada for também seccionalmente contínua.

Com isso, seguindo Figueiredo (1977, p. 21) enunciamos um resultado que fornece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função h (teorema de Fourier):

Seja uma função seccionalmente diferenciável e de período T_o . Então, a série de Fourier da função h , dada em (A.1), converge, em cada ponto t , para $\frac{1}{2}[h(t+0) + h(t-0)]$, isto é,

$$\frac{1}{2}[h(t+0) + h(t-0)] = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_o t) + b_n \sin(2\pi n f_o t)]. \quad (\text{A.4})$$

Também podemos representar a série de Fourier em sua forma complexa. A partir da fórmula de Euler temos que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, sendo, $\cos \theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2}$ e $\sin \theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i}$. Logo, seguindo Brigham (1990, p. 75):

$$\cos(2\pi n f_o t) = \frac{1}{2}(e^{i2\pi n f_o t} + e^{-i2\pi n f_o t}), \quad (\text{A.5})$$

$$\sin(2\pi n f_o t) = \frac{2}{2i}(e^{i2\pi n f_o t} - e^{-i2\pi n f_o t}). \quad (\text{A.6})$$

Assim, a eq. (A.1) pode ser escrita como:

$$h(t) = \frac{a_o}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i2\pi n f_o t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i2\pi n f_o t}. \quad (\text{A.7})$$

Podemos simplificar a equação acima de forma que:

$$a_{-n} = \frac{2}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} h(t) \cos(-2\pi n f_o t) dt \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} h(t) \cos(2\pi n f_o t) dt \\
&= a_n \quad n = 1, 2, \dots \\
b_{-n} &= \frac{2}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} h(t) \sin(-2\pi n f_o t) dt \\
&= -\frac{2}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} h(t) \sin(2\pi n f_o t) dt \\
&= -b_n \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i2\pi n f_o t} = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} a_n e^{i2\pi n f_o t}, \tag{A.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} i b_n e^{-i2\pi n f_o t} = - \sum_{n=-\infty}^{-\infty} i a_n e^{i2\pi n f_o t}. \tag{A.11}$$

Substituindo as equações acima (A.10) e (A.11) em (A.7), temos:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{a_o}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i2\pi n f_o t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i2\pi n f_o t}.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Esta é a série de Fourier expressa na forma complexa, com os coeficientes α_n dados por:

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n). \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{A.13}$$

Combinado as equações (A.2), (A.3), (A.7) e (A.8), temos:

$$\alpha_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} h(t) e^{-i2\pi n f_o t} dt. \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{A.14}$$

Podemos representar a função f também em integral de Fourier, sendo chamada de transformada de Fourier. Para isso, $T_o \rightarrow \infty$ e $f_0 \rightarrow 0$, dessa forma, o espectro torna-se contínuo. Assim, definimos a transformada de Fourier como o “limite” da série de Fourier.

Seguindo Brigham (1988, p. 13), se f for integrável e absolutamente integrável, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty, \quad (\text{A.15})$$

podemos escrever:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi f t} dt, \quad (\text{A.16})$$

onde, f é a frequência (f_o); $H(f)$ é a transformada da $h(t)$, a $h(t)$ é uma função variável no tempo, e $H(f)$ uma função variável na frequência. E a transformada inversa de Fourier é dada por:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{i2\pi f t} df. \quad (\text{A.17})$$

Para analisar sinais³¹ em um computador é necessário que eles tenham uma duração finita, sua variável independente deve ser discreta (descontínua). Dessa forma, desenvolve-se uma representação alternativa para a transformada de Fourier, a transformada discreta de Fourier (DFT).

Na DFT a função tempo original e a transformada de Fourier $H(f)$ são aproximadas por, respectivamente, N amostras de tempo e N amostras de frequência (N valores computáveis). A expressão geral para a transformada discreta de Fourier é (Brigham, 1988, p. 96):

$$\tilde{H}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-i2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{A.18})$$

³¹ Em Física, sinal é qualquer quantidade que exhibe variação ao longo do tempo, ou do espaço. É uma função que apresenta informações sobre o comportamento de um fenômeno.

onde, $\tilde{H}\left(\frac{n}{NT}\right)$ é periódica com N amostras. Essa notação é usada para indicar que a transformada discreta de Fourier é uma aproximação da transformada contínua de Fourier. T é a taxa de amostragem, e kT é a taxa de amostras tiradas em um intervalo de tempo. Se T é medida em segundos, kT é a taxa de amostras tiradas a cada segundo. $T_o = NT$ é a duração da função truncamento.

A sua inversa é dada por, (Brigham, 1988, p. 97):

$$h(kT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}\left(\frac{n}{NT}\right) e^{-i2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.19})$$

Deve-se tomar cuidado com o *aliasing*³², ele ocorre quando a amostragem é feita em intervalos de tempo maiores que duas vezes o maior período do sistema.

A partir da FFT (transformada rápida de Fourier) pode-se calcular computacionalmente a DFT de forma rápida e eficiente.

Considerando a transformada discreta de Fourier como, (Brigham, 1988, p. 131):

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_o(k) e^{-i2\pi nk/N}. \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{A.20})$$

foi feita a troca de kT por k e n/NT por n . Por exemplo, seja $N = 4$ e seja:

$$W = e^{-i2\pi/N}. \quad (\text{A.21})$$

Como $X(n)$ requer um número de operações proporcionais a N , a equação (A.20) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} X(0) &= x_o(0)W^0 + x_o(1)W^0 + x_o(2)W^0 + x_o(3)W^0 \\ X(1) &= x_o(0)W^0 + x_o(1)W^1 + x_o(2)W^2 + x_o(3)W^3 \\ X(2) &= x_o(0)W^0 + x_o(1)W^2 + x_o(2)W^4 + x_o(3)W^6 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

³² diferentes sinais se tornam indistinguíveis quando amostrados (processo de um sinal de tempo contínuo, para um sinal de tempo discreto), ou seja, a frequência dos sinais se sobrepõe.

$$X(3) = x_o(0)W^0 + x_o(1)W^3 + x_o(2)W^6 + x_o(3)W^9$$

Representado na forma matricial compacta como:

$$X(n) = W^{nk}x_o(k). \quad (\text{A.23})$$

Com isso temos, $(N)(N - 1)$ adições complexas e $(N)^2$ multiplicações complexas. A abordagem utilizada para calcular a FFT foi pelo algoritmo de Danielson-Lanczos, o que reduz o custo computacional para calcular a DFT da ordem $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$ (ver Lourenço, 2014, p. 69). Neste trabalho utilizamos o código FFT dado no livro *Numerical Recipes* (Press et al., 1994, p. 501-502).