UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Jhony Sá do Amaral

Semigrupos de Operadores Lineares Limitados: Soluções Mild e Weak

São José do Rio Preto
2013

Jhony Sá do Amaral

Semigrupos de Operadores Lineares Limitados: Soluções Mild e Weak

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Juliana Conceição Precioso Pereira
Co-orientador: Prof^a. Dr^a. Andréa Cristina Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto
2013

Jhony Sá do Amaral

Semigrupos de Operadores Lineares Limitados: Soluções Mild e Weak

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Michelle Fernanda Pierri Hernandez
Professor Doutor
USP - Ribeirão Preto

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 22 de fevereiro de 2013.

À minha família
e meus amigos,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço:

À Deus, por tudo.

À Profª. Drª. Juliana Conceição Precioso Pereira, por ter colaborado com a elaboração deste trabalho, por todo carinho, dedicação, paciência e amizade durante todos os anos em que estivemos juntos, desde as orientações de Iniciação Científica na Graduação até a orientação no Mestrado. Palavras nunca poderão expressar a minha gratidão. Muito Obrigado por ser essa excelente profissional e amiga em todas as horas.

À Profª. Drª. Andréa Cristina Prokopczyk Arita pela coorientação deste trabalho, pelas valiosas dicas e por todo carinho e disponibilidade prestados.

Ao Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos e ao Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz pelas sugestões dadas na Apresentação do Exame Geral de Qualificação desta Dissertação.

À banca avaliadora, por ter aceitado o convite.

Aos professores do Departamento de Matemática do IBILCE pela formação acadêmica, e em especial, à Profª Drª. Maria Gorete Carreira Andrade, à Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti e ao Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa pelo carinho, ajuda e incentivo a todo momento.

Aos meus pais, Edmar e Aparecida, pelo amor, dedicação e apoio aos meus estudos desde sempre.

À minha irmã, Patrícia, por todo carinho, amizade, ajuda, cada lição e ensinamento transmitidos

Ao meu irmão, não de sangue, mas de alma, Samuel, pela imensa amizade e por sempre estar presente em todos os momentos, desde os mais felizes até os mais tristes da minha vida. Obrigado por todas conversas e conselhos, tudo foi de fundamental importância para o meu crescimento tanto pessoal quanto profissional.

À minha família, pelo estímulo e apoio dispensados em todos os momentos.

Aos meus enormes amigos de graduação: Ana, Andrey, Ana Paula, Ândrea, Marcelia, Bozzo, Nayara, Vanessa, Aline, Camila e Carol. Vocês são mais que especiais. Só tenho a agradecer a Deus por Ele ter me dado a oportunidade de conhecer vocês.

Aos meus colegas de pós-graduação: Glalco, Fernando Nera, Ana Maria, Rafaella, Luiz Fernando, Leonardo e Douglas, por toda ajuda e carinho. Em especial, aos meus grandes amigos: Juliana, Letícia, Aneliza, Gislaine e Roberto, por todo carinho, cada conversa e por terem sido tão maravilhosos comigo, amo vocês.

À minha amiga Cristiane Poltronieri, pelo grande incentivo nas horas difíceis e por sempre acreditar em mim.

À Capes, pelo auxílio financeiro.

"Feliz aquele que transfere o que sabe
e aprende o que ensina."

(Cora Coralina)

Resumo

Sejam A um operador fechado e densamente definido em um espaço de Banach X e $f \in L^1([0,\tau];X)$. O objetivo deste trabalho é apresentar uma condição necessária e suficiente para a existência de solução weak, dada por J. Ball, do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) & = & Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ u(0) & = & x. \end{cases}$$

Neste caso, a solução weak coincide com a solução mild (dada pela Fórmula da Variação das Constantes).

Como aplicação, estudaremos um problema de valor inicial e de fronteira para equações parabólicas de segunda ordem e concluiremos que sua solução fraca, no sentido usual de EDP's, coincide com a solução mild do problema de Cauchy abstrato associado.

Palavras-chave: Semigrupos Fortemente Contínuos, Problema Abstrato de Cauchy, Solução Fraca, Solução Mild.

Abstract

Let A be a closed linear operator densely defined on a Banach space X and $f \in L^1([0,\tau];X)$. The purpose of this work is to present a necessary and sufficient condition to the existence of weak solution, introduced by J. Ball, for the problem

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ u(0) &= x. \end{cases}$$

In this case, the weak solution coincides with the mild solution (given by the Variation of the Constants Formula)

As an application we study an initial boundary value problem for a second order parabolic and conclude that its weak solution, coincides with the mild solution of the associated Abstract Cauchy Problem.

Keywords: Strongly Continuos Semigroup, Abstract Cauchy Problem, Weak Solution, Mild Solution.

Sumário

Introdução **11**

1 Preliminares **13**

1.1 Espaços L^p e de Sobolev 13

1.2 Espaços Envolvendo o Tempo 18

1.3 Semigrupos de Operadores Lineares Limitados 19

1.4 O Gerador Infinitesimal de um C_0-semigrupo. 24

2 Soluções Mild e Weak **31**

2.1 O Problema de Cauchy Abstrato 31

3 Estudo de EDP's Parabólicas via Problema de Cauchy Abstrato **52**

3.1 Equações Parabólicas de Segunda Ordem 52

A Operadores Lineares **58**

B Teoremas de Convergência para Integrais **61**

C Cálculo em Espaços de Banach **62**

Referências Bibliográficas **66**

Introdução

Muitos fenômenos da natureza, tais como condução de calor, correntes oceânicas, decaimento radioativo, resfriamento de um corpo, dentre muitos outros, são descritos através de Equações Diferenciais. O estudo dessas equações é um importante ramo da Matemática que se consolidou com a criação do Cálculo Diferencial e Integral e tem recebido muita atenção desde então.

Na Literatura Matemática pode-se observar o grande número de trabalhos desenvolvidos nessa área, englobando o estudo das equações diferenciais ordinárias, parciais e funcionais. Observa-se ainda, que muitas dessas equações podem ser descritas através de um Problema de Cauchy Abstrato da forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{du(t)}{dt} & = & Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ u(0) & = & x, \end{array}\right. \tag{1}$$

em que X é um espaço de Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ é um operador linear, f é uma função conhecida e u é a função incógnita.

A vantagem de trabalharmos com uma equação na forma abstrata é que podemos utilizar a teoria de Semigrupos de Operadores Lineares, bem como muitos resultados da Análise Funcional. Em [2], J. Ball introduziu o conceito de solução weak para o problema abstrato (1). Encontrar uma relação entre esta solução e a mild, já bem conhecida na teoria de semigrupos, foi a principal motivação desse trabalho. Aqui, apresentamos uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade da solução weak para o problema abstrato (1) e mostramos sua equivalência com a solução mild.

Contudo, quando colocamos uma equação diferencial em sua forma abstrata e procuramos por uma solução, nos deparamos com a seguinte questão: Qual a relação entre a solução fraca de uma EDP, no sentido usual da teoria de equações diferenciais parciais, e a solução mild, ou weak, no sentido da teoria de semigrupos?

Motivados por esta pergunta, e pelo fato de que este tema é delicado e não é facilmente encontrado na literatura, analisamos um problema de valor inicial e fronteira para equações parabólicas de segunda ordem e concluímos que as soluções fraca, mild e weak coincidem.

Organizamos este trabalho de forma a apresentar, no Capítulo 1 os pré-requisitos necessários a serem utilizados no decorrer do trabalho. Neste Capítulo, iniciamos com o estudo dos Espaços L^p e de Sobolev, bem como o dos Espaços Envolvendo Tempo. Nas próximas seções introduzimos o conceito de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados e seus Geradores Infinitesimais.

No Capítulo 2 estudamos o problema abstrato (1), inicialmente quando A gera um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$, f é continuamente diferenciável e $x \in \mathcal{D}(A)$, e neste caso mostramos que existe uma única solução u deste problema a qual é dada pela Fórmula da Variação das Constantes

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \; t \geq 0. \tag{2}$$

Observamos que se $x \in X$, então a menos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ e f possuam propriedades especiais, em geral, u dada por (2) não é solução de (1). A partir disto, introduzimos os conceitos de solução mild e de solução weak de (1), sendo o último dado por J. Ball em [2].

Tendo em vista tais conceitos, provamos o resultado central desta Dissertação, o qual estabelece a equivalência entre estas duas soluções.

No Capítulo 3, como aplicação, estudamos um problema de valor inicial e fronteira para equações parabólicas de segunda ordem e concluímos que sua solução fraca, no sentido usual de EDP's, também coincide com a solução mild do Problema de Cauchy Abstrato associado, que por sua vez, é a solução weak introduzida por J. Ball.

Como Apêndice, há uma seção voltada para Operadores Lineares, contendo definições e importantes resultados da Análise Funcional, tal como o Teorema da Limitação Uniforme, outra seção contendo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, uma importante ferramenta usada no decorrer de todo o trabalho e também uma seção onde é introduzido o conceito de integração em Espaços de Banach.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos alguns dos principais pré-requisitos para o desenvolvimento da teoria necessária para esta dissertação.

1.1 Espaços L^p e de Sobolev

Nesta seção apresentaremos os espaços de Sobolev, que muitas vezes, tem a configuração adequada para se aplicar as idéias da Análise Funcional afim de obter informações sobre equações diferenciais parciais.

Definição 1.1.1 *Um vetor da forma* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, *em que cada componente* α_i *é um inteiro não-negativo, é chamado de multi-índice de ordem*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Definição 1.1.2 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$. *Dado um multi-índice* α, *definimos*

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

Se k *é um inteiro não-negativo,*

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x);\ |\alpha| = k\},$$

o conjunto de todas as derivadas parciais de ordem k.

Observação 1.1.1 *Se $k = 1$, considera-se os elementos de Du, dispostos em um vetor, isto é,*

$$Du = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}) = \textit{vetor gradiente.}$$

Se $k = 2$, considera-se os elementos de D^2u dispostos em uma matriz, isto é,

$$D^2u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{n\times n} = \textit{matriz hessiana.}$$

Além disso,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = tr\ (D^2 u) = \textit{laplaciano de } u.$$

Definição 1.1.3 *Dada uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, o suporte de u é o fecho, na topologia do $\mathbb{R}^n$, do conjunto de pontos de Ω, onde u não se anula, isto é,*

$$supp(u) := \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}.$$

Definição 1.1.4 *Dado Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, definimos*

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \textit{ e } u \textit{ possui suporte compacto}\}.$$

Se $u \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$, dizemos que u é uma função teste.

Definição 1.1.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável à Lebesgue. Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis (classes de equivalência) à Lebesgue, tais que $|u|^p$ tem integral de Lebesgue em Ω finita, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |u(x)|^p\ dx < \infty \right\}. \tag{1.1}$$

Munido das operações usuais de funções, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma definida por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx.$$

Definição 1.1.6 *O espaço $L^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis (classes de* *equivalência) à Lebesgue, as quais são essencialmente limitadas em* Ω*, isto é,*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é limitada q.t.p. em } \Omega\}, \tag{1.3}$$

onde o termo q.t.p. significa em quase toda parte.

Para toda $u \in L^\infty(\Omega)$*, define-se a norma de* u *por*

$$\|u\| = supess\ (u) = \inf\{M \geq 0; |u(x)| \leq M \text{ q.t.p. em } \Omega\}. \tag{1.4}$$

Definição 1.1.7 *Seja* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Dizemos que* u *é localmente integrável em* Ω*, se* $\int_K |u(x)|\ dx < \infty$*, para todo compacto* K *de* Ω*. O espaço dessas funções é denotado por* $L^1_{loc}(\Omega)$*.*

Para todo $p \geq 1$, vale que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. Observamos ainda, que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, (ver [1]).

Definição 1.1.8 *Dados* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* α *um multi-índice, dizemos que* v *é a* α*-ésima derivada fraca de* u*, e escrevemos,*

$$D^\alpha u = v,$$

se

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi\ dx, \tag{1.5}$$

para toda função teste $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$*.*

Em outras palavras, se dada u, acontecer de existir uma função v, que verifica (1.5), diz-se que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Se não existe tal função v, então u não possui uma α-ésima derivada parcial fraca.

A α-ésima derivada parcial fraca de uma função u, se existe, é única a menos de um conjunto de medida nula, (ver [5] para mais detalhes).

Exemplo 1.1.1 *Considere*

$$u(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 1, & se \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Tem-se que $Du = v$*, no sentido fraco, em que*

$$v(x) = \begin{cases} 1, & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 0, & se \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

De fato, para isto deve-se mostrar que

$$\int_0^2 u D\phi\ dx = -\int_0^2 v\phi\ dx,\ \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),\ \text{em que } \Omega = (0, 2).$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^2 uD\phi\ dx &= \int_0^1 uD\phi\ dx + \int_1^2 uD\phi\ dx \\
&= \int_0^1 xD\phi\ dx + \int_1^2 D\phi\ dx \\
&= x\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 \phi\ dx + \lim_{t\to 2^-} \phi(t) - \phi(1) \\
&= \phi(1) - \int_0^1 \phi\ dx - \phi(1) \\
&= -\int_0^1 \phi\ dx \\
&= -\int_0^2 v\phi\ dx,
\end{aligned}$$

donde segue o resultado.

Exemplo 1.1.2 *Seja*

$$u(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 < x \leq 1 \\ 2, & se \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

Não existe derivada fraca de u. De fato, para isto devemos mostrar que não existe qualquer função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_0^2 uD\phi\ dx = -\int_0^2 v\phi\ dx,\ \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \tag{1.6}$$

em que $\Omega = (0,2)$.

Suponha que (1.6) *seja válida para alguma função v e qualquer função teste ϕ. Então,*

$$\begin{aligned}
-\int_0^2 v\phi\ dx &= \int_0^2 uD\phi\ dx \\
&= \int_0^1 xD\phi\ dx + \int_1^2 2D\phi\ dx \\
&= x\phi\Big|_0^1 - \int_0^1 \phi\ dx + 2[\lim_{t\to 2^-} \phi(t) - \phi(1)] \\
&= \phi(1) - \int_0^1 \phi\ dx - 2\phi(1) \\
&= -\int_0^1 \phi\ dx - \phi(1).
\end{aligned}$$

Agora, escolha uma sequência $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty}$ *de funções suaves satisfazendo*

$$0 \leq \phi_m \leq 1, \ \phi_m(1) = 1, \ \phi_m(x) \to 0, \ \forall x \neq 1.$$

Acima, substituindo ϕ *por* ϕ_m *e fazendo* $m \to \infty$*, pelo Teorema B.1, tem-se*

$$1 = \lim_{m\to\infty} \phi_m(1) = \lim_{m\to\infty}\left[\int_0^2 v\phi_m dx - \int_0^1 \phi_m dx\right] = 0,$$

o que é uma contradição.

Portanto, não existe a derivada de u*, no sentido fraco.*

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [6].

Lema 1.1.1 (Lema de DuBois - Raymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Suponha que*

$$\int_\Omega u\varphi \ dx = 0,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$*. Então* $u = 0$ *q.t.p. em* Ω*.*

Definição 1.1.9 *Fixe* $1 \leq p \leq \infty$ *e seja* k *um inteiro não-negativo. O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *é definido por*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \text{ existe para todo multi-índice } \alpha, \text{ tal que } |\alpha| \leq k \text{ e } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

em que D^α *é a derivada no sentido fraco.*

Além disso, se $u \in W^{k,p}(\Omega)$*, sua norma é definida por*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} \operatorname*{supess}_\Omega |D^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases}$$

Observação 1.1.2 *Para* $p = 2$*, denota-se por* $H^k(\Omega)$ *o espaço* $W^{k,2}(\Omega)$*,* $(k = 0, 1, \dots)$*. O espaço* $H^k(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert.*

Note que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$*.*

Definição 1.1.10 *Denotamos por* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *o fecho de* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{k,p}(\Omega)$*.*

Sendo $\partial\Omega$ suave, interpreta-se $W_0^{k,p}(\Omega)$ como o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que "$D^\alpha u = 0$ em $\partial\Omega$", para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq k - 1$.

Definição 1.1.11 *Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.*

Se $f \in H^{-1}(\Omega)$, então existem funções $f_0, f_1, \ldots, f_n \in L^2(\Omega)$, tais que

$$f(v) = \int_\Omega f_0 v + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, v \in H_0^1(\Omega),$$

e

$$\|f\| = \max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Vale ressaltar as seguintes inclusões contínuas: $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

1.2 Espaços Envolvendo o Tempo

Nesta seção estudaremos outros tipos de espaços de Sobolev, que envolvem funções do tempo com valores em espaços de Banach. Tais espaços serão essenciais para a construção do conceito de solução fraca das EDP's lineares parabólica de segunda ordem que abordaremos no Capítulo 3.

Seja X um espaço de Banach, com norma $\|\cdot\|$.

Definição 1.2.1 *Uma função $f : [0, \tau] \to X$ é dita fortemente mensurável se existe uma sequência de funções simples $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k : [0, \tau] \to X$, tal que $f_k(t) \to f(t)$, para quase todo $t \in [0, \tau]$.*

Definição 1.2.2 *O espaço $L^p([0, \tau]; X)$ consiste de todas as funções fortemente mensuráveis $u : [0, \tau] \to X$, com*

$$\|u\|_{L^p([0,\tau];X)} := \left(\int_0^\tau \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \textit{para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{L^\infty([0,\tau];X)} := \operatorname*{supess}_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| < \infty.$$

Definição 1.2.3 *O espaço $\mathcal{C}([0, \tau]; X)$ consiste de todas as funções contínuas $u : [0, \tau] \to X$, com*

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,\tau];X)} := \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t)\| < \infty.$$

Definição 1.2.4 *Seja $u \in L^1([0, \tau]; X)$. Diz-se que $v \in L^1([0, \tau]; X)$ é a derivada fraca de u, e escreve-se $u' = v$, se*

$$\int_0^\tau \varphi'(t) u(t) dt = -\int_0^\tau \varphi(t) v(t) dt,$$

para toda função teste $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0, \tau)$.

Definição 1.2.5 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}([0,\tau];X)$ consiste de todas as funções $u \in L^p([0,\tau];X)$, tais que u' existe no sentido fraco e pertence a $L^p([0,\tau];X)$. Além disso, $W^{1,p}([0,\tau];X)$ é um espaço vetorial normado com norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}([0,\tau];X)} := \begin{cases} \left(\int_0^\tau (\|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{supess}_{0\leq t\leq\tau} (\|u(t)\| + \|u'(t)\|), & se\ p = \infty. \end{cases}$$

O resultado a seguir será útil para o desenvolvimento da aplicação que apresentaremos no Capítulo 3. Sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [5].

Teorema 1.2.1 *Se $u \in L^2([0,\tau];H_0^1(\Omega))$, com $u' \in L^2([0,\tau];H^{-1}(\Omega))$, então $u \in \mathcal{C}([0,\tau];L^2(\Omega))$.*

1.3 Semigrupos de Operadores Lineares Limitados

Algebricamente, um semigrupo é um par ordenado $(S,*)$ consistindo de um conjunto não-vazio S e uma operação binária associativa $*$ sobre a qual S é fechado, isto é, se $x, y \in S$, então $x*y \in S$. Em contraste com um grupo, um semigrupo pode ou não ter um elemento identidade, e dado um elemento de S, ele pode ou não ter um inverso, com relação a operação $*$.

No que se segue, o conjunto S consistirá de uma família de operadores lineares limitados (ou seja, contínuos) definidos em um espaço de Banach X e a operação $*$ será a composição de operadores, denotada pela justaposição dos mesmos.

Definição 1.3.1 *Um C_0-semigrupo ou semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X é uma família $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$, tal que*

(i) $T(0) = I$, *o operador identidade em* X;

(ii) $T(s)T(t) = T(s+t)$, $\forall s,t \geq 0$;

(iii) *Para cada* $x \in X$ *fixado,* $T(t)x \to x$, *quando* $t \to 0^+$.

Observação 1.3.1 *1. A condição (ii) assegura que a família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é fechada com relação a composição de operadores e, portanto, formam um semigrupo.*

2. Por (ii) o semigrupo é comutativo, pois

$$T(s)T(t) = T(s+t) = T(t+s) = T(t)T(s), \forall s,t \geq 0.$$

De (i) e (ii) segue que o semigrupo possui um elemento identidade $T(0)$. Logo, (i) e (ii) fornecem a estrutura algébrica do semigrupo.

Lema 1.3.1 *Se* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ *é um* C_0*-semigrupo, então a função* $t \mapsto T(t)x$ *é contínua de* $(0,\infty)$ *em* X*, para todo* $x \in X$*.*

Demonstração: Seja $t > 0$ e $x \in X$. Note primeiro que para $h > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\|, \end{aligned}$$

assim, visto que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, $\lim\limits_{h\to 0}\|T(h)x - x\| = 0$, o que implica que

$$\lim_{h\to 0}\|T(t+h)x - T(t)x\| = 0,$$

garantindo que $t \mapsto T(t)x$ é contínua à direita de t.

Para mostrarmos a continuidade a esquerda, mostremos primeiramente que $T(s)$ é limitado para todo $s \in [0, t+1]$. Note que existem $\delta > 0$ e $M \geq 1$, tais que $\|T(s)\| \leq M, \quad \forall s \in [0,\delta]$. De fato, se isto não ocorresse existiria uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n \to 0^+$, tal que $\|T(s_n)\| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema A.3, $\|T(s_n)x\|$ não seria limitada para pelo menos um $x \in X$, o que contradiz (iii) da Definição 1.3.1. Além disso, $M \geq 1$, pois $\|T(0)\| = 1$, por (i) da Definição 1.3.1.

Seja $n \in \mathbb{N}$ o primeiro natural tal que $n\delta > t+1$. Se $s \in [0, t+1]$, existem $k \in [0, n]$ e $\xi \in [0, \delta]$ tais que $s = k\delta + \xi$.

Logo,

$$\begin{aligned} \|T(s)\| &= \|T(k\delta + \xi)\| \leq \|T(k\delta)\|\|T(\xi)\| \\ &\leq \|T(\delta)\|^k\|T(\xi)\| \leq M^k\ M = M^{k+1} \\ &\leq M^{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto $\|T(s)\| \leq M^{n+1}, \forall s \in [0, t+1]$.

Agora, para $h > 0$ tal que $h \leq t$ e $0 \leq t-h \leq t+1$, tem-se

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)x - T(t-h+h)x\| \\ &= \|T(t-h)x + T(t-h)T(h)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\|\|x - T(h)x\| \\ &\leq M^{n+1}\|x - T(h)x\|. \end{aligned}$$

Logo, como $\lim\limits_{h\to 0}\|T(h)x - x\| = 0$, obtém-se que $\lim\limits_{h\to 0}\|T(t-h)x - T(t)x\| = 0$ e assim, $t \mapsto T(t)x$ é contínua à esquerda de t. ∎

Exemplo 1.3.1 (C_0-semigrupos de translações) *Considere* $X = L^p(0,\infty)$, *em que* $1 \leq p < \infty$ *e* $\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Para cada $t \geq 0$, *defina o operador* $T(t)$ *em* X *da seguinte forma: para uma função dada* $f \in X$, *defina a função* $T(t)f$ *em* $[0,\infty)$ *por*

$$[T(t)f](x) = f(x+t),\ x \in [0,\infty). \tag{1.7}$$

A expressão $[T(t)f](x)$ *está bem definida para quase todo* x *se* $t \geq 0$ *é fixado. O operador* $T(t)$ *é um operador translação e corresponde ao movimento do gráfico de* f, t *unidades para a esquerda.*

Observe que

$$\|T(t)f\|_p^p = \int_0^\infty |f(x+t)|^p dx = \int_t^\infty |f(y)|^p dy \leq \int_0^\infty |f(y)|^p dy = \|f\|_p^p,$$

ou seja, para cada $t \geq 0$,

$$\|T(t)f\|_p \leq \|f\|_p, \quad \forall f \in X. \tag{1.8}$$

Assim, $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$. *Note que* $[T(0)f](x) = f(x)$, *ou seja* $T(0) = I$. *Além disso,*

$$[T(s)T(t)f](x) = [T(s)f](x+t) = f(x+t+s) = [T(s+t)f](x),$$

para todo $s,t \geq 0$. *Portanto,* (i) *e* (ii) *da Definição 1.3.1 se verificam.*

Para estabelecer (iii) *devemos mostrar que, quando* $t \to 0^+$,

$$\|T(t)f - f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(x+t) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0. \tag{1.9}$$

Suponha que $f \in \mathcal{C}_0^\infty(0,\infty)$. *Assim, existem números reais* a *e* b, *com* $0 < a < b < \infty$ *tal que* $f(x) = 0$, *se* $x \notin [a,b]$. *Assuma, sem perda de generalidade, que* $0 \leq t < \dfrac{a}{2}$. *Então* $f(x+t) - f(x)$ *se anula fora de* $\left[\dfrac{a}{2}, b\right]$. *Além disso, pelo Teorema do Valor Médio, para qualquer* $x \in \left[\dfrac{a}{2}, b\right]$ *e* $t \in \left[0, \dfrac{a}{2}\right)$, *existe* $\vartheta \in (0,1)$ *tal que*

$$f(x+t) - f(x) = tf'(x+\vartheta t).$$

Embora ϑ *dependa em primeira instância de* x *e* t, *vemos que* $x + \vartheta t$ *sempre estará no intervalo* $\left[\dfrac{a}{2}, b + \dfrac{a}{2}\right]$ *sobre o qual* f' *é limitada por uma constante* M, *digamos. Assim, para*

$0 \leq t < \dfrac{a}{2}$, *obtém-se*

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty |f(x+t)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\frac{a}{2}}^b |f(x+t)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\frac{a}{2}}^b |tf'(x+\vartheta t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\frac{a}{2}}^b (tM)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= tM\left(b-\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $t \to 0^+$. *Logo, (1.9) verifica-se neste caso.*

Para provar o resultado para qualquer $f \in L^p(0,\infty)$, *usaremos o fato que* $\mathcal{C}_0^\infty(0,\infty)$ *é denso em* $L^p(0,\infty)$, *para* $1 \leq p < \infty$, *ou seja, existe uma sequência* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *de funções em* $\mathcal{C}_0^\infty(0,\infty)$ *tal que*

$$||f_n - f||_p \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Dado $\varepsilon > 0$, *escolha uma função* f_N *nesta sequência, para a qual*

$$||f_N - f||_p < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10}$$

Para esta função, obtém-se valores de a, b *e* M *como no caso anterior.*

Então, para $0 \leq t < \dfrac{a}{2}$, *usando a desigualdade triangular para* $\|\cdot\|_p$ *obtém-se*

$$
\begin{aligned}
||T(t)f-f||_p &\leq ||T(t)f - T(t)f_N||_p + ||T(t)f_N - f_N||_p + ||f_N - f||_p \\
&\leq ||T(t)(f-f_N)||_p + tM\left(b-\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + ||f_N - f||_p \\
&\leq ||f-f_N||_p + tM\left(b-\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + ||f_N - f||_p \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + tM\left(b-\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $t \to 0^+$, *tem-se* $\lim\limits_{t\to 0^+} ||T(t)f - f||_p \leq \varepsilon$. *Como* ε *é arbitrário, fica provado (1.9), para toda* $f \in L^p(0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$.

Isto completa a prova de que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0*-semigrupo de operadores lineares limitados em* $(L^p(0,\infty), \|\cdot\|_p)$, *para* $1 \leq p < \infty$.

Definição 1.3.2 *Seja* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo de operadores lineares limitados em um espaço de Banach* X. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é chamado* *(i)* C_0*-semigrupo de isometrias, se*

$$\|T(t)f\| = \|f\|, \ \forall t \geq 0, f \in X.$$

(ii) C_0*-semigrupo de contrações, se*

$$\|T(t)\| \leq 1, \ \forall t \geq 0.$$

Exemplo 1.3.2 *O* C_0*-semigrupo de translações no Exemplo 1.3.1 é um* C_0*-semigrupo de contrações em* $L^p(0,\infty)$*, para* $1 \leq p < \infty$*, em vista de* (1.8)*.*

Finalmente, mencionaremos um pouco da idéia correspondente a *grupos*.

Exigiremos agora que a família $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X esteja definida para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, existe um operador para cada número real t, não apenas para cada t não-negativo. Por analogia a Definição 1.3.1, tem-se

Definição 1.3.3 *Um* C_0*-grupo ou grupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em um espaço de Banach* X *é uma família* $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}(X)$*, tal que*

(i) $T(0) = I$*, o operador identidade em* X*;*

(ii) $T(s)T(t) = T(s+t)$*, para todo* $s, t \in \mathbb{R}$*;*

(iii) Para cada $x \in X$ *fixado,* $T(t)x \to x$*, quando* $t \to 0$*.*

Observação 1.3.2 *Por* (i) *e* (ii)*, segue que*

$$T(t)T(-t) = T(-t)T(t) = T(0) = I,$$

ou seja, $T(t)$ *possui uma inversa, a saber,* $T(-t)$*.*

Exemplo 1.3.3 (C_0-grupos de translações) *Por analogia com o Exemplo 1.3.1, seja* $X = L^p(-\infty,\infty)$*. Por definição,* $f \in X$ *se* $\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$*.*

Como antes, defina $T(t)$ *em* X *por*

$$[T(t)f](x) = f(x+t), \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

A diferença agora é que $T(t)$ *pode ser definido para todo* $t \in \mathbb{R}$ *(pois o domínio de* f *é* $\mathbb{R}$*). Imitando o Exemplo 1.3.1, podemos mostrar que obtemos um* C_0*-grupo de isometrias em* $\mathcal{B}(X)$*, pois*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.4 O Gerador Infinitesimal de um C_0-semigrupo.

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados que serão importantes para nossos propósitos.

Observação 1.4.1 *Pode-se provar uma versão a valores vetoriais da regra de L'Hospital. Logo, se* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ *é um* C_0*-semigrupo e* $x \in X$ *está fixado, então*

$$\frac{1}{t}\int_0^t T(u)xdu \to x \text{ na norma em } X, \text{ quando } t \to 0^+.$$

Definição 1.4.1 *Seja* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ *um* C_0*-semigrupo de operadores lineares em um espaço de Banach* X *e para cada* $t > 0$*, seja* $A_t \in \mathcal{B}(X)$ *definido por*

$$A_t = \frac{T(t) - I}{t}. \tag{1.11}$$

O gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é o operador* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ *definido por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} A_t x, \tag{1.12}$$

em que

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X; A_t x \text{ tem um limite (em } X), \text{ quando } t \to 0^+\}.$$

Observação 1.4.2 $\mathcal{D}(A)$ *é um subespaço linear de* X *e* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ *é um operador linear.*

A seguir, apresentaremos alguns resultados importantes os quais serão utilizados posteriormente.

Teorema 1.4.1 *Se* X *é um espaço de Banach real e* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ *é um* C_0*-semigrupo, então existem constantes* $\omega \geq 0$ *e* $M \geq 1$*, tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.13}$$

Demonstração: Note que se (1.13) se verifica, então $\|T(t)\|$ deve ser uniformemente limitada em qualquer subconjunto compacto da forma $0 \leq t \leq t_0$. Isto será a chave para a prova do Teorema. Primeiramente, estabeleceremos uma limitação uniforme "próxima" de 0 e então usaremos a estrutura algébrica para completar a prova.

Mostremos que existe $t_0 > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado para $0 \leq t \leq t_0$. Para isso, suponhamos que tal t_0 não exista. Assim, para cada $n = 1, 2, \cdots$, pode-se encontrar $t_n \in \mathbb{R}$, tal que $0 \leq t_n \leq \dfrac{1}{n}$ e $\|T(t_n)\| \geq n$.

Observe que $\{\|T(t_n)\|\}_{n=1}^{\infty}$ é ilimitada, assim, pelo Teorema A.3, segue que existe $x \in X$ tal que $\{\|T(t_n)x\|\}_{n=1}^{\infty}$ é ilimitada. Para este x fixado, defina $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $f(t) = \|T(t)x\|$.

Pela Definição 1.3.1 e pela Observação 1.3.1, f é contínua e, portanto, limitada em $[0,1]$. Mas por construção $t_n \in [0,1]$, $\forall n$. Assim, $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\|T(t_n)x\|\}_{n=1}^{\infty}$ é limitado, o que é uma contradição. Isto estabelece a existência de um t_0, tal que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $0 \leq t \leq t_0$, em que M é uma constante (finita). Note que, como

$$\|T(0)\| = \|I\| = 1,$$

tem-se $M \geq 1$.

Agora, seja $t \in [0,\infty)$ arbitrário. Escreva $t = nt_0 + s$, em que n é um inteiro não negativo e $0 \leq s < t_0$. Pelas propriedades de semigrupo, tem-se

$$T(t) = T(nt_0 + s) = T(nt_0)T(s) = [T(t_0)]^n T(s),$$

ou seja,

$$\|T(t)\| \leq \|T(t_0)\|^n \|T(s)\| \leq M^n M = MM^{\frac{(t-s)}{t_0}} \leq MM^{\frac{t}{t_0}},$$

em que $M \geq 1$ e $t_0 > 0$. Escrevendo $M^{\frac{1}{t_0}} = e^{\omega}$, ou seja, $\omega = \dfrac{1}{t_0}\ln M \geq 0$, obtém-se

$$\|T(t)\| \leq M(e^{\omega})^t = Me^{\omega t}.$$

■

Notação 1.4.1 *Fixados números reais $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$, denota-se por $C_0(M,\omega)$ a classe dos C_0-semigrupos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfazem* (1.13).

Teorema 1.4.2 *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ um C_0-semigrupo com gerador infinitesimal A. Se $x \in \mathcal{D}(A)$, então $T(t)x \in \mathcal{D}(A), \forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \ \forall x \in \mathcal{D}(A), \tag{1.14}$$

em que a derivada é a direita se $t = 0$.

__**Demonstração:**__ Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Para provar que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, para todo $t \geq 0$, considere o limite, quando $h \to 0^+$, de

$$\frac{T(h)-I}{h}(T(t)x) = T(t)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]x.$$

Como $x \in \mathcal{D}(A)$ e $T(t)$ é contínuo, o lado direito converge, na norma de X, para $T(t)Ax$. Assim $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$AT(t)x = T(t)Ax, \ \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{1.15}$$

Para $t \geq 0$, a derivada lateral à direita de $T(t)x$ é dada por

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Resta analisar as derivadas laterais à esquerda de $T(t)x$, para $t > 0$. Para isso, troca-se h por $-h$, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] + \lim_{h \to 0^+} T(t-h)Ax. \end{aligned}$$

Como $x \in \mathcal{D}(A)$, o primeiro termo é 0, visto que $\|T(t-h)\|$ é limitado em $[0, t]$; enquanto o segundo é $T(t)Ax$, pela continuidade forte de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Para ver isto, note que para $0 \leq h \leq t$, tem-se

$$\begin{aligned} \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| &= \|T(t-h)Ax - T(t-h)T(h)Ax\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|Ax - T(h)Ax\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \|Ax - T(h)Ax\| \\ &\leq Me^{\omega t} \|T(h)Ax - Ax\| \to 0, \text{ quando } h \to 0^+. \end{aligned}$$

Assim, a derivada lateral à esquerda de $T(t)x$, para $t > 0$, existe e é igual a $T(t)Ax$. Disto segue que para $t > 0$, a derivada de $T(t)x$ existe e é igual a $T(t)Ax$. Logo (1.14) se verifica. ■

Teorema 1.4.3 *Se $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ é um C_0-semigrupo com gerador infinitesimal A, então $\mathcal{D}(A)$ é denso em X, isto é, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Além disso, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ é um operador linear fechado.*

Demonstração: Seja $x \in X$. Primeiramente, mostraremos que para todo $t > 0$, o elemento $y_t = \displaystyle\int_0^t T(u)x \, du$ pertence a $\mathcal{D}(A)$.

Para isto, seja $h > 0$ e considere

$$\frac{T(h) - I}{h} \left[\int_0^t T(u)x \, du \right] = \frac{1}{h} \int_0^t [T(u+h)x - T(u)x] \, du.$$

A última expressão pode ser reescrita como

$$\frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(v)x \, dv - \frac{1}{h} \int_0^t T(v)x \, dv = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(v)x \, dv - \frac{1}{h} \int_0^h T(v)x \, dv.$$

Fazendo $h \to 0^+$ e usando a Observação 1.4.1, deduz-se que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \left[\int_0^t T(u)x \, du \right] = T(t)x - x.$$

Assim, $y_t \in \mathcal{D}(A)$ e $Ay_t = T(t)x - x$. Agora, seja $x_t = \frac{1}{t} y_t$. Então x_t também pertence a $\mathcal{D}(A)$, pois $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço linear, com $Ax_t = \frac{1}{t} Ay_t$. Além disso, por L'Hospital,

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(u)x \, du \to T(0)x = x, \text{ quando } t \to 0^+.$$

Assim, x é o limite de uma sequência de elementos em $\mathcal{D}(A)$. Uma vez que $x \in X$ é arbitrário, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Para provar que A é fechado, seja $x_n \in \mathcal{D}(A)$, com $x_n \to x$ $(\in X)$ e $Ax_n \to y$ $(\in X)$. Devemos mostrar que $x \in \mathcal{D}(A)$ e que $Ax = y$. Pelo Teorema 1.4.2, $\frac{d}{dt} T(t)x_n = T(t)Ax_n$, e assim

$$T(t)x_n - x_n = T(t)x_n - T(0)x_n = \int_0^t T(u)Ax_n \, du, \quad \forall t > 0. \tag{1.16}$$

Agora, pelo Teorema 1.4.1, conclui-se que $\|T(u)\|$ é limitada para $0 \leq u \leq t$, ou seja,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t T(u)Ax_n \, du - \int_0^t T(u)y \, du \right\| &= \left\| \int_0^t T(u)\{Ax_n - y\} \, du \right\| \\ &\leq \int_0^t \|T(u)\| \|Ax_n - y\| \, du \\ &\leq C \|Ax_n - y\| t, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$.

Assim, $\int_0^t T(u)Ax_n \, du \to \int_0^t T(u)y \, du$ e fazendo $n \to \infty$ em (1.16), tem-se

$$T(t)x - x = \int_0^t T(u)y \, du,$$

pois $T(t)$ é contínuo.

Logo, por L'Hospital, segue que

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(u)y \, du \to y,$$

quando $t \to 0^+$.

Assim, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$ como desejado. Isto completa a prova, já que a linearidade é imediata, em vista da Observação 1.4.2.

$\blacksquare$

Teorema 1.4.4 *Seja X um espaço de Banach real. Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ são C_0-semigrupos de operadores lineares limitados em X com mesmo gerador infinitesimal A, então $S(t) = T(t)$, para todo $t \geq 0$, isto é, um C_0-semigrupo é unicamente determinado por seu gerador infinitesimal.*

Demonstração: O caso $t = 0$ é imediato, pois $T(0) = S(0) = I$ por definição.

Agora, fixe $t > 0$. Para $x \in \mathcal{D}(A)$, defina $f : [0, t] \to X$ por

$$f(s) = T(t-s)S(s)x, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Observe que,

$$f(0) = T(t-0)S(0)x = T(t)Ix = T(t)x$$

e

$$f(t) = T(t-t)S(t)x = IS(t)x = S(t)x.$$

Mostraremos agora que $f(s)$ é constante em $0 \leq s \leq t$. Pelo Teorema 1.4.2, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\{T(t-s)S(s)x\} &= \lim_{h\to 0} \frac{T(t-s-h)S(s+h)x - T(t-s)S(s)x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{T(t-s-h)S(s+h)x - T(t-s)S(s+h)x}{h} \\
&\quad + \lim_{h\to 0} \frac{T(t-s)S(s+h)x - T(t-s)S(s)x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[T(t-s-h) - T(t-s)]S(s+h)x}{h} \\
&\quad + \lim_{h\to 0} \frac{T(t-s)[S(s+h)x - S(s)x]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} T(t-s-h)\left[\frac{I - T(h)}{h}\right] S(s+h)x \\
&\quad + T(t-s)\lim_{h\to 0} \frac{S(s+h)x - S(s)x}{h} \\
&= -\lim_{h\to 0} T(t-s-h)\left[\frac{T(h) - I}{h}\right] S(s+h)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\
&= -\lim_{h\to 0} T(t-s-h)\left[\frac{T(h) - I}{h}\right] S(s+h)x + T(t-s)AS(s)x.
\end{aligned}$$

Mostremos que $\lim_{h\to 0} T(t-s-h)\left[\dfrac{T(h) - I}{h}\right] S(s+h)x = T(t-s)AS(s)x.$

Observe que

$$
\begin{aligned}
&\left\|T(t-s-h)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]S(s+h)x - T(t-s)AS(s)x\right\| \\
&\quad \leq \left\|T(t-s-h)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]S(s+h)x - T(t-s-h)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]S(s)x\right\| \\
&\quad + \left\|T(t-s-h)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]S(s)x - T(t-s-h)AS(s)x\right\| \\
&\quad + \|T(t-s-h)AS(s)x - T(t-s)AS(s)x\| \\
&\quad = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

Agora, mostraremos que $I_1, I_2, I_3 \to 0$, quando $h \to 0$. De fato,

(i) <u>Caso $I_1 \to 0$:</u>

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left\|T(t-s-h)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right][S(s+h)x - S(s)x]\right\| \\
&\leq Me^{\omega(t-s-h)}\left\|\left[\frac{T(h)-I}{h}\right][S(s+h)x - S(s)x]\right\| \\
&\leq Me^{\omega t}\left\|T(h)\left[\frac{S(s+h)x - S(s)x}{h}\right] - \frac{S(s+h)x - S(s)x}{h}\right\| \\
&\leq Me^{\omega t}\left[\left\|T(h)\left[\frac{S(s+h)x - S(s)x}{h}\right] - T(h)AS(s)x\right\|\right. \\
&\quad \left. + \|T(h)AS(s)x - AS(s)x\| + \left\|AS(s)x - \frac{S(s+h)x - S(s)x}{h}\right\|\right] \\
&\leq Me^{\omega t}\left[Me^{\omega h}\left\|\frac{S(s+h)x - S(s)x}{h} - AS(s)x\right\|\right. \\
&\quad \left. + \|[T(h)-I]AS(s)x\| + \left\|AS(s)x - \frac{S(s+h)x - S(s)x}{h}\right\|\right] \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $h \to 0$.

(ii) <u>Caso $I_2 \to 0$:</u>

$$
I_2 = \left\|T(t-s-h)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]S(s)x - T(t-s-h)AS(s)x\right\|
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq Me^{\omega(t-s-h)}\left\|\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]S(s)x - AS(s)x\right\| \\
&\leq Me^{\omega t}\left\|\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]S(s)x - AS(s)x\right\| \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $h \to 0$.

(iii) Caso $I_3 \to 0$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \|T(t-s-h)AS(s)x - T(t-s)AS(s)x\| \\ &= \|[T(t-s-h) - T(t-s)]AS(s)x\| \to 0, \end{aligned}$$

quando $h \to 0$.

Logo,

$$\frac{d}{ds}\{T(t-s)S(s)x\} = -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0.$$

Assim, conclui-se que $f(s)$ é, de fato, constante em $0 \leq s \leq t$. Além disso, tem-se $S(t)x = T(t)x$, para qualquer $x \in \mathcal{D}(A)$.

Finalmente, seja $x \in X$. Pelo Teorema 1.4.3, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \to x$, quando $n \to \infty$. Pelo caso anterior $S(t)x_n = T(t)x_n$, para $n = 1, 2, \cdots$. Fazendo $n \to \infty$ e usando a continuidade de $S(t)$ e $T(t)$, tem-se $S(t)x = T(t)x$, para todo $x \in X$. Portanto, $S(t) = T(t)$ como operadores em X. ■

A prova do próximo resultado pode ser encontrada em [15].

Teorema 1.4.5 *Se X é um espaço reflexivo e A é o gerador do C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então A^* é o gerador do C_0-semigrupo $\{T(t)^*\}_{t\geq 0}$.*

Capítulo

2

Soluções Mild e Weak

2.1 O Problema de Cauchy Abstrato

Sejam X um espaço de Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear e $f : [0, \tau) \to X$, $\tau > 0$. Dado $x \in X$, o problema de Cauchy abstrato para A, com condição inicial x, consiste em encontrar uma solução $u(t)$ para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), & 0 < t < \tau \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.1.1 *Uma função $u : [0, \tau) \to X$ é uma solução (clássica) de* (2.1) *em $[0, \tau)$ se u é contínua em $[0, \tau)$, continuamente diferenciável em $(0, \tau)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para $0 < t < \tau$ e* (2.1) *é satisfeito em $[0, \tau)$.*

O próximo resultado nos dá uma condição suficiente para existência de solução de (2.1).

Teorema 2.1.1 *Sejam X um espaço de Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{B}(X)$, $f : [0, \infty) \to X$ continuamente diferenciável e $x \in \mathcal{D}(A)$. Então, o problema de Cauchy abstrato* (2.1) *possui uma única solução u dada pela Fórmula da Variação das Constantes*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \ t \geq 0. \tag{2.2}$$

Demonstração: Primeiro, mostraremos que (2.2) define uma solução de (2.1). Considere

$$v(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{2.3}$$

Assim, fazendo-se a mudança de variável $u = t - s$, conclui-se que

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \int_t^0 T(u)f(t-u)(-du) \\ &= \int_0^t T(u)f(t-u)du \\ &= \int_0^t T(s)f(t-s)ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Observe que v é diferenciável em $[0, \infty)$ (à direita em 0), pois

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt}v(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)f(t-s)ds\right] \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^t \left(T(s)f(t+h-s) - T(s)f(t-s)\right)ds + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds \\ &= \int_0^t T(s)\left[\lim_{h\to 0^+} \frac{f((t-s)+h)-f(t-s)}{h}\right]ds + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds \\ &= \int_0^t T(s)f'(t-s)ds + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)f(t+h-s)ds \\ &= \int_0^t T(s)f'(t-s)ds + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^{h} T(t+h-u)f(u)du. \end{aligned}$$

Mostremos que $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-u)f(u)du = T(t)f(0)$.
Para isto, observe que,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-u)f(u)du - T(t)f(0)\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-u)f(u)du - \frac{1}{h}\int_0^h T(t)f(0)du\right\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|T(t+h-u)f(u) - T(t)f(0)\|du. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que o lado direito da desigualdade acima vai a zero, quando h vai a zero pela direita.

Note que,

$$\begin{aligned}\|T(t+h-u)f(u)-T(t)f(0)\| &= \|T(t+h-u)f(u)-T(t+h-u)f(0)\\ &\quad + T(t+h-u)f(0)-T(t)f(0)\|\\ &\leq \|T(t+h-u)[f(u)-f(0)]\|+\|[T(t+h-u)-T(t)]f(0)\| \to 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$ (observe que quando $h \to 0^+, u \to 0^+$), ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe h' suficientemente pequeno tal que

$$\|T(t+h-u)f(u)-T(t)f(0)\| < \varepsilon,\ \forall h < h'.$$

Agora, tome $h < h'$. Assim,

$$\frac{1}{h}\int_0^h \|T(t+h-u)f(u)-T(t)f(0)\|du \leq \frac{1}{h}\int_0^h \varepsilon du = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluí-se que

$$\frac{1}{h}\int_0^h \|T(t+h-u)f(u)-T(t)f(0)\|du \to 0,\ \text{quando } h \to 0^+.$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-u)f(u)du = T(t)f(0).$$

Como $\dfrac{d^+v}{dt}$ existe e é contínua, segue pelo Lema C.1 que v é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}v(t) = T(t)f(0)+\int_0^t T(s)f'(t-s)ds.$$

Uma vez que por hipótese f' é contínua e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, o lado direito é contínuo em $[0,\infty)$ (à direita em 0).

Como $x \in \mathcal{D}(A)$, pelo Teorema 1.4.2, $T(t)x$ é diferenciável com $\dfrac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax$, que é uma função contínua em t. Assim, o lado direito de (2.2) é continuamente diferenciável em $(0,\infty)$.

Para mostrar que a expressão para u em (2.2) pertence a $\mathcal{D}(A)$, para todo $t > 0$, pelo Teorema 1.4.2 e pela Observação 1.4.2 é suficiente mostrar que $v(t) \in \mathcal{D}(A)$, para todo $t > 0$. Para isso, seja $h > 0$ e observe que

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(h)T(t-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right] \\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_0^{h} T(u)f(t+h-u)du,
\end{aligned}$$

sendo que para a última igualdade utiliza-se a mudança de variável $u = t+h-s$.

Quando $h \to 0^+$, o primeiro termo do lado direito da igualdade acima converge para $\frac{d}{dt}v(t)$, cuja existência foi estabelecida acima.

Mostremos que $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h T(u)f(t+h-u)du = f(t)$.

Para isto, observe que,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(u)f(t+h-u)du - f(t)\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_0^h T(u)f(t+h-u) - \frac{1}{h}\int_0^h f(t)du\right\| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|T(u)f(t+h-u) - f(t)\|du.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que o lado direito da desigualdade acima vai a zero, quando h vai a zero pela direita, note que, como $T(0) = I$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|T(u)f(t+h-u) - f(t)\| &= \|T(u)f(t+h-u) - T(u)f(t) + T(u)f(t) - T(0)f(t)\| \\
&\leq \|T(u)[f(t+h-u) - f(t)]\| + \|[T(u) - T(0)]f(t)\| \to 0,
\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$ (observe que quando $h \to 0^+, u \to 0^+$), e utilizando o mesmo raciocínio anterior, concluí-se que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h T(u)f(t+h-u)du = f(t)$$

Disto, segue que $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ e $Av(t) = \frac{d}{dt}v(t) - f(t)$, para todo $t > 0$. Assim, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, com $Au(t) = T(t)Ax + \frac{d}{dt}v(t) - f(t)$, para todo $t > 0$.

Além disso, para todo $t > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t) &= \frac{d}{dt}\left[T(t)x + v(t)\right] = T(t)Ax + \frac{d}{dt}v(t)\\ &= Au(t) + f(t).\end{aligned}$$

Finalmente, $u(0) = T(0)x + v(0) = x + 0 = x$, ou seja, o problema de Cauchy abstrato (2.1) é satisfeito. Isto mostra que u, dada por (2.2), é uma solução de (2.1).

Para a unicidade, suponha que u_1 seja uma outra solução de (2.1) e $u_2 = u - u_1$, com u como em (2.2). Logo, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_2(t) &= \frac{d}{dt}u(t) - \frac{d}{dt}u_1(t) = Au(t) + f(t) - [Au_1(t) + f(t)]\\ &= Au(t) - Au_1(t) = A[u(t) - u_1(t)] = Au_2(t)\end{aligned}$$

e $u_2(0) = u(0) - u_1(0) = x - x = 0$.

Portanto,

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u_2(t) = Au_2(t)\\ u_2(0) = 0.\end{cases}$$

Daí, $u_2(t) = T(t)0 = 0$, $\forall t \geq 0$, já que $f \equiv 0$ neste problema de valor inicial.

Assim, para todo $t \geq 0$, $u_1(t) = u(t)$, o que completa a prova. ∎

Pode-se provar que se $x \in X$ é arbitrário, então, a menos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e f possuam propriedades especiais, $u(t)$ dada por (2.2), em geral, não pertencerá a $\mathcal{D}(A)$, ou seja, (2.1) ainda não faz sentido.

Para $f \in L^1([0,\tau];X)$, veremos abaixo que o lado direito de (2.2) é uma função contínua em $[0,\tau]$. É natural considera-la como uma solução generalizada de (2.1) mesmo que ela não seja diferenciável e não satisfaça a equação no sentido da Definição 2.1.1.

Definição 2.1.2 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Seja $x \in X$ e $f \in L^1([0,\tau];X)$. A função $u \in \mathcal{C}([0,\tau];X)$ dada por*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

é uma solução mild do problema (2.1) *em* $[0,\tau]$.

Nosso objetivo agora é estabelecer uma equivalência entre soluções mild e soluções weak, definidas por J. M. Ball em [2]. Afim de apresentar o conceito de solução weak dado por J. Ball, precisaremos fixar algumas notações. Daqui em diante, A é um operador linear fechado, densamente definido, $f \in L^1([0,\tau];X)$, A^* denota o adjunto de A e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o par de dualidade entre X e seu espaço dual X^*.

Definição 2.1.3 *Uma função $u \in \mathcal{C}([0,\tau];X)$ é uma solução weak de (2.1) se, para qualquer $v \in \mathcal{D}(A^*)$, a função $\langle u(t), v\rangle$ é absolutamente contínua em $[0,\tau]$ e*

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle = \langle u(t), A^*v\rangle + \langle f(t), v\rangle, \tag{2.4}$$

para quase todo $t \in [0,\tau]$.

Antes de apresentar o principal resultado deste trabalho, precisaremos dos lemas a seguir.

Lema 2.1.1 *Sejam $x, z \in X$ satisfazendo $\langle z, v\rangle = \langle x, A^*v\rangle$, para todo $v \in \mathcal{D}(A^*)$. Então $x \in \mathcal{D}(A)$ e $z = Ax$.*

Demonstração: Suponhamos que $x \in \mathcal{D}(A)$ e $z \neq Ax$, daí $(x,z) \notin G(A) \subset X \times X$, em que $G(A)$ denota o gráfico de A.

Como $G(A)$ é fechado, pelo Teorema A.4, existe $\phi \in (X \times X)^*$, tal que

$$\phi(x,z) \neq 0 \text{ e } \phi(y, Ay) = 0,\ \forall y \in \mathcal{D}(A).$$

Considere agora $v, v^* \in X^*$, tais que

$$\langle y, v\rangle = \phi(0,y),\ \forall y \in X \ \text{ e } \ \langle y, v^*\rangle = \phi(y,0),\ \forall y \in X.$$

Assim,

$$\langle Ay, v\rangle + \langle y, v^*\rangle = \phi(0, Ay) + \phi(y,0) = \phi(y, Ay) = 0,\ \forall y \in \mathcal{D}(A).$$

e

$$\langle z, v\rangle + \langle x, v^*\rangle = \phi(0,z) + \phi(x,0) = \phi(x,z) \neq 0. \tag{2.5}$$

Logo, $\langle Ay, v\rangle = -\langle y, v^*\rangle$, ou seja, $(v \circ A)y = -v^*y,\ \forall y \in \mathcal{D}(A)$.

Portanto, $A^*v = -v^*$ e $v \in \mathcal{D}(A^*)$, pois $v \circ A = -v^* \in X^*$ é limitado. Substituindo $v^* = -A^*v$ em (2.5), tem-se $\langle z, v\rangle \neq \langle x, A^*v\rangle$ o que é uma contradição. ∎

Lema 2.1.2 *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados, com gerador infinitesimal A, e $f \in L^1([0,\tau];X)$, então u dada por (2.2) é uma função contínua, ou seja, $u \in \mathcal{C}([0,\tau];X)$.*

Demonstração: Dado $t \in [0,\tau]$, mostraremos que u é contínua tanto à direita, quanto à esquerda em t. Analisemos primeiramente a continuidade à direita em t. Para $h > 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|u(t+h)-u(t)\| &= \left\|T(t+h)x+\int_0^{t+h}T(t+h-s)f(s)ds-T(t)x-\int_0^t T(t-s)f(s)ds\right\| \\
&\leq \|T(t+h)x-T(t)x\| \\
&\quad+\left\|\int_0^t[T(t+h-s)-T(t-s)]f(s)ds+\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)ds\right\| \\
&= \|T(t+h)x-T(t)x\| \\
&\quad+\left\|\int_0^t[T(h)-I]T(t-s)f(s)ds+\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)ds\right\| \\
&\leq \|T(t+h)x-T(t)x\|+\|[T(h)-I]v(t)\| \\
&\quad+\int_t^{t+h}\|T(t+h-s)\|\|f(s)\|ds, \text{ em que } v \text{ é como em (2.3)} \\
&\leq \|T(t+h)x-T(t)x\|+\|[T(h)-I]v(t)\| \\
&\quad+\int_t^{t+h}Me^{\omega(t+h-s)}\|f(s)\|ds, \quad \text{por (1.13)} \\
&\leq \|T(t+h)x-T(t)x\|+\|[T(h)-I]v(t)\|+Me^{\omega h}\int_t^{t+h}\|f(s)\|ds \\
&= I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

Como $x \in X$ está fixado e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados $I_1 \to 0$, quando $h \to 0$.

Em I_2, como $v(t)$ independe de h e $T(h)y \to y$, $\forall y \in X$, quando $h \to 0$, segue que $I_2 \to 0$, quando $h \to 0$.

Agora, como $s \mapsto Me^{\omega s}$ é uma aplicação contínua e $f \in L^1([0,\tau];X)$, segue que $Me^{\omega h} \to M$ e $\displaystyle\int_t^{t+h}\|f(s)\|ds \to 0$, e daí, $I_3 \to 0$, quando $h \to 0$.

Logo, u é contínua à direita em t.

Provemos agora a continuidade de u à esquerda em t. Para $h > 0$, tal que $t-h \in [0,\tau]$, segue que

$$\begin{aligned}
\|u(t-h)-u(t)\| &= \left\|T(t-h)x+\int_0^{t-h}T(t-h-s)f(s)ds-T(t)x-\int_0^t T(t-s)f(s)ds\right\| \\
&\leq \|T(t-h)x-T(t)x\| \\
&\quad+\left\|\int_0^{t-h}T(t-h-s)f(s)ds-\int_0^{t-h}T(t-s)f(s)ds-\int_{t-h}^t T(t-s)f(s)ds\right\| \\
&\leq \|T(t-h)x-T(t)x\|+\int_0^{t-h}\|[T(t-h-s)-T(t-s)]f(s)\|ds \\
&\quad+\int_{t-h}^t\|T(t-s)\|\|f(s)\|ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|T(t-h)x - T(t)x\| + \int_0^{t-h} \|[T(t-h-s) - T(t-s)]f(s)\|\, ds \\
&\quad + \int_{t-h}^{t} Me^{\omega(t-s)}\|f(s)\|ds, \quad \text{por (1.13)} \\
&\leq \|T(t-h)x - T(t)x\| + \int_0^{t-h} \|[T(t-h-s) - T(t-s)]f(s)\|ds \\
&\quad + Me^{\omega h}\int_{t-h}^{t} \|f(s)\|ds \\
&= I_4 + I_5 + I_6.
\end{aligned}
$$

Observe que $I_4 \to 0$, quando $h \to 0$ e como $s \mapsto Me^{\omega s}$ é contínua e $f \in L^1([0,\tau];X)$, $I_6 \to 0$, quando $h \to 0$.

Para I_5, note que $\|[T(t-h-s) - T(t-s)]f(s)\| \to 0$, quando $h \to 0$, pois $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados. Além disso, para $0 \leq s \leq t-h$,

$$\|[T(t-h-s) - T(t-s)]f(s)\| \leq (Me^{\omega(t-h-s)} + Me^{\omega(t-s)})\|f(s)\| \leq 2Me^{\omega(t-s)}\|f(s)\|,$$

com $g(s) := 2Me^{\omega(t-s)}\|f(s)\|$ finita e integrável. Logo, pelo Teorema B.2 concluí-se que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} I_5 &= \lim_{h\to 0}\int_0^{t-h} \|[T(t-h-s) - T(t-s)]f(s)\|ds \\
&= \int_0^{t-h} \lim_{h\to 0}\|[T(t-h-s) - T(t-s)]f(s)\|ds = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, u é contínua à esquerda em t. Logo $u \in \mathcal{C}([0,\tau];X)$. ■

Lema 2.1.3 *Seja $x \in X$. Se para $t \in [0,\tau]$, $T(t)x := u(t) - u_0(t)$, em que u e u_0 são as únicas soluções weak de* (2.1)*, com condições iniciais $u(0) = x$ e $u_0(0) = 0$,* respectivamente*, e para $t > \tau, t = n\tau + s$, com $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0,\tau)$, $T(t)x := T(s)T(\tau)^n x$, então a família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados.*

Demonstração: Devemos mostrar que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados. Começaremos mostrando que para cada $t \geq 0$, $T(t) : X \to X$ é um operador linear.

De fato, sejam $x_1, x_2 \in X$. Se $t \in [0,\tau]$, então $T(t)(x_1 + x_2) = u(t) - u_0(t)$, em que u e u_0 são soluções weak de (2.1), satisfazendo $u(0) = x_1 + x_2$ e $u_0(0) = 0$, respectivamente.

Por outro lado, $T(t)x_1 + T(t)x_2 = u_1(t) - u_0(t) + u_2(t) - u_0(t) = u_1(t) + u_2(t) - 2u_0(t)$, em que u_1 e u_2 são soluções weak de (2.1), satisfazendo $u_1(0) = x_1$ e $u_2(0) = x_2$, respectivamente.

Defina $\phi : [0, \tau] \to X$, por $\phi(s) = u_1(s) + u_2(s) - u_0(s)$. Note que ϕ é solução weak de (2.1), pois

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle \phi(s), v\rangle &= \frac{d}{ds}\langle u_1(s) + u_2(s) - u_0(s), v\rangle \\
&= \frac{d}{ds}\langle u_1(s), v\rangle + \frac{d}{ds}\langle u_2(s), v\rangle - \frac{d}{ds}\langle u_0(s), v\rangle \\
&= \langle u_1(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle + \langle u_2(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle - \langle u_0(s), A^*v\rangle - \langle f(s), v\rangle \\
&= \langle u_1(s) + u_2(s) - u_0(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle \\
&= \langle \phi(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(A^*),
\end{aligned}$$

e $\phi(0) = u_1(0) + u_2(0) - u_0(0) = x_1 + x_2$.

Daí, ϕ e u são ambas soluções weak de (2.1), com mesma condição inicial.

Logo, $\phi(t) = u(t)$, ou seja, $u_1(t) + u_2(t) - u_0(t) = u(t)$, e assim, $u_1(t) + u_2(t) - 2u_0(t) = u(t) - u_0(t)$.

Portanto, $T(t)(x_1 + x_2) = T(t)x_1 + T(t)x_2$.

Agora, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, tem-se $T(t)(\alpha x) = u(t) - u_0(t)$, em que u e u_0 são soluções weak de (2.1), satisfazendo $u(0) = \alpha x$ e $u_0(0) = 0$, respectivamente.

Por outro lado, $\alpha T(t)x = \alpha[\bar{u}(t) - u_0(t)] = \alpha\bar{u}(t) - \alpha u_0(t)$, em que $\bar{u}$ é solução weak de (2.1) com $\bar{u}(0) = x$.

Agora, defina $\psi : [0, \tau] \to X$, $\psi(s) = \alpha\bar{u}(s) + (1 - \alpha)u_0(s)$. Logo, ψ é solução weak de (2.1), pois

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle \psi(s), v\rangle &= \frac{d}{ds}\langle \alpha\bar{u}(s) + (1 - \alpha)u_0(s), v\rangle \\
&= \alpha\frac{d}{ds}\langle \bar{u}(s), v\rangle + (1 - \alpha)\frac{d}{ds}\langle u_0(s), v\rangle \\
&= \alpha[\langle \bar{u}(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle] + (1 - \alpha)[\langle u_0(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle] \\
&= \langle \alpha\bar{u}(s) + (1 - \alpha)u_0(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle \\
&= \langle \psi(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(A^*),
\end{aligned}$$

e $\psi(0) = \alpha\bar{u}(0) + (1 - \alpha)u_0(0) = \alpha x$.

Assim, ψ e u são soluções weak de (2.1), com mesma condição inicial e, portanto, pela unicidade, $\psi(t) = u(t)$. Logo, $u(t) = \alpha\bar{u}(t) + (1 - \alpha)u_0(t) = \alpha\bar{u}(t) + u_0(t) - \alpha u_0(t)$, ou seja, $u(t) - u_0(t) = \alpha\bar{u}(t) - \alpha u_0(t) = \alpha[\bar{u}(t) - u_0(t)]$.

Portanto, $T(t)(\alpha x) = \alpha T(t)x$.

Agora, se $t > \tau$, então $t = n\tau + s$, com $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0, \tau)$. Daí, pela definição do operador e pelo caso acima, tem-se

$$\begin{aligned} T(t)(x_1 + x_2) &= T(s)\,[T(\tau)^n(x_1 + x_2)] \\ &= T(s)\,[T(\tau)^n x_1 + T(\tau)^n x_2] \\ &= T(s)T(\tau)^n x_1 + T(s)T(\tau)^n x_2 \\ &= T(t)x_1 + T(t)x_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(t)(\alpha x) &= T(s)T(\tau)^n(\alpha x) \\ &= T(s)T(\tau)\cdots T(\tau)(\alpha x) \\ &= T(s)T(\tau)\cdots T(\tau)(\alpha T(\tau)x) \\ &= \alpha T(s)T(\tau)^n x. \end{aligned}$$

Logo, $T(t)$ é linear, $\forall t \geq 0$.

Seja $t \in [0, \tau]$ fixo. Mostremos que a transformação linear $T(t) : X \to X$ é limitada.

Primeiramente, mostraremos que $T(t)$ é um operador fechado. Sejam $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X e $x, y \in X$ tais que $x_n \to x$ e $T(t)x_n \to y$, quando $n \to \infty$. Como $x \in X$, basta provarmos que $y = T(t)x$. Para isso, consideremos a função $y : [0, \tau] \to X$ dada por $y(t) = \lim\limits_{n\to\infty} T(t)x_n$.

Note que

$$y(0) = \lim_{n\to\infty} T(0)x_n = \lim_{n\to\infty} [u_n(0) - u_0(0)] = \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

em que $u_n(\cdot)$ é a solução weak de (2.1) passando por x_n quando $t = 0$.

Mostremos agora que $y(\cdot)$ também é uma solução weak de (2.1). Como $u_n(\cdot)$ e $u_0(\cdot)$ são soluções weak de (2.1), tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle u_n(t) - u_0(t), v\rangle = \langle u_n(t) - u_0(t), A^*v\rangle, \;\; \forall\, v \in \mathcal{D}(A^*),$$

e assim, integrando ambos os lados da igualdade acima, obtém-se

$$\langle u_n(t) - u_0(t), v\rangle = \langle x_n, v\rangle + \int_0^t \langle u_n(s) - u_0(s), A^*v\rangle ds, \;\; \forall\, v \in \mathcal{D}(A^*). \tag{2.6}$$

Pelo fato de v ser um operador linear limitado e $u_n(t) - u_0(t) = T(t)x_n$ convergir para $y(t)$ quando $n \to \infty$, concluí-se que

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(t) - u_0(t), v\rangle = \langle y(t), v\rangle \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} \langle x_n, v\rangle = \langle x, v\rangle.$$

Além disso, sabemos que A^*v é um operador linear limitado para todo $v \in \mathcal{D}(A^*)$, o que implica que $\langle u_n(s) - u_0(s), A^*v\rangle \to \langle y(s), A^*v\rangle$ quando $n \to \infty$ e

$$\|\langle u_n(s) - u_0(s), A^*v\rangle\| \leq \|A^*v\|\|u_n(s) - u_0(s)\| \leq \|A^*v\| \sup_{0\leq s\leq \tau} \|u_n(s) - u_0(s)\|,$$

que é integrável de $[0, \tau]$.

Logo, usando o Teorema B.1, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle u_n(s) - u_0(s), A^*v\rangle ds = \int_0^t \langle y(s), A^*v\rangle ds.$$

Portanto, tomando o limite quando $n \to \infty$ em (2.6), segue que

$$\langle y(t), v\rangle = \langle x, v\rangle + \int_0^t \langle y(s), A^*v\rangle ds, \ \ \forall\, v \in \mathcal{D}(A^*),$$

o que implica que $y(\cdot)$ é solução weak de (2.1).

Finalmente, usando a unicidade de solução weak para o problema (2.1), concluí-se que $y(t) = T(t)x$, pois $T(t)x$ é a solução weak de (2.1) passando por x quando $t = 0$. Dessa forma, $y = T(t)x$ e $T(t)$ é um operador linear fechado.

Agora, usando que o domínio de $T(t)$ é todo o espaço X e X é um espaço de Banach, o Teorema A.5 nos permite concluir que $T(t) : X \to X$ é um operador linear limitado, para todo $t \in [0, \tau]$.

Visto que $T(t) = T(s)T(\tau)^n$ para $t > \tau$, com $t = n\tau + s$, $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0, \tau)$, obtemos que $T(t) : X \to X$ é limitado para todo $t \in [0, \infty)$.

O próximo passo é mostrar que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo.

(i) Dado $x \in X$, tem-se $T(0)x = u(0) - u_0(0) = x$. Logo $T(0) = I$.

(ii) Dados $t, h \geq 0$, mostraremos que $T(t+h)x = T(t)T(h)x$. Para isso, analisaremos 4 casos:

<u>*1º Caso*</u>: $t, h \in [0, \tau]$ e $t + h \in [0, \tau]$.

Observe que, $T(t + h)x = u(t + h) - u_0(t + h)$, em que u e u_0 são soluções weak de (2.1), satisfazendo $u(0) = x$ e $u_0(0) = 0$, respectivamente.

Por outro lado, $T(t)T(h)x = T(t)[u(h) - u_0(h)] = v(t) - v_0(t)$, em que v e v_0 são soluções weak de (2.1), satisfazendo $v(0) = u(h) - u_0(h)$ e $v_0(0) = 0$, respectivamente.

Assim, concluí-se que $u_0 = v_0$, pois ambas são soluções weak de (2.1), com mesma condição inicial. Logo, $T(t)T(h)x = v(t) - u_0(t)$.

Agora, defina $\phi : [0, \tau] \to X$, tal que $\phi(s) = u(s + h) - u_0(s + h) + u_0(s)$. Assim, $\phi(0) = u(h) - u_0(h)$.

Como ϕ e v são ambas soluções weak de (2.1), com mesma condição inicial, segue que $\phi(t) = v(t)$. Logo, $u(t+h) - u_0(t+h) = v(t) - v_0(t)$, isto é, $T(t+h)x = T(t)T(h)x$.

2º Caso: $t, h \in [0, \tau]$ e $t + h > \tau$.

Para este caso, basta analisar 3 possibilidades: $t, h < \tau$; $t < \tau, h = \tau$ e $t = h = \tau$.

Se $t, h < \tau$, como $t + h > \tau$, então $t + h = \tau + s$, em que $s \in [0, \tau)$. Logo, pelo 1º Caso, tem-se

$$\begin{aligned} T(t+h)x &= T(s+\tau)x = T(s)T(\tau)x \\ &= T(s)T(\tau - h + h)x = T(s)T(\tau - h)T(h)x \\ &= T(s)T(t-s)T(h)x = T(s+t-s)T(h)x \\ &= T(t)T(h)x. \end{aligned}$$

Se $t < \tau$ e $h = \tau$, então por definição, $T(t+h)x = T(t+\tau)x = T(t)T(\tau)x = T(t)T(h)x$.

Finalmente, se $t = h = \tau$, então por definição

$$T(t+h)x = T(\tau+\tau)x = T(2\tau+0)x = T(0)T(\tau)^2x = T(\tau)^2x = T(\tau)T(\tau)x = T(t)T(h)x.$$

3º Caso: $t \in [0, \tau]$ e $h > \tau$.

Como $h > \tau$, então $h = n\tau + s$, em que $s \in [0, \tau)$, ou seja, $t + h = n\tau + (t + s)$.

Se $t + s \in [0, \tau]$, então por definição e pelo 1º Caso, segue que

$$\begin{aligned} T(t+h)x &= T(t+s+n\tau)x = T(t+s)T(\tau)^n x \\ &= T(t)T(s)T(\tau)^n x = T(t)T(s+n\tau)x \\ &= T(t)T(h)x. \end{aligned}$$

Agora, se $t + s > \tau$, então $t + s = \tau + k$, em que $k \in [0, \tau)$. Daí, $t + h = n\tau + t + s = n\tau + \tau + k = (n+1)\tau + k,\ k \in [0, \tau)$.

Logo, pela definição e pelo 2º Caso, tem-se

$$\begin{aligned} T(t+h)x &= T((n+1)\tau + k)x = T(k)T(\tau)^{n+1}x = T(k)T(\tau)T(\tau)^n x \\ &= T(k+\tau)T(\tau)^n x = T(t+s)T(\tau)^n x = T(t)T(s)T(\tau)^n x \\ &= T(t)T(s+n\tau)x = T(t)T(h)x. \end{aligned}$$

Portanto, $T(t+h)x = T(t)T(h)x$.

4º Caso: $t > \tau$ e $h > \tau$.

Observe que neste caso, $t+h>\tau$. Além disso,

$$\begin{cases} t>\tau \Rightarrow t = n\tau + s, \ n\in\mathbb{N}, s\in[0,\tau) \\ h>\tau \Rightarrow h = m\tau + r, \ m\in\mathbb{N}, r\in[0,\tau), \end{cases}$$

e, portanto, $t+h=(s+r)+(n+m)\tau = p+k\tau$, em que $p=s+r$ e $k=n+m$.

Se $p\in[0,\tau]$, então

$$T(t+h)x = T(p)T(\tau)^k x. \tag{2.7}$$

Uma vez que, $T(t)x=T(s)T(\tau)^n x$ e $T(h)x=T(r)T(\tau)^m x$, tem-se

$$\begin{aligned} T(t)T(h)x &= T(s)T(\tau)^n\left(T(r)T(\tau)^m\right)x = T(s)T(r)\left(T(\tau)^nT(\tau)^m\right)x \\ &= T(s+r)T(\tau)^{n+m}x = T(p)T(\tau)^k x. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim, de (2.7) e (2.8), conclui-se que $T(t+h)x=T(t)T(h)x$.

Se $p>\tau$, então $p=\tau+l$, em que $l\in[0,\tau)$. Logo,

$$T(t+h)x = T(p+k\tau)x = T(l+(k+1)\tau)x = T(l)T(\tau)^{k+1}x. \tag{2.9}$$

Por outro lado, pelo 2º Caso e pela definição, tem-se

$$\begin{aligned} T(t)T(h)x &= T(s)T(\tau)^n\left(T(r)T(\tau)^m\right)x = T(s)T(r)\left(T(\tau)^nT(\tau)^m\right)x \\ &= T(r+s)T(\tau)^k x = T(p)T(\tau)^k x = T(\tau+l)T(\tau)^k x \\ &= T(l)T(\tau)T(\tau)^k x = T(l)T(\tau)^{k+1}x. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Portanto, de (2.9) e (2.10), segue que $T(t+h)x=T(t)T(h)x$.

Logo, para quaisquer $t,h\geq 0$, tem-se $T(t+h)x=T(t)T(h)x$.

(iii) Finalmente, conclui-se que $T(t)x = u(t)-u_0(t) \to x$, quando $t\to 0^+$, já que $u\in\mathcal{C}([0,\tau];X)$.

Portanto, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo. ■

Agora, estamos em condições de enunciar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 2.1.2 *Para cada $x\in X$, existe uma única solução weak $u(t)$ de* (2.1), *satisfazendo $u(0)=x$ se, e somente se, A é o gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados em X, e neste caso, $u(t)$ é dado por* (2.2).

Demonstração: Suponha que A é o gerador do C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Pelo Teorema 1.4.1, existem constantes $M' \geq 1$ e $\omega \geq 0$, tais que $\|T(t)\| \leq M'e^{\omega t}$. Como $t \in [0,\tau]$, existe uma constante $M \geq 0$, tal que $\|T(t)\| \leq M'e^{\omega\tau} = M$.

Primeiramente mostraremos que se $x \in X$ e $v \in \mathcal{D}(A^*)$, então $\langle T(t)x, v\rangle$ é diferenciável com relação a t, com derivada $\langle T(t)x, A^*v\rangle$.

Note que a afirmação é verdadeira se $x \in \mathcal{D}(A)$, pois pelo Teorema 1.4.2

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle &= \lim_{h\to 0}\frac{\langle T(t+h)x, v\rangle - \langle T(t)x, v\rangle}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\langle T(t+h)x - T(t)x, v\rangle}{h}, \text{ pois } v \in \mathcal{D}(A^*) \text{ é linear}\\
&= \left\langle \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h}, v\right\rangle\\
&= \langle AT(t)x, v\rangle\\
&= \langle T(t)x, v\circ A\rangle\\
&= \langle T(t)x, A^*v\rangle.
\end{aligned}$$

Se $x \in X$, como $X = \overline{\mathcal{D}(A)}$, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{D}(A)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Daí, como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle = \frac{d}{dt}\langle T(t)\lim_{n\to\infty} x_n, v\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T(t)x_n, v\circ A\rangle = \langle T(t)x, A^*v\rangle. \tag{2.11}$$

Portanto, se $x \in X$ e $v \in \mathcal{D}(A^*)$, então $\frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle$ existe e é igual a $\langle T(t)x, A^*v\rangle$.

Mostremos agora, que u dado por (2.2) é solução weak de (2.1). Note que pelo Lema 2.1.2, $u \in \mathcal{C}([0,\tau]; X)$. Escreva

$$u(t) = T(t)x + \varphi(t), \text{ em que } \varphi(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Para qualquer $v \in \mathcal{D}(A^*)$ e $t \in [0,\tau]$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle u(t), v\rangle &= \left\langle T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, v\right\rangle\\
&= \langle T(t)x, v\rangle + \left\langle \int_0^t T(t-s)f(s)ds, v\right\rangle\\
&= \langle T(t)x, v\rangle + \int_0^t \langle T(t-s)f(s), v\rangle ds,
\end{aligned}$$

pois $v \in \mathcal{D}(A^*) \subseteq X^*$, ou seja, v é contínuo.

Mostraremos primeiramente que u é solução weak de (2.1) quando $f \in \mathcal{C}^1([0,\tau];X)$. A aplicação $(t,x) \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0,\tau] \times X$, pois

$$\begin{aligned}
\|T(t+h)(x+k) - T(t)x\| &= \|T(t+h)x + T(t+h)k - T(t)x\| \\
&\leq \|T(t+h)x - T(t)x\| + \|T(t+h)k\| \\
&\leq \|T(t+h)x - T(t)x\| + \|T(h)\|\|T(t)k\| \\
&\leq \|T(t+h)x - T(t)x\| + M\|T(t)k\| \ \to 0,
\end{aligned}$$

quando $(h,k) \to (0,0)$. Daí, como f é continuamente diferenciável, usando o mesmo argumento utilizado no Teorema 2.1.1, tem-se que $\displaystyle\int_0^t T(t-s)f(s)ds \in \mathcal{D}(A)$, e assim

$$\begin{aligned}
\frac{d^+}{dt}\int_0^t \langle T(t-s)f(s),v\rangle ds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds - \int_0^t \langle T(t-s)f(s),v\rangle ds\right] \\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left[\int_0^t \langle T(t+h-s)f(s),v\rangle - \langle T(t-s)f(s),v\rangle ds\right. \\
&\quad \left. + \int_t^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds\right] \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[\int_0^t \langle [T(h)-I]T(t-s)f(s),v\rangle ds\right. \\
&\quad \left. + \int_t^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds\right] \\
&= \lim_{h\to 0^+}\left\langle \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds, v\right\rangle \\
&\quad + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds \\
&= \left\langle \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds, v\right\rangle \\
&\quad + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds \\
&= \left\langle A\int_0^t T(t-s)f(s)ds, v\right\rangle + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds \\
&= \left\langle \int_0^t T(t-s)f(s)ds, A^*v\right\rangle + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle f(t),v\rangle ds\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\langle T(t+h-s)f(s)-f(t),v\rangle ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|\langle T(t+h-s)f(s)-f(t),v\rangle\| ds.
\end{aligned}$$

Queremos mostrar que o lado direito da desigualdade acima vai a zero, quando h vai a zero pela direita.

Observe que

$$\begin{aligned}
\|\langle T(t+h-s)f(s)-f(t),v\rangle\| &= \|\langle T(t+h-s)f(s)-T(t+h-s)f(t) \\
&\quad + T(t+h-s)f(t)-f(t),v\rangle\| \\
&\leq \|\langle T(t+h-s)[f(s)-f(t)],v\rangle\| + \|\langle [T(t+h-s)-I]f(t),v\rangle\| \\
&\leq M\|v\|\|f(s)-f(t)\| + \|v\|\|[T(t+h-s)-I]f(t)\| \to 0,
\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$ (observe que quando $h \to 0^+$, $s \to t^+$), ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe h' suficientemente pequeno tal que

$$\|\langle T(t+h-s)f(s)-f(t),v\rangle\| < \varepsilon, \quad \forall h < h'.$$

Agora, tome $h < h'$. Assim,

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\langle T(t+h-s)f(s)-f(t),v\rangle\| ds \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varepsilon \, ds = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluí-se que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\langle T(t+h-s)f(s)-f(t),v\rangle\| ds \to 0, \text{ quando } h \to 0^+.$$

Logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \langle T(t+h-s)f(s),v\rangle ds = \langle f(t),v\rangle$$

e como $\dfrac{d^+}{dt}\phi(t)$ existe e é contínua, em que $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t \langle T(t-s)f(s),v\rangle ds$, segue pelo Lema C.1 que ϕ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \langle T(t-s)f(s),v\rangle ds = \langle f(t),v\rangle + \int_0^t \langle T(t-s)f(s),A^*v\rangle ds.$$

Daí, concluí-se que para todo $t \in [0,\tau]$, $\langle u(t), v\rangle$ é diferenciável e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle &= \frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle + \frac{d}{dt}\int_0^t \langle T(t-s)f(s), v\rangle ds \\
&= \langle T(t)x, A^*v\rangle + \langle f(t), v\rangle + \int_0^t \langle T(t-s)f(s), A^*v\rangle ds \\
&= \left\langle T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, A^*v \right\rangle + \langle f(t), v\rangle \\
&= \langle u(t), A^*v\rangle + \langle f(t), v\rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, $u(0) = T(0)x + \varphi(0) = x$.

Portanto, $u(t) = T(t)x + \varphi(t)$ é solução weak de (2.1).

Agora, se $f \in L^1([0,\tau]; X)$, sejam $f_n \in \mathcal{C}^1([0,\tau]; X)$, para $n = 1, 2, \cdots$, com $f_n \to f$ em $L^1([0,\tau]; X)$ e defina

$$u_n(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f_n(s)ds, \ t \in [0,\tau].$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u(t)\| &= \left\| T(t)x + \int_0^t T(t-s)f_n(s)ds - \left[T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right] \right\| \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|f_n(s) - f(s)\| ds \\
&\leq M \int_0^t \|f_n(s) - f(s)\| ds,
\end{aligned}$$

ou seja, $u_n \to u$ em $\mathcal{C}([0,\tau]; X)$. Mas, pelo caso anterior, para cada $v \in \mathcal{D}(A^*)$, tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle u_n(t), v\rangle = \langle u_n(t), A^*v\rangle + \langle f_n(t), v\rangle.$$

Assim, integrando ambos os membros de 0 a t, segue que

$$\langle u_n(t), v\rangle - \langle u_n(0), v\rangle = \int_0^t [\langle u_n(s), A^*v\rangle + \langle f_n(s), v\rangle] ds,$$

ou seja,

$$\langle u_n(t), v\rangle = \langle x, v\rangle + \int_0^t [\langle u_n(s), A^*v\rangle + \langle f_n(s), v\rangle] ds.$$

Agora, fazendo $n \to \infty$, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(t), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \left(\langle x, v\rangle + \int_0^t [\langle u_n(s), A^*v\rangle + \langle f_n(s), v\rangle] ds \right)$$

e, portanto,

$$\langle u(t), v\rangle = \langle x, v\rangle + \int_0^t [\langle u(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle] ds.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle = \langle u(t), A^*v\rangle + \langle f(t), v\rangle.$$

Portanto, u é a solução weak de (2.1).

Mostraremos agora que $u(t)$ é a única solução weak de (2.1), satisfazendo $u(0) = x$. Para isso, sejam $\overline{u}(t)$ outra solução weak, com $\overline{u}(0) = x$, e $w = u - \overline{u}$. Observe que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle w(s), v\rangle &= \frac{d}{ds}\langle u(s), v\rangle - \frac{d}{ds}\langle \overline{u}(s), v\rangle \\
&= \langle u(s), A^*v\rangle + \langle f(s), v\rangle - \langle \overline{u}(s), A^*v\rangle - \langle f(s), v\rangle \\
&= \langle u(s) - \overline{u}(s), A^*v\rangle \\
&= \langle w(s), A^*v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(A^*), \forall t \in [0, \tau].
\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros de 0 a t, segue que

$$\begin{aligned}
\langle w(t), v\rangle &= \int_0^t \frac{d}{ds}\langle w(s), v\rangle ds \\
&= \int_0^t \langle w(s), A^*v\rangle ds \\
&= \left\langle \int_0^t w(s) ds, A^*v \right\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(A^*), \forall t \in [0, \tau].
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 2.1.1, tem-se $z(t) = \int_0^t w(s) ds \in \mathcal{D}(A)$ e $\frac{d}{dt}z(t) = Az(t)$.

Como $\frac{d}{dt}z(t) = Az(t)$ e $z(0) = 0$, segue que $z(t) = T(t)0 = 0$. Assim $z \equiv 0$ e, consequentemente, $w \equiv 0$.

Portanto $u = \overline{u}$.

Reciprocamente, suponhamos que A é tal que (2.1) possui para cada $x \in X$, uma única solução weak $u(t)$, satisfazendo $u(0) = x$.

Para $t \in [0, \tau]$, defina $T(t)x = u(t) - u_0(t)$, em que u_0 é a solução weak de (2.1), satisfazendo $u_0(0) = 0$. Se $t > \tau$, seja $t = n\tau + s$, em que n é um inteiro não negativo e $s \in [0, \tau)$, e assim, defina $T(t)x = T(s)T(\tau)^n x$.

Pelo Lema 2.1.3, segue que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados.

Agora, seja B o gerador de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e seja $x \in \mathcal{D}(B)$. Para qualquer $v \in \mathcal{D}(A^*)$, pelo Teorema 1.4.2,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle T(t+h)x, v\rangle - \langle T(t)x, v\rangle}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\langle T(t+h)x - T(t)x, v\rangle}{h}, \text{ pois } v \in \mathcal{D}(A^*) \text{ é linear} \\
&= \left\langle \lim_{h\to 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h}, v \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dt} T(t)x, v \right\rangle \\
&= \langle T(t)Bx, v\rangle, \text{ pelo Teorema 1.4.2, pois } x \in \mathcal{D}(B).
\end{aligned}
$$

Assim, $\left.\frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle\right|_{t=0} = \langle Bx, v\rangle$. Por outro lado, para $t \in [0,\tau]$, como $v \in \mathcal{D}(A^*)$, u e u_0 são soluções weak de (2.1), tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle &= \frac{d}{dt}\langle u(t) - u_0(t), v\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle - \frac{d}{dt}\langle u_0(t), v\rangle \\
&= \langle u(t), A^*v\rangle + \langle f(t), v\rangle - [\langle u_0(t), A^*v\rangle + \langle f(t), v\rangle] \\
&= \langle u(t) - u_0(t), A^*v\rangle \\
&= \langle T(t)x, A^*v\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left.\frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle\right|_{t=0} = \langle x, A^*v\rangle, \quad \text{ou seja, } \; \langle Bx, v\rangle = \langle x, A^*v\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(A^*).
$$

Logo, pelo Lema 2.1.1,

$$
x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } Bx = Ax, \text{ e assim, } \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A). \tag{2.12}
$$

Mostraremos agora a inclusão contrária. Para isso, considere $x \in \mathcal{D}(A)$. Note que, como $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A)$, tem-se $\mathcal{D}(A^*) \subseteq \mathcal{D}(B^*)$, e assim, $B^*\big|_{\mathcal{D}(A^*)} = A^*$. Por um argumento de densidade, similar ao que foi utilizado em (2.11), conclui-se que para cada $t \in [0,\tau]$,

$$
\langle T(t)x - T(0)x, v\rangle = \int_0^t \frac{d}{ds}\langle T(s)x, v\rangle ds = \int_0^t \langle T(s)x, B^*v\rangle ds, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),
$$

e, portanto, $\langle T(t)x - x, v\rangle = \left\langle \int_0^t T(s)xds, A^*v \right\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(A^*)$.

Daí, pelo Lema 2.1.1, segue que $\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$ e $A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x$.

Analogamente,

$$\langle T(t)Ax - T(0)Ax, v\rangle = \int_0^t \frac{d}{ds}\langle T(s)Ax, v\rangle ds = \int_0^t \langle T(s)Ax, B^*v\rangle ds, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Logo, $\langle T(t)Ax - Ax, v\rangle = \left\langle \int_0^t T(s)Ax, A^*v \right\rangle, \forall v \in \mathcal{D}(A^*)$, e pelo Lema 2.1.1, tem-se $\int_0^t T(s)Axds \in \mathcal{D}(A)$ e $A\left(\int_0^t T(s)Axds\right) = T(t)Ax - Ax$.

Portanto,

$$T(t)x = x + A\int_0^t T(s)xds \tag{2.13}$$

e

$$T(t)Ax = Ax + A\int_0^t T(s)Axds. \tag{2.14}$$

Considere a função $z(t) = \int_0^t T(s)Axds - A\int_0^t T(s)xds$.

Uma vez que $T(t)Ax$ é contínuo e, de (2.13), $A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$, que é contínuo, então $z \in \mathcal{C}([0,\tau]; X)$. Além disso, $z(0) = 0$.

Agora, seja $v \in \mathcal{D}(A^*)$. Por (2.13) e (2.14) tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle z(t), v\rangle &= \frac{d}{dt}\left\langle \int_0^t T(s)Axds, v\right\rangle - \frac{d}{dt}\langle T(t)x, v\rangle + \frac{d}{dt}\langle x, v\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^t \langle T(s)Ax, v\rangle ds - \langle T(t)x, B^*v\rangle + 0 \\
&= \langle T(t)Ax, v\rangle - \langle T(t)x, A^*v\rangle \\
&= \left\langle Ax + A\int_0^t T(s)Axds, v\right\rangle - \langle T(t)x, A^*v\rangle \\
&= \left\langle A\left(x + \int_0^t T(s)Axds\right), v\right\rangle - \langle T(t)x, A^*v\rangle \\
&= \left\langle x + \int_0^t T(s)Axds, A^*v\right\rangle - \langle T(t)x, A^*v\rangle \\
&= \left\langle x - T(t)x + \int_0^t T(s)Axds, A^*v\right\rangle \\
&= \left\langle \int_0^t T(s)Axds - A\int_0^t T(s)xds, A^*v\right\rangle \\
&= \langle z(t), A^*v\rangle.
\end{aligned}$$

Mas por hipótese o problema de valor inicial $\dfrac{d}{dt}z(t) = Az(t), z(0) = 0$, possui somente a solução nula.

Assim, $z \equiv 0$ e, portanto,

$$\int_0^t T(s)Axds = A\int_0^t T(s)xds,\ \ t \in [0,\tau].$$

Além disso, por (2.13)

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}[T(t)x - x] = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[A\int_0^t T(s)xds\right] = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds.$$

Agora,

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds - Ax\right\| = \left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds - \frac{1}{t}\int_0^t Axds\right\| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|T(s)Ax - Ax\|ds$$

e $\|[T(s) - I]Ax\| \to 0$, quando $t \to 0^+$, pois quando $t \to 0^+, s \to 0^+$, uniformente em $t \in [0,\tau]$.

Logo, conclui-se que $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t}[T(t)x - x] = Ax$, ou seja

$$x \in \mathcal{D}(B). \tag{2.15}$$

Assim, de (2.12) e (2.15), conclui-se que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ e $Ax = Bx$, o que completa a prova.

■

Capítulo

3

Estudo de EDP's Parabólicas via Problema de Cauchy Abstrato

Neste capítulo, veremos que certas equações parabólicas de segunda ordem podem ser tratadas no âmbito de semigrupos. Na verdade, a teoria de semigrupos fornece um elegante método para construção de uma solução do problema de valor inicial e de fronteira que abordaremos aqui. Por fim, mostraremos que a solução fraca deste pvif, no sentido usual de EDP's, coincide com a solução mild do problema de Cauchy abstrato associado.

3.1 Equações Parabólicas de Segunda Ordem

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ tal que Ω possua fronteira suave. Considere o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_t + Lu &= 0, \text{ em } \Omega_\tau = \Omega \times (0, \tau] \\ u &= 0, \text{ em } \partial\Omega \times [0, \tau] \\ u &= g, \text{ em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $g : \Omega \to \mathbb{R}$ é dada e $u : \overline{\Omega}_\tau \to \mathbb{R}$ é a incógnita. Para cada tempo t, L denota um operador diferencial parcial, dado por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu, \text{ com } a^{ij}, b^i, c \in \mathbb{R}, i, j = 1, \cdots, n.$$

O operador L^*, o adjunto de L, é dado por

$$L^*v := -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_j x_i} - \sum_{i=1}^{n} b^i v_{x_i} + cv, v \in H_0^1(\Omega).$$

A forma bilinear $B[u, v]$ associada com o operador L é definida por

$$B[u, v] := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv \; dx,$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Definição 3.1.1 *Diz-se que uma função $u \in L^2([0,\tau]; H_0^1(\Omega))$, com $u' \in L^2([0,\tau]; H^{-1}(\Omega))$, é uma solução fraca do problema de valor inicial e de fronteira* (3.1)*, se*

(i) $\langle u', v\rangle + B[u, v] = 0$, *para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ e quase todo $0 \leq t \leq \tau$;*

(ii) $u(0) = g$.

Observação 3.1.1 *Pode-se associar a $u = u(x,t)$ a função $u : [0,\tau] \to H_0^1(\Omega)$, definida por $[u(t)](x) := u(x,t)$, em que $x \in \Omega, 0 \leq t \leq \tau$. Em outras palavras, não considera-se u como função de x e t, mas como uma função u de t no espaço de funções na variável espacial x, $H_0^1(\Omega)$.*

Os dois próximos resultados estabelecem, respectivamente, a existência e unicidade de solução fraca para o problema (3.1) e estimativas de energia. A prova destes resultados podem ser encontradas em [5].

Teorema 3.1.1 *Existe uma única solução fraca de* (3.1)*.*

Teorema 3.1.2 *Existem constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$, tais que*

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.2}$$

e

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[u, u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.3}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Agora, considere $X = L^2(\Omega)$ e $\mathcal{D}(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e defina $Au := -Lu$, se $u \in \mathcal{D}(A)$. Sendo assim, reinterpretamos o problema (3.1) como o problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= Au(t),\ t > 0 \\ u(0) &= g, \end{cases} \tag{3.4}$$

em que $\dfrac{d}{dt}$ denota a derivada de Fréchet.

Teorema 3.1.3 *O operador A gera um C_0-semigrupo de γ-contração $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em $X = L^2(\Omega)$, isto é, um C_0-semigrupo de classe $C_0(1,\gamma)$.*

Tendo em vista os Teoremas 3.1.3 e 2.1.1, se $g \in \mathcal{D}(A)$, a solução clássica de (3.4) é dada por $u(t) = T(t)g$.

Agora, se $g \in L^2(\Omega)$, pela Definição 2.1.2, segue que $T(t)g$ é a solução mild de (3.4).

O que faremos agora, é relacionar a solução mild da equação de evolução abstrata, com a solução fraca da equação diferencial parcial original (3.1).

Seja $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega\times[0,\tau])$, com $\varphi(x,t) \in \mathcal{D}(A^*), t \in (0,\tau]$ fixado. Denote $[T(t)g](x)$ por $z(x,t)$.

Observe que

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi(\cdot,t+h), z(\cdot,t+h)\rangle_{L^2} - \langle \varphi(\cdot,t), z(\cdot,t)\rangle_{L^2} \\
&\quad= \langle \varphi(\cdot,t+h), z(\cdot,t+h)\rangle_{L^2} + \langle \varphi(\cdot,t+h), z(\cdot,t)\rangle_{L^2} - \langle \varphi(\cdot,t+h), z(\cdot,t)\rangle_{L^2} \\
&\qquad - \langle \varphi(\cdot,t), z(\cdot,t)\rangle_{L^2} \\
&\quad= \langle \varphi(\cdot,t+h) - \varphi(\cdot,t), z(\cdot,t)\rangle_{L^2} + \langle \varphi(\cdot,t+h), z(\cdot,t+h) - z(\cdot,t)\rangle_{L^2} \\
&\quad= \langle \varphi(\cdot,t+h) - \varphi(\cdot,t), z(\cdot,t)\rangle_{L^2} + \langle \varphi(\cdot,t+h), [(T(t+h) - T(t))g](\cdot)\rangle_{L^2} \\
&\quad= \langle \varphi(\cdot,t+h) - \varphi(\cdot,t), z(\cdot,t)\rangle_{L^2} + \langle [T^*(t+h) - T^*(t)]\varphi(\cdot,t+h), g(\cdot)\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Daí, usando os Teoremas B.2 e 1.4.5, e o fato de φ ser suave, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \varphi(\cdot,t), z(\cdot,t)\rangle_{L^2} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\langle \varphi(\cdot,t+h), z(\cdot,t+h)\rangle_{L^2} - \langle \varphi(\cdot,t), z(\cdot,t)\rangle_{L^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+}\left[\left\langle \frac{\varphi(\cdot,t+h) - \varphi(\cdot,t)}{h}, z(\cdot,t)\right\rangle_{L^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h}\langle [T^*(t+h) - T^*(t)]\varphi(\cdot,t+h), g(\cdot)\rangle_{L^2}\right] \\
&= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\cdot,t), z(\cdot,t)\right\rangle_{L^2} + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\langle [T^*(t+h) - T^*(t)]\varphi(\cdot,t+h), g(\cdot)\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\cdot,t), z(\cdot,t)\right\rangle_{L^2} + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\langle T^*(t)[T^*(h) - I]\varphi(\cdot,t+h), g(\cdot)\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\cdot,t), (T(t)g)(\cdot)\right\rangle_{L^2} + \left\langle \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T^*(h) - I}{h}\right)\varphi(\cdot,t+h), (T(t)g)(\cdot)\right\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\cdot,t), (T(t)g)(\cdot)\right\rangle_{L^2} + \langle A^*\varphi(\cdot,t), (T(t)g)(\cdot)\rangle_{L^2} \\
&= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\cdot,t) + A^*\varphi(\cdot,t), (T(t)g)(\cdot)\right\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\varphi(x,0)=\varphi(x,\tau)=0, \forall x\in\Omega$, obtém-se

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\langle\varphi(\cdot,t),(T(t)g)(\cdot)\rangle_{L^2}\,dt=\langle\varphi(\cdot,\tau),(T(\tau)g)(\cdot)\rangle_{L^2}-\langle\varphi(\cdot,0),(T(0)g)(\cdot)\rangle_{L^2}=0.$$

Logo,

$$0=\int_0^\tau \frac{d}{dt}\langle\varphi(\cdot,t),(T(t)g)(\cdot)\rangle_{L^2}\,dt=\int_0^\tau\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\cdot,t)+A^*\varphi(\cdot,t),(T(t)g)(\cdot)\right\rangle_{L^2}dt. \tag{3.5}$$

Seja $u(\cdot,t)$ a solução fraca da EDP (3.1). Queremos mostrar que u é solução mild do problema abstrato associado (3.4). Vale observar que, pelo Teorema 1.2.1 segue que $u\in\mathcal{C}([0,\tau];L^2(\Omega))$.

Além disso, segue que

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\varphi(x,t)dx+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}u_{x_i}(x,t)\varphi_{x_j}(x,t)$$
$$+\sum_{i=1}^n b^iu_{x_i}(x,t)\varphi(x,t)+cu(x,t)\varphi(x,t)dx=0$$

daí, integrando por partes, tem-se

$$\int_\Omega -u(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)dx-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}u(x,t)\varphi_{x_jx_i}(x,t)$$
$$-\sum_{i=1}^n b^iu(x,t)\varphi_{x_i}(x,t)+cu(x,t)\varphi(x,t)dx=0.$$

Ou seja,

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)-L^*\varphi(x,t)\right)u(x,t)dx=0,$$

e assim,

$$\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)+A^*\varphi(x,t),u(x,t)\right\rangle_{L^2}=0.$$

Portanto,

$$\int_0^\tau\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\cdot,t)+A^*\varphi(\cdot,t),u(\cdot,t)\right\rangle_{L^2}dt=0. \tag{3.6}$$

De (3.5), segue que

$$\int_0^\tau \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot,t) + A^*\varphi(\cdot,t), (T(t)g)(\cdot) \right\rangle_{L^2} dt = 0. \tag{3.7}$$

Assim, subtraindo (3.7) de (3.6), obtém-se

$$\int_0^\tau \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot,t) + A^*\varphi(\cdot,t), u(\cdot,t) - (T(t)g)(\cdot) \right\rangle_{L^2} dt = 0.$$

Agora, considere a classe de funções suaves da forma $\varphi(x,t) = \varphi_1(x)\varphi_2(t)$, com $\varphi_1 \in \mathcal{D}(A^*)$ e $\varphi_2(0) = \varphi_2(\tau) = 0$, então podemos reescrever a equação acima como

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\varphi_2(t)\langle \varphi_1(\cdot), u(\cdot,t) - (T(t)g)(\cdot)\rangle_{L^2} dt = -\int_0^\tau \varphi_2(t)\langle A^*\varphi_1(\cdot), u(\cdot,t) - (T(t)g)(\cdot)\rangle_{L^2} dt,$$

para toda φ_2 suave com $\varphi_2(0) = \varphi_2(\tau) = 0$.

Para simplificar a expressão, escrevamos

$$\begin{aligned} f(\cdot,t) &= u(\cdot,t) - (T(t)g)(\cdot); \\ \overline{g}(\cdot,t) &= \langle \varphi_1(\cdot), f(\cdot,t)\rangle; \\ h(\cdot,t) &= \langle A^*\varphi_1(\cdot), f(\cdot,t)\rangle. \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\varphi_2(t)\overline{g}(\cdot,t)dt = -\int_0^\tau \varphi_2(t)h(\cdot,t)dt, \ \forall \varphi_2.$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\varphi_2(t)\overline{g}(\cdot,t)dt = -\int_0^\tau \varphi_2(t)\frac{d}{dt}\overline{g}(\cdot,t)dt.$$

Daí,

$$\int_0^\tau \varphi_2(t)\frac{d}{dt}\overline{g}(\cdot,t)dt = \int_0^\tau \varphi_2(t)h(\cdot,t)dt, \text{ ou seja, } \int_0^\tau \varphi_2(t)\left(\frac{d}{dt}\overline{g}(\cdot,t) - h(\cdot,t)\right)dt = 0, \ \forall \varphi_2 \text{ suave.}$$

Pelo Lema 1.1.1, tem-se $\frac{d}{dt}\overline{g}(\cdot,t) = h(\cdot,t)$ q.t.p., ou seja,

$$\overline{g}(\cdot,t) - \overline{g}(\cdot,0) = \int_0^t h(\cdot,s)ds,$$

mas $\overline{g}(\cdot,0) = \langle \varphi_1(\cdot), f(\cdot,0)\rangle$ e $f(\cdot,0) = u(\cdot,0) - (T(0)g)(\cdot) = g(\cdot) - g(\cdot) = 0$. Portanto $\overline{g}(\cdot,0) = 0$.

Logo,

$$\overline{g}(\cdot,t) = \int_0^t h(\cdot,s)ds. \tag{3.8}$$

Reescrevendo a expressão acima, tem-se

$$\langle \varphi_1(\cdot), f(\cdot,t)\rangle = \int_0^t \langle A^*\varphi_1(\cdot), f(\cdot,s)\rangle ds = \left\langle A^*\varphi_1(\cdot), \int_0^t f(\cdot,s)ds \right\rangle, \ \forall \varphi_1 \in \mathcal{D}(A^*).$$

Então, pelo Lema 2.1.1, segue que $\displaystyle\int_0^t f(\cdot,s)ds \in \mathcal{D}(A)$ e $\displaystyle A\int_0^t f(\cdot,s)ds = f(\cdot,t)$.
Isto é equivalente a $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_0^t f(\cdot,s)ds = A\int_0^t f(\cdot,s)ds$.
Fazendo $\displaystyle v(t) = \int_0^t f(\cdot,s)ds$, temos o seguinte problema abstrato

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}v(t) &=& Av(t) \\ v(0) &=& 0, \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Assim, como A gera um C_0- semigrupo, pelo Teorema 2.1.1, tem-se

$$\int_0^t f(\cdot,s)ds = v(t) = T(t)0 = 0, \forall t \in [0,\tau],$$

e assim, $f(\cdot,t) = 0, \forall t \in [0,\tau]$.

Logo, $0 = f(\cdot,t) = u(\cdot,t) - (T(t)g)(\cdot)$, isto é, $u(\cdot,t) = (T(t)g)(\cdot)$.

Portanto, a solução fraca da EDP (3.1) é a solução mild do problema abstrato (3.4), que por sua vez, é a solução weak dada por J. Ball para o problema abstrato, pelo Teorema 2.1.2.

Para mostrar que as três soluções são equivalentes, falta mostrar que se u é uma solução weak do problema abstrato, então u é solução fraca de (3.1).

Para este propósito, suponha que u é solução weak do problema abstrato e que u não é solução fraca de (3.1) no sentido usual de EDP's. Pelo Teorema 3.1.1, existe uma única solução v de (3.1). Pelo que vimos acima, v é solução mild e, portanto, weak no sentido de J. Ball. Mas, pelo Teorema 2.1.2, v é única solução weak no sentido de J. Ball. Logo, $u = v$, mas isso é uma contradição.

Portanto, u é solução fraca de (3.1).

Assim, concluí-se que a solução do problema (3.1) é equivalente a solução mild, que por sua vez, é equivalente a solução weak dada por J. Ball.

Apêndice

A

Operadores Lineares

Daqui em diante, consideraremos $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach real, a menos que algo seja dito ao contrário.

Definição A.1 *Dizemos que uma aplicação $T : X \to X$ é um operador linear se:*

- $T(x+y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in X$;
- $T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\forall x \in X$.

Definição A.2 *Seja $T : X \to X$ um operador linear.*

1. *T é limitado se existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \in X$.*
2. *T é contínuo em $x \in X$ se, para qualquer sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ convergindo para x (com relação a norma $\|\cdot\|$), tem-se $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergindo para Tx.*
3. *T é contínuo (em X) se T é contínuo em $x, \forall x \in X$.*

Teorema A.1 *Se $T : X \to X$ é um operador linear, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é limitado;*
2. *T é contínuo em 0;*
3. *T é contínuo em X.*

Notação A.1 *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach real.*

1. *Se Y também é um espaço de Banach real, denota-se por $\mathcal{L}(X,Y)$ o seguinte conjunto*

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y;\ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

2. *Denota-se $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ por X^*, o qual é chamado de espaço dual de X. Um elemento de X^* é dito um funcional linear.*

3. *O conjunto de todos operadores lineares limitados (e assim, contínuos) de X em X é denotado por $\mathcal{B}(X)$.*
   $\mathcal{B}(X)$ é um espaço vetorial com relação as operações usuais:

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x, \qquad (\lambda T)x = \lambda(Tx),$$

   em que $T, T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X), x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

4. *Para $T \in \mathcal{B}(X)$, o número $\|T\|$ denota a menor constante $C \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \in X$, ou seja,*

$$\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|Tx\| \leq C\|x\|, x \in X\}.$$

Teorema A.2 *Com as mesmas notações acima,*

1. *$\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{B}(X)$, e com relação a esta norma, $\mathcal{B}(X)$ é um espaço de Banach real;*

2. *Para $T \in \mathcal{B}(X)$,*

$$||T|| = \sup\{\|Tx\|; x \in X, \text{ com } \|x\| = 1\} \tag{A.1}$$

$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}; x \in X \text{ e } x \neq 0\right\}. \tag{A.2}$$

3. *$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|,\ \forall T \in \mathcal{B}(X), \forall x \in X$.*

Observação A.1 *Muitas vezes temos uma transformação linear $T : W \to X$ em que W é um subespaço de X, ambos X e W munidos da mesma norma (aquela de X). Neste caso escrevemos $W = \mathcal{D}(T)$ e $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to X$ e dizemos que $\mathcal{D}(T)$ é o domínio do operador T.*

Definição A.3 *Seja X um espaço vetorial normado e $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to X$ um operador linear densamente definido. O operador adjunto $T^* : \mathcal{D}(T^*) \subseteq X^* \to X^*$, de T, é definido por:*

$$(T^*g)(x) = g(Tx) := \langle Tx, g\rangle, \tag{A.3}$$

em que X^* é o espaço dual de X e $\mathcal{D}(T^*) = \{g \in X^*; g \circ T : \mathcal{D}(T) \to \mathbb{R} \text{ é limitada}\}$.

Definição A.4 *Seja X um espaço de Banach real e $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to X$ um operador linear. Diz-se que T é um operador fechado (ou simplesmente, T é fechado) se para toda sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(T)$, com $x_n \to x$ $(\in X)$ e $Tx_n \to y$, tem-se $x \in \mathcal{D}(T)$ e $Tx = y$.*

Em outras palavras, se uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}(T)$ é tal que, ambas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergem para elementos de X, então o limite de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertence a $\mathcal{D}(T)$ e a imagem do limite é o limite das imagens.

Observação A.2 *Se $T \in \mathcal{B}(X)$, então a convergência de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ para x automaticamente assegura que $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para Tx. Assim, se T é limitado (contínuo em X), então T é fechado.*

Definição A.5 *Um subconjunto A de X é denso em X se $\overline{A} = X$, isto é, o fecho de A, com relação a norma $\|\cdot\|$, é X. Isto significa que qualquer elemento $x \in X$ pode ser aproximado por uma sequência de elementos de A.*

Encerramos esta seção com três resultados clássicos, cujas demonstrações podem ser encontradas em [9].

Teorema A.3 (Limitação Uniforme) *Sejam X um espaço de Banach e $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de operadores lineares, $T_n : X \to X$, tal que $\{\|T_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada para todo $x \in X$, ou seja,*

$$\|T_n x\| \leq c_x, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

em que $c_x \in \mathbb{R}^+$. Então, a sequência de normas $\{\|T_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada, isto é, $\exists k \geq 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq k, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema A.4 (Existência de um funcional linear) *Seja Y um subespaço próprio fechado de um espaço normado X. Seja $x_0 \in X - Y$ arbitrário e*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\|,$$

a distância de x_0 a Y. Então existe $\tilde{f} \in X^*$ tal que

$$\|\tilde{f}\| = 1, \ \tilde{f}(y) = 0, \ \forall y \in Y, \ \text{e} \ \tilde{f}(x_0) = \delta.$$

Teorema A.5 (Gráfico Fechado) *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ um operador linear fechado. Então, se $\mathcal{D}(T)$ é fechado em X, o operador T é limitado.*

Apêndice

B

Teoremas de Convergência para Integrais

A teoria de integração de Lebesgue é especialmente útil, uma vez que ela nos fornece poderosos teoremas de convergência. No que segue, enunciaremos dois desses teoremas, que serão importantes para nossos propósitos. As provas desses resultados podem ser encontradas, por exemplo, em [3].

Teorema B.1 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Sejam f_n, $n = 1, 2, \cdots, f$ e g funções mensuráveis a valores reais definidas q.t.p. em um intervalo I, tais que*

1. $f_n(x) \to f(x)$, *para quase todo* $x \in I$ *(convergência pontual q.t.p.);*
2. $|f_n(x)| \leq g(x)$, *para quase todo* $x \in I$*;*
3. $\displaystyle\int_I g(x)dx < \infty$, *isto é,* $g \in L^1(I)$.

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

Teorema B.2 (Convergência Dominada à parâmetros contínuos) *Se para cada $\xi \in [a, b], -\infty \leq a < b < +\infty$, f_ξ é uma função mensurável, $|f_\xi(x)| \leq g(x)$, em que g é uma função integrável e $\lim\limits_{\xi\to\xi_0} f_\xi(x) = f(x)$ q.t.p., com $\xi_0 \in [a, b]$, então f é integrável e $\displaystyle\lim_{\xi\to\xi_0} \int f_\xi dx = \int f dx$.*

Apêndice

C

Cálculo em Espaços de Banach

Faremos uma breve digressão sobre alguns resultados do cálculo diferencial e integral em espaços de Banach.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrado, por exemplo, em [16].

Lema C.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, X um espaço de Banach e $\varphi : [a, b) \to X$ uma função contínua e diferenciável a direita em $[a, b)$. Se $D^+\varphi$ é continua em $[a, b)$, então φ é continuamente diferenciável e $\varphi' = D^+\varphi$, em que $D^+\varphi$ denota a derivada a direita de φ.*

Consideremos agora o espaço E das funções limitadas de $[a, b]$ em X, com norma dada por

$$\|f\|_E = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|.$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, e $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$, com

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b.$$

Definição C.1 *Seja $f : [a, b] \to X$ uma função. Diz-se que f é uma função escada, se existem elementos $w_1, w_2, \cdots, w_n \in X$, tais que*

$$f(t) = w_i, \text{ se } a_{i-1} < t < a_i, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Definição C.2 *Seja f uma função escada com relação a partição P. O valor da integral de f é dado por*

$$\mathcal{I}_P(f) = (a_1 - a_0)w_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})w_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})w_i.$$

Proposição C.1 *Se f é uma função escada, com relação a outra partição Q de $[a,b]$, então $\mathcal{I}_P(f) = \mathcal{I}_Q(f)$.*

Observação C.1 *A Proposição C.1 mostra que a integral não depende da partição. Portanto, denota-se a integral de f por $\mathcal{I}(f)$.*

Observação C.2 *Claramente f é limitada, pois tem um número finito de valores e a norma de f é dada por*

$$\|f\|_E = \max\{\|w_i\|; i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Assim,

$$\|\mathcal{I}(f)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i-1}|\|w_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\|f\|_E.$$

Daí,

$$\|\mathcal{I}(f)\| \leq (b-a)\|f\|_E.$$

Agora, iremos enunciar alguns resultados que podem ser encontrados em [10], e a seguir definiremos a integral em espaços de Banach, que também é conhecida como *integral no sentido de Bochner.*

Lema C.2 *O conjunto das funções escadas $f : [a,b] \to X$ é um subespaço do espaço E, que denotaremos por $\mathcal{S}_t([a,b];X)$. A função $\mathcal{I} : \mathcal{S}_t([a,b];X) \to X$ é linear e limitada.*

Teorema C.1 *Toda função contínua de $[a,b]$ em X pode ser aproximada uniformemente por funções escadas. Além disso,*

$$\mathcal{C}([a,b];X) \subseteq \overline{\mathcal{S}_t([a,b];X)}.$$

Observação C.3 *Pelo Teorema C.1, dado $f \in \mathcal{C}([a,b];X)$, existe $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}_t([a,b];X)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente. Daí, sendo $\mathcal{I}$ contínua, tem-se*

$$\mathcal{I}(f_n) \to \mathcal{I}(f), \text{ em } X,$$

isto é,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Teorema C.2 *Seja X um espaço de Banach real. Se $f : [a,b] \to X$ é contínua, então*

(i) $\displaystyle\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b ||f(t)||dt;$

(ii) $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(u)du \right) = f(t), \ t \in [a,b].$

Teorema C.3 *Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $f : [a, b] \to X$ contínua e $F : X \to Y$ uma aplicação linear contínua. Então*

$$F\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b F(f(t))dt.$$

Demonstração: Sendo f contínua, pelo Teorema C.1, existe uma sequência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}_t([a, b]; X)$ tal que $f_n \to f$ uniformemente, e

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Como F é linear e contínua, tem-se

$$F\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(\int_a^b f_n(t)dt\right). \tag{C.1}$$

Por outro lado, note que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b f_n(t)dt = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1})w_n^i,$$

em que $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_m\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ e $f_n(t) = w_n^i$, se $a_{i-1} < t < a_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$. Assim,

$$F\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = F\left(\sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1})w_n^i\right) = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1})F(w_n^i), \tag{C.2}$$

pois F é linear.

Observe que $F \circ f_n$ é uma função escada de $[a, b]$ em X, pois $F(f_n(t)) = F(w_n^i)$, para $a_{i-1} < t < a_i$, com $i = 1, 2, \cdots, m$. Daí,

$$\mathcal{I}(F \circ f_n) = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1})F(w_n^i),$$

isto é,

$$\int_a^b F(f_n(t))dt = \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1})F(w_n^i) \tag{C.3}$$

De (C.2) e (C.3), segue que

$$F\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b F(f_n(t))dt,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b F(f_n(t))dt. \tag{C.4}$$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b F(f_n(t))dt = \int_a^b F(f(t))dt. \tag{C.5}$$

De fato,

$$\left\|\int_a^b F(f_n(t))dt - \int_a^b F(f(t))dt\right\| \leq \int_a^b \|F(f_n(t)) - F(f(t))\|dt \leq \|F\|\int_a^b \|f_n(t) - f(t)\|dt,$$

pois F é linear e contínuo.

Como a sequência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente para f, segue que a integral a direita na última desigualdade converge para zero, mostrando que (C.5) ocorre.

De (C.1), (C.4) e (C.5) concluí-se

$$F\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b F(f(t))dt.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., Fournier, J. F., *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003.

[2] Ball, J. M., *Strongly Continuous Semigroups, Weak Solutions, and the Variation of Constants Formula*, Proceedings of the American Mathematical Society, volume 63, number 2, 1977.

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, A Wiley Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, Inc., 1995.

[4] Curtain, R. F., Zwart, H. J., *An Introduction to Infinite - Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1995.

[5] Evans, L. C. , *Partial Diferential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, volume 19, American Mathematical Society, Providence RI, 1998.

[6] Giglioli, A., *Equações Diferenciais Elípticas*, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Calda - MG, 1976.

[7] Gomes, A. M., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2ª Edição, 2011.

[8] Isnard, C., *Introdução à Medida e Integração*, IMPA, Rio de Janeiro, 2ª Edição, 2009.

[9] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, Inc., 1978.

[10] Lang, S., *Real and Functional Analysis*, Springer - Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 3ª edição, New York, Inc., 1993.

[11] McBride, A. C., *Semigroups of Linear Operators: An Introduction*, Longman Scientific and Technical, 1987.

[12] Melo, R. A., *A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais*, Universidade Federal de Campina Grande - Paraíba, Dissertação de Mestrado, 2006.

[13] Mikusinski, J., *The Bochner Integral*, Birkhäuser Verlag Basel, 1978.

[14] Oliveira, C. R., *Introdução à Análise Funcional*, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[15] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Spring - Verlag, New York, 1992.

[16] Pierri, M., *Teoria de Semigroups e Controlabilidade de Sistemas Neutros*, Dissertação de Mestrado ICMC-USP, São Carlos, 2006.