





Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-D.004/2005

**Bifurcação de Solitons em Presença de Tensão Superficial: Uma
Abordagem por Sistemas Hamiltonianos Reversíveis**

André Ricardo Oliveira da Fonseca



Orientador

Prof. Dr. Gerson Francisco

23-4165

Agosto de 2005

Agradecimentos

Ao professor Clodoaldo Grotta Ragazzo do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME/USP), que me orientou no início deste trabalho e que muito contribuiu para o estabelecimento de hipóteses adequadas e concretas, criando uma base analítica sólida que fundamentou todo o processo numérico desenvolvido ao longo do projeto.

Ao meu orientador, professor Gerson Francisco do Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual de São Paulo (IFT/UNESP), pelo apoio e dedicação recebidos durante a continuação deste trabalho. Sua experiência em modelos não-lineares e seu grande interesse em problemas de previsão de séries temporais incentivaram-me a buscar outras ferramentas que complementassem a análise geométrica e analítica desenvolvida neste trabalho, que acabou constituindo-se de diversas abordagens paralelas que corroboram os resultados principais. Suas aulas de Matemática Aplicada despertaram grande interesse em mim por Redes Neurais e Modelagem Cluster-Weighted aos quais tenho, atualmente, me dedicado. Sua iniciativa como professor, orientador e principalmente como um empreendedor foi bastante inspiradora, fomentando idéias e possibilidades de relacionar nosso trabalho com problemas concretos da sociedade.

Aos alunos do Instituto de Física Teórica: Bira, “Bolinha”, Crepaldi, “Fernandinho”, Márcio, Paulo, Esdras, Lúcio, dentre outros, e aos diversos professores e funcionários com os quais convivi durante os anos de preparação e conclusão deste projeto. O ambiente de trabalho descontraído do Instituto foi essencial para o meu aprimoramento como professor e pesquisador.

À Lucimara e Gustavo, pela paciência que demonstraram comigo ao longo do período em que me dediquei a este projeto.

Resumo

Nosso trabalho tem como objetivo *desenvolver um algoritmo de detecção de solitons em presença de tensão superficial, visando construir num certo espaço de parâmetros, uma representação estrutural dos comportamentos de **bifurcação** e **dispersão** destas ondas solitárias*. No capítulo 1 fazemos uma abordagem histórica, desde o descobrimento do primeiro soliton em 1834 num canal para barcos até aplicações atuais em diversas áreas como, por exemplo, em lasers. No capítulo 2 estabelecemos a relação entre *soliton* e *órbita homoclínica*, reunindo conceitos e propriedades de sistemas hamiltonianos reversíveis. Realizamos uma fundamentação teórica assim como propomos o teorema 1, ponto de partida para a construção do nosso algoritmo que possui hipóteses bastante abrangentes: *a existência de uma variedade instável* e de uma função de *reversibilidade* para o sistema em análise. No capítulo 3 definimos um modelo de sistema dinâmico que atende as hipóteses citadas no capítulo anterior e possui diversas aplicações para solitons. Suas características são demonstradas e, através de métodos clássicos, apontamos os resultados que devem ser confirmados por nossa abordagem numérica. Desenvolvemos, então, uma estratégia para o algoritmo. Nos capítulos 4 e 5 criamos analiticamente modelos que possuem solitons pré-determinados e aplicamos o algoritmo com sucesso, confirmando sua existência e apontando peculiaridades no espaço de parâmetros, que apresenta configurações geométricas originais de comportamentos já abordados por outros autores através de métodos tradicionais. No capítulo 6 criamos um modelo analiticamente mais simples que os dos capítulos anteriores, com o intuito de verificar a persistência dos resultados encontrados. O espaço de parâmetros mostra, de forma inesperada, comportamento mais complexo e conseqüente bifurcações mais interessantes. Nos capítulos 7 e 8 apresentamos resultados analíticos e geométricos que corroboram o procedimento numérico elaborado. No primeiro capítulo estudamos o comportamento assintótico do sistema de forma analítica e aplicamos as mesmas condições assintóticas para o algoritmo, mostrando que a propagação de erros não é suficiente para alterar as características observadas, já no segundo capítulo relacionamos as superfícies de energia e seções de Poincaré com as órbitas determinadas pelo método numérico, demonstrando que suas etapas seguem a fundamentação teórica. No capítulo 9 aplicamos o algoritmo ao modelo de solitons em presença de tensão superficial, confirmando alguns resultados já conhecidos como também revelando novos aspectos de bifurcações e dispersão das ondas solitárias. No apêndice encontramos um exemplo do algoritmo e de programas utilizados em diversas partes deste trabalho.

Bifurcação; Solitons; Sistemas Hamiltonianos; Reversibilidade:

Sistemas Dinâmicos; Métodos Numéricos:

Abstract

We study the existence of solitons for reversible Hamiltonian systems taking the family of differential equations $u^{iv} + au'' - u + f(u, b) = 0$ as a model, where f is an analytic function and a, b real parameters. These equations are also important in other physical situations such as the existence of “finite energy” stationary states of partial differential equations, but no assumptions of any kind of discrete symmetry is made and the analysis here developed can be extended to others Hamiltonian systems and successfully employed in situations where standard methods fail. We reduce the problem of computing these orbits to that of finding the intersection of the unstable manifold with a suitable set and then apply it to concrete situations. We determine solitary waves solutions and also build a fase transition diagram in the space of parameters a and b , giving a picture of the structural distribution and a geometrical view of solitons bifurcations and dispersion.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	v
CAPÍTULO 1 Solitons: Introdução Histórica	1
CAPÍTULO 2 Solitons e Órbitas Homoclínicas: Fundamentação Teórica	8
CAPÍTULO 3 A Equação Modelo para Solitons: Propriedades e Estratégia	18
CAPÍTULO 4 O Modelo baseado no Soliton $u(x) = \operatorname{sech}^2(x)$	27
CAPÍTULO 5 O Modelo baseado no Soliton $u(x) = \operatorname{sech}(x)$	33
CAPÍTULO 6 A Equação Modelo para $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$	41
CAPÍTULO 7 Limite Assintótico	51
CAPÍTULO 8 Superfícies de Energia e Seções de Poincaré	62
CAPÍTULO 9 Bifurcação de Solitons em Presença de Tensão Superficial	72
APÊNDICE A Descrição do Algoritmo e de Outras Rotinas Utilizadas no Trabalho	88
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esboço do Canal da União em Hermiston [1].	1
1.2	Esboço das experiências de Russell [1].	2
1.3	John Scott Russell (1808-1882) [1].	3
1.4	Ondas longas em águas rasas por Airy em 1841 [2].	3
1.5	Interpenetração de solitons com velocidades de sentido contrário. (a) antes; (b) e (c) durante; (d) depois	6
1.6	Interpenetração de solitons com velocidades de mesmo sentido. (a) antes; (b) e (c) durante; (d) depois	6
1.7	Recriação da primeira onda solitária [3].	7
2.1	Figura Ilustrativa das Variedades Invariantes	12
2.2	Órbita Homoclínica do sistema 2.4 para $\epsilon = 0$	13
2.3	Forma Normal e Transformações de Poincaré	16
3.1	Representação gráfica do algoritmo	21
4.1	Soliton $u(x) = \text{sech}^2(x)$	27
4.2	Superfície de Energia para $E = \frac{(u')^2}{2} - 2u^2 + 2u^3$	28
4.3	Curvas de nível de $E = \frac{(u')^2}{2} - 2u^2 + 2u^3$	29
4.4	Potencial $V(u) = -2u^2 + 2u^3$	29
4.5	Valores homoclínicos para o modelo $\text{sech}^2(x)$	31
4.6	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $b = 3$	31
4.7	Soliton $u(x) = \text{sech}^2(x)$ (a) e sua bifurcação (b) e (c).	32
5.1	Soliton $u(x) = \text{sech}(x)$	33
5.2	Superfície de energia para $E = \frac{(u')^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}$	34
5.3	Curvas de nível de $E = \frac{(u')^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}$	35
5.4	Potencial $V(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}$	35
5.5	Valores homoclínicos para o modelo $\text{sech}(x)$	37
5.6	Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $\text{sech}(x)$	37
5.7	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $\text{sech}(x)$ com $b = 1$	38
5.8	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $\text{sech}(x)$ com $b = 0.9$	38
5.9	Bifurcação do soliton $u(x) = \text{sech}(x)$	39
5.10	Bifurcação de um soliton para $b = 0.9$	40

6.1	Comparação de $f(u, b)$ para os modelos 6.1 (a), 6.2 (b) e $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ (c) com $b = 1$.	42
6.2	Valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$.	43
6.3	Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$.	44
6.4	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 2$.	45
6.5	Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $a = 2$.	46
6.6	Soliton (a) e bifurcação (b) e (c) para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 2$.	46
6.7	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 3$.	47
6.8	Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $a = 3$.	47
6.9	Soliton (a) e bifurcação (b) e (c) para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 3$.	48
6.10	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 4$.	48
6.11	Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $a = 4$.	49
6.12	Soliton (a) e bifurcação (b) e (c) para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 4$.	49
6.13	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 5$.	50
6.14	Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $a = 5$.	50
7.1	Função Potencial para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$ com $b = 3$.	53
7.2	Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$ com $b = 3$.	53
7.3	Superfície Potencial para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$.	54
7.4	Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$ com $3 < b < 4$.	55
7.5	Função Potencial para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ com $b = 1$.	56
7.6	Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ com $b = 1$.	56
7.7	Superfície Potencial para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$.	57
7.8	Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ com $1 < b < 2$.	58
7.9	Função Potencial para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 1.2$.	59
7.10	Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 1.2$.	59
7.11	Superfície Potencial para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $1 < b < 2$.	60
7.12	Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 1.0$.	61
8.1	Conjunto Φ para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$.	64
8.2	Detalhe de Φ , seção de Poincaré Σ_2 e órbita homoclínica para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$.	64
8.3	Projeção da órbita homoclínica e do conjunto χ para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$.	65
8.4	Seções de Poincaré Σ_1 e Σ_2 para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$.	65
8.5	Projeção das interseções de órbitas com o conjunto χ para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$ (1) e $(a, b) = (-\frac{15}{4} + 10^{-3}, 3)$ (2).	66

8.6	Conjunto Φ para o modelo $sech(x)$ com $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$	67
8.7	Seções de Poincaré Σ_1 e Σ_2 para o modelo $sech(x)$ com $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. . .	67
8.8	Projeção das interseções de órbitas com o conjunto χ para o modelo $sechx$ com $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ (1) e $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 10^{-3}, 1\right)$ (2).	68
8.9	Órbita homoclínica para $(a, b) = (2.02, 1.59)$ do modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$. . .	69
8.10	Bifurcação da órbita homoclínica para $(a, b) = (2.02 + 10^{-2}, 1.59)$ do modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$	70
8.11	Projeção da bifurcação da órbita homoclínica para $(a, b) = (2.02 + 10^{-2}, 1.59)$ do $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$	71
9.1	Valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$	74
9.2	Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-8 < b < -4$	75
9.3	Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-3 < b < 1$. . .	76
9.4	Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-1.25 < b < -0.75$	76
9.5	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$	77
9.6	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$ e $a \propto 10^6$	78
9.7	Função potencial para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$	78
9.8	Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$	79
9.9	Superfície potencial para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-2 < b < 0$	79
9.10	Detalhe da superfície potencial para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-2 < b < 0$. . .	80
9.11	Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -0.8$	80
9.12	Bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$	81
9.13	Conjuntos Φ , Σ_2 e χ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$	82
9.14	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -2.25$	83
9.15	Bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -2.25$	83
9.16	Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -7.28$	84
9.17	Bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -7.28$	84
9.18	Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-3 < b < -2$	85
9.19	Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-8 < b < -6.5$	85
9.20	Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $a = 5.81$	86
9.21	Bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $a = -5.81$	86
A.1	Tela de apresentação do algoritmo de detecção de solitons codificado em Delphi. . .	94
A.2	Comandos do Mathcad utilizados no estudo assintótico do trabalho.	95
A.3	Algoritmo de construção de superfícies de energia de forma implícita para o pacote Mathcad.	96

CAPÍTULO 1

Solitons: Introdução Histórica

Em agosto de 1834, um engenheiro escocês chamado John Scott Russell (1808-1882), enquanto realizava estudos sobre uma forma mais eficiente de canais para barcos no Canal da União em Hermiston, próximo ao campus da universidade Heriot-Watt em Edinburgo, se deparou com uma descoberta científica que impulsionaria mais tarde a matemática não-linear que, na época, ainda era tratada exclusivamente como perturbações da teoria linear.

Russell (figura 1.3) relata que estava observando o movimento de um barco que era rapidamente puxado por dois cavalos através de um canal estreito (ver figura 1.1), quando repentinamente o barco parou juntamente com a massa de água que estava em movimento, que se acumulou violentamente na proa (parte da frente) da embarcação em grande agitação, para rapidamente seguir adiante assumindo a forma de uma grande elevação solitária (ver [1], [4] e [5]).



Figura 1.1: Esboço do Canal da União em Hermiston [1].

Ele a descreveu como uma porção de água bem definida, regular e arredondada que seguiu aparentemente em velocidade constante e sem alteração da sua forma cuja largura calculou aproximadamente em 9,15 m. Ele a perseguiu em um cavalo e mediu sua velocidade aproximadamente como 14 km/h. Sua altura diminuía gradativamente e, após uma perseguição de mais de 2 km, ele a perdeu nas ondulações do canal. Este fenômeno foi batizado por Russell como *Onda de Translação*.

Ele foi capaz de recriar o fenômeno em um tanque de seu jardim (ver figura 1.2) e observar propriedades incomuns que foram ignoradas por cientistas contemporâneos e só seriam obtidas, mais tarde, com o avanço da modelagem não-linear.

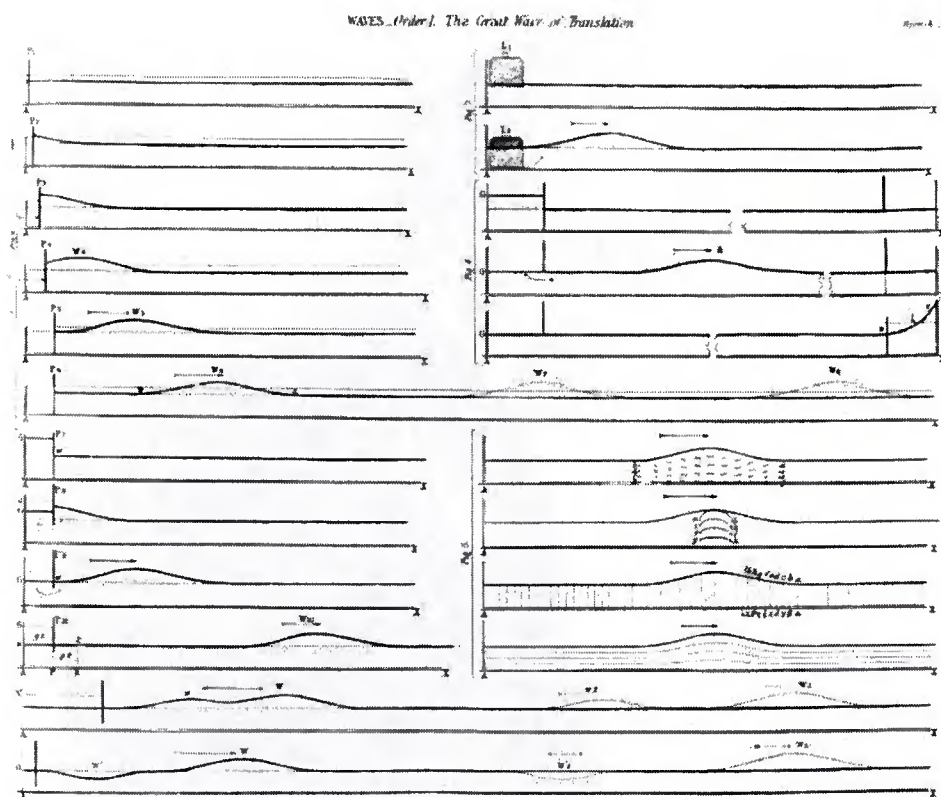


Figura 1.2: Esboço das experiências de Russell [1].

Russell atribuíu o decrescimento da amplitude de sua onda de transição à aderência da água com as paredes do canal. Trabalhos correlatos e experimentos similares foram feitos por Green e Keeland. O primeiro aborda, dentre outras obras, as ondas lineares longas em águas rasas em [6] corroborando alguns resultados teóricos e experimentais em 1838. O segundo, em 1840, trata do movimento ondulatório num fluido com profundidade finita, com a hipótese de “seções paralelas”, que seriam similares a mudança de variável $\bar{x} = x - ct$ (ver [7]). Mas não obtiam modelos teóricos com ondas solitárias como soluções. Por outro lado, Stokes juntamente com Airy propuseram (a partir de 1840), baseados em equações linearizadas, que ondas longas em águas rasas não poderiam se propagar sem mudar sua forma (ver [8]). O diagrama proposto por Airy, se encontra na figura 1.4.

A dificuldade de modelagem das ondas solitárias só foi resolvida em 1895, 61 anos após sua descoberta, com a descrição teórica de Korteweg e De Vries (ver [9] e [10]) para ondas em águas rasas fracamente não-lineares, a chamada *Equação KDV*:

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0 \quad (1.1)$$

A equação 1.1 pode ser obtida através da equação de movimento da hidrodinâmica

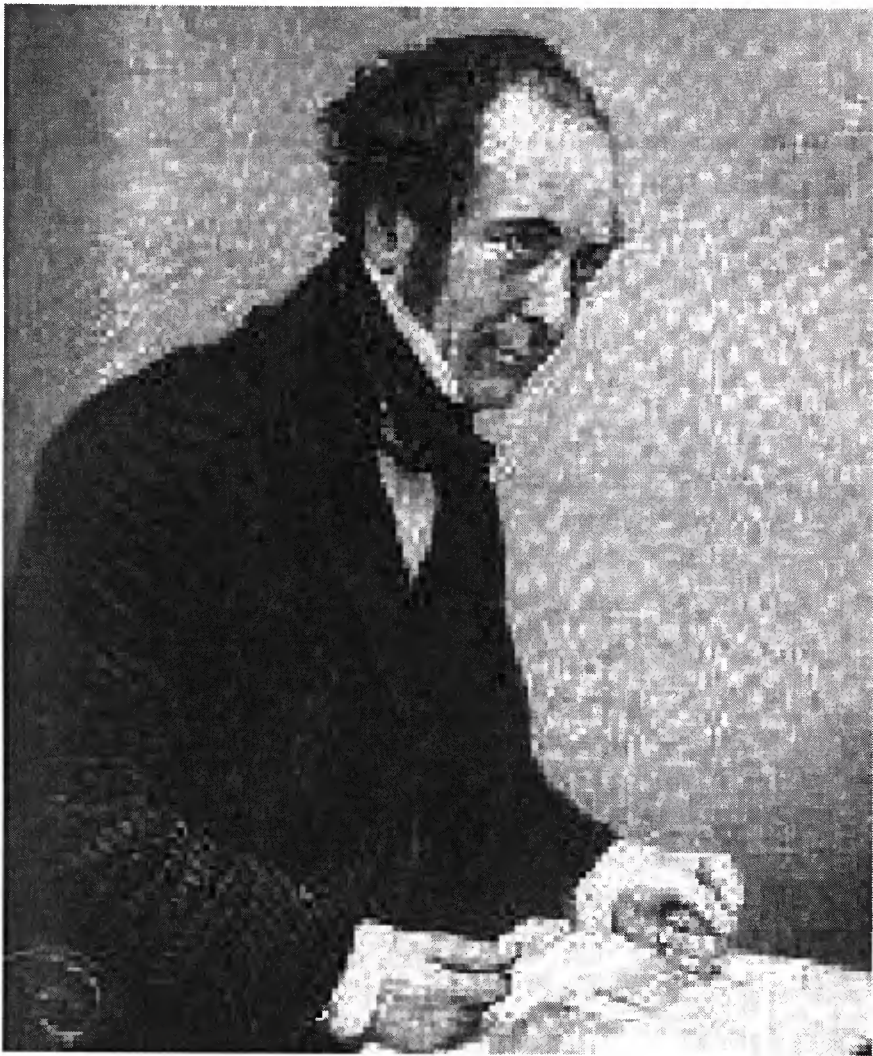


Figura 1.3: John Scott Russell (1808-1882) [1].

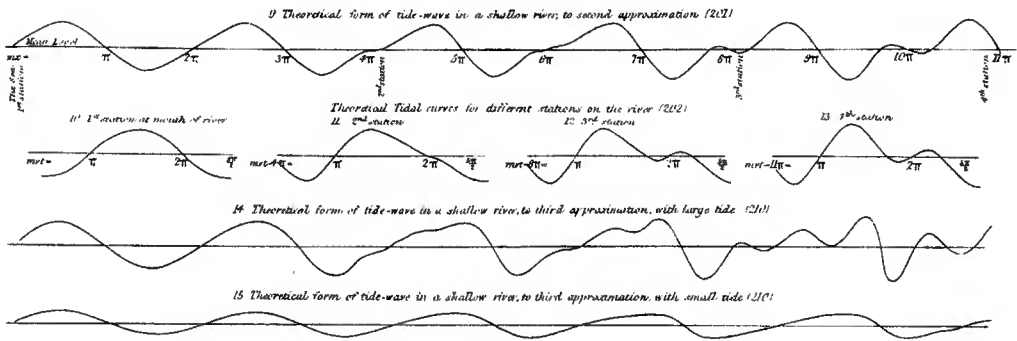


Figura 1.4: Ondas longas em águas rasas por Airy em 1841 [2].

([1]):

$$\rho v_t + \rho v v_x = -\frac{\partial}{\partial x} U(\rho[y]) \quad (1.2)$$

onde x é a posição e t o tempo da onda plana; y é o deslocamento; $v = y_t$ é a velocidade, isto é, o sistema está em repouso para $y = cte$; U é a energia potencial e ρ pode representar a densidade do fluido ou altura da onda. É um “fator de massa” que assumiremos constante. Expandindo-se a força $f = -U_x$ em relação ao deslocamento y obtemos:

$$f = f_2 y_{xx} + f_4 y_4 + f_6 y_6 + \dots \quad (1.3)$$

O primeiro termo de 1.3 é denominada força de restauração e os termos de maior ordem são responsáveis pela dispersão da onda, que pode se originar da tensão superficial ou da profundidade do fluido.

Substituindo 1.3 em 1.2, obtemos:

$$y_{tt} = -y_t y_{tx} + k_1 y_{xx} + k_2 y_{xxx} + \dots \quad (1.4)$$

No limite assintótico do comprimento de onda (ondas longas), e no limite de pequenas amplitudes, os termos $y_t y_{tx}$ e $k_2 y_{xxx}$ de 1.4 são muito menores que y_{tt} e $k_1 y_{xx}$, que representam a fraca dispersão e fraca não-linearidade do sistema.

Através de uma escolha conveniente para x , t e y , podemos escrever 1.4 como:

$$y_{tt} = y_{xx} - 12\epsilon y_t y_{tx} + 2\epsilon y_{xxx} \quad (1.5)$$

onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Obteremos uma solução do problema de valor inicial com os primeiros dois termos de 1.5. No limite $\epsilon \rightarrow 0$ assumiremos:

$$y(x, t) = y^+(x + t) + y^-(x - t) \quad (1.6)$$

Os termos em ϵ só se tornam importantes depois dos dois pacotes de onda em 1.6, que foram excitados numa região finita x e se separaram. Por isso, resolvemos a equação 1.6 separadamente para y^+ e y^- . Para y^- , com a mudança de variáveis $y = y(x - t, \epsilon t) = y(\xi, \tau)$ aplicada em 1.5, desprezando os termos de maior ordem em ϵ , obtemos:

$$y_{\xi\tau} - 6y_{\xi} y_{\xi\xi} + y_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (1.7)$$

A equação 1.7 descreve a propagação de uma onda para a direita, num sistema de coordenadas se movendo com a mesma. Denotando a quantidade y_{ξ} por u , nós obtemos a equação KDV 1.1.

A partir de 1870, Boussinesq e Rayleigh (ver [12]) também apresentaram modelos com ondas solitárias para problemas de ondas em água. As equações de Boussinesq e Rayleigh são dadas, respectivamente, por:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + 3(u^2)_{xx} = 0 \quad (1.8)$$

$$u'' - \mu \left(1 - \frac{1}{3}u'^2\right) u' + u = 0 \quad (1.9)$$

As equações 1.1, 1.8 e 1.9, que possuem ondas solitárias do tipo $u(x, t) = \text{sech}^2(x - ct)$, onde c é a sua velocidade, permitiram a compreensão de ondas longas de amplitude finita. A equação 1.1, por exemplo, mostra como, em terceira ordem para a amplitude, a dispersão da onda (componentes de frequência mais baixa viajando mais rápido que os componentes de frequência mais alta) é equilibrada pelos efeitos de amplitude (partes mais altas da onda viajam mais rápido do que as partes mais baixas), possibilitando ondas longas que podem se propagar sem mudar sua forma.

Desta forma, fica caracterizada uma onda solitária pela velocidade e forma constantes ao longo do tempo, representando pacotes de onda que não se espalham, pois o efeito da dispersão é compensado pelo efeito da não-linearidade das equações que as modelam.

Devido à interação não-linear, as ondas solitárias podem se interpenetrar sem se destruírem, mesmo quando muitas são superpostas (ver figuras 1.5 e 1.6). A importância de tais ondas foi também reconhecida por Zabusky e Kruskal que, em 1965 (ver [13]), obtiveram a equação 1.1 em outras situações físicas e, e também constataram propriedades do princípio de superposição para estas soluções não-lineares. Eles rebatizaram as ondas solitárias como *Solitons* que apresentaram, pelas investigações de Miura, Gardner, Kruskal, Tabor e Caradona, dentre outros (ver [11], [14] e [15]), diversas leis de conservação (massa, momento, energia, centro de massa, etc). Os solitons, segundo uma variedade de autores, também têm desempenhado um papel principal na origem de dinâmicas caóticas (ver [16], [17], [18] e [19]).

Sobre o problemas de ondas na água, não é verdade que toda onda rasa é um soliton só porque apresenta a característica da não-dispersão. Para ondas de amplitude finita, ocorre a tendência já citada da velocidade no topo ser mais rápida do que na base causando a “quebra” ou “estouro” das mesmas. No fenômeno famoso da *Pororoca*, onde as águas do oceano se dirigem para dentro de rios (com largura mais estreita e profundidade menor) como o Amazonas, Severn (Europa) e Tsientang (China), as ondas formadas não possuem dispersão, mas mudam de forma continuamente por sucessivas “quebras” de onda, não caracterizando solitons.

O precursor dos solitons, John Scott Russell, em sua época, só ficou conhecido por

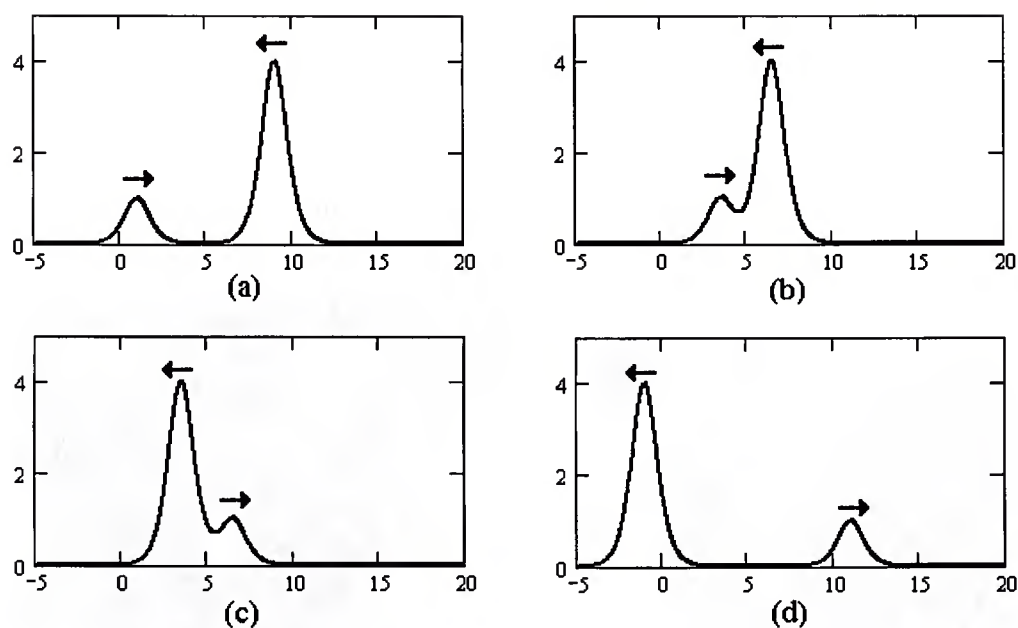


Figura 1.5: Interpenetração de solitons com velocidades de sentido contrário. (a) antes; (b) e (c) durante; (d) depois

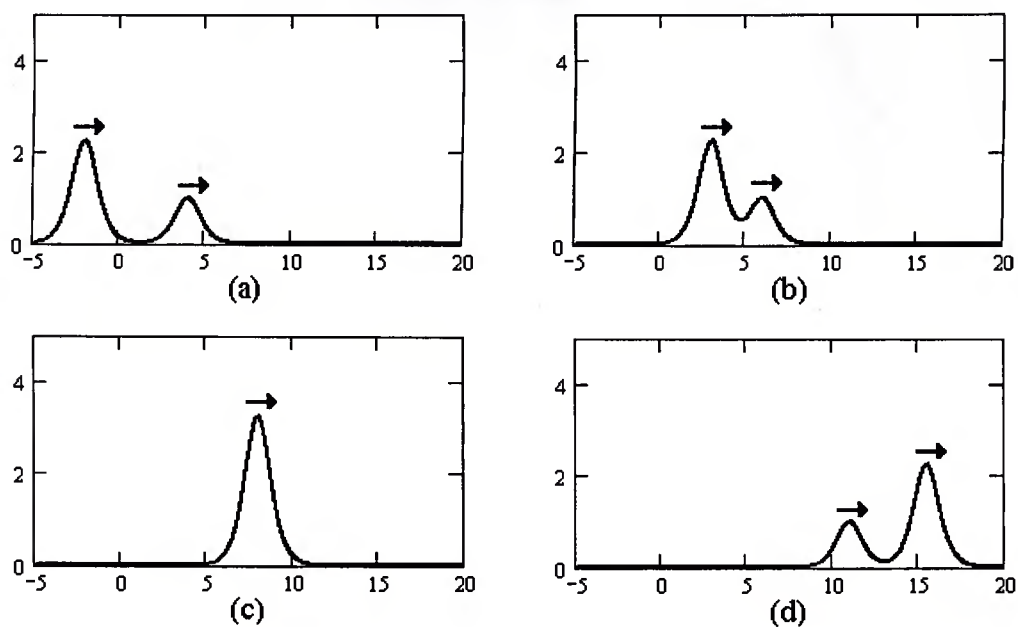


Figura 1.6: Interpenetração de solitons com velocidades de mesmo sentido. (a) antes; (b) e (c) durante; (d) depois

outros trabalhos nas áreas de arquitetura naval (pelos quais recebeu medalha de ouro da “Royal Society of Edinburgh” em 1837) e por uma das primeiras experiências experimentais do efeito Doppler observado na passagem de trens.

Em julho de 1995, ocorreu um encontro internacional de cientistas, a conferência de ondas não-lineares em física e biologia na universidade Heriot-Watt (ver [3] and [20]), onde foi feita a recriação da primeira observação de uma onda solitária realizada por Russell. A ocasião fez parte de uma cerimônia para a inauguração de um novo aqueduto, chamado de John Scott Russell, que se conecta ao antigo Canal da União, onde ocorreu o fenômeno original (ver foto 1.7).



Figura 1.7: Recriação da primeira onda solitária [3].

Como exemplo de solitons em outras áreas além de problemas de ondas em fluidos, podemos citar as equações de Fitzhugh-Nagumo 1.10 e de Sine-Gordon 1.11. A primeira modela fluxo de pulsos num supercondutor; a segunda pode modelar a propagação de ondas de densidade de carga nos metais, o movimento de deslocamento nos cristais, a propagação de ondas em membranas lipídicas, ou transparência auto-induzida em lasers, dentre outros exemplos. Os solitons da equação 1.10 possuem a forma $u(x, t) = \tanh(x - ct)$ e na equação 1.11 a forma $u(x, t) = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(t)} \right)$, onde c é a velocidade da onda (ou pulso) e α e β podem ser funções exponenciais ou hiperbólicas (ver [15], [17], [21], [22], [23], [24], [25], [26] e [27]).

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx} + (a - u)(u^2 - 1); -1 < a < 0 \quad (1.10)$$

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin(u) \quad (1.11)$$

CAPÍTULO 2

Solitons e Órbitas Homoclínicas: Fundamentação Teórica

As órbitas homoclínicas têm atraído a atenção de muitos autores pois têm desempenhado o papel principal como mecanismo para a criação de dinâmicas caóticas.

Dizemos que uma órbita ϕ é homoclínica a um certo conjunto crítico p de um sistema dinâmico (pode ser, por exemplo, um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica) se a órbita é bi-assintótica a esse conjunto, quer dizer, se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) = p$. A importância de órbitas homoclínicas para o estudo de sistemas dinâmicos foi primeiramente reconhecida por Poincaré. Desde então, o estudo da dinâmica em vizinhanças de órbitas homoclínicas tem ocupado lugar central na teoria dos sistemas Dinâmicos. Neste sentido, destacam-se os trabalhos realizados por Poincaré, Birkhoff e Smale, que dizem respeito à dinâmica na proximidade de órbitas homoclínicas a órbitas periódicas. Com relação à dinâmica na proximidade de órbitas homoclínicas a pontos de equilíbrio, um trabalho pioneiro, e de maior importância, é o de Silnikov (veja [28] como referência sobre estes resultados clássicos). Citamos ainda [29] referente à órbitas homoclínicas a equilíbrios tipo sela-foco. Neste trabalho, concentraremos nossa atenção no problema de existência de órbitas homoclínicas a equilíbrios tipo sela-centro, que aparecem com frequência nos sistemas Hamiltonianos. Suas implicações são discutidas em [30], [31], [32], [33] e [34].

O problema de encontrar órbitas homoclínicas é relacionado à existência de ondas solitárias ou Solitons, especialmente na presença de tensão superficial [35], em estruturas elásticas [36],[37],[38],[39] e em padrões espaciais de transição de fase [40] e [41]. As órbitas homoclínicas também são importantes na demonstração da existência de estados de energia finita em equações diferenciais parciais [42].

Em nosso trabalho, abordaremos equações específicas de ondas viajantes, onde *uma órbita homoclínica será equivalente a um Soliton em presença de tensão superficial*.

De modo breve, podemos dizer que, um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade em $\mathbb{R}^{2n}$, é aquele associado a um campo de vetores do tipo:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

onde $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função Hamiltoniana do sistema.

Grande parte dos sistemas da Mecânica Clássica são sistemas Hamiltonianos, incluindo os de maior relevância na Física. Sistemas Hamiltonianos não são somente especiais por suas aplicações às ciências, mas também por possuírem uma série de propriedades matemáticas notáveis. Por exemplo, é bem conhecido que sistemas Hamiltonianos possuem, em geral, uma enorme quantidade de órbitas periódicas e homoclínicas. Grande parte dos resultados nessa direção, são baseados em cálculos variacionais, que utilizam-se de diversos princípios variacionais da mecânica. Neste trabalho abordaremos um problema, descrito a seguir, sobre existência de órbitas homoclínicas, no qual os métodos variacionais existentes não se aplicam. Devido à complexidade do problema, restringiremos nossa atenção a sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade.

A fim de apresentar o problema básico, do qual trata este trabalho, consideremos, como modelo, o seguinte sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade:

$$\dot{\vec{q}} = \vec{p} \quad \dot{\vec{p}} = -\nabla V(\vec{q}, \varepsilon), \quad V(\vec{q}, \varepsilon) = -\nu^2 \frac{q_1^2}{2} + \omega^2 \frac{q_2^2}{2} + \varepsilon W(\vec{q}, \varepsilon),$$

onde $\vec{q} = (q_1, q_2)$ e $W(\vec{q}, \varepsilon) = \mathcal{O}(\|\vec{q}\|^3)$ é uma função analítica, com ν, ω, ε constantes.

Sua função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(\vec{q}, \varepsilon)$ e o sistema pode ser expresso na forma paramétrica:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 \\ \dot{q}_2 = p_2 \\ \dot{p}_1 = \nu^2 q_1 - \frac{\partial W}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 = -\omega^2 q_2 - \frac{\partial W}{\partial q_2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Numa vizinhança da origem $\vec{q} = \vec{p} = 0$, podemos expressar 2.1 na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \nu^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

O sistema 2.1 contém dois elementos básicos, que nos interessam:

- i) a origem, $\vec{q} = \vec{p} = 0$, é um equilíbrio de tipo *sela-centro* pois 2.2 possui polinômio

característico $p(\lambda) = \lambda^4 + (\omega^2 - \nu^2)\lambda^2 - \omega^2\nu^2$ com um par de auto-valores reais, $\pm\nu$, e um par de auto-valores imaginários, $\pm\omega i$;

- ii) o sistema é reversível, quer dizer, existe uma involução (aplicação cuja inversa é ela própria), dada por $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (q_1, q_2, -p_1, -p_2)$, que reverte o sentido do campo de velocidades associado à (2.1) deixando a função hamiltoniana invariante. Especificaremos o papel importante da reversibilidade e suas características mais adiante.

Estamos interessados no seguinte problema: para uma dada família de funções W , encontrar os valores de ε , tais que o sistema (2.1) possui uma órbita ϕ homoclínica a origem (ou seja, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) = (0, 0, 0, 0)$). A dificuldade de tal problema, que também explica a falha dos métodos variacionais, está contida na discussão abaixo.

Em geral, um sistema Hamiltoniano, com um equilíbrio r de tipo sela-centro, não possui uma órbita homoclínica a r . Para que tal órbita exista, é necessário que as variedades estável e instável de r (uni-dimensionais), definidas no mesmo nível de energia (tri-dimensional), coincidam. Genericamente, espera-se encontrar tal situação, apenas, em famílias bi-paramétricas de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, e mais, apenas para valores discretos, e a princípio isolados, dos parâmetros. A reversibilidade muda esse quadro em muito. A fim de entendermos as conseqüências da reversibilidade, consideremos a família de sistemas Hamiltonianos dada em (2.1). Neste caso, denotemos por Q a reversibilidade, que é dada por $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (q_1, q_2, -p_1, -p_2)$. Seja χ o conjunto dos pontos fixos de Q , ou seja, os pontos (q_1, q_2, p_1, p_2) tais que $p_1 = p_2 = 0$. Mostraremos que se a variedade instável de $r = (0, 0, 0, 0)$ intersecta χ , então existe uma órbita homoclínica a r . Uma vez que o conjunto χ é uma variedade bi-dimensional, é de se esperar que órbitas homoclínicas a r , apareçam na família a um parâmetro (2.1). Esta mesma discussão é válida para uma família uni-paramétrica geral de sistemas reversíveis.

Outra conseqüência da reversibilidade é a seguinte: seja Λ o conjunto dos valores de ε tal que o sistema (2.1) (que é reversível) possui uma órbita homoclínica ϕ a r . Encontra-se provado em [32] (veja também [31]), que Λ não contém pontos isolados. Esse resultado implica que, se para $\varepsilon = \varepsilon_0$ o sistema (2.1) possui uma órbita homoclínica a r , então em qualquer vizinhança de ε_0 existem infinitos valores de ε , para os quais (2.1) possui uma órbita homoclínica a r . Para que este resultado possa ser aplicado à um determinado sistema Hamiltoniano, como aqueles que aparecem na Física, é necessário, no entanto, saber que o sistema possui *pelo menos uma órbita homoclínica*. De outra maneira, pode ocorrer que o conjunto Λ seja vazio.

A quase que totalidade dos sistemas Hamiltonianos conhecidos, que possuem uma órbita homoclínica a um equilíbrio de tipo sela-centro, possuem alguma simetria discreta. Neste

caso, a órbita homoclínica é facilmente encontrada analisando-se um sub-sistema Hamiltoniano, com um grau de liberdade, do sistema dado. Infelizmente em muitos sistemas interessantes na física tal simetria discreta, ou é desconhecida, ou é inexistente. Nosso trabalho diz respeito à existência de órbitas homoclínicas em uma classe de sistemas Hamiltonianos reversíveis, de grande importância na física e na teoria das equações diferenciais ordinárias. Para esses sistemas não se conhece nenhuma simetria, que possa reduzir o problema ao de um sistema com um grau de liberdade.

Passaremos, agora, a formalização de alguns conceitos e hipóteses necessários ao desenvolvimento do trabalho.

Começaremos com sistemas Hamiltonianos a um parâmetro com dois graus de liberdade $(M, \omega, H(\varepsilon))$, onde M é variedade C^∞ de dimensão 4, ω é forma simplética em M (2-forma sobre M , não-degenerada e fechada) e $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função Hamiltoniana associada ao sistema.

Dada a função H , existe um campo vetorial $X_H \in X(M)$ definido por:

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y) \text{ para todo } Y \in X(M).$$

O fluxo $\Psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ é definido como $\frac{\partial \Psi(\cdot, x)}{\partial t} = X_H(\Psi(\cdot, x))$ e, nas coordenadas simpléticas (q_1, q_2, p_1, p_2) , a solução é dada pelas equações de Hamilton: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ e $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

Nosso ponto de partida será a hipótese:

- (H1) $(M, \omega, H(\varepsilon))$ possui variedade instável não-vazia, que nos casos estudados possuirá equilíbrio r tipo sela-centro, isto é, o campo vetorial X_H linearizado em r possui um par de autovalores reais $\pm a \neq 0$ e um par de autovalores imaginários puros $\pm bi \neq 0$ (equilíbrio não-hiperbólico).

Como exemplo temos o seguinte sistema:

$$H(q, p, \varepsilon) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(q, \varepsilon); V(q, \varepsilon) = \frac{1}{2}(-a^2 q_1^2 + b^2 q_2^2) + \varepsilon R(q, \varepsilon) \quad (2.3)$$

onde $R(q, \varepsilon) = O(\|q^3\|)$ é analítica.

X_H linearizado em $r = 0$ tem polinômio característico $\lambda^4 + (b^2 - a^2)\lambda^2 - a^2b^2$ cujas raízes são $\pm a \neq 0$ e $\pm bi \neq 0$.

No equilíbrio sela-centro r encontramos uma variedade central W^c de dimensão 2 e variedades estável W^s e instável W^u .

O sistema 2.3 possui energia $H(q, p, \varepsilon) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(q, \varepsilon)$ como integral primeira, isto é, $H(\Psi(\cdot, x)) = cte$ e W^c é foliada por órbitas periódicas φ_H , $H > 0$, uma para cada valor de

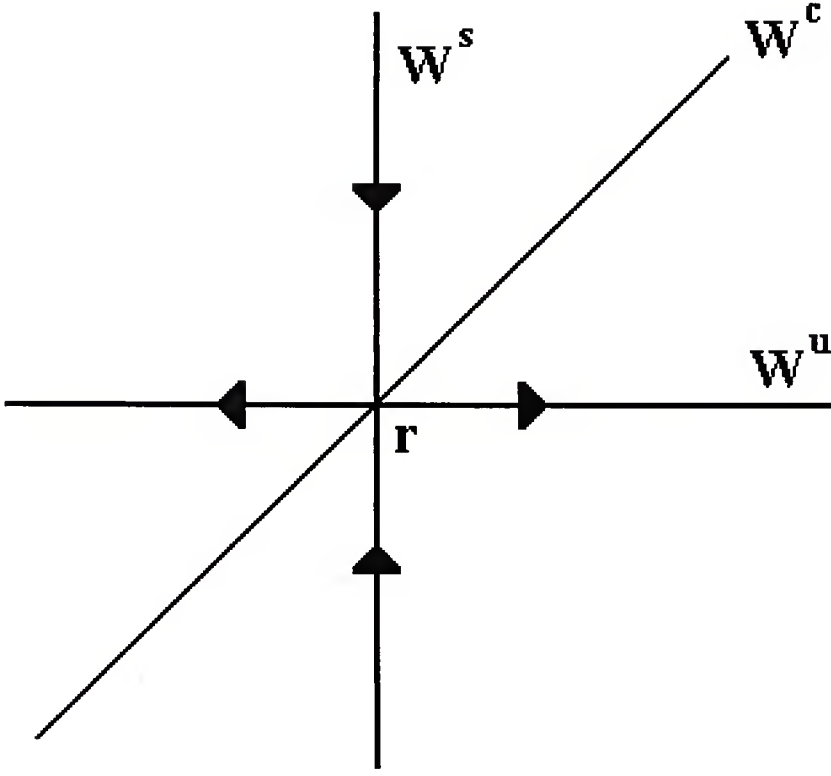


Figura 2.1: Figura Ilustrativa das Variedades Invariantes

energia. Para H suficientemente pequena, todas as órbitas φ_H são instáveis e têm variedades estável e instável de dimensão 2 (definidas dentro do nível de energia H de dimensão 3).

É bem conhecido que tal órbita periódica é associada com dinâmicas muito complicadas quando suas variedades estável e instável se intersectam transversalmente. De modo a verificar se tal interseção existe, é necessário rastrear as variedades invariantes de φ_H no espaço de fase. Isso é normalmente uma tarefa difícil, mas consideraremos a situação auxiliar, onde existe uma órbita homoclínica ϕ ao equilíbrio $r = (0, 0, 0, 0)$ para $\varepsilon = 0$, isto é, $\phi(t) \rightarrow r$ se $t \rightarrow \pm\infty$.

Como exemplo, seja o sistema abaixo (encontrado em [31]):

$$H(q, p, \varepsilon) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(q, \varepsilon); \quad (2.4)$$

$$V(q, \varepsilon) = \frac{1}{2}(\omega^2 q_1^2 - q_2^2) + \alpha \omega^{\frac{3}{2}} q_1^3 + \beta \omega q_1^2 q_2 + \varepsilon \sqrt{\omega} q_1 q_2^2 + \frac{1}{3} q_2^3.$$

X_H linearizado em $r = (0, 0, 0, 0)$ tem polinômio característico: $\lambda^4 + \lambda^2(\omega^2 - 1) - \omega^2 = 0$, cujas raízes são ± 1 e $\pm \omega i$.

Para $\varepsilon = 0$ existe, como solução do sistema 2.4, a órbita homoclínica a r : $\phi(t) = \left(0, \frac{3}{1+\cosh(t)}, 0, \frac{3\sinh(t)}{(1+\cosh(t))^2}\right)$ cujo gráfico é descrito abaixo:

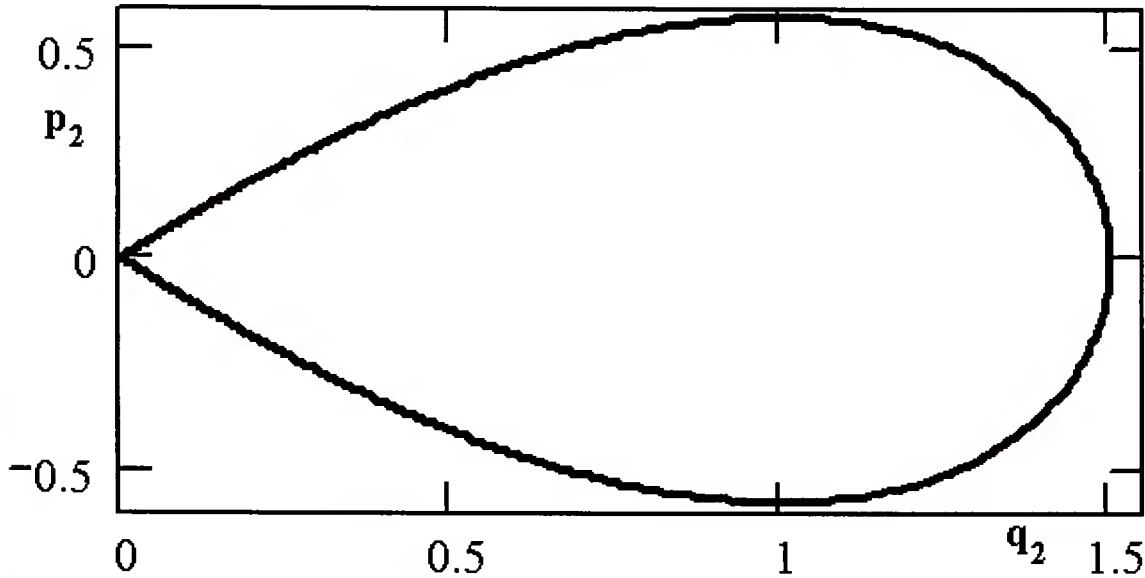


Figura 2.2: Órbita Homoclínica do sistema 2.4 para $\varepsilon = 0$

Neste caso, esperamos que as variedades estável e instável de φ_H sigam ϕ de modo que as variedades invariantes se intersectem para ε suficientemente pequeno.

Existem duas questões básicas relacionadas a sistemas Hamiltonianos com 2 graus de liberdade com órbitas homoclínicas ϕ ao equilíbrio sela-centro (ou laço sela-centro homoclínico):

- I) Como é a dinâmica numa vizinhança da órbita homoclínica ?
- II) O que acontece com a órbita homoclínica ϕ para $\varepsilon \neq 0$?

Para $\varepsilon = 0$, W^S e W^U coincidem, e a interseção não é transversal (ver [43], [44] e [45]) pois seus espaços tangentes têm dimensão 1 e não podem gerar o conjunto 3-dimensional $H \equiv 0$ (nível de energia 0 que contém r , W^S e W^U). Logo essa interseção é instável e não podemos garantir, a princípio, a existência de órbitas homoclínicas após a perturbação do sistema.

A principal ferramenta clássica para a investigação do fluxo é a transformação de Poincaré definida utilizando-se duas seções de Poincaré que dividem o problema numa parte local (vizinhança de r) e numa parte global (vizinhança tubular de ϕ).

Na vizinhança do equilíbrio sela-centro podemos integrar o sistema através da forma normal da função Hamiltoniana dada abaixo ([32]):

Forma Normal: Seja (M, Ω, H) um sistema Hamiltoniano satisfazendo a hipótese H1. Então existe uma vizinhança U de r com coordenadas simpléticas $(p_1, q_1, p_2, q_2) = x$ e uma forma simplética $\Omega = dp_1 \wedge dq_1 \wedge dp_2 \wedge dq_2$ tal que, nessas coordenadas, a função hamiltoniana H é dada por:

$$\begin{aligned} h(I_1, I_2, \varepsilon) &= aI_1 + bI_2 + R(I_1, I_2, \varepsilon); \\ R(I_1, I_2, \varepsilon) &= O(I_1^2 + I_2^2 + \varepsilon^2); \\ I_1 &= p_1 q_1; \quad I_2 = \frac{(p_2^2 + q_2^2)}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde a e b são independentes de ε e $R(0, 0, \varepsilon) = 0$.

I_1 e I_2 são integrais primeiras, o que torna a hamiltoniana autônoma (não dependente do tempo) e, consequentemente, o sistema é facilmente integrável.

Com uma mudança na escala do tempo ($t \rightarrow \pm t/a$) e, se necessário, uma transformação canônica ($q_1 \rightarrow -p_1, p_1 \rightarrow q_1$), podemos assumir $a = -1$ e $b > 0$ (o novo b representa a razão $|b/a|$). Pois:

- 1) $a, b > 0$: $(q_1 \rightarrow -p_1, p_1 \rightarrow q_1), t \rightarrow t/a$.
- 2) $a > 0, b < 0$: $t \rightarrow -t/a$.
- 3) $a < 0, b > 0$: $t \rightarrow t/a$.
- 4) $a, b < 0$: $(q_1 \rightarrow -p_1, p_1 \rightarrow q_1), t \rightarrow -t/a$.

Assim, $h(I_1, I_2, \varepsilon) = -I_1 + bI_2 + R(I_1, I_2, \varepsilon)$, e o fluxo numa vizinhança de r é dado por:

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ q_1(t) \\ p_2(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t\beta) & -\sin(t\beta) \\ 0 & 0 & \sin(t\beta) & \cos(t\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(0) \\ q_1(0) \\ p_2(0) \\ q_2(0) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

onde $\alpha = \frac{\partial h}{\partial I_1}(I_1(0), I_2(0))$ e $\beta = \frac{\partial h}{\partial I_2}(I_1(0), I_2(0))$.

Assumiremos que a órbita homoclínica ϕ converge para r com $q_1 > 0$ e diverge com $p_1 > 0$.

Construiremos uma seção de Poincaré transversal à q_1 definida como:

$$\Sigma = \{(p_1, q_1, p_2, q_2) : q_1 = \sigma; \sigma > 0\} \cap \{(p_1, q_1, p_2, q_2) : h \equiv 0\} \quad (2.7)$$

Para I_2 suficientemente pequeno, utilizando o teorema da função implícita, obtemos:

$$\Sigma = \left\{ p_1 = \frac{\omega}{\sigma} I_2 + O(I_2^2 + \varepsilon^2), q_1 = \sigma \right\} \quad (2.8)$$

Para cada (p_2, q_2) temos associado um p_1 . Utilizaremos então o sistema de coordenadas em Σ (definida em 2.8) como $y = (p_2, q_2)$.

Analogamente construímos outra seção de Poincaré Σ^* transversal a p_1 com sistema de coordenadas y^* . Neste sistema, definimos $L(., \varepsilon) : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ através do fluxo local 2.6 como:

$$y^* = Ly = \begin{pmatrix} \cos(t\beta) & -\sin(t\beta) \\ \sin(t\beta) & \cos(t\beta) \end{pmatrix} y; \beta = \frac{\partial h}{\partial I_2}(I_1(0), I_2(0)) \quad (2.9)$$

onde $t(y)$ é o tempo que leva um ponto de Σ para chegar em Σ^* .

Obtemos $t(y)$ fazendo $p_1(t) = \sigma \implies e^{-t\alpha} p_1(0) = \sigma$. Como $p_1(0) = \frac{\omega}{\sigma} I_2 + O(I_2^2 + \varepsilon^2)$ (ver 2.8) e $I_2 = \frac{1}{2} \|y\|^2$ (ver 2.5), temos:

$$t(y) = -2 \ln \|y\| + \ln \frac{2\sigma^2}{\omega} + O(\ln \|y\| (\|y\|^2 + \varepsilon)) \quad (2.10)$$

L não está definida para $y = 0$ (se $y = 0$, " $t(y) = \infty$ "). Extendemos continuamente L em Σ definindo $L(0) = 0$.

Construiremos a função $G(., \varepsilon) : \Sigma^* \rightarrow \Sigma$ analítica em (γ^*, γ) definindo: $G(0, 0) = 0$ e $\det(DG(0, 0)) = 1$.

Podemos ainda escrever $DG(0, 0)$ como AR onde A é simétrica positiva e R rotação. Assim:

$$G(\gamma^*, \varepsilon) = \varepsilon v + AR\gamma^* + O(\|\gamma^*\|^2 + \varepsilon^2); v \in R^2, v \neq 0;$$

$$AR = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -1/b & 0 \end{bmatrix}, (q, p) = \phi + \varepsilon(Q, P).$$

Elaboramos, então, a transformação de Poincaré $F(., \varepsilon) : \Sigma \rightarrow \Sigma$ como $F = G \circ L$ e a representamos no esquema abaixo:

Dizemos que ε é valor k -homoclínico se $F^k(0, \varepsilon) = 0$, k mínimo.

Definimos Λ_k como o conjunto de valores k -homoclínicos e :

$$\Lambda = \bigcup_{k \in N_k} \Lambda_k \quad (2.11)$$

Obter raízes da equação $F^k(0, \varepsilon) = 0$ é um problema 2-dimensional e, a princípio, não podemos garantir sua solução com o parâmetro ε .

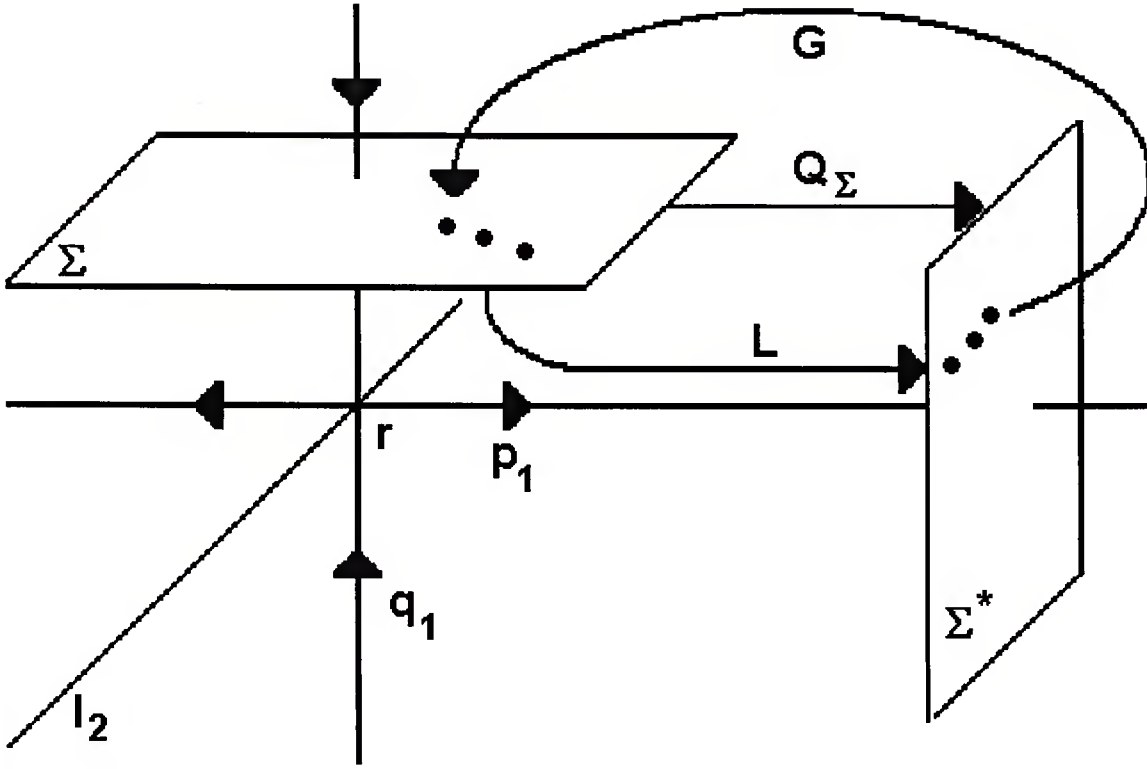


Figura 2.3: Forma Normal e Transformações de Poincaré

Com a introdução de uma nova hipótese, afirmaremos que o problema acima tem solução para $k \geq 2$.

- (H2) $(M, \omega, H(\varepsilon))$ é reversível com respeito a Q , isto é, $Q : M \rightarrow M$ é involução ($Q^{-1} = Q$), anticanônica ($Q^*(\omega) = -\omega$) e $H \circ Q = H$.

Utilizando as propriedades de (H2) e da forma simplética ω , temos:

$$H \circ Q = H \implies DH \circ Q \circ DQ = DH \implies DH \circ Q \circ DH \circ u = DH \circ u, \forall u \in T_x M.$$

$\omega(X_H \circ Q, DQ \circ u) = \omega(X_H, u) \implies -\omega(DQ \circ X_H \circ Q, u) = \omega(X_H, u) \implies DQ \circ X_H = -X_H \circ Q$. Mas, como $DQ \circ X_H = DQ \circ \frac{d}{dt} \Psi_t$ e $-X_H \circ Q = -\frac{d}{dt} \Psi_t$, temos:

$$\Psi_t \circ Q = Q \circ \Psi_{-t}. \quad (2.12)$$

Seja χ o conjunto dos pontos fixos de Q . Seja ξ uma solução de (2.1) tal que $\xi(0) \in \chi$. A equação (2.12) implica que $\xi(t) = \psi_t \circ \xi(0) = \psi_t \circ Q \circ \xi(0) = Q \circ \psi_{-t} \circ \xi(0) = Q \circ \xi(-t)$. Uma vez que $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (0, 0, 0, 0) \stackrel{\text{def}}{=} r$ é reversível, $Q(r) = r$, e se ξ é tal que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi(t) = r$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} Q \circ \xi(t) = r$.

Com isso provamos o seguinte resultado:

- Teorema 1: *Se a variedade instável de r intersecta χ , então existe uma órbita homoclínica a r*

Ainda, se H for par em relação a p , Q pode ser vista como $(q \rightarrow q, p \rightarrow -p)$.

A restrição de Q a Σ defini uma involução $Q_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ dada por: $(p_2 \rightarrow -p_2, q_2 \rightarrow q_2)$.

Temos que $\eta(., \gamma) : \Sigma \rightarrow \Sigma$; $\eta = G \circ Q_\Sigma$ e $\zeta(., \gamma) : \Sigma \rightarrow \Sigma$; $\zeta = Q_\Sigma \circ L$ são involuções.

- Proposição 1: F é reversível com respeito a η e a ζ , isto é, $\eta \circ F = F^{-1} \circ \eta$ e $\zeta \circ F = F^{-1} \circ \zeta$.

Sejam κ e τ respectivamente os conjuntos de pontos fixos de η e ζ . Obtemos a seguinte proposição:

- Proposição 2: $F^{2n+1}(0, \gamma) = 0 \iff F^{n+1}(0, \gamma) \in \kappa$ e $F^{2n}(0, \gamma) = 0 \iff F^n(0, \gamma) \in \tau$.

Pela proposição acima, γ é valor 2-homoclínico se e somente se $F(0, \gamma) \in \tau$.

$$\text{Como } \zeta(y, \gamma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} y; \theta = t\beta,$$

fazendo $y_1 = r \cos \phi$; $y_2 = r \text{sen} \phi$, obtemos como solução de $\zeta(y, \gamma) = y$ a relação $\phi = \theta(r^2)$ e τ é dado por uma espiral em Σ . Como $F(0, \gamma) = \gamma v + O(\gamma^2)$ é uma curva suave passando pela origem Σ , obtemos infinitas interseções entre $F(0, \gamma)$ e τ .

Estudando analogamente o caso $n = 3$ e utilizando argumentos de indução, obtemos o seguinte resultado:

- Proposição 3: Para $n \geq 2$, existe (y_n^k) de valores k -homoclínicos com $y_n^k \rightarrow 0$, isto é, o conjunto de valores k -homoclínicos é denso numa vizinhança de $\gamma = 0$.

Assim, o conjunto Λ , definido em 2.11, tem a propriedade de não possuir pontos isolados. Para mais propriedades e aplicações deste conjunto, veja [32] e [46].

CAPÍTULO 3

A Equação Modelo para Solitons: Propriedades e Estratégia

Consideremos a equação diferencial escalar de quarta ordem

$$u^{iv} + au'' - u + f(u, b) = 0, \quad (3.1)$$

com: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $f(u, b) = \mathcal{O}(u^n)$; $n = 2, 3$ e f analítica.

A origem $u = 0$ é um equilíbrio da equação (3.1). O polinômio característico associado a $u = 0$ é: $\lambda^4 + a\lambda^2 - 1 = 0$. Isso implica que $u = 0$ é um equilíbrio de tipo sela-centro como veremos mais adiante, possuindo assim variedade instável não-vazia e satisfazendo a hipótese (H1) do capítulo anterior.

A equação (3.1) aparece em diversos ramos da física. O problema de encontrar soluções homoclínicas a origem está usualmente relacionado ao problema de existência de ondas solitárias, ou ao problema da existência de estados estacionários com “energia finita”, em equações a derivadas parciais de evolução, de quarta ordem com relação às variáveis espaciais. Para aplicações da equação (3.1) ao problema da existência de ondas solitárias em presença de tensão superficial, veja [35]. Neste caso f é usualmente aproximada por u^2 e o parâmetro a é relacionado à velocidade da onda. A equação (3.1) também está relacionada a padrões localizados de flambagem de estruturas elásticas [37] e a modelos para padrões espaciais que aparecem em transições de fase [41] (nesse contexto (3.1) é conhecida por equação estacionária estendida de Fisher-Kolmogorov).

A equação (3.1) pode ser escrita como um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, dado por:

$$p'_u = -\partial_u H, \quad p'_v = -\partial_v H, \quad u' = \partial_{p_u} H, \quad v' = \partial_{p_v} H,$$

onde H é dada por

$$H = p_u v + \frac{p_v^2}{2} + a \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - F(u, b). \quad (3.2)$$

Note que esse sistema é reversível com relação a seguinte involução $Q(u, v, p_u, p_v) = (u, -v, -p_u, p_v)$, satisfazendo a hipótese (H2) do capítulo anterior.

Alguns autores (ver [47],[32],[48],[49] e [50]) têm trabalhado na direção de encontrar condições sobre f que garantam a existência de órbitas homoclínicas a $u = 0$ com um pulso, pelo menos para algum valor dos parâmetros a e b ; e ainda determinar as classes de f que satisfaçam essas condições. Mas não há, ainda, um esforço no sentido de, para alguns representantes dessas classes, esboçar curvas no espaço de parâmetros (a, b) , onde a equação (3.1) apresente órbitas homoclínicas a $u = 0$, isto é, solitons.

Nosso trabalho realiza um estudo numérico deste problema através das propriedades geométricas e analíticas citadas anteriormente. Utilizaremos primeiramente modelos construídos analiticamente, cujas soluções homoclínicas são conhecidas, para teste e avaliação do método. A estratégia será descrita a seguir:

Dada a equação 3.1, obtemos o sistema hamiltoniano equivalente:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = p_v \\ p'_u = -u + f(u, b) \\ p'_v = -p_u - av \end{cases} \quad (3.3)$$

com $H(u, v, p_u, p_v) = p_u v + \frac{p_v^2}{2} + \frac{av^2}{2} + \frac{u^2}{2} - F(u, b)$, onde F é a primitiva de f .

O sistema 3.3 possui pontos críticos $(0, 0, 0, 0)$ e $(f(u, b), 0, 0, 0)$. Linearizando-o na origem, obtemos a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ p'_u \\ p'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p_u \\ p_v \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

O sistema 3.4 tem polinômio característico:

$$\lambda^4 + a\lambda^2 - 1 = 0 \quad (3.5)$$

Seus autovalores e respectivos autovetores do sistema são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}} \\ \vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} \\ \frac{1}{2}\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}} \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} \right) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}} \left(1 + a^2 + \frac{1}{4}a(-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}) \right) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}} \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} \right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}} \left(1 + a^2 + \frac{1}{4}a(-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}) \right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt{-2a - 2\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} \\ \frac{1}{2}\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}} \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} \right) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}} \left(1 + a^2 + \frac{1}{4}a(-2a - 2\sqrt{a^2 + 4}) \right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{-2a - 2\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2a - 2\sqrt{a^2 + 4}} \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} \right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{-2a - 2\sqrt{a^2 + 4}} \left(1 + a^2 + \frac{1}{4}a(-2a - 2\sqrt{a^2 + 4}) \right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

O autovalor relativo à variedade instável é $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2 + 4}}$. Seu respectivo autovetor pode ser descrito em função de λ como:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 = (\lambda^2 + a, \lambda^3 + a\lambda, -\lambda - a(\lambda^3 + a\lambda), 1) \quad (3.6)$$

Uma outra expressão para o autovetor pode ser obtida através do polinômio característico 3.5:

$$\lambda^4 + a\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.7)$$

$$\lambda^4 + a\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^3 + a\lambda - \frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + a\lambda = \frac{1}{\lambda} \quad (3.8)$$

Ela é mais eficiente para pequenos valores de λ . Substituindo 3.7 e 3.8 em 3.6 obtemos:

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}, \frac{-1}{\lambda^3}, 1 \right) \quad (3.9)$$

O sistema 3.3 possui a reversibilidade $Q(u, v, p_u, p_v) = (u, -v, -p_u, p_v)$, cujo conjunto de pontos fixos é $\chi = \{(u, v, p_u, p_v) \mid v = p_u = 0\}$.

O conjunto Φ da interseção do nível de energia zero $\{H \equiv 0\}$ com a seção de Poincaré $\{p_u = 0\}$ é representado analiticamente pela equação $\frac{p_v^2}{2} + \frac{av^2}{2} + \frac{u^2}{2} - F(u, b) = 0$ e simbolicamente pela figura:

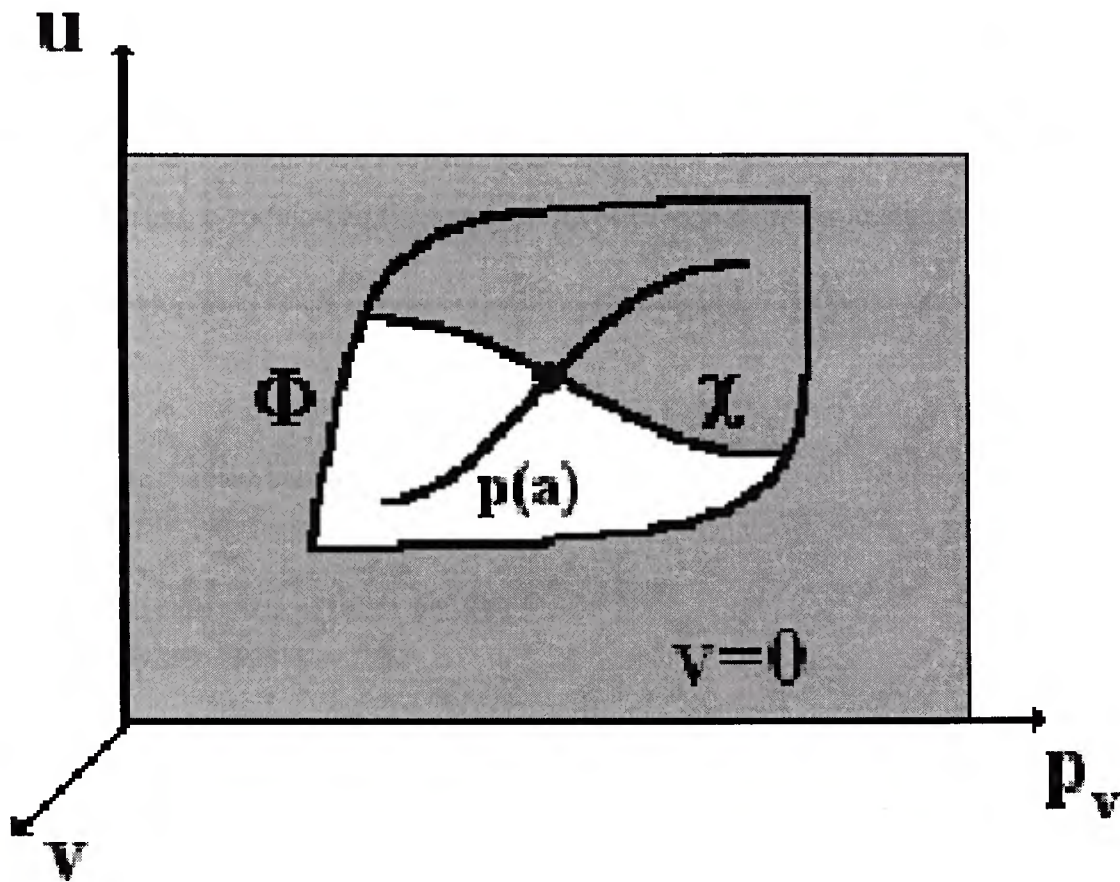


Figura 3.1: Representação gráfica do algoritmo

onde $p(a)$ é a interseção de uma solução do sistema 3.3 com o conjunto Q . Esperamos, dada a dependência contínua em relação aos parâmetros (a, b) que, para b fixo e variando o valor de a , $p(a)$ intercepte a seção de Poincaré $\{v = 0\}$. Desta forma determinaremos para quais parâmetros a respectiva solução intercepte o conjunto χ de pontos fixos da reversibilidade, fato que caracteriza uma órbita homoclínica (ver Teorema 1 do capítulo anterior).

Resumindo, nossa estratégia consiste em:

- Linearizar o sistema 3.3 na origem.
- Determinar o autovalor e autovetor relativos à variedade instável (λ e v_i)

- Após normalizar o autovetor v_i , determinar um múltiplo com "energia zero", isto é, $\|H(\varepsilon v_i)\| \leq 10^{-5}$.
- Dado um valor fixo para b , variar o parâmetro a e integrar o sistema 3.3 com a condição inicial do item anterior, verificando a cada passo o valor da energia.
- Quando p_u trocar de sinal, interromper a integração e gravar o valor de v , avançando para o próximo valor de a .
- Quando os valores v gravados trocarem de sinal, exibir os respectivos (a, b) como valores homoclínicos.

Em Delphi, a codificação (incompleta) da estratégia pode ser analisada a seguir:

```

b:=bi;
qvh:=0;

//loop do parâmetro b
while b<=bf do
begin
  EDITSaidaB.text:=floattostr(b);
  GBMensagem.update;
  v:=0;

  //loop do parâmetro a
  a:=ai;
  while a<=af do
  begin
    EDITSaidaA.text:=floattostr(a);
    EDITStatus.text:='';
    EditErro.text:='';
    GBMensagem.update;

    // Calcula autovalor relativo a variedade instável:
    eigen:=sqrt(-2*a+2*sqrt(power(a,2)+4))/2 ;

    // Calcula autovetor relativo a variedade instável:
    x[1]:=1/power(eigen,2);
    x[2]:=1/eigen;
    x[3]:=-1/power(eigen,3);
  end;
end;

```

```

x[4]:=1;

// Determina um múltiplo do autovetor unitário com módulo especificado:
modulo:=sqrt(power(x[1],2)+power(x[2],2)+power(x[3],2)+power(x[4],2));
for cont:=1 to 4 do x[cont]:=x[cont]*(limite/modulo);

//Exibe energia do novo autovetor
editenergia.text:=floattostr(abs(HAMILTON(x,a,b)));

n:=1; //inicia número de iterações

//Enquanto o número de iterações for menor que o limite
while n<=lim_int do
begin

    //Controle da energia de x:
    if abs(HAMILTON(x,a,b))>limite then
    begin
        editerro.text:='Energia alta !';
        n:=lim_int; //encerra iterações
    end;

    //Método Runge-Kutta de 4 ordem para  $x'=f(x)$  com  $x(0)=0$ :
    //Cálculo de k1:

    k1[1]:=h*CV(x,a,b)[1];
    k1[2]:=h*CV(x,a,b)[2];
    k1[3]:=h*CV(x,a,b)[3];
    k1[4]:=h*CV(x,a,b)[4];

    //Cálculo de k2:
    for cont:=1 to 4 do xa[cont]:=x[cont]+k1[cont]/2;
    k2[1]:=h*CV(xa,a,b)[1];
    k2[2]:=h*CV(xa,a,b)[2];
    k2[3]:=h*CV(xa,a,b)[3];
    k2[4]:=h*CV(xa,a,b)[4];

    //Cálculo de k3:
    for cont:=1 to 4 do xa[cont]:=x[cont]+k2[cont]/2;

```

```

k3[1]:=h*CV(xa,a,b)[1];
k3[2]:=h*CV(xa,a,b)[2];
k3[3]:=h*CV(xa,a,b)[3];
k3[4]:=h*CV(xa,a,b)[4];

//Cálculo de k4:
for cont:=1 to 4 do xa[cont]:=x[cont]+k3[cont];
k4[1]:=h*CV(xa,a,b)[1];
k4[2]:=h*CV(xa,a,b)[2];
k4[3]:=h*CV(xa,a,b)[3];
k4[4]:=h*CV(xa,a,b)[4];

for cont:=1 to 4 do
xa[cont]:=x[cont]+(k1[cont]+2*k2[cont]+2*k3[cont]+k4[cont])/6;

//Se pu (ou x[3]) muda de sinal encerra as iterações e
//verifica se v (ou x[2]) também mudou de sinal.
//Se v mudou de sinal a,b é valor homoclínico.
if x[3]*xa[3]<0 then
begin
  EDITStatus.text:='PU trocou de sinal !';

  if v*xa[2]<0 then
  begin
    qvh:=qvh+1;
    EDITQVH.text:=inttostr(qvh);
    str(a:10:3, astr);
    str(b:10:3, bstr);
    writeln(arq, astr+' '+bstr);
  end;

  v:=xa[2];      //atualização de v
  n:=lim_int;    //encerra as iterações

end;

for cont:=1 to 4 do x[cont]:=xa[cont]; //atualização de x
n:=n+1;

```

```

end;          //fim das iterações

a:=a+inc;

end;          //fim do loop para o parâmetro a

b:=b+inc;

end;          //fim do loop para o parâmetro b
*****

```

A codificação completa para nosso modelo de aplicação de solitons em presença de tensão superficial encontra-se no apêndice A deste trabalho.

Para verificarmos a eficiência de nosso algoritmo, utilizaremos dois modelos obtidos através do método do Prof. Toland encontrado em [48], que descreve o procedimento para se construir equações do tipo 3.1 com uma órbita ϕ homoclínica ao ponto de equilíbrio $u = 0$, a partir de uma EDO de segunda ordem, que resumiremos abaixo.

Sejam $g(u)$ uma função analítica, $c \neq 0$ uma constante e suponha que

$$u'' - c^2 u + g(u) = 0 \quad (3.10)$$

possua uma solução ϕ homoclínica a $u = 0$.

Denotando por G a primitiva de g , $G(0) = 0$, multiplicando 3.10 por u' e integrando, temos que ϕ também satisfaz a equação:

$$(u')^2 - c^2 u^2 + 2G(u) = 0. \quad (3.11)$$

Diferenciando 3.10 duas vezes temos:

$$u^{iv} - c^2 u'' + (u')^2 g''(u) + u'' g'(u) = 0. \quad (3.12)$$

Utilizando as equações 3.10 e 3.11, podemos eliminar u' e u'' dos últimos dois termos de 3.12, obtendo:

$$u^{iv} - c^2 u'' + [c^2 u^2 - 2G(u)]g''(u) + [c^2 u - g(u)]g'(u) = 0. \quad (3.13)$$

Multiplicando 3.10 por c^{-2} e adicionando à 3.13 obtemos:

$$u^{iv} + \underbrace{(c^{-2} - c^2)}_a u'' - u + \underbrace{\{c^{-2}g(u) + [c^2u^2 - 2G(u)]g''(u) + [c^2u - g(u)]g'(u)\}}_{f(u,b)} = 0.$$

que é uma equação do tipo 3.1 com uma órbita ϕ homoclínica ao equilíbrio $u = 0$.

Seguindo estes passos construiremos, nos próximos capítulos, dois modelos para teste do nosso algoritmo. Escolhemos as órbitas homoclínicas utilizadas como elemento essencial dos métodos perturbativos para solitons oriundos das equações KDV (ver [11] e [31]); $u(x) = \text{sech}^2(x)$ e $u(x) = \text{sech}(x)$. Para a construção, será necessário o uso das identidades:

$$\frac{d}{dx} \text{sech}(x) = -\text{sech}^2(x) \sinh(x) \quad (3.14)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad (3.15)$$

Iremos aplicar a ferramenta computacional na investigação destes modelos para os quais já conhecemos a existência de solitons em determinados parâmetros (a, b) , esperando a confirmação das informações analíticas. Depois, daremos prosseguimento a análise de sistemas mais complexos que ainda não foram tratados de forma geral pela literatura, com o intuito de caracterizar a bifurcação e dispersão de solitons em intervalos de parâmetros bem mais significativos do que os casos particulares encontrados em nossas referências.

CAPÍTULO 4

O Modelo baseado no Soliton $u(x) = \operatorname{sech}^2(x)$

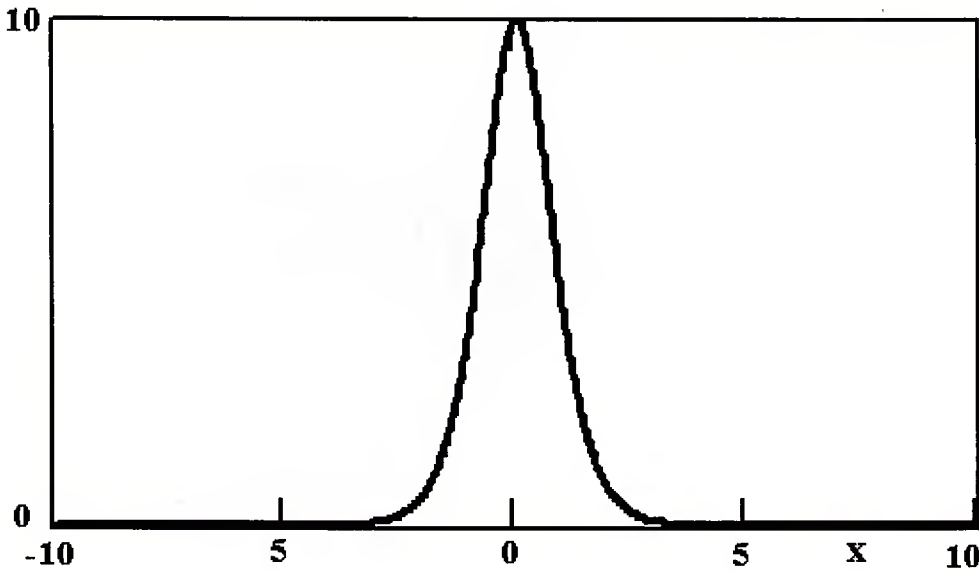


Figura 4.1: Soliton $u(x) = \operatorname{sech}^2(x)$.

A partir de $u(x) = \operatorname{sech}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ que é homoclínica a $u = 0$, construiremos uma equação modelo pelos métodos citados no capítulo anterior. A escolha desta função tem origem histórica, pois é solução das equações de KDV, Boussinesq e Rayleigh (respectivamente 1.1, 1.8 e 1.9).

Aplicando-se 3.14 e 3.15:

$$u'(x) = -2\operatorname{sech}^3(x)\sinh(x).$$

$$u''(x) = \underbrace{6\operatorname{sech}^4(x)}_{u^2} \underbrace{\sinh^2(x)}_{(u^{-1}-1)} - \underbrace{2\operatorname{sech}^2(x)}_u.$$

Logo:

$$u'' - 4u + 6u^2 = 0. \tag{4.1}$$

Multiplicando 4.1 por u' e integrando, obtemos a constante de movimento:

$$H(u, u') = \frac{(u')^2}{2} - \underbrace{2u^2 + 2u^3}_{V(u)} = E = cte. \quad (4.2)$$

Observando a superfície de energia (figura 4.2) ou curvas de nível para E (figura 4.3), encontramos uma órbita homoclínica para $E = 0$ que pode ser compreendida da seguinte forma.

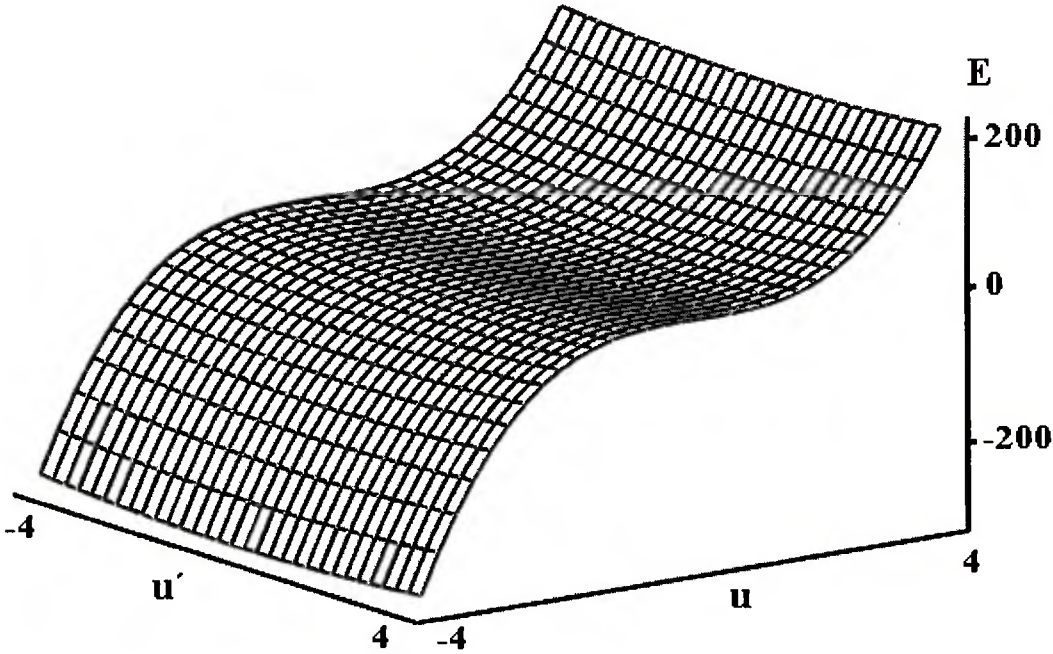


Figura 4.2: Superfície de Energia para $E = \frac{(u')^2}{2} - 2u^2 + 2u^3$.

No gráfico do potencial $V(u)$ (figura 4.4) encontrado em 4.2 para $E = 0$, observamos a existência de raízes. Só obtemos movimento, classicamente, quando $V(u) < E = 0$ pois $\frac{(u')^2}{2} > 0$ para todo x . As raízes de $V(u)$ são pontos críticos no plano de fase $u \times u'$ que implicam na existência da órbita homoclínica em questão.

Assim, para o nível de energia $E = 0$, obtemos da equação 4.2:

$$(u')^2 - 4u^2 + 4u^3 = 0 \quad (4.3)$$

Diferenciando 4.1 duas vezes obtemos:

$$u^{iv} - 4u'' + 12[(u')^2 + uu''] = 0. \quad (4.4)$$

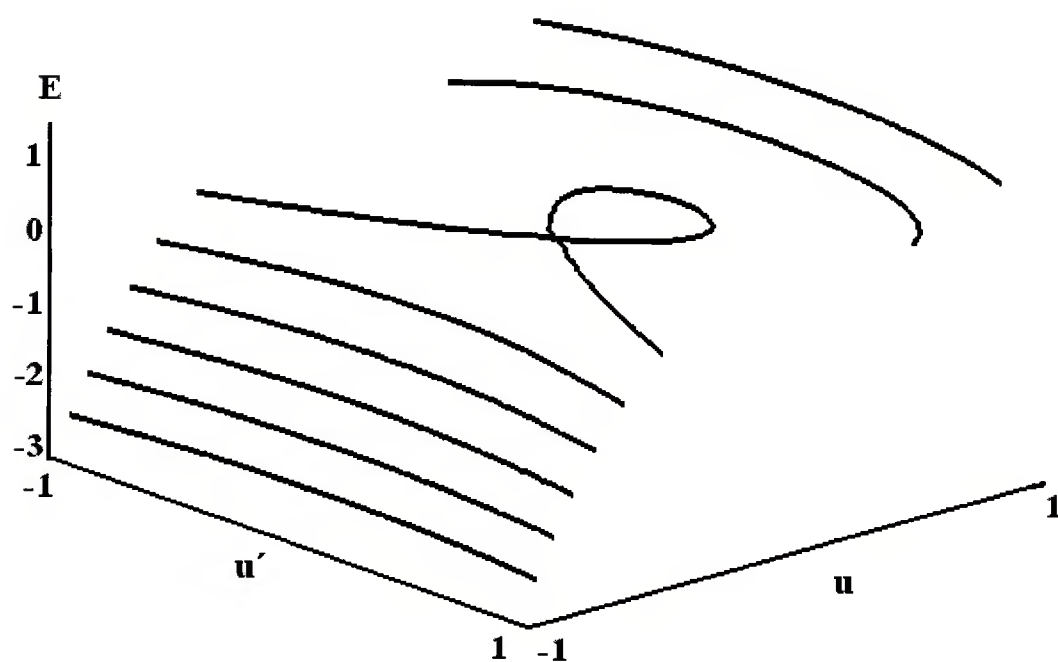


Figura 4.3: Curvas de nível de $E = \frac{(u')^2}{2} - 2u^2 + 2u^3$.

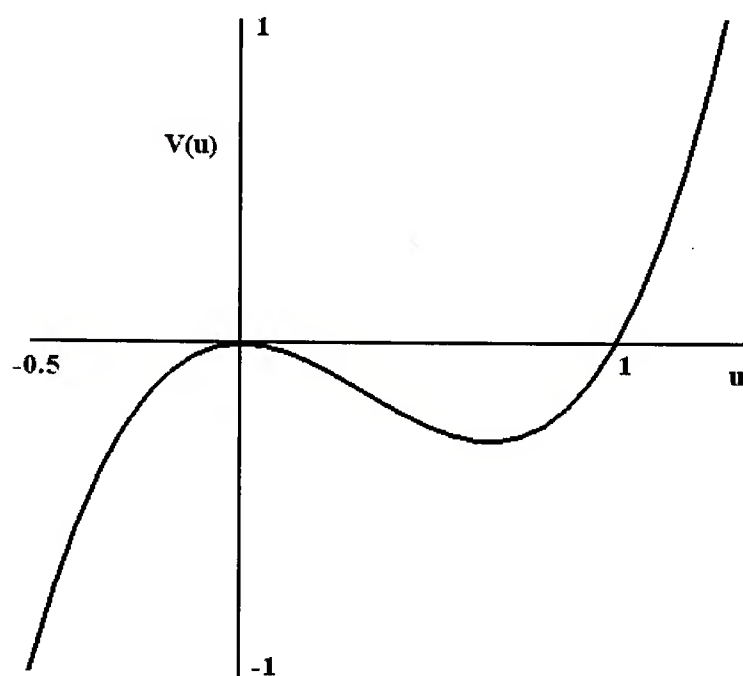


Figura 4.4: Potencial $V(u) = -2u^2 + 2u^3$.

Obtemos de 4.1:

$$uu'' = 4u^2 - 6u^3. \quad (4.5)$$

Temos de 4.3:

$$(u')^2 = 4u^2 - 4u^3. \quad (4.6)$$

Substituindo 4.5 e 4.6 em 4.4, resulta:

$$u^{iv} - 4u'' + 12(8u^2 - 10u^3) = 0. \quad (4.7)$$

Multiplicando 4.1 por $\frac{1}{4}$ e adicionando à 4.7, obtemos:

$$u^{iv} - \frac{15}{4}u'' - u + 3\left(\frac{65}{2}u^2 - 40u^3\right) = 0.$$

Consideraremos, então, o modelo:

$$u^{iv} + au'' - u + f(u, b) = 0 \quad (4.8)$$

onde $f(u, b) = b\left(\frac{65}{2}u^2 - 40u^3\right)$, que possui uma órbita homoclínica a $u = 0$, que é o soliton $u(x) = \text{sech}^2(x)$ para o valor homoclínico $(a, b) = \left(-\frac{15}{4}, 3\right)$.

Aplicando nosso algoritmo, confirmamos a existência deste soliton para 4.8 com parâmetros próximos (precisão de 10^{-5}) de $(a, b) = \left(-\frac{15}{4}, 3\right)$ e ainda encontramos uma infinidade de outros valores homoclínicos observados na figura 4.5.

Ainda observamos uma relação explícita entre os parâmetros a e b indicando, na verdade, a existência de um único parâmetro que governa o surgimento de solitons para este modelo. Esta hipótese foi apontada na introdução deste trabalho.

Uma outra forma de verificarmos este fenômeno é fixando o parâmetro $b = 3$ e, toda vez que v trocar de sinal, plotamos $p_u \times a$ (figura 4.6). E, próximo ao ponto $a = -3.75$ (erro de 10^{-5}), temos que $p_u = 0$, confirmando o valor homoclínico $(a, b) = \left(-\frac{15}{4}, 3\right)$.

Simulações numéricas de 4.8 nos mostram a sensibilidade dos sistemas frente à perturbação dos parâmetros (a, b) . Na figura 4.7, podemos observar a evolução do sistema para o caso do valor homoclínico $(a, b) = \left(-\frac{15}{4}, 3\right)$, correspondente ao soliton $u(x) = \text{sech}^2(x)$ e sua bifurcação, através da perturbação por um fator da ordem de 10^{-2} .

Essas pequenas modificações realizadas no valor do parâmetro a já são suficientes, neste caso, para percebermos a não-persistência dos solitons (dentro de um contexto de densidade

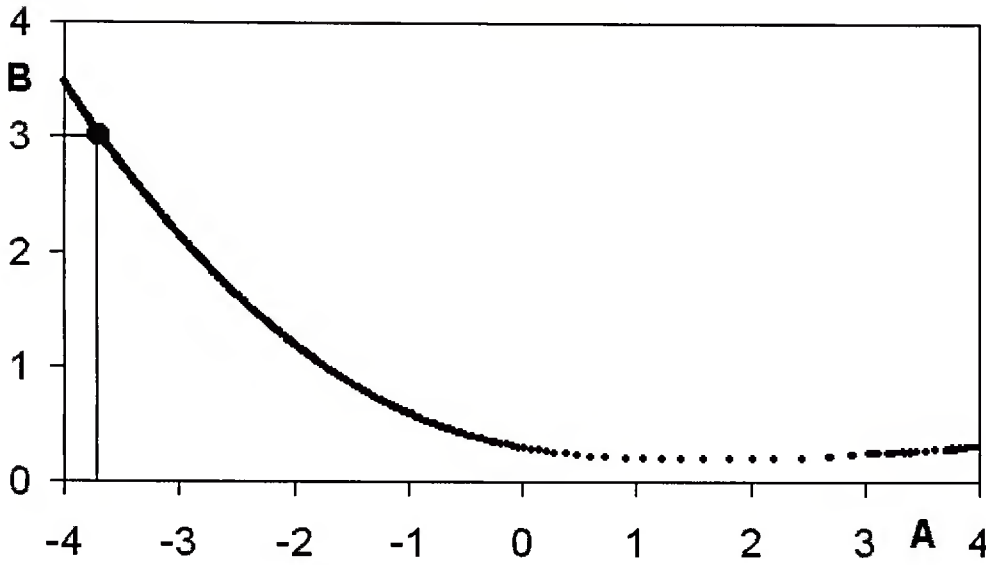


Figura 4.5: Valores homoclínicos para o modelo $\text{sech}^2(x)$.

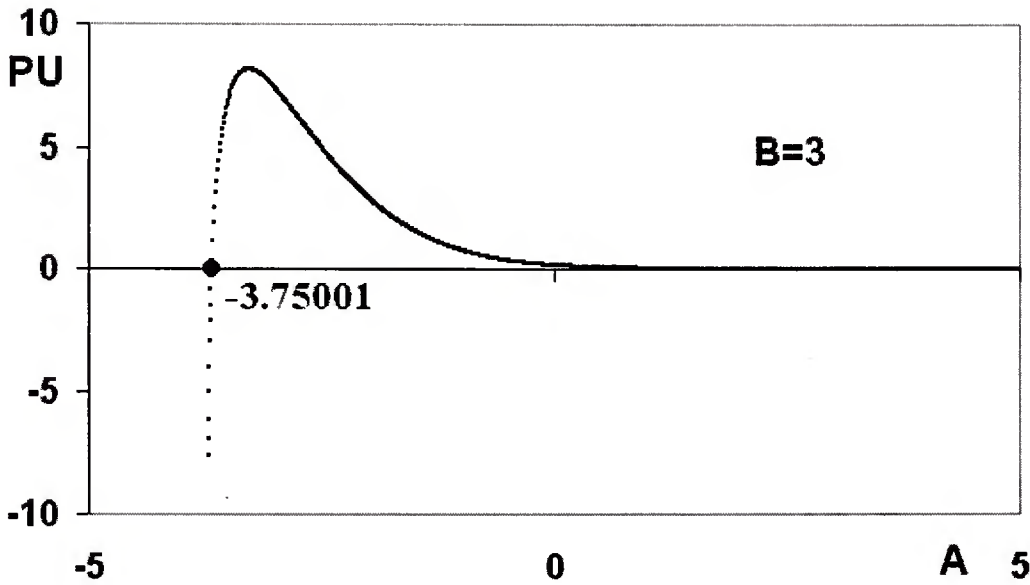


Figura 4.6: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $b = 3$.

de valores homoclínicos), fato que pode ser confirmado na figura 4.5. A não-persistência já foi observada em [47], onde o autor se refere ao sistema hamiltoniano reversível como: ou caso dos pontos isolados; ou caso de cascatas de pontos, descrevendo a densidade dos valores homoclínicos no espaço de fase (a, b) .

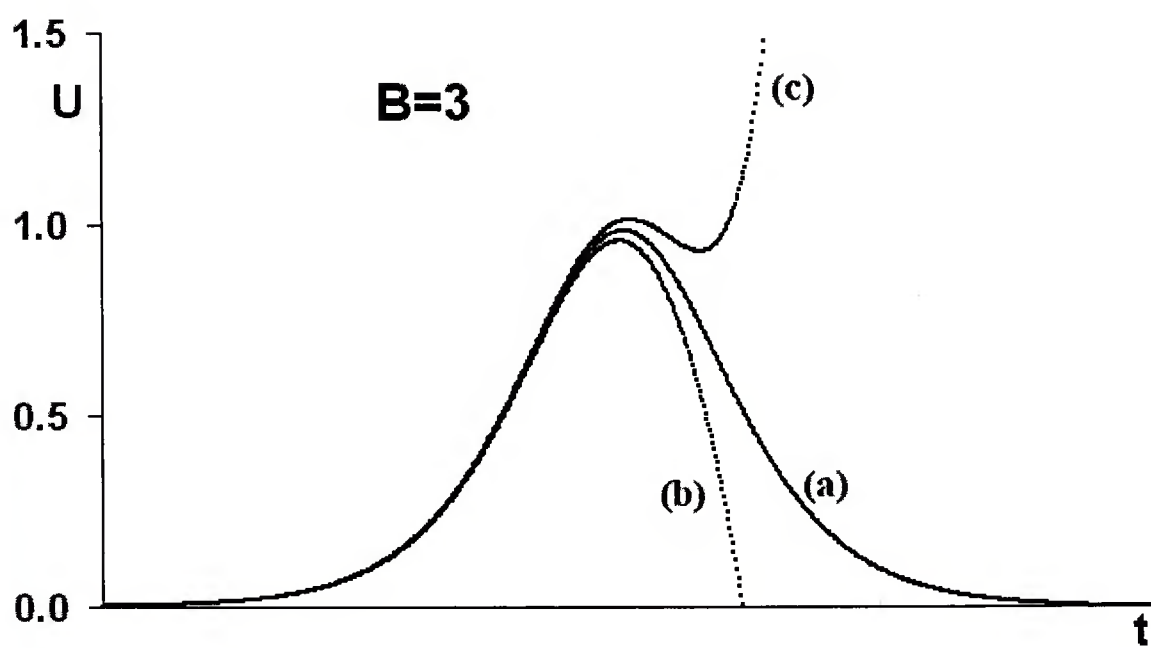


Figura 4.7: Soliton $u(x) = \text{sech}^2(x)$ (a) e sua bifurcação (b) e (c).

CAPÍTULO 5

O Modelo baseado no Soliton $u(x) = \operatorname{sech}(x)$

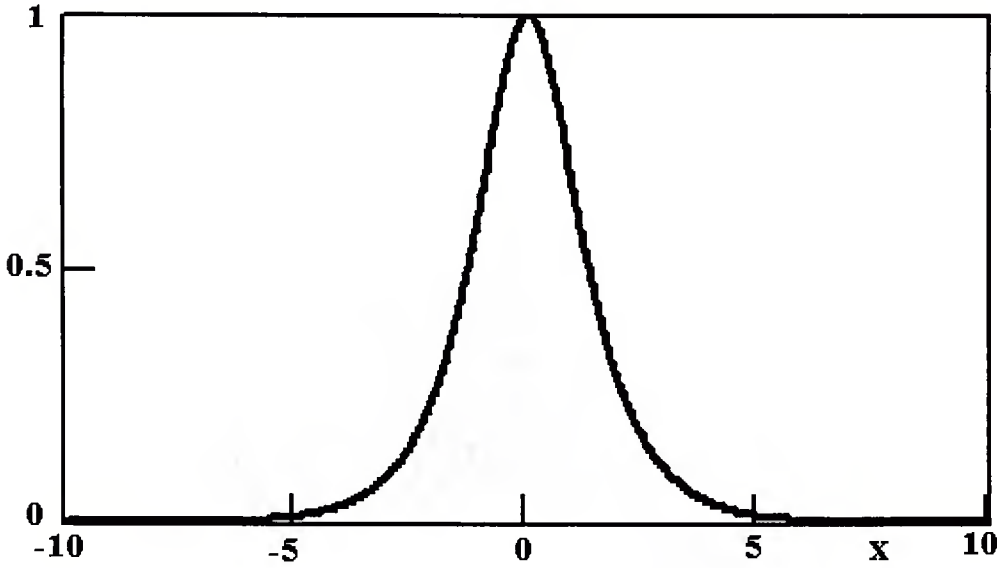


Figura 5.1: Soliton $u(x) = \operatorname{sech}(x)$.

Após estudarmos o soliton $u(x) = \operatorname{sech}^2(x)$, cuja origem histórica é muito importante, pensamos em criar um modelo em que a convergência para zero fosse menos acentuada, com o objetivo de verificar a persistência dos resultados obtidos no capítulo anterior. Chegamos, então, ao soliton $u(x) = \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$, que é homoclínica a $u = 0$ e também é citado como solução da equação KDV 1.1.

Novamente, aplicando-se 3.14 e 3.15:

$$u'(x) = -\operatorname{sech}^2(x)\sinh(x).$$

$$\begin{aligned} u''(x) &= -2\operatorname{sech}(x)[- \operatorname{sech}^2(x)\sinh(x)]\sinh(x) - \operatorname{sech}^2(x)\cosh(x) = \\ &= \underbrace{2\operatorname{sech}^3(x)}_{u^3} \underbrace{\sinh^2(x)}_{u^{-2}-1} - \underbrace{\operatorname{sech}(x)}_u. \end{aligned}$$

Logo:

$$u'' - u + 2u^3 = 0. \quad (5.1)$$

Utilizando o mesmo processo do modelo anterior, multiplicamos 5.1 por u' e integramos, obtendo a constante de movimento:

$$H(u, u') = \frac{(u')^2}{2} - \underbrace{\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}}_{V(u)} = E = cte. \quad (5.2)$$

Novamente, observando a superfície de energia (figura 5.2) ou as curvas de nível para E (figura 5.3), encontramos uma órbita homoclínica para $E = 0$ da maneira descrita a seguir.

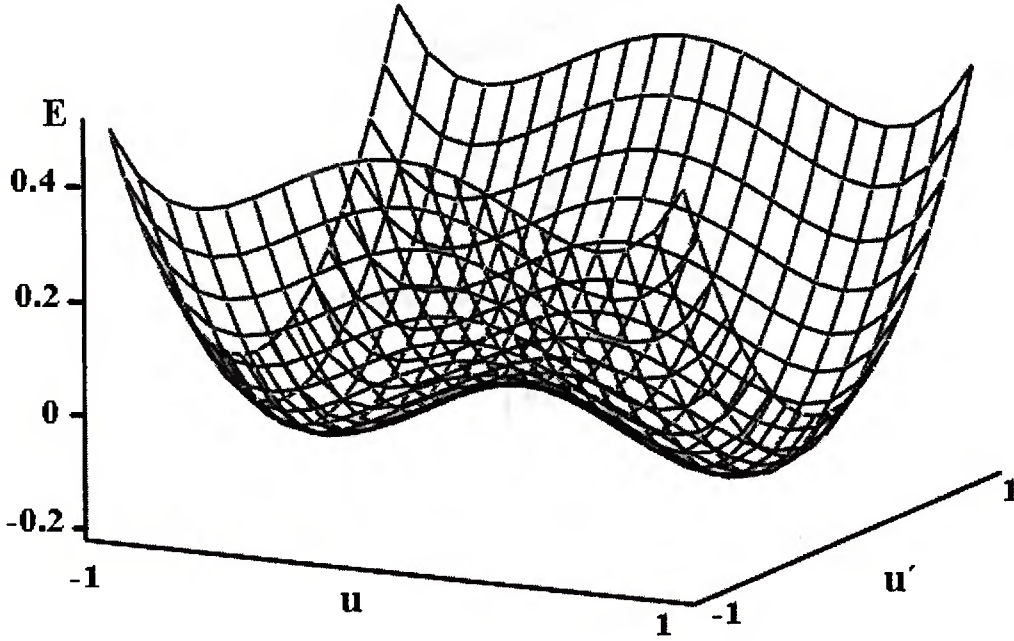


Figura 5.2: Superfície de energia para $E = \frac{(u')^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}$.

Como no modelo anterior, analisando o gráfico do potencial $V(u)$ (figura 5.4) encontrado em 5.2 para $E = 0$, observamos a existência de raízes. Classicamente, só obtemos movimento quando $V(u) < E$ pois $\frac{(u')^2}{2} > 0$ para todo x . Esse fato, novamente, garante o caráter homoclínico da órbita em questão.

Assim, para o nível de energia $E = 0$, obtemos da equação 5.2:

$$(u')^2 - u^2 + u^4 = 0. \quad (5.3)$$

Diferenciando 5.1 duas vezes obtemos:

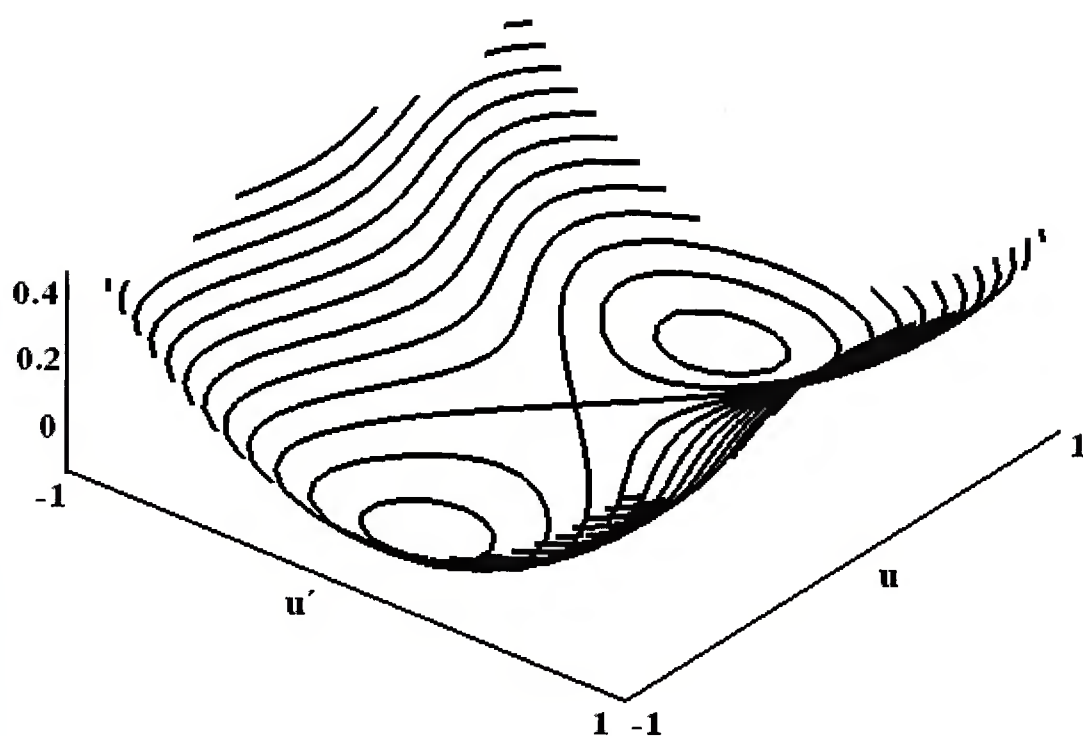


Figura 5.3: Curvas de nível de $E = \frac{(u')^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}$.

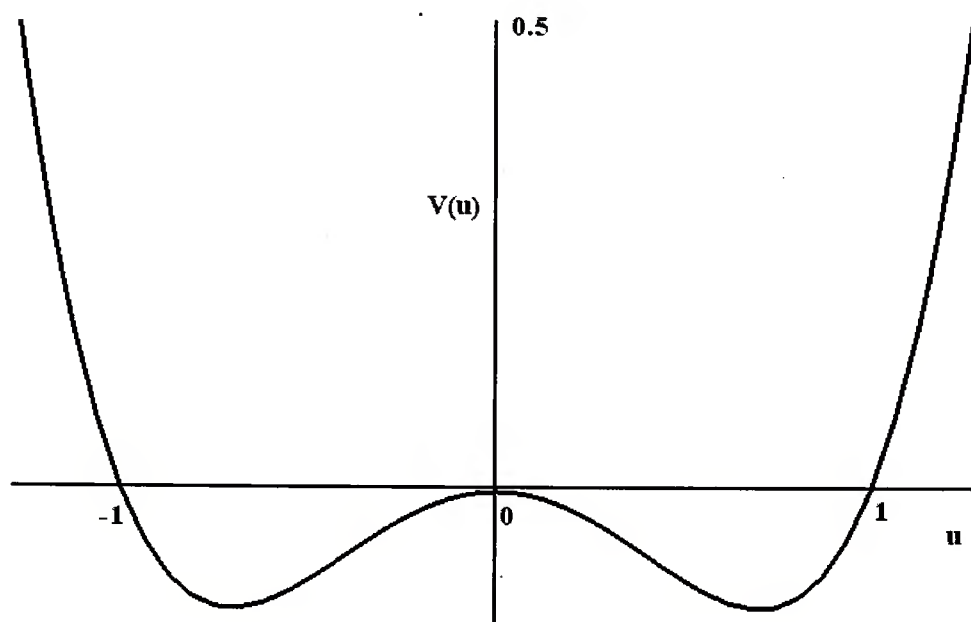


Figura 5.4: Potencial $V(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2}$.

$$u^{iv} - u'' + 6[2u(u')^2 + u^2u''] = 0. \quad (5.4)$$

Concluimos de 5.1 que:

$$u^2u'' = u^3 - 2u^5. \quad (5.5)$$

Temos de 5.3:

$$u(u')^2 = u^3 - u^5. \quad (5.6)$$

Substituindo 5.5 e 5.6 em 5.4, resulta:

$$u^{iv} - u'' + 6(3u^3 - 4u^5) = 0. \quad (5.7)$$

Multiplicando 5.1 por 2 e adicionando à 5.7, obtemos:

$$u^{iv} + u'' - 2u + 22u^3 - 24u^5 = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x' = \sqrt[4]{2}x$ obtemos:

$$2u^{iv} + a\sqrt{2}u'' - 2u + f(u, b) = 0 \quad (5.8)$$

Dividindo 5.8 por 2 e reajustando os parâmetros a e b , chegamos ao modelo:

$$u^{iv} + au'' - u + f(u, b) = 0 \quad (5.9)$$

onde $f(u, b) = b(11u^3 - 12u^5)$, que possui uma órbita homoclínica a $u = 0$ que é o soliton $u(x) = \text{sech}(x)$ para o valor homoclínico $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Aplicando nosso algoritmo, confirmamos a existência deste soliton para 5.9 com parâmetros próximos (precisão de 10^{-5}) de $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ e ainda encontramos uma infinidade de outros valores homoclínicos observados nas figuras 5.5 e 5.6 ocorrendo, mais uma vez, uma relação explícita de dependência entre os parâmetros a e b até certo ponto, para depois observarmos fenômenos de bifurcação e dispersão no espaço de parâmetros.

Como no modelo anterior, fixamos o parâmetro $b = 1$ e plotamos $p_u \times a$ (figura 5.7). E, próximo ao ponto $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (erro de 10^{-5}), temos que $p_u = 0$, confirmando o valor homoclínico $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

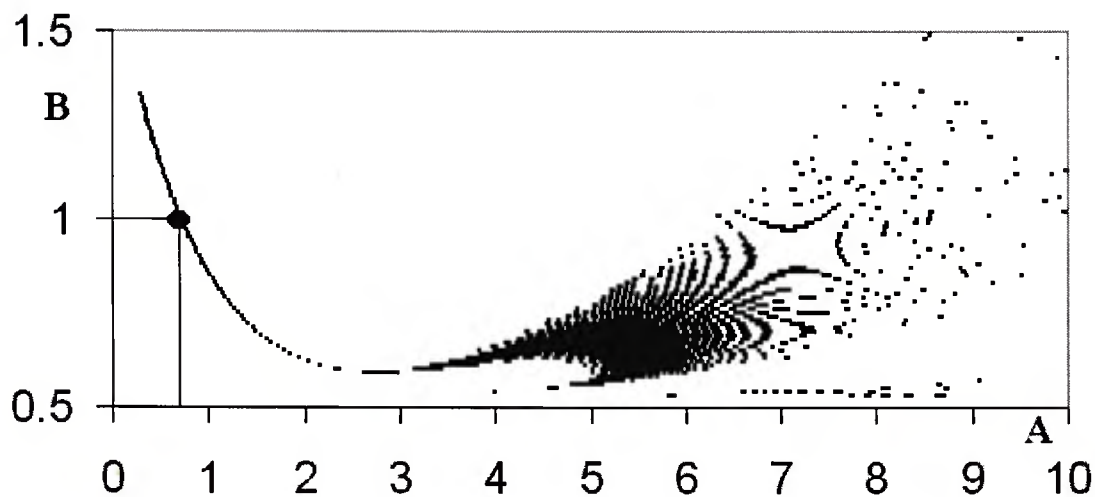


Figura 5.5: Valores homoclínicos para o modelo $sech(x)$.

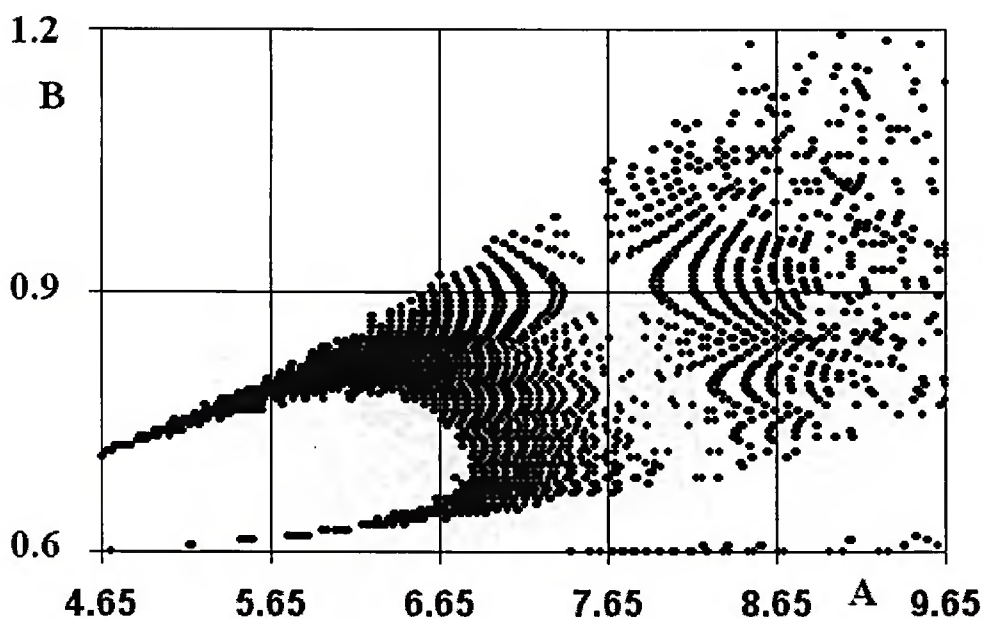


Figura 5.6: Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $sech(x)$.

Já no gráfico $p_u \times a$ para $b = 0.9$ (figura 5.8), ao na figura 5.7, observamos diversas interseções entre $a = 6.5$ e $a = 9.5$ e nenhuma a partir de $a = 9.5$, o que corresponde exatamente aos valores homoclínicos na figura 5.6 e a consequente dispersão deles para $b = 0.9$.

Na figura 5.9 observamos a bifurcação do soliton $u(x) = sech(x)$ para $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

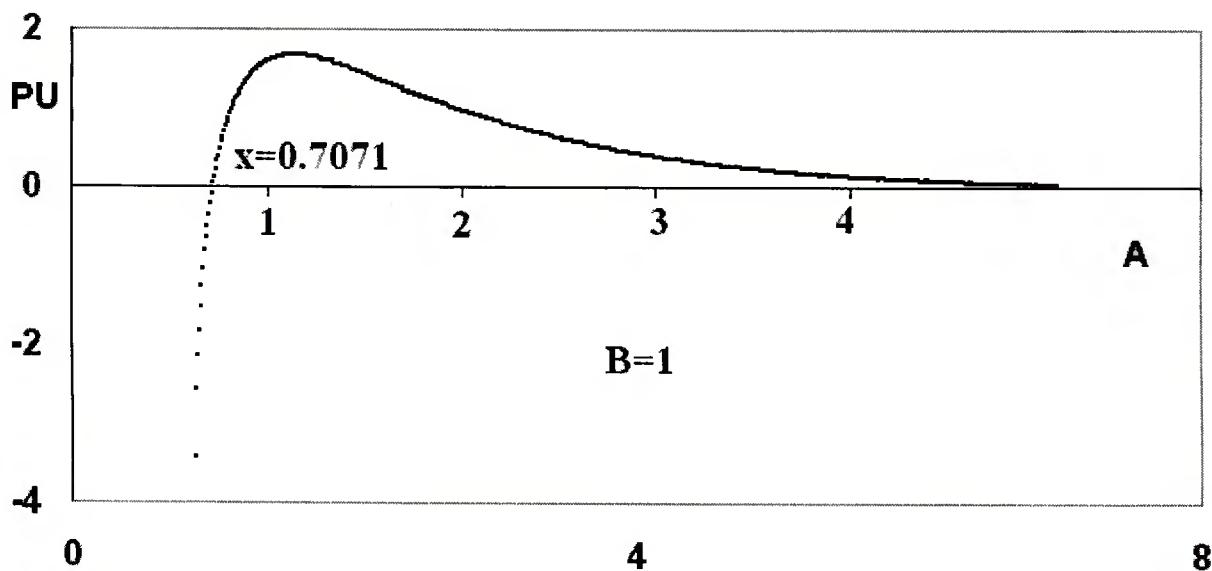


Figura 5.7: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $sech(x)$ com $b = 1$.

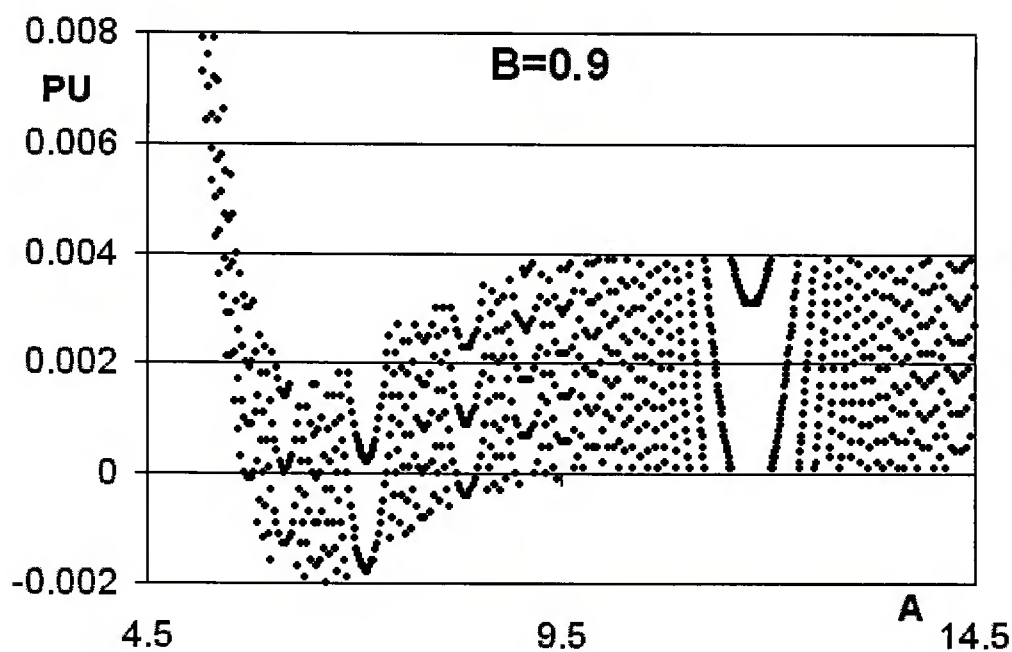


Figura 5.8: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $sech(x)$ com $b = 0.9$.

através da perturbação por um fator da ordem de 10^{-3} . Essa bifurcação é similar à do soliton $u(x) = sech^2(x)$ vista no modelo anterior.

Já na Na figura 5.10 observamos, a bifurcação de um outro soliton na região densa

da figura 5.6 para $b = 0.9$ através da perturbação por um fator da mesma ordem. O soliton obtido passa duas vezes numa vizinhança de $u = 0$, por isso é chamada de solução 2-homoclínica ou soliton de período 2. A mudança de período dos solitons em um sistema, como vimos nas figuras 5.9 e 5.10, é descrita como solitons multi-períodos e possuem diversas aplicações como, por exemplo, em [51] e [52].

Esperávamos, a princípio, uma descrição mais simples no espaço de parâmetros para este modelo, pois se tratava de um convergência mais fraca para zero, em relação ao modelo anterior. Na verdade encontramos nas figuras 5.5 e 5.6, com mais informações, o que é caracterizado por vários autores como uma "cascata" de valores homoclínicos (ver [31] e [47]), representando também um conjunto de grande densidade para a obtenção de solitons.

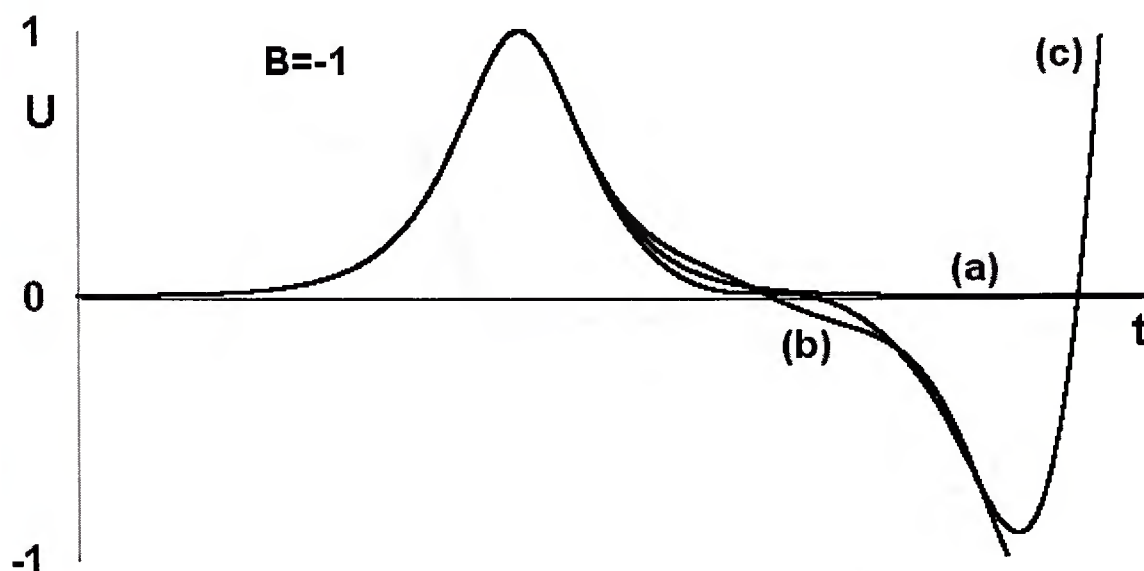


Figura 5.9: Bifurcação do soliton $u(x) = \text{sech}(x)$.

Em relação aos modelos analiticamente construídos, nos quais conhecíamos órbitas homoclínicas para certos parâmetros (a, b) , os resultados de nossa abordagem computacional foram muito promissores e, juntamente com a fundamentação teórica deste trabalho, deram origem ao artigo *Homoclinic Orbits in Reversible Hamiltonian Systems* que foi aceito para publicação no jornal *Communications on Nonlinear Science and Numerical Simulation* em maio de 2005.

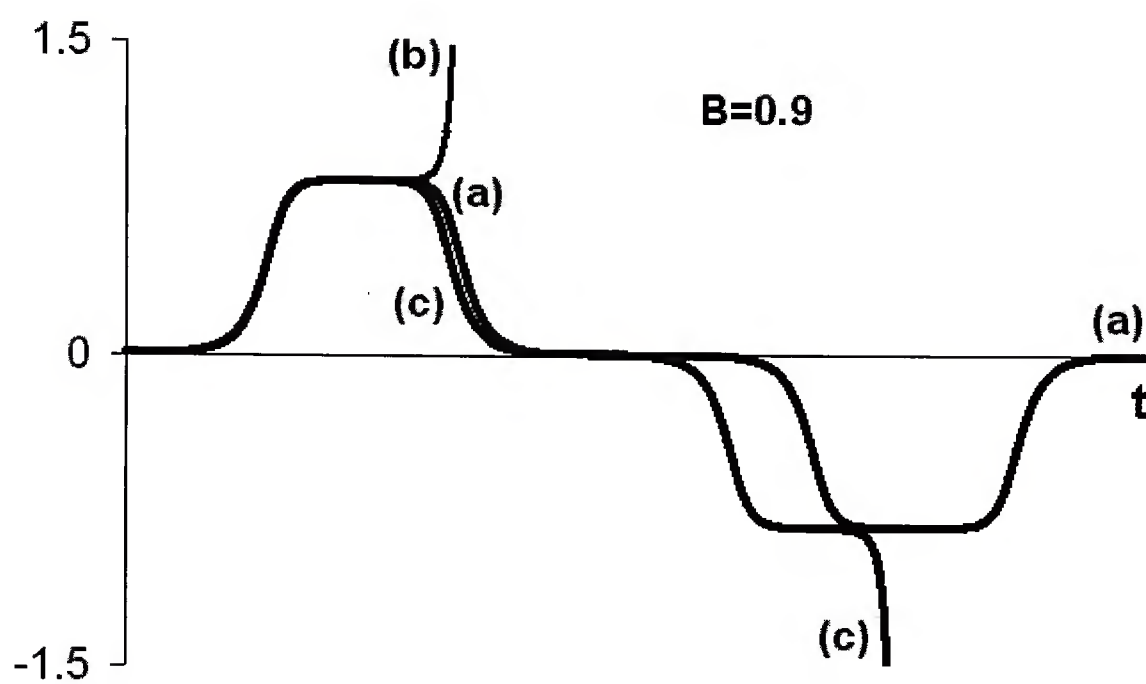


Figura 5.10: Bifurcação de um soliton para $b = 0.9$.

CAPÍTULO 6

A Equação Modelo para $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$

Após o teste da estratégia nos modelos construídos analiticamente, nos dedicamos a encontrar um modelo *original* baseado numa função analítica, cuja série de Taylor apresentasse maior complexidade que nos casos anteriores. Observando as equações:

$$u^{iv} - \frac{15}{4}u'' - u + 3\left(\frac{65}{2}u^2 - 40u^3\right) = 0 \quad (6.1)$$

$$u^{iv} + \frac{\sqrt{2}}{2}u'' - u + 11u^3 - 12u^5 = 0 \quad (6.2)$$

que foram obtidas, respectivamente, a partir dos solitons $u(x) = \operatorname{sech}^2(x)$ e $u(x) = \operatorname{sech}(x)$, observamos que:

- No modelo 6.1, $f(u, b) = b\left(\frac{65}{2}u^2 - 40u^3\right)$. Isto é, $f(u, b) = \mathcal{O}(u^2)$ e tem comportamento assintótico (em x) $f(u, b) \rightarrow u^3$.
- No modelo 6.2, $f(u, b) = b(11u^3 - 12u^5)$. Isto é, $f(u, b) = \mathcal{O}(u^3)$ e tem comportamento assintótico (em x) $f(u, b) \rightarrow u^5$.

Baseados nas equações propostas em [31], [32], [48] e nas soluções das equações de Fitzhugh-Nagumo 1.10 e de Sine-Gordon 1.11, definimos o modelo:

$$u^{iv} + au'' - u + bu - \tanh(bu) = 0 \quad (6.3)$$

Assim, $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$, cuja expansão em série de Taylor para $u = 0$, é:

$$f(u, b) = \frac{1}{3}b^3u^3 - \frac{2}{15}b^5u^5 + \frac{17}{315}b^7u^7 + \dots \quad (6.4)$$

Então, $f(u, b) = \mathcal{O}(u^3)$, como no modelo 6.2, mas seu comportamento assintótico (em x) é mais simples que os modelos anteriores, já que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh(x) = \pm 1$, como pode ser visto na figura 6.1.

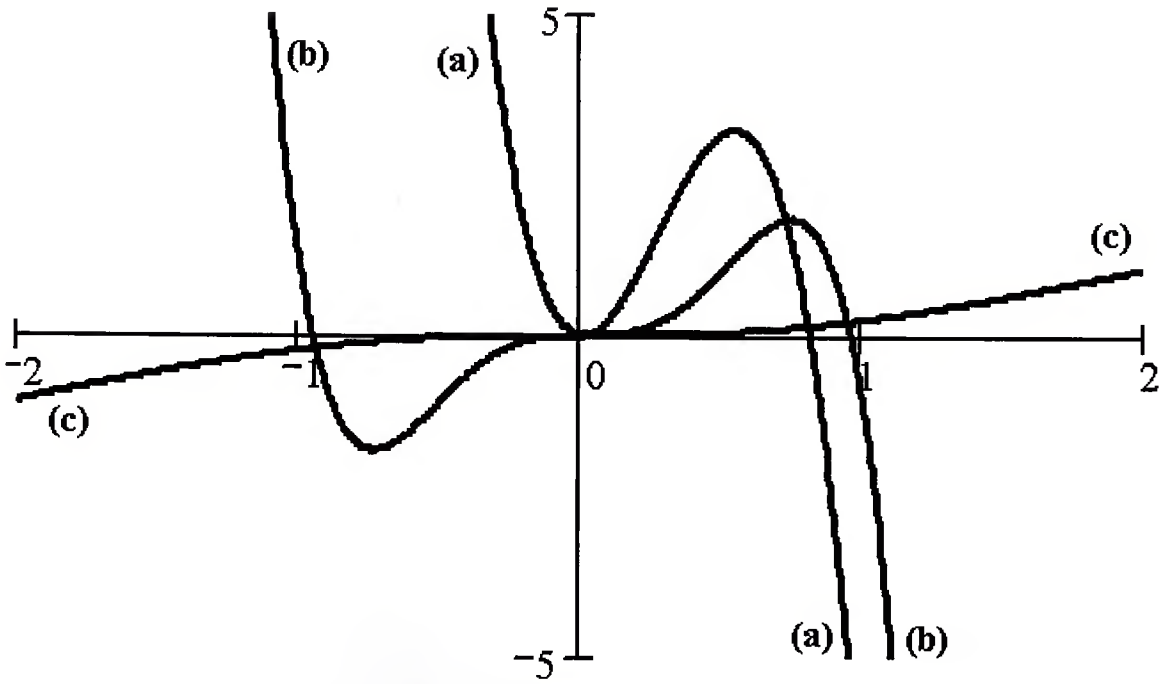


Figura 6.1: Comparação de $f(u, b)$ para os modelos 6.1 (a), 6.2 (b) e $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ (c) com $b = 1$.

Aplicando nosso algoritmo, determinamos uma infinidade de valores homoclínicos. Sua estrutura de dispersão é semelhante ao do modelo baseado no soliton $u(x) = \text{sech}(x)$, como observamos na figura 6.2 e no detalhe da figura 6.3.

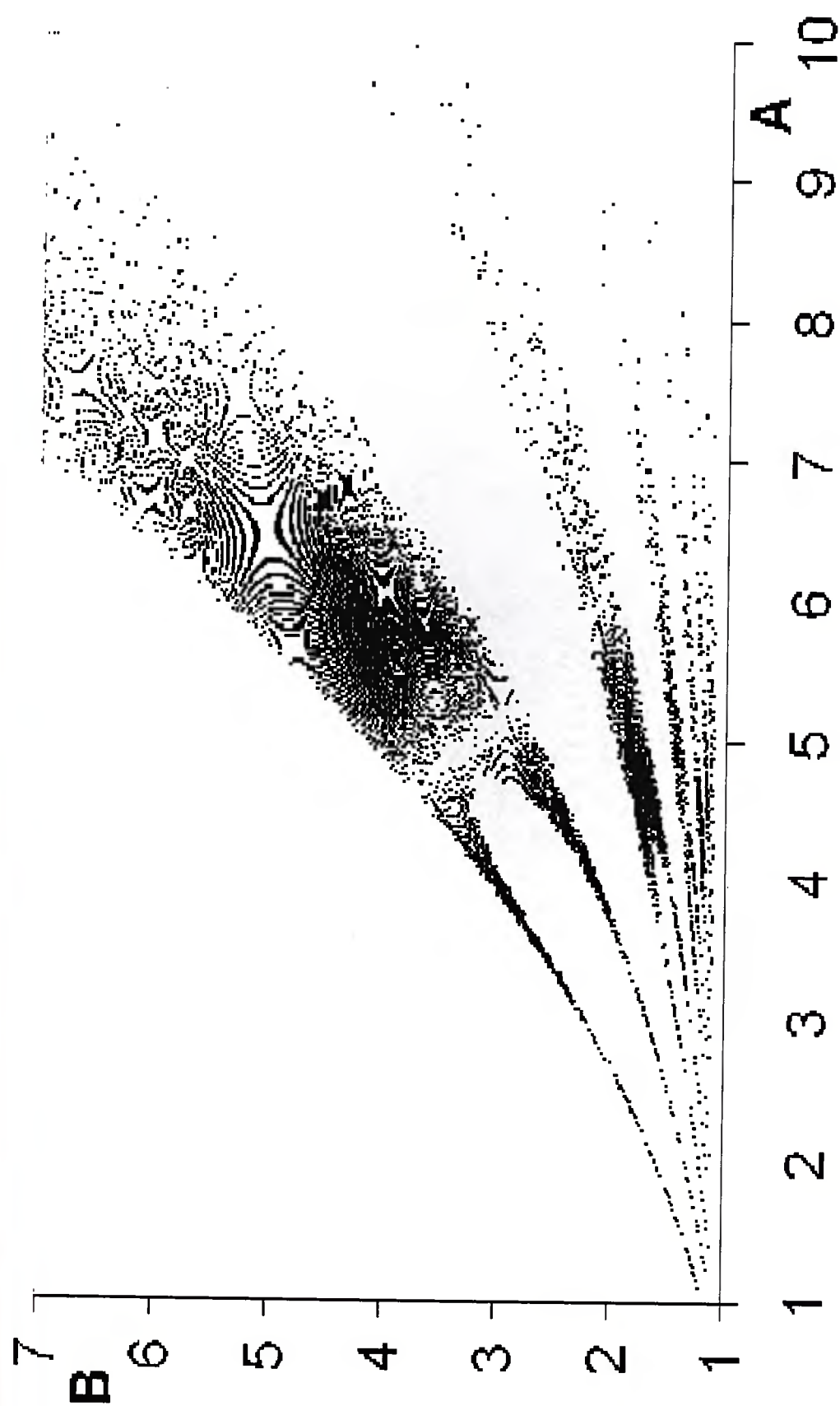


Figura 6.2: Valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$.

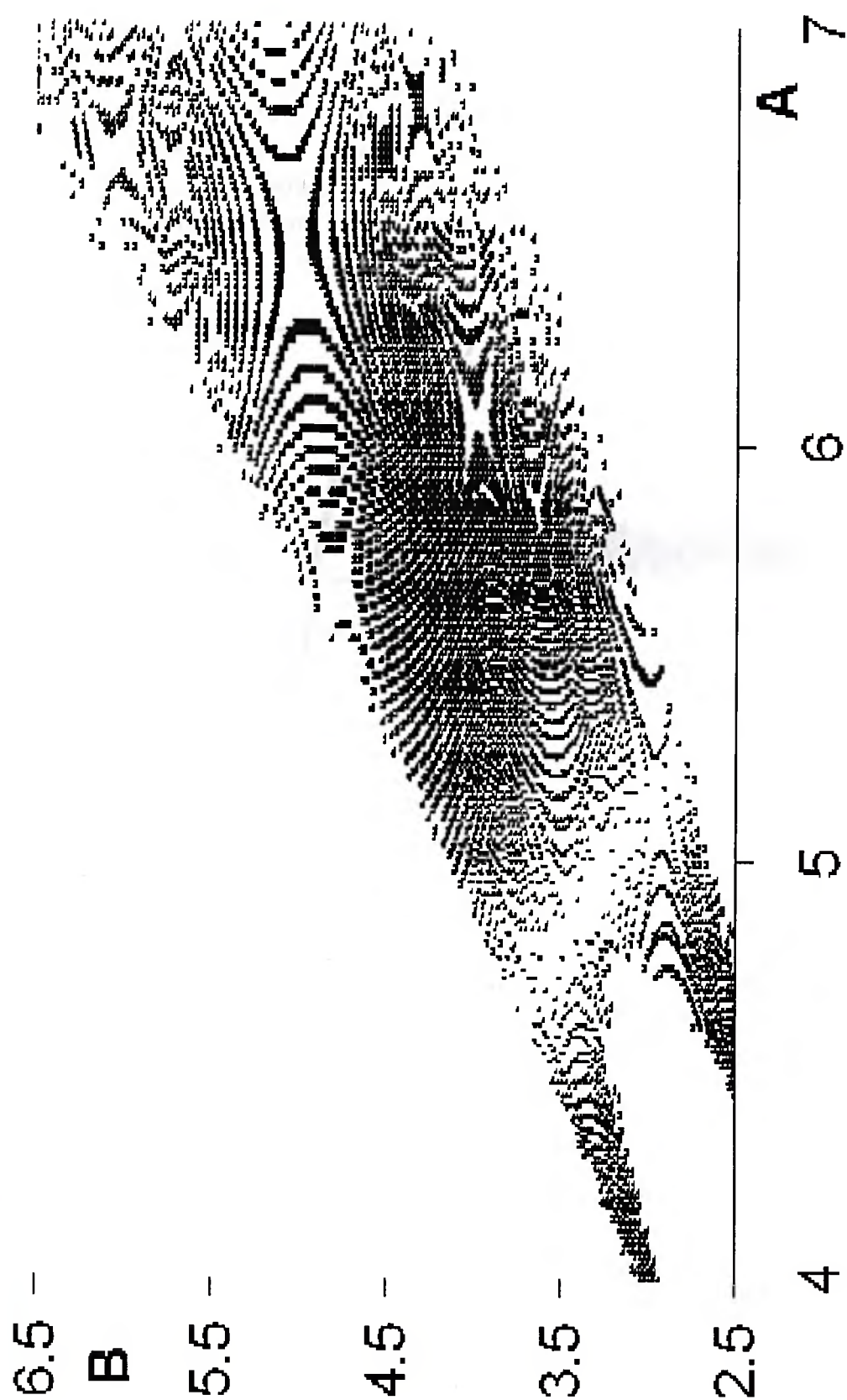


Figura 6.3: Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$.

As figura 6.2 e 6.3 apresentam, como no modelo anterior, a configuração de "cascata" de valores homoclínicos.

Nas figura 6.5, 6.8, 6.11 e 6.14, podemos confirmar a existência de parte dos valores homoclínicos detectados pelo algoritmo mostrando, respectivamente, as interseções com o eixo horizontal ($p_u = 0$) para $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$ e $a = 5$, como realizado nos modelos anteriores, ou ainda nas figuras 6.4, 6.7, 6.10 e 6.13, em que fixamos respectivamente $b = 2$, $b = 3$, $b = 4$ e $b = 5$.

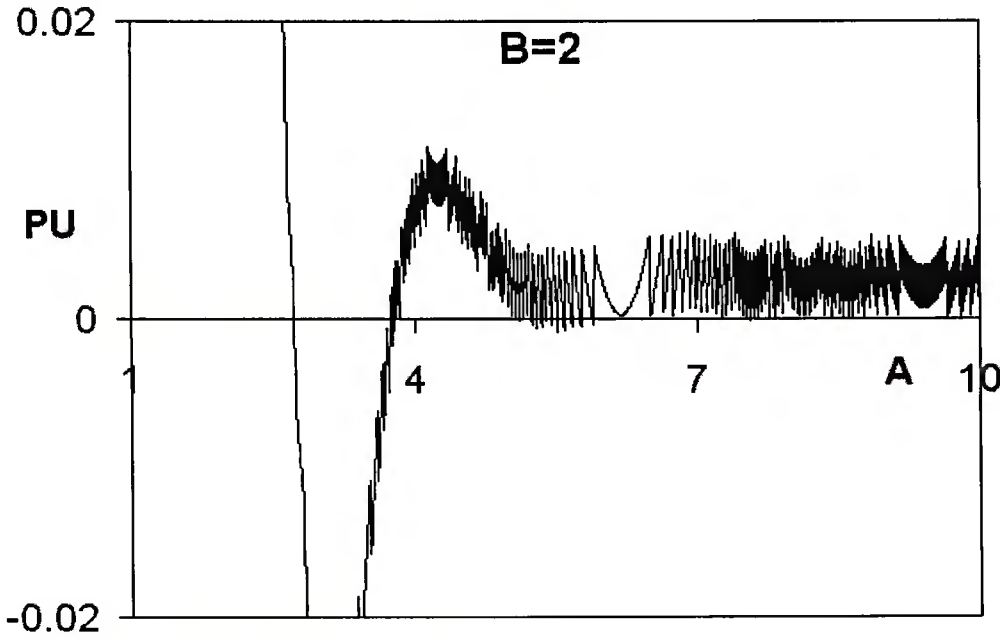


Figura 6.4: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 2$.

As bifurcações encontradas são mais complexas do que nos modelos anteriores pois, como podemos observar nas figuras 6.6, 6.9 e 6.12, encontramos solitons que representam a transição entre duas órbitas periódicas ou entre uma periódica e uma não periódica mas limitada à variedade estável do sistema, como analisado em [51] e [52] e [53].

Nas figuras 6.10 e 6.13 encontramos, respectivamente para $b = 4$ e $b = 5$, um correspondente para a região de dispersão ou "vazia" de valores homoclínicos observada nas figuras 6.3 e 6.3 na região aproximada $a < 5$ ou $a > 7$.

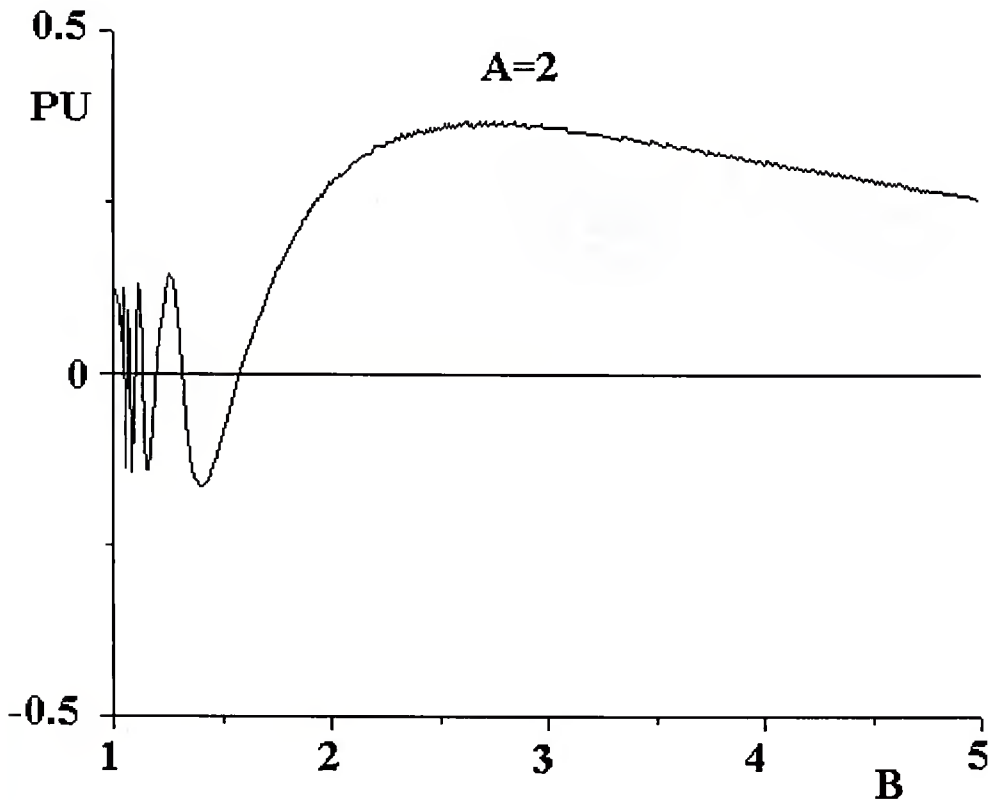


Figura 6.5: Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $a = 2$.

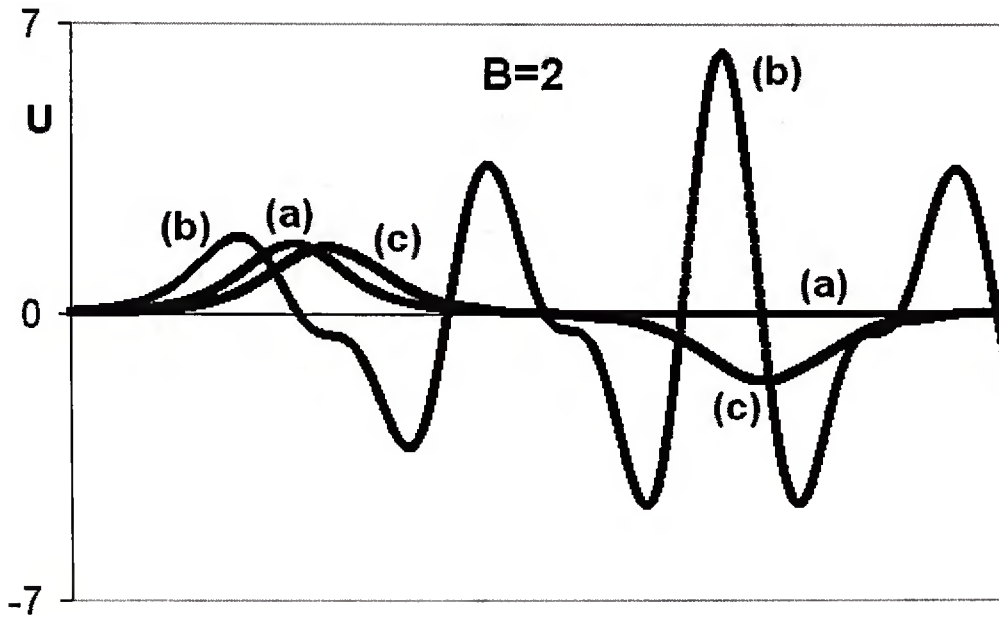


Figura 6.6: Soliton (a) e bifurcação (b) e (c) para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 2$.

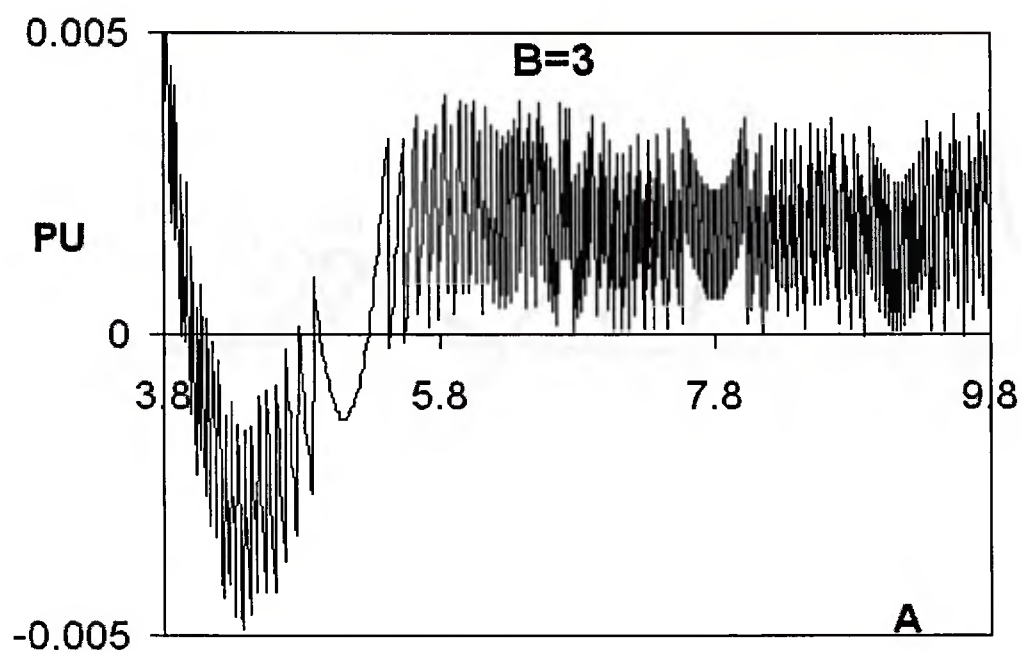


Figura 6.7: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 3$.

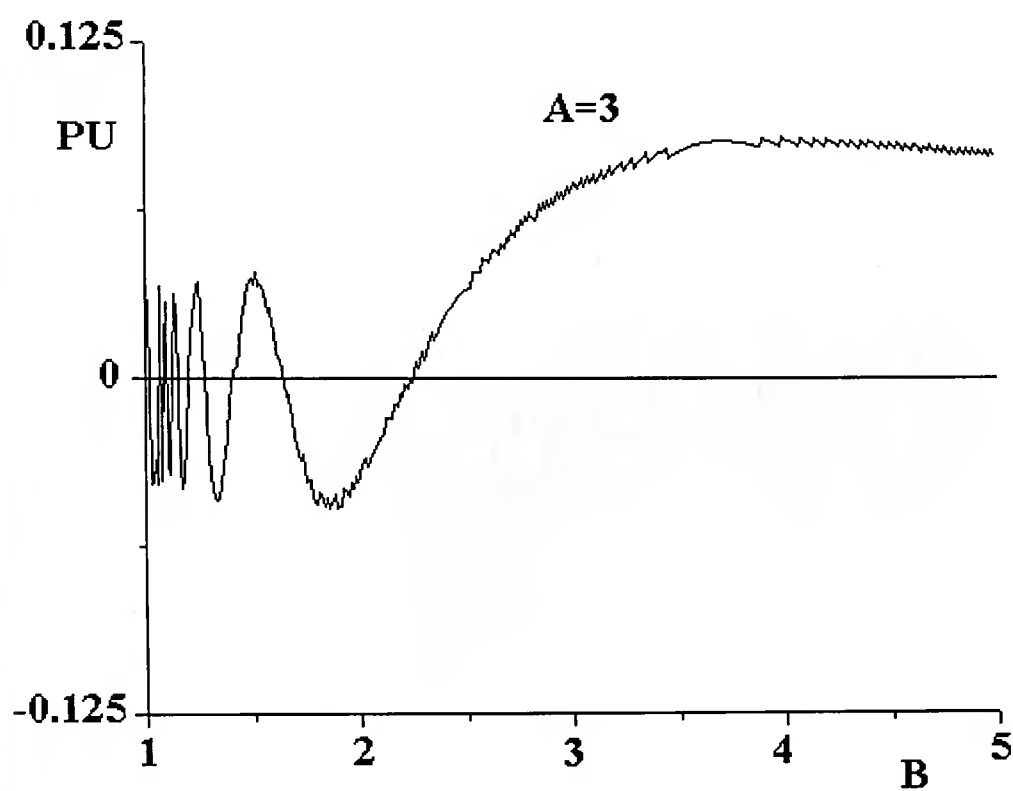


Figura 6.8: Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $a = 3$.

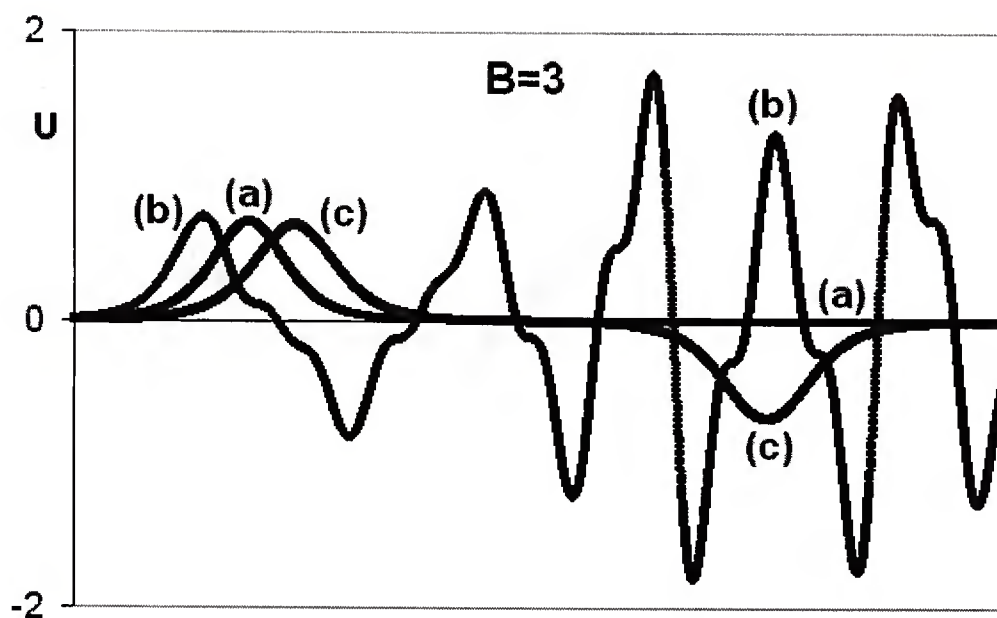


Figura 6.9: Soliton (a) e bifurcação (b) e (c) para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 3$.

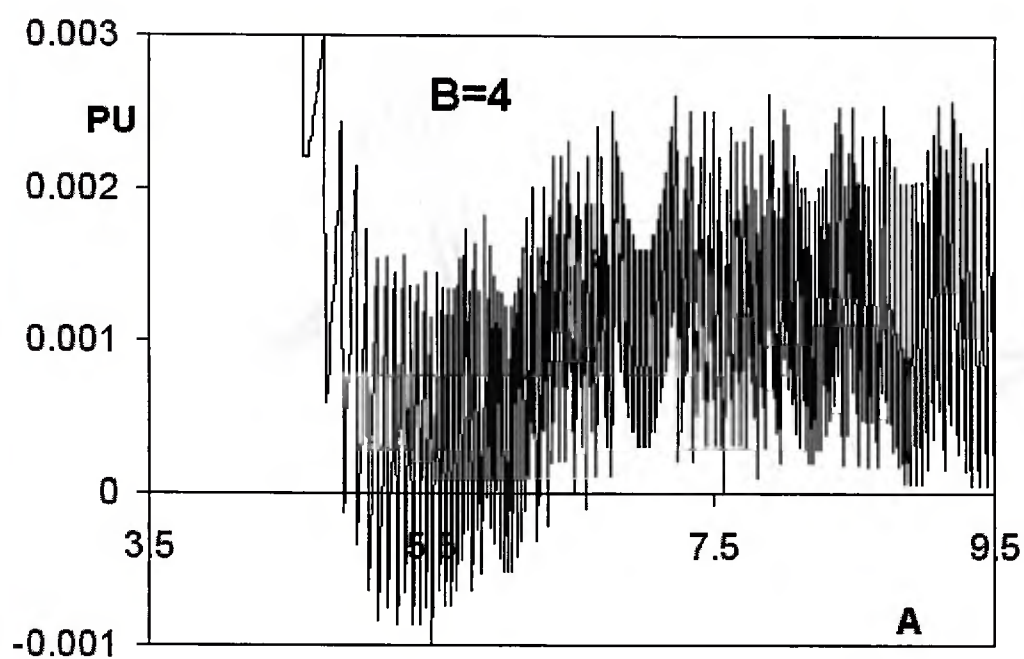


Figura 6.10: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 4$.

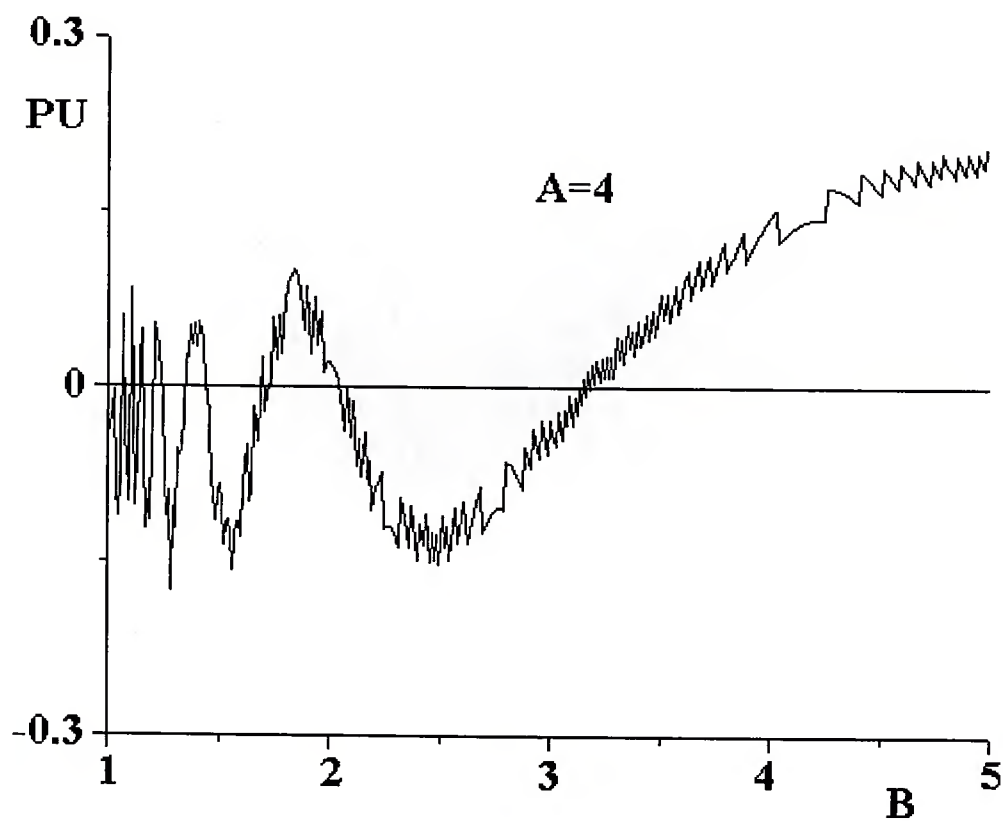


Figura 6.11: Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $a = 4$.

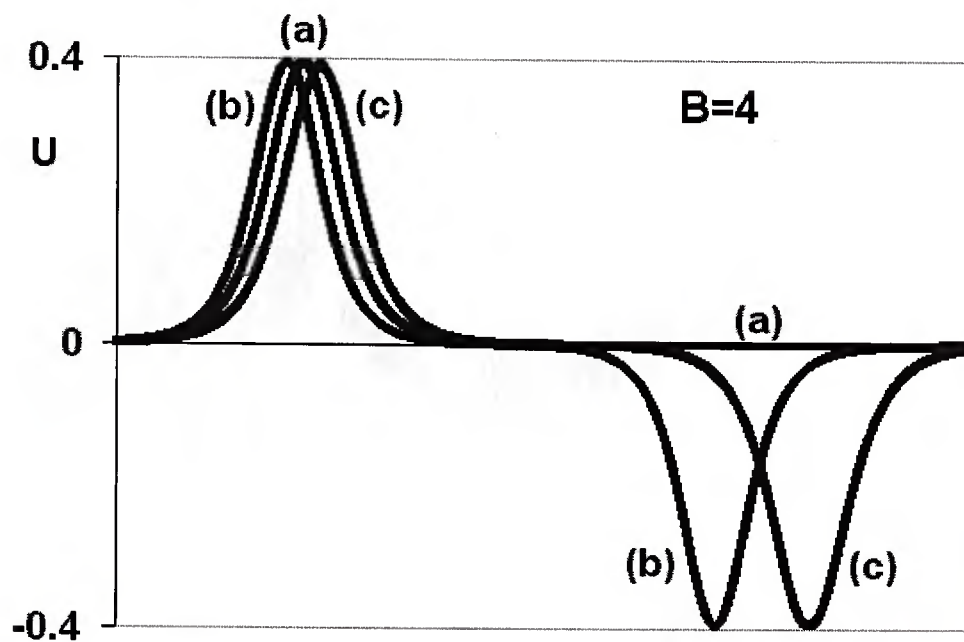


Figura 6.12: Soliton (a) e bifurcação (b) e (c) para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 4$.

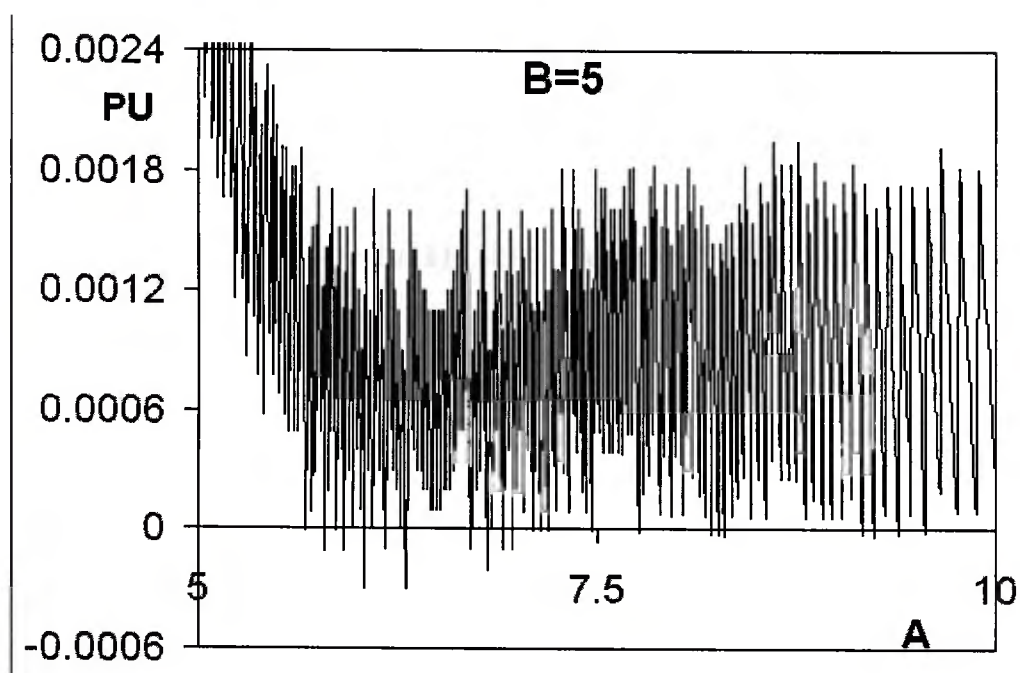


Figura 6.13: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 5$.

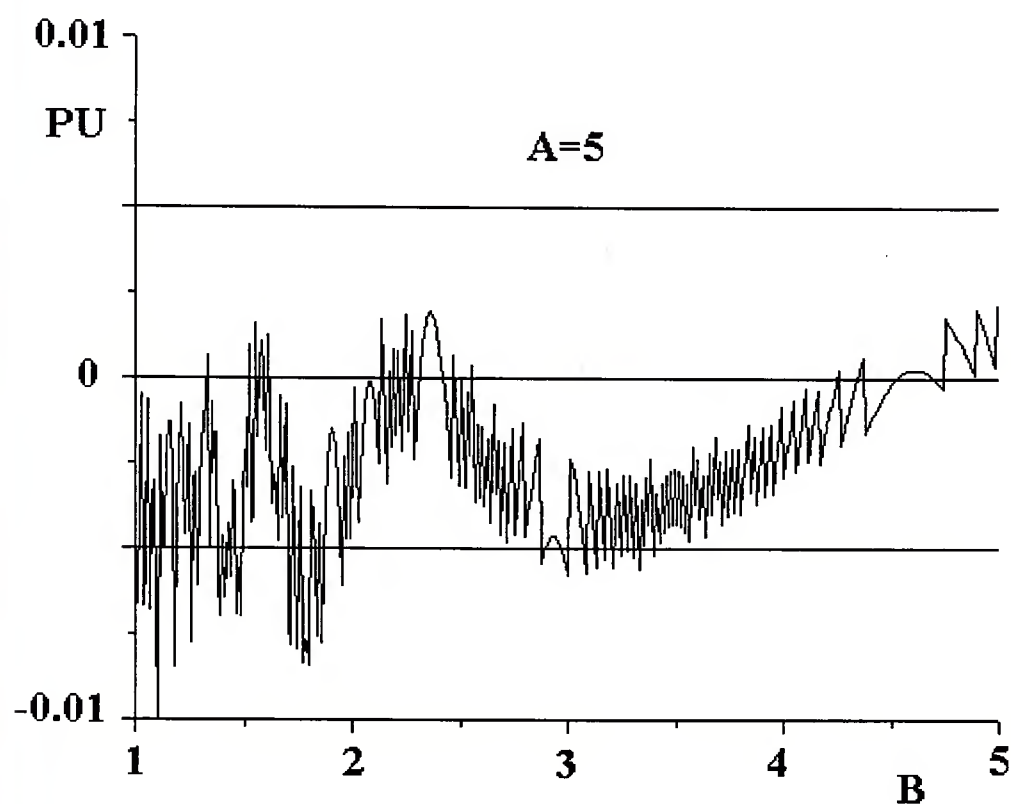


Figura 6.14: Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $a = 5$.

CAPÍTULO 7

Limite Assintótico

A partir de:

$$u^{iv} + au'' - u + f(u, b) = 0 \quad (7.1)$$

podemos obter novos critérios de controle do algoritmo desenvolvido neste trabalho através do estudo assintótico da equação 7.1 . Desta forma, poderemos observar se os erros de aproximação cometidos durante o processo numérico podem influenciar os resultados obtidos.

Realizando a substituição de variáveis $t = \frac{\bar{t}}{\sqrt{a}}$ em 7.1, obtemos:

$$\frac{u^{iv}}{a^2} + u'' - u + f(u, b) = 0 \quad (7.2)$$

Estudaremos, então, o comportamento de 7.2 para o limite assintótico de a , isto é, quando $a \rightarrow \pm\infty$. Nessa situação, temos:

$$u'' - u + f(u, b) = 0 \quad (7.3)$$

De modo análogo ao que foi feito para os modelos $u(x) = \text{sech}^2(x)$ e $u(x) = \text{sech}(x)$ (4.1 e 5.1), multiplicando 7.3 por u' e integrando sobre $\bar{t}$, obtemos:

$$\int [u''u' - uu' + f(u, b)u'] d\bar{t} = \frac{u'^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \int f(u, b)du = cte \quad (7.4)$$

A partir de 7.4 obtemos a constante de movimento:

$$H(u, u') = \frac{u'^2}{2} - \underbrace{\frac{u^2}{2} + \int f(u, b)du}_{V(u)} = E \quad (7.5)$$

Dentro do nível de energia $E = 0$, observamos o gráfico $V(u)$ (que não depende de a) definido em 7.5 procurando suas raízes que são pontos críticos do sistema de fase (u, u') no

sentido $V(u(t_0)) = 0 \implies u'(t_0) = 0$, como fizemos para as funções potenciais dos modelos $u(x) = \text{sech}^2(x)$ e $u(x) = \text{sech}(x)$ (4.4 e 5.4), o que garante a existência de órbitas homoclínicas. Desta forma, para a suficientemente grande, poderemos comparar as informações obtidas do algoritmo com as órbitas homoclínicas encontradas analiticamente através do estudo assintótico.

Para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$ (6.1), a constante de movimento, para $a \rightarrow \infty$, é definida por:

$$H(u, u') = \frac{u'^2}{2} - \underbrace{\frac{u^2}{2} + \int b \left(\frac{65}{2} u^2 - 40 u^3 \right) du}_{V(u)} \quad (7.6)$$

e sua função potencial:

$$V(u) = -\frac{u^2}{2} + b \left(\frac{65}{6} u^3 - 10 u^4 \right) \quad (7.7)$$

No gráfico 7.1 observamos a existência do ponto crítico $u = 0,01567$ para $b = 3$.

Agora iremos construir um gráfico com informações a partir do algoritmo da seguinte forma: fixamos $b = 3$ e para valores crescentes de a , toda vez que v trocar de sinal, plotamos $p_u \times u$. Desta forma, quando a curva cruzar o eixo horizontal ($p_u = 0$), temos uma órbita homoclínica de acordo com nossos argumentos teóricos (ver teorema 1 do capítulo 1). Se $a \rightarrow \infty$, esperamos confirmar neste gráfico um valor convergente para u aproximadamente igual ao encontrado no gráfico do potencial. O resultado pode ser observado na figura 7.2 e, comparando-a com 7.1 verificamos a eficiência do algoritmo para o limite assintótico de a .

É importante não confundir os valores de u encontrados durante a análise assintótica com os valores homoclínicos obtidos anteriormente. A primeira informação é de caráter específico para o limite $a \rightarrow \infty$ enquanto que a segunda informação é de caráter global do sistema 7.1

Realizamos o mesmo processo para outros valores de b e os resultados podem ser observados nas figuras 7.3 e 7.4. Os valores convergentes para u (quando $a \rightarrow \infty$) em 7.4 são os mesmos encontrados na interseção da superfície potencial com o plano $V = 0$ em 7.3, para os respectivos valores de b . Estas figuras demonstram a característica de dependência contínua dos parâmetros que tem sido utilizada como hipótese para nosso algoritmo.

Para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ (6.2), a constante de movimento, para $a \rightarrow \infty$, é definida por:

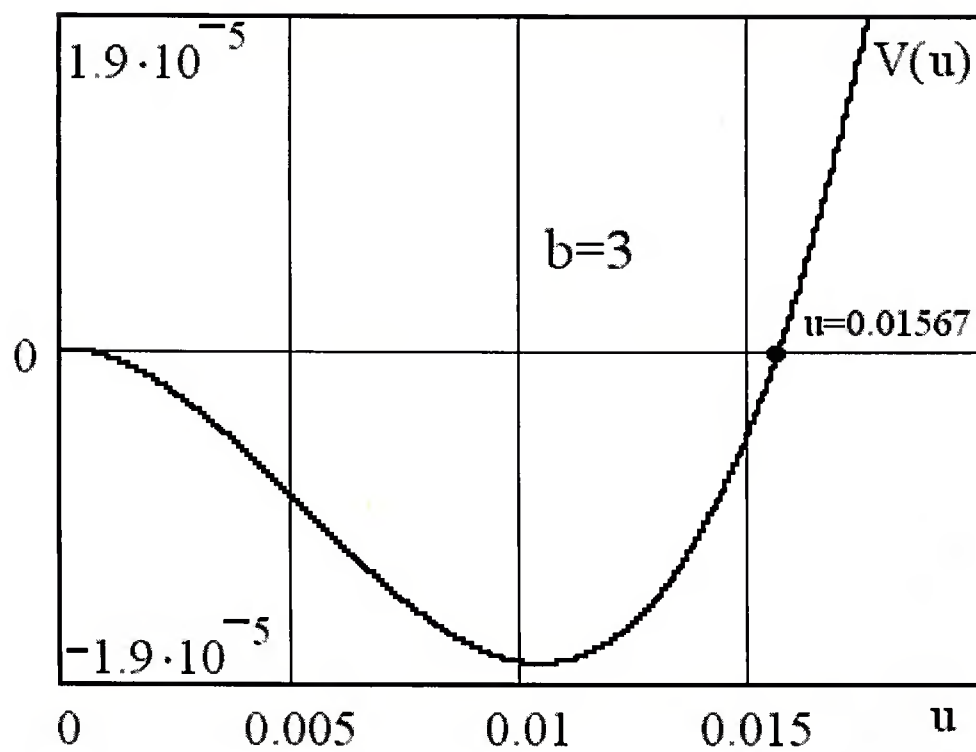


Figura 7.1: Função Potencial para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$ com $b = 3$.

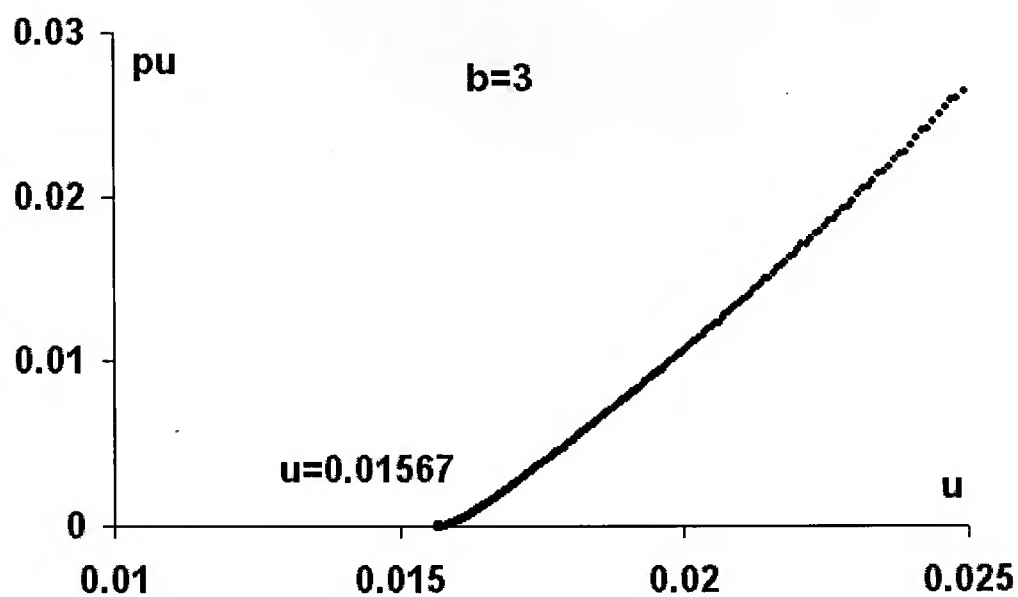


Figura 7.2: Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$ com $b = 3$.

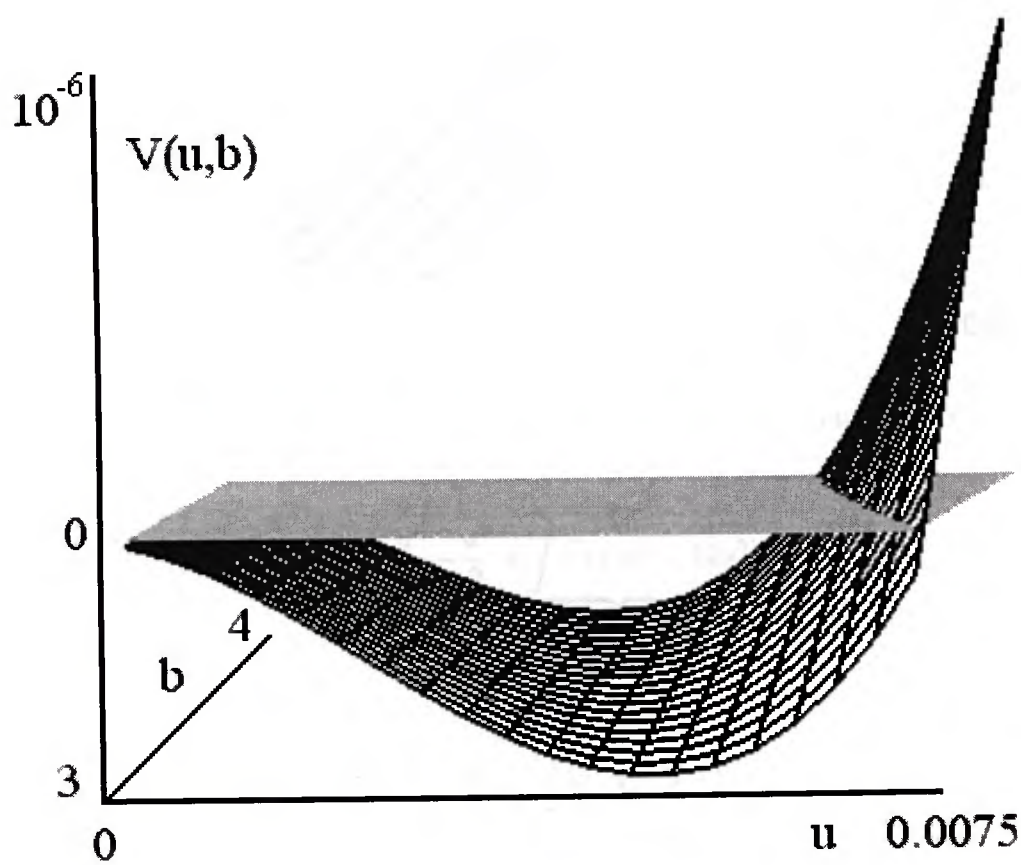


Figura 7.3: Superfície Potencial para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$.

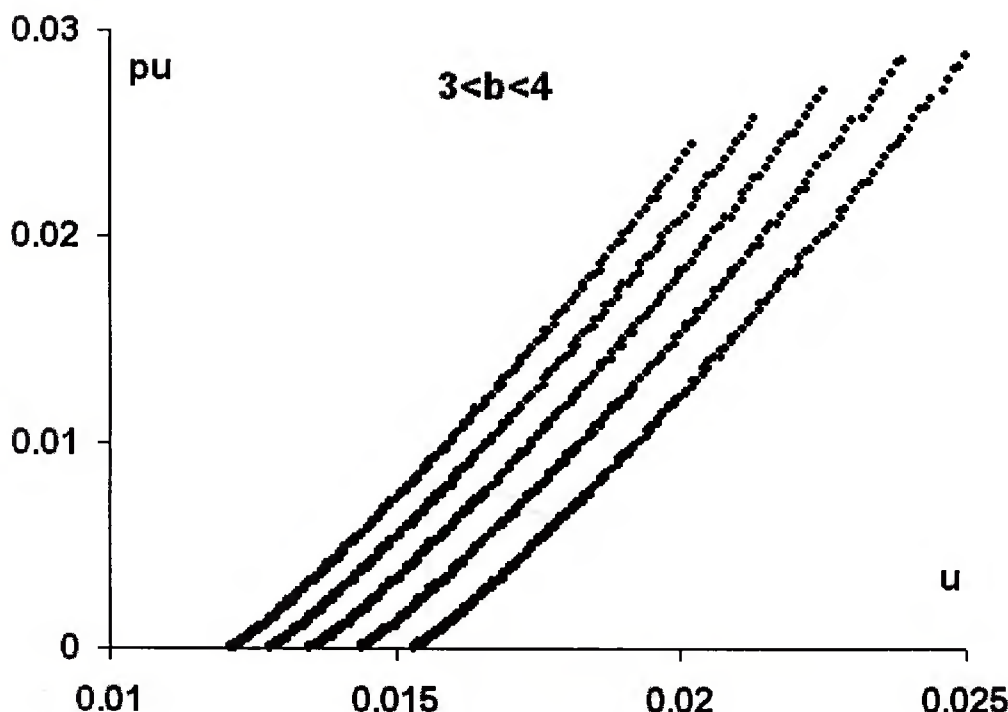


Figura 7.4: Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$ com $3 < b < 4$.

$$H(u, u') = \frac{u'^2}{2} - \underbrace{\frac{u^2}{2} + \int b(11u^3 - 12u^5) du}_{V(u)} \quad (7.8)$$

e sua função potencial:

$$V(u) = -\frac{u^2}{2} + b \left(\frac{11}{4}u^4 - 2u^6 \right) \quad (7.9)$$

No gráfico 7.5 observamos a existência do ponto crítico $u = 0.46294$ para $b = 1$.

Como no modelo anterior iremos construir um gráfico para $b = 1$ e para valores crescentes de a , plotando $p_u \times u$ toda vez que v trocar de sinal. Desta forma, as raízes da curva obtida garantem uma órbita homoclínica. Se $a \rightarrow \infty$, esperamos confirmar também neste gráfico um valor convergente para u aproximadamente igual ao encontrado no gráfico do potencial. O resultado pode ser observado na figura 7.6 e, comparando-a com 7.5 verificamos mais uma vez a confirmação do algoritmo para o limite assintótico de a .

Novamente não podemos confundir os valores de u encontrados durante a análise assintótica com os valores homoclínicos obtidos anteriormente. Reparamos na figura 7.6 que além da raiz $u = 0.463$ encontramos outra interseção com o eixo horizontal que ocorre no

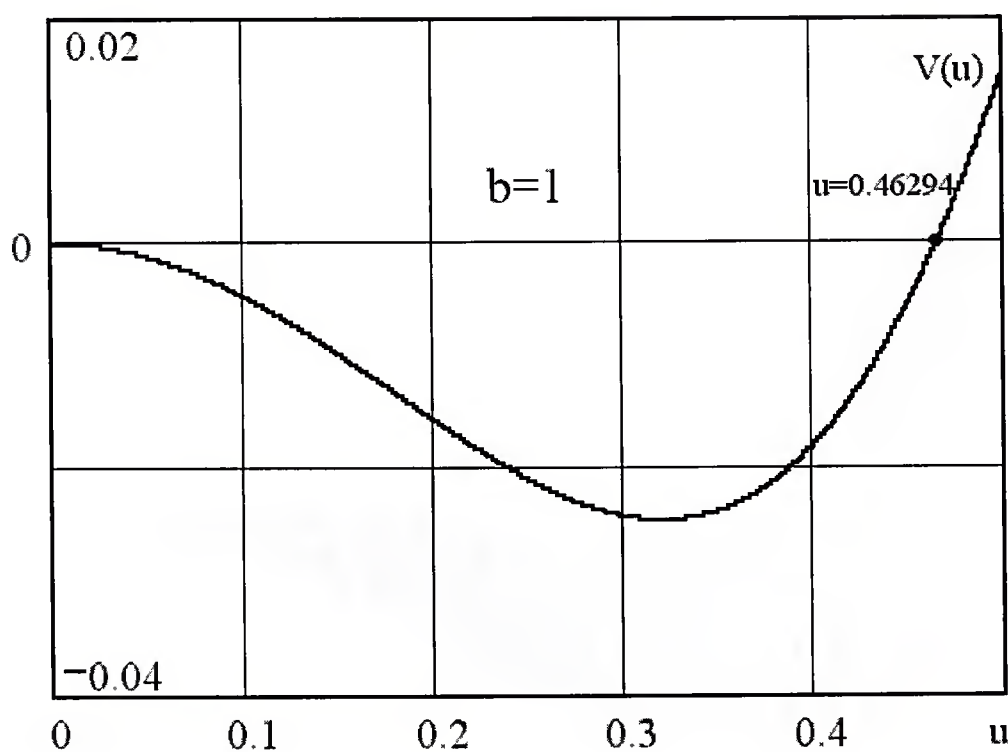


Figura 7.5: Função Potencial para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ com $b = 1$.

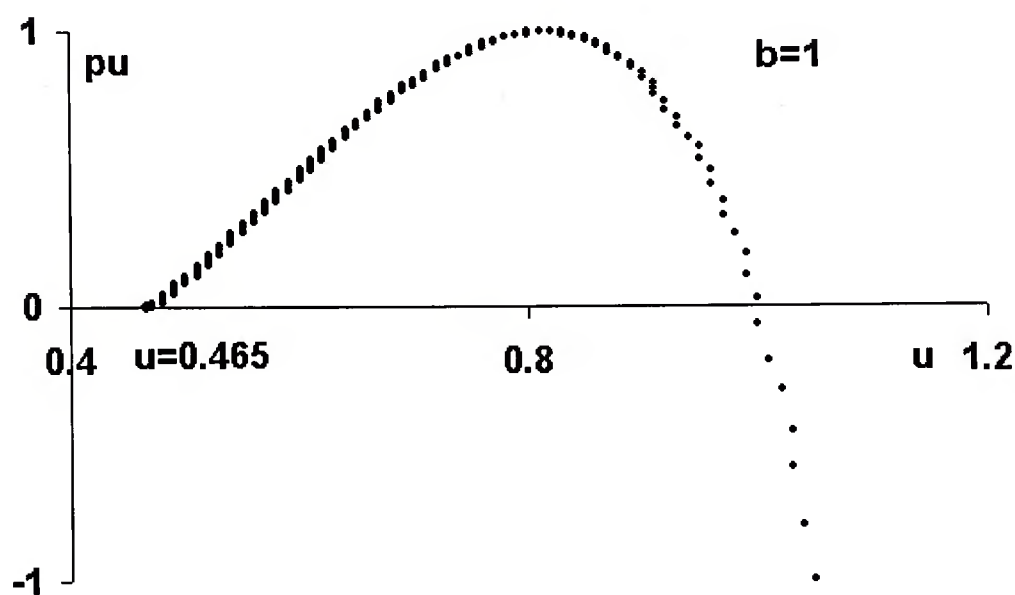


Figura 7.6: Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ com $b = 1$.

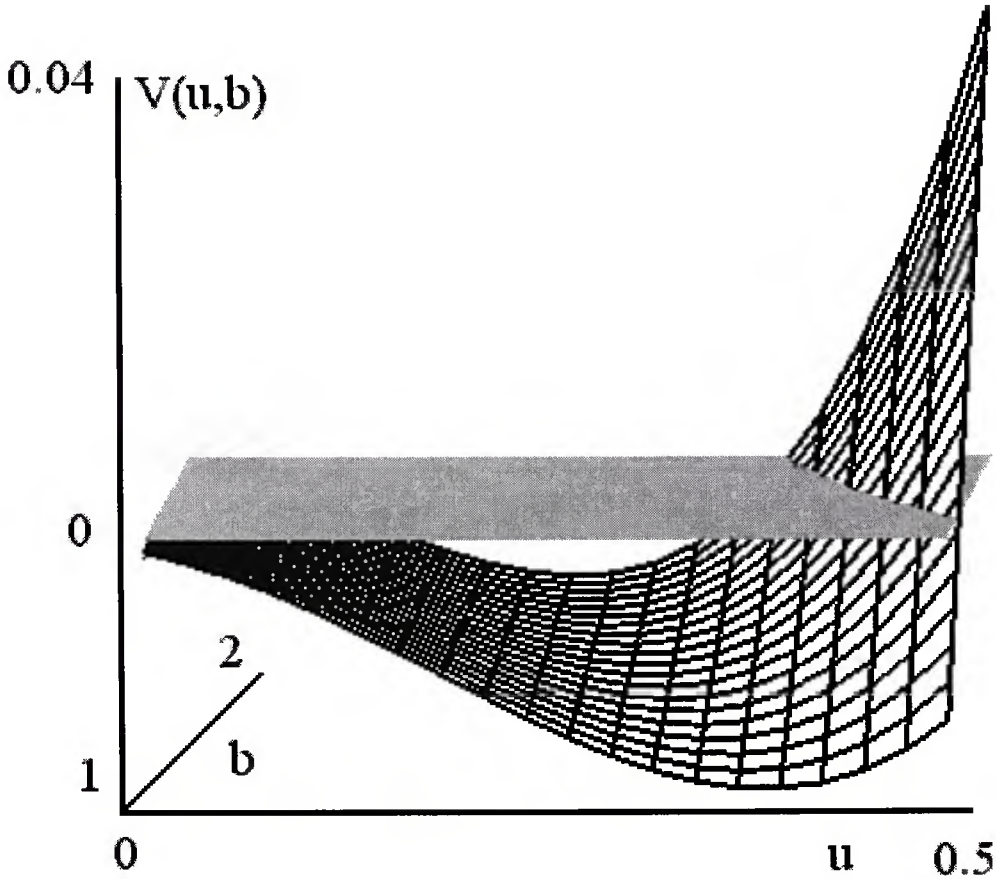


Figura 7.7: Superfície Potencial para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$.

valor aproximado de $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ que, juntamente com $b = 1$, determinam um valor homoclínico para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ (6.2) já observado.

Realizamos o mesmo processo para outros valores de b e os resultados podem ser observados nas figuras 7.7 e 7.8. Novamente, os valores convergentes para u (quando $a \rightarrow \infty$) em 7.8 são os mesmos encontrados na interseção da superfície potencial com o plano $V = 0$ em 7.7, para os respectivos valores de b .

Aplicamos, agora, o estudo assintótico ao modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ (6.3) que, como visto anteriormente, apresenta maior complexidade para os valores homoclínicos observados nos espaço de parâmetros (figura 6.3) em relação aos modelos analiticamente construídos.

Enquanto no modelo $u(x) = \text{sech}^2(x)$ (6.1) temos $f(u, b) = \mathcal{O}(u^2)$ e comportamento assintótico (em u) $f(u, b) \rightarrow u^3$, e no modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ (6.2) temos $f(u, b) = \mathcal{O}(u^3)$ e comportamento assintótico (em u) $f(u, b) \rightarrow u^5$, neste último modelo, que foi baseado nos trabalhos [31], [32] e [48], temos $f(u, b) = \mathcal{O}(u^3)$ e comportamento assintótico (em u) $f(u, b) \rightarrow u$.

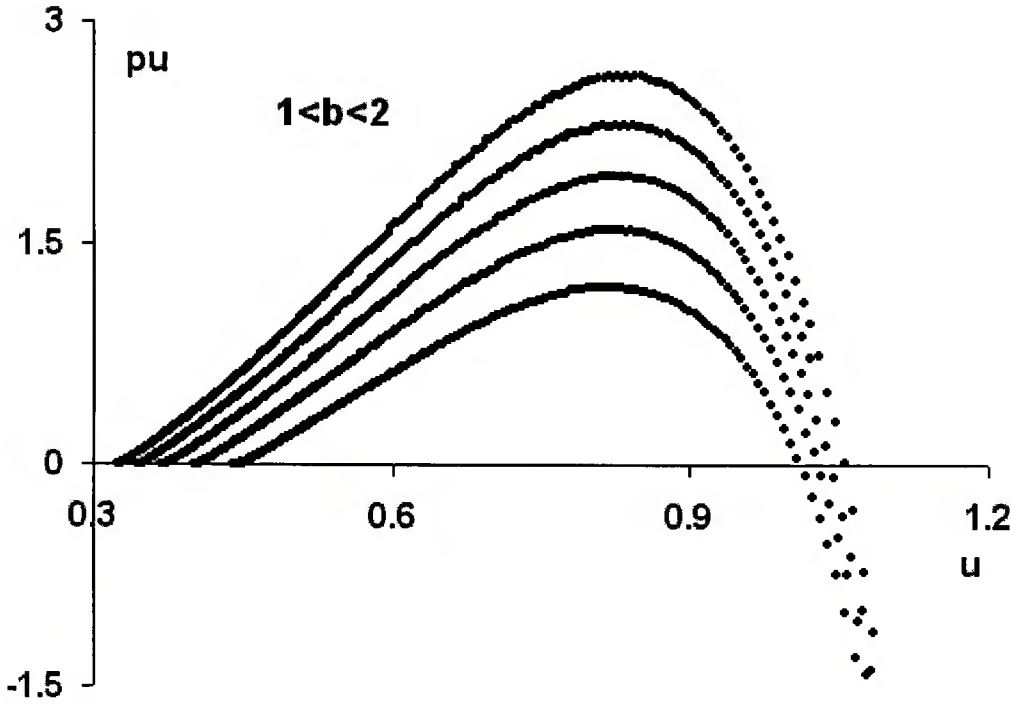


Figura 7.8: Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $u(x) = \text{sech}(x)$ com $1 < b < 2$.

Para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ (6.3), a constante de movimento, para $a \rightarrow \infty$, é definida por:

$$H(u, u') = \frac{u'^2}{2} - \underbrace{\frac{u^2}{2} + \int [bu - \tanh(bu)] du}_{V(u)} \quad (7.10)$$

e sua função potencial:

$$V(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{bu^2}{2} - \frac{1}{b} \ln(\cosh(bu)) \quad (7.11)$$

Na figura 7.9 encontramos o gráfico de 7.11 para $b = 1.2$, que possui características semelhantes às das funções potenciais dos outros modelos (comparar com figuras 7.1 e 7.5), mas quando plotamos o gráfico $p_u \times u$, observamos (figura 7.10) uma série de interseções com o eixo $p_u = 0$, indicando uma infinidade de valores homoclínicos antes da convergência para $u = 9,3845$ que corresponde à raiz de $V(u)$ no gráfico 7.9. Esta grande quantidade de valores homoclínicos já era esperada devido aos resultados obtidos no espaço de parâmetros observados nas figuras 6.2 e 6.3)

Outra diferença encontrada para este modelo pode ser observada no gráfico da superfície potencial para $1 < b < 2$ (figura 7.11) onde, para determinados valores de b , não há raízes

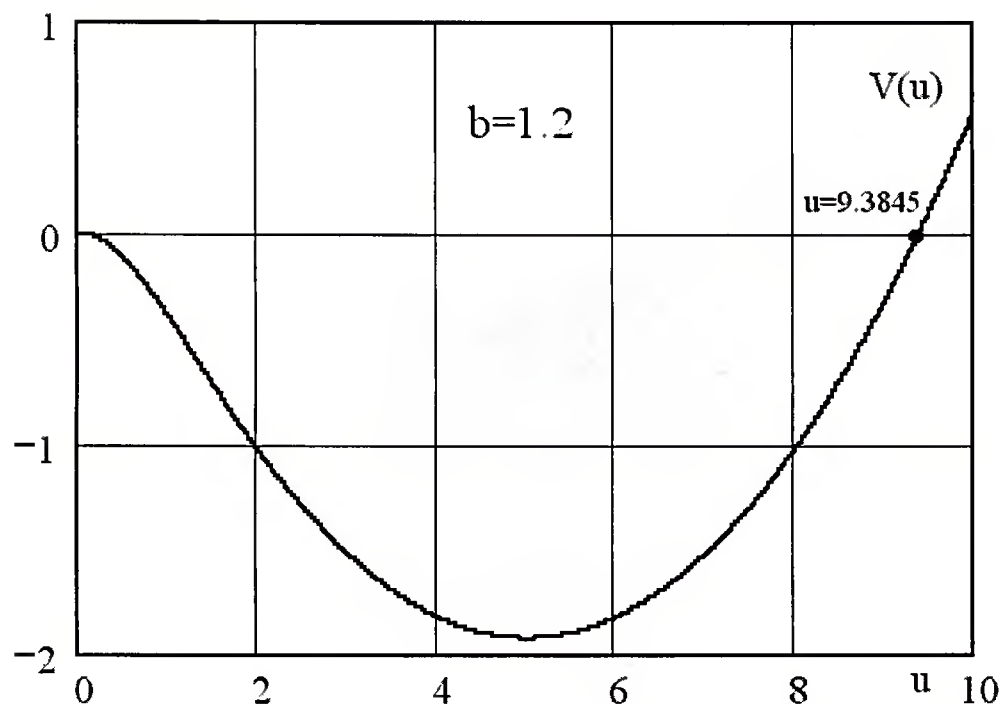


Figura 7.9: Função Potencial para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 1.2$.

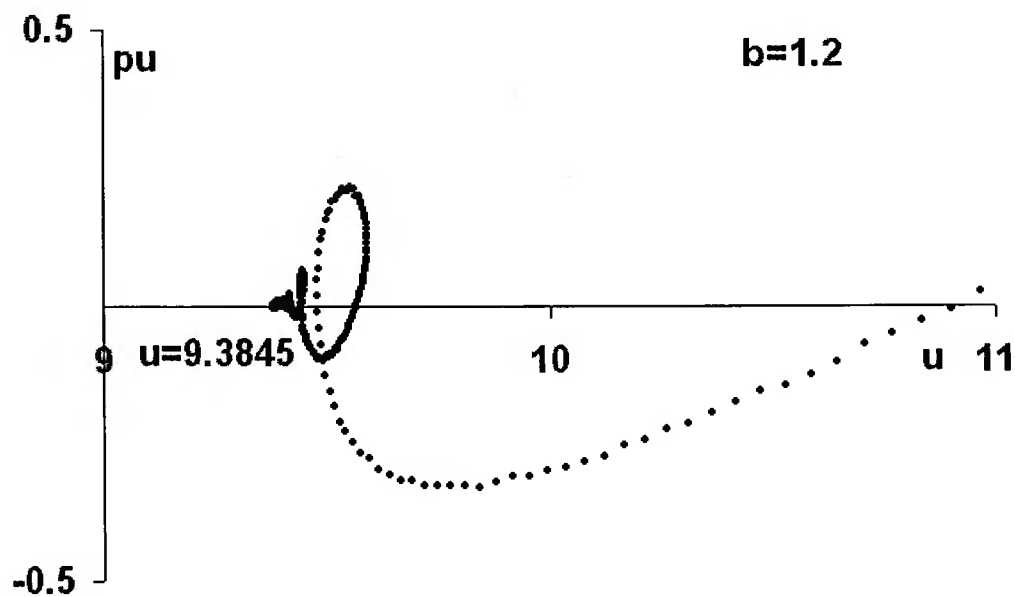


Figura 7.10: Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 1.2$.

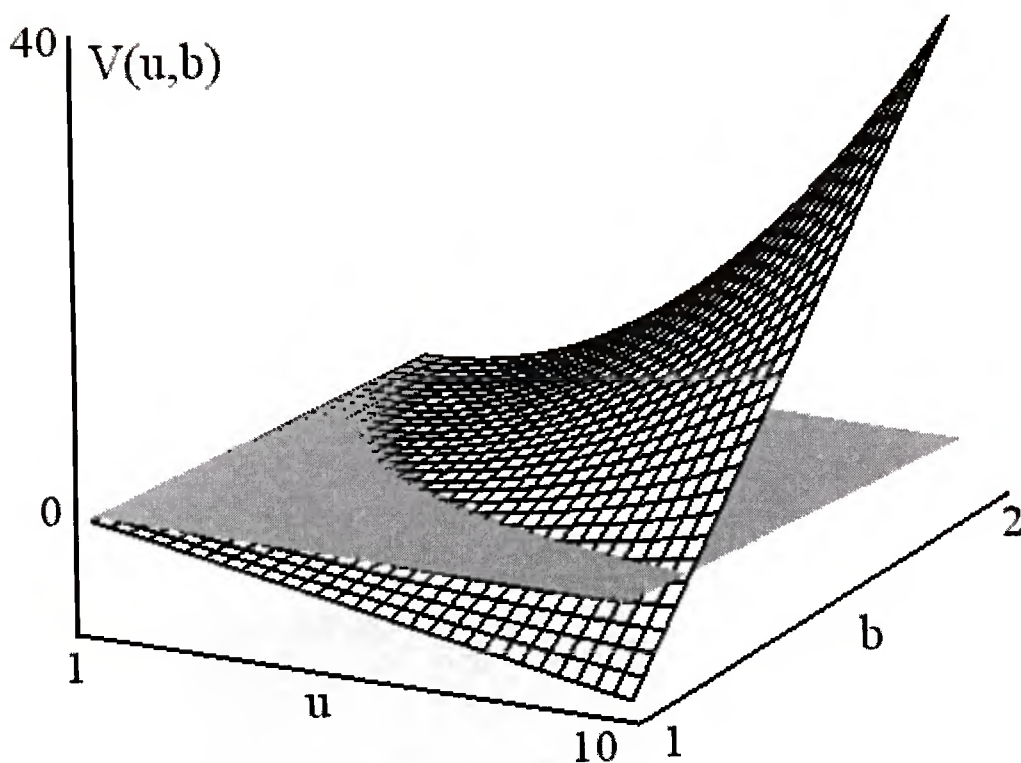


Figura 7.11: Superfície Potencial para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $1 < b < 2$.

para a função potencial $V(u)$ (além de $u = 0$), não indicando valores homoclínicos para o caso assintótico $a \rightarrow \infty$. Podemos perceber na figura 7.11 que, para valores próximos de $b = 1$, não há interseção da superfície potencial com o plano $V(u, b) = 0$. Este comportamento é confirmado no gráfico $p_u \times u$ observado na figura 7.12. Para valores grandes de a , não obtemos interseções com o eixo $p_u = 0$.

As funções potenciais analisadas nas figuras 7.1, 7.3, 7.5, 7.7, 7.9 e 7.11 são similares às dos solitons obtidos das equações KDV, Boussinesq e Rayleigh (ver [9], [10], [12], [11], [14] e [15]).

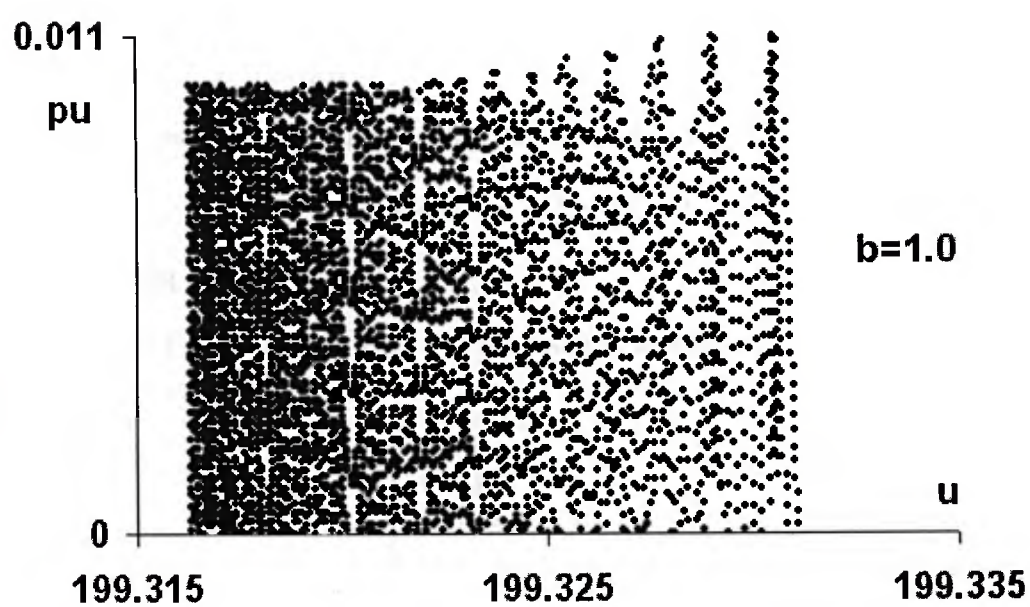


Figura 7.12: Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$ com $b = 1.0$.

CAPÍTULO 8

Superfícies de Energia e Seções de Poincaré

Com o intuito de corroborar as propriedades geométricas citadas na fundamentação teórica deste trabalho, iremos detalhar as superfícies de energia e seções de Poincaré utilizadas como hipótese que, junto com as propriedades analíticas dos sistemas hamiltonianos em questão, resultaram no teorema 1, que é o ponto fundamental de nosso algoritmo de localização de órbitas homoclínicas.

Partimos, novamente, da equação diferencial escalar de quarta ordem

$$u^{iv} + au'' - u + f(u, b) = 0, \quad (8.1)$$

com: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e f analítica.

A equação 8.1 pode ser expressa por um sistema hamiltoniano equivalente:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = p_v \\ p_u' = -u + f(u, b) \\ p_v' = -p_u - av \end{cases} \quad (8.2)$$

que possui função hamiltoniana definida por:

$$H = p_u v + \frac{p_v^2}{2} + a \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - F(u, b). \quad (8.3)$$

onde F é a primitiva de f .

O sistema 8.2 possui a reversibilidade Q definida por $(u, v, p_u, p_v) \mapsto (u, -v, -p_u, p_v)$ cujo conjunto de pontos fixos é $\chi = \{(u, v, p_u, p_v) \mid v = p_u = 0\}$.

Nosso objetivo, para os modelos analiticamente construídos, será a análise do nível zero de energia que definiremos como $\Omega = \{(u, v, p_u, p_v) \mid H \equiv 0\}$ e das seções de Poincaré $\Sigma_1 = \{(u, v, p_u, p_v) \mid p_u \equiv 0\}$ e $\Sigma_2 = \{(u, v, p_u, p_v) \mid v \equiv 0\}$ que estão relacionadas com o conjunto χ .

Para o modelo analiticamente construído baseado no soliton $u(x) = \text{sech}^2(x)$ 6.1 temos:

$$H = p_u v + \frac{p_v^2}{2} + a \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - b \left(\frac{65}{6} u^3 - 10u^4 \right). \quad (8.4)$$

O nível de energia zero Ω tridimensional possui a expressão:

$$\Omega = \left\{ (u, v, p_u, p_v) \mid p_u v + a \frac{v^2}{2} = -\frac{p_v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + b \left(\frac{65}{6} u^3 - 10u^4 \right) \right\}. \quad (8.5)$$

O conjunto $\Phi = \Omega \cap \Sigma_1$ bidimensional é definido por:

$$\Phi = \left\{ (u, v, 0, p_v) \mid v = \pm \sqrt{\frac{1}{a} \left[-p_v^2 - u^2 + b \left(\frac{65}{3} u^3 - 20u^4 \right) \right]} \right\}; a \neq 0. \quad (8.6)$$

Seu gráfico pode ser observado nas figuras 8.1 e 8.2, e deve ser entendido como a interseção de dois conjuntos do espaço R^4 , ou ainda como uma projeção do nível de energia zero do sistema 6.1.

Ao analisar projeções, devemos atentar para alguns detalhes específicos, como o fato de ser possível encontrar auto-interseções de uma mesma órbita (o que no espaço original seria impossível pela unicidade de soluções). Assim, se a órbita original se encontra contida no conjunto nível de energia zero, o mesmo não ocorre com a interseção desse nível com uma seção de Poincaré (projeção), mas tal projeção serve como "fronteira" ou "enquadre". Por exemplo, se observamos uma órbita contida num nível zero de energia representado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e se realizamos a projeção no plano $z = 0$, podemos encontrar auto-interseções da órbita projetada, mas tal projeção continua contida no conjunto $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ analiticamente representado pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que passa a ser uma região de fronteira para a órbita projetada.

Da mesma forma, encontramos este comportamento para o modelo 6.1. Para $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$, observamos na figura 8.2 que a órbita homoclínica permanece na região delimitada por Φ e, quando a mesma atinge a seção de Poincaré Σ_2 , a órbita "se reflete" e converge para o ponto de equilíbrio $r = \vec{0}$. Na figura 8.3 temos o conjunto $\Phi \cap \Sigma_2$, que pode ser visto como uma projeção do conjunto χ , e sua interseção com a órbita homoclínica.

Podemos observar também, na figura 8.4, uma outra projeção de χ representado pela interseção $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ projetada nas coordenadas (u, v, p_u) e novamente o fenômeno do "reflexo" da órbita homoclínica ao atingir este conjunto.

Como o conjunto $\Phi \cap \Sigma_2 = \left\{ (u, 0, 0, p_v) \mid -\frac{p_v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + b \left(\frac{65}{6} u^3 - 10u^4 \right) = 0 \right\}$ não depende do parâmetro a , podemos observar o comportamento das interseções das órbitas com esse conjunto para pequenas variações deste parâmetro e analisar a bifurcação do soliton $u(x) = \text{sech}^2(x)$ do ponto de vista geométrico. Assim, na figura 8.5, podemos observar a interseção

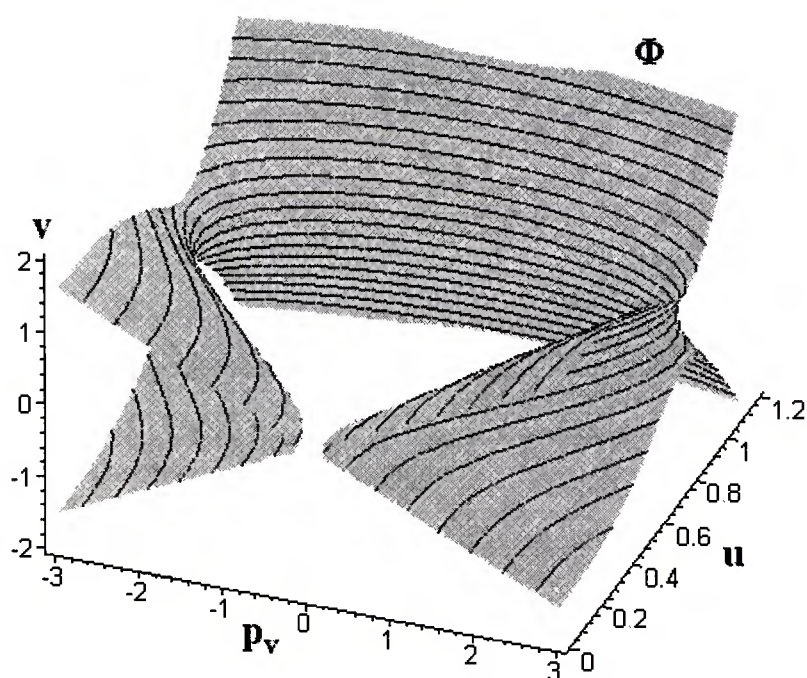


Figura 8.1: Conjunto Φ para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$.

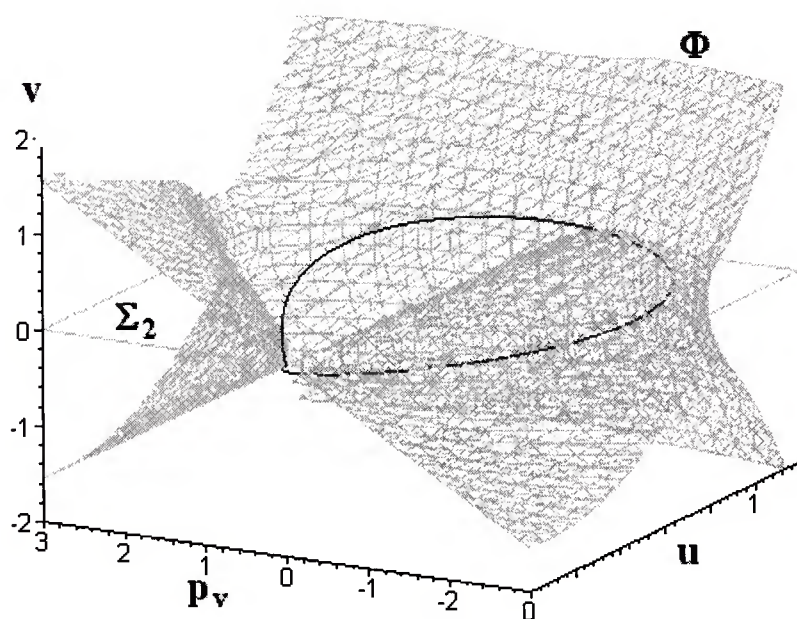


Figura 8.2: Detalhe de Φ , seção de Poincaré Σ_2 e órbita homoclínica para o modelo $\text{sech}^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$.

das órbitas com valores $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$ (que é um valor homoclínico e que denominaremos

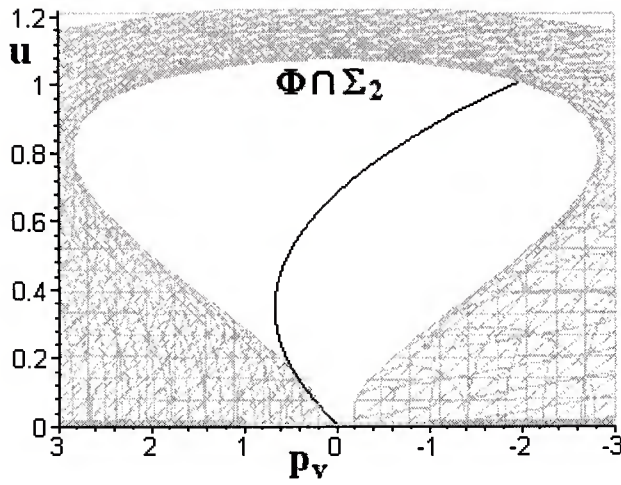


Figura 8.3: Projeção da órbita homoclínica e do conjunto χ para o modelo $sech^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$.

por 1) e $(a, b) = (-\frac{15}{4} + 10^{-3}, 3)$ (que denominaremos por 2) com o plano $v \times p_u$ e constatar que só a primeira atinge o ponto $(v, p_u) = (0, 0)$, projeção do conjunto χ neste sistema de coordenadas, como esperado.

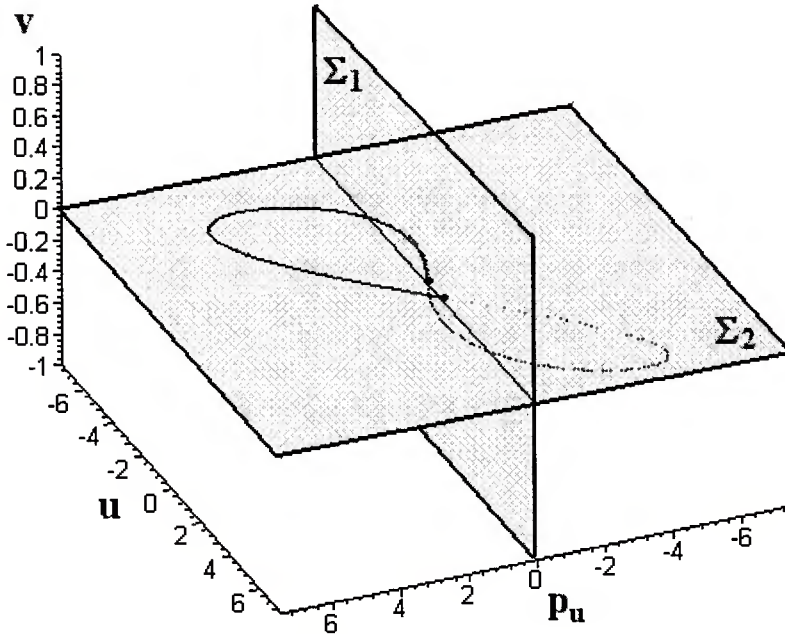


Figura 8.4: Seções de Poincaré Σ_1 e Σ_2 para o modelo $sech^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$.

Para o modelo analiticamente construído baseado no soliton $u(x) = sech(x)$ 6.2, temos:

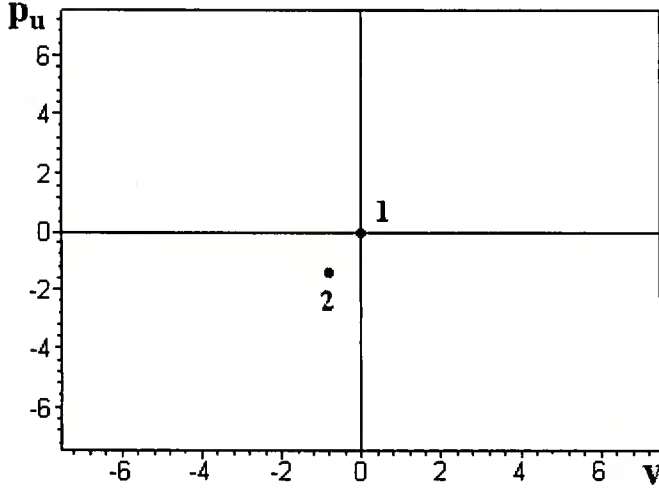


Figura 8.5: Projeção das interseções de órbitas com o conjunto χ para o modelo $sech^2(x)$ com $(a, b) = (-\frac{15}{4}, 3)$ (1) e $(a, b) = (-\frac{15}{4} + 10^{-3}, 3)$ (2).

$$H = p_u v + \frac{p_v^2}{2} + a \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - b \left(\frac{11}{4} u^4 - 2u^6 \right). \quad (8.7)$$

O nível de energia zero Ω tridimensional possui a expressão

$$\Omega = \left\{ (u, v, p_u, p_v) \mid p_u v + a \frac{v^2}{2} = -\frac{p_v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + b \left(\frac{11}{4} u^4 - 2u^6 \right) \right\}. \quad (8.8)$$

O conjunto $\Phi = \Omega \cap \Sigma_1$ bidimensional é definido por:

$$\Phi = \left\{ (u, v, 0, p_v) \mid v = \pm \sqrt{\frac{1}{a} \left[-p_v^2 - u^2 + b \left(\frac{11}{2} u^4 - 4u^6 \right) \right]} \right\}; a \neq 0. \quad (8.9)$$

Seu gráfico pode ser observado nas figura 8.6 e, novamente, deve ser entendido como uma projeção do nível de energia zero para o sistema 6.2. Esta figura muito se assemelha à superfície de energia cônica observada em [31] que era uma das condições necessárias para o aparecimento de órbitas homoclínicas na equação modelo abordada pelo autor no trabalho.

Na figura 8.7, obtemos uma projeção do conjunto χ representado pela interseção $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ projetada nas coordenadas (u, v, p_u) e, novamente, observamos o fenômeno do "reflexo" da órbita homoclínica ao atingir este conjunto.

Como no modelo anterior, o conjunto $\Phi \cap \Sigma_2 = \left\{ (u, 0, 0, p_v) \mid -\frac{p_v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + b \left(\frac{11}{4} u^4 - 2u^6 \right) = 0 \right\}$ não depende do parâmetro a e podemos analisar a bifurcação do soliton $u(x) = sech(x)$ na

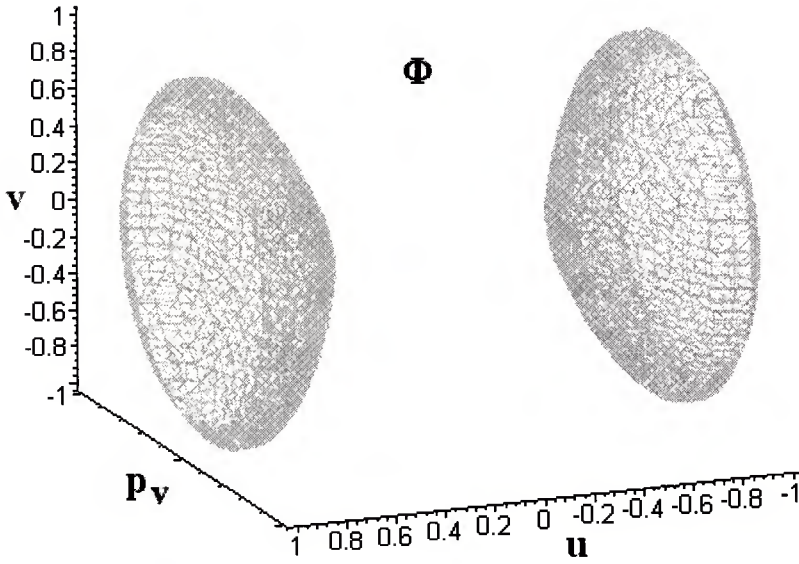


Figura 8.6: Conjunto Φ para o modelo $sech(x)$ com $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

figura 8.8, onde a interseção das órbitas com valores $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ (que é um valor homoclínico e que denominaremos por 1) e $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 10^{-3}, 1\right)$ (que denominaremos por 2) com o plano $v \times p_u$ são plotadas e só a primeira atinge o ponto $(v, p_u) = (0, 0)$, projeção do conjunto χ neste sistema de coordenadas.

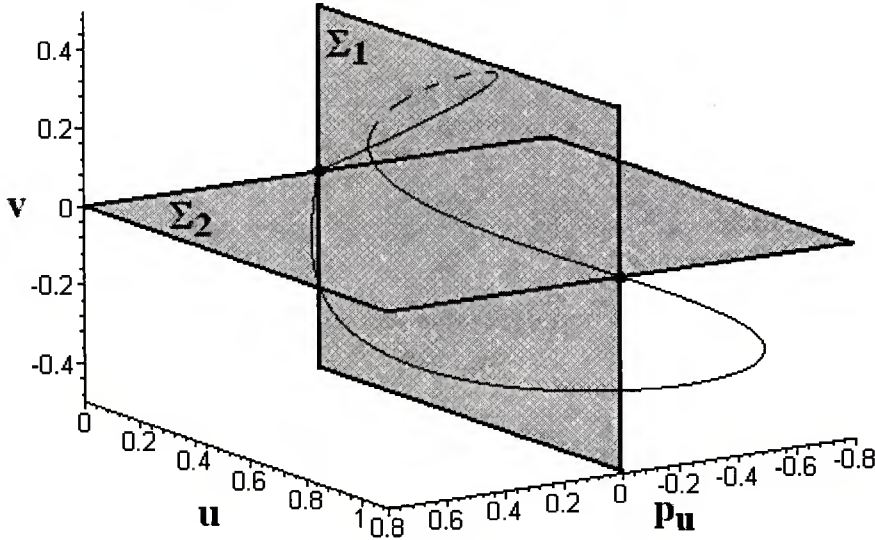


Figura 8.7: Seções de Poincaré Σ_1 e Σ_2 para o modelo $sech(x)$ com $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Continuando a análise geométrica, investigaremos agora o modelo para $f(u, b) = bu -$

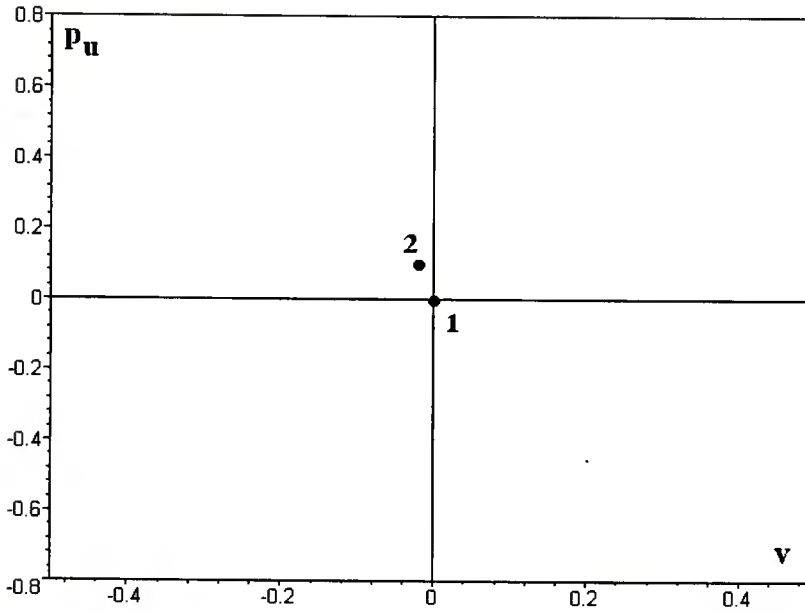


Figura 8.8: Projeção das interseções de órbitas com o conjunto χ para o modelo $\text{sech}x$ com $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ (1) e $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 10^{-3}, 1\right)$ (2).

$\tanh(bu)$ 6.3, que apresentou em estudos anteriores, um comportamento mais complexo que os modelos construídos analiticamente. Sua função Hamiltoniana é definida por:

$$H = p_u v + \frac{p_v^2}{2} + a \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \left(\frac{bu^2}{2} - \frac{1}{b} \ln(\cosh(bu)) \right). \quad (8.10)$$

O nível de energia zero Ω tridimensional possui a expressão:

$$\Omega = \left\{ (u, v, p_u, p_v) \mid p_u v + a \frac{v^2}{2} = -\frac{p_v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \left(\frac{bu^2}{2} - \frac{1}{b} \ln(\cosh(bu)) \right) \right\}. \quad (8.11)$$

O conjunto $\Phi = \Omega \cap \Sigma_1$ bidimensional é definido por:

$$\Phi = \left\{ (u, v, 0, p_v) \mid v = \pm \sqrt{\frac{1}{a} \left[-p_v^2 - u^2 + \left(bu^2 - \frac{2}{b} \ln(\cosh(bu)) \right) \right]} \right\}; a \neq 0. \quad (8.12)$$

Nas figura 8.9 podemos observar o comportamento da órbita homoclínica para o valor homoclínico $(a, b) = (2.02, 1.59)$ obtido pelo algoritmo em análise anterior (ver figura 6.3). Mais uma vez temos a sua interseção com o conjunto χ de pontos fixos da reversibilidade (cuja projeção é representada na figura) ocasionando o "reflexo", ou ainda, a interseção das variedades instável com a estável.

Para uma perturbação do valor homoclínico da ordem de 10^{-2} , isto é, para $(a, b) = (2.02 + 10^{-2}, 1.59)$, observamos nas figuras 8.10 e 8.11 a mudança de comportamento, ou bifurcação da órbita homoclínica, onde ela não intercepta mais o conjunto χ .

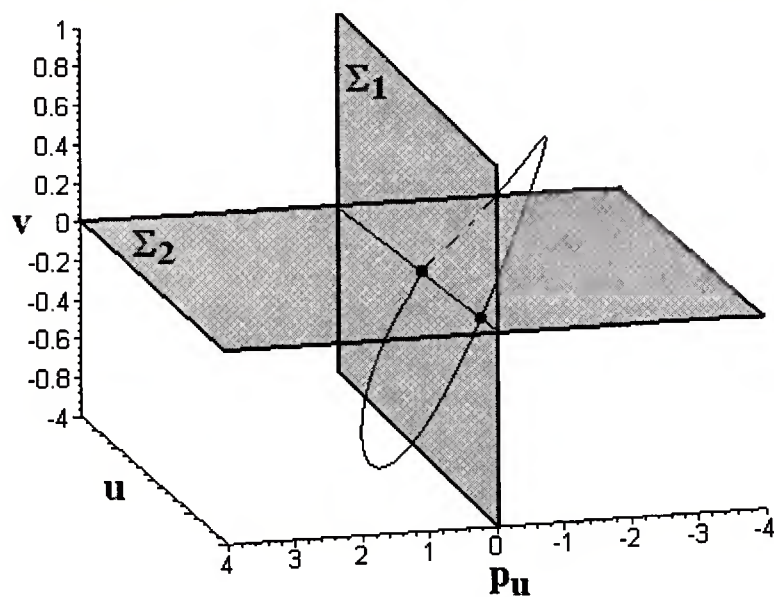


Figura 8.9: Órbita homoclínica para $(a, b) = (2.02, 1.59)$ do modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$.

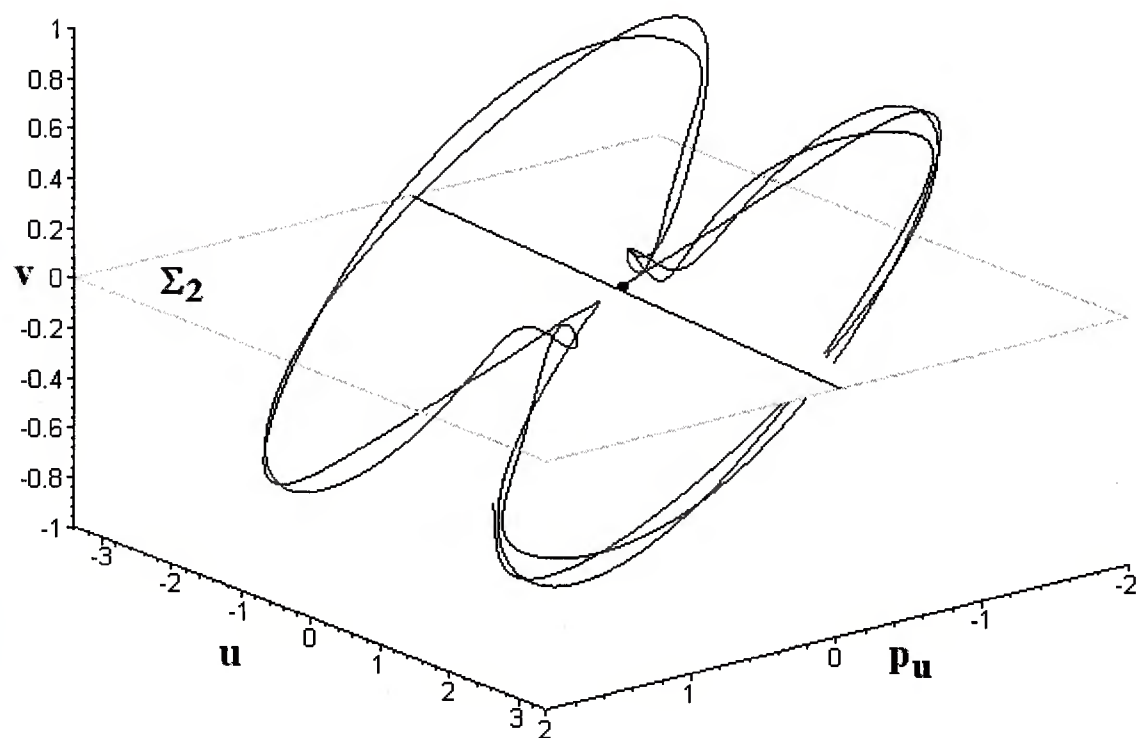


Figura 8.10: Bifurcação da órbita homoclínica para $(a, b) = (2.02 + 10^{-2}, 1.59)$ do modelo $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$.

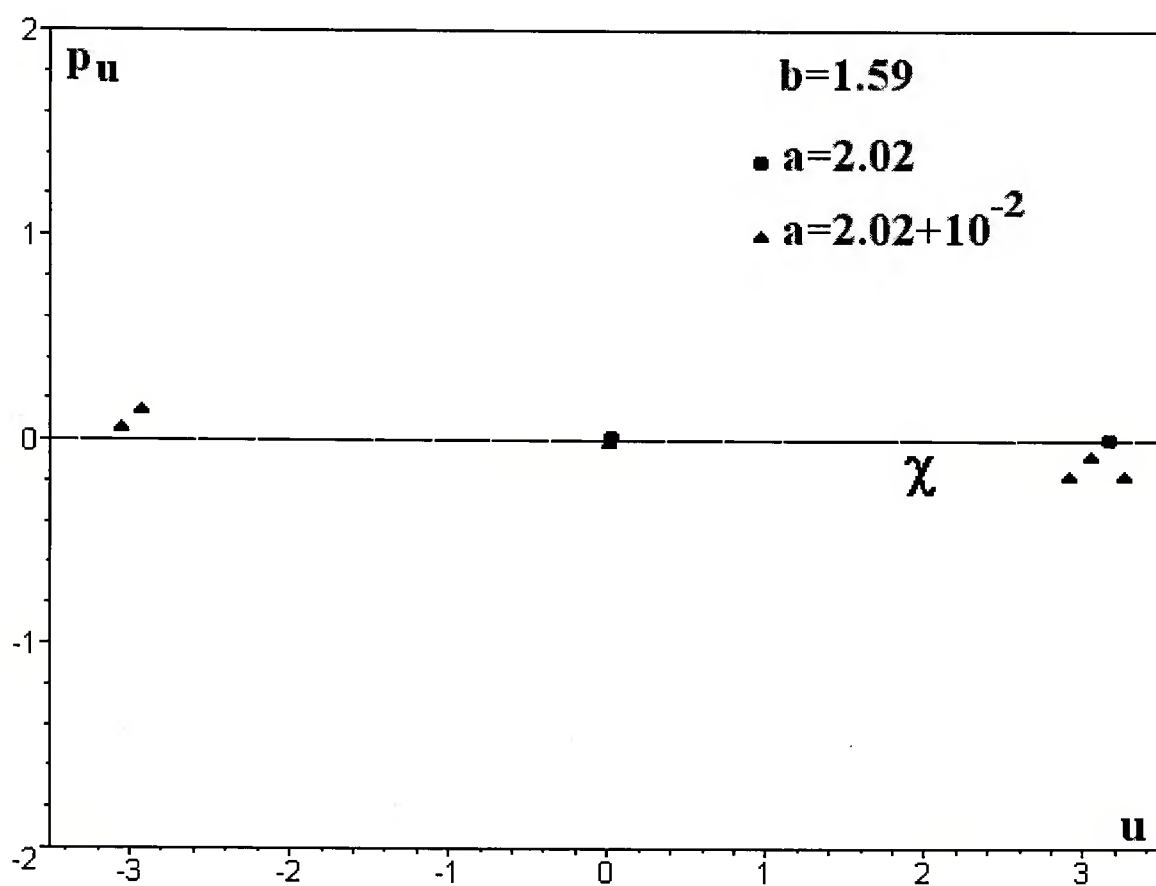


Figura 8.11: Projeção da bifurcação da órbita homoclínica para $(a, b) = (2.02 + 10^{-2}, 1.59)$ do $f(u, b) = bu - \tanh(bu)$.

CAPÍTULO 9

Bifurcação de Solitons em Presença de Tensão Superficial

Após a elaboração e verificação de uma metodologia que abordasse o problema da existência de solitons em sistemas Hamiltonianos reversíveis, escolhemos a partir da equação modelo:

$$u^{iv} + au'' - u + f(u, b) = 0, \quad (9.1)$$

o caso particular:

$$u^{iv} + au'' - u - bu^2 = 0 \quad (9.2)$$

que além de atender a todas as hipóteses de nossa equação normal 9.1, modela uma diversidade de fenômenos físicos relacionados a ondas solitárias.

Em [50] e [54] encontramos a equação :

$$\varepsilon^2 T^{iv}(\bar{x}) + T'(\bar{x}) - T(\bar{x}) + T^2(\bar{x}) = 0 \quad (9.3)$$

que corresponde a um problema específico de ondas solitárias em fluidos. A equação 9.3 é equivalente ao nosso modelo de aplicação 9.2 . Primeiro realizamos a transformação $T(\bar{x}) = u(x)$; $x = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\varepsilon}}$ obtendo :

$$u^{iv}(x) + \frac{1}{\varepsilon}u''(x) - u(x) + u^2(x) = 0 \quad (9.4)$$

e, fazendo $a = \frac{1}{\varepsilon}$ e $b = -1$, chegamos em 9.2.

Em [47] e [55] encontramos a aproximação de quinta ordem da equação KDV que modela ondas não-lineares na superfície de um fluido com certa tensão superficial:

$$\frac{2}{15}v^{iv} - Bv' + Av + \frac{3}{2}v^2 + \mu \left[\frac{1}{2}(v')^2 + (vv')' \right] = 0; A < 0 \quad (9.5)$$

Para $\mu = 0$, realizando a transformação $v(\bar{x}) = u(x); x = \sqrt[4]{\frac{15|A|}{2}}\bar{x}$; obtemos:

$$|A|u^{iv} - B\sqrt{\frac{15|A|}{2}}u' + Au + \frac{3}{2}u^2 = 0 \quad (9.6)$$

Dividindo 9.6 por $|A|$ e utilizando a igualdade $\frac{A}{|A|} = -1$ para $A < 0$, temos:

$$u^{iv} - B\sqrt{\frac{15}{2|A|}}u' - u + \frac{3}{2|A|}u^2 = 0 \quad (9.7)$$

que é equivalente ao modelo de aplicação 9.2 para $a = -B\sqrt{\frac{15}{2|A|}}$ e $b = -\frac{3}{2|A|}$.

Aplicando nosso algoritmo ao modelo de aplicação 9.2, determinamos uma infinidade de valores homoclínicos, com uma estrutura de bifurcação e dispersão muito complexa (ver figuras 9.1 e 9.2). Como nos gráficos 5.6 e 6.3 obtidos, respectivamente, através da aplicação do algoritmo aos modelos 5.9 e 6.3, observamos novamente o comportamento de "cascata" de valores homoclínicos (ver [31] e [47]).

É importante ressaltar que a idéia de procurar interseções da variedade instável com certos tipos de subconjuntos invariantes do nível zero de energia, procedimento inicial deste algoritmo, foi inspirada em métodos clássicos desenvolvidos por diversos autores. Mas estes métodos sempre se baseavam na existência de uma órbita homoclínica, ou soliton pré-conhecido.

O algoritmo não se baseia em métodos perturbativos de solitons determinados a priori e pode ser aplicado a qualquer família de sistemas que satisfaçam as hipóteses de possuir variedade instável não-vazia e uma função de reversibilidade. Essa última pode ser facilmente construída quando a função Hamiltoniana possui termos de segunda ordem.

Esta é a diferença da abordagem de outros autores e possibilita uma análise ampla no espaço de parâmetros quando, em trabalhos correlatos, encontramos somente casos particulares que possuem alguma simetria ou possibilitem métodos perturbativos.

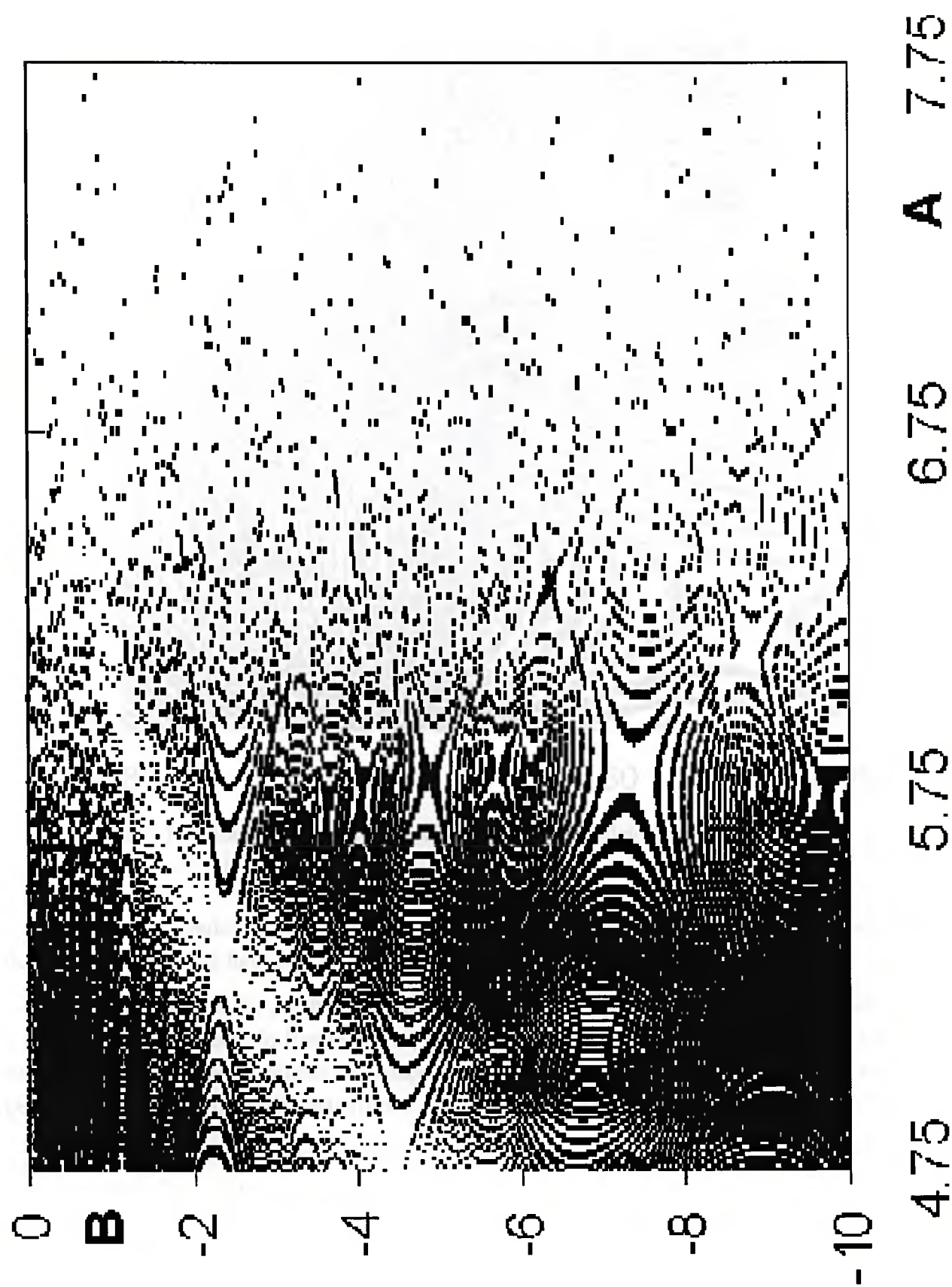


Figura 9.1: Valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$.

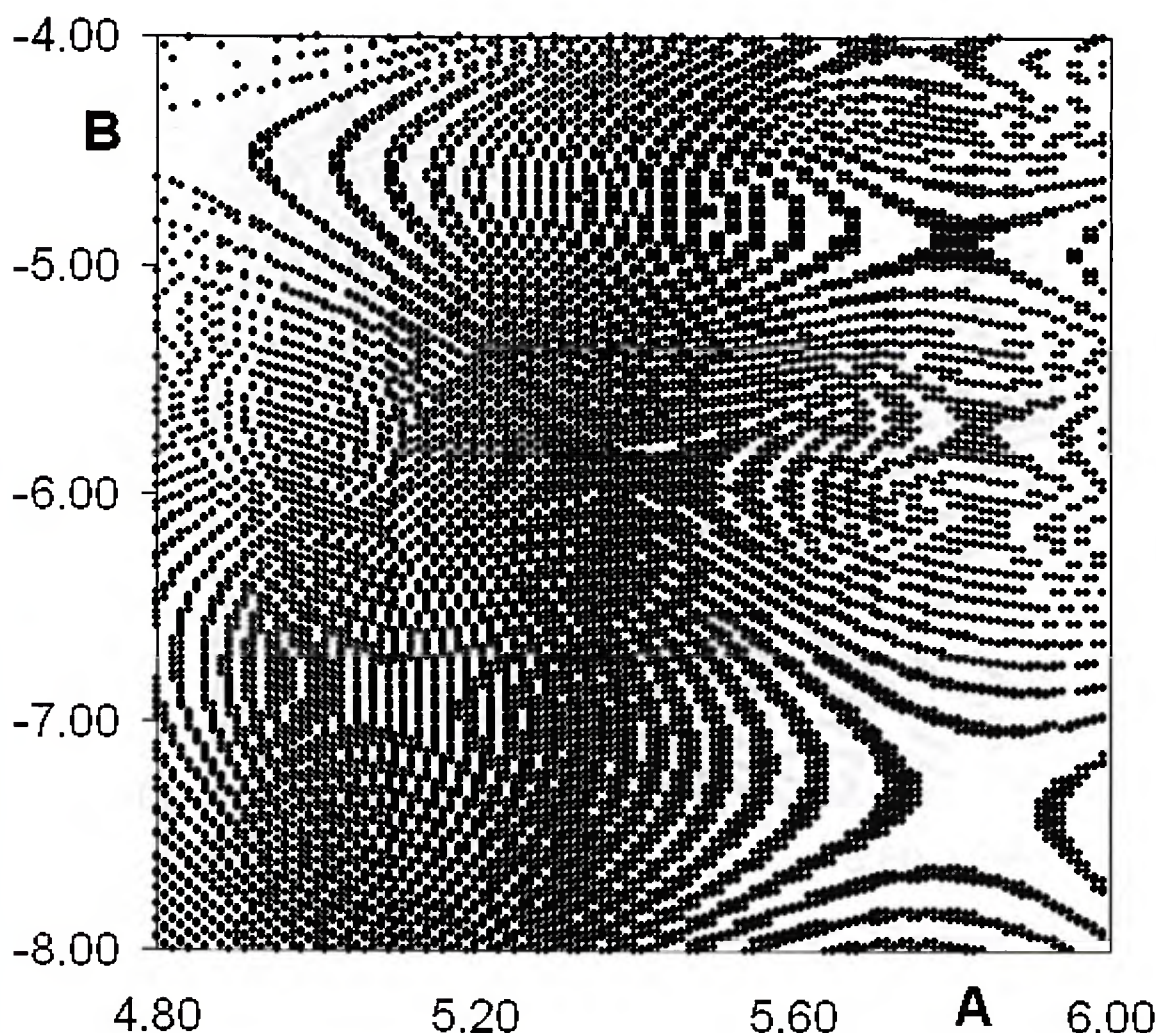


Figura 9.2: Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-8 < b < -4$.

Está demonstrado em [50] a existência de solitons para $b = -1$ no modelo 9.2, como podemos observar nas figuras 9.3 e 9.4.

Na figura 9.4, que foi resultado de uma investigação mais apurada, onde introduzimos o passo 10^{-3} para o método Runge-Kutta, observamos ainda que os solitons fazem parte de um conjunto muito bem definido no espaço de parâmetros $a \times b$. O algoritmo desenvolvido permite uma análise inicial da estrutura e estabilidade estrutural de tal conjunto.

Na figura 9.5 encontramos o gráfico $p_u \times a$ para $b = -1$ que confirma a existência de solitons para $5 < a < 6$ como apontados pela figura 9.4.

Em [56] e [57] encontramos a prova de que, numa vizinhança de $b = -1$, não há solitons para a suficientemente grande para o modelo 9.2, fato que foi confirmado pelo algoritmo e pode ser observado nas figuras 9.1 e 9.6. Nesta última encontramos o gráfico $p_u \times a$ para

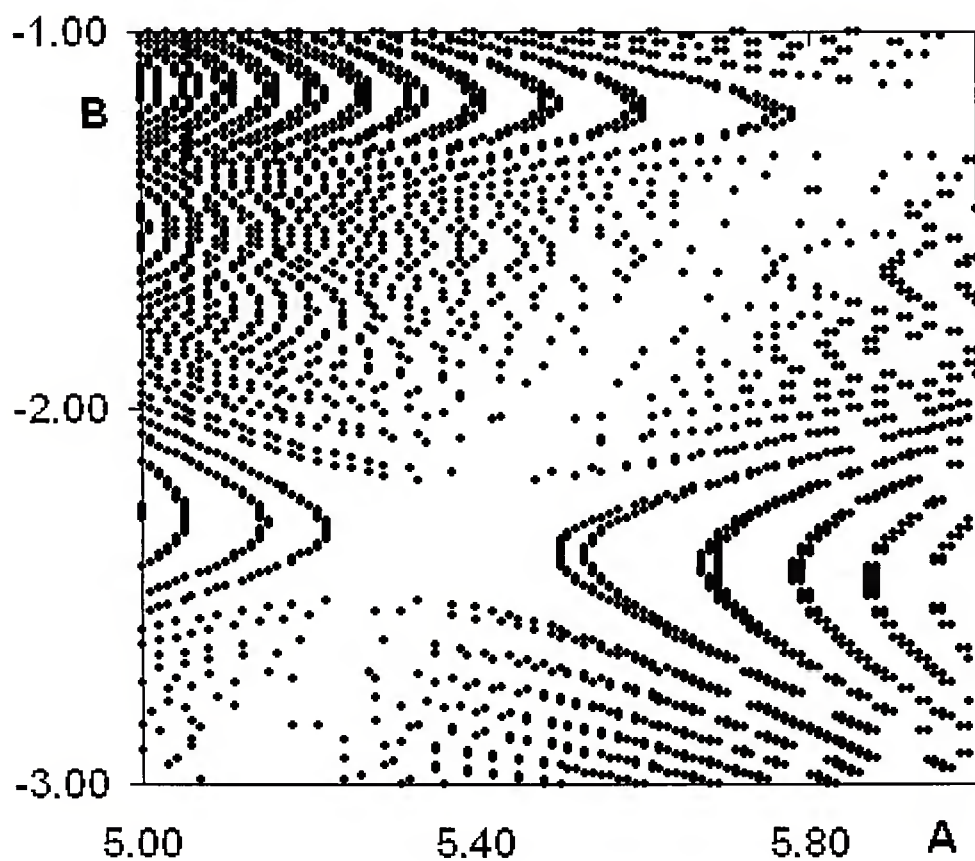


Figura 9.3: Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-3 < b < 1$.

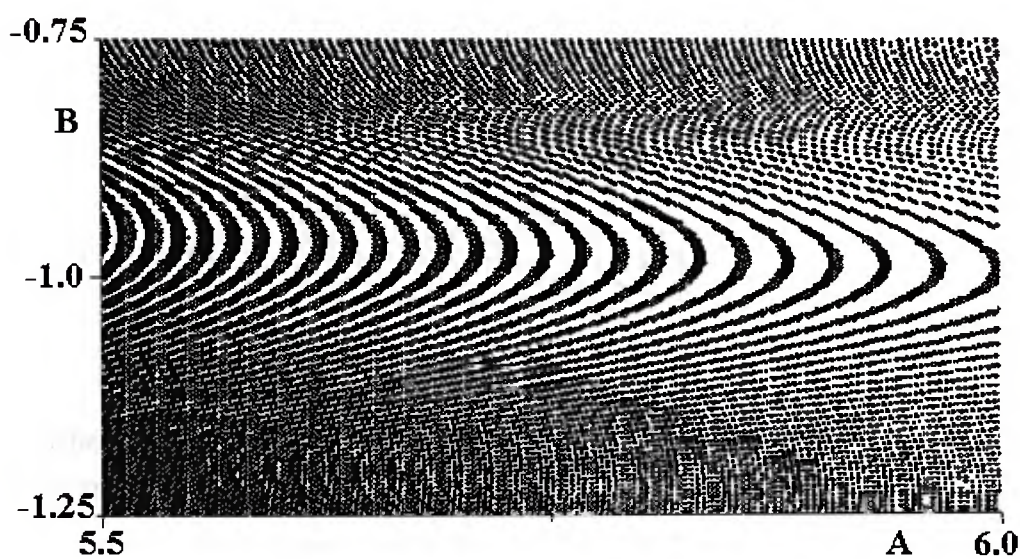


Figura 9.4: Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-1.25 < b < -0.75$.

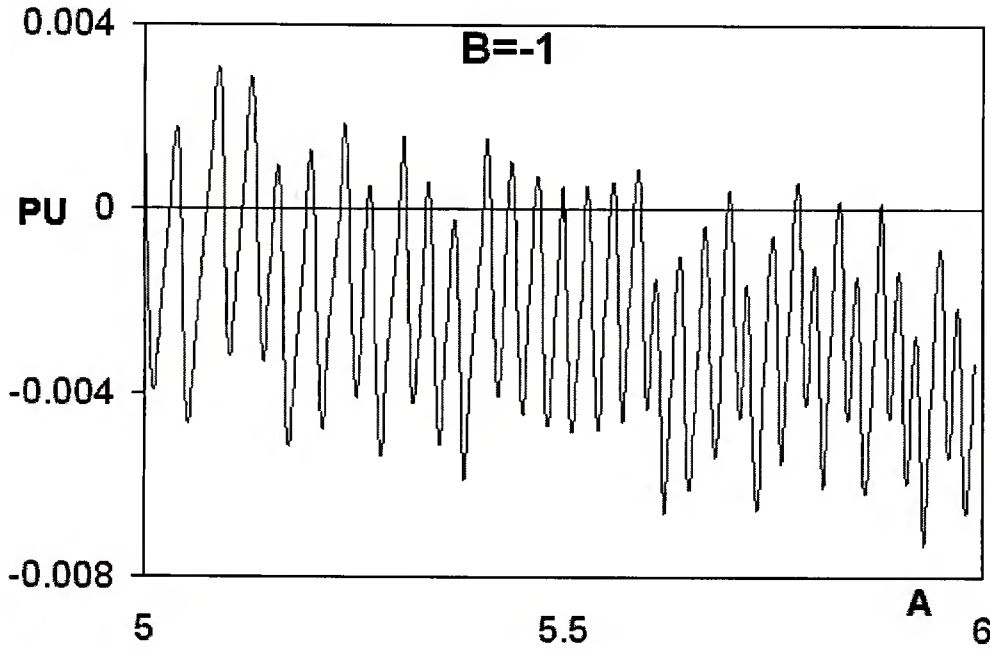


Figura 9.5: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$.

$b = -1$ e valores elevados de a (da ordem de 10^6) onde não existem interseções com o eixo horizontal ($p_u = 0$). Na verdade, a figura 9.1 aponta uma grande dispersão dos solitons para $a > 8$.

Seguindo os passos de 7.4 e 7.5 como feito em 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10 e 7.11, realizamos a análise assintótica para o modelo 6.3, onde a constante de movimento, para $a \rightarrow \infty$, é definida por:

$$H(u, u') = \frac{u'^2}{2} - \underbrace{\frac{u^2}{2} + \int (-bu^2) du}_{V(u)} \quad (9.8)$$

e sua função potencial:

$$V(u) = -\frac{u^2}{2} - \frac{bu^3}{3} \quad (9.9)$$

O gráfico de 9.9 para $b = -1$ pode ser visto na figura 9.7, onde a raiz $u = 1.5040$ é confirmada pelo algoritmo na figura 9.8 para $a \rightarrow \infty$.

Os resultados são similares aos das figuras 7.1, 7.2, 7.5 e 7.6. Mas quando variamos b , particularmente $-2 < b < 0$, encontramos uma superfície potencial (figuras 9.9 e 9.10) que possui característica similar às das figuras 7.11 e 7.10 onde, para certos valores de b , não há raízes para a função $V(u)$ (além de $u = 0$) o que resulta (como visto anteriormente) na não

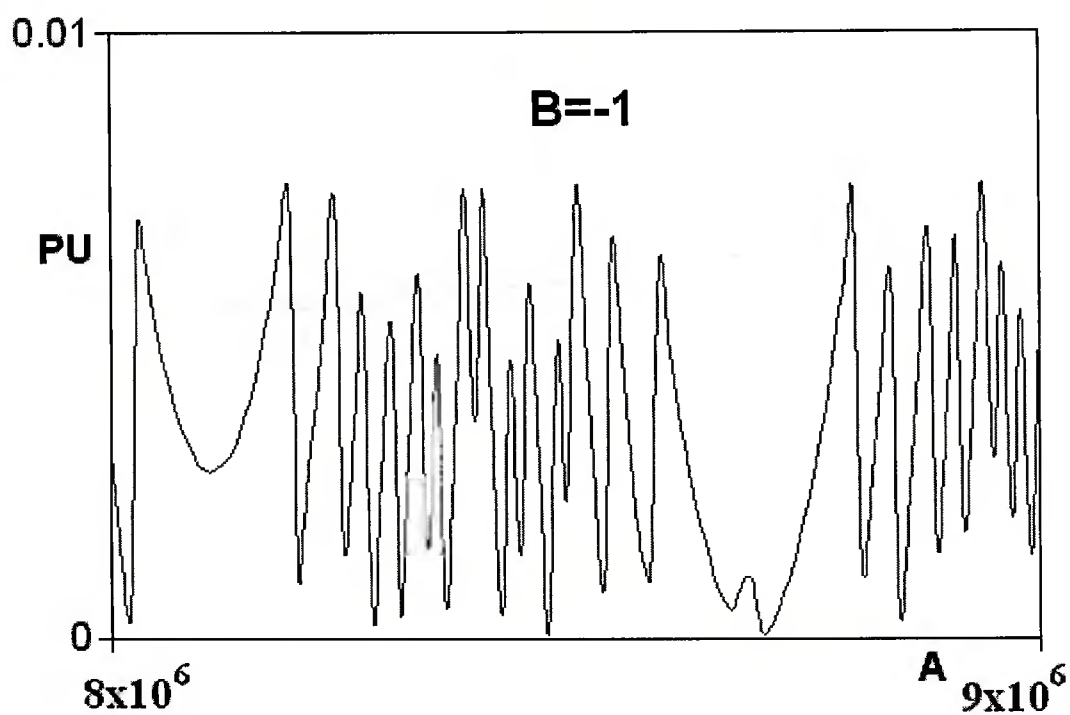


Figura 9.6: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$ e $a \propto 10^6$.

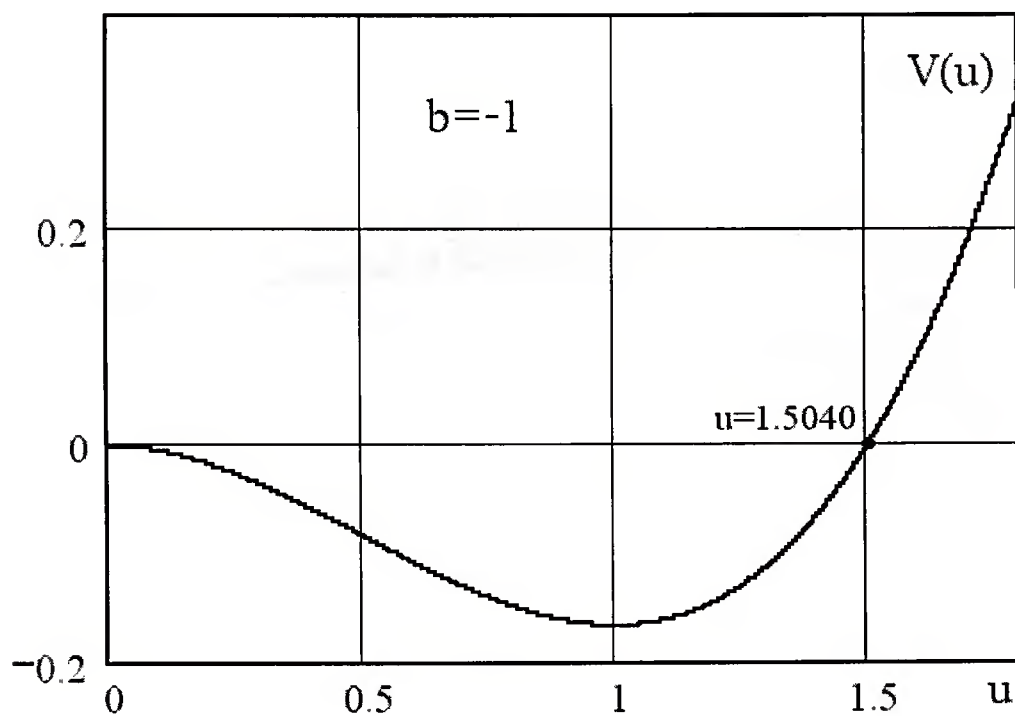


Figura 9.7: Função potencial para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$.

existência de solitons para estes valores quando $a \rightarrow \infty$ (ver figuras 9.1 e 9.11).

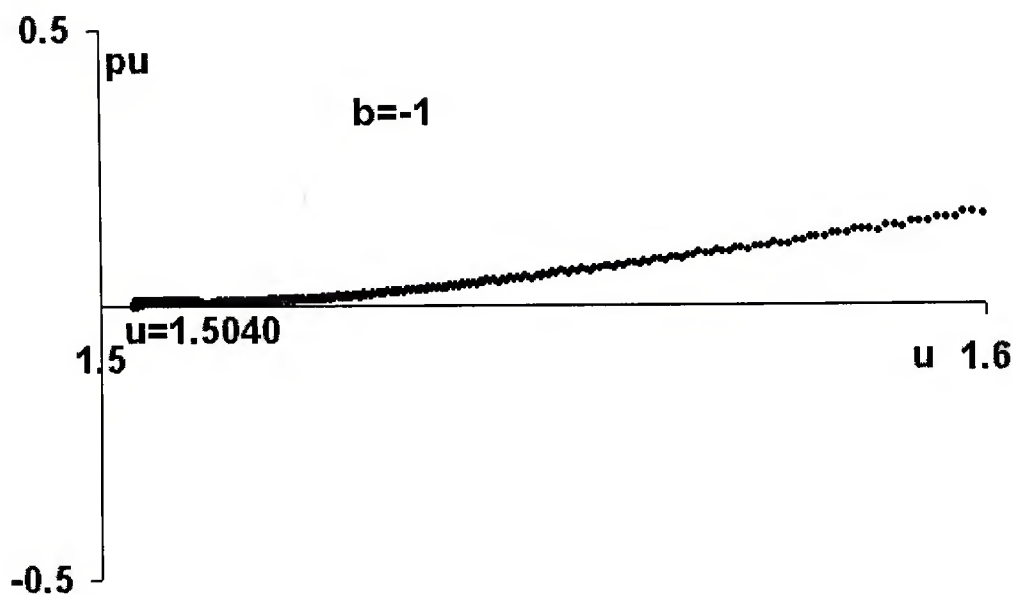


Figura 9.8: Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$.

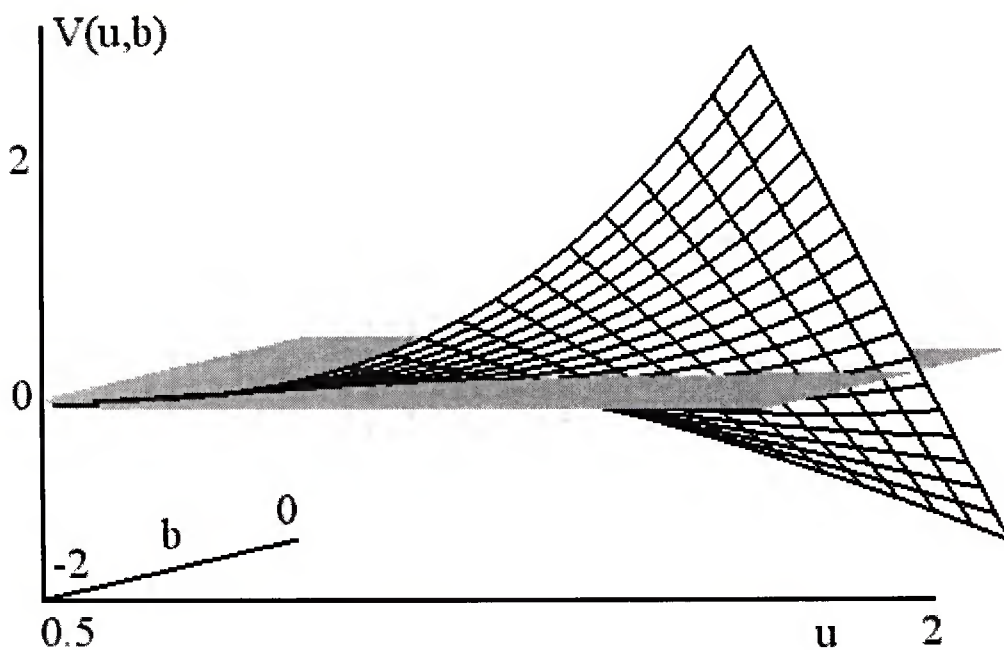


Figura 9.9: Superfície potencial para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-2 < b < 0$.

Na figura 9.12 podemos observar a bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ para $b = -1$. Conforme o parâmetro a “atinge” cada ramificação da figura 9.4, detectamos a mudança de fase destes solitons. Fora das “franjas”, o comportamento da órbita é instável ocorrendo a tendência $u \rightarrow \pm\infty$.

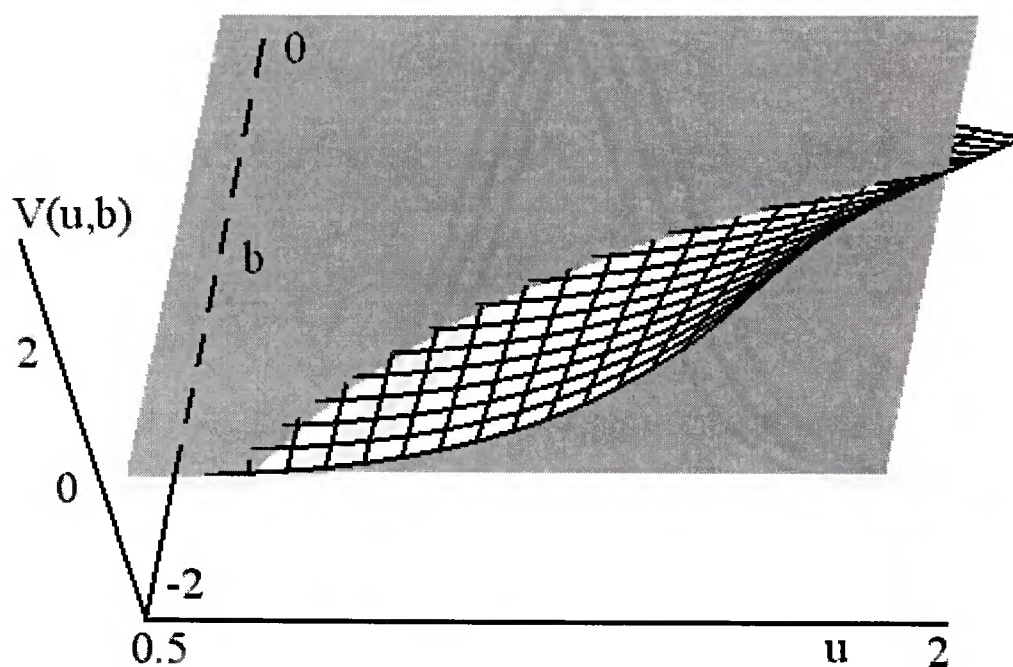


Figura 9.10: Detalhe da superfície potencial para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-2 < b < 0$.

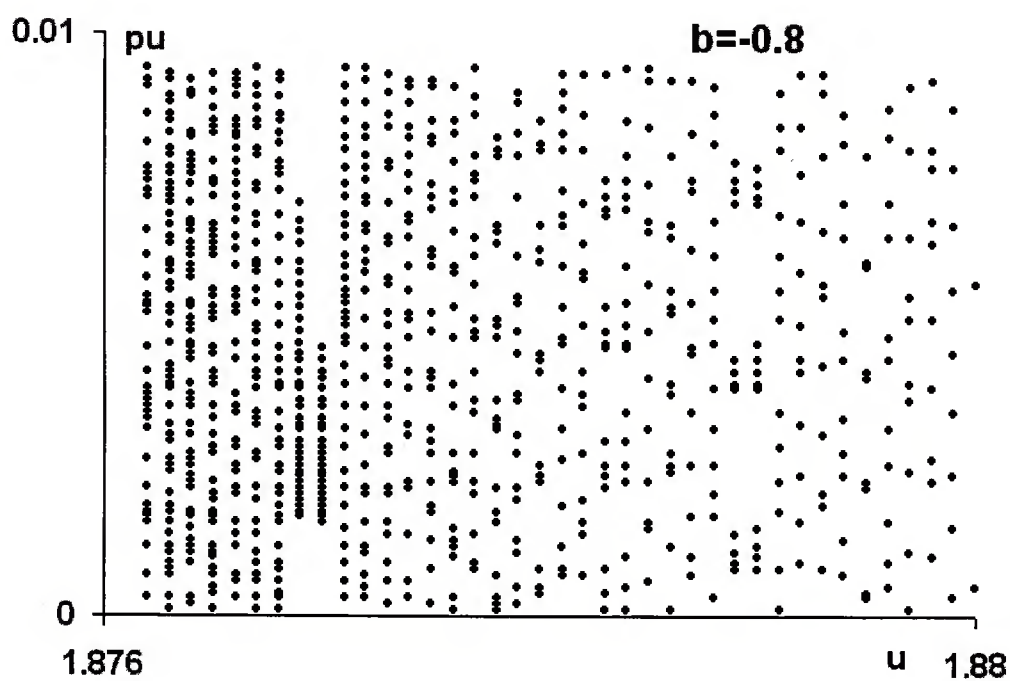


Figura 9.11: Gráfico $p_u \times u$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -0.8$.

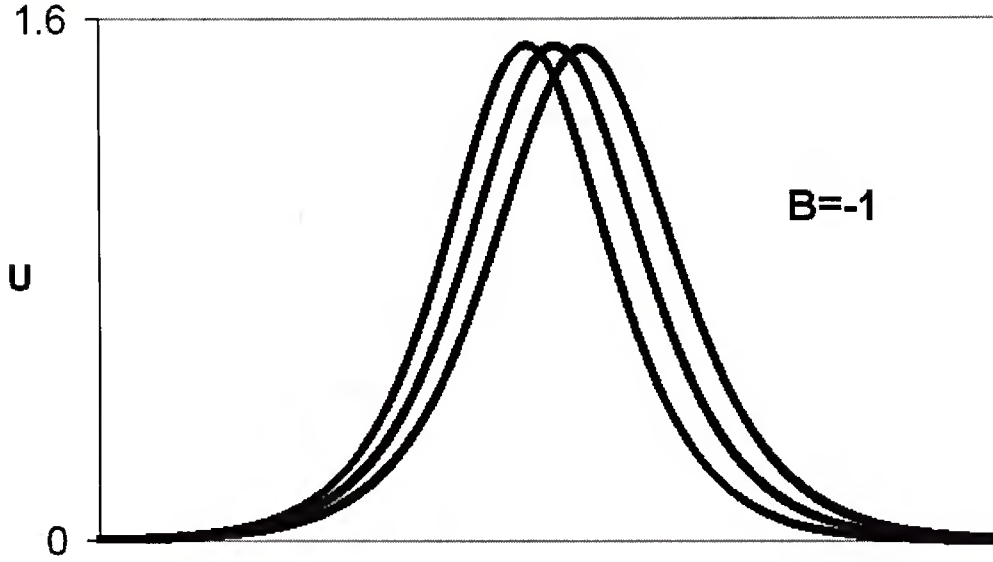


Figura 9.12: Bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$.

Do ponto de vista das superfícies de energia e seções de Poincaré estudadas em capítulo anterior, temos que, para o modelo 9.2:

$$H = p_u v + \frac{p_v^2}{2} + a \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{bu^3}{3}. \quad (9.10)$$

O nível de energia zero Ω tridimensional possui a expressão:

$$\Omega = \left\{ (u, v, p_u, p_v) \mid p_u v + a \frac{v^2}{2} = -\frac{p_v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{bu^3}{3} \right\}. \quad (9.11)$$

O conjunto $\Phi = \Omega \cap \Sigma_1$ bidimensional é definido por:

$$\Phi = \left\{ (u, v, 0, p_v) \mid v = \pm \sqrt{\frac{1}{a} \left[-p_v^2 - u^2 + \frac{2bu^3}{3} \right]} \right\}; a \neq 0. \quad (9.12)$$

Para $b = -1$, extraímos um valor homoclínico da figura 9.4 e podemos observar as projeções dos conjuntos correspondentes Φ , Σ_2 e χ na figura 9.13. Quando a órbita homoclínica atinge o conjunto χ , ocorre o "reflexo" já analisado nos modelos anteriores obtemos o soliton.

Em [58] encontramos evidências numéricas que apontam para uma certa "resistência" dos solitons do modelo 9.2 frente à pequenas perturbações, o que pode ser observado na densidade do conjunto de valores homoclínicos da figuras 9.4.

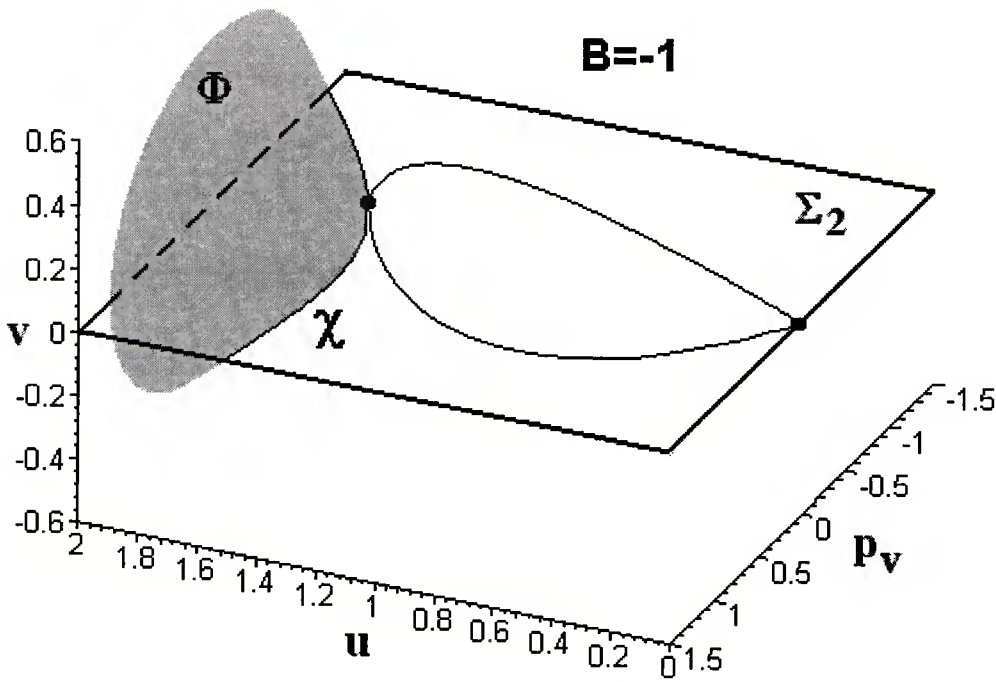


Figura 9.13: Conjuntos Φ , Σ_2 e χ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -1$.

Continuando com a análise de bifurcações, encontramos na figura 9.15 a bifurcação de solitons para $b = -2.25$ que foram confirmados nas figuras 9.3 e 9.14.

Diferente do caso $b = -1$, para $b = -2.25$, quando a “atinge” cada ramificação da figura 9.3, detectamos as mudanças de fase e de amplitude destes solitons. Fora das “franjas”, novamente o comportamento da órbita é $u \rightarrow \pm\infty$.

No detalhe de valores homoclínicos encontrado na figura 9.2, analisamos outra bifurcação de solitons, referente ao valor $b = -7.28$, que foram confirmados na figura 9.16. Ela pode ser observada na figura 9.17 e se assemelha ao caso anterior ($b = -2.25$) onde ocorrem as mudanças de fase e amplitude.

Novamente na figura 9.2 realizamos outra análise de bifurcação, só que deste vez fixando-se o parâmetro a em 5.81. Os solitons obtidos na figura 9.21 foram confirmados pela figura 9.20 como nos procedimentos anteriores, mas nota-se na figura 9.21, diferente dos casos já analisados, uma variação mais acentuada de fase e amplitude, quando o parâmetro b varia de -8 à -6.5 atingindo as diversas “franjas” da figura 9.2. O mesmo comportamento de bifurcação foi observado para $-6.5 < b < -5.5$ e $-3 < b < 2$. Estas regiões podem ser vistas em detalhe nas figuras 9.18 e 9.19.

O algoritmo de detecção de solitons em presença de tensão superficial, apresenta resultados consistentes com as investigações geométricas e analíticas do modelo de aplicação em questão, que também foram confirmados por autores que abordaram casos particulares do

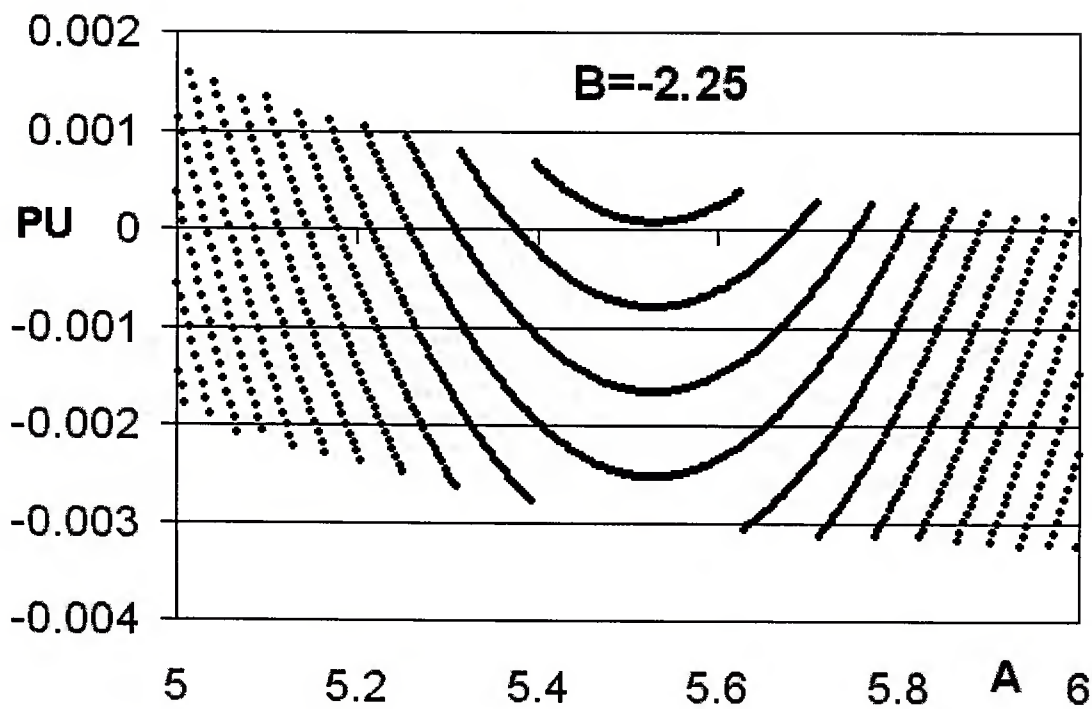


Figura 9.14: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -2.25$.

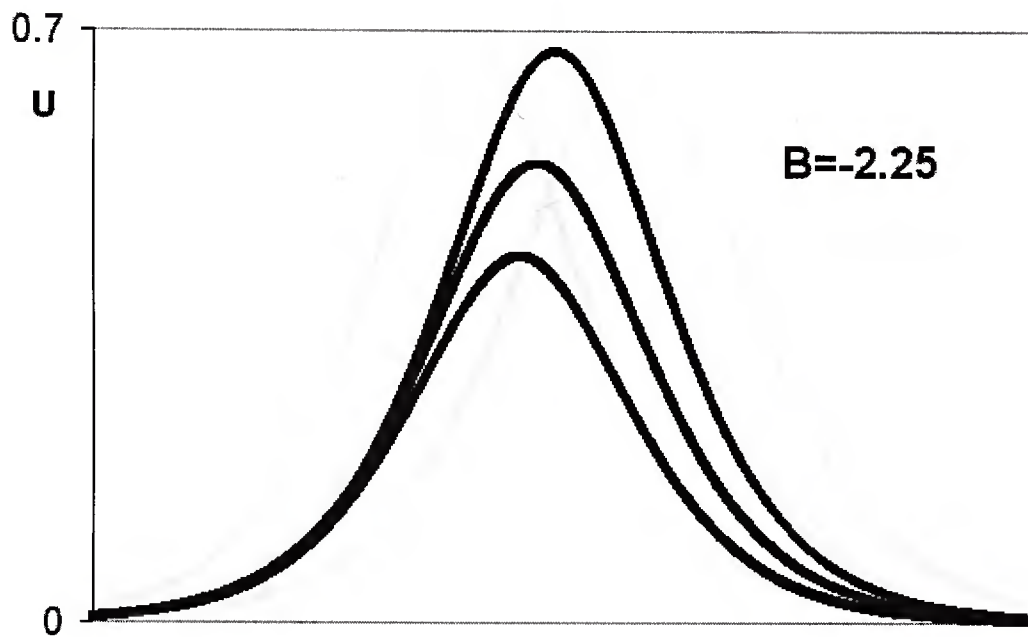


Figura 9.15: Bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -2.25$.

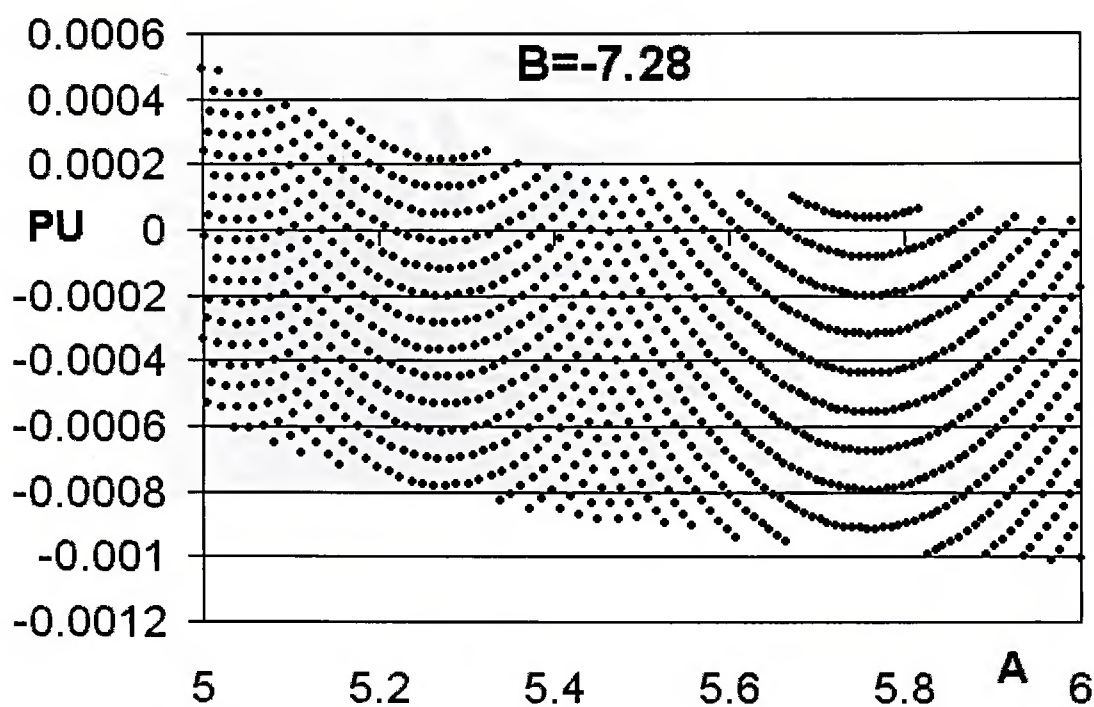


Figura 9.16: Gráfico $p_u \times a$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -7.28$.

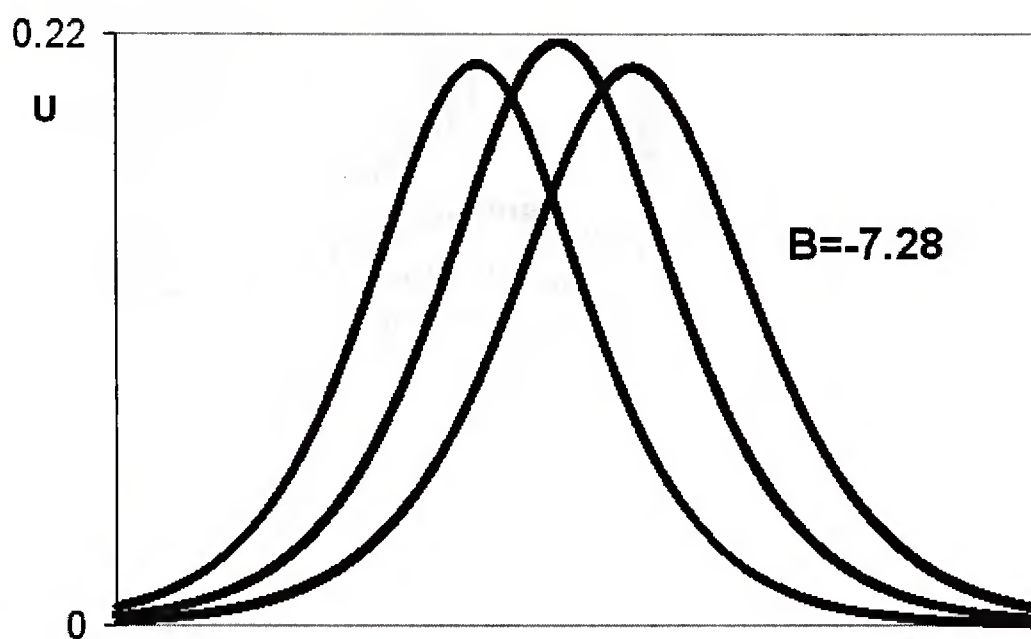


Figura 9.17: Bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $b = -7.28$.

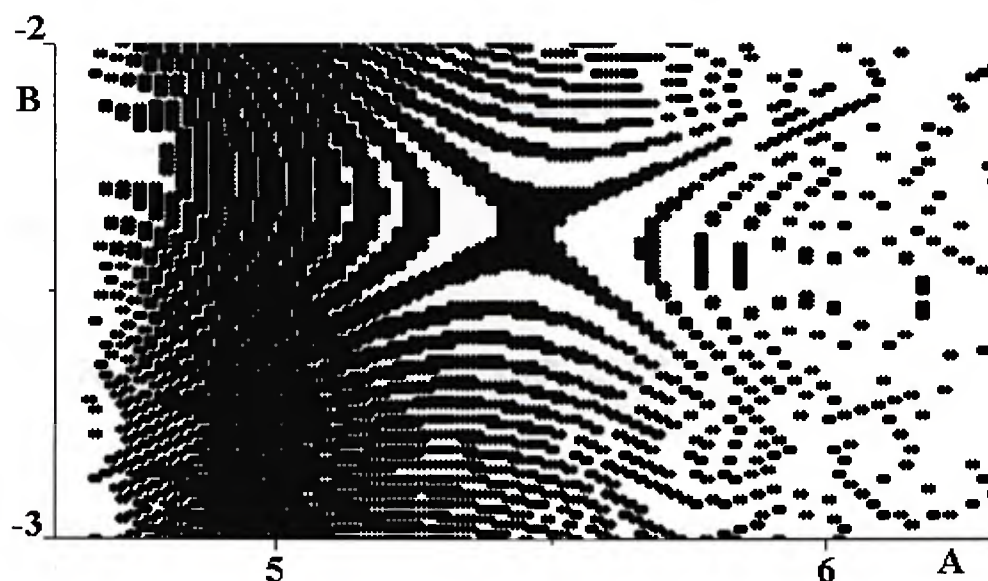


Figura 9.18: Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-3 < b < -2$.

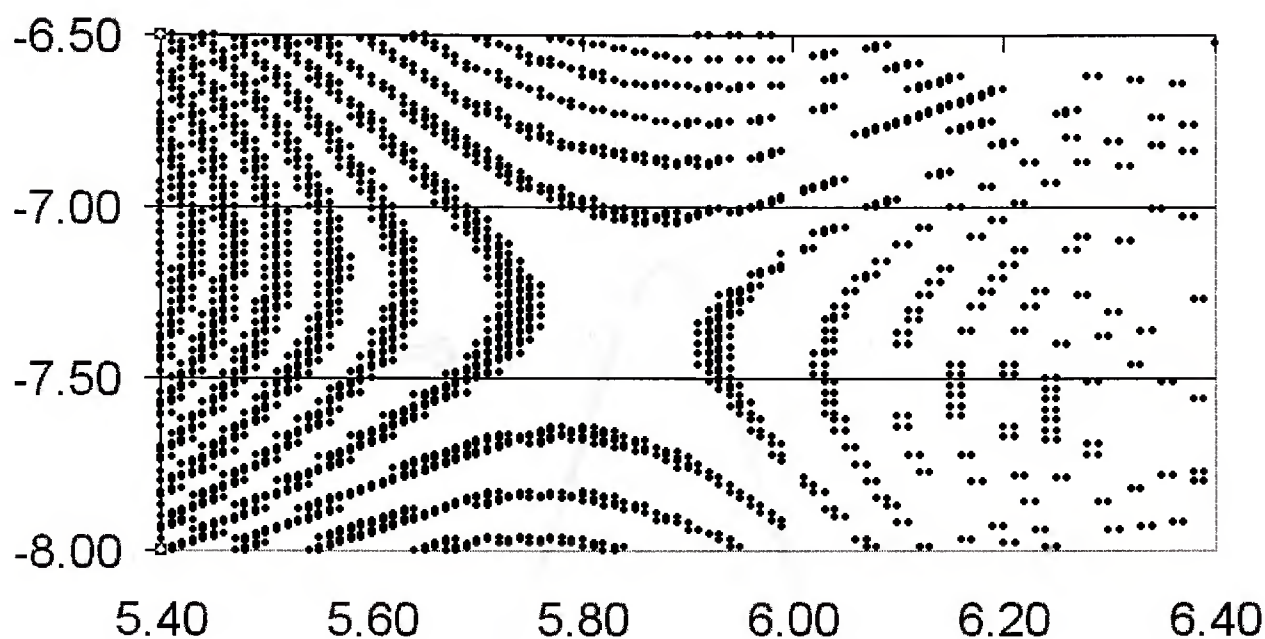


Figura 9.19: Detalhe dos valores homoclínicos para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $-8 < b < -6.5$.

espaço de parâmetros obtido. Mas os resultados atingiram o objetivo deste trabalho, revelando uma configuração geométrica complexa e interessante dos fenômenos de bifurcação e dispersão de solitons, esboçando no espaço de parâmetros curvas para as quais o sistema

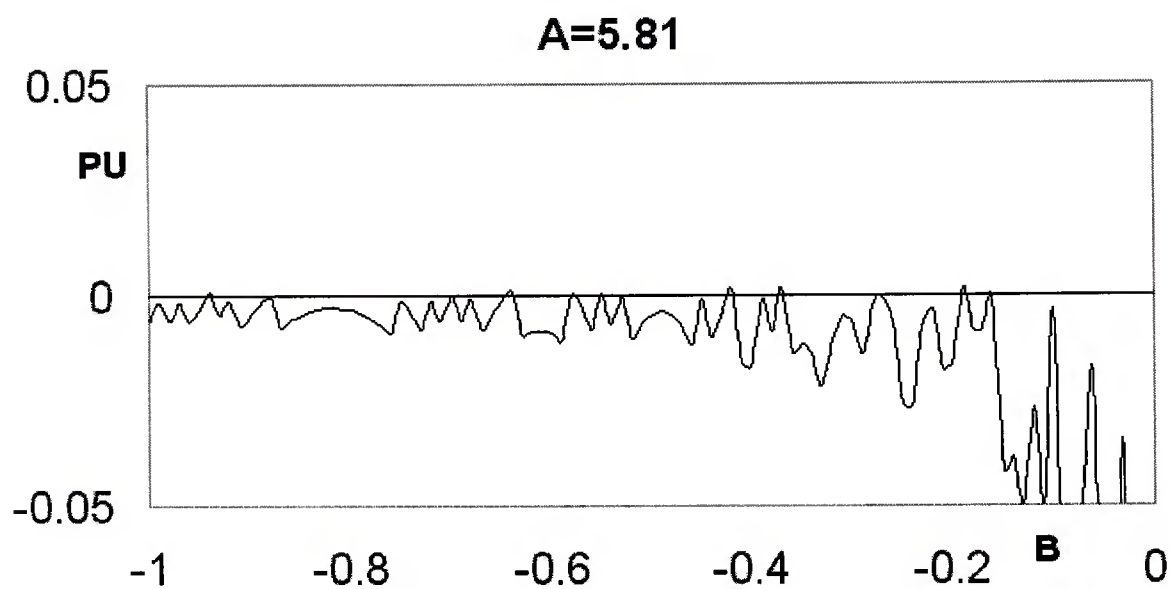


Figura 9.20: Gráfico $p_u \times b$ para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $a = 5.81$.

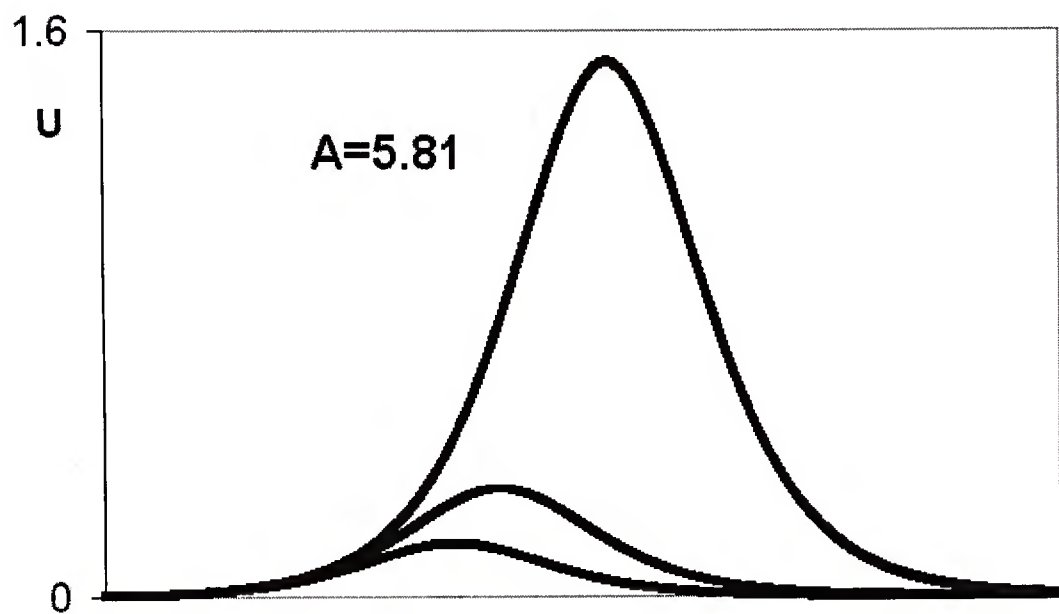


Figura 9.21: Bifurcação de solitons para o modelo $f(u, b) = -bu^2$ com $a = -5.81$.

Hamiltoniano equivalente apresenta a existência destas ondas solitárias, possibilitando uma análise da forma estrutural como estas órbitas se apresentam e sua estabilidade dentro do espaço de campos vetoriais a dois parâmetros, como feito por Sotomayor em [59].

Os resultados deste capítulo deram origem ao artigo *Solitons Bifurcation in Presence of Surface Tension* que foi submetido ao jornal *Chaos, Solitons and Fractals* em junho de 2005.

APÊNDICE A

Descrição do Algoritmo e de Outras Rotinas Utilizadas no Trabalho

Codificado em Delphi, encontra-se abaixo o algoritmo completo de detecção de solitons em presença de tensão superficial. Na figura A.1 podemos observar sua apresentação ao usuário bem como os valores padrão utilizados.

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Classes, Graphics, Controls, Forms, Dialogs,
  StdCtrls, Math;

type
  TForm1 = class(TForm)
    GBParametros: TGroupBox;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    EditAI: TEdit;
    EditBI: TEdit;
    Label3: TLabel;
    EditInc: TEdit;
    Button1: TButton;
    Button2: TButton;
    EditAF: TEdit;
    EditBF: TEdit;
    GBMensagem: TGroupBox;
    Label4: TLabel;
    EditSaidaA: TEdit;
```

```

Label5: TLabel;
EditSaidaB: TEdit;
Label6: TLabel;
EditErro: TEdit;
Label7: TLabel;
EditEnergia: TEdit;
Label8: TLabel;
EditStatus: TEdit;
Label9: TLabel;
EditQVH: TEdit;
Label10: TLabel;
EditRK: TEdit;
Label11: TLabel;
EditLim: TEdit;
procedure Button2Click(Sender: TObject);
procedure Button1Click(Sender: TObject);
private
    { Private declarations }
public
    { Public declarations }
end;

var
    Form1: TForm1;

implementation

{$R *.DFM}

type
    vetor=array[1..4] of extended;
var
    arq:textfile;                                //arquivo de dados

// Função Hamiltoniana:
function HAMILTON(x:vetor;a,b:real):real;
begin
    HAMILTON:=x[3]*x[2] + power(x[4],2)/2 + a*power(x[2],2)/2
+ power(x[1],2)/2 + b* power(x[1],3)/3;
end;

```

```
// Definição do Campo Vetorial:
```

```
function CV(x:vetor;a,b:real):vetor;
```

```
begin
```

```
    CV[1]:=x[2];
```

```
    CV[2]:=x[4];
```

```
    CV[3]:=-x[1]-b*power(x[1],2);
```

```
    CV[4]:=-x[3]-a*x[2];
```

```
end;
```

```
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
```

```
begin
```

```
close;
```

```
end;
```

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
```

```
var
```

```
    a,b:real;           //parametros
```

```
    astr,bstr:string;   //parametros para gravação
```

```
    eigen:extended;     //autovalor relativo a variedade instavel
```

```
    ai,af,bi,bf:real;    //limite iniciais e finais dos parâmetros
```

```
    inc:real;           //incremento
```

```
    x,xa:vetor;         //posição e vetor auxiliar;
```

```
    k1,k2,k3,k4:vetor;   //constantes do metodo Runge-Kutta
```

```
    n:integer;          //numero de iteracoes
```

```
    qvh:integer;        //quantidade de valores homoclínicos
```

```
    cont:integer;       //contador
```

```
    v:extended;         //estudo do sinal de v (ou x[2])
```

```
    modulo:extended;    //modulo de do vetor x
```

```
    limite:real;        //limite para multiplo do autovetor
```

```
    h:real;             //intervalo para o metodo Runge-Kutta
```

```
const    lim_int:integer=1000000;    //numero maximo de iteracoes
```

```
begin
```

```
    assignfile(arq,'DADOS.DAT');
```

```
    rewrite(arq);
```

```
    ai:=strtofloat(EditAI.Text);
```

```
    af:=strtofloat(EditAF.Text);
```

```
    bi:=strtofloat(EditBI.Text);
```

```

bf:=strtofloat(EditBF.Text);
inc:=strtofloat(EditInc.text);
h:=strtofloat(EditRK.text);
limite:=strtofloat(EditLim.text);

b:=bi;
qvh:=0;

//loop do parâmetro b
while b<=bf do
begin
  EDITSaidaB.text:=floattostr(b);
  GBMensagem.update;
  v:=0;

  //loop do parâmetro a
  a:=ai;
  while a<=af do
  begin
    EDITSaidaA.text:=floattostr(a);
    EDITStatus.text:='';
    EditErro.text:='';
    GBMensagem.update;

    // Calcula autovalor relativo a variedade instavel:
    eigen:=sqrt(-2*a+2*sqrt(power(a,2)+4))/2 ;

    // Calcula autovetor relativo a variedade instavel:
    x[1]:=1/power(eigen,2);
    x[2]:=1/eigen;
    x[3]:=-1/power(eigen,3);
    x[4]:=1;

    // Determina um multiplo do autovetor unitario com modulo pequeno:
    modulo:=sqrt(power(x[1],2)+power(x[2],2)+power(x[3],2)+power(x[4],2));
    for cont:=1 to 4 do x[cont]:=x[cont]*(limite/modulo);

    //Exibe energia do novo autovetor

```

```

editenergia.text:=floattostr(abs(HAMILTON(x,a,b)));

n:=1; //inicia numero de iteracoes

//Enquanto o numero de iteracoes for menor que o limite
while n<=lim_int do
begin

    //Controle da energia de x:
    if abs(HAMILTON(x,a,b))>limite then
    begin
        editerro.text:='Energia alta !';
        n:=lim_int; //encerra iteracoes
    end;

    //Metodo Runge-Kutta de 4 ordem para  $x'=f(x)$  com  $x(0)=0$ :
    //Calculo de k1:

    k1[1]:=h*CV(x,a,b)[1];
    k1[2]:=h*CV(x,a,b)[2];
    k1[3]:=h*CV(x,a,b)[3];
    k1[4]:=h*CV(x,a,b)[4];

    //Calculo de k2:
    for cont:=1 to 4 do xa[cont]:=x[cont]+k1[cont]/2;
    k2[1]:=h*CV(xa,a,b)[1];
    k2[2]:=h*CV(xa,a,b)[2];
    k2[3]:=h*CV(xa,a,b)[3];
    k2[4]:=h*CV(xa,a,b)[4];

    //Calculo de k3:
    for cont:=1 to 4 do xa[cont]:=x[cont]+k2[cont]/2;
    k3[1]:=h*CV(xa,a,b)[1];
    k3[2]:=h*CV(xa,a,b)[2];
    k3[3]:=h*CV(xa,a,b)[3];
    k3[4]:=h*CV(xa,a,b)[4];

    //Calculo de k4:
    for cont:=1 to 4 do xa[cont]:=x[cont]+k3[cont];

```

```

k4[1]:=h*CV(xa,a,b)[1];
k4[2]:=h*CV(xa,a,b)[2];
k4[3]:=h*CV(xa,a,b)[3];
k4[4]:=h*CV(xa,a,b)[4];

for cont:=1 to 4 do
xa[cont]:=x[cont]+(k1[cont]+2*k2[cont]+2*k3[cont]+k4[cont])/6;

//Se pu (ou x[3]) muda de sinal encerra as interacoes e
//verifica se v (ou x[2]) tambem mudou de sinal.
//Se v mudou de sinal a,b e valor homoclinico.
if x[3]*xa[3]<0 then
begin
  EDITStatus.text:='PU trocou de sinal !';

  if v*xa[2]<0 then
  begin
    qvh:=qvh+1;
    EDITQVH.text:=inttostr(qvh);
    str(a:10:3, astr);
    str(b:10:3, bstr);
    writeln(arq, astr+' '+bstr);
  end;

  v:=xa[2];    //update de v
  n:=lim_int;  //encerra as interacoes

end;

for cont:=1 to 4 do x[cont]:=xa[cont]; //update de x
n:=n+1;

end;    //fim das iteracoes

a:=a+inc;

end;    //fim do loop para o parâmetro a

b:=b+inc;

```

```

end;          //fim do loop para o parâmetro b

GBMensagem.update;
closefile(arq);

end;

end.

```

Solitons para o modelo $f(u,b)=-bu^2$

Parâmetros

Entre com o valores inicial e final do parâmetro a: 5 6

Entre com o valores inicial e final do parâmetro b: -2 -1.5

Entre com o incremento: 0.01

Intervalo para o método Runge-Kutta: 0.01

Limite para a Energia: 0.0001

Iniciar **Encerrar**

Mensagens

Parâmetro a: 5.99999999999998 Parâmetro b: -1.51 Energia: 2.52549122254018E-14

Status: PU trocou de sinal! Quantidade de Valores Homoclínicos: 1742

Erro:

Figura A.1: Tela de apresentação do algoritmo de detecção de solitons codificado em Delphi.

Na figura A.2 encontramos parte do processo de análise assintótica realizada no pacote Mathcad utilizada para verificar a propagação de erros do algortimo do modelo de detecção de solitons.

Os comandos abaixo do pacote Maple e do pacote Mathcad (figura A.3) foram utilizados para a construção das seções de Poincaré e superfícies de energia que corroboraram as órbitas calculadas pelo algoritmo.

$$V(u, b) := \frac{-u^2}{2} - b \cdot \frac{u^3}{3}$$
 endpoints of the u range: $ulow := 0.5$ $uhigh := 2$
 number of divisions of u range: $un := 20$
 endpoints of the b range: $blow := -2$ $bhigh := -0.1$
 number of divisions of b range: $bn := 20$
 $i := 0 .. un - 1$ $uind_i := ulow + i \cdot \frac{uhigh - ulow}{un - 1}$
 $j := 0 .. bn - 1$ $bind_j := blow + j \cdot \frac{bhigh - blow}{bn - 1}$
 $M_{i,j} := V(uind_i, bind_j)$

Figura A.2: Comandos do Mathcad utilizados no estudo assintótico do trabalho.

```

with(DEtools):
grafico:=proc(a,b,int)
with(DEtools):
H := p1*q2+(p2^2)/2+a*(q2^2)/2+(q1^2)/2+b*(q1^3)/3:
eigen:=evalf(sqrt(-2*a+2*sqrt(a^2+4))/2):
q1a:=evalf(a+eigen^2):
q2a:=evalf(eigen^3+a*eigen):
p1a:=evalf(-eigen-a*(eigen^3+a*eigen)):
p2a:=1.0:
m:=sqrt(q1a^2+q2a^2+p1a^2+p2a^2):
e:=10^(-3):
q1b:=q1a*e/m:
q2b:=q2a*e/m:
p1b:=p1a*e/m:
p2b:=p2a*e/m:
poincare(H,t=0..int,\{[0,p1b,p2b,q1b,q2b]\,stepsize=.01,iterations=1,
scene=[q1=-2..2,p1=-2..2,q2=-2..2],3);

A:=grafico(5,-1,40):

```

B:=grafico(5.5,-1,40):

```

Extrair(pontos) :=
  count ← 0
  for i ∈ 0..pontos - 1
    x ← 0 +  $\frac{i \cdot 2}{pontos - 1}$ 
    for j ∈ 0..pontos - 1
      y ← -2.1 +  $\frac{j \cdot 3}{pontos - 1}$ 
      valor ←  $\frac{1}{a}(-y^2 - x^2 + 2 \cdot F(x, b))$ 
      if valor ≥ 0
         $V^{count} \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{\text{valor}} \end{pmatrix}$ 
        count ← count + 1
  VT

```

Figura A.3: Algoritmo de construção de superfícies de energia de forma implícita para o pacote Mathcad.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]Department of Mathematics of Heriot-Watt University. John scott russell and the solitary wave. <http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott-russell.html>, último acesso: dezembro de 2004.
- [2]A. D. D. Craik. The origins of water wave theory. *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, 36:1–28, 2004.
- [3]Soliton Home Page at Heriot-Watt. John scott russell's soliton wave re-created. <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>, último acesso: dezembro de 2004.
- [4]J. S. Russell. *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. John Murray, London, 1844.
- [5]John W. Miles. Solitary waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 12:11–43, 1980.
- [6]G. Green. On the motion of waves in a variable canal of small depth and width. *Trans. Camb. Philos. Soc.*, 6:457–462, 1838.
- [7]P. Keeland. On the theory of waves, part 1. *Trans. R. Soc. Edinburgh*, 14:497–545, 1840.
- [8]G. G. Stokes. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 8:441–473, 1847.
- [9]D. J. Korteweg; F. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.*, 39:422–443, 1895.
- [10]John W. Miles. The korteweg-de vries equation, a historical essay. *J. Fluid Mech.*, 106:131–147, 1981.
- [11]M. Cardona et al. *Solitons. Mathematical Methods for Physicists*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [12]G. L. Jr. Lamb. *Elements of Soliton Theory*. Wiley, New York, 1980.
- [13]N. J. Zabusky; M. D. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Let.*, 15:240–243, 1965.
- [14]R. M. Miura; C. S. Gardner; M. D. Kruskal. Korteweg-de vries equation and generalizations. ii. existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys.*, 9:1204–1209, 1968.

- [15]M. Tabor. *Nonlinear Evolution Equations and Solitons*. Wiley, New York, 1989.
- [16]J. P. Boyd. Solitons from sine waves: Analytical and numerical methods of non-integrable solitary and cnoidal waves. *Physica D*, 21:227–246, 1986.
- [17]E. Infield; G. Rowlands. *Nonlinear Waves, Solitons, and Chaos*. Cambridge University Press, England, 2000.
- [18]M. J. Ablowitz; P. A. Clarkson. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. London Math. Soc. 149, CUP, Cambridge, 1991.
- [19]F. Calogero; Degasperis. *A. Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*. North-Holland, New York, 1982.
- [20]Soliton wave receives crowd of admirers. *Nature*, 6535:373, 1995.
- [21]K. K. Perring; T. H. Skyrme. A model uniform field equation. *Nucl. Phys.*, 31:550–555, 1962.
- [22]A. Barone et al. Theory and applications of the sine-gordon equation. *Riv. Nuovo Cim.*, 1:227–267, 1971.
- [23]A. R. Bishop; T. Schneider. *Solitons and Condensed Matter Physics*. Springer-Verlag, 1981.
- [24]A. S. Davidov. *Solitons in Molecular Systems*. Dordrecht, Netherlands, 1985.
- [25]J. D. Gibbon et al. The sine-gordon equation as a model for a rapidly rotating baroclinic fluid. *Phys. Script.*, 20:402–408, 1979.
- [26]A. S. Sherman; C. S. Peskin. A monte carlo method for scalar reaction diffusion equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:1360–1372, 1986.
- [27]D. Zwillinger. *Handbook of Differential Equations*. Boston, MA: Academic Press, 1997.
- [28]J. Gukenheimer; P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [29]C. Sparrow; P. Glendinning. Local and global behaviour near homoclinic orbits. *J. Stat. Phys.*, 35:645–696, 1994.
- [30]L.M. Lerman. Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a saddle-center. *Selecta Math. Sov.*, 10:297–306, 1991.
- [31]A. Mielke; P. Holmes; O. O'Reilly. Cascade of homoclinic orbits to, and chaos near, a hamiltonian saddle-center. *J. Dyn. Diff. Eqns.*, 4:95–126, 1992.

- [32]C. G. Ragazzo. Irregular dynamics and homoclinic orbits to hamiltonian saddle-centers. *Comm. Pure Appl. Math.*, 50:105–147, 1997.
- [33]C. G. Ragazzo. On the stability of double homoclinic loops. *Comm. Math. Phys.*, 184:251–272, 1997.
- [34]C. G. Ragazzo. Stability of homoclinic orbits, scattering, and diffusion in phase space. *Phy. Lett. A*, 230:183–189, 1997.
- [35]C. J. Amick; K. Kirchgässner. A theory of solitary water waves in presence of surface tension. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 105:1–49, 1989.
- [36]J. M. T. Thompson; L. N. Virgin. Spatial chaos and localization phenomena in nonlinear elasticity. *Phys. Lett. A*, 126:491–496, 1988.
- [37]G. W. Hunt; H. M. Bolt; J. M. T. Thompson. Structural localisation phenomena and the dynamical phase-space analogy. *Proc. R. Soc. London A*, 425:245–267, 1989.
- [38]G. W. Hunt; M. K. Wadee. Comparative lagrangian formulations for localised buckling. *Proc. R. Soc. London A*, 434:485–502, 1991.
- [39]M. Khurram Wadee; Ciprian D. Coman; Andrew P. Bassom. Solitary wave interaction phenomena in a strut buckling model incorporation restabilisation. *Physica D*, 163:26–48, 2002.
- [40]G. T. Dee; W. Van Saarloos. Bistable systems with propagation leading to pattern formation. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2641–2644, 1988.
- [41]L. A. Peletier; W. C. Troy. Spatial patterns described by the extended fisher-kolmogorov (efk) equation:kinks. *Diff. Int. Eq.*, 8:1279–1304, 1995.
- [42]L. A. Peletier; W. C. Troy; R. C. A. M. Van Der Vorst. Stationary solutions of a fourth order nonlinear diffusion equation. *Diff. Eq.*, 31:327–338, 1995.
- [43]Guillemin; Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, New York, 1974.
- [44]S. Wiggins. *Global Bifurcation and Chaos*. Applied Mathematical Sciences 73, Springer-Verlag, 1988.
- [45]Edward Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [46]V.I. Arnold; A. Avez. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Addison-Wesley, New York, 1967.
- [47]A.R. Champneys. Homoclinic orbits irreversible systems and their applications in mechanics, fluids and optics. *Physica D*, 112:158–186, 1998.

- [48]C. G. Ragazzo. *Homoclinic orbits for $u^{iv} + au'' - u + f(u, b) = 0$* . Equadiff95: International Conference on Differential Equations , Singapore, World Scientif, 1998.
- [49]B. Buffoni; A. R. Champneys; J. F. Toland. Bifurcation and coalescence of plethora of homoclinic orbits for a hamiltonian system. page Available from FTP.MATHS.BATH.AC.UK:PUB/PREPRINTS, Preprint 1997.
- [50]J. F. Toland and C. J. Amick. Homoclinic orbits in the dynamic phase-space analogy of an elastic strut. *Euro. Jnl. Appl. Math*, 3:97–114, 1992.
- [51]Soto-Crespo et al. Bifurcations and multiple-period soliton pulsations in a passively mode-locked fiber laser. *Physical Review E*, 70:1–11, 2004.
- [52]L. M. Zhao et al. Observation of period-doubling bifurcations in a femtosecond fiber soliton laser with dispersion management cavity. *Optics Express*, 12:4573–4578, 2004.
- [53]M.H. Jensen et al. Pinning-free soliton lattices and bifurcation in a discrete double-well model: exact results. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 16:4369–4375, 1983.
- [54]J.T. Beale. Exact solitary water-waves with capillary ripples at infinity. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7:517–550, 1954.
- [55]W. Craig; M.D. Groves. Hamiltonian long-wave approximation to the water-wave problem. *Wave Motion*, 19:367–389, 1994.
- [56]C.J. Amick; J.B. McLeod. A singular perturbation problem in water-waves. *Stability Appl. Anal. Continuos Media*, 1:127–148, 1991.
- [57]J. M. Hammersley; G. Mazzarino. Computational aspects of some autonomous differential equations. *Proc. Roy Soc. London A*, 424:19–37, 1989.
- [58]A. R. Champneys; M. D. Groves. A global investigation of solitary wave solution to a two-parameter model for water waves. *J. Fluid Mech.*, 342:199–229, 1997.
- [59]J. Sotomayor. Introduccion al estudio de las bifurcaciones de los sistemas dinamicos. *VII Escuela LatinoAmericana de Matematicas*, Universidad Simon Bolivar, 1994.

