

Jussara Longhi da Silva Figueiredo

Spinors e o Espaço Tempo: Aspectos Geométricos

1910000710



UNESP - Universidade Estadual Paulista

IBILCE - Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas

Dissertação de Mestrado

Título ***Spinors e o espaço-tempo: aspectos
geométricos***

*Spinors e o espaço tempo: aspectos
geométricos*

Jussara Longhi da Silva Figueiredo

Aluna: Jussara Longhi da Silva Figueiredo

Orientador: Manoel Ferreira Borges Neto

Local e data da defesa: Câmpus da UNESP, São José do Rio Preto (SP),

em 07.12.1995



UNESP - Universidade Estadual Paulista

IBILCE - Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas

Dissertação de Mestrado

Título :

**Spinors e o espaço tempo: aspectos
geométricos**

Aluna: Jussara Longhi da Silva Figueiredo

Orientador: Manoel Ferreira Borges Neto

Local e data da defesa: Câmpus da UNESP, São José do Rio Preto (SP),

em 07.12.1995



710/96

Dedicatória

***Ao meu esposo Israel, companheiro
paciente de todos os momentos. Nos
méritos de minha conquista, há muito
de sua presença.***

***À minha mãe Wanda, presença terna e
carinhosa, pelo incentivo ao presente
trabalho.***

Agradecimento

Abstract

***Ao Professor Manoel Ferreira Borges Neto,
orientador que dedicou seu tempo e
compartilhou sua experiência, pelo seu
amável interesse em meus esforços,
encontrando-me de forma apreciável.***

"SPINORS AND SPACE-TIME : GEOMETRICAL ASPECTS"

Abstract

The spinor plays a fundamental role in the quantum field theory (especially in its relativistic form) but its overall structure and physical significance are still not clear.

In this dissertation I re-examine some intuitive mathematical views of both the nonrelativistic spinor so called Pauli spinor, and the relativistic one Dirac spinor , trying to bring out aspects of the relation of the spinor to geometry.

Roughly, one can think of spinors as square roots of vectors; it takes the product of a spinor with its complex conjugate to make a vector. It is therefore natural to regard spinors as the primitive objects from which vectors and tensors can be built.

"SPINORS E O ESPAÇO-TEMPO: ASPECTOS GEOMÉTRICOS"

ÍNDICE GERAL

1 - INTRODUÇÃO

9

1 - MOTIVAÇÃO

Resumo

1.1 - Transformações de Lorentz através da álgebra de Spinor - transformações de Lorentz via "matriz Spin"

13

Spinors têm um papel fundamental na teoria quântica (especialmente em sua forma relativista), mas sua estrutura e significado físico não são ainda de todo claros.

1.2 - Relação entre vetores e Spinors

18

Nesta dissertação eu reexaminio algumas características matemáticas intuitivas quer sejam elas do spinor não relativista - spinor de Pauli - quer sejam do relativista - spinor de Dirac - , tentando em ambos os casos esclarecer aspectos da relação dos spinors com a geometria.

20

Superficialmente pode-se pensar em spinors como raízes quadradas de vetores; isto faz com que o produto de um spinor com o seu complexo conjugado dê origem a um vetor. Portanto, é natural, considerar spinors como objetos primitivos a partir dos quais vetores e tensores podem ser construídos.

1.3 - Rotações e reversões

22

2.5 - Reflexões

23

2.6 - Fatorização de uma rotação em um produto de reflexões

24

2.7 - Continuidade do grupo de rotações

25

2.8 - Bivetores

25

2.9 - Tensores - definição

26

2.10 - Matrizes - definição

27

**SPINORS E O ESPAÇO-TEMPO: ASPECTOS
GEOMÉTRICOS**

ÍNDICE GERAL

I - INTRODUÇÃO	9
1 - MOTIVAÇÃO	
1.1 - Transformações de Lorentz através da álgebra de Spinor - transformações de Lorentz via "matriz Spin"	15
1.2 - Spinors	17
1.3 - Correspondência entre vetores e Spinors	18
2 - NOÇÕES SOBRE ÁLGEBRA DE SPINORS	
2.1 - Espaço euclidiano	20
2.2 - Sistema cartesiano de referência	21
2.3 - Componentes covariantes e contravariantes	22
2.4 - Rotações e reversões	22
2.5 - Reflexões	23
2.6 - Fatorização de uma rotação em um produto de reflexões	24
2.7 - Continuidade do grupo de rotações	25
2.8 - Bivetores	25
2.9 - Tensores - definição	26
2.10 - Matrizes - definição	27

2.11 - Adição, multiplicação por escalar	28
2.12 - Matrizes transpostas, matrizes inversas	28
2.13 - Matrizes equivalentes	29
2.14 - Equações características	29
2.15 - Matrizes unitárias	30
2.16 - Matriz ortogonal	30
2.17 - Decomposição de uma rotação real	31
2.18 - Matrizes hermitianas	31
2.19 - Spinor - definição	32
2.20 - A matriz associada a um vetor	33
2.21 - A matriz associada a um bivector e a matriz associada a um trivector	35
2.22 - Representação de uma reflexão	36
2.23 - Representação de uma rotação	36
2.24 - Operações em Spinors	37
2.25 - O produto de dois Spinors e a sua decomposição em partes irredutíveis	38
2.26 - Vetores conjugados complexos	40
2.27 - Spinors conjugados	41
2.28 - O escalar e o bivector associado a dois Spinors conjugados	42
2.29 - Rotações reais - caso do espaço euclidiano	43

3 - UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO SPINOR DE PAULI

3.1 - Introdução	44
3.2 - Representação de rotações	45
3.3 - Coordenadas na esfera	45
3.4 - Rotações e homografias	47
3.5 - Classificação de transformações rígidas homográficas. Homografia produzindo rotações rígidas	49
3.6 - Spinor não relativista e sua interpretação	52
3.7 - Relação para as rotações com ponto e sem ponto	56
Tabela 1	59

4 - SPINORS DE DIRAC - ASPECTOS GEOMÉTRICOS

4.1 - Sobre a "Vierbein"	60
4.2 - Simetrias numa teoria de gravitação a la Cartan - Einstein	62

5 - CONCLUSÃO

6 - APÊNDICE

7 - BIBLIOGRAFIA

SPINORS E O ESPAÇO-TEMPO: ASPECTOS GEOMÉTRICOS

I - INTRODUÇÃO

O termo spinor¹ apareceu pela primeira vez na nomenclatura, sob forma de uma teoria matemática, em um artigo publicado em 1913 por Elie Cartan². Superficialmente pode-se pensar em spinors como a raiz quadrada de vetores; isso faz com que o produto de um spinor com o seu complexo conjugado produza um vetor. Portanto, é natural, considerar spinors como objetos primitivos a partir dos quais vetores e tensores podem ser construídos. Enquanto nós precisamos somente de uma variedade diferencial para falar de campos de tensores, nós necessitamos de uma variedade com métrica para introduzir spinors, como, em relatividade geral, por exemplo, em que variedades espaço - tempo são naturalmente dotadas de métricas as quais impõem processos físicos tais como propagação da luz e o tique taquear dos relógios.

Os spinors em um espaço quadridimensional apareceram em Mecânica Quântica na famosa equação de Dirac para o elétron, em que as quatro funções de onda representam as quatro componentes de um spinor[1]

Ainda que muito se tenha escrito sobre o assunto, sobretudo nos trabalhos de H. Weyl³, Penrose e Rindler⁴, em geral, nesses livros spinors são tratados de uma maneira muito formal, sem algum significado geométrico intuitivo.

Nesta dissertação me proponho a discorrer sobre aspectos geométricos dos spinors.

No capítulo 1 é apresentada uma motivação geométrica básica para o estudo de spinors, baseada no "Cubo de Hamilton" e de como é possível

¹ A palavra spinor (inglesa) tem origem no termo spin (movimento de rotação em torno de um próprio eixo). Não há uma versão oficial em Português.

SPIN + OR = SPINOR

"denota uma condição especial da rotação"

² E. Cartan . "Les Groupes Projectifs que ne laissent invariant aucune multiplicité plane", Bull. Soc. Math. France, 41, 1913,53-96.

³ H. Weyl, "The Classical Groups", Princeton University Press, 1946 (Spinors aqui tratados como parte de uma teoria geral de representação de grupo).

⁴ R. Penrose, W Rindler, "Spinors and space-time, vol. 1, Cambridge University Press, 1984.

interpretar-se uma rotação por duas reflexões. No capítulo 2 é feita uma breve revisão acerca da álgebra dos spinors a la Cartan. Nos capítulos 3 e 4 são ressaltados aspectos geométricos dos spinors de Pauli numa projeção estereográfica, e de Dirac numa variedade de grupo, respectivamente. No caso dos spinors em variedades de grupo é mostrado que em um caso particular, eles seriam responsáveis pelo estabelecimento das Identidades de Bianchi, tais que suas componentes determinam as componentes de Vierbein no espaço-tempo.

Não é objetivo desta dissertação apresentar um estudo sistemático formal sobre spinors e suas aplicações. Uma vez que tratamentos algébricos formais dos spinors acham-se já bem percorrido em inúmeros textos [2],[3].

Procurei preparar um texto que possa ainda motivar o suficiente a quem pretenda introduzir-se no estudo de spinors, notadamente em suas características geométricas intuitivas, com o que espero ter prestado alguma contribuição nos dois últimos capítulos.

São José do Rio Preto, 9 de dezembro de 1995.

Jussara L. da S. Figueiredo

Figura 1: Posição Inicial

Figura 2: Posição Final

Pergunta

Como pode o cubo sofrer estas transformações, da posição inicial a final, em um só passo, com uma só rotação, ou seja, qual é a lei para a combinação daquelas duas reflexões?

Em 16 de Outubro de 1843 William Rowan Hamilton encontrou a resposta, segundo ele próprio quando caminhava ao longo do "Royal Canal" em Dublin [4].

Ele definiu então as relações

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

que em notação matricial, seria

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = ik, \quad (1.1)$$

1 - MOTIVAÇÃO

A motivação maior para a introdução do conceito de spinor, e das suas aplicações, têm origem no estudo e análise das rotações de corpos no espaço.

Considere por exemplo um cubo. Giremos ele em volta do eixo indicado na Figura 1 abaixo completando 90° .

Então escolhemos outro eixo, vertical ao primeiro ângulo (Figura 2).

Fazemos a rotação desse cubo novamente em relação agora ao segundo eixo, completando 90° .

Neste caminho o cubo é conduzido da posição inicial para aquela final.

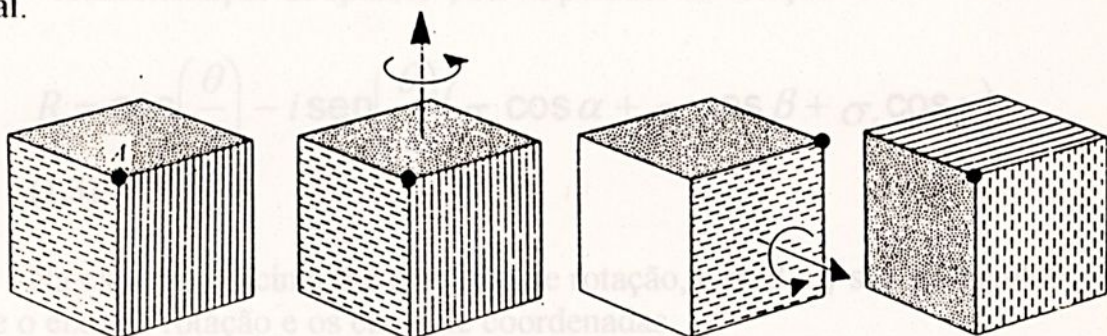


Figura 1 : Posição inicial

Figura 2: Posição Final

Pergunta:

Como pode o cubo sofrer estas transformações, da posição inicial à final, em um só passo, com uma só rotação, ou seja, qual é a lei para a combinação daquelas duas rotações ?

Em 16 de Outubro de 1843 Willian Rowan Hamilton encontrou a resposta, segundo ele próprio quando caminhava ao longo do "Royal Canal" em Dublin.[4]

Ele formulou então as relações.

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i}\hat{j}\hat{k}$$

que em notação matricial, seria:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\hat{i}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{j}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\hat{k}, \quad (1.1)$$

e ainda às relações,

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \\ \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x = i \sigma_z \\ \sigma_x \sigma_z &= -i \sigma_y\end{aligned}\quad (1.2)$$

Para qualquer rotação é associada então uma quantidade chamada de “Quaternions de Hamilton”, ou como é melhor hoje conhecida, “Matriz spin”, “Transformação de spinors”, ou “Operador de rotação”.

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma) \quad (1.3)$$

Na expressão acima θ é o ângulo de rotação, e α , β e γ são os ângulos entre o eixo de rotação e os eixos de coordenadas.

Uma rotação R_1 seguida por uma outra rotação R_2 resulta em uma troca de orientação descrita por uma só rotação

$$R_3 = R_2 R_1$$

Esta é a fórmula de Hamilton para a combinação de 2 rotações.

No caso do cubo

R_1 = (rotação de 90° em torno do eixo z)

$$\begin{aligned}R_1 &= \cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right) - i \sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right)(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z = \frac{1 - i \sigma_z}{\sqrt{2}} = \frac{1 - i \sigma_z}{2^{1/2}}\end{aligned}$$

R_2 = (rotação de $\theta = 90^\circ$ em torno do eixo x)

$$R_2 = \frac{1 - i \sigma_x}{2^{1/2}}$$

Fazendo o produto $R_2 R_1$ temos

$$\left(\frac{1-i\sigma_x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1-i\sigma_z}{\sqrt{2}}\right) = (1-i\sigma_x+i\sigma_y-i\sigma_z)/2 =$$

$$= \cos 60^\circ - i \sin 60^\circ \left(\frac{\sigma_x}{3^{1/2}} - \frac{\sigma_y}{3^{1/2}} + \frac{\sigma_z}{3^{1/2}}\right)$$

De acordo com a relação (1.3) este resultado contém uma rotação total de 120° ao redor de uma linha que produz ângulos iguais aos eixos x , y , (eixo de rotação indo do centro do cubo até o vértice A). Uma rotação devido a um ângulo θ ao redor de um eixo pode ser visualizada então como a consequência de duas sucessivas reflexões em dois planos que se interceptam por $\frac{\theta}{2}$ (Figura 3).

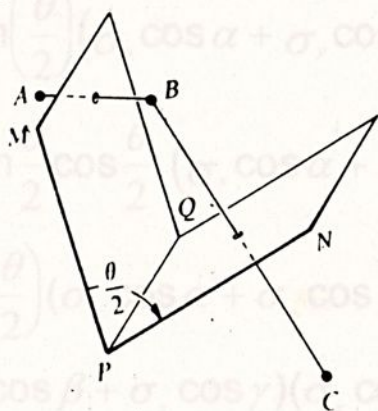


Figura 3

Uma reflexão no plano MPQ leva A para B. Outra reflexão no plano NPQ leva B para C.

A combinação de duas rotações em dois planos separados por um ângulo $\frac{\theta}{2}$ nos leva ao mesmo resultado final (transformação de A à C) se produzida agora por uma rotação em torno da linha PQ.

A rotação

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma)$$

é cancelada pela rotação inversa

$$R^{-1} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma)$$

O produto de dois operadores de rotação R e R^{-1} é tal que :

$$R R^{-1} = R^{-1} R = 1$$

Demonstração :

$$\begin{aligned} R R^{-1} &= \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma) \right] \\ &\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma) \right] = \\ &\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} (\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma) - \\ &+ i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma) - i^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma)(\sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma) = \\ &\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[(\sigma_x^2 \cos^2 \alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \beta + \sigma_z^2 \cos^2 \gamma + \sigma_x \sigma_y \\ &\cos \alpha \cos \beta + \sigma_y \sigma_x \cos \beta \cos \alpha + (\sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \cos \alpha \cos \gamma + \\ &(\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y) \cos \beta \cos \gamma]. \end{aligned}$$

Usando as relações (1.2) , teremos que

$$R R^{-1} = 1,$$

posto que $\theta = k\pi$, sendo k um número par.

$$X = \begin{vmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Para isto a matriz tem que ser Hermitiana, ou seja,

1.1 - Transformação de Lorentz através da álgebra de Spinor - transformações de Lorentz via "matriz Spin"

(as coordenadas t, x, y, z são reais).

A conjugada transposta de uma matriz spin de transformação deve ser Hermitiana isto é,

Uma rotação pode ser gerada por duas reflexões no espaço. Então por que não gerar uma transformação de Lorentz por duas reflexões no espaço-tempo ?

As transformações do tipo

$$X'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 a_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + b^{\mu},$$

assumindo $b^{\mu} = 0$ e que $a_{\nu}^{\mu} \in SO(3,1)$ são chamadas de Lorentz.

$$(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z') \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Se generalizarmos uma transformação de Lorentz para duas reflexões no espaço-tempo a representação do efeito da transformação de Lorentz para uma multiplicação de matriz é da forma

$$X \rightarrow X' = LXL^*$$

onde L é uma generalização da matriz de rotação R , chamada também de "Matriz spin da transformação de Lorentz".

A matriz spin X ,

$$X = x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z = (\vec{x} \cdot \vec{\sigma})$$

é generalizada pela relação

$$X = t.1 + (\vec{x} \cdot \vec{\sigma}), \text{ ou}$$

$$X = \begin{vmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Para isto a matriz tem que ser Hermitiana, ou seja,

$${}^1 X = X^*$$

(as coordenadas t, x, y, z são reais).

A conjugada transposta de uma matriz spin de transformação deve ser Hermitiana isto é,

$$(X')^* = (LXL^*)^* = (L^*)^*(X)^*(L)^* = LXL^* = X'$$

Portanto as novas coordenadas (t', x', y', z') são reais como desejamos.

Uma transformação de Lorentz é tal que ela deixa o intervalo entre dois eventos invariantes, ou seja:

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Observe que o determinante de X (eq. 1.4) tem o valor

$$\det X = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Demonstração:

$$\det \begin{vmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{vmatrix} = (t+z)(t-z) - [(x+iy)(x-iy)] = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Consequentemente a necessidade da preservação do intervalo pode ser colocado na forma

$$\det X' = \det X \quad \text{ou}$$

$$(\det L)(\det X)(\det L^*) = \det X \quad \text{sendo}$$

$$\det L = \pm 1$$

¹ X^* é a matriz conjugada transposta de X .

1.3 Para a matriz de rotação R , e consequentemente para L , é fácil observar que o último resultado ocorre, o que pode ser observado pelo seguinte argumento:

$$1 = \det(\text{matriz unitária}) = \det(RR^{-1}) = \det(RR^*) = \det R \cdot \det R^* = |\det R|^2.$$

Onde: $(\sigma_x^* = \sigma_x; \sigma_y^* = \sigma_y; \sigma_z^* = \sigma_z)$

1.2 Spinors

A matriz spin associada com a rotação

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i(n \cdot \sigma) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

muda de sinal em uma rotação através de um múltiplo ímpar de 2π . Esta troca de sinal jamais fica visível na lei de transformação de um vetor resumida na fórmula

$$X \rightarrow X' = RXR^*$$

(dois fatores R ; o sinal muda em cada um!)

A troca de sinais fica visível no entanto quando definimos uma quantidade de 2-componentes que se transforma de acordo com a lei

$$\xi \rightarrow \xi' = R\xi$$

Tal quantidade é conhecida como **SPINOR**. Um spinor muda de sinal em uma rotação de 360°

1.3 - Correspondência entre vetores e Spinors

componentes de um quadri-vetor x^μ , para os componentes do correspondente "1.1 - spinor" (um índice pontuado, e outro não pontuado).

Se formos de spinors para vetores, a matriz spin X em $X' = LXL^*$ tem a forma

$$X = t + (x \cdot \sigma) = \begin{vmatrix} (t+z) & (x-iy) \\ (x+iy) & (t-z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{1\dot{1}} & x^{1\dot{2}} \\ x^{2\dot{1}} & x^{2\dot{2}} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

onde os índices recebem pontos ou não se estiverem em $X' = LXL^*$ relacionados a L^* ou a L respectivamente. Aquela equação então fica escrita como :

$$X'^{A\dot{U}} = L_B^A \bar{L}_{\dot{V}}^{\dot{U}} X^{B\dot{V}} \quad (1.6)$$

De (1.5) temos as relações

$$x^{1\dot{1}} = x^0 + x^3$$

$$x^{1\dot{2}} = x^1 - ix^2$$

$$x^{2\dot{1}} = x^1 + ix^2$$

$$x^{2\dot{2}} = x^0 - x^3$$

Em uma forma mais compacta

$$X^{A\dot{U}} = [t + (x \cdot \sigma)]^{A\dot{U}} = X^\mu \sigma_\mu^{A\dot{U}} \quad \text{onde}$$

σ_0 é a matriz unitária. Esta última equação nos mostra como passar das componentes de um quadri-vetor x'' , para os componentes do correspondente "1.1 - spinor" (um índice pontuado, e outro não pontuado).

2.1- Espaço euclidiano

Definição de Vetores

Os pontos em um espaço euclidiano n -dimensional podem ser definidos como um conjunto de n números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$; o quadrado da distância de um ponto (x) à origem $(0,0,0,\dots)$ é dado pela forma quadrática

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (2.1)$$

Esta expressão também representa o quadrado escalar, o quadrado do comprimento do vetor x a partir da origem até o ponto (x) ; as n quantidades x_i são chamadas componentes deste vetor. No domínio real, também existem espaços pseudo euclidianos definidos pela forma quadrática real não positiva,

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-h}^2 - x_{n-h+1}^2 - \dots - x_n^2 \quad (2.2)$$

Onde $n - h \geq h$

Definição:

Um vetor é dito isotrópico se o quadrado escalar deste vetor é zero. Um vetor no espaço Euclidiano real ou complexo é dito ser um vetor unidade se o seu comprimento é 1.

2 - NOÇÕES SOBRE ÁLGEBRA DE SPINORS

2.1- Espaço euclidiano

Definição de Vetores

Os pontos em um espaço euclidiano n -dimensional podem ser definidos como um conjunto de n números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$; o quadrado da distância de um ponto (x) à origem $(0,0,0\dots)$ é dado pela forma quadrática

$$\phi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2; \quad (x = \mu^1 \eta_1 + \dots + \mu^n \eta_n), \quad (2.1)$$

Esta expressão também representa o quadrado escalar, o quadrado do comprimento do vetor x a partir da origem até o ponto (x) : as n quantidades x_i são chamadas componentes deste vetor. No domínio real, também existem espaços pseudo euclidianos definidos pela forma quadrática real não positiva,

$$\phi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-h}^2 - x_{n-h+1}^2 - \dots - x_n^2 \quad (2.2)$$

Onde $n - h \geq h$

Definição:

Um vetor é dito isotrópico se o quadrado escalar deste vetor é zero. Um vetor no espaço Euclidiano real ou complexo é dito ser um vetor unidade se o seu comprimento é 1.

2.2- Sistema cartesiano de referência

Os n vetores $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ cujos componentes são todos zero exceto um, que é igual a 1, constituem uma base, no sentido em que todo vetor x é uma combinação linear $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ destes n vetores. Estes vetores bases são ortogonais em pares. Eles constituem o que chamamos de sistema cartesiano de referência.

Com maior generalidade consideremos n vetores linearmente independentes $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. O quadrado escalar de qualquer vetor x pode ser expresso por

$$x = x^i e_i = \mu^i \mu^j \eta_i \eta_j$$

$$x^i x^j = g_{ij} x^i x^j = x^i x^j = x^i x^j$$

$$(\vec{x} = \mu^1 \eta_1 + \dots + \mu^n \eta_n),$$

fórmula que segue a convenção de Einstein.

Se nós escrevermos

$$g_{ij} = g_{ji} = \eta_i \eta_j \quad (2.3)$$

a forma fundamental vem a ser

$$\phi \equiv g_{ij} \mu^i \mu^j \quad (2.4)$$

Definição:

Diremos que os vetores $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ formam uma base ou que eles constituem um sistema cartesiano de referência.

¹ Os termos transformações ortogonais próprias e impróprias, respectivamente, são também utilizados.

2.3 - Componentes covariantes e contravariantes

transformam em x' e y' , e $x + \lambda y$ em $x' + \lambda y'$, sendo λ um escalar.

O produto escalar de qualquer par de vetores permanece inalterado por aquelas transformações.

Vamos supor que o espaço euclidiano seja referido a algum sistema cartesiano de referência e seja,

linear de determinante igual a +1, e a reversão como aquela de determinante igual a -1.

$$\phi \equiv g_{ij} \mu^i \mu^j, \text{ a sua forma fundamental}$$

As componentes covariantes do vetor x são definidos como sendo os produtos escalares $xe_1, xe_2, \dots, xe_n$. Estes são denotadas por $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Teremos então que :

$$x_i = xe_i = g_{ik} x^k;$$

Dado um hiperplano π e um ponto x qualquer, a reflexão de x em relação a π é o ponto x' tal que o segmento xx' é perpendicular a π e o ponto médio de xx' está em π . Uma operação à qual se faz qualquer ponto x corresponder a sua imagem-espelho no hiperplano π é chamada de reflexão em relação a π .

as componentes x^i são chamadas de contravariantes. Ao resolver a última equação acima nós passamos dos componentes covariantes para os componentes contravariantes, o que nos daria

$$x^i = g^{ik} x_k$$

g^{ik} faz o isomorfismo entre dois espaços, o vetorial e seu dual.

I) O vetor $\vec{X}' - \vec{X}$ é perpendicular ao hiperplano π .

II) O ponto definido por $\frac{1}{2}(\vec{X}' + \vec{X})$ está no hiperplano π .

2.4 - Rotações e reversões¹

Qualquer reflexão é uma reversão. Para verificar isto, é suficiente tomarmos um sistema cartesiano de referência, e. g., aquele em que o primeiro vetor base é o vetor associado com a reflexão; a equação que define

Definição: é então ,

Os elementos dos conjuntos de transformações lineares de coordenadas que deixam a forma fundamental invariante, são chamadas de “rotações” ou “reversões” em relação a origem de coordenadas .

que implica num determinante igual a -1.

¹ Os termos transformações ortogonais próprias e impróprias, respectivamente, são também utilizados.

2.6 - Mediante uma transformação desse tipo dois vetores x e y se transformam em x' e y' , e $x + \lambda y$ em $x' + \lambda y'$, sendo λ um escalar.

O produto escalar de qualquer par de vetores permanece inalterado por aquelas transformações.

Uma rotação pode ser também definida como sendo uma operação dada por uma transformação linear de determinante igual a +1, e a reversão como aquela de determinante igual a -1.

Teorema:

Qualquer rotação é o produto de um número par ($\leq n$) de reflexões, e qualquer reversão é o produto de um número ímpar ($\leq n$) de reflexões.

2.5 - Reflexões

O fato de que um número par de reflexões implicar em uma rotação, enquanto um número ímpar implica em uma reversão, é uma consequência do fato de que a reflexão é uma transformação linear de determinante -1.

Dado um hiperplano π contendo a origem, então uma operação à qual se faz qualquer ponto x corresponder a sua imagem-espelho no hiperplano π será chamada de reflexão.

Num sistema cartesiano de referência um hiperplano é definido pela equação

$$a_i x^i = 0$$

Então x' , imagem de x será definido por duas condições:

I) O vetor $\vec{x}' - \vec{x}$ é perpendicular ao hiperplano π

II) O ponto definido por $\frac{1}{2}(\vec{x}' + \vec{x})$ está no hiperplano π .

Qualquer reflexão é uma reversão. Para verificar isto, é suficiente tomarmos um sistema cartesiano de referência, e. g., aquele em que o primeiro vetor base é o vetor associado com a reflexão; a equação que define a reflexão é então,

$$(\mu^1)' = -\mu^1; \quad (\mu^2)' = \mu^2; \dots; (\mu^n)' = \mu^n$$

que implica num determinante igual a -1.

2.6 - Fatorização de uma rotação em um produto de reflexões

Nós provaremos abaixo o teorema seguinte, o qual tem validade para domínios reais e complexos.

No espaço Euclidiano complexo, e no espaço real Euclidiano com forma fundamental definida positiva, o conjunto de rotações forma um grupo. *Teorema:*

Qualquer rotação é o produto de um número par ($\leq n$) de reflexões, e qualquer reversão é o produto de um número ímpar ($\leq n$) de reflexões.

O fato de que um número par de reflexões implicar em uma rotação, enquanto um número ímpar implica em uma reversão, é uma consequência do fato de que uma reflexão é ela mesma uma reversão.

Este teorema é facilmente provado para um caso especial de rotações e reversões que deixam um vetor não isotrópico invariante. Seja esse vetor η_1 e escolha $n-1$ vetores básicos todos no hiperplano π , ortogonal a η_1 . A forma fundamental seria então :

$$\phi = g_{11}(u^1)^2 + g_{ij}u^i u^j = g_{11}(u^1)^2 + \psi ;$$

A rotação, ou reversão, considerada, deixa o hiperplano invariante, (u^1 inalterado) e transforma as variáveis $u^2, u^3, \dots, u^n$ de tal modo que ψ permanece inalterado; este é então completamente determinado por uma rotação ou reversão do espaço euclidiano de $n-1$ dimensões as quais formam o hiperplano π . Por hipótese a rotação considerada pode ser fatorizada em reflexões associadas a vetores em π , e o número de reflexões requeridas é no máximo $n-1$.

Um bivector é definido por $[n(n-1)]/2$ quantidades $a^{ij} = -a^{ji}$. A condição necessária e suficiente para definirmos um bivector é que estas componentes devam satisfazer

$$a^i a^{jk} + a^j a^{ki} + a^k a^{ij} = 0 \quad (i,j,k,h = 1,2,\dots,n)$$

2.7 - Continuidade do grupo de rotações

Teorema:

No espaço Euclidiano complexo, e no espaço real Euclidiano com forma fundamental definida positiva, o conjunto de rotações forma um grupo contínuo.

Para tanto é suficiente mostrar que

- i) O produto de duas rotações é uma rotação
- ii) A cada rotação existe uma correspondente rotação inversa.

Suponha duas reflexões definidas por um vetor unidade c ortogonal a a e b ; considere a série continua de rotações resultado da união de sucessivas reflexões associadas com o vetor unidade

$$a' = a \cos t + c \sin t, \quad b' = b \cos t + c \sin t$$

onde o parâmetro real t varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$; para $t=0$ esta se reduz para a rotação dada; para $\frac{\pi}{2}$ a rotação é o resultado de alguma reflexão.

2.8 - Bivetores

Um bivector é definido por $[n(n-1)]/2$ quantidades $a^{ij} = -a^{ji}$. A condição necessária e suficiente para definirmos um bivector é que estas componentes devam satisfazer

$$a^{ij}a^{kh} + a^{jk}a^{ih} + a^{ki}a^{jh} = 0 \quad (i,j,k,h = 1,2,\dots,n)$$

2.9 - Tensores - definição

Suponhamos que em toda base de um espaço vetorial E_n (n = número de dimensões) seja dado um sistema de n^{p+q} números

$$a_{k_1 k_2 \dots k_p}^{i_1 i_2 \dots i_q},$$

denotados por q índices superiores e p índices inferiores que tomam, independentemente, cada um deles, valores $1, 2, 3, \dots, n$ e suporemos ainda que ao passar a uma nova base estes números se transformam segundo a lei:

$$a_{k_1 k_2 \dots k_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} = c_{k_1}^{j_1} \cdot c_{k_2}^{j_2} \cdot c_{k_3}^{j_3} \dots c_{k_p}^{j_p} \cdot b_{h_1}^{i_1} b_{h_2}^{i_2} \dots b_{h_q}^{i_q} \cdot a_{j_1 j_2 \dots j_p}^{h_1 h_2 \dots h_q},$$

onde as novas bases se obtém através das antigas pela relação,

$$e'_i = c_i^k e_k,$$

e as novas coordenadas, em suas componentes contravariantes pela relação

$$x'^i = b_i^k x^k$$

Teremos então definido um tensor de ordem $(p + q)$, p vezes covariante e q vezes contravariante. Os coeficientes $a_{k_1 k_2 \dots k_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}$ se denominam *componentes do tensor*.

2.10 - Matrizes - definição

Uma transformação S da variável x_i da forma

$$x'_i = a_i^k x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

O produto de uma matriz S por um número m é denotado por mS e é obtida multiplicando-se cada elemento de S por m .

pode ser representada por uma matriz, isto é, é um diagrama com n linhas e n colunas de coeficientes de transformação. Nós denotamos esta matriz pelo símbolo S .

Seja agora uma nova transformação S' , da variável x'_k da forma

$$x_i = b_i^k x'_k$$

O resultado da transformação $S'' = S'S$ é definido pela fórmula

$$x_i = b_i^k a_k^h x_h$$

Do último resultado deduz-se uma lei de multiplicação para matrizes; os elementos e_i^j da matriz $S'S$ serão

$$e_i^j = b_i^k a_k^j$$

Mais geralmente, nós podemos considerar matrizes retangulares e definir o produto $S'S$ para a fórmula precedente na condição que o número de colunas de S' seja igual ao número de linhas de S . Em notação matricial a equação $x'_i = a_i^k x_k$, por exemplo, poderia ser escrita como

$$X' = SX$$

$$SI = IS = S$$

2.11 - Adição, multiplicação por escalar

A soma de duas matrizes S e S' que têm o mesmo número de linhas e colunas é uma matriz com elementos obtidos da soma dos elementos de S e S' que ocupam a mesma posição.

Esta matriz é denotada por $S + S'$.

O produto de uma matriz S por um número m é denotado por mS e é obtida multiplicando-se cada elemento de S por m .

2.12 - Matrizes transpostas, matrizes inversas

A matriz que é obtida de uma matriz S por uma transformação de linhas por colunas é chamada matriz transposta; a equação $S'' = S'S$ pode ser modificada para

$$S''^T = S^T S'^T$$

Em particular a fórmula $x' = Sx$ pode ser escrita como

$$x'^T = x^T S^T$$

A matriz representando a transformação linear inversa é representada por S^{-1} . Nós temos

$$SS^{-1} = S^{-1}S = I$$

Nós usamos I para denotar a matriz onde todos os elementos são zero exceto a diagonal principal que tem o valor 1.

Para todo S , nós temos

$$SI = IS = S$$

2.13 - Matrizes equivalentes

Se nós tivermos uma matriz A com determinante diferente de zero e a matriz $S' = ASA^{-1}$, diremos que as matrizes S e ASA^{-1} são equivalentes.

Duas matrizes equivalentes tem o mesmo determinante.

O inverso da matriz S' será dada por $AS^{-1}A^{-1}$, pois,

$$(ASA^{-1})(AS^{-1}A^{-1}) = ASS^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I$$

2.14 - Equações características

A equação característica de uma matriz S é a equação obtida pela subtração λ de todos os elementos na diagonal principal de S , e igualando a zero o determinante da matriz $(S - \lambda I)$ então obtido.

Duas matrizes equivalentes S e ASA^{-1} tem a mesma equação característica. Os resultados vem da relação

$$ASA^{-1} - I = A(S - I)A^{-1}$$

daí

$$|ASA^{-1} - I| = |A(S - I)A^{-1}| = |S - I|$$

2.15 - Matrizes unitárias

Seja U uma matriz com elementos complexos.

A condição para a matriz U ser unitária é que :

$$\overline{U}^T U = 1 \quad \text{ou} \quad \overline{U}^T = U^{-1}$$

A transposta do conjugado complexo de U é igual ao inverso de U .

2.16 - Matriz ortogonal

Uma matriz quadrada O é dita ser ortogonal se a transformação linear que ela representa torna invariante a soma do quadrado das variáveis, isto é, a quantidade $X^T X$ é invariante. Nós temos a igualdade,

$$X^T O^T O X = X^T X$$

que nos leva a

$$O^T O = 1 \quad \text{ou} \quad O^T = O^{-1}; \quad \text{ou seja,}$$

a transposta de uma matriz ortogonal é igual a sua inversa.

Se os elementos de uma matriz ortogonal são reais, ela é unitária.

Considere agora um espaço E_n , descrito por n vetores base $e_1, e_2, \dots, e_n$, em geral complexos. Tome um desses, por exemplo e_1 , onde $e_1 = \eta_1 + i\eta_2$ sendo η_1 e η_2 dois vetores reais ortogonais e unitários; então podemos dizer que :

$$O\eta_1 = \cos \alpha \eta_1 - \sin \alpha \eta_2 \quad \text{e}$$

$$O\eta_2 = \sin \alpha \eta_1 + \cos \alpha \eta_2$$

A matriz O deixa invariante a variedade formada pelos vetores ortogonais a η_1 e η_2 ; portanto ele transforma vetores dessa variedade de um modo ortogonal. É possível portanto encontrar dois outros vetores unitários η_3 e η_4 , mutualmente ortogonais, e ortogonais a η_1 e η_2 os quais se transformam de modo idêntico por um ângulo β , e assim por diante.

2.17 - Decomposição de uma rotação real

Os resultados anteriores nos mostram uma propriedade interessante do grupo de rotações e reversões no espaço euclidiano real. Neste espaço referido a um sistema ortogonal de referência as operações são representadas por matrizes ortogonais reais. Chamaremos de rotação simples se para uma conveniente escolha de coordenadas ortogonais, a rotação deixa invariante todas as coordenadas, exceto duas, x_i e x_j , as quais se transformam de acordo com as fórmulas

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \cos \alpha - x_j \sin \alpha \\ x'_j &= x_i \sin \alpha + x_j \cos \alpha \end{aligned}$$

α é o ângulo de rotação simples e o biplano formado por e_i e e_j é o biplano da rotação simples.

2.18 - Matrizes hermitianas

Uma matriz quadrada H é dita ser uma matriz hermitiana se a sua transposta é igual ao seu conjugado complexo

$$H^T = \overline{H}$$

A transformação de uma matriz hermitiana H por uma matriz unitária U é hermitiana : este resultado vem da igualdade

$$(U^{-1} H U)^T = U^T H^T (U^{-1})^T = \overline{U}^{-1} \overline{H} \overline{U}$$

O produto de duas matrizes unitárias de mesma ordem é uma matriz unitária. O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal. Mas o produto de duas matrizes hermitianas não é em geral uma matriz hermitiana. A condição necessária e suficiente para a matriz HH' ser hermitiana é

$$H'^T H^T = \overline{H} \overline{H'} \text{ ou } H'H = HH',$$

o que significaria que as duas matrizes precisam comutar. O conjunto de transformações lineares unitárias assim bem como o conjunto de transformações ortogonais, formam um grupo, mas não o conjunto de transformações hermitianas.

2.19 - Spinor - definição

Suponha que o espaço tri-dimensional E_3 é referido a um sistema ortogonal de referência ; seja (x_1, x_2, x_3) um vetor isotrópico, isto é, com comprimento zero.

Nós podemos associar a este vetor cujas componentes satisfazem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

dois números ξ_0, ξ_1 dados por

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_0^2 - \xi_1^2 \\ x_2 &= i(\xi_0^2 + \xi_1^2), \end{aligned}$$

e

$$x_3 = -2\xi_0\xi_1$$

Estas últimas equações tem duas soluções dadas, por exemplo, pela fórmula

$$\xi_0 = \pm \sqrt{\frac{x_1 - ix_2}{2}} \text{ e } \xi_1 = \pm \sqrt{\frac{-x_1 - ix_2}{2}}$$

Suponha então um dado vetor isotrópico e considere uma sua rotação contínua em torno do eixo Ox_3 por um ângulo α .

Então $x_1 - ix_2$ será multiplicado por $e^{-i\alpha}$, e por continuidade ξ_0 o será por $e^{-i\alpha/2}$.

Quando o ângulo de rotação é 2π o vetor isotrópico retorna para a posição de origem, mas ξ_0 é multiplicado por $e^{-i\pi} = -1$; isto é, este valor tem sinal oposto aquele selecionado originalmente.

Prova: O par de quantidades ξ_0, ξ_1 consiste em um **SPINOR**. Um spinor é portanto um tipo de vetor isotrópico “direcionado” ou “polarizado”; uma rotação através de um eixo por um ângulo de 2π muda a polarização desse vetor isotrópico.

2.20 - A matriz associada a um vetor

Considere a seguinte equação associada ao spinor ξ escrita como

$$\xi_0 x_3 + \xi_1 (x_1 - ix_2) = 0$$

$$\xi_0 (x_1 + ix_2) - \xi_1 x_3 = 0$$

Prova:

Disto segue a matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

formada pelos coeficientes das partes esquerdas destas equações. Se nós considerarmos x_1, x_2, x_3 como as componentes de um vetor $\mathbf{x}$ nós diremos que a matriz X é associada a esse vetor e nós poderemos com freqüência nos referir ao “vetor X ” ao invés de vetor que é associado à matriz X .

A matriz X tem uma série de propriedades.

Teorema 1:

O quadrado da matriz X associada a um vetor é igual a matriz unidade multiplicada pelo quadrado escalar do vetor.

Prova: A matriz associada a um bivetor e a matriz associada a um trivetor

$$XX = \begin{pmatrix} x_3^2 + (x_1 - ix_2)(x_1 + ix_2) & x_3(x_1 - ix_2) - (x_1 - ix_2)x_3 \\ (x_1 + ix_2)x_3 - x_3(x_1 + ix_2) & (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + x_3^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

Teorema 2:

O produto de dois vetores x, y é igual a metade da soma dos produtos XY e YX das matrizes associadas.

Prova:

Se λ e μ são dois parâmetros então:

$$(\lambda x + \mu y)^2 = \lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \lambda\mu(xy + yx)$$

$$(\lambda x + \mu y)^2 = \lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + 2\lambda\mu xy$$

O teorema segue imediatamente destes dois resultados acima.

Em particular se nós considerarmos as matrizes associadas aos vetores bases,

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O quadrado destas matrizes é igual a 1, e o produto de duas delas muda de sinal se a ordem dos fatores é invertida :

$$H_1^2 = H_2^2 = H_3^2, H_1 H_2 = -H_2 H_1, H_2 H_3 = -H_3 H_2; H_3 H_1 = -H_1 H_3$$

2.21 - A matriz associada a um bivector e a matriz associada a um trivector

O bivector dado por dois vetores x, y é representado analiticamente por suas componentes

$$x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(2.5)

Note que a matriz

$$\frac{1}{2}(XY - YX) = \begin{pmatrix} i(x_1 y_2 - x_2 y_1) & i(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ i(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_3 y_1 - x_1 y_3) & -i(x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{pmatrix}$$

(2.6)

pode ser associado àquele.

Se os dois vetores são ortogonais, a matriz associada com o bivector é

2.23 - Representação de uma rotação

$$XY = -YX$$

De uma maneira similar o trivector definido para três vetores x, y, z é associada com a matriz

$$\frac{1}{6}(XYZ + YZX + ZXY - YXZ - ZYX - XZY)$$

Se os três vetores são ortogonais, esta matriz se reduz a XYZ.

(2.7)

2.22 - Representação de uma reflexão

Seja a um vetor unidade. O vetor x' , reflexão de um vetor x no plano π que passa pela origem e tem a como normal, é dado por

$$x' = x - 2a(x \cdot a)$$

ou, em termos de matrizes

$$X' = X - A(XA - AX) = -AXA \quad (2.5)$$

Disto segue que a reflexão de um bivector definido por um par de vetores perpendiculares X, Y é dado por

$$X'Y' = AXYA, \quad (2.8)$$

ou em termos da matriz U associada com o bivector

$$U' = AUA \quad (2.6)$$

2.23 - Representação de uma rotação

Uma rotação pode ser expressa como o produto de um par de reflexões A, B ; o efeito disto, no caso de um vetor X e um bivector U é

$$X' = BAXAB, \quad U' = BAUAB$$

Fazendo $S = BA$ temos

$$X' = SXS^{-1}, \quad U' = SUS^{-1} \quad (2.7)$$

2.24 - Operações em spinors

O spinor ξ pode ser representado por uma matriz com duas linhas e uma coluna com elementos ξ_0, ξ_1 . Segue da equação

$$\begin{aligned}\xi_0 x_3 + \xi_1 (x_1 - ix_2) &= 0 \\ \xi_0 (x_1 + ix_2) - \xi_1 x_3 &= 0\end{aligned}\quad (2.9)$$

que se o vetor x é isotrópico, então $X\xi = 0$.

Nós faremos agora a convenção de que o efeito de uma reflexão no plano π , normal ao vetor unidade a , é dado pela operação

$$\xi' = A\xi \quad (2.8)$$

Nós devemos mostrar que esta convenção é consistente com resultados precedentes. Se X' é a matriz associada a x' , a reflexão de x no plano π , então

$$X'\xi' = -(AXA)A\xi = -AX\xi = 0,$$

isto é, o spinor associado com x' é da forma $m\xi'$.

No caso especial em que a é o vetor base e_3 :

$$A = H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

, a relação $\xi' = A\xi$ nos leva a

$$\xi'_0 = \xi_0 \quad \xi'_1 = -\xi_1,$$

O spinor ξ' é de fato um dos spinors associados a X' , a reflexão de X . Para observarmos que isto é verdade no caso geral, nós notamos que quando a operação $\xi \rightarrow mA\xi$ é repetida duas vezes nós retornamos para um spinor associado ao vetor isotrópico original, isto é, ξ ou $-\xi$:

Note que qualquer reflexão aplicada a um spinor nos leva para qualquer dos dois spinors dados $\xi' = A\xi$ e $\xi' = -A\xi$; a transformação depende da escolha do vetor unitário normal ao plano de reflexão.

Uma rotação, que é o produto de duas reflexões, é similarmente importante. O efeito da rotação resultando da reflexão A seguida por uma reflexão B é dada por

$$\xi' = BA\xi \quad (2.9)$$

Geometricamente esta rotação é a mesma que $-BA$, a qual nos leva à operação

$$\xi' = -BA\xi$$

2.25 - O produto de dois Spinors e a sua decomposição em partes irredutíveis

Os três monômios $(\xi_0)^2$, $\xi_0\xi_1$ e $(\xi_1)^2$ a priori formam um tensor que é equivalente a um vetor; eles são de fato combinações linearmente independentes das componentes de um vetor isotrópico, mas um vetor isotrópico, considerado como um tensor, é equivalente a um vetor genérico.

Considere agora o tensor de quarta ordem $\xi_\alpha\xi'_\beta$ formado com um “produto” de dois spinors ξ e ξ' . Nós introduzimos aqui a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a qual tem as propriedades de que se X é um vetor qualquer,

$$CX = -X^T C$$

e também,

$$C^T = -C; \quad CC^T = 1; \quad C^2 = -1$$

2.26 O resultado $CX = -X^T C$ é facilmente verificado da expressão geral de X , já obtida. De fato :

$$CX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 \\ -x_3 & -x_1 + ix_2 \end{pmatrix}$$

$$X^T C = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - ix_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

Considere agora dois spinors ξ e ξ' e a quantidade $\xi'^T C \xi$. Pela reflexão ($A^2 = I$), esta quantidade torna-se

$$\xi'^T A^T C A \xi = -\xi'^T C A^2 \xi = -\xi'^T C \xi$$

Este é portanto um tensor que é equivalente a um trivetor, invariante sob o efeito de rotações, e troca de sinal através de uma rotação imprópria (reversão).

Seu valor explícito é

$$\xi'_0 \xi_1 - \xi'_1 \xi_0$$

Vamos agora considerar, dois spinors, um vetor arbitrário X , e estudar o efeito da reflexão A na quantidade

$$\xi'^T C X \xi$$

Esta última é invariante por todas rotações e reversões, o que pode ser comprovado por

$$-(\xi'^T A) C (A X A) A \xi = \xi'^T C X \xi$$

2.26 - Vetores conjugados complexos

Todos resultados já estudados se aplicam à rotações e reversões no domínio dos complexos. Agora restringiremos a discussão para o caso do espaço euclidiano real e consideremos apenas rotações e reversões reais.

As matrizes X e Y associadas a dois vetores conjugados complexos são

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 & \bar{x}_1 - i\bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 + i\bar{x}_2 & -\bar{x}_3 \end{pmatrix},$$

Obviamente

$$Y = \bar{X}^t \quad \text{ou} \quad \bar{Y} = X^t$$

Em particular se x é real $\bar{X} = X^t$ o que prova o seguinte teorema:

Teorema :

Um vetor real é associado a uma matriz Hermitiana.

A matriz U associada a um bivector, é não Hermitiana; de fato:

$$\bar{U} = -U^t$$

Seja uma rotação representada por uma matriz $S = BA$, produto das matrizes associadas a dois vetores unitários reais; segue disto que

$$\bar{S}^t = \bar{A}^t \bar{B}^t = A^{-1} B^{-1} = (BA)^{-1} = S^{-1}$$

O que prova o teorema seguinte:

Teorema:

Uma rotação é representada por uma matriz unitária de determinante unitário; uma rotação imprópria (reversão) é representada por uma matriz unitária de determinante -1.

2.27 - Spinors conjugados

Se X é um vetor isotrópico e ξ é um dos spinors associados a X , então $X\xi = 0$. Portanto

$$C\bar{X}\bar{\xi} = 0;$$

usando resultados precedentes,

$$0 = C\bar{X}\bar{\xi} = -\bar{X}^T C\xi = -Y C\xi,$$

onde Y é o vetor complexo conjugado a X . Segue que cada spinor associado a Y é da forma $mC\xi$, onde o coeficiente m pode facilmente ser demonstrado como igual a $\pm i$.

Nós definiremos então o spinor conjugado a ξ como $iC\bar{\xi}$. A operação de conjugação não é uma involução, posto que em conjugando uma vez mais o último, o resultado será $-\xi$.

Cabe por fim uma observação importante sobre o spinor $iC\bar{\xi}$. Sob a reflexão A a matriz $iC\bar{\xi}$ torna-se

$$iC\bar{A}\bar{\xi} = iCA^T\xi = -iA(C\xi),$$

Ela fica à esquerda multiplicada por $-A$, não por A . O conjugado de um spinor será chamado de “spinor de segundo tipo”.

2.28 - O escalar e o bivector associado a dois Spinors conjugados

Se no produto de dois spinors ξ e ξ' , ξ' é substituído pelo conjugado de ξ isto é por $C\xi$, o tensor então obtido pode ser decomposto em duas partes irredutíveis. Uma é dada pela quantidade,

$$(\bar{\xi}^T C^T) C \xi = \bar{\xi}^T \xi = \xi_0 \bar{\xi}_0 + \xi_1 \bar{\xi}_1;$$

o último resultado é um escalar que é invariante por todas rotações e rotações impróprias (reversões); nós já mostramos que uma rotação ou rotação imprópria é representada por uma matriz unitária. A outra parte irredutível é dada pela quantidade

$$(\bar{\xi}^T C^T) C X \xi = \bar{\xi}^T X \xi = (x_1 + ix_2) \xi_0 \bar{\xi}_1 + (x_1 - ix_2) \xi_1 \bar{\xi}_0 + x_3 (\xi_0 \bar{\xi}_0 - \xi_1 \bar{\xi}_1)$$

Sob o efeito de uma reflexão real A a quantidade $\bar{\xi}^T X \xi$ se transforma em

$$-(\bar{\xi}^T \bar{A}^T) (A X A) A \xi = -\bar{\xi}^T X \xi;$$

Este último resultado implica que a quantidade dada original muda de sinal sob o efeito de uma reversão, mas permanece imutável sob uma rotação.

2.29 - Rotações reais - caso do espaço pseudo-euclidiano

Um espaço pseudo euclidiano pode ser obtido pela substituição de x_2 por ix_2 em todas expressões se tomando as novas coordenadas x_1, x_2, x_3 como reais. A matriz associada a um vetor é agora real

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

Um vetor isotrópico (vetor luz) com a componente "tipo-tempo" positiva ($x_2 > 0$) é associado a dois spinors com componentes reais:

$$x_1 = (\xi_0)^2 - (\xi_1)^2, \quad x_2 = (\xi_0)^2 + (\xi_1)^2, \quad x_3 = -2\xi_0\xi_1$$

A expressão $\bar{\xi} C^T \xi$ define um trivetor $\bar{\xi}_0 \xi_1 - \bar{\xi}_1 \xi_0$. A expressão $\bar{\xi}^T C X \xi$ define um vetor real com componentes reais

$$y_1 = \xi_0 \bar{\xi}_0 - \xi_1 \bar{\xi}_1, \quad y_2 = \xi_0 \bar{\xi}_0 + \xi_1 \bar{\xi}_1, \quad y_3 = -(\xi_0 \bar{\xi}_1 + \xi_1 \bar{\xi}_0)$$

ele é um vetor tipo tempo de comprimento $i(\xi_0 \bar{\xi}_1 - \xi_1 \bar{\xi}_0)$; é isotrópico se o spinor ξ é real.

3 - UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO SPINOR DE PAULI

3.1 - Introdução

O spinor não relativista pode ser introduzido por dois caminhos basicamente diferentes.

Ele pode ser apresentado abstratamente como um objeto de duas componentes as quais transformam-se sob a ação do grupo unitário unimodular $SU(2)$ [5], ou ele pode ser introduzido através de estruturas geométricas diferentes tais quais a projeção estereográfica [6], a triade de Kramers [7], o vetor isotrópico de Cartan [2], ou a “Flag Picture” (método de Penrose) [5]. A interrelação entre esses vários métodos não é óbvia. Um método unificador, aqui brevemente exposto, mostra aspectos da relação do spinor com a geometria [6].

Nesta seção tentarei interpretar brevemente, sob uma visão intuitiva geométrica, o spinor não relativista, também conhecido como spinor de Pauli¹, e mostrar como os spinors “com ponto” e “sem ponto” de $SU(2)$ podem ser interpretados em termos de coordenadas homogêneas complexas de vários pontos em uma projeção estereográfica do plano.

Uma discussão simplificada da conexão entre o grupo de rotações e as transformações especiais (homografias elípticas) no plano de projeção é apresentada. Finalmente relacionaremos esta visão do spinor àquelas baseadas na existência de um vetor isotrópico.

¹ A primeira aplicação dos Spinors à Física foi feita por W. Pauli, que introduziu sua famosa matriz spin : W. Pauli, “Zur Quanten-mechanik des magnetischen Elektrons”, Z. Physik, 43, 601(1927)

3.2 - Representação de rotações

A especificação de uma rotação arbitrária sobre um centro fixo no espaço tridimensional Euclidiano requer exatamente três parâmetros independentes (por exemplo, os ângulos de Euler). Alternativamente, a rotação pode ser considerada como uma transformação, entre eles mesmos, de vetores fixos na origem do sistema de coordenadas cartesianas. A transformação pode ser feita tomando a forma de um mapa real linear homogêneo nas três variáveis x, y e z e que é portanto representada por uma matriz 3×3 . O fechamento do espaço tri-dimensional sob a ação do grupo de rotações é a característica essencial que torna esse procedimento possível.

Entretanto, o espaço tridimensional completo é somente uma estrutura geométrica invariante sob as rotações centrais. Toda esfera com centro coincidente com o centro da rotação é também fechada sob o grupo. Como esta superfície é bi-dimensional e requer somente duas coordenadas para sua especificação, é possível expressar a rotação como um mapeamento em duas variáveis somente. Uma troca criteriosa de coordenadas permite este mapeamento ser reduzido pela transformação homogênea complexa linear em duas variáveis ψ_1 e ψ_2 , e portanto representada por matrizes 2×2 . Como nós mostraremos, este processo nos conduz diretamente ao formalismo do spinor não relativista enquanto ao mesmo tempo estabelece uma sua direta interpretação geométrica.

3.3 Coordenadas na esfera

O problema de encontrar coordenadas adequadas na esfera é bem conhecido. Nenhum sistema simples de coordenadas do tipo gaussiano é possível sem ao menos uma singularidade².

A razão essencial para isto é que a esfera tem um ponto a mais que o plano Euclidiano como pode ser visto a partir da projeção estereográfica (Fig. 1) para a qual nós estabelecemos uma correspondência uma a uma entre os

² Um exemplo familiar é o do sistema de coordenadas latitudinais e longitudinais usadas na geografia do globo terrestre. Este sistema tem duas singularidades - os Pólos - para onde todas as linhas longitudinais convergem.

pontos Q_n do plano π e todos os pontos P da esfera exceto um, o pólo da esfera: suponha que P e Q_n tenham coordenadas (x, y, z) e $(u, v, 0)$ respectivamente.

Construa os triângulos semelhantes NDB e NOA (Fig.1). Por semelhança $ND:NO = DB:OA$ tal que $x:u = (R-z):R$. Uma construção semelhante nos dá $y:v = (R-z):R$. Então,

$$u = \frac{Rx}{(R-z)} \text{ e } v = \frac{Ry}{(R-z)} \quad (3.1)$$

Isto nos permite então determinar duas coordenadas (u, v) , dadas pelas equações acima, para todo ponto $P(x, y, z)$ na superfície da esfera³. O ponto N existe quando $x = y = 0$ e $z = R$.

Uma alternativa, equivalente, porém com outro tipo de coordenadas, agora complexas, é obtida colocando-se $\zeta_N = (u - iv) / R$, e portanto,

$$\zeta_N = (x - iy) / (R - z) \text{ e } \bar{\zeta}_N = (x + iy) / (R - z) \quad (3.2)$$

A cada ponto na superfície da esfera, exceto N , tem para ele assinalada uma única coordenada ζ_N . Nós veremos, a posteriori, que $\bar{\zeta}_N$ tem um significado geométrico.

Observemos agora que a projeção estereográfica⁴ associa o polo N da projeção com um ponto infinito. Se nós concordarmos por convenção, em usar o símbolo ∞ para os valores de u, v e ζ_N quando $x = y = 0$ e $z = R$, então nós temos dois sistemas de coordenadas que cobrem a esfera totalmente, um real e um complexo. A afirmação $u = \infty$, $v = \infty$, $\zeta_N = \infty$ são tomadas como definições destas funções as quais estavam indefinidas em $x = y = 0$ e $z = R$, anteriormente.

³ Estas coordenadas estão relacionadas com a latitude e a longitude usadas em cartografia. As curvas $au + bv = 0$ nos dão as linhas de longitude, enquanto as curvas $K^2 = u^2 + v^2$ definem os círculos da latitude; o equador corresponde a $K = R$.

⁴ Uma representação muito útil em cartografia e muito fiel aos ângulos dos territórios árticos pode ser obtida mediante uma projeção simples. Imaginaremos no Pólo Norte uma lâmpada, e dispormos o papel de desenho sobre um plano tangente ao globo no Pólo Sul; isto posto obteremos a chamada "Projeção Estereográfica" da Antártica. Nesta projeção, os meridianos são linhas retas que divergem do Pólo Sul segundo raios; os paralelos são representados como circunferências em torno do pólo.

Expresso em termos de u e v uma rotação toma a forma de uma transformação não linear nestas duas variáveis envolvendo a razão da função quadrática destes. Isto nos levaria a um protótipo em duas dimensões da *Teoria dos Twistors de Penrose*, a qual não será aqui tratada [8].

Por outro lado como nós mostraremos, usando as coordenadas complexas ζ_N , nós chegamos diretamente no formalismo do spinor para o grupo de rotações.

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

3.4 Rotações e homografias

Qualquer rotação sobre seu centro levará cada ponto $P(\zeta_N)$ da esfera em algum outro ponto $P'(\zeta'_N)$. Em uma forma mais geral, esta transformação pode ser escrita como

$$f(\zeta'_N, \zeta_N) = 0 \quad (3.3)$$

Mas toda rotação é “uma a uma”, na esfera, já que $\zeta'_N = \infty$ para não mais de um valor de ζ_N e vice versa.

Deste modo : (i) f tem um número finito de pólos (exatamente um para ser preciso) e é portanto analítica, assim,

$$f(\zeta'_N, \zeta_N) = \sum_{m,n} a_{mn} \zeta_N^m \zeta_N'^n, \quad (3.4)$$

onde a_{mn} são números complexos; e (ii) quanto a ζ_N , tomando-a como uma variável dependente, f tem exatamente um polo, assim $a_{mn} = 0$ para todo $n \neq 0, 1$; quanto a ζ'_N como variável dependente, f tem novamente exatamente um polo com $a_{mn} = 0$ para todo $m \neq 0, 1$.

Portanto se f representa uma rotação, nós devemos ter,

$$f(\zeta'_N, \zeta_N) = \gamma \zeta'_N \zeta_N + \delta \zeta'_N - \alpha \zeta_N - \beta \quad (3.5)$$

ou

$$\zeta'_N = (\alpha\zeta_N + \beta) / (\gamma\zeta_N + \delta) \quad (3.6)$$

Uma transformação deste tipo é chamada de uma homografia⁵. Em termos de coordenadas homogêneas⁶, ela tem a forma

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde ρ é uma constante arbitrária qualquer. Isto mostra que cada rotação é expressa como uma matriz 2x2, ainda que nós não tenhamos mostrado que o grupo de rotações é equivalente a $SU(2)$.

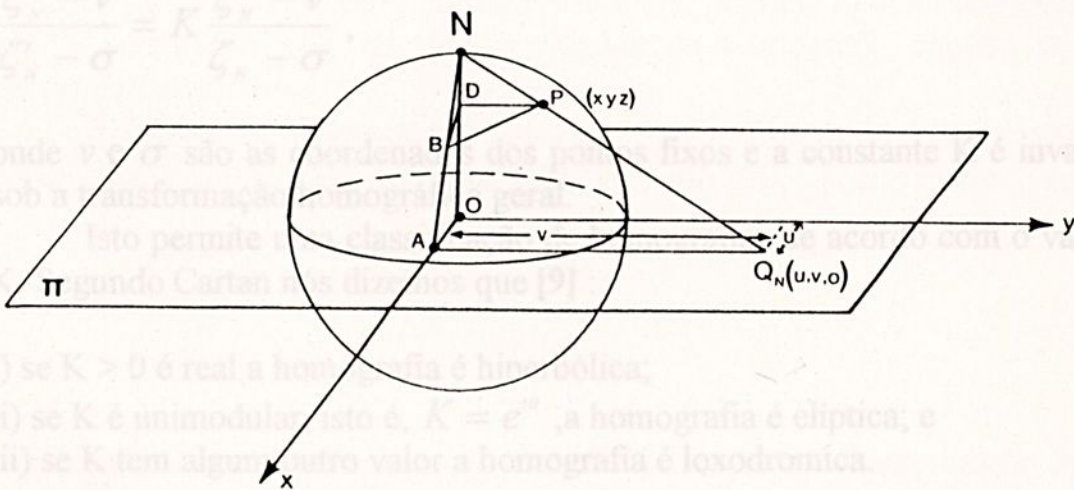


Figura 1

⁵ Esta também é chamada de “bilinear” ou “linear generalizada”. O famoso matemático Klein a chamou de “linear”, embora ela não se enquadra exatamente no que nós chamamos de linear.

⁶ Coordenadas homogêneas são definidas pela relação $\zeta_N = \psi_1 / \psi_2$. Deste modo os pontos da esfera podem ser especificados atribuindo-lhes as duas coordenadas complexas (ψ_1, ψ_2) .

3.5 - Classificação de transformações rígidas homográficas. Homografia produzindo rotações rígidas

Transformações homográficas são convenientemente classificadas de acordo com o que elas deixam fixadas, um ou dois pontos da esfera.

Se

$$\zeta'_N = \zeta_N, \quad \text{então} \\ \gamma \zeta_N^2 + (\delta - \alpha) \zeta_N - \beta = 0$$

tem exatamente duas raízes, as quais podem ser coincidentes ou distintas.

Homografias com exatamente um ponto fixo são chamadas parabólicas. Claramente, estas não podem produzir rotações, visto que cada rotação tem exatamente dois pontos fixos.

Será mostrado mais adiante que homografias com pontos distintos fixos, podem todas elas serem escritas na forma canônica

$$\frac{\zeta'_N - v}{\zeta'_N - \sigma} = K \frac{\zeta_N - v}{\zeta_N - \sigma}, \quad (3.8)$$

onde v e σ são as coordenadas dos pontos fixos e a constante K é invariante sob a transformação homográfica geral.

Isto permite uma classificação de homografias de acordo com o valor de K . Segundo Cartan nós dizemos que [9] :

- i) se $K > 0$ é real a homografia é hiperbólica;
- ii) se K é unimodular, isto é, $K = e^{i\theta}$, a homografia é elíptica; e
- iii) se K tem algum outro valor a homografia é loxodromica.

Nós mostraremos agora que uma homografia representando uma rotação rígida precisa ser elíptica. Considere primeiro uma rotação de ângulo θ da esfera sobre o eixo z .

Nós temos

$$\zeta'_N = \frac{x' - iy'}{R - z'} = e^{i\theta} \frac{(x - iy)}{R - z} = e^{i\theta} \zeta_N \quad (3.9)$$

que é da forma (3.8) com $v = \infty$, $\sigma = 0$ e $K = e^{i\theta}$.

Agora considere a rotação geral rígida para que a esfera rode através de um ângulo θ sobre um eixo $\tilde{N}\tilde{S}$ da rotação, onde $\tilde{N}(v)$ e $\tilde{S}(\sigma)$ são os pontos fixos desta transformação. A homografia correspondente, em nosso sistema de coordenadas, tomará a forma (3.8). Entretanto, se nós considerarmos um novo sistema de coordenadas $\xi_{\tilde{N}}$ para a esfera, então por projeção estereográfica de $\tilde{N}$ para uma posição naquele plano equatorial tendo $\tilde{N}$ e $\tilde{S}$ como pólos, esta rotação tomará a forma

$$\xi'_{\tilde{N}} = e^{i\theta} \xi_{\tilde{N}}, \quad (3.10)$$

que é, nas novas coordenadas $\xi_{\tilde{N}}$, uma homografia do tipo elíptico com $K = e^{-i\theta}$. Mas a correspondência das coordenadas ζ_N e $\xi_{\tilde{N}}$ na esfera é “uma a uma” e portanto produzida por alguma homografia. A constante K , entretanto é invariante sob uma transformação homográfica, assim que expressa nas coordenadas ζ_n a rotação deve ter a forma (3.8), com a qual $K = e^{-i\theta}$. Toda rotação rígida portanto deve ser uma variedade elíptica. O contrário entretanto não é verdadeiro pois os pontos fixados da homografia elíptica não são geralmente diametrais.

É facilmente demonstrado que, em nosso sistema de coordenadas, um ponto $P_d(\zeta_N^d)$ é diametralmente oposto ao ponto $P(\zeta_N)$ se e somente se

$$\bar{\zeta}_N \zeta_N^d = -1$$

Uma homografia elíptica, se ela de fato representa uma rotação rígida, precisa ter seus pontos diametrais fixados, tais que $\bar{v}\sigma = -1$. Toda rotação portanto deve ter a forma

$$\frac{\zeta'_N - v}{\zeta'_N + \bar{v}^{-1}} = e^{-i\theta} \frac{\zeta_N - v}{\zeta_N + \bar{v}^{-1}} \quad (3.11)$$

ou equivalentemente,



$$\zeta'_N = \frac{(v + \bar{v}^{-1}e^{-i\theta})\zeta_N + \bar{v}^{-1}v(1 - e^{-i\theta})}{(1 - e^{-i\theta})\zeta_N + (\bar{v}^{-1} + ve^{-i\theta})}$$

Não é difícil de mostrar, que, alternativamente, cada homografia dá origem a uma rotação rígida. A transformação contém exatamente três parâmetros, dois no número complexo v especificando o eixo da rotação, e θ dando o ângulo da rotação.

Em termos das coordenadas homogêneas ψ_1 e ψ_2 , esta transformação tem a forma

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} v + \bar{v}^{-1}e^{-i\theta} & \bar{v}^{-1}v(1 - e^{-i\theta}) \\ 1 - e^{-i\theta} & (\bar{v}^{-1} + ve^{-i\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

em que ρ é uma constante complexa arbitrária diferente de zero introduzida pelo carácter homogêneo de nossas coordenadas ψ . Esta entretanto não representa um parâmetro essencial visto que $(1/\rho)(\psi_1, \psi_2)$ e (ψ_1, ψ_2) definem o mesmo ponto na esfera.

É costumeiro na literatura física restringir o número de matrizes correspondentes a uma rotação rígida, impondo arbitrariamente a condição $\det(A)=1$.

Isto determina a menos do sinal

$$\rho = \pm e^{-i\theta/2} (v + \bar{v}^{-1}),$$

é justamente o spinor não relativista da física. Mas diferentemente dos métodos pelos quais este é produzido, seu aparecimento em nossa análise não é tal que cada rotação terá agora associada a ela exatamente duas matrizes,

$$\pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

com

Klein foi o primeiro a demonstrar que o grupo de rotações é um subgrupo do grupo homográfico; Cayley então achou explicitamente a forma das transformações (A Cayley, Math. Ann. 15, 238-240 (1865)).

$$\alpha = \frac{(v + \bar{v}^{-1}e^{-i\theta})}{e^{-i\theta/2}(v + \bar{v}^{-1})}$$

e

$$\beta = \frac{\bar{v}^{-1}v(1 - e^{-i\theta})}{e^{-i\theta/2}(v + \bar{v}^{-1})} \quad (3.2)$$

As matrizes do tipo (3.11), evidentemente são unitárias, estabelecendo a bem conhecida correspondência “uma a uma” entre os grupos unitários unimodulares e os de rotações.

As quantidades α e β , que são funções de três parâmetros independentes v e θ , são os chamados parâmetros de Cayley-Klein⁷.

3.6 - Spinor não relativista e sua interpretação

A matriz (3.11) mostra que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

é justamente o spinor não relativista da física. Mas diferentemente dos métodos pelos quais este é produzido, seu aparecimento em nossa análise não é arbitrária nem forçada, com uma natural e direta interpretação geométrica: esta é a representação das coordenadas homogêneas complexas dos pontos em uma esfera invariante. Dadas as coordenadas Cartesianas (x, y, z) para um ponto dado, suas correspondentes coordenadas homogêneas

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

⁷ Klein foi o primeiro a demonstrar que o grupo de rotações é um subgrupo do grupo homográfico; Cayley então achou explicitamente a forma das transformações (A Cayley, Math. Ann. 15, 238-240 (1965)).

podem ser computadas a partir, de (3.2). Ainda, dadas as coordenadas homogêneas

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

(3.13)

as correspondentes (x,y,z) são obtidas a partir de (3.2):

$$\begin{aligned} x &= R \frac{\psi_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2}{\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2}; \\ y &= R \frac{i(\psi_1 \bar{\psi}_2 - \psi_2 \bar{\psi}_1)}{\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$z = R \frac{\psi_1 \bar{\psi}_1 - \psi_2 \bar{\psi}_2}{\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2}$$

Se a representação radial do grupo de rotações é usada, teremos a mais completa interpretação do spinor possível, visto que todas matrizes da forma

$$\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

geram a rotação identidade, fazendo todo spinor $\left(\frac{1}{\rho}\right)\psi$ equivalente a ψ .

O conjunto de equações (3.12), entretanto nos sugere uma interpretação mais detalhada do spinor. Considere,

$$\frac{x}{\psi_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2} = \frac{y}{i(\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2)} = \frac{z}{\psi_1 \bar{\psi}_1 - \psi_2 \bar{\psi}_2} = \frac{R}{\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2} = c,$$

onde c é real embora não constante dado que $\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2$ não é invariante sob as transformações (3.10). Mas se nós concordarmos em restringir o grupo para incluir somente matrizes unitárias, c torna-se uma constante, que nós

podemos escolher, como sendo um, sem perda da generalização, e portanto obteremos⁸,

$$\begin{aligned}x &= \psi_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2 \\y &= i(\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2) \\z &= \psi_1 \bar{\psi}_1 - \psi_2 \bar{\psi}_2 \\R &= \psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2\end{aligned}\tag{3.13}$$

Isto nos possibilita designar coordenadas ψ não somente para os pontos em alguma esfera dada, mas também em toda esfera concêntrica a ela, portanto, cobrindo o espaço tri-dimensional inteiro. O spinor é agora interpretado diretamente com um ponto ou como um vetor em E_3 . Sob a restrição unitária, somente matrizes da forma

$$e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são consideradas como geradoras da rotação identidade, fazendo todo spinor $e^{i\alpha} \psi$ equivalente a ψ o que interpreta o spinor a menos de um fator $e^{i\alpha}$. O fator $e^{i\alpha}$ é também chamado de fator fase.

Matrizes da forma

$$K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com K real representam o que chamamos de expansões uniformes.

O fator fase $e^{i\alpha}$ pode também ser interpretado restringindo nosso grupo para conter somente matrizes unimodulares. A rotação identidade será gerada agora somente por

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

⁸ A condição de "Normalização" $\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 = 1$, por exemplo, é equivalente a especificar que os pontos estejam na esfera unitária.

permitindo deste modo uma distinção absoluta entre $e^{i\alpha}\psi$ e ψ . Isto nos leva diretamente às três mais bem conhecidas interpretações do spinor: o vetor diretor de Payne, o vetor triade ou referencial de Kramers, e o vetor nulo polarizado de Cartan.

Todas três são baseadas na observação de que sob a ação do grupo unimodular unitário

$$Vx = (\psi_1)^2 - (\psi_2)^2, \quad Vy = i((\psi_1)^2 + (\psi_2)^2), \quad Vz = -2\psi_1\psi_2$$

transformam-se como as componentes de um vetor (complexo) nulo V .

Fazendo $V = V_1 + iV_2$, a propriedade de que V é nulo é equivalente a requerer simultaneamente que $V_1V_2=0$ e $|V_1| = |V_2|$. Não é difícil de mostrar que

$$V_3 = \left(\frac{1}{R}\right)(V_1 \times V_2)$$

tem componentes x,y,z dadas por (3.13), e assim estes três vetores formam um sistema ortogonal (ver Fig.2). O sistema definido por ψ difere daquele definido por $\psi' = e^{i\alpha}\psi$, somente quando a orientação de V_1 e V_2 relativa a V'_1 e V'_2 , difere de um ângulo 2α .

V_1 é o "vetor diretor" de Payne. Nesta interpretação, ψ e $-\psi$ são indistinguíveis como estruturas geométricas.

Pode-se esperar que o sinal de ψ possa ser interpretado. Isto não é possível na estrutura local que temos aqui trabalhado.

Nenhuma estrutura geométrica local pode ser construída para distinguir ψ de $-\psi$, desde que uma rotação contínua por um ângulo 2π muda ψ continuamente em $-\psi$. De fato, esta ambigüidade de sinais caracteriza uma importante e intrínseca característica da topologia da variedade do grupo de rotações, a qual não pode de modo algum ser eliminada. A diferença de sinal, entretanto pode ser interpretada não localmente através de relações obtidas por Misner, Thorne, e Wheeler, ou em considerando um conjunto de orientações. Isto significa que quando um objeto único é considerado, per se, uma rotação de 2π é indistinguível de uma de 4π , mas em relação a um conjunto de orientações do corpo ela o será.

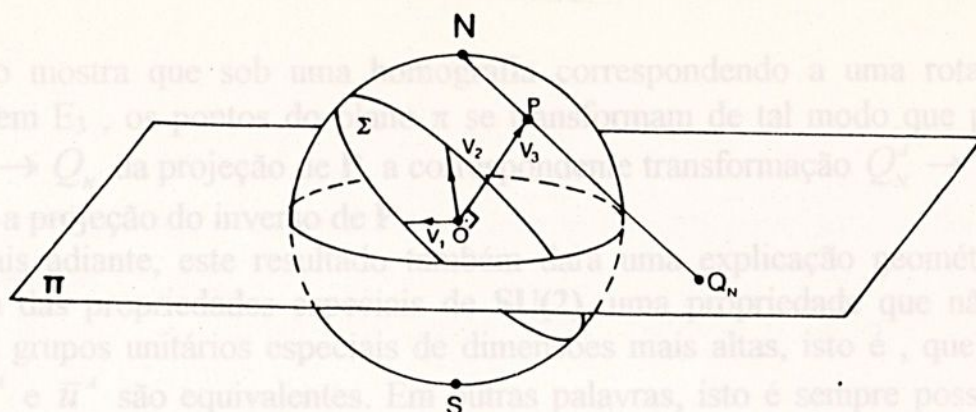


Figura 2

3.7 - Relação para as rotações com ponto e sem ponto

No formalismo spinor usual, 4 tipos de spinors são introduzidos: covariantes, contravariantes, e seus complexos conjugados (distinguidos pelos pontos dos índices). A teoria assume a representação (3.11) para o grupo de rotações e define um spinor contravariante μ^A para ser um objeto transformado sob rotações como

$$u'^A = t_B^A u^B \quad \text{com} \quad t_B^A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} e \quad (3.14)$$

$$\bar{u}'^{\dot{A}} = \bar{t}_{\dot{B}}^{\dot{A}} \bar{u}^{\dot{B}} \quad \text{com} \quad \bar{t}_{\dot{B}}^{\dot{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Agora, a rotação $\zeta_N^d \rightarrow \zeta_N^{d'}$ é identificada a,

$$\zeta_N^{d'} = \frac{\alpha \zeta_N^d + \beta}{-\beta \zeta_N^d + \bar{\alpha}} \quad e \quad \bar{\zeta}_N^{d'} = \frac{\bar{\alpha} \bar{\zeta}_N^d + \bar{\beta}}{-\beta \bar{\zeta}_N^d + \alpha} \quad (3.15)$$

Uma comparação de (3.14) com (3.15) mostra que nós identificamos $\bar{u}^{\dot{1}} = \bar{\psi}_1$ e $\bar{\mu}^2 = \bar{\psi}_2$.

Isto mostra que sob uma homografia correspondendo a uma rotação sobre O em E_3 , os pontos do plano π se transformam de tal modo que para cada $Q_n \rightarrow Q_N$ da projeção de P , a correspondente transformação $Q_N^d \rightarrow Q_N^{d'}$ é sempre a projeção do inverso de P .

Mais adiante, este resultado também dará uma explicação geométrica para uma das propriedades especiais de $SU(2)$, uma propriedade que não é comum a grupos unitários especiais de dimensões mais altas, isto é, que em $SU(2)$ u^A e $\bar{u}^A$ são equivalentes. Em outras palavras, isto é sempre possível encontrar uma matriz unimodular S tal que $S t S^{-1} = \bar{t}$, onde $t = t_A^B$, e $\bar{t} = \bar{t}_B^A$, em (3.14)⁹.

Os spinors covariantes podem ser dados por uma igualmente simples imagem geométrica, desde que nós mudemos o pólo da projeção para o pólo sul S mostrado na (Fig.3).

É possível mostrar que a coordenada de Q_s^d é

$$\zeta_s^d = -(x - iy) / (R - z). \text{ (Argumento semelhante foi usado na seção 3.3)}$$

Mas de (3.2) nós podemos ter $\zeta_s^d = -\zeta_N$, a qual em uma substituição na homografia definida por (3.11) nos dá,

$$\zeta_s^{d''} = \frac{\alpha \zeta_s^d - \beta}{\beta \zeta_s^d + \bar{\alpha}} \quad (3.16)$$

Por definição, o spinor covariante se transforma como,

$$u'_A = T_A^B u_B \quad \text{com} \quad T_A^B = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad t_B^A T_C^B = \delta_C^A; \quad (3.17)$$

portanto se nós escrevermos $\zeta_s^d = u_2 / u_1$, (3.16) e (3.17) tornam-se idênticas.

Este resultado mostra imediatamente o significado geométrico do "spin-tensor métrico" ε^{AB} . Desde que $\zeta_s^d = u_2 / u_1 = -\zeta_N = -u^1 / u^2$ nós podemos escrever em forma matricial $u^A = \varepsilon^{AB} u_B$ com

⁹ A matriz $S = \sigma_2$ é uma dessas matrizes.

Tabela 1.

$$\varepsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

portanto o “spin-tensor métrico” estabelece a relação entre as coordenadas homogêneas de Q_N e Q_S .

Finalmente o spinor covariante com pontos é relacionado às coordenadas de Q_S , onde

$$\zeta_s = 1 / \bar{\zeta}_N,$$

e se nós escrevermos

$$\bar{\zeta}_s = \bar{u}_2 / \bar{u}_1,$$

nós obteremos as corretas propriedades de transformação de $\bar{u}_A$ a partir da homografia. Estas relações acham-se sumarizadas na tabela 1.

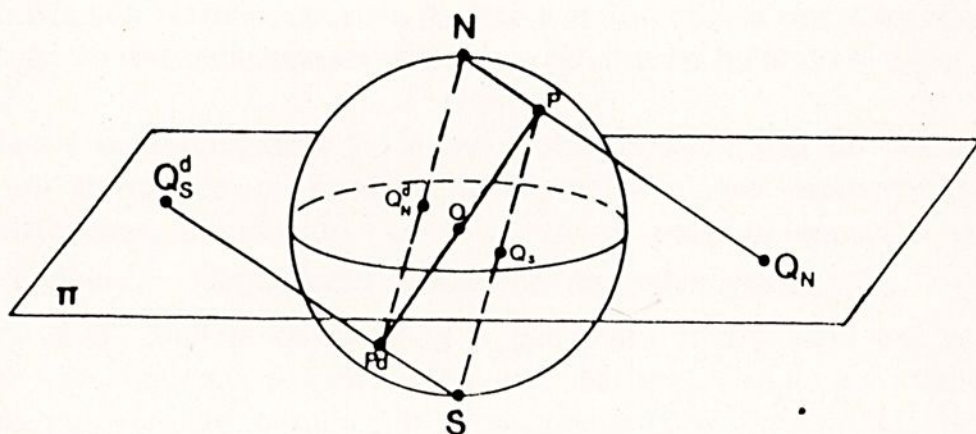


Figura 3

Tabela 1. FORMAS DE DIRAC-ASPECTOS GEOMÉTRICOS

Pontos na Projção do Plano π	Coordenadas Homogeneas dos pontos no plano projetado	Notação pontuada	Coordenadas dos pontos no plano projetado em termos da notação pontuada
Q_N	$\zeta_{Nn} = \frac{\psi_1}{\psi_2}$	u^A	$\zeta_N = \frac{u^1}{u^2}$
Q_N^d	$\zeta_N^d = -\frac{1}{\zeta_N} = -\frac{\bar{\psi}_2}{\bar{\psi}_1}$	$\bar{u}^{\dot{A}}$	$\bar{\zeta}_N^d = \frac{\bar{u}^{\dot{1}}}{\bar{u}^{\dot{2}}}$
Q_S^d	$\zeta_S^d = -\zeta_N = -\frac{\psi_1}{\psi_2}$	u_A	$\zeta_S^d = \frac{u_2}{u_1}$
Q_S	$\zeta_S = \frac{1}{\zeta_N} = \frac{\bar{\psi}_2}{\bar{\psi}_1}$	$\bar{u}_{\dot{A}}$	$\bar{\zeta}_S = \frac{\bar{u}_{\dot{2}}}{\bar{u}_{\dot{1}}}$

A teoria de Relatividade pode ser desenvolvida através do cálculo tensorial, ou através de um formalismo alternativo e mais moderno das formas diferenciais, introduzido por *Elie Cartan*, onde as equações do campo de gravitação independem diretamente dos potenciais $g_{\mu\nu}$.

É possível também desenvolver a geometria riemanniana em um formalismo mais moderno, suscetível de novas aberturas, usando o conceito de Tétrada ou Vierbein introduzido originalmente por *Cartan* [11] em geometria, e desenvolvido em física por *Kibble e Utiyama* [12]. Considere um campo vetorial de referência sobre uma variedade que suporemos o espaço-tempo quadri-dimensional, sobre todo o plano tangente definimos vetores tangentes $\bar{e}_i (\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, que definem o referencial local. Se a variedade é o espaço-tempo, os $\bar{e}_i$ constituem um referencial localmente inercial. Um deslocamento infinitesimal $d\bar{m}$ se poderá escrever como:

$$d\bar{m} = V^i \bar{e}_i$$

4 - SPINORS DE DIRAC- ASPECTOS GEOMÉTRICOS

4.1 - Sobre a vierbein

As 1 - forma V^i são chamadas de Vierbein ou Tetradas. Se em $d\vec{m} = V^i \vec{e}_i$ o referencial é aquele dos vetores tangentes às linhas coordenadas

A Teoria da Relatividade Geral conserva a hipótese fundamental de que o espaço-tempo é uma variedade (manifold) de *Riemann* , mas supõe que o elemento de linha depende da distribuição de matéria, e que, portanto, deve determinar-se em cada caso, o que significa dizer que os coeficientes $g_{\mu\nu}$ (em número de 10, posto que a dimensão dos espaço-tempo é $n=4$), da forma fundamental:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.1)$$

não serão dados a priori. Os $g_{\mu\nu}$ são conhecidos como potenciais de gravitação. O problema essencial da teoria relativista da gravitação, tal e qual elaborada por *Einstein*, consiste na determinação efetiva dos potenciais de gravitação correspondentes aos diferentes estados da matéria no espaço [10] .

A teoria de Relatividade pode ser desenvolvida através do cálculo tensorial, ou através de um formalismo alternativo e mais moderno das formas diferenciais, introduzido por *Elie Cartan*, onde as equações do campo de gravitação independem diretamente dos potenciais $g_{\mu\nu}$.

É possível também desenvolver a geometria riemanniana em um formalismo mais moderno, suscetível de novas aberturas, usando o conceito de Tétrada ou Vierbein introduzido originalmente por *Cartan* [11] em geometria, e desenvolvido em física por *Kibble* e *Utiyama* [12] . Considere um campo vetorial de referência sobre uma variedade que suporemos o espaço - tempo quadri-dimensional; sobre todo o plano tangente definimos vetores tangentes $\vec{e}_i$ ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$), que definem o referencial local. Se a variedade é o espaço- tempo, os $\vec{e}_i$, constituem um referencial localmente inercial. Um deslocamento infinitesimal $d\vec{m}$ se poderá escrever como:

$$d\vec{m} = V^i \vec{e}_i ,$$

onde os V^i são lineares nas diferenciais das coordenadas x^μ da variedade, e portanto

$$V^i = V_\mu^i dx^\mu$$

As 1 - forma V^i são chamadas de Vierbein ou Tétradas. Se em $d\vec{m} = V^i \vec{e}_i$ o referencial é aquele dos vetores tangentes às linhas coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \vec{\partial}_\mu = \vec{e}_\mu \Rightarrow d\vec{m} = dx^\mu \vec{\partial}_\mu \text{ e ainda}$$

$$\vec{\partial}_\mu = V_\mu^i \vec{e}_i$$

$$\vec{e}_i = V_i^\mu \vec{\partial}_\mu$$

sendo

$$(|V_i^\mu| = |V_\mu^i|^{-1})$$

As componentes da vierbein podem ser então interpretadas como matrizes que fazem passar do sistema local àquele das coordenadas. Dado um vetor:

$$\vec{A} = A^i \vec{e}_i = A^\mu \vec{\partial}_\mu ,$$

teremos

$$A^i = V_\mu^i A^\mu \text{ e}$$

$$A^\mu = V_i^\mu A^i$$

4.2 - Simetrias numa teoria de gravitação a la Cartan - Einstein

O estudo e descrição da influência do spin no fenómeno gravitacional é uma das motivações da teoria de *Cartan* no espaço-tempo, também chamada de gravidade de Einstein-Cartan [13]. A idéia essencial desta teoria tem sua origem na teoria matemática das conexões, 1916, com um artigo do matemático *Gerhard Hessenberg* [14]. Nesta teoria, em contraste com a teoria de Einstein, o tensor de torção não é nulo, mas é relatado à parte anti-simétrica das conexões afim Γ_{ij}^k . A teoria de Einstein-Cartan é relacionada essencialmente com o aparecimento da torção.

A correspondência entre *Cartan-Einstein* [15] nos anos 20 nos sugere que uma base de uma nova espécie de geometria com propriedades independentes de uma métrica estaria se esboçando. Esta geometria com torção acabou sendo inventada por Einstein, que a chamou de geometria riemanniana com torção [16].

Apesar dos esforços de Einstein em dar a esta nova geometria um sentido físico, identificando a parte antisimétrica da conexão afim como o potencial eletromagnético, ele não foi bem sucedido. Em uma nota à "Science" ele observou que tinha errado a abordagem [17].

Talvez influenciado pela falha de Einstein o formalismo de Cartan não tornou-se familiar para alguns físicos por longo tempo, e foi redescoberto com anos de atraso. As idéias de Cartan reapareceram somente em trabalhos como o de *Yang-Mills*, 1954 [18], de *Sciama e Kibble* [12] [19], de *Hehl* [20] e do grupo de Varsóvia (*Trautman e colaboradores*) [21]. O artigo de Hehl associa o tensor de torção ao momento angular, intrínseco, enquanto o de Trautman contém uma exposição baseada nas formas diferenciais de Cartan.

Em anos recentes contribuições notáveis foram feitas por *Regge* e colaboradores em Turim, popularmente chamada de "*Group Manifold approach to gravity and supergravity theories*", ou de *Turim program* [22],[23].

A filosofia básica do "Turim Program" é esta: todas as simetrias locais de uma dada teoria física são transformações de coordenadas em um espaço de dimensão maior. Este espaço maior é uma variedade grupo ("Group Manifold"), composta de spinors - coordenadas fermionicas¹ - e vetores - coordenadas bosonicas², tais que o número de graus de liberdade (bosonicas) de um sejam iguais aos graus de liberdade (fermionicas) do outro. Neste contexto as simetrias internas, também chamadas de simetrias

¹ Terminologia usada em Física teórica do campo

² *Annals of Physics*, 124, 255 (1979), tem o grupo *R*hine, que significa fluir, correr.

de Yang - Mills e associadas aos spinors, e as simetrias do espaço tempo (grupo de Poincaré) são unificadas em uma única estrutura algébrica, conhecida também como super-álgebra. As simetrias internas revelam uma característica geométrica que estende a interpretação geométrica da relatividade geral. As componentes dos spinors se ligam às componentes dos vetores bosonicos por uma simetria chamada rheonomia³. Esta simetria foi encontrada por Regge e colaboradores ao tentar, a partir de uma lagrangeana bem estabelecida para uma teoria de super - gravidade na variedade $SU(2,2/1)$, (graduação no spinor de Dirac ψ do grupo $SU(2,2)$), encontrar as “equações do movimento” para os campos fisicos envolvidos.

A rheonomia, portanto, aparecia como consequência do princípio variacional. Para aquela teoria, construída em $SU(2,2/1)$, e por causa da rheonomia, as componentes da curvatura com respeito as bases “VV” (componentes “in”) estão relacionadas as componentes com respeito as bases “ ψV ” e “ $\psi\psi$ ” (componentes “out”).

A rheonomia é importante, posto que assegura à teoria a possibilidade de desenvolver toda a dinâmica no espaço - tempo (componentes em “VV”).

Uma extensão da teoria obtida por Regge e colaboradores, esboçada por Fré [24], e recentemente obtida por Borges [25] [26], prevê um grupo ζ para uma teoria expandida ao modelo proposto, acoplado à variedade de grupo $SU(2,2/1)$, tal que

$$G = \zeta \otimes SU(2,2/1) ;$$

ζ é o grupo das simetrias internas de Yang- Mills. Esse problema estendido foi chamado de formulação supersimétrica de uma teoria de Yang - Mills acoplada ao grupo $SU(2,2/1)$.

Uma hipótese geral formulada as “curvaturas internas” de ζ , foi hipotetizado então como sendo

$$F = dA = F_{ab} V^a \wedge V^b + ic \bar{\lambda}_A \wedge \Gamma_m \psi_A \wedge V^m + id \epsilon_{AB} \bar{\lambda}_A \wedge \Gamma_m \psi_B \wedge V^m + if \sigma \wedge \bar{\psi}_A \wedge \psi_A ;$$

³ **Rheonomia** : termo utilizado pela primeira vez por Regge e colaboradores em um artigo publicado no “Annals of Physics”, 135,237 (1981), vem do grego **Rhéō**, que significa fluir, correr.

$$D\lambda_A = \Lambda_{mA} \wedge V^m + igF_{ab} \wedge \sum^{ab} \psi_A + h\phi_a \wedge \Gamma^a \psi_A + \\ + itF_{ab} \wedge \varepsilon_{AB} \sum^{ab} \psi_B + Z\phi_a \wedge \Gamma^a \varepsilon_{AB} \psi_B;$$

$$D\sigma = \phi_a \wedge V^a + ik\bar{\lambda}_A \wedge \psi_A + il\varepsilon_{AB} \bar{\lambda}_A \wedge \psi_B;$$

$$DF^{ab} = G_m^{ab} \wedge V^m + in\bar{\Lambda}_A^{[a} \wedge \Gamma^{b]} \psi_A + ip\varepsilon_{AB} \bar{\Lambda}_A^{[a} \wedge \Gamma^{b]} \psi_B,$$

onde $\phi_a = \partial_a \sigma$, $G_m^{ab} = \partial_m F^{ab}$;

λ_A = spinor, dado pela equação de Dirac

$$\Gamma^m \Lambda_{mA} = 0 \quad (\Lambda_{mA} = D\lambda_A) ;$$

σ = campo escalar ; ψ_A = spinor de Dirac

Para encontrar os parâmetros livres no conjunto de equações acima, condições de integrabilidade têm que ser aplicadas. Em uma variedade tais condições são chamadas usualmente de Identidades de Bianchi.

Ao calcularmos as Identidades de Bianchi para o sistema acima identificado (alguns cálculos estão no apêndice 1), encontraremos o seguinte sistema de equações para os parâmetros livres :

$$2fk - d = 0; \quad 2fl - d = 0; \quad m = d \text{ e } p = d$$

$$ch + f + dz = 0 \quad l + cg + dt = 0; \quad dh - cz = 0$$

$$dg - ct = 0$$

obtidos da identidade $DDA = 0$ e

$$5 - \text{CONCLUSÃO} \quad 4 + 3dt + 2z + 3cg + 2kh = 0;$$

$$3ct + 2kz - 3dg - 2lk = 0 \quad cg - 2kh = 0$$

$$dg - 2lh = 0 \quad ct - 2kz = 0 \quad dt - 2lz = 0$$

obtidos da identidade $DD\lambda_A = 0$.

Ao requerer, como ponto de partida que a rheonomia aplica-se ao problema proposto então suporemos que $c = f = d = 1$ e teremos agora 11 equações para 11 incógnitas.

Então, ao resolvermos o último sistema, encontraremos que

$$n = 1; \quad k = \frac{1}{2}$$

$$p = d = 1; \quad l = \frac{1}{2}$$

$$t = z = -\frac{1}{2}; \quad g = h = -\frac{1}{2}$$

A solução do último sistema é um indicativo de que a hipótese formulada para as curvaturas, é aceitável : uma hipótese mais restritiva implicaria na não solução do sistema.

³ F. Klein, The mathematical theory of the top (Scribner New York, 1897).

5 - CONCLUSÃO

Finalmente, espero ter ao longo desta dissertação, esclarecido algumas concepções errôneas concernentes aos spinors, como por exemplo : é dito muitas vezes que o spinor não é susceptível de interpretação geométrica alguma - foi mostrado no capítulo 3 que isso não é verdadeiro; segundo, que o spinor é essencialmente um objeto relativista - a construção apresentada também no capítulo 3 foi toda ela levada a bom termo usando apenas geometria Euclidiana clássica, e portanto spinors podem também, ser definidos em um espaço onde não necessariamente se definam vetores nulos, tais como os espaços euclidianos complexo ou pseudo-euclidiano; terceiro, que o spinor é essencialmente um objeto quantum mecânico, não tendo uma interpretação clássica - no capítulo 3 não foi feita nenhuma alusão à mecânica quântica. É bom lembrar que as origens históricas do spinor remontam a *F. Klein*, que originalmente designou o spinor para simplificar um tratamento clássico do que ele chamou "spinning top"⁴

Quanto ao capítulo anterior, a determinação, através da análise das Identidades de Bianchi, de um sistema compatível de equações para os parâmetros da teoria indica que as hipóteses formuladas para eles são aceitáveis, e que rheonomia pode de fato ser considerada, neste caso, como uma simetria intrínseca ao problema proposto.

A presença dos spinors ψ_A e λ_A nas curvaturas da supervarietade têm como características :

- i) Tornar possível a resolução das Identidades de Bianchi do problema proposto, qual seja : formular uma teoria de gravitação a la Cartan - Eintein;
- ii) Os seus componentes, determinam os componentes dos vetores bosonicos : o conhecimento de apenas um dos componentes da base de spinors (ditas também componentes fora - "out"- do espaço - tempo) determinam os componentes do vetor bosonico (ditos componentes no - "in"- espaço - tempo). A rheonomia portanto é equivalente a possibilidade de desenvolver toda a dinâmica no espaço - tempo, dando à teoria um significado físico.

⁴ **F. Klein**, The mathematical theory of the top (Scribner New York, 1897).

A teoria de spinors é rica e muito extensa. Salientei aqui apenas alguns dos seus aspectos, com o que espero ter de alguma forma contribuído para ressaltar o poder de generalidade desse, porque não, “intrigante” objeto matemático.

DIAGRAMA 1

Onde nós usamos o fato que $DF^* = \frac{1}{2}\psi_a \wedge \Gamma^a \psi_a$ e $D\psi_a = 0$ quando as curvaturas de $SU(2,2/1)$ são zero.

Sobre a substituição da expressão DG_a^* e $D\bar{\Lambda}_a^*$, nós obtemos

supervariiedade

$$G = \zeta \otimes SU(2,2/1)$$

Vetores

+

Spinors

Componentes da curvatura em
 $V \wedge V$ ou V

$\Leftrightarrow$

Componentes da curvatura em
 $\psi \wedge \psi$ ou $\Gamma \psi$ ou $\psi \wedge V$

6 -APÊNDICE

Para resolvermos as Identidades de Bianchi para o sistema de equações nós encontraremos que:

$$DDF^{ab} = D(G_m^{ab}) \wedge V^m + \frac{i}{2} G_m^{ab} \wedge \bar{\psi}_A \wedge \Gamma^m \psi_A - in D\bar{\Lambda}_A^{[a} \wedge \Gamma^{b]} \psi_A + \\ + ip D\bar{\Lambda}_A^{[a} \wedge \Gamma^{b]} \psi_B = 0$$

Onde nós usamos o fato que $DV^m = \frac{1}{2} \psi_A \wedge \Gamma^m \psi_A$ e $D\psi_A = 0$ quando as curvaturas de $SU(2,2/1)$ são zero.

Sobre a substituição da expressão DG_m^{ab} e $D\bar{\Lambda}_A^a$ nós obtemos

$$D_n G_m^{ab} \wedge V^n \wedge V^m + in D_m \bar{\Lambda}_a^{[a} \wedge \Gamma^{b]} \psi_A \wedge V^m + \\ + ip D_m \bar{\Lambda}_B^{[a} \wedge \Gamma^{b]} \psi_B \wedge V^m + \\ + \frac{i}{2} G_m^{ab} \wedge \bar{\psi}_A \wedge \Gamma^m \psi_A + \\ + in D^{[a} \Lambda_{mA} \wedge V^m \wedge \Gamma^{b]} \psi_A + \\ + ng D^{[a} F_{lm} \wedge \bar{\psi}_A \wedge \sum^{lm} \Gamma^{b]} \psi_A + \\ + inh D^{[a} \phi_l \wedge \psi_A \Gamma^l \Gamma^{b]} \psi_A + \\ + nt \varepsilon_{AB} D^{[a} F_{lm} \wedge \bar{\psi}_B \sum^{lm} \Gamma^{b]} \psi_A + \\ + inz \varepsilon_{AB} D^{[a} \phi_l \wedge \psi_B \Gamma^l \Gamma^{b]} \psi_A + \\ + ip \varepsilon_{AB} D^{[a} \bar{\Lambda}_{mA} \wedge V^m \wedge \Gamma^{b]} \psi_A + \\ + pg \varepsilon_{AB} D^{[a} F_{lm} \wedge \bar{\psi}_A \wedge \sum^{lm} \Gamma^{b]} \psi_B + \\ + ip h \varepsilon_{AB} D^{[a} \phi_l \wedge \bar{\psi}_A \wedge \Gamma^l \Gamma^{b]} \psi_c + \\ + pt \varepsilon_{AB} \varepsilon_{AC} D^{[a} F_{lm} \wedge \psi_B \wedge \sum^{lm} \Gamma^{b]} \psi_c + \\ + ip z \varepsilon_{AB} \varepsilon_{AC} D^{[a} \phi_l \wedge \psi_B \wedge \Gamma^l \Gamma^{b]} \psi_c = 0$$

A projecção em duas funfbeins nos leva para

$$D_{[n} D_{m]} F^{ab} = 0$$

Por escolha dos termos contendo $\sum \Gamma$ e $\Gamma\Gamma$ e desenvolvendo eles nas bases das matrizes de Dirac, encontramos

$$i) D^m F^{ab} - 2(ng + pk) D^{[a} F^{b]m} = 0$$

que coincidem com as equações de Maxwell

$$G_{[ab|m]} = 0, \text{ e então temos}$$

$$ng + pt = 1$$

e

$$ii) \frac{1}{2}(pg - nt)\varepsilon^{cdm[b} D^{a]} F_{cd} + 2(ph - nz)\eta^{n[b} D^{a]} \phi^i = 0$$

Para que a relação (ii) seja satisfeita sem requerer a validade de condições físicas inaceitáveis, então :

$$pg - nt = 0;$$

$$ph - nz = 0$$

Nós teremos entretanto obtido a primeira das três relações entre os parâmetros da curvatura. Trabalhando em supergravidade zero, mais uma vez, teremos que :

$$\begin{aligned} DD\sigma &= D_a \phi_b \wedge V^a \wedge V^b + ik D_a \bar{\lambda}_A \wedge \psi_A \wedge V^a + \\ &+ i l \varepsilon_{AB} D_a \bar{\lambda}_A \wedge \psi_B \wedge V^a + \frac{i}{2} \phi_a \wedge \bar{\psi}_A \wedge \Gamma^a \psi_A + \\ &+ ik \bar{\Lambda}_{mA} \wedge V^m \wedge \psi_A + \\ &+ kg F_{ab} \wedge \bar{\psi}_A \wedge \sum^{ab} \psi_A + ik h \phi_a \wedge \bar{\psi}_A \wedge \Gamma^a \psi_A + \\ &+ kt \varepsilon_{AB} F_{ab} \wedge \bar{\psi}_B \wedge \sum^{ab} \psi_A + \\ &+ ik z \varepsilon_{AB} \phi_a \wedge \bar{\psi}_B \wedge \Gamma^a \psi_A + i l \varepsilon_{Ab} \bar{\Lambda}_{mA} \wedge V^m \wedge \psi_B + \\ &+ l g \varepsilon_{AB} F_{ab} \wedge \bar{\psi}_A \wedge \sum^{ab} \psi_B \wedge \sum^{ab} \psi_c + \\ &+ i l z \varepsilon_{AB} \varepsilon_{AC} \phi_a \wedge \bar{\psi}_B \wedge \Gamma^a \psi_c = 0 \end{aligned}$$

7 - Da última equação teremos que :

$$\frac{i}{2}\phi_0 \wedge \bar{\psi}_A \wedge \Gamma^a \psi_A + ik\phi_a \wedge \bar{\psi}_A \wedge \Gamma^a \psi_A + ilz\varepsilon_{AB}\phi_a \wedge \bar{\psi}_B \wedge \Gamma^a \psi_A = 0$$

2. E. Cartan, The theory of spinors, the MIT Press, 1975.

3. C. Chevalley, The Algebraic theory of spinors, Columbia University Press, De onde segue que :

4. C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation, Freeman, San Francisco, 1973.

5. R. Penrose, Battelle $\frac{1}{2} + kh + lz = 0$ e by De Witt and Wheeler, Benjamin, New York, 1968, p. 121.

6. V. I. Smirnov, A course of Higher mathematics, Pergamon, New York, 1964, vol. 1, p. 1. E. A. M. Frescura, B. J. Hillev, American J. Phys. 49, 2 (1981).

$$kt\varepsilon_{AB}F_{ab} \wedge \bar{\psi}_B \wedge \sum^{ab}\psi_A + lg\varepsilon_{AB}F_{ab} \wedge \bar{\psi}_A \wedge \sum^{ab}\psi_B = 0$$

7. M. Morand, Geometrie Spinorielle, Masson et Cie, Paris, 1973.

e portanto

9. E. Cartan, Leçons Sur la Geometrie Projective Complexe, Publisher, Paris, 1950.

$$kt - g = 0$$

10. S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley, New York, 1972.

11. E. Cartan, Annales Ecole Norm. Sup. 40,325 (1923); ibid. 41,1 (1924).

12. T. W. Kibble, J. Math. Phys. 2, 212, (1961); R. Utiyama, Phys. Rev. 101, 1597 (1956).

13. A. Trautmann, Ann. New York Acad. Sciences, 262,241 (1975).

14. G. Hessenberg, Math. Ann. 78,187 (1916).

15. E. Cartan, A. Einstein, Elie Cartan - Albert Einstein letters on absolute parallelism, ed. by R. Debever, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979.

7 - BIBLIOGRAFIA

1. P. A. M. Dirac, Proc. Royal Society, A 117,610 (1928).
2. E. Cartan, The theory of spinors , the Mitt Press, 1975.
3. C. Chevalley, The Algebraic theory of spinors, Columbia University Press, 1954.
4. C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation, Freeman, San francisco, 1973.
5. R. Penrose, Battelle Rencontres edicted by De Witt and Wheeler, Benjamin, New York, 1968, p. 121.
6. V. I. Smirnov, A course op Higher mathematics, Pergamon, New York, 1964, vol. 3, part 1; F. A. M. Frescura, B. J. Hiley, American J. Phys. 49, 2 (1981).
7. M. Morand, Geometrie Spinorielle, Masson et. Cie, Paris, 1973.
8. R. Penrose, J. Math. Phys., 8, 345 (1967).
9. E. Cartan, Leçons Sur la Geometrie Projective Complexe, Publisher, Paris, 1950.
10. S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley, New York, 1972.
11. E. Cartan, Annales Ecole Norm. Sup. 40,325 (1923); ibid. 41,1 (1924).
12. T. W. Kibble, J. Math. Phys. 2, 212, (1961); R. Utiyama, Phys. Rev. 101, 1597 (1956).
13. A. Trautmann, Ann. New York Acad. Sciences, 262,241 (1975).
14. G. Hessenberg, Math. Ann. 78,187 (1916).
15. E. Cartan, A. Einstein, Elie Cartan - Albert Einstein letters on absolute parallelism, ed. by R. Debever, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979.

16. A. Einstein, Math. Ann. 102,685 (1929).
17. A. Einstein, Science 74, 438 (1929).
18. C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954).
19. D. W. Sciama, Recent developments in General Relativity, 415, Pergamon Press, New York, New York (1962).
20. F. W. Hehl, P. V. der Heyde, G. D. Kerliek, J. M. Nester, "General relativity with spin and torsion : Foundations and Prospects" , Reviews of Modern Physics, vol. 48, nr. 3, 1976.
21. A Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 20, 185, 503, 895 (1972).
22. R. D'Auria, P. Fré, E. Maina, T. Regge, Annals of Physics, 135, 237 (1981).
23. M. Castellani, R. D'Auria, P. Fré, Supergravity and Superstrings. A geometric perspective, vol. 1, Mathematical Foundations, Word Scientific Publishing, New Jersey, 1991.
24. P. Fré, Nuclear Physics B 187, 376, (1981).
25. M. F. Borges, Journal of Geometry and Physics (aceito para publicação)
26. M. F. Borges e J. Longhi, "Bianchi Identities for an extended 5 dimensional Cartan gravity theory", Anais do XVI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu, MG, págs 25,26.



unesp

