

Eliana Xavier Linhares de Andrade

Alguns resultados sobre frações contínuas que correspondem a
duas expansões em séries de potências



Alguns resultados sobre frações contínuas que correspondem a duas expansões em séries de potências

ELIANA XAVIER LINHARES DE ANDRADE

Tese a ser apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, câmpus de São José do Rio Preto, da Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Livre-Docente.



São José do Rio Preto

2002

1910001131



Alguns resultados sobre frações contínuas que correspondem a duas expansões em séries de potências

ELIANA XAVIER LINHARES DE ANDRADE

Tese a ser apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, câmpus de São José do Rio Preto, da Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Livre-Docente.



T 1.131/02

São José do Rio Preto

2002



Agradecimentos

Gostaria de expressar o meu agradecimento a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho. Agradeço, também, aos colegas do Departamento de Clínica de Computação e Estatística, particularmente aos da Área de Análise Estatística pela ajuda e confiança. Aos meus colegas e amigos Cláudio e Iliana e aos amigos muito obrigada pela ajuda e apoio. À minha família, um agradecimento especial pelo permanente apoio. Finalmente, gostaria de agradecer ao meu esposo, Audeni, e às minhas filhas Milena, Vanessa e Cíntia por sempre estarem ao meu lado e serem a minha vida, pelo encorajamento, carinho e pelas alegrias que me proporcionam.

Ao meu esposo Audeni, dedico.

Às minhas filhas Milena, Vanessa e Cíntia, ofereço.

Agradecimentos

Gostaria de expressar o meu agradecimento a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Agradeço, também, aos colegas do Departamento de Ciências de Computação e Estatística, particularmente aos da área de Análise Numérica pelo apoio e confiança. Aos caros colegas e amigos Cleonice e Ranga o meu sincero muito obrigada pela ótimo convívio. À minha família, um agradecimento especial pelo permanente apoio. Finalmente, gostaria de agradecer ao meu esposo, Audeni, e às minhas filhas, Milena, Vanessa e Cíntia, presenças constantes em todas as etapas de minha vida, pelo companheirismo, amizade e pelas alegrias que me proporcionam.

Sumário

Resumo

Neste trabalho, considerando as duas expansões em série de potências

$$\frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \cdots + \frac{\mu_k}{z^{k+1}} + \cdots$$

e

$$-\mu_{-1} - \mu_{-2}z - \mu_{-3}z^2 - \cdots - \mu_{-k}z^{k-1} - \cdots,$$

apresentamos um algoritmo para se obter a fração contínua correspondente, simultaneamente, às duas séries dadas acima, quando existem coeficientes nulos em uma ou ambas as séries. Ele é baseado no algoritmo Q-D e, primeiramente, obtém a correspondente fração contínua para duas outras séries relacionadas com as primeiras e, então, a transforma na fração contínua desejada. Além disso, quando os coeficientes das séries satisfazem $\mu_k = \pm \mu_{-k-s}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ e $s \geq 0$, obtivemos certas propriedades de simetria recíproca entre os coeficientes da fração contínua. Dois exemplos são dados para ilustrar o algoritmo e, também, as propriedades de simetria.

Sumário

1	Preliminares	6
1.1	Frações contínuas	6
1.1.1	Fórmulas de recorrência	7
1.2	Polinômios ortogonais e similares	8
1.2.1	Polinômios ortogonais	9
1.2.2	Polinômios similares aos ortogonais	10
1.2.3	Conexão com frações contínuas	11
1.3	Aproximantes de Padé	12
1.3.1	Conexão com frações contínuas	13
1.3.2	Tabela de Padé de dois pontos	14
2	O algoritmo Q-D para transformar expansões em série em fração contínua: uma extensão para o caso de coeficientes nulos	16
2.1	Calculando uma fração contínua a partir da outra	18
3	Frações contínuas correspondentes a séries de potências cujos coeficientes apresentam simetrias	24
3.1	Alguns casos especiais	24
3.2	O caso geral	28
4	Exemplos	31
4.1	A função $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$	31
4.2	A função $F(z) = \operatorname{arccot}(z)$	32
	Referências	35



Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve apresentação sobre frações contínuas, polinômios ortogonais e similares e aproximantes de Padé que serão úteis ao bom entendimento do trabalho. Além disso, faremos, também, uma conexão entre esses conceitos. Os resultados aqui apresentados são encontrados nos textos clássicos sobre o assunto.

1.1 Frações contínuas

Os conceitos e resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em Chihara [2]. Em Lorentzen e Waadeland [6] e Wall [16] há bons estudos sobre o assunto.

Sejam $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ seqüências de números complexos e

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0 \\ C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\ C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} \\ &\vdots \\ C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots + \frac{a_n}{b_n}}}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

C_n é chamado de n -ésimo convergente (ou aproximante) da *fração contínua* (infinita)

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots + \frac{a_n}{b_n + \ddots}}}} \quad (1.2)$$



Além da expressão acima, há outras maneiras de se denotar frações contínuas. Neste trabalho, devido ao espaço que a expressão anterior ocupa, vamos adotar a seguinte notação

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots \quad (1.3)$$

É evidente que certos convergentes podem ser indefinidos. Por exemplo, C_2 não tem sentido se $b_1 b_2 = -a_2$. Apesar disso, podemos ainda desejar considerar a correspondente fração contínua. Portanto, vamos definir o seguinte.

Definição 1 A fração contínua (1.3) é convergente para um valor K (finito) se no máximo um número finito de convergentes C_n é indefinido e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = K.$$

Caso contrário, a fração contínua é divergente.

Se a fração contínua converge para K , escrevemos

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots = K.$$

Isto envolve a mesma ambiguidade que ocorre com séries infinitas quando escrevemos $\sum a_n = S$, de modo que $\sum a_n$ denota ambos, a série e a soma.

1.1.1 Fórmulas de recorrência

De (1.1), temos que

$$C_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1 \\ A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \end{aligned}$$

e, em geral, A_n e B_n são polinômios em a_i, b_j .

Agora, coloquemos

$$\begin{aligned} A_1 &= b_1 A_0 + a_1 A_{-1}, & \text{onde } A_{-1} &= 1, \\ B_1 &= b_1 B_0 + a_1 B_{-1}, & \text{onde } B_{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Suponha que, para algum $n \geq 1$,

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad \text{onde } A_{-1} = 1,$$

e

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad \text{onde } B_{-1} = 0.$$

(1.4)

Então, como C_{n+1} pode ser obtido de C_n substituindo-se b_n por $b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, podemos escrever

$$C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{A_n^*}{B_n^*} = C_n^*,$$



onde

$$\begin{aligned} A_n^* &= \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ &= b_{n+1}^{-1} (b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}). \end{aligned}$$

Exatamente do mesmo modo, obtemos

$$B_n^* = b_{n+1}^{-1} (b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}).$$

Por indução segue, então, que se $b_i \neq 0$, $i \geq 1$, as fórmulas (1.4), primeiramente estabelecidas por Wallis em 1655, são válidas para $n \geq 1$.

A_n e B_n são chamados de *n-ésimo numerador parcial* e *n-ésimo denominador parcial*, respectivamente, da fração contínua (1.3).

Se multiplicarmos a primeira equação em (1.4) por B_{n-1} e a segunda por A_{n-1} , exatamente do mesmo modo como se deduz a Identidade de Christoffel-Darboux para os polinômios ortogonais, obtemos

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = -a_n [A_{n-1} B_{n-2} - B_{n-1} A_{n-2}].$$

Portanto,

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n, \quad n \geq 1.$$

A última equação pode ser escrita como

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n}{B_{n-1} B_n}. \quad (1.5)$$

Lembrando que $A_0/B_0 = b_0$, obtemos a importante fórmula

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k},$$

desde que $b_i \neq 0$, $B_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

1.2 Polinômios ortogonais e similares

Nesta seção, faremos um breve estudo sobre os polinômios ortogonais e similares aos ortogonais. Em Andrade [1], encontramos todos os resultados aqui apresentados.

Seja $\phi(x)$ uma função real, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em um intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Se os momentos

$$\mu_m^\phi = \int_a^b x^m d\phi(x)$$

existem para $m = 0, 1, 2, \dots$, $d\phi(x)$ é chamada uma distribuição em (a, b) . Se os momentos existem para todo m inteiro, $d\phi(x)$ é uma distribuição forte. Se, além disso, $(a, b) \subset (0, \infty)$, $d\phi(x)$ é uma distribuição forte de Stieltjes.



1.2.1 Polinômios ortogonais

Entre os polinômios que satisfazem a uma relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais. As aplicações desses polinômios à Análise Aplicada são muitas e novas aplicações surgem a cada dia.

Definição 2 Uma seqüência $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinômios ortogonais relativamente a uma distribuição $d\phi(x)$ em um intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, pode ser definida por

$$(i) \quad P_n(x) \text{ é um polinômio de grau exatamente } n, \quad n \geq 0,$$

$$(ii) \quad \int_a^b y^m P_n(y) d\phi(y) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

A existência dessa seqüência de polinômios depende da condição

$$H_n^{(0)} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $H_n^{(m)}$ são os determinantes de Hankel definidos, para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, por

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (1.6)$$

onde $H_{-1}^{(m)} = 0$ e $H_0^{(m)} = 1$.

Podemos definir uma segunda seqüência de polinômios, $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, do seguinte modo:

$$Q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} d\phi(y), \quad n \geq 0.$$

Esses são os polinômios associados que aparecem na teoria dos polinômios ortogonais. É fácil mostrar que esses polinômios satisfazem às seguintes relações de recorrência

$$P_{n+1}(x) = (x - \tilde{\beta}_{n+1})P_n(x) - \tilde{\alpha}_{n+1}P_{n-1}(x), \quad (1.7)$$

$$Q_{n+1}(x) = (x - \tilde{\beta}_{n+1})Q_n(x) - \tilde{\alpha}_{n+1}Q_{n-1}(x), \quad (1.8)$$

para $n \geq 1$, com as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x - \tilde{\beta}_1, \\ Q_0(x) &= 0, & Q_1(x) &= \mu_0^{\phi}. \end{aligned}$$

Os polinômios ortogonais possuem muitas outras propriedades interessantes e bons estudos sobre eles são encontrados em Chihara [2] e Szegő [14].



1.2.2 Polinômios similares aos ortogonais

A introdução do problema forte de momento, veja [5], abriu caminho para o estudo de polinômios que apresentam propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. Este problema pode ser expresso por:

Dado uma seqüência $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ de números reais, sob que condições existe uma medida não negativa $d\psi(t)$ tal que

$$\mu_m = \mu_m^\psi = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ?$$

Jones, Thron e Waadeland [5] resolveram este problema quando $(a, b) \subset (0, \infty)$. Sri Ranga [13], usando conceitos de frações contínuas, resolveu o problema forte de momento de Hamburger, isto é, quando $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Vamos, aqui, definir uma seqüência de polinômios similares aos ortogonais ou, simplesmente, polinômios similares, $\{B_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, por

(i) $B_n(z)$ é um polinômio mônico de grau exatamente n , $n \geq 0$,

$$(ii) \quad \int_a^b t^{-n+m} B_n(t) d\psi(t) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

onde $d\psi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes em (a, b) .

Uma condição necessária e suficiente para a existência dessa seqüência de polinômios é que

$$H_n^{(m)} \neq 0, \quad n \geq 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

definidos por (1.6).

Na verdade, podemos demonstrar que, para uma distribuição forte de Stieltjes, $H_n^{(m)} > 0$, $n \geq 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Esses polinômios satisfazem, por exemplo, à relação de recorrência de três termos

$$B_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n-2}(z), \quad n \geq 0, \quad (1.9)$$

com $B_{-1}(z) = 0$ e $B_0(z) = 1$. Os coeficientes β_n e α_{n+1} , $n \geq 1$, podem ser dados em termos dos determinantes de Hankel (1.6) por

$$\alpha_{n+1} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-n+1)}}{H_n^{(-n)} H_{n+1}^{(-n+1)}}, \quad n \geq 1 \quad (1.10)$$

e

$$\beta_{n+1} = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_n^{(-n)}}{H_n^{(-n+1)} H_{n+1}^{(-n-1)}}, \quad n \geq 0. \quad (1.11)$$

Do mesmo modo que fizemos para os polinômios ortogonais, podemos definir os polinômios associados de grau $n-1$ por

$$A_n(z) = \int_a^b \frac{B_n(t) - B_n(z)}{t - z} d\psi(t), \quad n \geq 0, \quad (1.12)$$

com $A_0(z) = 0$ e $A_1(z) = \mu_0^\psi$.



É fácil ver que o coeficiente do termo de maior grau desses polinômios é μ_0^ψ . Eles também satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios similares, ou seja,

$$A_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})A_n(z) - \alpha_{n+1}zA_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (1.13)$$

com as condições iniciais $A_0(z) = 0$, $A_1(z) = \mu_0^\psi$.

O quociente $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$ satisfaz

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \begin{cases} \frac{\mu_0^\psi}{z} + \frac{\mu_1^\psi}{z^2} + \cdots + \frac{\mu_{n-1}^\psi}{z^n} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \\ -\mu_{-1}^\psi - \mu_{-2}^\psi z - \cdots - \mu_{-n}^\psi z^{n-1} + O(z^n). \end{cases} \quad (1.14)$$

Facilmente podemos mostrar esse resultado bastando, para isso, dividirmos (1.12) por $B_n(z)$. Veja Andrade [1] e Sri Ranga [13] para outras propriedades sobre esses polinômios.

1.2.3 Conexão com frações contínuas

Faremos, agora, a associação entre os polinômios ortogonais, e similares aos ortogonais, e frações contínuas. As fórmulas de Wallis (1.4) nos levam diretamente a isso. Se, em (1.3), tomarmos

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \mu_0^\phi \neq 0, \quad a_{n+1} = -\tilde{\alpha}_{n+1} \neq 0, \quad b_n = x - \tilde{\beta}_n, \quad n \geq 1,$$

obtemos a fração contínua

$$\frac{\mu_0^\phi}{x - \tilde{\beta}_1} - \frac{\tilde{\alpha}_2}{x - \tilde{\beta}_2} - \frac{\tilde{\alpha}_3}{x - \tilde{\beta}_3} - \cdots - \frac{\tilde{\alpha}_n}{x - \tilde{\beta}_n} - \cdots, \quad (1.15)$$

cujo n -ésimo denominador parcial, B_n , é o polinômio ortogonal $P_n(x)$ que satisfaz à relação de recorrência (1.7). A fração contínua (1.15) é conhecida como fração contínua do tipo Jacobi ou, simplesmente, J-fração, devido à sua relação com certos tipos de matrizes conhecidas por matrizes de Jacobi, cujos autovalores são os zeros dos polinômios ortogonais a elas associados.

Retornando às fórmulas de Wallis, note que os numeradores parciais, $A_n = Q_n(x)$, satisfazem à relação de recorrência (1.8). Observe, também, que o n -ésimo convergente é a razão entre o polinômio associado de grau $n - 1$ e o ortogonal de grau n .

Vamos obter, agora, a conexão entre os polinômios similares e frações contínuas. Retornemos às fórmulas de Wallis. Tomando, em (1.3),

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \mu_0^\psi \neq 0, \quad a_{n+1} = -\alpha_{n+1}z \neq 0, \quad b_n = z - \beta_n, \quad n \geq 1,$$

obtemos a fração contínua,

$$\frac{\mu_0^\psi}{z - \beta_1} - \frac{\alpha_2 z}{z - \beta_2} - \frac{\alpha_3 z}{z - \beta_3} - \cdots - \frac{\alpha_n z}{z - \beta_n} - \cdots. \quad (1.16)$$



Observe que os *n*-ésimos numerador e denominador parciais são, respectivamente, o polinômio associado de grau $n - 1$, $A_n(z)$, e o polinômio similar de grau n , $B_n(z)$. Portanto, eles satisfazem às relações de recorrência (1.13) e (1.9).

Conhecendo-se, pois, as relações de recorrência de polinômios ortogonais ou similares, é possível construir a correspondente fração contínua a partir dos coeficientes dessas relações.

1.3 Aproximantes de Padé

Sejam $p_m(z)$ e $q_n(z)$ polinômios de graus m e n , respectivamente, com coeficientes complexos. Além disso, vamos supor $q_n(z) \neq 0$.

Considere as duas funções racionais

$$R_{m,n}(z) = \frac{p_m(z)}{q_n(z)} \qquad \text{e} \qquad R_{\tilde{m},\tilde{n}}(z) = \frac{p_{\tilde{m}}(z)}{q_{\tilde{n}}(z)}.$$

Elas serão idênticas se, e somente se, $p_m(z)q_{\tilde{n}}(z) - q_n(z)p_{\tilde{m}}(z) \equiv 0$.

Dada uma série de potências formal

$$F(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots \tag{1.17}$$

e números inteiros não negativos m e n , nosso objetivo, aqui, é encontrar funções racionais $R_{m,n}(z)$ tais que

$$q_n(z)F(z) - p_m(z) = O\left(z^{m+n+1}\right). \tag{1.18}$$

Isto significa que a série do primeiro membro inicia-se com o termo de grau pelo menos $m + n + 1$.

As funções racionais que satisfazem (1.18) são os *aproximantes de Padé* de F e a tabela

$R_{0,0}$	$R_{0,1}$	$R_{0,2}$	.	.	.
$R_{1,0}$	$R_{1,1}$	$R_{1,2}$	.	.	.
$R_{2,0}$	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

(1.19)

é chamada *tabela de Padé* de F .

Observe que a primeira coluna consiste das somas parciais de F e a primeira linha, das somas parciais de $1/F$.

Quando os elementos $R_{m,n}(z)$ são todos diferentes, os polinômios numeradores e denominadores são, respectivamente, de graus m e n exatamente e, além disso, não podem ser reduzidos por cancelamento, a tabela de Padé é, então, chamada *tabela de Padé normal*.



O termo normal é usado para os aproximantes de Padé, $R_{m,n}(z) = \frac{p_m(z)}{q_n(z)}$, onde $p_m(z)$ e $q_n(z)$ são relativamente primos e de graus m e n , respectivamente, significando que a série $q_n(z)F(z) - p_m(z)$ inicia-se com o termo de grau $m + n + 1$. Também é usado para a série de potências significando que a correspondente tabela de Padé é normal. A normalidade de uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pode também ser expressa em termos dos determinantes de Toeplitz

$$T_{n+1}^{(m)} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-n} \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}, \quad (1.20)$$

onde $c_k = 0$ para $k < 0$, $T_0^{(m)} = 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, como mostra o teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Gragg [3].

Teorema 1 *Um aproximante de Padé $R_{m,n}$ de uma série de potências formal*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \quad c_0 \neq 0,$$

é normal se, e somente se, os determinantes

$$T_n^{(m)}, \quad T_{n-1}^{(m)}, \quad T_n^{(m+1)}, \quad T_{n+1}^{(m+1)}$$

são todos diferentes de zero.

Desse teorema, segue que uma série de potências formal e sua tabela de Padé são normais se, e somente se,

$$T_n^{(m)} \neq 0 \quad \text{para todo } m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Isto mostra, em particular, que séries de potências onde faltam coeficientes, isto é, pelo menos um $c_k = 0$, $k \geq 1$, é não normal, pois $T_1^{(k)} = c_k$.

1.3.1 Conexão com frações contínuas

O resultado abaixo nos mostra como séries de potências ou aproximantes de Padé estão ligados a frações contínuas, conhecidas como C-frações.

Teorema 2 *Seja*

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \quad (1.21)$$

uma série de potências formal tal que seus aproximantes de Padé

$$R_{0,0}(z), R_{1,0}(z), R_{1,1}(z), R_{2,1}(z), R_{2,2}(z), R_{3,2}(z), \dots$$



são normais. Então à série de potências (1.21) corresponde uma C-fração regular

$$1 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \frac{a_3 z}{1} + \dots + \frac{a_n z}{1} + \dots, \quad (1.22)$$

cujos aproximantes C_n satisfazem

$$C_{2m} = R_{m,m}, \quad C_{2m+1} = R_{m+1,m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

Para a demonstração nos referimos a Jones e Thron [4], pag. 191. Vale, também, a recíproca desse resultado.

Podemos observar que aproximantes consecutivos C_n e C_{n+1} da C-fração formam “degraus” na tabela de Padé (1.19) da série (1.21).

1.3.2 Tabela de Padé de dois pontos

A tabela de Padé usual interpola apenas uma série de potências formal em um ponto, normalmente $z = 0$, e está ligada a frações contínuas do tipo C-fração regular. Vimos que, neste caso, os aproximantes formam “degraus” na tabela de Padé.

As T-frações

$$\frac{z}{1+d_1 z} + \frac{z}{1+d_2 z} + \frac{z}{1+d_3 z} + \dots + \frac{z}{1+d_n z} + \dots, \quad (1.24)$$

introduzidas em 1948 por Thron [15] e minuciosamente estudadas por ele, têm uma estrutura simples e também correspondem a séries de potências. Entretanto, nenhum dos aproximantes estão na tabela de Padé (exceto o caso $d_n = 0$ para todo n). Muito mais tarde descobriu-se que, além da correspondência com a série de potências

$$c_0 + c_1 z + c_3 z^2 + \dots + c_k z^{k-1} + \dots, \quad (\text{correspondência em } 0), \quad (1.25)$$

a T-fração geral

$$c_0 + \frac{F_1 z}{1+G_1 z} + \frac{F_2 z}{1+G_2 z} + \frac{F_3 z}{1+G_3 z} + \dots + \frac{F_n z}{1+G_n z} + \dots, \quad F_n \neq 0, \quad (1.26)$$

corresponde, também, à série de potências

$$\frac{c_0^*}{z} + \frac{c_1^*}{z^2} + \frac{c_2^*}{z^3} + \dots + \frac{c_k^*}{z^{k+1}} + \dots \quad (\text{correspondência no } \infty), \quad (1.27)$$

se $G_n \neq 0$ para todo n . Sob determinadas condições sobre os coeficientes, também vale a recíproca, isto é, para cada par de séries de potências (1.25) e (1.27) corresponde uma T-fração geral (1.26). A interpolação fornecida pela T-fração geral é dividida entre interpolação em 0 e ∞ .

A tabela de Padé de dois pontos (em 0 e ∞) é construída a partir de um par de séries (1.25) e (1.27) de maneira semelhante ao caso de apenas um ponto. Nesta tabela, encontram-se os aproximantes da T-fração geral (1.26). Esta surpreendente propriedade das T-frações gerais (corresponderem a duas séries de potências



simultâneamente, uma em $z = 0$ e uma em $z = \infty$) foi primeiramente observado por McCabe e Murphy [11]. Eles chamaram sua fração contínua de M-fração, dadas por

$$\frac{n_1}{1+d_1z} + \frac{n_2z}{1+d_2z} + \frac{n_3z}{1+d_3z} + \dots + \frac{n_mz}{1+d_mz} + \dots \quad (1.28)$$

Mas, M-frações são, essencialmente, T-frações.

Denotemos por $F(z)$ e $F^*(z)$ as duas séries (1.25) e (1.27), respectivamente. Então, o aproximante de Padé de dois pontos $\frac{p_{m,n}(z)}{q_{m,n}(z)}$ de (F, F^*) é obtido de modo a *ajustar*, simultaneamente, um determinado número de termos (os primeiros) de cada série. Isto pode ser feito de diversas maneiras. Podemos exigir, por exemplo, que

$$p_{m,n}(z)F(z) - q_{m,n}(z) = O\left(z^{(m+n+1)/2}\right)$$

e

$$p_{m,n}(z)F^*(z) - q_{m,n}(z) = O\left(\frac{1}{z^{(m+n+3)/2}}\right)$$

se $m+n+1$ é par.

Logo, podemos escrever

$$\frac{q_{m,n}(z)}{p_{m,n}(z)} = \begin{cases} c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_{(m+n-1)/2} z^{(m+n-1)/2} + O\left(z^{(m+n+1)/2}\right), \\ \frac{c_0^*}{z} + \frac{c_1^*}{z^2} + \dots + \frac{c_{(m+n+1)/2}^*}{z^{(m+n+1)/2}} + O\left(z^{-(m+n+3)/2}\right). \end{cases}$$

Analogamente para o caso $m+n+1$ ímpar.

Veja, por exemplo, [7] para uma definição mais precisa e propriedades sobre a tabela de Padé de dois pontos. No capítulo 2 veremos a conexão entre polinômios similares e aproximantes de Padé de dois pontos.



Capítulo 2

O algoritmo Q-D para transformar expansões em série em fração contínua: uma extensão para o caso de coeficientes nulos

Considere duas expansões em série de potências das formas

$$\frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \cdots + \frac{\mu_k}{z^{k+1}} + \cdots \quad (2.1)$$

e

$$-\mu_{-1} - \mu_{-2}z - \mu_{-3}z^2 - \cdots - \mu_{-k}z^{k-1} - \cdots, \quad (2.2)$$

onde $\mu_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são números reais.

No capítulo 1 vimos que, se $\mu_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são tais que os determinantes de Hankel de ordem n , para $n = 1, 2, 3, \dots$ e $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são não nulos, então existe uma distribuição forte com relação à qual esses coeficientes são momentos e, também, que os polinômios similares $B_n(z)$, relativamente a essa distribuição, existem para $n = 0, 1, 2, \dots$.

As duas séries podem, então, ser transformadas na fração contínua correspondente da forma (1.16), ou seja,

$$\frac{\mu_0}{z - \beta_1} - \frac{\alpha_2 z}{z - \beta_2} - \frac{\alpha_3 z}{z - \beta_3} - \frac{\alpha_4 z}{z - \beta_4} - \cdots \quad (2.3)$$

Lembremos que o n -ésimo convergente, que é a razão entre os polinômios $A_n(z)$ e $B_n(z)$, satisfaz

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \frac{\mu_0}{z - \beta_1} - \frac{\alpha_2 z}{z - \beta_2} - \frac{\alpha_3 z}{z - \beta_3} - \cdots - \frac{\alpha_n z}{z - \beta_n}.$$

Além disso, *ajusta* os n primeiros termos de cada série, isto é,

$$\frac{A_n(z)}{B_n(z)} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \cdots + \frac{\mu_{n-1}}{z^n} + O(z^{-n-1}), \\ -\mu_{-1} - \mu_{-2}z - \mu_{-3}z^2 - \cdots - \mu_{-n}z^{n-1} + O(z^n). \end{cases} \quad (2.4)$$



São, portanto, aproximantes de Padé de dois pontos, $\frac{p_{n,n-1}}{q_{n,n-1}}$, das séries (2.1) e (2.2).

Lembremos que os polinômios $A_n(z)$ e $B_n(z)$ satisfazem à mesma relação de recorrência de três termos (1.13) e (1.9), porém com diferentes condições iniciais.

Como vimos, os coeficientes α_k e β_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, podem ser expressos como razões dos determinantes de Hankel $H_n^{(m)}$ e, portanto, calculados a partir dos coeficientes das séries. Mas, se $\mu_k \neq 0$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, os coeficientes da fração contínua podem ser obtidos por meio das relações de recorrência

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(r)} &= \beta_{n-1}^{(r+1)} + \alpha_{n-1}^{(r+1)} - \beta_{n-1}^{(r)} \\ \beta_n^{(r)} &= \frac{\alpha_n^{(r)} \beta_{n-1}^{(r-1)}}{\alpha_n^{(r-1)}}\end{aligned}\tag{2.5}$$

para $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ e $n = 2, 3, 4, \dots$, e com os valores iniciais $\alpha_1^{(r)} = 0$ e $\beta_1^{(r)} = \frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}$ para $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Aqui, $\alpha_n^{(0)} = \alpha_n$ e $\beta_n^{(0)} = \beta_n$.

Este é o algoritmo Q-D e a tabela dos coeficientes gerados pode fornecer muitas frações contínuas que correspondem a duas séries, tanto separada ou simultaneamente (veja McCabe [9]). Observe que os convergentes de todas as frações contínuas são aproximantes de Padé de dois pontos das séries (2.1) e (2.2). A tabela dos coeficientes $\alpha_n^{(r)}$ e $\beta_n^{(r)}$ gerados pelas fórmulas (2.5) é dada por

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$\beta_1^{(-4)}$	$\alpha_2^{(-4)}$	$\beta_2^{(-4)}$	$\alpha_3^{(-4)}$	$\beta_3^{(-4)}$	$\alpha_4^{(-4)}$	$\beta_4^{(-4)}$	$\dots$
$\beta_1^{(-3)}$	$\alpha_2^{(-3)}$	$\beta_2^{(-3)}$	$\alpha_3^{(-3)}$	$\beta_3^{(-3)}$	$\alpha_4^{(-3)}$	$\beta_4^{(-3)}$	$\dots$
$\beta_1^{(-2)}$	$\alpha_2^{(-2)}$	$\beta_2^{(-2)}$	$\alpha_3^{(-2)}$	$\beta_3^{(-2)}$	$\alpha_4^{(-2)}$	$\beta_4^{(-2)}$	$\dots$
$\beta_1^{(-1)}$	$\alpha_2^{(-1)}$	$\beta_2^{(-1)}$	$\alpha_3^{(-1)}$	$\beta_3^{(-1)}$	$\alpha_4^{(-1)}$	$\beta_4^{(-1)}$	$\dots$
$\beta_1^{(0)}$	$\alpha_2^{(0)}$	$\beta_2^{(0)}$	$\alpha_3^{(0)}$	$\beta_3^{(0)}$	$\alpha_4^{(0)}$	$\beta_4^{(0)}$	$\dots$
$\beta_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\alpha_3^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$\alpha_4^{(1)}$	$\beta_4^{(1)}$	$\dots$
$\beta_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\beta_2^{(2)}$	$\alpha_3^{(2)}$	$\beta_3^{(2)}$	$\alpha_4^{(2)}$	$\beta_4^{(2)}$	$\dots$
$\beta_1^{(3)}$	$\alpha_2^{(3)}$	$\beta_2^{(3)}$	$\alpha_3^{(3)}$	$\beta_3^{(3)}$	$\alpha_4^{(3)}$	$\beta_4^{(3)}$	$\dots$
$\beta_1^{(4)}$	$\alpha_2^{(4)}$	$\beta_2^{(4)}$	$\alpha_3^{(4)}$	$\beta_3^{(4)}$	$\alpha_4^{(4)}$	$\beta_4^{(4)}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$

e os coeficientes da linha cujos elementos estão indicados pelo índice superior (r) fornecem a fração contínua

$$\frac{\mu_r}{z - \beta_1^{(r)}} - \frac{\alpha_2^{(r)} z}{z - \beta_2^{(r)}} - \frac{\alpha_3^{(r)} z}{z - \beta_3^{(r)}} - \frac{\alpha_4^{(r)} z}{z - \beta_4^{(r)}} - \dots\tag{2.6}$$

que corresponde às duas séries

$$\frac{\mu_r}{z} + \frac{\mu_{r+1}}{z^2} + \frac{\mu_{r+2}}{z^3} + \frac{\mu_{r+3}}{z^4} + \frac{\mu_{r+4}}{z^5} + \dots \quad (2.7)$$

e

$$-\mu_{r-1} - \mu_{r-2}z - \mu_{r-3}z^2 - \mu_{r-4}z^3 - \mu_{r-5}z^4 - \dots \quad (2.8)$$

do mesmo modo que (2.3) corresponde a (2.1) e (2.2).

Claramente vemos que o algoritmo Q-D não pode ser usado diretamente se um ou mais coeficientes da série são nulos, uma vez que os valores associados a $\beta_1^{(r)} = \frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}$ não serão definidos. Porém, não teremos problemas se usarmos o método do determinante.

Neste capítulo, daremos um algoritmo que, quando usado conjuntamente com o algoritmo Q-D, pode fornecer a fração contínua (2.3) mesmo se existirem coeficientes nulos em uma ou ambas as séries (2.1) e (2.2).

2.1 Calculando uma fração contínua a partir da outra

Sejam as duas séries de potências (2.1) e (2.2) representadas formalmente por $F(z)$ com, possivelmente, (2.2) sendo a série de MacLaurin de $F(z)$ em algum disco de raio não nulo e, talvez, (2.1) sendo a série assintótica.

Seja $G(z)$ uma função definida por

$$G(z) = F(z) - \frac{K}{1+z} \quad (2.9)$$

onde K é um número real. Consideremos as seguintes expansões em série de potências da função $G(z)$

$$\frac{\gamma_0}{z} + \frac{\gamma_1}{z^2} + \frac{\gamma_2}{z^3} + \frac{\gamma_3}{z^4} + \dots + \frac{\gamma_{k-1}}{z^k} + \dots \quad (2.10)$$

e

$$-\gamma_{-1} - \gamma_{-2}z - \gamma_{-3}z^2 - \gamma_{-4}z^3 - \dots - \gamma_{-k}z^{k-1} - \dots, \quad (2.11)$$

em $z = \infty$ e $z = 0$, respectivamente. Do mesmo modo que a fração contínua (2.3) corresponde a (2.1) e (2.2), consideremos a fração contínua abaixo correspondente a (2.10) e (2.11),

$$\frac{\gamma_0}{z - \delta_1} - \frac{\lambda_2 z}{z - \delta_2} - \frac{\lambda_3 z}{z - \delta_3} - \frac{\lambda_4 z}{z - \delta_4} - \dots \quad (2.12)$$

O n -ésimo convergente desta fração contínua é dado por

$$\frac{C_n(z)}{D_n(z)} = \frac{\gamma_0}{z - \delta_1} - \frac{\lambda_2 z}{z - \delta_2} - \frac{\lambda_3 z}{z - \delta_3} - \dots - \frac{\lambda_n z}{z - \delta_n}. \quad (2.13)$$

Sejam os denominadores das funções racionais (2.4) e (2.13) polinômios mônicos. Como eles são de grau n , vamos representá-los, respectivamente, por

$$B_n(z) = z^n + b_{n,n-1}z^{n-1} + \dots + b_{n,1}z + b_{n,0} \quad (2.14)$$



e

$$D_n(z) = z^n + d_{n,n-1}z^{n-1} + \cdots + d_{n,1}z + d_{n,0}. \quad (2.15)$$

Sabemos que $D_n(z)$ também satisfaz a uma relação de recorrência de três termos da forma

$$D_{n+1}(z) = (z - \delta_{n+1})D_n(z) - \lambda_{n+1}zD_{n-1}(z), \quad (2.16)$$

com $D_0(z) = 1$ e $D_1(z) = z - \delta_1$, pois é o polinômio denominador do n -ésimo convergente da fração contínua (2.12).

Das equações (2.14) e (2.15) e das relações de recorrência (1.9) e (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} B_n(z) &= (z - \beta_n)(z^{n-1} + b_{n-1,n-2}z^{n-2} + \cdots + b_{n-1,0}) \\ &\quad - \alpha_n z(z^{n-2} + b_{n-2,n-2}z^{n-3} + \cdots + b_{n-2,0}) \\ &= z^n + b_{n,n-1}z^{n-1} + \cdots + b_{n,0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_n(z) &= (z - \delta_n)(z^{n-1} + d_{n-1,n-2}z^{n-2} + \cdots + d_{n-1,0}) \\ &\quad - \lambda_n z(z^{n-2} + d_{n-2,n-2}z^{n-3} + \cdots + d_{n-2,0}) \\ &= z^n + d_{n,n-1}z^{n-1} + \cdots + d_{n,0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$b_{n,n-1} = b_{n-1,n-2} - (\beta_n + \alpha_n) \quad \text{e} \quad d_{n,n-1} = d_{n-1,n-2} - (\delta_n + \lambda_n) \quad (2.17)$$

e, facilmente, chegamos que

$$b_{n,n-1} = -(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n)$$

e

$$d_{n,n-1} = -(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n).$$

Concluimos, também, que

$$b_{n,0} = -\beta_n b_{n-1,0} \quad \text{e} \quad d_{n,0} = -\delta_n d_{n-1,0}. \quad (2.18)$$

Suponhamos, agora, que existam coeficientes nulos nas séries (2.1) e/ou (2.2), mas $\mu_0 \mu_{-1} \neq 0$. Além disso, suponhamos que o número K da equação (2.9) seja escolhido de modo que não hajam coeficientes nulos nas séries (2.10) e (2.11). Os coeficientes dessas duas últimas séries podem ser facilmente calculados apenas adicionando-se

$$-K \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \cdots \right) \quad \text{e} \quad -K \left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \right)$$

a (2.1) e (2.2), respectivamente.

Portanto, desses coeficientes, a fração contínua (2.12) pode ser obtida usando-se o algoritmo Q-D e, então, podemos calcular os números $d_{n,n-1}$ e $d_{n,0}$, $n = 2, 3, 4, \dots$. Agora,

$$F(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = O\left(z^n, \frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

e

$$G(z) - \frac{C_n(z)}{D_n(z)} = O\left(z^n, \frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

onde $O\left(z^n, \frac{1}{z^{n+1}}\right)$ denota a expansão em série em potências em z e $\frac{1}{z}$ da expressão do lado esquerdo das equações acima que começam com z^n e $\frac{1}{z^{n+1}}$, respectivamente.

Subtraindo a última equação da penúltima, obtemos

$$\frac{C_n(z)}{D_n(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} + \frac{K}{1+z} = O\left(z^n, \frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

ou,

$$\frac{(1+z)B_n(z)C_n(z) + KB_n(z)D_n(z) - (1+z)A_n(z)D_n(z)}{(1+z)B_n(z)D_n(z)} = O\left(z^n, \frac{1}{z^{n+1}}\right).$$

O numerador da fração acima é um polinômio de grau $2n$ enquanto que o denominador tem grau $2n+1$. Logo, concluímos que o numerador consiste de um único termo de grau n , digamos $R_n z^n$, onde R_n é um número real. Para demonstrar isso, vamos escrever o numerador e o denominador, respectivamente, como $\sum_{i=0}^{2n} r_{2n,i} z^i$ e $\sum_{i=0}^{2n+1} \tilde{r}_{2n+1,i} z^i$.

Observe que $\tilde{r}_{2n+1,0}$ é diferente de zero. Então,

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} r_{2n,i} z^i}{\sum_{i=0}^{2n+1} \tilde{r}_{2n+1,i} z^i} = \frac{\sum_{i=0}^{2n} r_{2n,i} z^i}{\tilde{r}_{2n+1,0} \left(1 + \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\tilde{r}_{2n+1,i}}{\tilde{r}_{2n+1,0}} z^i\right)} = \frac{1}{\tilde{r}_{2n+1,0}} \sum_{i=0}^{2n} r_{2n,i} z^i \frac{1}{1-r},$$

onde $-1 < r = -\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\tilde{r}_{2n+1,i}}{\tilde{r}_{2n+1,0}} z^i < 1$ para z suficientemente próximo de zero. Portanto,

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} r_{2n,i} z^i}{\sum_{i=1}^{2n+1} \tilde{r}_{2n+1,i} z^i} = \frac{1}{\tilde{r}_{2n+1,0}} \sum_{i=0}^{2n} r_{2n,i} z^i \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\tilde{r}_{2n+1,i}}{\tilde{r}_{2n+1,0}} z^i\right)^k = O(z^n).$$

Comparando, então, os termos de mesmo grau do segundo e terceiro membros da igualdade acima, concluímos que $r_{2n,0} = 0$, $\left(r_{2n,1} + r_{2n,0} \frac{\tilde{r}_{2n+1,1}}{\tilde{r}_{2n+1,0}}\right) = 0$. Logo, $r_{2n,1} = 0$ e, assim por diante, chegamos que $r_{2n,i} = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Procedendo de maneira análoga para x suficientemente grande, concluímos que $r_{2n,i} = 0$ para $i = n+1, n+2, \dots, 2n$.



Logo, escrevendo $r_{2n,n} = R_n$, temos

$$\frac{C_n(z)}{D_n(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} + \frac{K}{1+z} = \frac{R_n z^n}{(1+z)B_n(z)D_n(z)}$$

ou ,

$$(1+z) \left\{ \frac{C_n(z)}{D_n(z)} - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} \right\} + K = \frac{R_n z^n}{B_n(z)D_n(z)}.$$

Substituindo-se n por $n+1$ na expressão acima, obtemos

$$(1+z) \left\{ \frac{C_{n+1}(z)}{D_{n+1}(z)} - \frac{A_{n+1}(z)}{B_{n+1}(z)} \right\} + K = \frac{R_{n+1} z^{n+1}}{B_{n+1}(z)D_{n+1}(z)}.$$

Subtraindo-se a penúltima equação da última e usando-se o resultado (1.5) sobre a diferença entre convergentes consecutivos de frações contínuas, chegamos em

$$\begin{aligned} \frac{zR_{n+1}}{B_{n+1}(z)D_{n+1}(z)} &= \frac{R_n}{B_n(z)D_n(z)} + (1+z) \left\{ \frac{\gamma_0 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}}{D_{n+1}(z)D_n(z)} - \frac{\mu_0 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}{B_{n+1}(z)B_n(z)} \right\} \\ &= \frac{R_n}{B_n(z)D_n(z)} + (1+z) \left\{ \frac{u_{n+1}}{D_{n+1}(z)D_n(z)} - \frac{w_{n+1}}{B_{n+1}(z)B_n(z)} \right\} \end{aligned}$$

onde

$$u_{n+1} = \gamma_0 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1} = u_n \lambda_{n+1} \quad (2.19)$$

e

$$w_{n+1} = \mu_0 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1} = w_n \alpha_{n+1}, \quad (2.20)$$

com $u_1 = \gamma_0$ e $w_1 = \mu_0$. Assim,

$$\begin{aligned} zR_{n+1}D_n(z)B_n(z) &= R_n B_{n+1}(z)D_{n+1}(z) + (1+z) [u_{n+1}B_{n+1}(z)B_n(z) \\ &\quad - w_{n+1}D_{n+1}(z)D_n(z)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O primeiro membro da equação acima é um polinômio de grau $2n+1$ sem o termo independente. O coeficiente de z^{2n+2} no lado direito deve, portanto, se anular. Assim,

$$R_n = w_{n+1} - u_{n+1}. \quad (2.22)$$

Analogamente, o termo independente do segundo membro de (2.21) é zero. Logo,

$$R_n b_{n+1,0} d_{n+1,0} + u_{n+1} b_{n+1,0} b_{n,0} - w_{n+1} d_{n+1,0} d_{n,0} = 0.$$

Da equação (2.22) obtemos, então,

$$w_{n+1} \left(1 - \frac{d_{n,0}}{b_{n+1,0}} \right) = u_{n+1} \left(1 - \frac{b_{n,0}}{d_{n+1,0}} \right). \quad (2.23)$$

Igualando-se os coeficientes dos termos de grau $2n+1$ em (2.21) e lembrando que $B_n(z)$ e $D_n(z)$ são mônicos, obtemos

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n (d_{n+1,n} + b_{n+1,n}) + (u_{n+1} - w_{n+1}) + u_{n+1} (b_{n,n-1} + b_{n+1,n}) \\ &\quad - w_{n+1} (d_{n,n-1} + d_{n+1,n}). \end{aligned}$$



Finalmente, usando-se novamente (2.22) e substituindo-se n por $n - 1$, para $n \geq 1$ obtemos

$$w_{n+1} - u_{n+1} = w_n (b_{n,n-1} - d_{n-1,n-2} - 1) - u_n (d_{n,n-1} - b_{n-1,n-2} - 1). \quad (2.24)$$

Os valores λ_{n+1} , δ_n , u_n , $d_{n+1,0}$ e $d_{n+1,n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ são conhecidos antes de iniciarmos a parte do algoritmo que determina os coeficientes da fração contínua correspondente às séries representadas por $F(z)$.

As equações (2.23) e (2.24), usadas alternadamente para $n = 1, 2, 3, \dots$, junto com as equações (2.17), (2.18) e (2.19) são, então, suficientes para determinarmos a sequência $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots$ desejada. Os valores iniciais são $\mu_0 = \gamma_0 + K$ e $\frac{\mu_0}{\beta_1} = \frac{\gamma_0}{\delta_1} - K$.

A seguir, apresentamos os principais passos do algoritmo descrito nesta seção.

Dados, então, os coeficientes μ_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm m$, das séries de potências formais (2.1) e (2.2) de $F(x)$ tais que $\mu_l = 0$ para algum $l \neq 0, -1$, calculemos os coeficientes α_{i+1}, β_i , $i = 1, 2, \dots, m$, da correspondente fração contínua pelo algoritmo modificado.

[Cálculo dos coeficientes γ_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm m$, das séries de potências da função modificada $G(x)$.]

Para $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ faça

$$\gamma_i = \mu_i + (-1)^{i+1} K \neq 0$$

[Cálculo dos coeficientes $\lambda_i = \lambda_i^{(0)}$, $\delta_i = \delta_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, m$, da fração contínua correspondente à função $G(x)$ pelo algoritmo Q-D]

Para $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ faça

$$\lambda_1^{(r)} = 0 \quad \text{e} \quad \delta_1^{(r)} = \frac{\gamma_{r-1}}{\gamma_r}$$

Então, para $i = 2, 3, \dots$, e para $r = \dots, -1, 0, 1, \dots$, faça

$$\lambda_i^{(r)} = \delta_{i-1}^{(r+1)} + \lambda_{i-1}^{(r+1)} - \delta_{i-1}^{(r)} \quad \text{e} \quad \delta_i^{(r)} = \frac{\lambda_i^{(r)} \delta_{i-1}^{(r-1)}}{\lambda_{i-1}^{(r-1)}}$$

[Cálculo dos coeficientes α_i, β_i , $i = 2, 3, \dots$, da fração contínua de $F(x)$]

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \frac{\delta_1^{(0)} \mu_0}{\gamma_0 - K \delta_1^{(0)}}$$

$$w_1 = \mu_0, \quad u_1 = \gamma_0,$$

$$b_{0,-1} = 0, \quad d_{0,-1} = 0.$$

Para $i = 1, 2, \dots$ faça

$$b_{i,i-1} = b_{i-1,i-2} - (\alpha_i + \beta_i)$$



$$d_{i,i-1} = d_{i-1,i-2} - (\lambda_i^{(0)} + \delta_i^{(0)})$$

$$u_{i+1} = u_i \lambda_{i+1}^{(0)}$$

$$d_{i+1,0} = -d_{i,0} \delta_{i+1}^{(0)}$$

$$w_{i+1} = u_{i+1} + w_i (b_{i,i-1} - d_{i-1,i-2} - 1) - u_i (d_{i,i-1} - b_{i-1,i-2} - 1)$$

$$b_{i+1,0} = \frac{d_{i,0}}{1 - \frac{u_{i+1}}{w_{i+1}} \left(1 - \frac{b_{i,0}}{d_{i+1,0}}\right)}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{w_{i+1}}{w_i}$$

$$\beta_{i+1} = -\frac{b_{i+1,0}}{b_{i,0}}$$

Capítulo 3

Frações contínuas correspondentes a séries de potências cujos coeficientes apresentam simetrias

Neste capítulo, considerando as duas expansões em série de potências (2.1) e (2.2), apresentaremos alguns resultados sobre frações contínuas quando os coeficientes das correspondentes séries satisfazem relações da forma

$$\mu_k = \pm \mu_{-k-s} \quad (3.1)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ e $s = 0, 1, 2, \dots$. Veremos, também, que alguns resultados são gerais, mas existe uma acentuada diferença entre os casos $s \geq 3$ e $s = 0, 1$ ou 2 , e esses últimos dependem do sinal que tomamos em (3.1).

3.1 Alguns casos especiais

Tratemos, primeiramente, dos dois casos dados por (3.1) quando $s = 1$. Tomando, inicialmente, o sinal menos temos que $\mu_k = -\mu_{-k-1}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Logo, as duas séries são da forma

$$\frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \frac{\mu_3}{z^4} + \dots + \frac{\mu_{k+1}}{z^k} + \dots$$

e

$$\mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 + \dots + \mu_k z^k + \dots$$

Substituindo-se z por $1/z$ nas séries acima e na fração contínua (2.6) com $r = 0$, e, em seguida, dividindo-se tudo por z , encontramos, respectivamente,

$$\mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 + \dots + \mu_k z^k + \dots, \quad (3.2)$$

$$\frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \frac{\mu_3}{z^4} + \dots + \frac{\mu_k}{z^{k+1}} + \dots \quad (3.3)$$

e

$$\frac{\mu_0/z}{1/z - \beta_1^{(0)}} - \frac{\alpha_2^{(0)}/z}{1/z - \beta_2^{(0)}} - \frac{\alpha_3^{(0)}/z}{1/z - \beta_3^{(0)}} - \frac{\alpha_4^{(0)}/z}{1/z - \beta_4^{(0)}} - \dots$$



A fração contínua acima também pode ser escrita como

$$\frac{\mu_0}{1 - \beta_1^{(0)} z} - \frac{\alpha_2^{(0)} z}{1 - \beta_2^{(0)} z} - \frac{\alpha_3^{(0)} z}{1 - \beta_3^{(0)} z} - \frac{\alpha_4^{(0)} z}{1 - \beta_4^{(0)} z} - \dots \quad (3.4)$$

Após algumas manipulações simples, lembrando que $\beta_1^{(r)} = \frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}$ e que $\mu_k = -\mu_{-k-1}$, chegamos à seguinte fração contínua

$$\frac{\mu_0}{z - \frac{1}{\beta_1^{(0)}}} - \frac{(\alpha_2^{(0)} z) / (\beta_1^{(0)} \beta_2^{(0)})}{z - \frac{1}{\beta_2^{(0)}}} - \frac{(\alpha_3^{(0)} z) / (\beta_2^{(0)} \beta_3^{(0)})}{z - \frac{1}{\beta_3^{(0)}}} - \dots,$$

correspondentes às séries (3.2) e (3.3).

Porém, se construirmos diretamente de (3.2) e (3.3) a correspondente fração contínua, chegamos em

$$\frac{\mu_0}{z - \beta_1^{(0)}} - \frac{\alpha_2^{(0)} z}{z - \beta_2^{(0)}} - \frac{\alpha_3^{(0)} z}{z - \beta_3^{(0)}} - \frac{\alpha_4^{(0)} z}{z - \beta_4^{(0)}} - \dots$$

Comparando as duas frações contínuas, vemos que $\beta_n^{(0)} = -1$ para todo n e, portanto, a fração contínua é da forma

$$\frac{\mu_0}{z + 1} - \frac{\alpha_2^{(0)} z}{z + 1} - \frac{\alpha_3^{(0)} z}{z + 1} - \frac{\alpha_4^{(0)} z}{z + 1} - \dots$$

De maneira análoga, se os coeficientes das séries satisfazem $\mu_k = \mu_{-k-1}$, para $k = 0, 1, 2, \dots$, então a fração contínua é da forma

$$\frac{\mu_0}{z - 1} - \frac{\alpha_2^{(0)} z}{z - 1} - \frac{\alpha_3^{(0)} z}{z - 1} - \frac{\alpha_4^{(0)} z}{z - 1} - \dots$$

Chegamos, então, ao seguinte resultado.

Teorema 3 Se os coeficientes das séries de potências (2.1) e (2.2) satisfazem $\mu_k = \pm \mu_{-k-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, então os coeficientes da tabela $\alpha - \beta$ satisfazem às relações

$$\beta_n^{(r)} = \frac{1}{\beta_n^{(-r)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad e \quad \alpha_n^{(r)} = \frac{\alpha_n^{(-r)}}{\beta_n^{(-r)} \beta_{n-1}^{(-r)}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.5)$$

para $r = 0, 1, 2, \dots$.

A obtenção desses resultados é semelhante aos casos gerais que daremos mais tarde neste capítulo.

Um exemplo do primeiro desses dois casos simples é a função $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$. O algoritmo Q-D não pode ser usado diretamente para se obter a fração contínua acima pois ambas as expansões em séries de potências dessa função têm coeficientes nulos. Porém, o



algoritmo modificado que apresentamos no capítulo 2, pode ser usado. Este exemplo será feito em detalhes no capítulo 4.

Vejam, agora, o caso especial $\mu_k = \mu_{-k-2}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Se novamente substituirmos z por $1/z$ nas séries (2.7) e (2.8) e na fração contínua (2.6), e dividirmos os resultados por z , após alguns cálculos simples chegamos à fração contínua

$$\frac{\mu_{r-1}}{z - \frac{1}{\beta_1^{(r)}}} - \frac{(\alpha_2^{(r)} z) / (\beta_1^{(r)} \beta_2^{(r)})}{z - \frac{1}{\beta_2^{(r)}}} - \frac{(\alpha_3^{(r)} z) / (\beta_2^{(r)} \beta_3^{(r)})}{z - \frac{1}{\beta_3^{(r)}}} - \dots, \quad (3.6)$$

correspondente às séries

$$\frac{\mu_{r-1}}{z} + \frac{\mu_{r-2}}{z^2} + \frac{\mu_{r-3}}{z^3} + \frac{\mu_{r-4}}{z^4} + \frac{\mu_{r-5}}{z^5} + \dots \quad (3.7)$$

e

$$-\mu_r - \mu_{r+1}z - \mu_{r+2}z^2 - \mu_{r+3}z^3 - \mu_{r+4}z^4 - \dots \quad (3.8)$$

A fração contínua

$$\frac{\mu_{-r-1}}{z - \beta_1^{(-r-1)}} - \frac{\alpha_2^{(-r-1)} z}{z - \beta_2^{(-r-1)}} - \frac{\alpha_3^{(-r-1)} z}{z - \beta_3^{(-r-1)}} - \frac{\alpha_4^{(-r-1)} z}{z - \beta_4^{(-r-1)}} - \dots \quad (3.9)$$

corresponde às séries

$$\frac{\mu_{-r-1}}{z} + \frac{\mu_{-r}}{z^2} + \frac{\mu_{-r+1}}{z^3} + \frac{\mu_{-r+2}}{z^4} + \frac{\mu_{-r+3}}{z^5} + \dots \quad (3.10)$$

e

$$-\mu_{-r-2} - \mu_{-r-3}z - \mu_{-r-4}z^2 - \mu_{-r-5}z^3 - \mu_{-r-6}z^4 - \dots \quad (3.11)$$

Mas, como $\mu_k = \mu_{-k-2}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, as séries (3.7) e (3.8) são, respectivamente, idênticas às séries (3.10) e (3.11). Segue, então, que as frações contínuas (3.6) e (3.9) são idênticas. Logo,

$$\beta_n^{(r)} = \frac{1}{\beta_n^{(-r-1)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad \alpha_n^{(r)} = \frac{\alpha_n^{(-r-1)}}{\beta_n^{(-r-1)} \beta_{n-1}^{(-r-1)}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.12)$$

para $r = 0, 1, 2, \dots$.

Um exemplo para este caso é fornecido pela função $\operatorname{arccot}(z)$. As observações que fizemos acima para a expansão em fração contínua para $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ também se aplicam para este caso, uma vez que há coeficientes nulos em ambas as séries. Veja [12] para uma discussão sobre este exemplo. No próximo capítulo, também calcularemos a fração contínua para este exemplo aplicando a modificação do algoritmo Q-D.

De maneira análoga, podemos tratar os próximos dois casos: $\mu_k = \pm \mu_{-k}$. Quando tomamos o sinal de mais (+) encontramos que

$$\beta_n^{(r)} = \frac{1}{\beta_n^{(-r+1)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad \alpha_n^{(r)} = \frac{\alpha_n^{(-r+1)}}{\beta_n^{(-r+1)} \beta_{n-1}^{(-r+1)}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.13)$$



para $r = 0, 1, 2, \dots$.

Em todos os casos tratados até aqui todos os elementos de uma linha da tabela $\alpha - \beta$ estão relacionados com o correspondente elemento verticalmente acima ou abaixo dele de uma outra linha por relações da forma (3.5), (3.12) ou (3.13). A linha de simetria da tabela, isto é, a linha que divide as duas partes da tabela que estão relacionadas por (3.12), por exemplo, passa através da linha formada pelos coeficientes $\alpha_n^{(0)}, \beta_n^{(0)}$ e os coeficientes $\alpha_n^{(-1)}, \beta_n^{(-1)}$. Para (3.13), a linha passa entre as duas linhas da tabela formadas pelos coeficientes $\alpha_n^{(0)}, \beta_n^{(0)}$ e os coeficientes $\alpha_n^{(1)}, \beta_n^{(1)}$.

Nosso último caso especial indica o que acontece quando $\mu_k = \mu_{-k-s}$, para $s \geq 3$, e $\mu_k = -\mu_{-k-s}$ para $s = 2$, que trataremos na próxima seção. Consideremos, então, o caso $\mu_k = -\mu_{-k}$. Procedendo do mesmo modo que os casos anteriores, chegamos ao seguinte resultado.

Teorema 4 *Considere as séries de potências (2.1) e (2.2). Se os coeficientes satisfazem $\mu_k = -\mu_{-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, então, para $r = 2, 3, 4, \dots$, obtemos*

$$\beta_n^{(r)} = \frac{1}{\beta_n^{(-r+1)}}, \quad n = 1, 2, \dots, r - 1 \tag{3.14}$$

e

$$\alpha_n^{(r)} = \frac{\alpha_n^{(-r+1)}}{\beta_n^{(-r+1)}\beta_{n-1}^{(-r+1)}}, \quad n = 2, 3, \dots, r - 1. \tag{3.15}$$

Observe que somente alguns elementos de uma linha estão relacionados com o correspondente elemento de outra linha e não todos como nos casos anteriores.

Um argumento diferente do usado até aqui mostra que (3.15) também é verdadeiro para $n = r$. Este argumento será mostrado na seção seguinte. Portanto, os elementos que estão relacionados entre si formam “degraus” na tabela $\alpha - \beta$ como mostramos abaixo.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$\beta_1^{(-4)}$	$\alpha_2^{(-4)}$	$\beta_2^{(-4)}$	$\alpha_3^{(-4)}$	$\beta_3^{(-4)}$	$\alpha_4^{(-4)}$	$\beta_4^{(-4)}$	$\dots$
$\beta_1^{(-3)}$	$\alpha_2^{(-3)}$	$\beta_2^{(-3)}$	$\alpha_3^{(-3)}$	$\beta_3^{(-3)}$	$\alpha_4^{(-3)}$	$\beta_4^{(-3)}$	$\dots$
$\beta_1^{(-2)}$	$\alpha_2^{(-2)}$	$\beta_2^{(-2)}$	$\alpha_3^{(-2)}$	$\beta_3^{(-2)}$	$\alpha_4^{(-2)}$	$\beta_4^{(-2)}$	$\dots$
$\beta_1^{(-1)}$	$\alpha_2^{(-1)}$	$\beta_2^{(-1)}$	$\alpha_3^{(-1)}$	$\beta_3^{(-1)}$	$\alpha_4^{(-1)}$	$\beta_4^{(-1)}$	$\dots$
$\beta_1^{(0)}$	$\alpha_2^{(0)}$	$\beta_2^{(0)}$	$\alpha_3^{(0)}$	$\beta_3^{(0)}$	$\alpha_4^{(0)}$	$\beta_4^{(0)}$	$\dots$
$\beta_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\alpha_3^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$\alpha_4^{(1)}$	$\beta_4^{(1)}$	$\dots$
$\beta_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\beta_2^{(2)}$	$\alpha_3^{(2)}$	$\beta_3^{(2)}$	$\alpha_4^{(2)}$	$\beta_4^{(2)}$	$\dots$
$\beta_1^{(3)}$	$\alpha_2^{(3)}$	$\beta_2^{(3)}$	$\alpha_3^{(3)}$	$\beta_3^{(3)}$	$\alpha_4^{(3)}$	$\beta_4^{(3)}$	$\dots$
$\beta_1^{(4)}$	$\alpha_2^{(4)}$	$\beta_2^{(4)}$	$\alpha_3^{(4)}$	$\beta_3^{(4)}$	$\alpha_4^{(4)}$	$\beta_4^{(4)}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$



3.2 O caso geral

Nesta seção, daremos as propriedades das frações contínuas cujos coeficientes das correspondentes séries formam essas seqüências em forma de “degraus” mostradas na tabela acima.

Teorema 5 Se nas expansões em série de potências (2.1) e (2.2) os coeficientes satisfazem

$$\mu_k = \mu_{-k-s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s \geq 3, \quad (3.16)$$

então, os coeficientes da tabela $\alpha - \beta$ satisfazem

$$\beta_n^{(r)} = \frac{1}{\beta_n^{(-r-s+1)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, r$$

e

$$\alpha_n^{(r)} = \frac{\alpha_n^{(-r-s+1)}}{\beta_n^{(-r-s+1)} \beta_{n-1}^{(-r-s+1)}}, \quad n = 2, 3, \dots, r+1.$$

Demonstração: Para $s \geq 3$, sejam os coeficientes das séries de potências satisfazem (3.16). Com esta relação entre os coeficientes, as séries (3.7) e (3.8), que correspondem à fração contínua (3.6), se tornam, respectivamente,

$$\frac{\mu_{-r-s+1}}{z} + \frac{\mu_{-r-s+2}}{z^2} + \frac{\mu_{-r-s+3}}{z^3} + \frac{\mu_{-r-s+4}}{z^4} + \dots + \frac{\mu_{-s}}{z^r} + \frac{\mu_{-1}}{z^{r+1}} + \frac{\mu_{-2}}{z^{r+2}} + \dots \quad (3.17)$$

e

$$-\mu_{-r-s} - \mu_{-r-s-1}z - \mu_{-r-s-2}z^2 - \mu_{-r-s-3}z^3 - \mu_{-r-s-4}z^4 - \dots \quad (3.18)$$

Os primeiros r termos de (3.17) são os mesmos r termos da série

$$\frac{\mu_{-r-s+1}}{z} + \frac{\mu_{-r-s+2}}{z^2} + \frac{\mu_{-r-s+3}}{z^3} + \frac{\mu_{-r-s+4}}{z^4} + \dots + \frac{\mu_{-s}}{z^r} + \frac{\mu_{-s+1}}{z^{r+1}} + \frac{\mu_{-s+2}}{z^{r+2}} + \dots \quad (3.19)$$

e a fração contínua que corresponde a (3.19) e (3.18) é dada por

$$\frac{\mu_{-r-s+1}}{z - \beta_1^{(-r-s+1)}} - \frac{\alpha_2^{(-r-s+1)}z}{z - \beta_2^{(-r-s+1)}} - \frac{\alpha_3^{(-r-s+1)}z}{z - \beta_3^{(-r-s+1)}} - \frac{\alpha_4^{(-r-s+1)}z}{z - \beta_4^{(-r-s+1)}} - \dots \quad (3.20)$$

Os primeiros r quocientes parciais dessa fração contínua devem ser idênticos aos primeiros r quocientes parciais de (3.6). Logo,

$$\beta_n^{(r)} = \frac{1}{\beta_n^{(-r-s+1)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, r \quad (3.21)$$

e

$$\alpha_n^{(r)} = \frac{\alpha_n^{(-r-s+1)}}{\beta_n^{(-r-s+1)} \beta_{n-1}^{(-r-s+1)}}, \quad n = 2, 3, \dots, r. \quad (3.22)$$

A relação (3.17), entretanto, também vale para $n = r + 1$ pela seguinte razão (aqui mostraremos o argumento citado ao final da seção anterior).

O coeficiente $\alpha_{r+1}^{(r)}$ pode ser expresso, usando-se a primeira relação em (2.5), por

$$\alpha_{r+1}^{(r)} = \alpha_r^{(r+1)} + \beta_r^{(r+1)} - \beta_r^{(r)}.$$

Agora, observe que as três parcelas que aparecem do lado direito estão todas na parte da tabela $\alpha - \beta$ em que (3.21) e (3.17) valem. Logo,

$$\alpha_{r+1}^{(r)} = \frac{\alpha_r^{(-r-s)}}{\beta_r^{(-r-s)}\beta_{r-1}^{(-r-s)}} + \frac{1}{\beta_r^{(-r-s)}} - \frac{1}{\beta_r^{(-r-s+1)}}$$

ou, usando-se agora a segunda relação em (2.5),

$$\alpha_{r+1}^{(r)} = \frac{\alpha_r^{(-r-s+1)}}{\beta_r^{(-r-s+1)}\beta_r^{(-r-s)}} + \frac{1}{\beta_r^{(-r-s)}} - \frac{1}{\beta_r^{(-r-s+1)}}.$$

Aplicando-se novamente a primeira regra de (2.5), obtemos

$$\alpha_{r+1}^{(r)} = \frac{\alpha_{r+1}^{(-r-s+1)}}{\beta_r^{(-r-s+1)}\beta_{r+1}^{(-r-s+1)}}. \quad (3.23)$$

Observe que, enquanto (3.17) é uma relação recíproca (do mesmo modo que (3.21) claramente também o é), a relação

$$\alpha_{r+1}^{(-r-s+1)} = \frac{\alpha_{r+1}^{(r)}}{\beta_r^{(r)}\beta_{r+1}^{(r)}}, \quad n = 2, 3, \dots, r,$$

não é a recíproca de (3.23). Podemos mostrar isto matematicamente. Porém, o seguinte argumento também demonstra este fato.

Se a relação dada acima e (3.23) fossem relações recíprocas, devido à função que os numeradores parciais exercem na correspondência da fração contínua com as duas séries, isto implicaria que os $(r+1)$ -ésimos termos de (3.17) e (3.19) seriam necessariamente idênticos, e eles não o são. Isto conclui a prova do teorema. •

As relações (3.21), (3.17) e (3.23) também valem se os coeficientes das séries de potências satisfazem $\mu_k = -\mu_{-k-s}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, com o caso $s = 2$ incluído. A demonstração é análoga à que acabamos de mostrar para o caso $\mu_k = \mu_{-k-s}$, $s \geq 3$.

Os coeficientes que estão relacionados por (3.21) e (3.17) são aqueles localizados na parte da tabela $\alpha - \beta$ acima da linha superior e abaixo da linha inferior em forma de escada, como mostramos a seguir.



$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$\beta_1^{(-s-2)}$	$\alpha_2^{(-s-2)}$	$\beta_2^{(-s-2)}$	$\alpha_3^{(-s-2)}$	$\beta_3^{(-s-2)}$	$\alpha_4^{(-s-2)}$	$\beta_4^{(-s-2)}$	$\dots$	
$\beta_1^{(-s-1)}$	$\alpha_2^{(-s-1)}$	$\beta_2^{(-s-1)}$	$\alpha_3^{(-s-1)}$	$\beta_3^{(-s-1)}$	$\alpha_4^{(-s-1)}$	$\beta_4^{(-s-1)}$	$\dots$	
$\beta_1^{(-s)}$	$\alpha_2^{(-s)}$	$\beta_2^{(-s)}$	$\alpha_3^{(-s)}$	$\beta_3^{(-s)}$	$\alpha_4^{(-s)}$	$\beta_4^{(-s)}$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$\beta_1^{(-1)}$	$\alpha_2^{(-1)}$	$\beta_2^{(-1)}$	$\alpha_3^{(-1)}$	$\beta_3^{(-1)}$	$\alpha_4^{(-1)}$	$\beta_4^{(-1)}$	$\dots$	
$\beta_1^{(0)}$	$\alpha_2^{(0)}$	$\beta_2^{(0)}$	$\alpha_3^{(0)}$	$\beta_3^{(0)}$	$\alpha_4^{(0)}$	$\beta_4^{(0)}$	$\dots$	
$\beta_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\alpha_3^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$	$\alpha_4^{(1)}$	$\beta_4^{(1)}$	$\dots$	
$\beta_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\beta_2^{(2)}$	$\alpha_3^{(2)}$	$\beta_3^{(2)}$	$\alpha_4^{(2)}$	$\beta_4^{(2)}$	$\dots$	
$\beta_1^{(3)}$	$\alpha_2^{(3)}$	$\beta_2^{(3)}$	$\alpha_3^{(3)}$	$\beta_3^{(3)}$	$\alpha_4^{(3)}$	$\beta_4^{(3)}$	$\dots$	
$\beta_1^{(4)}$	$\alpha_2^{(4)}$	$\beta_2^{(4)}$	$\alpha_3^{(4)}$	$\beta_3^{(4)}$	$\alpha_4^{(4)}$	$\beta_4^{(4)}$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$

Capítulo 4

Exemplos

Neste capítulo, ilustraremos o algoritmo dado no capítulo 2 utilizando funções cujos coeficientes das expansões em série de potências apresentam tanto as simetrias dadas no capítulo anterior como coeficientes nulos.

4.1 A função $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

Para esta função, as duas expansões em série de potências são dadas por

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{3}{8z^5} - \frac{5}{16z^7} + \dots, \quad |z| > 1 \quad (4.1)$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{3z^4}{8} - \frac{5z^6}{16} + \dots, \quad |z| < 1. \quad (4.2)$$

Neste exemplo, há coeficientes nulos em ambas as expansões em séries de potências e, portanto, o algoritmo Q-D não pode ser usado para se obter a fração contínua correspondente. Embora ela possa ser obtida facilmente por outros meios, usaremos esta função para ilustrar o algoritmo modificado. Fazendo $K = 2$ obtemos as expansões em série

$$\frac{2}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \frac{2}{z^5} - \dots \quad (4.3)$$

e

$$2 - 2z + 2z^2 - 2z^3 + 2z^4 - \dots \quad (4.4)$$

da função $\frac{2}{1+z}$.

Subtraindo, agora, (4.3) e (4.4), respectivamente, das séries (4.1) e (4.2) acima, obtemos

$$-\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{5}{2z^3} + \frac{2}{z^4} - \frac{13}{8z^5} + \dots$$

e

$$-1 + 2z - \frac{5z^2}{2} + 2z^3 - \frac{13z^4}{8} + \dots$$

que são as expansões desejadas, já que não há coeficientes nulos.



Observe que os coeficientes das duas séries de potências acima satisfazem à simetria

$$\gamma_{-k} = \gamma_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Logo, as séries são, respectivamente, das seguintes formas

$$\frac{\zeta_0}{z} + \frac{\zeta_1}{z^2} + \frac{\zeta_2}{z^3} + \frac{\zeta_3}{z^4} + \dots + \frac{\zeta_{k+1}}{z^k} + \dots \quad \text{e}$$

$$\zeta_0 + \zeta_1 z + \zeta_2 z^2 + \zeta_3 z^3 + \dots + \zeta_k z^{k-1} + \dots$$

Como consequência desta simetria, quando usamos o algoritmo Q-D somente metade dos elementos $\lambda_n^{(r)}$ e $\delta_n^{(r)}$ precisam ser calculados. Isto, porque sabemos que

$$\delta_n^{(-r)} = \frac{1}{\delta_n^{(r)}}, \quad \lambda_n^{(-r)} = \frac{\lambda_n^{(r)}}{\delta_n^{(r)} \delta_{n-1}^{(r)}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Encontramos que $\delta_n = \delta_n^{(0)} = -1$ para todo n e, assim, a correspondente fração contínua tem a forma

$$\frac{\lambda_1}{z+1} - \frac{\lambda_2 z}{z+1} - \frac{\lambda_3 z}{z+1} - \dots$$

Os coeficientes do numerador $\lambda_k = \lambda_k^{(0)}$ podem ser expressos explicitamente em termos de k e são dados por

$$\lambda_{2k} = \frac{4k-7}{2(4k-3)}, \quad \lambda_{2k+1} = 1 - \lambda_{2k} = \frac{4k+1}{2(4k-3)},$$

com $\lambda_1 = -1$.

A fração contínua para $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ é, então, obtida pelo algoritmo do capítulo 2 e é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{z+1} - \frac{z}{z+1} - \frac{z/2}{z+1} - \frac{z/2}{z+1} - \frac{z/2}{z+1} - \frac{z/2}{z+1} - \dots$$

Esta fração contínua pode ser obtida por outros meios, veja Murphy [12], onde ela e algumas aplicações são discutidas.

4.2 A função $F(z) = \operatorname{arccot}(z)$

A função $\operatorname{arccot}(z)$, $\cot^{-1}(z)$, tem as seguintes expansões em série de potências:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{5z^5} - \frac{1}{7z^7} + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)z^{2k+1}} + \dots, \quad |z| > 1 \quad (4.5)$$

e

$$\frac{\pi}{2} - z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{2k-1} + \dots, \quad |z| < 1. \quad (4.6)$$



Como no exemplo anterior, essas duas séries apresentam coeficientes nulos e a fração contínua da forma (2.3) pode ser obtida pelo algoritmo Q-D modificado dado no capítulo 2. Neste exemplo, também poderemos explorar, a nosso favor, a simetria parcial entre os coeficientes das duas expansões em série da função modificada

$$\operatorname{arccot}(z) - \frac{2}{1+z},$$

que são dadas por

$$-\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{7}{3z^3} + \frac{2}{z^4} - \frac{9}{5z^5} + \dots$$

e

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) + z - 2z^2 + \frac{7}{3}z^3 - 2z^4 + \frac{9}{5}z^5 - \dots .$$

Essas duas séries são das formas

$$\frac{\gamma_0}{z} + \frac{\gamma_1}{z^2} + \frac{\gamma_2}{z^3} + \frac{\gamma_3}{z^4} + \dots + \frac{\gamma_{k+1}}{z^k} + \dots$$

e

$$-\gamma_{-1} - \gamma_0 z - \gamma_1 z^2 - \gamma_2 z^3 - \dots - \gamma_{k-1} z^k - \dots .$$

Isto é, $\gamma_k = \gamma_{-k-2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Como consequência, os elementos gerados pelo algoritmo Q-D para tais séries satisfazem

$$\delta_n^{(r)} = \frac{1}{\delta_n^{(-r-1)}}, \quad \lambda_n^{(r)} = \frac{\lambda_n^{(-r-1)}}{\delta_{n-1}^{(-r-1)} \delta_n^{(-r-1)}}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (4.7)$$

como vimos no capítulo anterior.

Portanto, na tabela dos coeficientes,

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$\delta_1^{(-4)}$	$\lambda_2^{(-4)}$	$\delta_2^{(-4)}$	$\lambda_3^{(-4)}$	$\delta_3^{(-4)}$	$\lambda_4^{(-4)}$	$\delta_4^{(-4)}$	$\dots$
$\delta_1^{(-3)}$	$\lambda_2^{(-3)}$	$\delta_2^{(-3)}$	$\lambda_3^{(-3)}$	$\delta_3^{(-3)}$	$\lambda_4^{(-3)}$	$\delta_4^{(-3)}$	$\dots$
$\delta_1^{(-2)}$	$\lambda_2^{(-2)}$	$\delta_2^{(-2)}$	$\lambda_3^{(-2)}$	$\delta_3^{(-2)}$	$\lambda_4^{(-2)}$	$\delta_4^{(-2)}$	$\dots$
$\delta_1^{(-1)}$	$\lambda_2^{(-1)}$	$\delta_2^{(-1)}$	$\lambda_3^{(-1)}$	$\delta_3^{(-1)}$	$\lambda_4^{(-1)}$	$\delta_4^{(-1)}$	$\dots$
$\delta_1^{(0)}$	$\lambda_2^{(0)}$	$\delta_2^{(0)}$	$\lambda_3^{(0)}$	$\delta_3^{(0)}$	$\lambda_4^{(0)}$	$\delta_4^{(0)}$	$\dots$
$\delta_1^{(1)}$	$\lambda_2^{(1)}$	$\delta_2^{(1)}$	$\lambda_3^{(1)}$	$\delta_3^{(1)}$	$\lambda_4^{(1)}$	$\delta_4^{(1)}$	$\dots$
$\delta_1^{(2)}$	$\lambda_2^{(2)}$	$\delta_2^{(2)}$	$\lambda_3^{(2)}$	$\delta_3^{(2)}$	$\lambda_4^{(2)}$	$\delta_4^{(2)}$	$\dots$
$\delta_1^{(3)}$	$\lambda_2^{(3)}$	$\delta_2^{(3)}$	$\lambda_3^{(3)}$	$\delta_3^{(3)}$	$\lambda_4^{(3)}$	$\delta_4^{(3)}$	$\dots$
$\delta_1^{(4)}$	$\lambda_2^{(4)}$	$\delta_2^{(4)}$	$\lambda_3^{(4)}$	$\delta_3^{(4)}$	$\lambda_4^{(4)}$	$\delta_4^{(4)}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$



aqueles que estão acima da linha podem ser expressos em termos daqueles que estão abaixo, e vice-versa.

O algoritmo Q-D, abreviado pelo uso de (4.7), pode agora ser usado para obtermos a fração contínua para a função $\operatorname{arccot}(z) - \frac{2}{1+z}$. A fração contínua para $\operatorname{arccot}(z)$ é, então, obtida e abaixo fornecemos os coeficientes dos dez primeiros convergentes.

$\mu_1 = 1$	$\beta_1 = -0.6366197724$
$\alpha_2 = 0.6366197724$	$\beta_2 = -1.070461461$
$\alpha_3 = 0.5468626849$	$\beta_3 = -1.021048760$
$\alpha_4 = 0.5197242291$	$\beta_4 = -1.007543872$
$\alpha_5 = 0.5101710861$	$\beta_5 = -1.003285499$
$\alpha_6 = 0.5061199276$	$\beta_6 = -1.001691558$
$\alpha_7 = 0.5040866744$	$\beta_7 = -1.000985436$
$\alpha_8 = 0.5029242687$	$\beta_8 = -1.000623423$
$\alpha_9 = 0.5021889793$	$\beta_9 = -1.000394789$
$\alpha_{10} = 0.5016364377$	$\beta_{10} = -1.000087202$

Os cálculos acima e no exemplo da seção anterior foram feitos com o auxílio do software MAPLE e os coeficientes são precisos até a sétima casa decimal.



Referências Bibliográficas

- [1] E.X.L. de Andrade, "Sobre Polinômios Similares aos Ortogonais Associados a uma Classe Especial de Distribuições", Tese de Doutorado, IMECC/UNICAMP, Campinas (SP) (1995).
- [2] T.S. Chihara, "An Introduction to Orthogonal Polynomials", Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [3] W.B. Gragg, *The Padé Table and its Relation to Certain Algorithms in Numerical Analysis*, SIAM Review, **14** (1972), 1-62.
- [4] W.B. Jones & W.J. Thron, "Continued Fractions: Analytic Theory and Applications", Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol. 11, Addison-Wesley Publishing Company, Readings, Mass. (1980). Now distributed by Cambridge University Press, New York.
- [5] W.B. Jones, W.J. Thron & H. Waadeland, *A Strong Stieltjes Moment Problem*, Transaction Amer. Math. Soc. **261** (1980), 503-528.
- [6] L. Lorentzen & H. Waadeland, "Continued Fractions with Applications", in Studies in Computational Mathematics 3 (C. Brezinsky & L. Wuytack eds.), North-Holland, Amsterdam 1992.
- [7] A. Magnus, *On the Structure of the Two-Point Padé Table*, "Analytic Theory of Continued Fraction" (W.B. Jones, W.J. Thron & H. Waadeland eds.), Lecture Notes in Mathematics No **932**, Springer-Verlag, Berlin (1982), 176-193.
- [8] J.H. McCabe, *A continued Fraction Expansion, With a Truncation Error Estimate, for Dawson's Integral*, Mathematics of Computation **28** (1974), no 127, 811-816.
- [9] J.H. McCabe, *A Formal Extension of the Padé Table to Include Two-Point Padé Quotients*, Journal of the Institute of Mathematics and its Applications **15** (1975), 363-372.
- [10] J.H. McCabe and J.A. Murphy, *Continued Fractions Which Correspond to Power Series Expansions at Two Points*, Technical Report no 36, Department of Mathematics, Brunel University, 1971.
- [11] J.H. McCabe and J.A. Murphy, *Continued Fractions Which Correspond to Power Series Expansions at Two Points*, Journal of the Institute of Mathematics and its Applications **17** (1976), 233-247.



- [12] J.A. Murphy, *Certain Rational Approximations to $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$* , Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, **7** (1976), 138-150.
- [13] A. Sri Ranga, "Continued Fractions with Correspond to Two Series Expansions and the Strong Hamburger Moment Problem", Tese de Doutorado, University of St Andrews, St Andrews, Escócia (1984).
- [14] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials", Amer. Math. Soc., Colloq. Publ., New York, 23, 1939.
- [15] W.J. Thron, *Some Properties of Continued Fraction $1 + d_0z + \frac{K(z/(1+d_nz))}{1+d_nz}$* , Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 206-218.
- [16] H.S. Wall, "Analytic Theory of Continued Fractions", Van Nostrand, New York, 1948.



