

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

GIULLIANO ASSIS SODERO BOAVENTURA

Análise de órbitas : Missão Garatêa e Órbitas Periódicas

Guaratinguetá
2023

Giulliano Assis Sodero Boaventura

Análise de órbitas : Missão Garatêa e Órbitas Periódicas

Tese apresentada ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como requisito para a obtenção do Título de Doutor em Física, na Área de Dinâmica Orbital.

Orientadora: Prof^o Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

Coorientadora: Prof^o Dra. Alessandra Ferraz da Silva Ferreira

Guaratinguetá

2023

B662a Boaventura, Giulliano Assis Sodero
Análise de órbitas: Missão Garatêa e Órbitas periódicas
/ Giulliano Assis Sodero Boaventura - Guaratinguetá, 2023.
114 f : il.
Bibliografia: f. 110-113

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2023.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Alessandra Ferraz da Silva
Ferreira

1. Órbitas. 2. Asteróides - órbitas. 3. Astronomia. I. Título.
CDU 521.3

GIULLIANO ASSIS SODÉRO BOAVENTURA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: DOUTORADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof.ª Dr.ª SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
Orientador - UNESP
participou por videoconferência


Prof. Dr. RAFAEL RIBEIRO DE SOUSA
UNESP
participou por videoconferência


Prof. Dr. WILLIAM REIS SILVA
Universidade de Brasília
participou por videoconferência


Prof.ª Dr.ª PRYSCILLA MARIA PIRES DOS SANTOS
UERJ
participou por videoconferência


Prof. Dr. JEAN PAULO DOS SANTOS CARVALHO
UFRB/CETENS
participou por videoconferência

MARÇO de 2022

DADOS CURRICULARES

GIULLIANO ASSIS SODERO BOAVENTURA

NASCIMENTO 08/09/1975 - Lorena / SP

FILIAÇÃO Benedito Edson Boaventura
Eline Soderó Boaventura

2002 / 2008 Graduado em Física (Licenciatura)
UNESP - Universidade Estadual Paulista

2013 / 2015 Mestre em Ensino de Física
UFF - Universidade Federal Fluminense

A você, que sonha em crescer na ciência e fazer descobertas que transformarão o mundo.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) - Processo número 2016/24561-0.

*“Pensem nas crianças
Mudas telepáticas
Pensem nas meninas
Cegas inexatas
Pensem nas mulheres
Rotas alteradas
Pensem nas feridas
Como rosas cálidas
Mas oh não se esqueçam
Da rosa da rosa
Da rosa de Hiroxima
A rosa hereditária
A rosa radioativa
Estúpida e inválida
A rosa com cirrose
A antirrosa atômica
Sem cor sem perfume
Sem rosa sem nada.”*
(Vinícius de Moraes)

RESUMO

Recentemente, temos visto uma série de missões espaciais com destinos a Lua e a asteroides, seja para fins exploratórios ou científicos, com possibilidades de muita lucratividade de uma forma sustentável. Diante desse cenário, destaca-se a Missão Garatéa-L (do Tupi-Guarani, "Busca Vidas"), missão genuinamente brasileira, que tem como objetivo principal colocar uma sonda em órbita da Lua no ano de 2024 ou 2025, tendo como pesquisa central o tema astrobiologia e o estudo da bacia do polo sul lunar (Aitken Basin). Nesse contexto, a primeira parte do presente trabalho visa estudar as órbitas que atendem a necessidade da missão, obedecendo os parâmetros necessários de 300 km de periselene e 3000 km de aposelene usando os coeficientes gravitacionais da Lua J_2 , J_3 e C_{22} . Obtivemos como resultado as possíveis órbitas pretendidas pela missão, analisando tempo de vida útil do satélite na região de interesse, evolução dos elementos orbitais e tempo de permanência de cada partícula na posição dos experimentos, especialmente com referência ao polo sul lunar, em que há interesse por imagens de regiões específicas e posições mais afastadas, com interesse sobre a influência do clima espacial sobre colônias bacterianas. Ainda como estudos de órbitas, este trabalho discute as órbitas periódicas simétricas e sua importância para missões espaciais, principalmente para estudos da dinâmica de asteroides e cometas. A proposta de nosso estudo foi desenvolver um modelo alternativo para estudos qualitativos das propriedades dinâmicas em asteroides em forma de alças, denominado tripolo-segmento, composto por dois corpos em cada extremidade e um corpo sobre a haste, usando o pacote de software TIDES. Obtemos como resultado as órbitas simétricas periódicas nesse modelo, primeiramente negligenciando a massa da haste, com evolução dos parâmetros de massa e em seguida, com a massa da haste. Posteriormente, analisamos a produção de órbitas periódicas simétricas aplicando o modelo no asteroide Holiday.

PALAVRAS-CHAVE: Órbitas ao redor da Lua. Órbitas periódicas simétricas. Tripolo-segmento.

ABSTRACT

Recently, we have seen a series of space missions headed to the Moon and asteroids, either for exploratory or scientific purposes, with possibilities of significant profitability in a sustainable way. In this scenario, the Garat a-L Mission (from Tupi-Guarani, meaning "Search for Life"), a genuinely Brazilian mission, stands out. Its main objective is to put a probe into orbit around the Moon in the near future, with astrobiology and the study of the lunar south pole basin (Aitken Basin) as its central research themes. In this context, the first part of this work aims to study the orbits that meet the mission's requirements, obeying the necessary parameters of 300 km of perilune and 3000 km of apolune using the gravitational coefficients of the Moon J_2 , J_3 , and C_{22} . We obtain as a result the possible orbits for the mission, analyzing the satellite's lifespan in the region of interest, the evolution of orbital elements, and the time each particle spends in the position of the experiments, especially with reference to the lunar south pole, where there is interest in images of specific regions and more distant positions, with interest in the influence of space weather on bacterial colonies. As part of the orbit studies, this work discusses periodic symmetric orbits and their importance for space missions, especially for studies of the dynamics of asteroids and comets. The proposal of our study was to develop an alternative model for qualitative studies of dynamic properties in dumbbell-shaped asteroids, called the triple-segment model, composed of two bodies at each end and one body on the rod, using the TIDES software package. We obtain as a result the periodic symmetric orbits in this model, first neglecting the mass of the rod, with the evolution of mass parameters, and then including the mass of the rod. Subsequently, we analyzed the production of symmetric periodic orbits by applying the model to the asteroid Holiday.

KEYWORDS: Orbits around the Moon. Symmetrical periodic orbits. Tripole-segment.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Coordenadas Selenocêntricas	18
Figura 2	Geometria dos elementos orbitais no plano	19
Figura 3	Relação entre Anomalia Verdadeira e Anomalia Excêntrica	20
Figura 4	Geometria para definição dos elementos orbitais	20
Figura 5	Problema Circular Restrito de Três Corpos	21
Figura 6	Cubesat 6U - Detalhe	23
Figura 7	Consórcio Garatêa	23
Figura 8	Parâmetros Iniciais da Missão	24
Figura 9	Trajetória Inicial	24
Figura 10	Parâmetros Atuais da Missão	26
Figura 11	Geometria do Sistema / Referencial Girante	33
Figura 12	Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 50^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$	35
Figura 13	Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 76^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$	35
Figura 14	Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	36
Figura 15	Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 89^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$	36
Figura 16	Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	37
Figura 17	Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$	38
Figura 18	Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$	39
Figura 19	Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	39
Figura 20	Grades de tempo de permanência das partículas para $i = 70^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	40
Figura 21	Grades de tempo de permanência das partículas para $i = 80^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	40
Figura 22	Desvio percentual (periselene) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	42
Figura 23	Desvio percentual (pericentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$	43
Figura 24	Desvio percentual (pericentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$	44
Figura 25	Desvio percentual (pericentro) para $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	44
Figura 26	Desvio percentual (apocentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	45
Figura 27	Desvio percentual (apocentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$	46
Figura 28	Desvio percentual (apocentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$	46
Figura 29	Desvio percentual (apocentro) para $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	47
Figura 30	Semieixo maior <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1	48
Figura 31	Semieixo maior <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2	49
Figura 32	Semieixo maior <i>versus</i> Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3	49
Figura 33	Excentricidade <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1	50
Figura 34	Excentricidade <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2	51
Figura 35	Excentricidade <i>versus</i> Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3	51
Figura 36	Inclinação <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1	52
Figura 37	Inclinação <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2	53

Figura 38	Inclinação <i>versus</i> Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3	53
Figura 39	ω <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1	54
Figura 40	ω <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2	55
Figura 41	ω <i>versus</i> Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3	55
Figura 42	R_p <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1	56
Figura 43	R_p <i>versus</i> Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2	57
Figura 44	R_p <i>versus</i> Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3	57
Figura 45	Órbitas (Frontal e Leste) - $I = 60^\circ$, $\Omega = 90^\circ$, $\omega = 180^\circ$, $e = 0,379227$ e $a = 3312$ km (170 dias de permanência)	59
Figura 46	Órbitas (Norte e Sul) - $I = 60^\circ$, $\Omega = 90^\circ$, $\omega = 180^\circ$, $e = 0,379227$ e $a = 3312$ km (170 dias)	60
Figura 47	Família de Órbitas Periódicas Simétricas - Exemplo	64
Figura 48	Sistema Tripolo-Segmento	66
Figura 49	Asteroide Holiday	67
Figura 50	Tripolo-Segmento	68
Figura 51	Família de órbitas periódicas simétricas - Dipolo-Segmento, caso $\mu_s = 0$, $\mu = 0,5$ e $k = 1$	72
Figura 52	Família de órbitas periódicas simétricas - Tripolo-Segmento, caso $\mu_s=0$, $\mu_x=0,5$, $\mu_x=0$ e $k=1$	73
Figura 53	Nomenclatura das Famílias de órbitas periódicas simétricas	74
Figura 54	Evolução das Curvas Características de Órbitas Periódicas (x, C) para $\mu = 0,1$ a $0,5$	75
Figura 55	Evolução das Curvas Características de Órbitas Periódicas (x, C) para $\mu = 0,6$ a $0,9$	76
Figura 56	Evolução das famílias na região A para $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$	76
Figura 57	Evolução das famílias na região B para $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$	77
Figura 58	Órbitas da família h para $\mu = 0,3$	78
Figura 59	Conjunto das 4 Órbitas da família h para $\mu = 0,3$	79
Figura 60	Órbitas da família h para $\mu = 0,6$	79
Figura 61	Família h^* para $\mu = 0,2$, plano (x, C)	80
Figura 62	Órbitas - família h^* para $\mu = 0,4$	81
Figura 63	Órbitas - família h^*	82
Figura 64	Evolução das Curvas de Velocidade Zero para alguns valores de μ	83
Figura 65	Evolução dos seis pontos de equilíbrio para o sistema	84
Figura 66	Mapa de Órbitas Periódicas - $m_2 = 0,1m_1$	85
Figura 67	Mapa de Órbitas Periódicas - $m_2 = 0,5m_1$	86
Figura 68	Mapa de Órbitas Periódicas - $m_2 = 1,3m_1$	87
Figura 69	Mapa de Órbitas Periódicas - $m_2 = 1,7m_1$	87
Figura 70	Órbitas Periódicas Simétricas - $m_2 = 1,5$	88
Figura 71	Órbitas Periódicas Simétricas - $m_2 = 1,6$	89
Figura 72	Evolução das Curvas de Velocidade Zero para alguns valores de m_2 ($m_1 = m_3 = 1,0$)	90

Figura 73	Mapa de Órbitas Periódicas Simétricas para alguns valores de M	92
Figura 74	Mapa de Órbitas Periódicas Simétricas - $M = 0,8$	93
Figura 75	Mapa de Órbitas Periódicas Simétricas - Quadrante 1	93
Figura 76	Órbitas Periódicas Simétricas - Família B_1	94
Figura 77	Órbitas Periódicas Simétricas - Família B_1 - Comparação	95
Figura 78	Órbitas Periódicas Simétricas - Família B_2	96
Figura 79	Órbitas Periódicas Simétricas - Família B_2 - Comparação	97
Figura 80	Evolução das Curvas de Velocidade Zero para alguns valores de M	98
Figura 81	Asteroide Holiday - Pixels	100
Figura 82	Asteroide Holiday - Tripolo-Segmento	101
Figura 83	MOPS - Tripolo-Segmento - Asteroide Holiday	102
Figura 84	MOPS - Tripolo-Segmento - Asteroide Holiday - Região B (Ampliada)	103
Figura 85	Evolução das Órbitas Periódicas Simétricas - Família B4	103
Figura 86	Evolução das Órbitas Periódicas Simétricas - Família B4 - Progressão na Família	104
Figura 87	Evolução das Órbitas Periódicas Simétricas - Família B5	105
Figura 88	Evolução das Órbitas Periódicas Simétricas - Família B5 - Progressão na Família	106
Figura 89	Curvas de Velocidade Zero e Pontos de Equilíbrio - Asteroide Holiday	107
Figura 90	Rotina para gerar o tempo que as partículas permaneceram em R_a e R_p	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Efeitos dos coeficientes nos elementos orbitais (primeira ordem)	29
Tabela 2 – Valores dos coeficientes gravitacionais	30
Tabela 3 – Parâmetros Lunares	30
Tabela 4 – Valores limites do raio do periselene e aposelene (km)	31
Tabela 5 – Valores de semieixo maior e excentricidade	31
Tabela 6 – Valores de referências para a Terra	34
Tabela 7 – Nome das nove famílias naturais	64
Tabela 8 – TIDES	71
Tabela 9 – Relação entre os parâmetros de massa - $\mu_s = 0$ e $m_1 = m_3 = 1,0$	85
Tabela 10 – Parâmetros de massa - $0,1 \leq M \leq 1,0 / m_1 = m_2 = m_3 = 1,0 / \mu = \mu_x = 0,33333$	91
Tabela 11 – Relação entre as medidas e pixels	101
Tabela 12 – Relação entre área e $pixels^2$	101
Tabela 13 – Relação entre massas e parâmetros de massa	102

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNESP	Universidade Estadual Paulista
FAPESP	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
PRTC	Problema Restrito de Três Corpos
PCRTC	Problema Circular Restrito de Três Corpos
DS	Dipolo-Segmento
TS	Tripolo-Segmento
TIDES	<i>Taylor series Integrator for Differential Equations</i>
FPCA	<i>Flexible Printed Circuit Assembly</i>
SSTL	<i>Surrey Satellite Technology Ltd</i>
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EUA	Estados Unidos da América

LISTA DE SÍMBOLOS

R_a	Raio do aposelene
R_p	Raio do periselene
U	Unidade astronômica padrão usada na simulação
a	Semieixo maior
e	Excentricidade
i	Inclinação
Ω	Ângulo da longitude do Nodo Ascendente
C	Constante de Jacobi
V	Potencial Efetivo do Sistema Tripolo-Segmento
CM	Centro de Massa do Sistema Tripolo-Segmento
l_1	Distância da massa 1 (m_1) ao CM
l_2	Distância da massa 2 (m_2) ao CM
l_3	Distância da massa 3 (m_3) ao CM
μ	Parâmetro de massa de m_2
μ_s	Parâmetro de massa de da haste
μ_x	Parâmetro de massa de m_3
l_x	Distância entre a massa 2 (m_2) e a massa 3 (m_3)
l	Comprimento da haste
r_1	Distância entre a massa 1 (m_1) a um ponto qualquer do espaço P (x,y,z)
r_2	Distância entre a massa 2 (m_2) a um ponto qualquer do espaço P (x,y,z)
r_3	Distância entre a massa 3 (m_3) a um ponto qualquer do espaço P (x,y,z)
k	Constante de rotação do Sistema Tripolo-Segmento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	MISSÃO GARATÉA-L	23
2.1	ÓRBITAS AO REDOR DA LUA	26
3	MISSÃO GARATÉA-L - ANÁLISE DE ÓRBITAS	30
3.1	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	30
3.2	ÓRBITAS COM OS MELHORES TEMPO DE VIDA	34
3.3	DESVIO PERCENTUAL DA PARTÍCULA COM RELAÇÃO AOS LIMITES DO PERISELENE E APOSELENE	42
3.4	ANÁLISE DA VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS	48
3.5	ÓRBITAS	58
3.6	CONCLUSÕES	60
4	ÓRBITAS PERIÓDICAS	63
4.1	POTENCIAL DO TRÍPOLO-SEGMENTO	68
4.2	TIDES	70
4.3	CASO DIPOLO-SEGMENTO (DS)	72
4.4	EVOLUÇÃO DAS FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS SIMÉTRICAS - CASO $\mu_s = 0$	74
4.5	EVOLUÇÃO DAS FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS - CASO $\mu_s = 0$, MASSAS DAS EXTREMIDADES FIXAS E VARIAÇÃO DA MASSA CENTRAL	84
4.6	EVOLUÇÃO DAS FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS - $0,1 \leq M \leq 1,0 /$ $m_1 = m_2 = m_3 = 1,0$	91
4.7	CONCLUSÕES	98
5	CASO ASTEROIDE HOLIDAY	100
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	108
	REFERÊNCIAS	110
	APÊNDICE A – ROTINA 1	114

1 INTRODUÇÃO

Ao se olhar para o céu noturno, depara-se com o maior astro visível para um observador na Terra, a Lua. Além de despertar e inspirar artistas e poetas, sempre ocupou lugar de destaque na corrida espacial. Na década de 50, foi o principal foco das missões espaciais e a sua conquista representava a hegemonia sobre o conhecimento científico, bélico e espacial.

Desde o lançamento da Sputnik, em 1957, muito conhecimento foi produzido acerca do nosso satélite, iniciando uma era de exploração espacial que perdura até os dias de hoje, com estudos do Sistema Solar e do céu profundo.

Nessa corrida espacial, destaca-se a participação inicial soviética, com missões de sucesso, como a Luna 3, que fotografou o lado oculto da Lua, nunca antes visto pelo homem (SPUDIS, 2022). Um pouco mais adiante, nasce o programa norte-americano Apollo, que tem como interesse principal garantir missões tripuladas a Lua. Para isso, estabeleceu-se uma série de envios de sondas (Rangers) para coletar informações valiosas sobre o satélite, a fim de entender seu ambiente, superfície e processos. Através dessas sondas, muitas descobertas viriam e imagens surpreendentes foram produzidas, como exemplo, a Ranger 9, que sobrevoou a cratera Alphonsus.

Ainda de acordo com Spudis (2022) foram os soviéticos os primeiros a aterrissar na Lua com segurança, usando a espaçonave Luna 9, em 1966, descobrindo que a superfície lunar era pulverulenta e com pedras, mas suficiente forte para sustentar uma nave. No mesmo ano, foi a vez dos Estados Unidos pousar na Lua, com a espaçonave Surveyor 1. A partir desses pousos, outras missões de mapeamento surgiram, legitimando a segurança das missões Apollo. Estava assim montado o palco para um dos maiores feitos da humanidade, a chegada do homem a Lua.

Conforme Winter e Prado (2007), no final da década de 70, com o enfraquecimento da Guerra Fria, apenas os soviéticos e americanos conseguiram o feito de enviar missões tripuladas e não tripuladas a Lua. Esse feito foi apenas quebrado em 1990, com o envio da sonda Muses A, enviada pelos japoneses. A partir daí, a Lua passou novamente a ganhar atenção como objeto de estudos astronômicos e espaciais.

Hoje, segundo relatório da Garatéa-Bioc Lunar Mission, vários países estão investindo esforços para refazer o caminho que os EUA fizeram há 50 anos para conquistar a Lua, mas agora em busca de uma forma sustentável para implementar modelos de negócios lucrativos e multibilionários (GALANTE et al., 2019).

Recentes missões chinesas também reafirmam esse interesse. Conforme Wang e Liu (2016), depois do sucesso da missão Chang'e-3, a sonda Chang'e-4 tinha como principal programa a exploração do lado oculto da lua, além de colocar um satélite retransmissor em um dos pontos lagrangeanos lunar. Ainda como interesses, propunha pesquisas na área da mineralogia e geoquímica, para estudar a formação e evolução da crosta lunar. Essa sonda foi enviada em 2018, deixando claro o interesse em novas missões, e até projetos mais ousados, como uma estação lunar chinesa. Recentemente, em 2020, a sonda Chang'e-5 foi enviada para a Lua e retornou com amostras de solo para a Terra.

De acordo com Pickrell (2022), a Lua será um dos destinos mais populares do Sistema Solar.

Países como Índia, Japão, Rússia, Coreia do Sul, Emirados Árabes Unidos e Estados Unidos, planejam, juntamente com empresas privadas, chegar a Lua para explorações, pesquisas e para estruturar a ideia de um posto de lançamento para viagens a Marte.

Atualmente, um dos programas mais importantes de exploração lunar é a Missão Artemis (BRI-DENSTINE, 2020). Esse programa consiste em retornar humanos à Lua em 2024 de forma sustentável. O nome Artemis foi escolhido em homenagem à deusa grega da caça e da Lua, tendo como um dos objetivos que uma mulher pouse em solo lunar. Essa missão está focada em três objetivos específicos: exploração; presença lunar de forma sustentável; e o uso da Lua como suporte para futuras missões tripuladas a Marte e outros lugares.

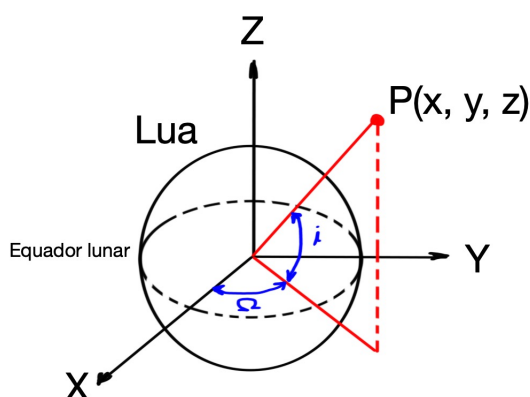
Diante desse novo despertar de estudos sobre a Lua e seus impactos na vida humana, nasce a missão Garatêa-L, de origem brasileira e que tentará colocar uma sonda em órbita da Lua. Assim, o presente trabalho se justifica pela relevância atual do tema, uma vez que existe um novo olhar sobre a exploração lunar.

Na segunda parte do trabalho, estudamos as órbitas periódicas simétricas ao redor de um corpo simétrico não esférico. A justificativa se deve pelo fato de que essas órbitas fornecem informações importantes sobre a dinâmica de sistemas físicos, com aplicações em dinâmica orbital, para contribuir com projetos de trajetórias de satélites, envolvendo eficiência no que tange ao consumo de combustível e tempo de permanência em órbita.

O objetivo geral deste trabalho é analisar as melhores órbitas disponíveis à missão e em seguida, discorrer sobre família de órbitas periódicas simétricas em corpos simétricos não esféricos.

Para a primeira parte de nosso estudo, utilizamos o centro lunar como ponto de origem do sistema de coordenadas e o plano equatorial lunar como plano de referência. Esse sistema de coordenadas é chamado de selenocêntricas, com o eixo Z apontando para o polo norte lunar, o eixo X apontando para a Terra e o eixo Y completa o sistema apontando para leste, ou seja, 90° no sentido anti-horário em relação ao eixo X (MELO, 2006). A Figura 1 mostra a situação descrita.

Figura 1 – Coordenadas Selenocêntricas



Fonte: Elaborado pelo autor.

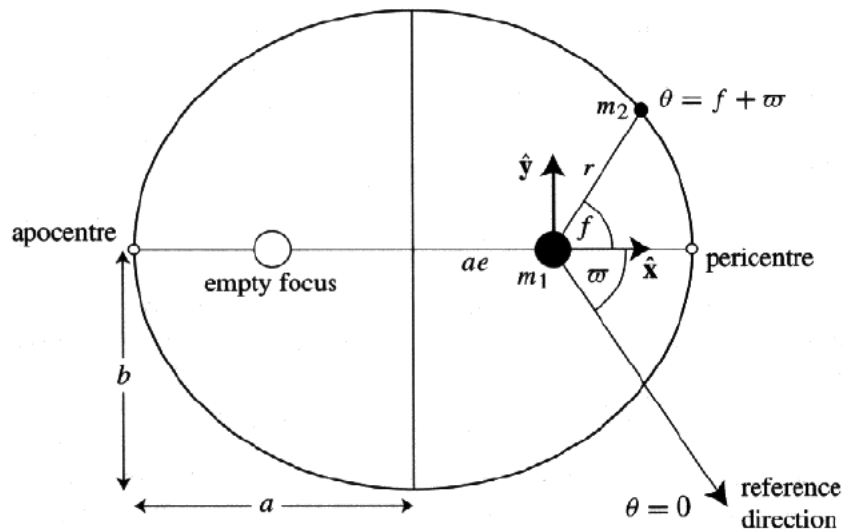
Para o mapeamento de qualquer ponto sobre a superfície lunar, usamos as coordenadas selenográficas, baseado em latitude e longitude que se assemelham as coordenadas geográficas terrestres, medidas

a partir do equador lunar e do meridiano da Lua, que passa pelo ponto de intersecção do equador lunar com a linha que liga o polo norte e sul (KOPAL; CARDER, 1974).

A latitude lunar também varia de -90° a $+90^\circ$ onde o valor de 0° é atribuído ao equador lunar. Isso se assemelha a latitude terrestre, pois latitude positiva indica hemisfério norte e consequentemente, latitude negativa indica hemisfério sul. A longitude lunar é medida em relação a linha zero, que é uma linha imaginária que passa pelo centro do disco lunar voltado para a Terra, variando de 0° a 360° . O valor da longitude aumenta no sentido anti-horário vista a partir do polo norte lunar.

A metodologia da primeira parte do trabalho consiste em explicar a missão Garatêa-L, fazer um aporte bibliográfico sobre os estudos de órbitas lunares e prever o tempo de permanência dessa partícula na região de estudo da missão em um intervalo de 365 dias, usando o integrador numérico Mercury Chambers, (CHAMBERS, 1999). Na sequência, analisamos a evolução dos elementos orbitais keplerianos, sendo que, através desses elementos, obtemos as coordenadas que posicionam completamente uma partícula em sua órbita (KUGA; CARRARA; RAO, 2012).

Figura 2 – Geometria dos elementos orbitais no plano



Fonte: Murray e Dermott (1999).

Para uma melhor compreensão dos elementos orbitais, temos que, para um movimento em um plano, são definidos três elementos:

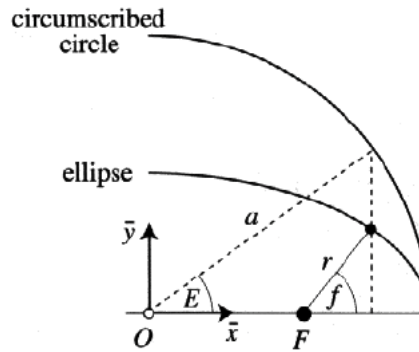
- o semieixo maior a ,
- a excentricidade e ,
- a anomalia média M ,

que definem não só a elipse, mas também localiza a partícula no plano da elipse. A Figura 2 mostra os elementos orbitais e (excentricidade), a (semieixo maior) e outros elementos que caracterizam o movimento elíptico no plano, como b (semieixo menor), f (anomalia verdadeira) e ω (longitude do

pericentro). O valor de M é calculado a partir da anomalia excêntrica E , conforme Figura 3. Assim, temos que:

$$M = E - e \sin E \quad (1)$$

Figura 3 – Relação entre Anomalia Verdadeira e Anomalia Excêntrica



Fonte: Murray e Dermott (1999).

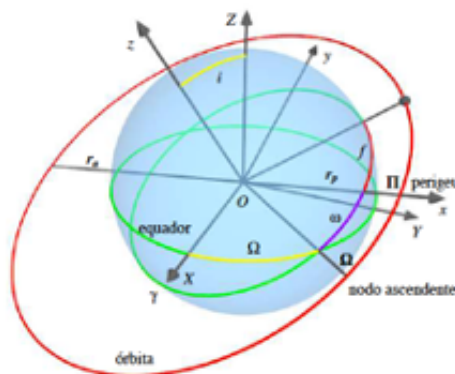
Quando há necessidade de movimentar a elipse no espaço, a partir de um referencial inercial, há a necessidade dos ângulos de Euler. Em (KUGA; CARRARA; RAO, 2012) os autores definem esses ângulos da seguinte forma:

- i : é inclinação da órbita em relação a uma órbita de referência, onde $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$,
- Ω : é a longitude do nodo ascendente, ângulo entre a origem do eixo OX e $O\Omega$, onde $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$, e
- ω : é o argumento do perigeu, ângulo entre Ox e $O\Pi$, onde $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$.

Neste sistema, o eixo OX aponta para o chamado ponto vernal γ .

A Figura 4 mostra os elementos orbitais i - inclinação, Ω - longitude do nodo ascendente e ω - argumento do perigeu, sendo usado como referência o plano equador terrestre.

Figura 4 – Geometria para definição dos elementos orbitais

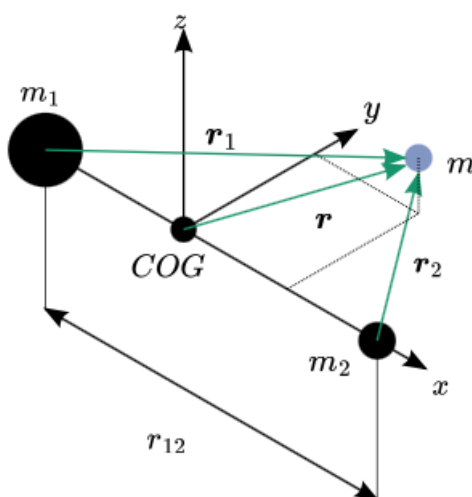


Fonte: Kuga, Carrara e Rao (2012).

No presente trabalho, foi usado o Problema Restrito de Três Corpos, em que a Lua é o corpo central e a Terra como corpo perturbador.

Nessa configuração, temos dois corpos com massas m_1 e m_2 que são chamados de primários e o que se busca é estudar o movimento do terceiro corpo, m , em que m_1 e $m_2 \gg m$. Cabe reforçar que a massa do terceiro corpo é muita pequena para afetar o movimento dos outros dois corpos (MURRAY; DERMOTT, 1999). A Figura 5 ilustra o sistema, onde COG representa a referência do sistema de coordenadas.

Figura 5 – Problema Circular Restrito de Três Corpos



Fonte: Weber (2023).

Na segunda parte do trabalho, usamos como metodologia o desenvolvimento do potencial gravitacional para o Tripolo-Segmento, com análise de casos específicos, como o Dipolo-Segmento e as evoluções de massas das partículas e da haste. Para a produção dos resultados, foi usado o integrador TIDES (ABAD et al., 2012) para integrar as equações de movimento e obter o mapa de famílias de órbitas periódicas simétricas e as órbitas para cada família.

Diante do exposto, o trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 2 apresentamos de forma detalhada a Missão Garatéa-L e a sua relevância para a tecnologia espacial brasileira, dentro do contexto mundial de exploração lunar. Ainda neste capítulo, é feito um levantamento bibliográfico sobre órbitas ao redor da Lua.

No Capítulo 3, foi analisado o tempo de permanência de cada partícula na posição dos experimentos, especialmente com referência ao polo sul lunar, em que há interesse por fotografias de regiões específicas e posições mais afastadas, com interesse sobre a influência do clima espacial sobre colônias bacterianas. Para esse estudo, levamos em conta os seguintes coeficientes gravitacionais: J_2 , J_3 e C_{22} . O coeficiente J_2 atua na precessão do plano da órbita do satélite, enquanto que o coeficiente J_3 atua na excentricidade da órbita, podendo afetar a posição do satélite em relação a Lua ou sua altitude em relação a superfície lunar. Já o coeficiente C_{22} atua de forma a aproximar ou afastar qualquer satélite ao longo do tempo.

No capítulo 4 discutimos as órbitas periódicas e a motivação para estudá-las. Como aplicação e desenvolvimento, estudamos um corpo formado por três massas e uma haste, sendo que esta interliga

as três massas. Após o desenvolvimento do potencial gravitacional, buscamos comparar com resultados previstos em corpos similares e situações particulares, como, por exemplo, o caso do dipolo segmento, e apresentamos os resultados para o modelo estudado.

De acordo com Ramírez (1992), uma solução periódica $\phi(t)$ é uma solução que satisfaça $\phi(t) = \phi(t + \omega)$ para alguma constante positiva ω . Assim, o movimento de um sistema dinâmico é periódico quando as mesmas configurações são reproduzidas em intervalos de tempos regulares.

Logo, um sistema é periódico quando:

$$[x(t_0), \dot{x}(t_0)] = [x(T), \dot{x}(T)] \quad (2)$$

em que x é o módulo da posição e $\dot{x}$ é o módulo da velocidade, admitindo um tempo inicial t_0 e um tempo T como período, onde $T > 0$.

No caso desse sistema periódico, o valor inicial de x e $\dot{x}$ é o mesmo na época de T . Assim,

$$x(t) = x(t + T), \dot{x}(t) = \dot{x}(t + T) \quad (3)$$

Para o caso de $\dot{x}(t_0) = \dot{x}(t_0 + T) = 0$, temos como solução uma órbita periódica simétrica.

Inicialmente, encontramos e analisamos a evolução dos mapas de órbitas periódicas, adotando a massa do segmento (μ_s) igual a zero e variando as massas pontuais. Para isso, posicionamos o segundo corpo no ponto médio da distância entre os dois corpos da extremidade e variamos a sua massa desde 0 a 100% da massa do sistema (m), sendo que $m = m_1 + m_2 + m_3$ (massa do corpo 1, corpo 2 e corpo 3, respectivamente).

Já, em um segundo momento, analisamos a evolução das curvas de velocidade zero para as evoluções de massa do segundo corpo. Conforme Murray e Dermott (1999), os valores da posição e velocidade de uma partícula determina uma constante associada ao movimento da partícula, denominada Constante de Jacobi. Não há meio de usá-la para fornecer uma solução exata para o movimento orbital, mas podemos usá-la para determinar regiões no qual a partícula é excluída, que considera a sua velocidade zero, conforme equação (4).

$$n^2 (x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) = C_J \quad (4)$$

onde n é o movimento médio da partícula, μ_1 e μ_2 são parâmetros de massa para o corpo 1 e o corpo 2 respectivamente, C_J é a constante de Jacobi e x e y as posições da partícula, em um Problema Circular Restrito de Três Corpos (PCRTC).

A equação (4) define um conjunto de superfícies para valores particulares de C_J . Essas superfícies são conhecidas como Curvas de Velocidade Zero.

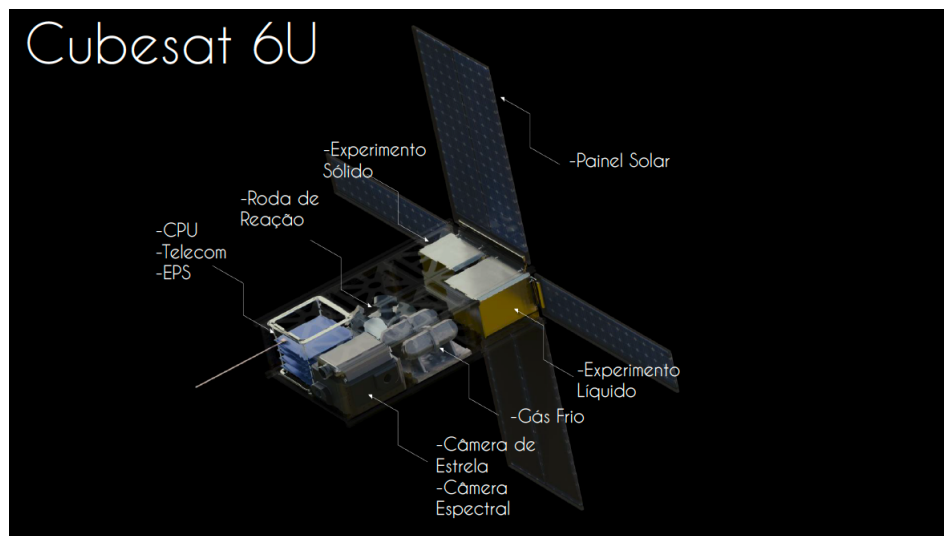
No capítulo 5, usamos o modelo do Tripolo-Segmento para a obtenção e análise de órbitas periódicas simétricas em um caso concreto, aplicado ao asteroide Holiday. Trata-se de uma aproximação, mostrando que é possível simplificar alguns casos.

E finalmente, no capítulo 6, apresentamos as considerações finais e conclusões sobre a Missão Garatêa-L e Órbitas Periódicas Simétricas evidenciando as possibilidades futuras de estudo.

2 MISSÃO GARATÉA-L

A missão Garatéa (do Tupi-Guarani, “Busca Vidas”) tem como objetivo promover a ciência e impulsionar o Brasil no rol de países com tecnologia espacial. O objetivo de Garatéa é destacar a importância da ciência espacial no Brasil, dividido em três eixos: excelência em ciência, fortalecimento da indústria espacial doméstica e educação através da inspiração espacial. Dentre os mais diversos projetos, tem-se a Missão Garatéa-L, que é a primeira missão genuinamente nacional a colocar uma sonda, especificamente um Cubesat 6U, de 7,2 kg, em órbita lunar, conforme Figura 6.

Figura 6 – Cubesat 6U - Detalhe



Fonte: Fonseca (2023).

Formada por um consórcio brasileiro de empresas privadas, institutos e universidades, é uma iniciativa para avançar a ciência brasileira através da execução de projetos únicos (Figura 7).

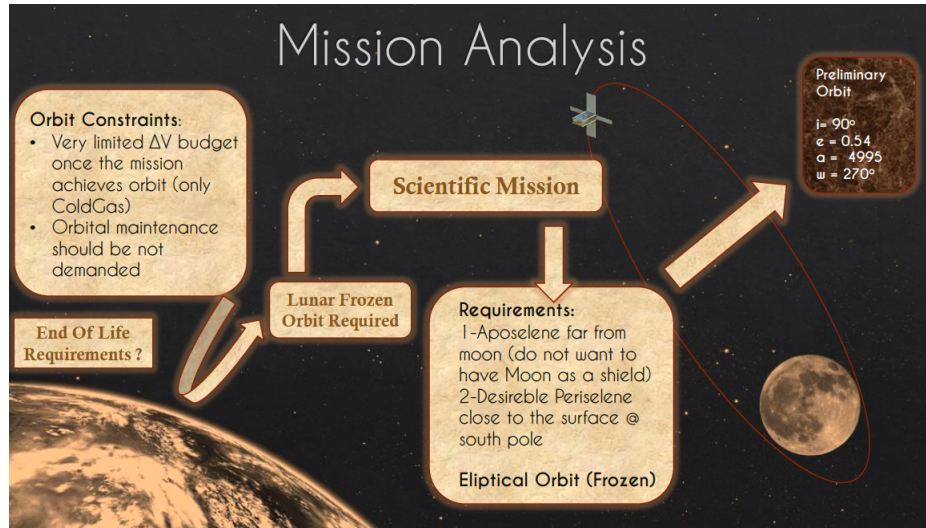
Figura 7 – Consórcio Garatéa



Fonte: Fonseca (2023).

A ideia inicial da missão Garatêa-L era propor uma sonda em órbita congelada com inclinação de 52° , excentricidade de 0,54, semieixo maior de 4995 km, argumento do pericentro de 270° e o perisilene no polo sul lunar (Figura 8) .

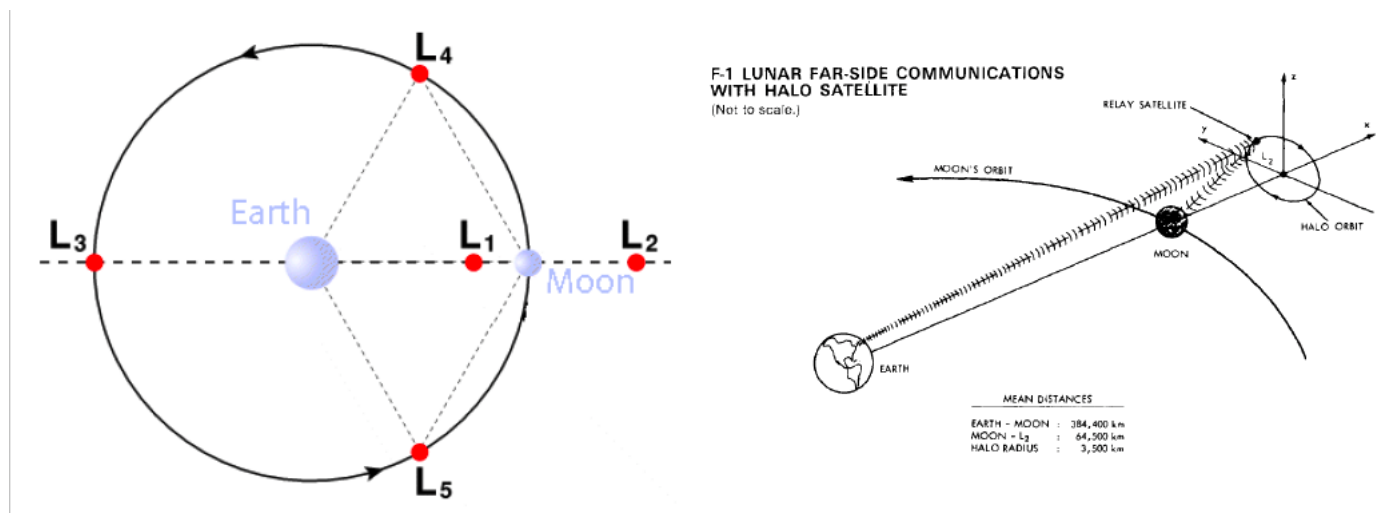
Figura 8 – Parâmetros Iniciais da Missão



Fonte: Fonseca (2023).

Esse satélite deveria estar posicionado no ponto Lagrangeano L_2 do sistema Terra-Lua, com 3 fases de injeção desde o seu lançamento (Figura 9). Para a permanência nessa órbita, esperava-se uma correção de 0,122 km/s/ano, usando um propulsor tipo “Electro Spray Propulsion” (informação verbal).¹²

Figura 9 – Trajetória Inicial



Fonte: Fonseca (2023).

Basicamente, o sistema “*Electro Spray Propulsion*” é uma técnica de propulsão eletrostática que utiliza gotículas líquidas carregadas eletricamente para gerar impulso. Essas gotículas são aceleradas

¹ Informação fornecida por Lucas Fonseca, presidente da Airvants e diretor da Missão Garatêa-L, em 08/04/2020.

² Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8244273574000860> e LinkedIn: [linkedin.com/in/lucas-fonseca-10250414](https://www.linkedin.com/in/lucas-fonseca-10250414).

através de um campo elétrico e expelidas a altas velocidades, produzindo uma força de propulsão que impulsiona o CubeSat (LEMMER, 2017). A correção se faz necessária, uma vez que a perturbação em um satélite artificial, devido a não uniformidade da distribuição de massa da Lua, resulta em intensa atuação do sistema de controle para mitigar desvios na trajetória (GONÇALVES; ROCCO; MORAES, 2013).

Para que a sonda suporte as condições do espaço, deverá ser revestida com polímeros e seu projeto de telecomunicações envolve uma transmissão de dados de 4000 b/s durante o dia e 1100 b/s à noite. Toda a transferência de dados será feita através de uma placa utilizando FPCA (*Flexible Printed Circuit Assembly*), que consiste em um tipo de circuito flexível, aumentando consideravelmente a capacidade de processamento ³.

A missão tem como pesquisa central o tema astrobiologia, em que procurará contribuir com os estudos sobre o surgimento da vida na Terra e com a possibilidade de início de vida em outro lugar. Além desta pesquisa, a missão ainda produzirá dados que possibilitem melhorar os estudos sobre a dificuldade de sobrevivência no espaço, contribuindo com futuras missões tripuladas.

Como objeto de pesquisa, a missão pretende deixar uma cultura de bactérias (*Extremophile*) ser danificada pela radiação na região cis-lunar e depois recuperar seu crescimento simulando as condições da Terra. Com isso, a missão procurará compreender o impacto da radiação nas células humanas durante missões de longo prazo, como também, compreender melhor a região cis-lunar. Além disso, especificamente na área da medicina espacial, há como estudo o cultivo de um tecido de pele humana em ambientes extremos.

Como interesse secundário, a missão deverá estudar a bacia do polo sul lunar (Aitken Basin), particularmente por seu solo ser rico em água e minerais, como apontam Robinson e Taylor (2014) e Pieters et al. (1997). Assim, como um dos interesses dessa pesquisa, foi estudado e analisado as órbitas que sobrevoam a bacia lunar, para promover a obtenção de uma grande quantidade de imagens que ajudarão a entender melhor a formação e a estrutura dessa região.

Para tornar essa viagem espacial possível, houve mobilização e combinação de diferentes iniciativas. A missão conta com 2/3 de seus investimentos de iniciativa privada e 1/3 com recursos governamentais, com estimativa de gasto total muito abaixo de missões espaciais tradicionais. Estima-se esse gasto em aproximadamente 5 milhões de dólares, distribuídos da seguinte forma:

- Agência Financiadora de Pesquisa, FAPESP e Uniespaço: 1 milhão de dólares.
- Agência Financiadora de Pesquisa e capital privado: 4 milhões de dólares.

O lançamento da missão será feito por empresa terceirizada, tendo como opções a SSTL (*Surrey Satellite Technology Ltd*), empresa inglesa que atua especificamente na exploração espacial, e a Astrobotic, empresa americana especializada em fabricar cargas úteis às missões lunares. Vale ressaltar, que segundo Lucas de Mendonça Fonseca ⁴ Assim, o estudo da órbita de transferência é inviabilizado. Entende-se como órbita de transferência uma trajetória orbital utilizada para deslocar um satélite ou

³ Reunião de Apresentação da Missão Garatêa - INPE - São José dos Campos, junho/2013

⁴ Lucas Fonseca **Conversa Privada em 07/07/2020**.

foguete de uma órbita inicial para uma órbita desejada. No entanto, a órbita ao redor da Lua é passível de estudo, tendo como ponto de partida apenas o valor do aposelene, periselene e excentricidade.

Em 2020, os parâmetros da missão foram modificados (Figura 10), pois a SSTL estabeleceu como órbita inicial o periselene de 300 km (podendo ter limite mínimo de 200 km) e aposelene de 3000 km, com 90 graus de inclinação, deixando a órbita livre a ser estudada, desde que cumpra o pré-requisito de tempo de vida útil da missão em 6 meses (para que haja tempo hábil de repetição dos experimentos a cada 28 dias). Também já foi descartado a hipótese da sonda permanecer em L_2 , pois conforme Lucas Fonseca, não há recursos disponíveis para uma missão comercial, uma vez que nessa posição de equilíbrio geraria custos adicionais devido ao maior tempo de vida útil.

Cabe ressaltar que na Figura 10, a data de lançamento deve ser ignorada, uma vez que a missão, na data de hoje, maio de 2023, ainda está em fase de aprovação pela Agência Espacial Brasileira (AEB). Em reunião do ProSAME (Procedimento para Seleção e Adoção de Missões Espaciais), em 20/01/2023, a AEB elevou a missão para o segundo estágio de aprovação, a chamada Carteira de Qualificação (AEB, 2023).

A mudança de 52° para 90° se justifica pela "carona" encontrada no lançamento do foguete. A missão que levará os experimentos de Garatéa-L será em órbita polar. Como a inclinação não é tão importante para a missão, houve o aceite da mudança⁵. A preocupação da missão é atender os objetivos descritos anteriormente com o menor custo possível. Caso se estabeleça uma órbita específica, haveria custos, o que não está dentro das possibilidades financeiras da missão.

Figura 10 – Parâmetros Atuais da Missão



Fonte: Fonseca (2023).

Diante dos dados iniciais apresentados, analisamos as órbitas que atendem a necessidade da missão, obedecendo os parâmetros de altitude, tanto no periselene, quanto no aposelene.

2.1 ÓRBITAS AO REDOR DA LUA

O estudo de órbitas ao redor da Lua é um assunto antigo e bem desenvolvido por vários pesquisadores e recentemente, devido ao interesse em se colocar objetos na vizinhança da Lua, o estudo dessas

⁵ Lucas Fonseca **Conversa Privada em 16/01/2023**.

órbitas passou a ganhar lugar de destaque. A primeira análise deste trabalho consiste em uma revisão bibliográfica acerca das principais perturbações de órbitas e de satélites em regiões lunares.

O campo gravitacional lunar começou a ser estudado em 1966 com a missão russa "Luna 10", (IVANKOV, 2022) e em seguida, agosto de 1967, com a missão norte americana "U.S. Lunar Orbiter", (AERONAUTICS; ADMINISTRATION, 1967). Com a chegada da Missão "Lunar Prospector", (SAUNDERS et al., 2022), no ano de 1998 a 1999, com uma órbita circular polar baixa, conseguiu-se obter um mapeamento da gravidade lunar em alta resolução para o lado voltado para a Terra (KONOPLIV et al., 2001). Esta missão permaneceu em órbita polar por aproximadamente 1 ano, com inclinação de 90° , calibrando o campo gravitacional lunar para futuras missões.

Ainda, de acordo com Meyer, Buglia e Desai (1994), a necessidade de analisar os tempos de vida orbital útil para um grande número de parâmetros orbitais motivou a formulação de um modelo de campo gravitacional mais simplificado. Em seus estudos, constatou-se que os coeficientes J_2 , J_3 , C_{22} e C_{31} para a Lua, são os que determinam os maiores efeitos nos elementos orbitais. Ainda observou que os coeficientes de maior ordem, como J_5 só altera a vida orbital para longos tempos de permanência lunar.

Cabe ressaltar que qualquer força de perturbação pode gerar variações relevantes em qualquer missão espacial, seja com relação ao tempo, consumo de combustível ou com relação ao posicionamento. As principais fontes de perturbação que atuam em satélites artificiais lunares são devidos ao potencial gravitacional lunar, atração gravitacional da Terra e do Sol, o albedo lunar e a pressão de radiação (GONÇALVES; ROCCO; MORAES, 2015). Acrescenta os autores, que a maior contribuição é justamente o potencial gravitacional lunar, sendo, em porcentagem, maior que a soma de todas as outras perturbações.

Como a maior contribuição é justamente o potencial gravitacional lunar, destaca o termo de achatamento J_2 como dominante entre os coeficientes harmônicos (LIU; BAOYIN; MA, 2011). Isso acontece para a maioria dos grandes corpos celestes, incluindo Terra, Marte e Lua. Ainda, cabe ressaltar que o termo J_2 é extremamente importante quando se trata da análise de curto período (WINTER; MADEIRA; SFAIR, 2020).

Conforme GonÇalves et al. (2016), o primeiro termo de grau 2 (J_2) domina o movimento, mas a contribuição de outros termos também são relevantes. Destaca que a variação da inclinação pode alterar significativamente a perturbação sofrida pelo satélite e não pode deixar de ser levada em consideração em um planejamento de uma missão.

Com relação as missões espaciais, Ramanan e Adimurth (2005) estudaram o impacto da variação da inclinação na altitude do periselene, concluindo que a escolha do ângulo da longitude do nodo ascendente também é importante para melhorar o tempo de vida orbital e reduzir custos de uma missão lunar. Outro dado relevante é destacado por Costa, Moraes e Prado (2013), que, em seus estudos, relacionam a inclinação da órbita lunar com o ângulo da longitude do nodo ascendente e que estas são altamente influenciadas pelo harmônico esférico C_{22} .

Com relação a análise dos elementos orbitais, a vida útil da órbita de um satélite lunar depende significativamente das condições iniciais da órbita, sendo o ângulo da longitude do nodo ascendente um dos parâmetros orbitais necessário nesse tempo de vida útil (GUPTA; SHARMA, 2011). Para um

dado valor do ângulo da longitude do nodo ascendente, o tempo de vida útil aumenta com a altitude até um valor de transição, que varia com a inclinação. A partir daí, há um efeito significativo da gravidade da Terra nessas altitudes de transição. Para órbitas circulares lunares de alta altitude, o tempo de vida útil diminui com a altitude. Assim, incluir a perturbação terrestre é de extrema importância nas simulações.

Saedeleer e Henrard (2016) citam que as órbitas lunares apresentam características peculiares, uma vez que a Lua é um corpo que gira lentamente, não possui atmosfera e é muito menos achatada que a Terra. Com isso, o coeficiente lunar C_{22} se aproxima de J_2 (em uma ordem de grandeza) e deve ser considerado. Esse coeficiente é tão importante que, juntamente com o valor da longitude do nodo ascendente, afeta a inclinação crítica. Entende-se como inclinação crítica, aquelas órbitas que têm a propriedade de manter o pericentro "congelado". Essas órbitas são importantes devido a eficácia de exercer manobras com menor custo possível e por manter algum satélite por mais tempo orbitando (CASTILLA, 2020).

Essa combinação (J_2 e C_{22}) leva a variação da inclinação média das órbitas e grandes oscilações periódicas. Para órbitas com valores de semieixo maior grandes, o efeito perturbador dominante é o planeta Terra, mas, para órbitas próximas a Lua, o harmônico gravitacional de terceira ordem (J_3) desempenha papel decisivo. A região limite para essas perturbações, é de 3000 km, ou seja, até 3000 km, os termos de gravidade lunar de terceira ordem são dominantes e a partir de 3000 km, o efeito da Terra é importante (TZIRTI; TSIGANIS; VARVOGLIS, 2010).

Tendo em vista a discussão anterior, o presente trabalho inclui o coeficiente J_3 , o que assegura a análise das órbitas até 3000 km e também inclui a perturbação da Terra, o que permite assegurar a análise da melhor órbita no limite de 3000 km ou mais. Destaco ainda, a contribuição de Pires e Winter (2020), em análise de órbitas periódicas retrógradas distantes ao redor da Lua, há a inadequação de se considerar um sistema com Terra-partícula ou Lua-partícula de forma isolada. Apesar do sistema Garatéa-L possuir uma proximidade muito grande com relação a Lua, incluir a Terra como corpo perturbador assegura uma análise mais confiável.

A primeira análise de órbitas da missão foi feita com o uso do integrador numérico Büllirsch-Stör do pacote Mercury Chambers (CHAMBERS, 1999), usando os coeficientes gravitacionais da Lua J_2 , J_3 e C_{22} . Esse pacote foi desenvolvido com uma sub-rotina com acelerações devido aos termos J_2 , J_4 e J_6 . No entanto, optou-se, neste trabalho, pelas razões expostas anteriormente, por usar o pacote modificado segundo o desenvolvimento de Xavier (2018), em que foi incluído os termos J_3 e C_{22} , em substituição aos termos J_4 e J_6 . Sabe-se que existem trabalhos com órbitas lunares com outros termos zonais, como publicado por Carvalho, Moraes e Prado (2011), porém, em órbita baixa, os coeficientes gravitacionais de ordem mais baixa são os mais importantes, como J_2 e J_3 . Acrescenta ainda o autor, que as órbitas congeladas são fortemente afetadas pelos termos do potencial contendo o coeficiente gravitacional da Lua C_{22} , contendo os termos que incluem o argumento do pericentro e o ângulo da longitude do nodo ascendente.

Quando tratamos uma teoria do ponto de vista analítico, é necessário que haja o truncamento em alguma ordem que torne o estudo satisfatório. No caso específico da missão Garatéa-L, a maior distância do satélite a superfície é de 3000 km, distância essa que tem forte influência do termo

dominante J_3 , sendo que este deve ser incluído na expansão do potencial gravitacional e o truncamento deve ser após esse termo.

Carvalho, Moraes e Prado (2010) destacam que o coeficiente J_2 afeta o argumento do pericentro e ângulo da longitude do nodo ascendente, o termo J_3 afeta a excentricidade e o termo C_{22} a inclinação, conforme indica a tabela 1. Os termos e , I , ω e Ω , indicam excentricidade, inclinação, argumento do pericentro e ascensão reta do nodo ascendente, respectivamente. Esses efeitos verificam os termos de primeira ordem. Quando se leva em conta os termos de segunda ordem, especificamente em inclinações menores, estes são maiores que os termos de primeira ordem, o que resulta em uma variação da excentricidade, pelos termos J_2 e C_{22} .

Tabela 1 – Efeitos dos coeficientes nos elementos orbitais (primeira ordem)

Coeficientes	e	I	ω	Ω
J_2			x	x
J_3	x			
J_5	x			
C_{22}		x		
C_{31}	x		x	

Fonte: Carvalho, Moraes e Prado (2010).

Ainda cabe destacar que a trajetória circunlunar necessária para um bom desempenho de mapeamento deve ser uma órbita polar baixa, contendo um tempo de vida de aproximadamente 1 ano (KNEZEVIC; MILANI, 1998). Esse é o tempo estimado para a missão Garatéa-L. Ainda, segundo o autor, as órbitas baixas ao redor da Lua são instáveis devido aos componentes não esfericamente simétricos da gravidade lunar, o que resulta em uma alta variação de excentricidade em um curto intervalo de tempo (meses). Knezevic e Milani (1998) ainda ressaltam que as perturbações geradas pela Terra, em órbitas baixas, não alteram o comportamento qualitativo da solução e que as perturbações solares são mais insignificantes ainda.

Em um trabalho sobre estabilidade e evolução da excentricidade de um satélite em órbita lunar, usando um problema de 3 corpos (Lua-Terra-Satélite) e outro de 4 corpos (Lua-Terra-Satélite-Sol), com excentricidades baixas (valor inicial de 0,0001) e numa faixa de altitude de 100 km a 5000 km, Winter et al. (2009) encontraram resultados que não foram significativamente diferentes nos dois modelos. Assim, no presente trabalho, optou-se por não incluir o Sol como fonte perturbadora.

Acrescentamos ainda que existem outras forças perturbadoras em uma análise de órbita lunar, como pressão de radiação e o albedo lunar. Porém todas as perturbações somadas são pequenas diante do potencial gravitacional da Lua (GONÇALVES; ROCCO; MORAES, 2015). Optamos por não incluir essas perturbações, uma vez que existe a possibilidade de correções orbitais através de propulsores do CubeSat.

3 MISSÃO GARATÉA-L - ANÁLISE DE ÓRBITAS

Neste capítulo, abordaremos as simulações numéricas e os resultados obtidos para condições iniciais de semieixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (i), argumento do periselene (ω) e ângulo da longitude do nodo ascendente (Ω), usando como corpo central a Lua e seus devidos coeficientes gravitacionais, conforme descrito na tabela 2.

Tabela 2 – Valores dos coeficientes gravitacionais

J_2	$2,032337 \times 10^{-4}$
J_3	$8,47590 \times 10^{-6}$
C_{22}	$2,226 \times 10^{-5}$

Fonte: Jun-Young et al. (2005).

3.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

A partir dessas condições iniciais, iniciamos as simulações numéricas adotando os seguintes parâmetros para a Lua (3):

Tabela 3 – Parâmetros Lunares

Raio Equatorial	1737,4 km
Massa	$7,3467 \cdot 10^{22}$ kg

Fonte: Elaborado pelo autor, com dados extraídos de Technology (2020).

A massa da partícula é desprezível.

Foi estabelecido como órbita de referência da missão aquela que possui a menor distância da sonda no polo sul lunar de 300 km de altitude e a maior distância 3000 km de altitude.¹ Assim, os valores do raio do periselene (R_p) e do aposelene (R_a) são de 2037,4 km e 4737,4 km, respectivamente, calculados com a soma das distâncias entre a superfície e a distância mínima e máxima da sonda com o raio lunar.

A partir desses valores, foi calculado o semieixo maior da órbita (a) de 3387,4 km e excentricidade (e) de 0,3985, conforme equação (1) e (2), (MURRAY; DERMOTT, 1999).

$$R_p = a(1 - e) \quad (1)$$

$$R_a = a(1 + e) \quad (2)$$

Adotou-se arbitrariamente uma região de estudo ao redor da órbita de referência, variando o raio do periselene (R_p) em ± 100 km e o raio do aposelene (R_a) em ± 500 km. Essa análise permite verificar órbitas que estejam próximas a região de interesse da missão.

¹ Lucas Fonseca **Conversa Privada em 10/06/2019**

A partir desses dados, estabeleceu-se limites para o valor do raio do periselene e do aposelene, segundo a tabela 4:

Tabela 4 – Valores limites do raio do periselene e aposelene (km)

R_p mínimo	1937,4
R_p máximo	2137,4
R_a mínimo	4237,4
R_a máximo	5237,4

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com esses dados, foram calculados os valores máximos e mínimos do semieixo maior e excentricidade, usando novamente a equação (1) e (2).

Os valores calculados são apresentados na tabela 5.

Tabela 5 – Valores de semieixo maior e excentricidade

Valores	semieixo maior (a) (km)	excentricidade (e)
Máximo	3.462,4	0,417631
Mínimo	3.312,4	0,379227

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa região foi dividida em 400 pontos de estudo, perfazendo uma grade de semieixo maior e excentricidade em 20 pontos por 20 pontos, sendo que o intervalo do semieixo maior foi de 7,5 Km e da excentricidade de $1,44 \times 10^{-4}$. Adotamos o tempo de integração de 365 dias, uma vez que a estimativa para que a sonda fique em órbita lunar seja de 6 meses, consideramos o tempo de um ano como sendo satisfatório para o tempo de vida útil da missão.

Foi considerado para as condições iniciais da simulação o argumento do pericentro em 180° e para efeitos comparativos, 270° . Esses valores se justificam pelo fato de que a partícula deve estar na região do polo lunar, região de interesse estabelecida pela missão, conforme descrito anteriormente. O plano de referência é o plano equatorial lunar.

O semieixo maior foi parametrizado, usando como referência o valor de 1,0 para 4737,4 km (raio do aposelene).

Assim, as condições iniciais, para 400 partículas, são:

1. semieixo maior (parametrizado);
2. Excentricidade;
3. Inclinação (graus);
4. Argumento do pericentro (graus);
5. Ângulo da longitude do nodo ascendente (graus);

Foram analisados 7 casos de inclinações (desde 60° a 90°), variando de 5° em 5° , e para cada inclinação, obteve-se uma variação do ângulo da longitude do nodo ascendente em 0° , 90° , 180° e 270° .

O intervalo de saída dos dados foi de 0,2 dia (4,8 horas), tempo aproximado do período orbital da partícula na órbita de referência, aproximadamente 4,914 horas, conforme equação (3), (MURRAY; DERMOTT, 1999). Usou-se a equação para o período do problema de dois corpos, desprezando a massa da partícula e a perturbação terrestre e admitindo uma órbita baixa:

$$T = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad (3)$$

onde, a é o semieixo maior da órbita de referência (3000 km) e $\mu = GM$ (G - constante gravitacional universal e M - Massa da Lua).

Foi adotado, também como condição inicial, que as partículas poderiam ser ejetadas dentro do período de integração, com parâmetro de 20000 U, sendo que 1 U = 4737,4 km. Caso houvesse colisão, o tempo de permanência dentro da região é interrompido e descrito no relatório de simulação do programa Mercury (CHAMBERS, 1999).

Foi considerado apenas o tempo de permanência da partícula dentro do intervalo descrito, conforme tabela 4. Os casos em que a partícula saiu do intervalo e retornou foram desconsiderados, uma vez que mostra instabilidade da órbita, o que não é objetivo deste trabalho.

A partir da simulação realizada, o arquivo gerado possui dez variáveis, na sequência exposta abaixo.

1. Tempo de integração (horas);
2. semieixo maior (parametrizado);
3. Excentricidade;
4. Inclinação (graus);
5. Argumento do pericentro (graus);
6. Ângulo do nodo ascendente (graus);
7. Anomalia média (graus)
8. Massa da partícula - desprezível.
9. Raio do aposelene (parametrizado);
10. Raio do periselene (parametrizado).

Nas simulações numéricas foi adotado um referencial girante descritas pelas equações de movimento de acordo com Paskowitz e Scheeres (2006):

$$\ddot{x} + 2n\dot{y} - n^2x = -\frac{GM_L R_L^2 x}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\frac{GM_L R_L^2 y}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (5)$$

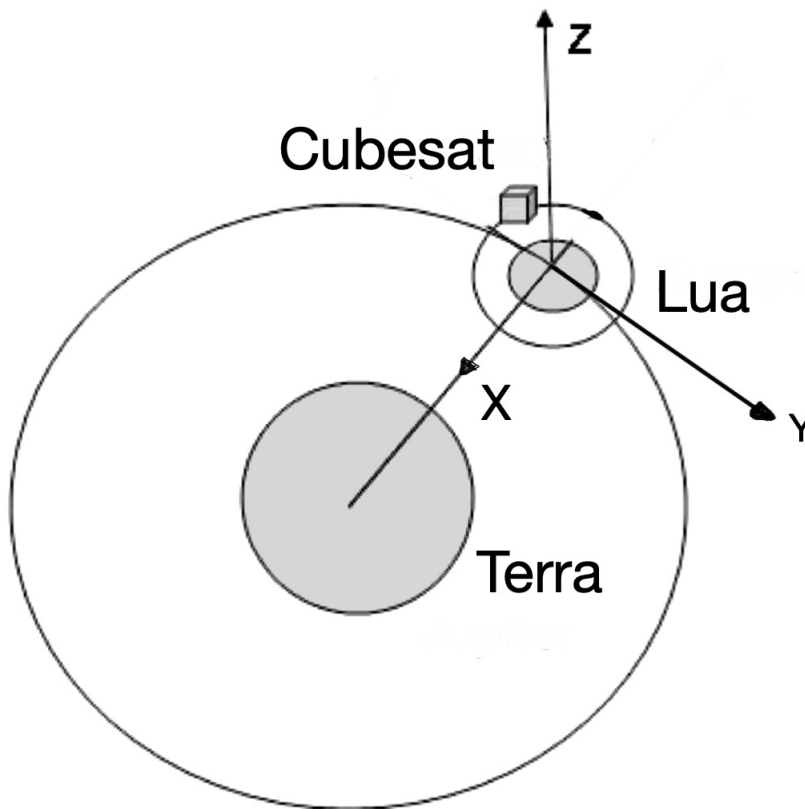
$$\ddot{z} = -\frac{GM_L R_L^2 z}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial z} \quad (6)$$

onde n é a velocidade de rotação da Lua, M_L é a massa da Lua, R_L é o raio equatorial lunar, r a distância entre o corpo central (Lua) e a partícula e V o potencial devido a não esfericidade lunar, descrito por:

$$V(x, y, z) = \frac{GM_L}{r} + \frac{GM_L}{r} \left(\frac{R_L}{r} \right)^2 \left[J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2r^2} \right) \right] + \frac{GM_L}{r} \left(\frac{R_L}{r} \right)^2 \left[3C_{22} \frac{x^2 - y^2}{r^2} \right] + \frac{GM_L}{r} \left(\frac{R_L}{r} \right)^3 \left[J_3 \frac{z}{2r} \left(3 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \right] \quad (7)$$

A geometria do sistema é representado na Figura 11.

Figura 11 – Geometria do Sistema / Referencial Girante



Fonte: Elaborado pelo autor.

Foi incluído como segundo corpo perturbador o planeta Terra. Isso foi possível introduzindo os dados do planeta na sub-rotina MFO_USER.FOR, que nos permite usar uma força perturbadora arbitrária. Todas as coordenadas descritas usaram como referência o corpo central, ou seja, a Lua.

Foram usados os seguintes dados, extraídos do site da Horizons (TECHNOLOGY, 2020)²:

No total, foram geradas 28 grades, ou seja, para cada inclinação i , num total de 7 (desde 60° a 90°) temos 4 variações do ângulo da longitude do nodo ascendente Ω (0°, 90°, 180° e 270°), estabelecendo no eixo horizontal o semieixo maior em km e no eixo vertical a excentricidade. Nas grades, foi

² Mercury **Valor de referência:** U (parametrizada) = 4.737,4 km

Tabela 6 – Valores de referências para a Terra

Parâmetro	Valor
Movimento médio	0,9856474°/dia
semieixo maior	92,91532716 U
Excentricidade	0,0554
Inclinação da órbita	5,145°
Argumento do pericentro	102,937°
Longitude do nodo ascendente	180°
Anomalia média	355,53°
Massa	81,28 massas lunares

Fonte: Elaborado pelo autor.

estabelecido uma paleta que descreve o tempo da partícula na região limitada em dias, usando como referência uma escala de cores, o que nos permite, no próximo tópico, discutir o tempo de vida útil dessas partículas.

3.2 ÓRBITAS COM OS MELHORES TEMPO DE VIDA

Nesta análise, procuramos aquelas partículas que permanecem na região por um período de tempo mais longo. Aquelas partículas que saíram da região especificada de R_a (± 500 km) e R_p (± 100 km) e voltaram para a região foram desconsideradas.

A partir dos dados de saída, foi desenvolvida uma rotina para contabilizar o tempo que as partículas permanecem no intervalo de R_a (± 500 km) e R_p (± 100 km). O método utilizado para verificar o tempo de permanência na região de estudo consiste em analisar as duas últimas colunas do arquivo de saída, que são R_a e R_p , respectivamente, associado a primeira coluna, a evolução do tempo a partir da condição inicial. Os valores extremos de R_a e R_p estão descritos na Tabela 4. Quando os valores de R_a e R_p da partícula saíam desses intervalos, seja para o periselene ou aposelene, parava-se a verificação desses valores, gerando um novo arquivo, com o nome da partícula, sua excentricidade, seu semieixo maior e o tempo que ela permaneceu no intervalo. Essa verificação foi feita para 400 partículas, gerando depois um único arquivo com todas as partículas e seus dados de excentricidade, semieixo maior e tempo de permanência.

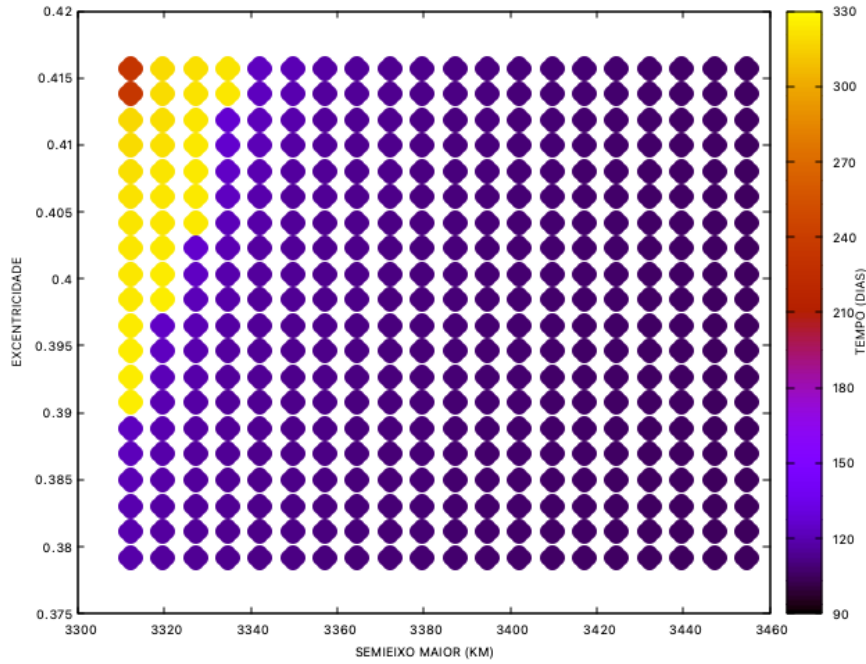
Dos 28 casos estudados, apenas 4 apresentaram condições de tempo de permanência da partícula satisfatório na região de estudo, em torno de 180 dias, o que representa 14,5% de todas as partículas possíveis.

Todo esse percentual se concentra em inclinações iniciais (i) de 60°, com longitude do nodo ascendente (Ω) de 0°, 90° e 270° e uma condição inicial de $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, sendo que nesta última condição, temos alguns casos de partículas que permaneceram por mais de 200 dias na região. Para todos os outros casos, as partículas ficaram menos de 70 dias na região de estudo.

Convenientemente, fizemos as simulações *a posteriori*, das inclinações relativas ao projeto inicial da missão Garatêa-L, com 50°, 52° e 55° e algumas outras inclinações, como 76°. As escolhas foram arbitrárias e podem sugerir pesquisa futura em se procurar órbitas congeladas específicas com algumas inclinações entre 50° e 90°. Alguns resultados foram satisfatórios com relação ao tempo de

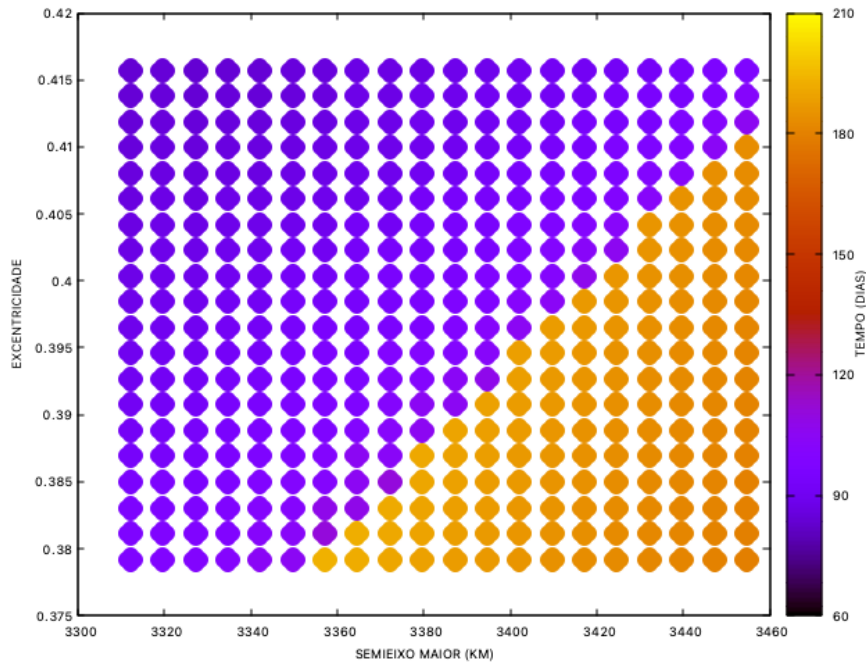
permanência da partícula na região de estudo, porém com um número ainda inferior de partículas com tempo de permanência acima de 180 dias. Destaco as condições iniciais de $i = 50^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, com 8,5% das partículas com tempo de permanência acima de 200 dias na região de estudo, conforme Figura 12 e $i = 76^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$, com 32,25% das partículas com tempo de permanência acima de 180 dias na região de estudo, conforme Figura 13.

Figura 12 – Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 50^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

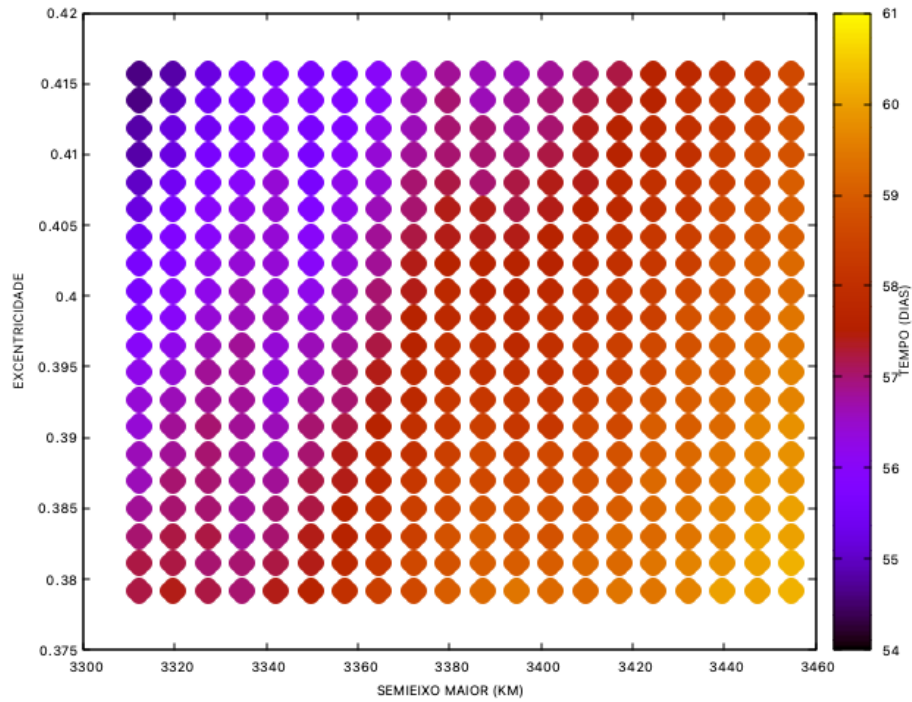
Figura 13 – Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 76^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

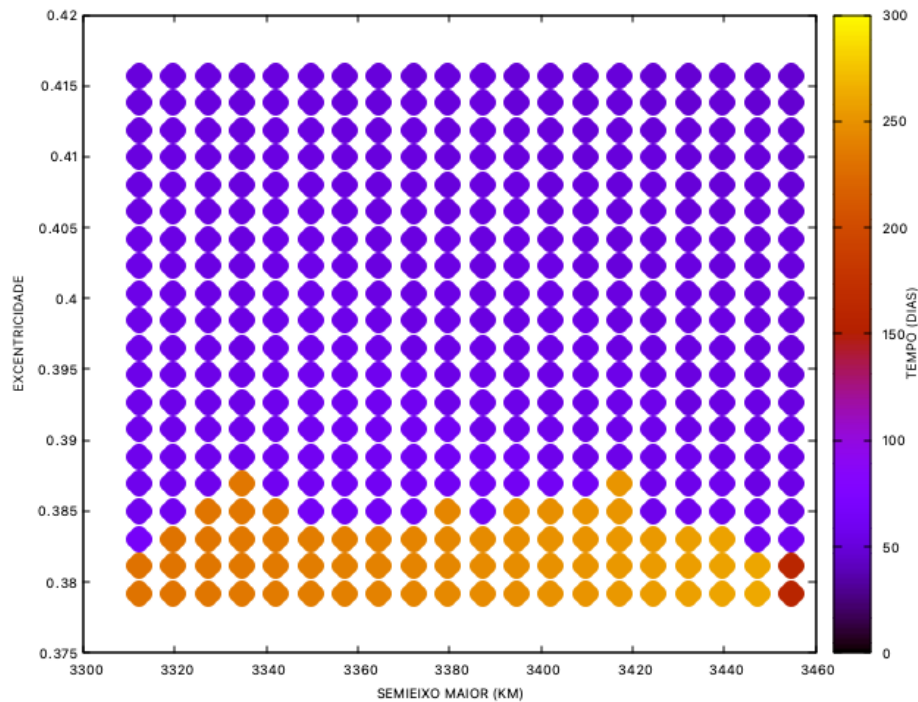
Outro resultado interessante, que está ligado as condições iniciais da missão, é para inclinação de 90° . Com essas condições, obtivemos como melhor resultado do tempo dentro da região de estudo, valores aproximados de 60 dias, com ângulo da longitude do nodo ascendente de 0° (Figura 14). Esse resultado não satisfaz os objetivos da missão.

Figura 14 – Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 89^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$



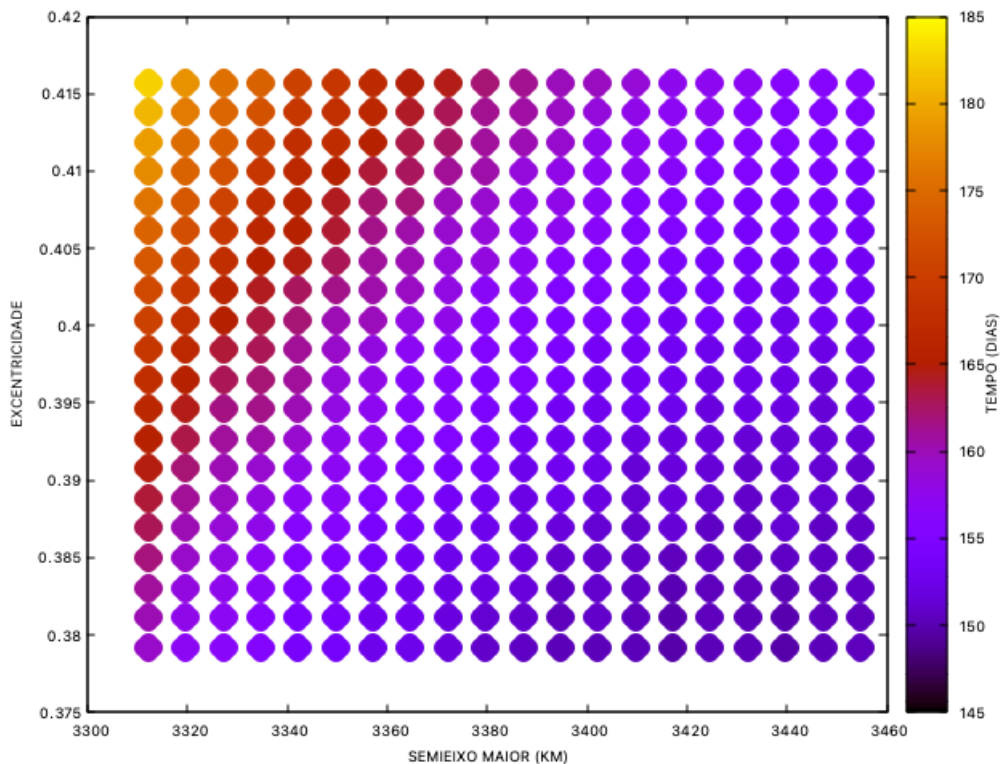
Fonte: Elaborado pelo autor.

Também incluímos em nosso estudo, órbitas com argumento do pericentro de 270° , que estava nas condições iniciais da missão. Os resultados mostraram que poucas inclinações obtiveram órbitas com tempo de permanência acima de 100 dias na região de interesse da missão. Algumas órbitas que possuíam tempo maiores que 100 dias não continham um número significativo de partículas nessa região, conforme Figura 15. Nesta configuração, apenas 16,25% das partículas possuem tempo de permanência maiores que 100 dias. Isto acontece para excentricidades em torno de 0,375 a 0,385, em todos o intervalo de semieixo.

Para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, o tempo de permanência das partículas na região variou de 150 a 185 dias aproximadamente, conforme Figura 16. Nessas condições iniciais, 26,8% das partículas permaneceram mais que 160 dias na região de estudo e o restante percentual, ou seja, 73,2%, entre 150 e 160 dias. Essas partículas que possuem maior tempo na região de estudo, estão concentradas entre condições iniciais de semieixo maior variando de 3310 km a 3380 km e excentricidades variando entre 0,38 a 0,41, aproximadamente, sendo que o tempo de permanência aumenta com excentricidades maiores e semieixos menores.

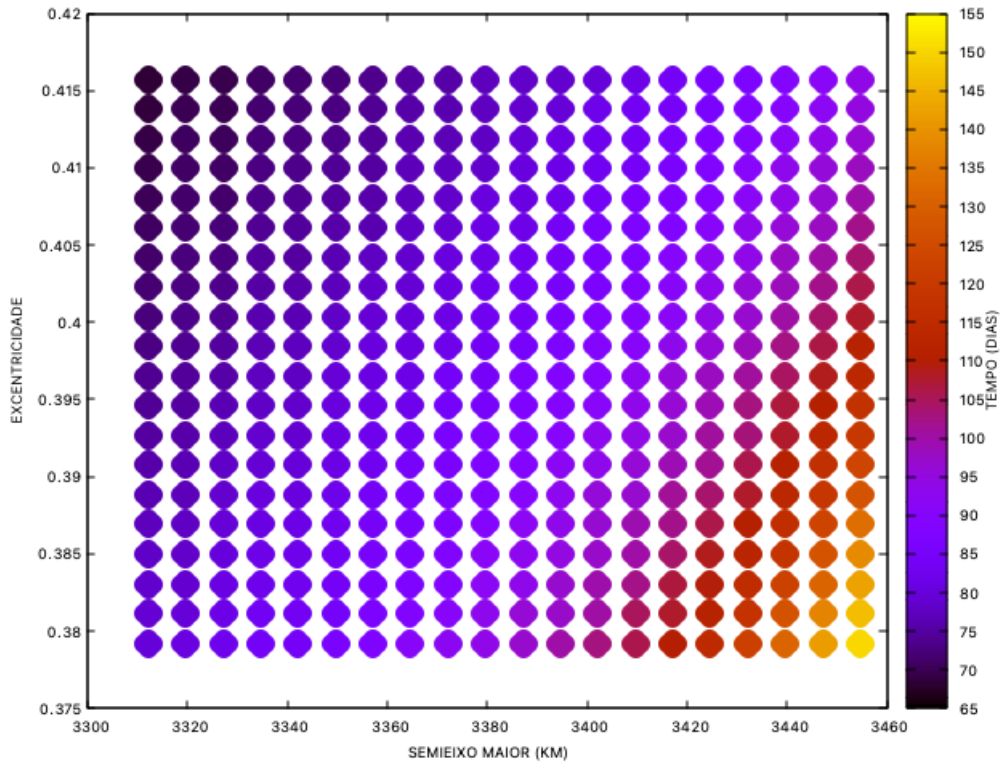
Para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$, o tempo de permanência das partículas na região variou de 70 a 160 dias aproximadamente, conforme Figura 17. Nessas condições iniciais, apenas 1,5% das partículas permaneceram mais que 130 dias na região de estudo e a grande maioria, cerca de 86,2%, não sobreviveram mais que 100 dias na região. Essas partículas que possuem maior tempo na região de estudo, estão concentradas entre condições iniciais de semieixo maior variando de 3440 km a 3460 km e excentricidades variando entre 0,38 a 0,39, aproximadamente, sendo que o tempo de permanência aumenta com excentricidades menores e semieixos maiores.

Figura 16 – Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 – Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

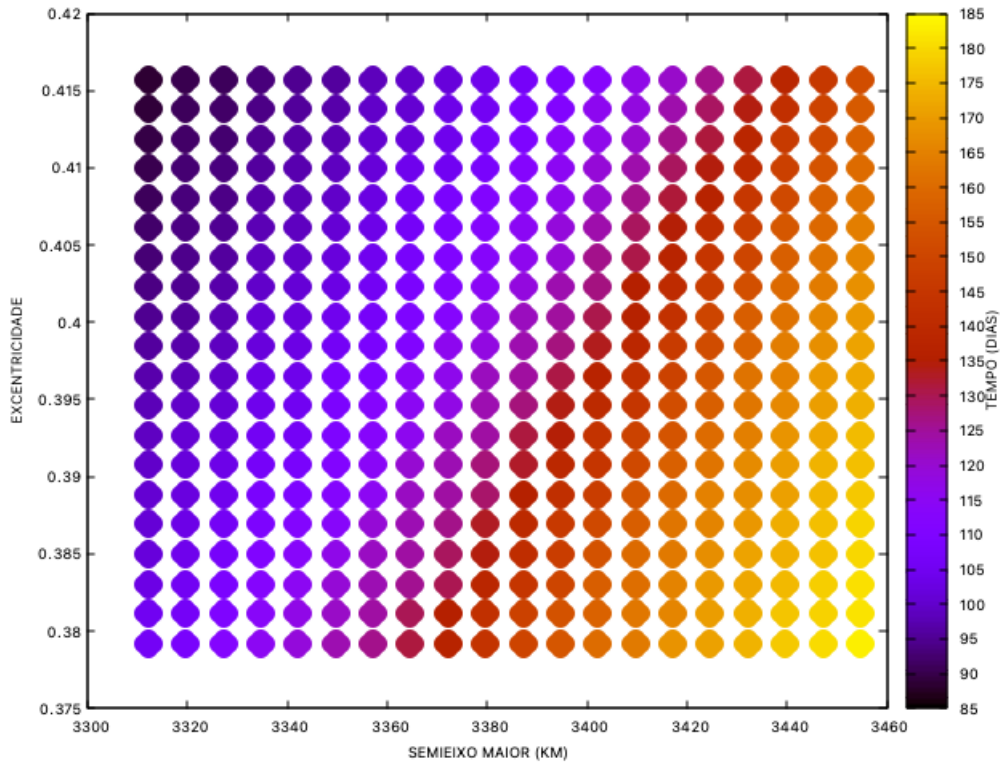
Para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$, o tempo de permanência das partículas na região variou de 90 a 190 dias aproximadamente, conforme Figura 18. Cerca de 41,8% das partículas permaneceram mais que 130 dias na região de estudo e o restante, cerca de 58,2%, permaneceram entre 90 e 120 dias aproximadamente. Das partículas que sobreviveram mais que 130 dias, 20% possuem um tempo de permanência na região de mais de 170 dias. Essas partículas que possuem maior tempo na região de estudo, estão concentradas entre condições iniciais de semieixo maior variando de 3380 km a 3460 km e excentricidades variando entre 0,38 a 0,415, aproximadamente, sendo que o tempo de permanência aumenta com excentricidades menores e semieixos maiores.

Em uma última análise das condições iniciais das partículas que possuem o maior tempo de permanência, temos $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. O tempo de permanência das partículas na região variou de 50 a 300 dias aproximadamente, conforme Figura 19. Uma pequena quantidade de partículas, 2,0%, permaneceram por aproximadamente 280 dias na região de estudo e o restante, cerca de 98,0%, permaneceram entre 50 e 150 dias aproximadamente. Essas partículas que possuem maior tempo na região de estudo, estão concentradas entre condições iniciais de semieixo maior variando de 3300 km a 3330 km e excentricidades variando entre 0,38 a 0,385, aproximadamente, sendo que o tempo de permanência aumenta com excentricidades e semieixos menores.

Para efeitos comparativos, é possível verificar algumas inclinações maiores que 65° , o que torna o tempo de permanência das partículas muito pequeno, em torno de 60 dias ou menos, inviável para a missão, uma vez que é necessário um tempo de aproximadamente 180 dias, conforme descrito anteriormente.

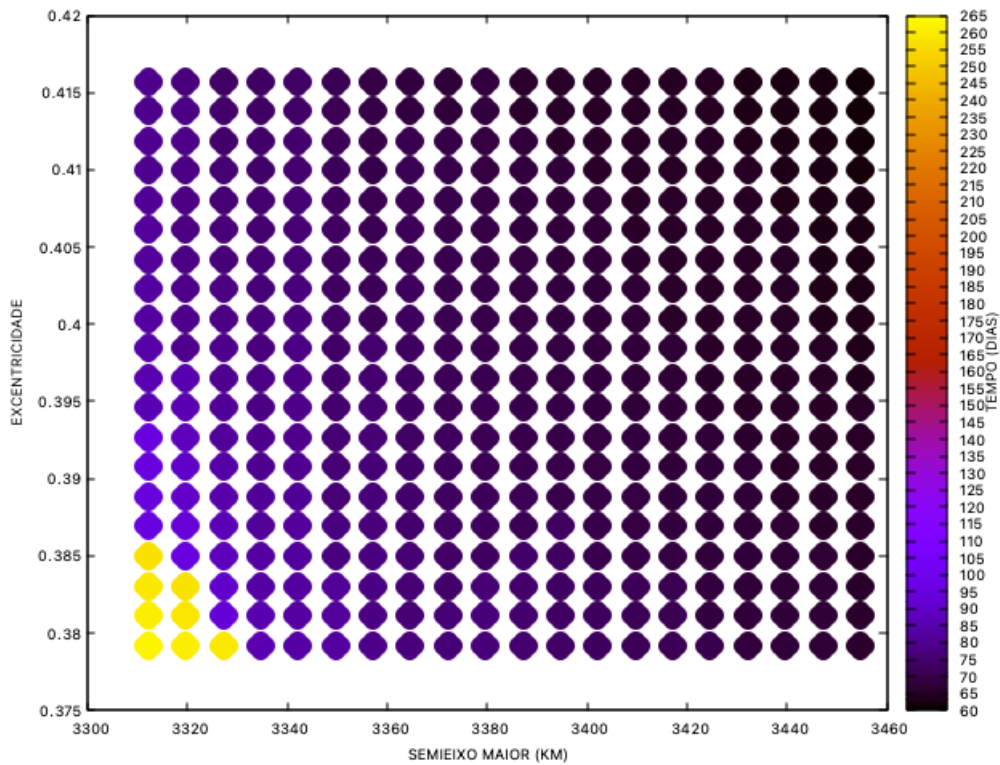
Conforme Figura 20, o tempo de permanência das partículas na região variou de 52 a 59 dias

Figura 18 – Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

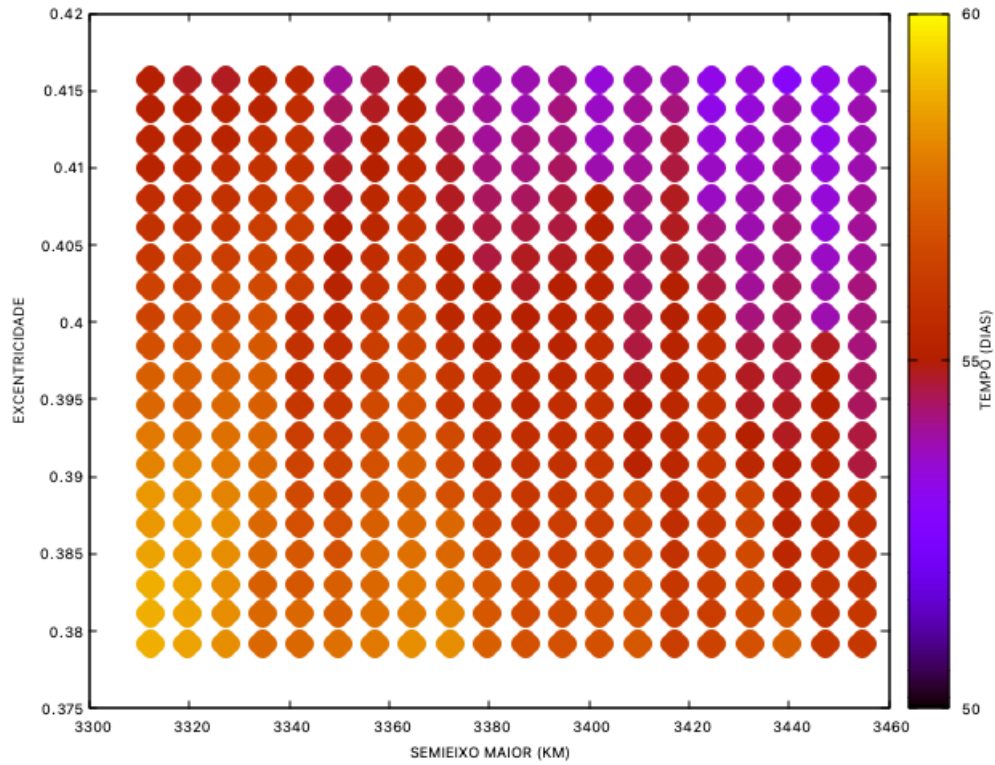
Figura 19 – Grade de tempo de permanência das partículas para $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

aproximadamente, ou seja, todas as partículas com essas condições iniciais não permaneceram sequer 100 dias na região de estudo. Isto aconteceu também com as partículas que possuem inclinações de

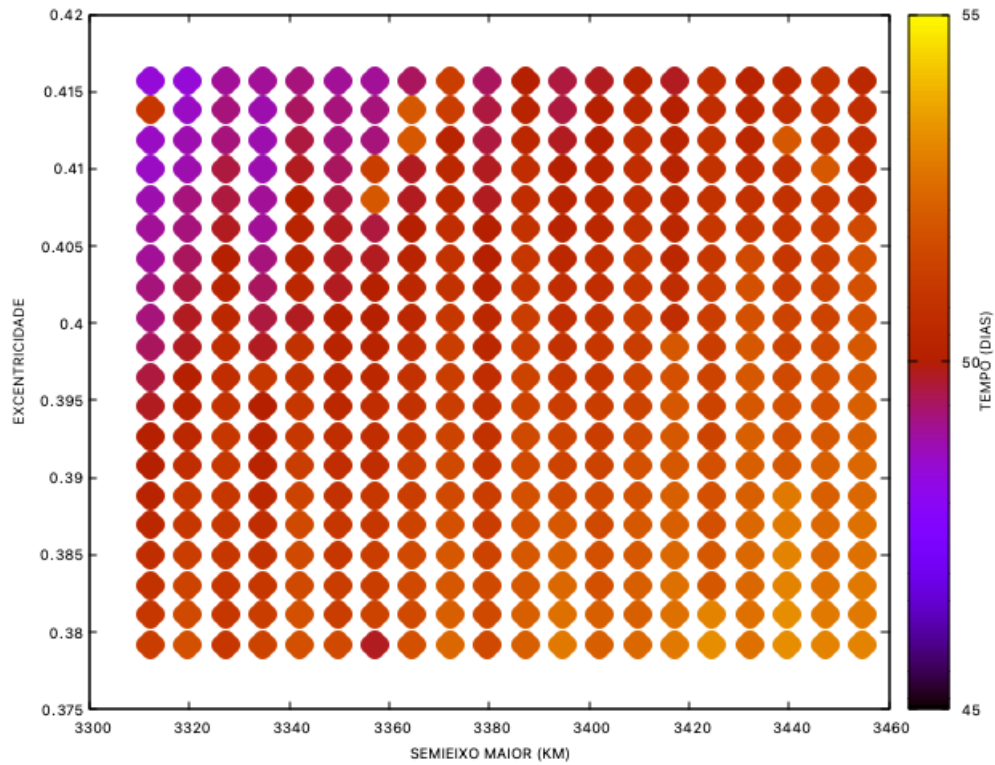
Figura 20 – Grades de tempo de permanência das partículas para $i = 70^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

80°, conforme Figura 21.

Figura 21 – Grades de tempo de permanência das partículas para $i = 80^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse comportamento se repete para os diversos valores dos ângulos da longitude do nodo ascendente, seja 0° , 90° , 180° e 270° e para as diversas inclinações.

O resultado ainda pode ser interpretado como uma boa aproximação de algumas órbitas congeladas já estudadas. Analisando apenas a inclinação da órbita, pode-se verificar que os valores em torno de 60° e 65° , estão perto da órbita congelada de 50° (SCIENCE, 2006). Cabe ressaltar ainda que órbitas fora das inclinações congeladas devem fazer correções constantemente ou tem um tempo de vida útil limitado.

A *priori*, destaca-se que órbitas com inclinações em torno de 60° e 65° , com os respectivos ângulos da longitude do nodo ascendente, interessam a missão pelo tempo de permanência do satélite em uma região aproximada da órbita de referência. Com relação a quantidade de órbitas possíveis, destaca a órbita com $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, possuindo, na sua totalidade, órbitas onde as partículas permanecem por mais de 150 dias na região de interesse, o que contemplaria o objetivo da missão. Os resultados para órbitas com condições iniciais de $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, apresentaram tempo de permanência próximos de 270 dias, porém, para um número muito pequeno de partículas, em torno de 2%. A grande maioria não sobreviveu mais de 80 dias na região de interesse da missão. Ao usar essas condições iniciais, o tempo excede os 180 dias destinados a missão, elevando custos, pois existirá a necessidade de correção da órbita com propulsores.

Cabe agora analisar outro aspecto para complementar nossa conclusão, o desvio percentual da partícula com relação aos limites do periselene e aposelene, o que se faz na próxima seção.

3.3 DESVIO PERCENTUAL DA PARTÍCULA COM RELAÇÃO AOS LIMITES DO PERISELENE E APOSELENE

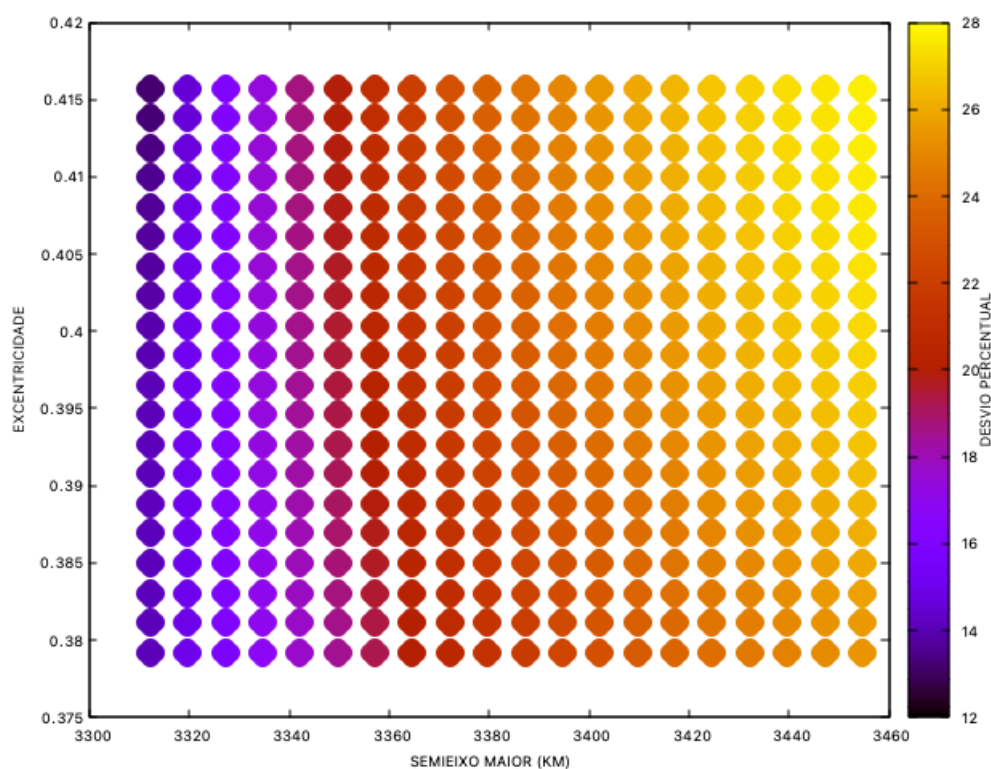
A segunda análise das órbitas foi verificar o desvio percentual das partículas em relação a sua órbita inicial. O raio do periselene e o raio do aposelene da órbita inicial foram adotados como parâmetros para cada uma das partículas. Ao longo de 365 dias, a evolução da posição de cada partícula foi verificada, para cada inclinação e para cada ângulo da longitude do nodo ascendente, adotando-se como valor de referência a maior variação, tanto para o periselene quanto para o aposelene.

Assim, para uma determinada partícula, com valores iniciais de semieixo maior e excentricidade, variando sua inclinação de 60° a 90° , podemos observar o quanto há de desvio dentro do limite do intervalo de R_a (± 500 km) e R_p (± 100 km). Foram geradas 28 grades com desvio percentual no raio do periselene e mais 28 grades com desvio percentual no raio do aposelene, variando a inclinação e ângulo da longitude do nodo ascendente, conforme simulação anterior, totalizando 56 grades.

Para o desvio percentual do raio do periselene, os resultados mostraram que a grande maioria das órbitas variaram no máximo 30% em relação a órbita inicial e que poucas órbitas, com inclinações e ângulos da longitude do nodo ascendente, como $i = 70^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, $i = 75^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, $i = 80^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ e $i = 80^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, variaram em mais de 50%.

Vamos considerar que o desvio percentual aceitável em relação ao periselene seja de 33,3%, o que representa uma variação de aproximadamente 100 km, para mais ou para menos em relação ao periselene de referência, 300 km. Essa distância do desvio está dentro da região de estudo da missão.

Figura 22 – Desvio percentual (periselene) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



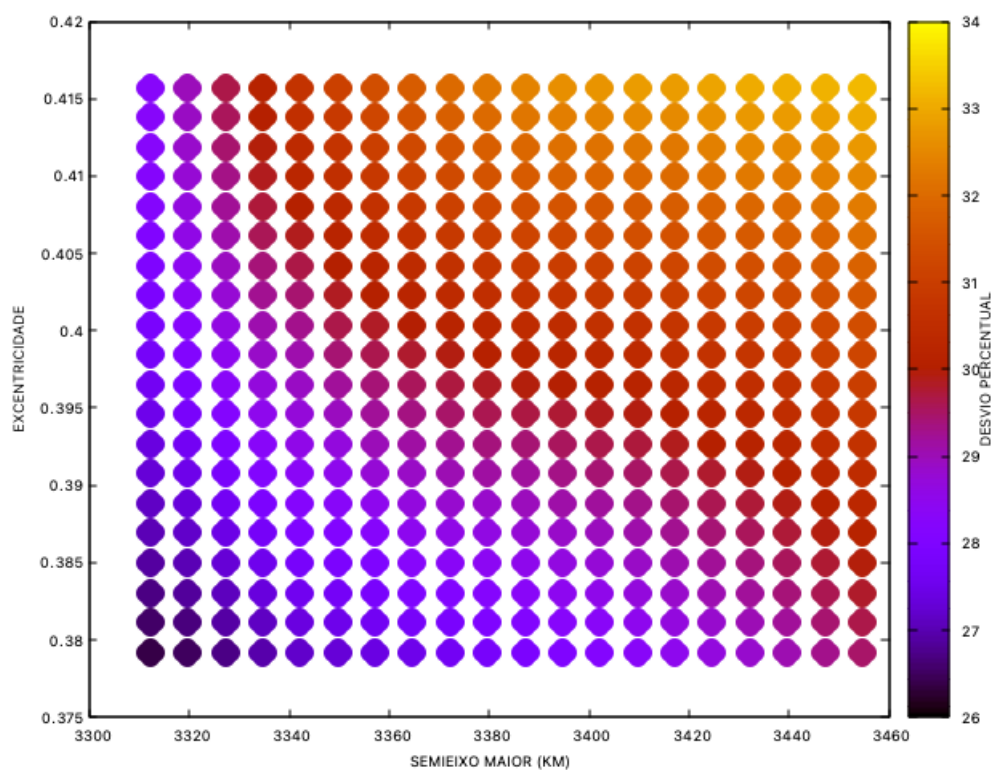
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, a variação percentual está entre os valores de 12% a 28%, conforme Figura 22.

Todas as partículas com as essas condições iniciais estão dentro do desvio aceitável, sendo que as partículas que possuem menor desvio estão dentro dos limites de excentricidade de 0,38 a 0,415 e do semieixo maior entre 3310 km a 3340 km.

Para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$, a variação percentual está entre os valores de 26% a 34%, conforme Figura 23. Apenas 44,5% das órbitas estão dentro do desvio aceitável, sendo que as partículas que possuem menor desvio estão concentradas no lado esquerdo inferior da grade, com semieixo maior com valores entre 3310 km a 3360 km e excentricidades próximas de 0,39.

Figura 23 – Desvio percentual (pericentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$

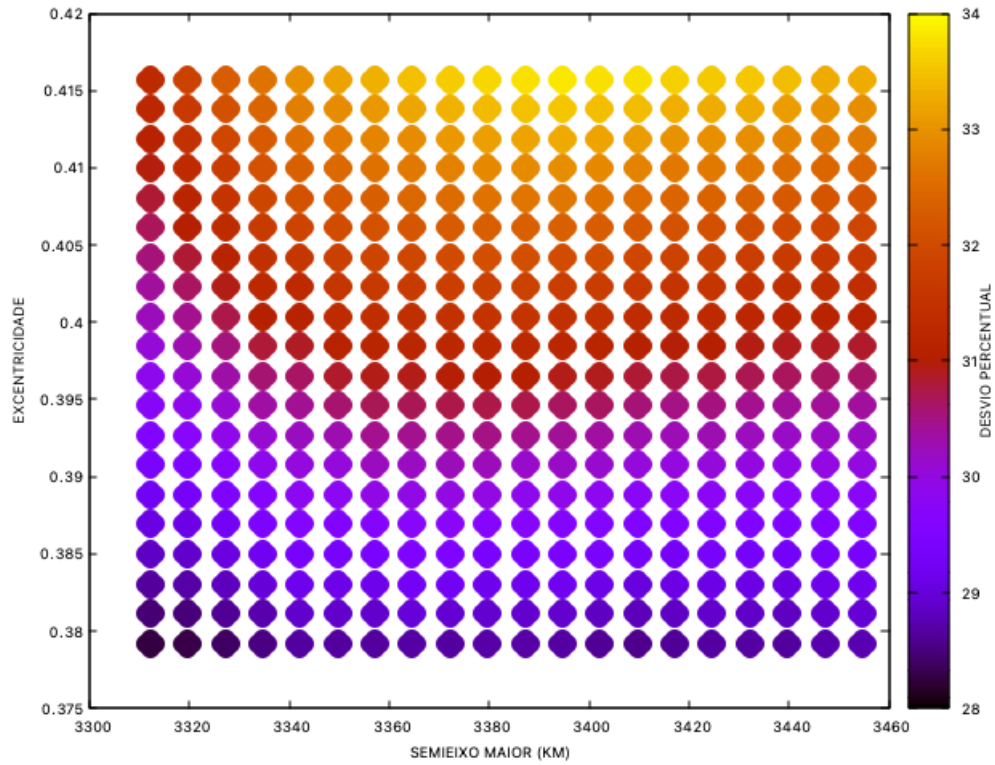


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$, a variação percentual está entre os valores de 28% a 34%, conforme Figura 24. Estão dentro do desvio aceitável 40,0% das órbitas, sendo que as partículas que possuem menor desvio estão distribuídas por todo o limite do semieixo maior, porém com excentricidades próximas que variam de 0,38 a 0,39.

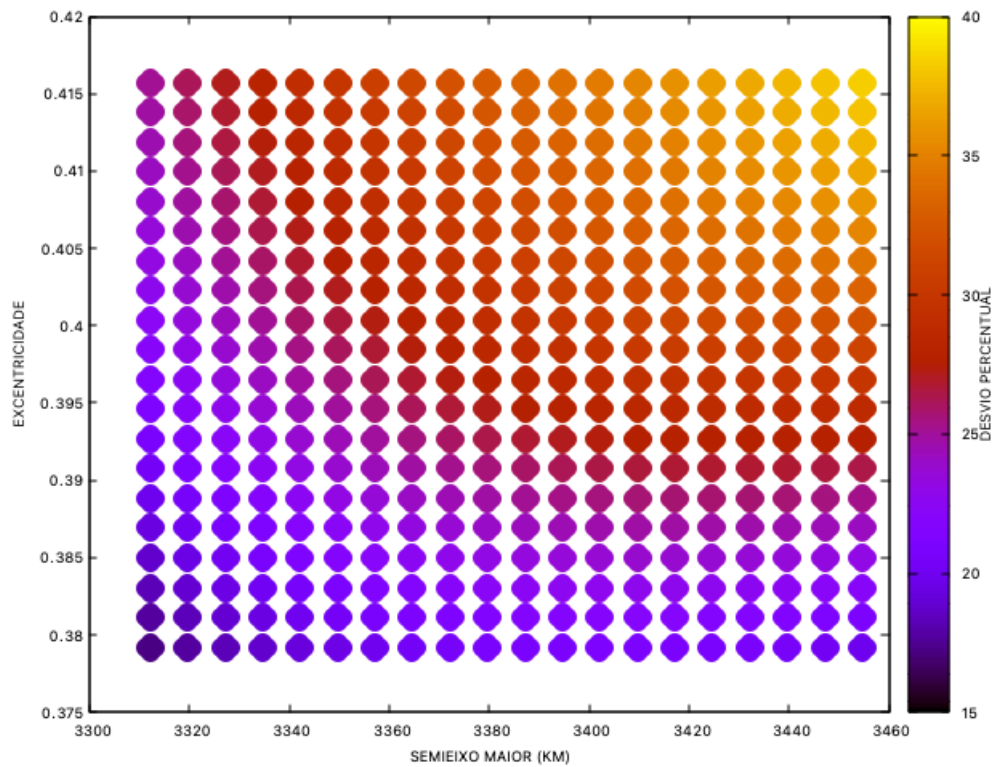
E, finalmente, para $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, a variação percentual está entre os valores de 15% a 40%, conforme Figura 25. Estão dentro do desvio aceitável 36,9% das órbitas, sendo que as partículas que possuem menor desvio estão concentradas com baixas excentricidades que variam de 0,38 a 0,39 e dentro do limite total de semieixo maior. Algumas poucas órbitas possuem excentricidades maiores, porém para valores em torno de 3310 km a 3340 km de semieixo maior.

Figura 24 – Desvio percentual (pericentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Desvio percentual (pericentro) para $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

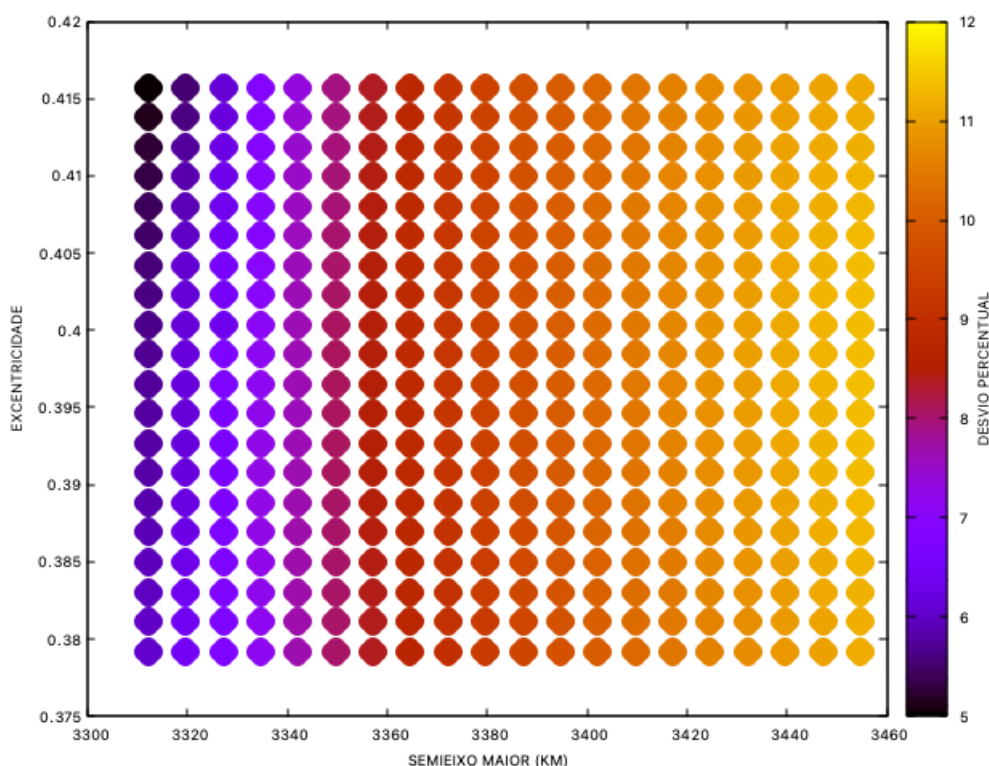
Ainda dentro desta mesma análise, passamos a discutir o desvio percentual em relação ao raio do aposelene. Os resultados mostraram que algumas poucas inclinações com seus respectivos ângulos da

longitude do nodo ascendente obtiveram grandes desvios percentuais (maiores que 20%). São elas: $i = 70^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, $i = 70^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, $i = 75^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, $i = 80^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ e $i = 80^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$.

As outras órbitas, na sua grande maioria, tiveram variações em torno de 10%, o que é o perfeitamente aceitável para a missão, pois envolve uma variação de 300 km, o que está dentro do limite de variação para o raio do aposelene (500 km). Destaca-se que o limite aceitável para a variação percentual seja de no máximo 16,5%.

Para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, a variação percentual está entre os valores de 5% a 12%, conforme Figura 26. Todas as partículas com as essas condições iniciais estão dentro do desvio aceitável, sendo que as partículas que possuem menor desvio então concentradas entre 3310 km e 3340 km e excentricidades entre 0,38 a 0,415.

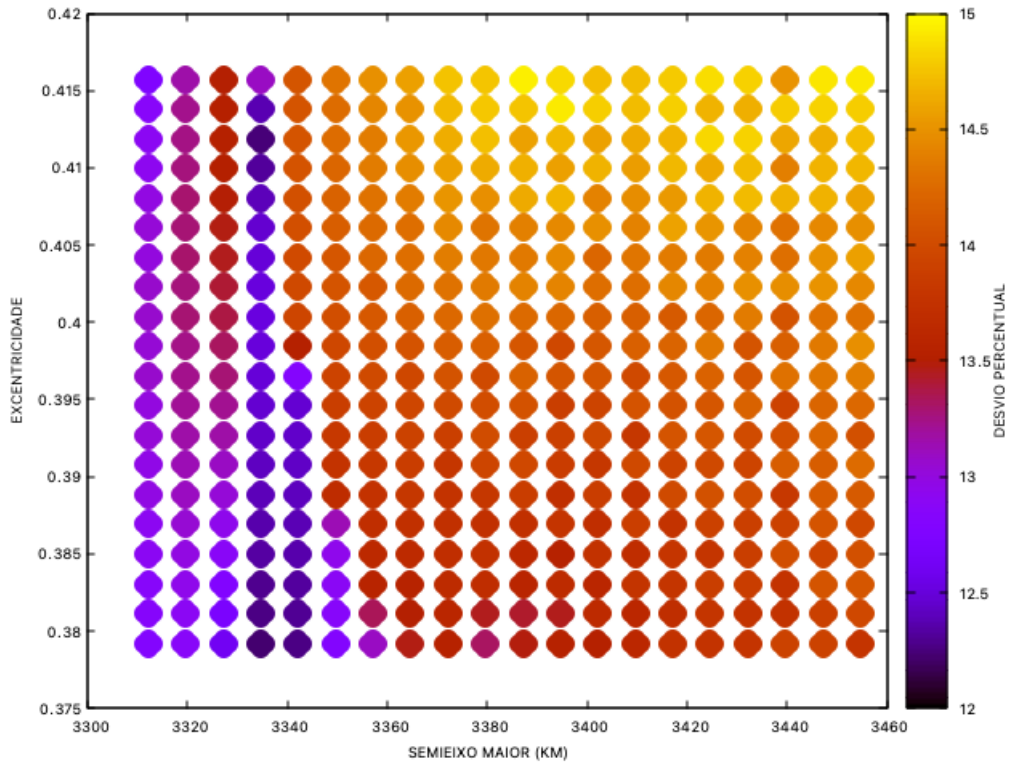
Figura 26 – Desvio percentual (apocentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

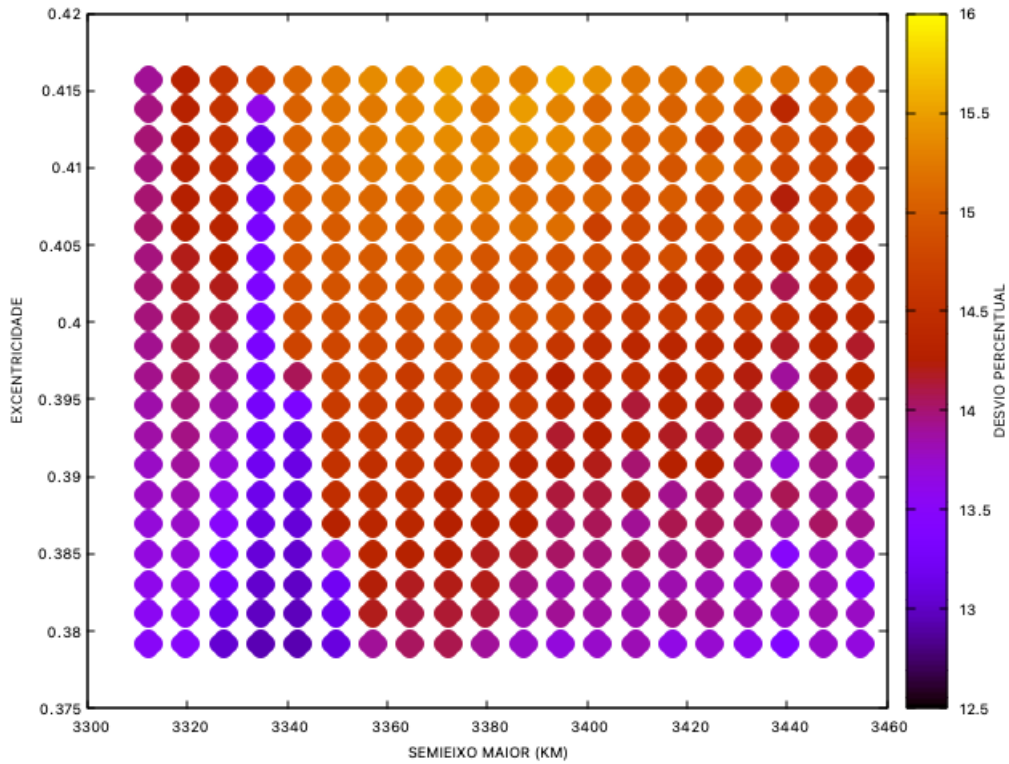
Para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$, a variação percentual está entre os valores de 12% a 15%, conforme Figura 27. Todas as partículas com essas condições iniciais estão dentro do desvio aceitável, sendo que as partículas que possuem menor desvio então concentradas entre 3310 km e 3350 km e excentricidades entre 0,38 a 0,415 para alguns valores específicos de semieixo maior.

Figura 27 – Desvio percentual (apocentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Desvio percentual (apocentro) para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 270^\circ$



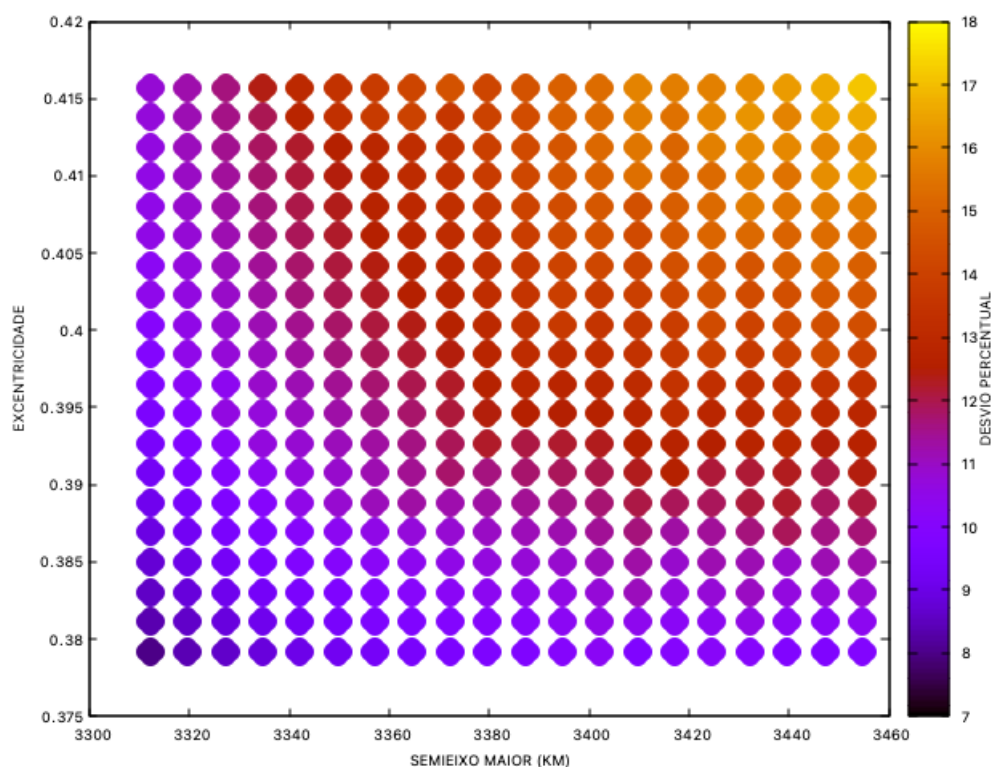
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para $i = 60^\circ, \Omega = 270^\circ$ o desvio percentual está entre 12,5% a 16%, conforme Figura 28. Todas as partículas com as essas condições iniciais estão dentro do desvio aceitável, porém com uma

distribuição desconcentrada, sendo que as partículas com o menor desvio possuem semieixo maior de aproximadamente 3340 km, com excentricidades variando de 0,38 a 0,415.

E, finalmente, analisamos o desvio percentual da partícula com $i = 65^\circ, \Omega = 0^\circ$. O desvio percentual está entre 7% e 18%. Cerca de 10% das partículas possuem desvio maior que o aceitável e as partículas que possuem menor desvio estão concentradas com menores valores de semieixo maior e excentricidade, conforme Figura 29.

Figura 29 – Desvio percentual (apocentro) para $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

As partículas com $i = 65^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, apesar de possuírem menor desvio percentual no periselene para alguns valores de semieixo e excentricidade, possuem valores maiores de desvios percentuais no aposelene.

As outras partículas com $i = 60^\circ, \Omega = 90^\circ$ e $i = 60^\circ, \Omega = 270^\circ$, apresentam maiores desvios no periselene e no aposelene.

Conclui-se, com essa análise, que as melhores órbitas para a missão possuem condições iniciais de $i = 60^\circ, \Omega = 0^\circ$ por possuírem o menor desvio percentual, tanto do periselene, quanto do aposelene e o maior número de partículas com tempo de vida útil dentro da região permitida.

3.4 ANÁLISE DA VARIAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS

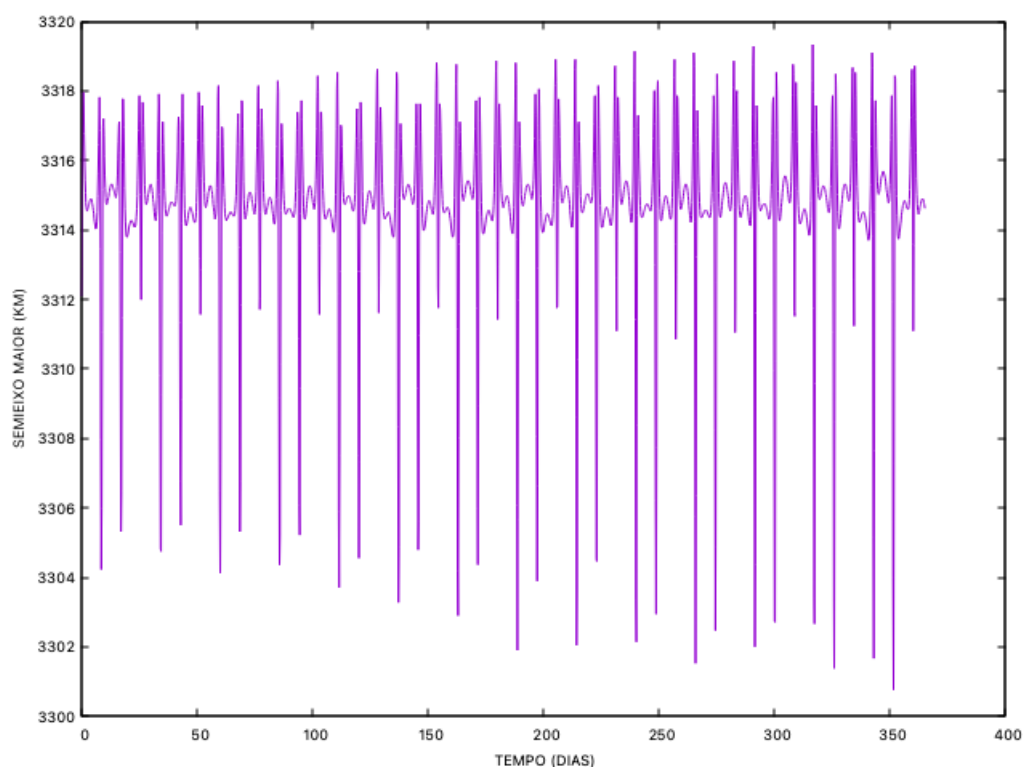
Diante de todas as evidências apresentadas nos tópicos anteriores, indicando que órbitas com inclinações menores, entre 60° e 65° , tendem a permanecer mais tempo na região limitada, passamos a analisar a variação dos elementos orbitais das partículas. Para isso, analisamos a variação do semieixo maior, excentricidade e inclinação ao longo de 365 dias de três partículas.

A escolha arbitrária foi feita com relação ao tempo de permanência dessas partículas na região limitada da pesquisa, com variação do raio do periselene (± 100 km) e aposelene (± 500 km). Como o tempo da missão deve ser de aproximadamente 180 dias, escolhemos uma partícula com esse tempo de vida útil e mais outras duas, uma com metade desse tempo (aproximadamente 80 dias) e outra com um quarto desse tempo, em torno de 40 dias.

A partícula 1, com tempo de residência na região de aproximadamente 80 dias, e a partícula 2, com tempo de residência na região de aproximadamente 170 dias, possuem inclinação de 60° e ângulo do nodo ascendente de 0° e 90° , respectivamente. A partícula 3, com tempo de residência na região de aproximadamente 40 dias, possui inclinação de 75° e ângulo do nodo ascendente de 180° .

A Figura 30, mostra a variação do semieixo maior ao longo de um ano para a partícula 1 (80 dias de permanência).

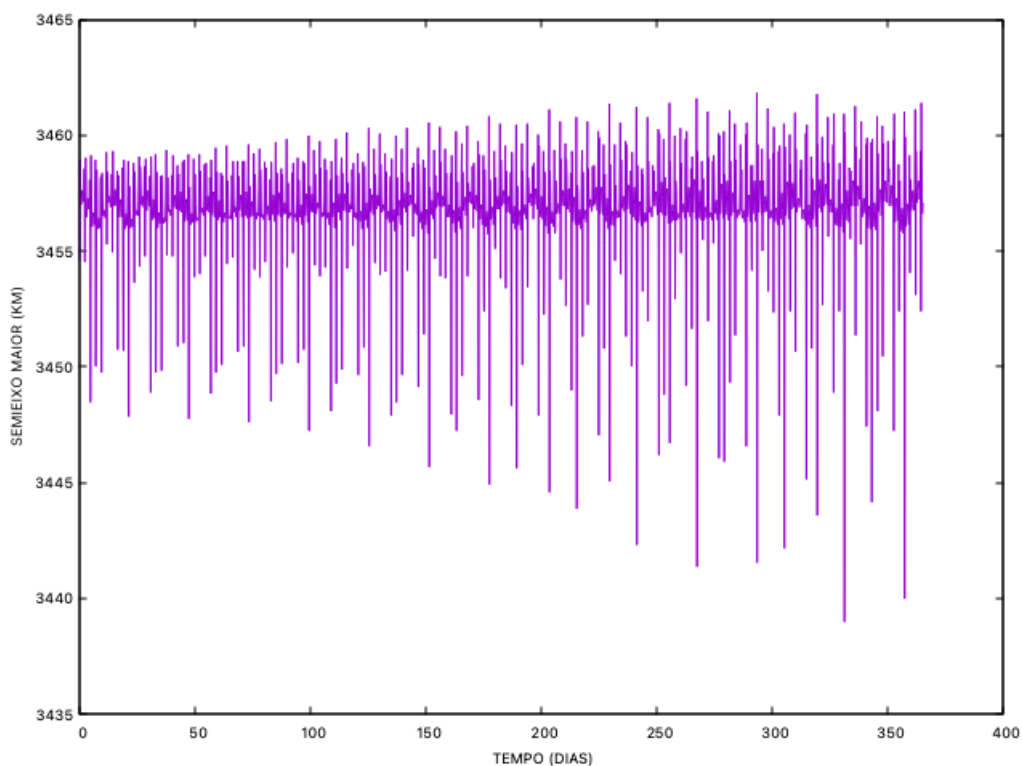
Figura 30 – Semieixo maior *versus* Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 31, mostra a variação do semieixo maior ao longo de um ano para a partícula 2 (170 dias de permanência).

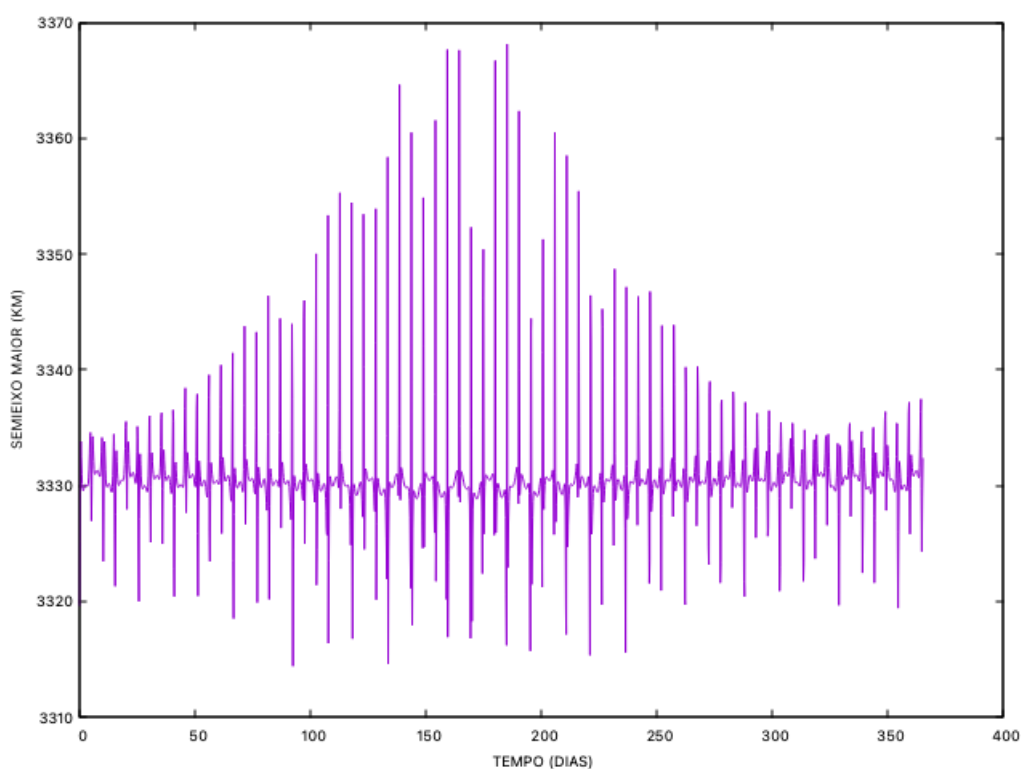
Figura 31 – Semieixo maior *versus* Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 32, mostra a variação do semieixo maior ao longo de um ano para a partícula 3 (40 dias de permanência).

Figura 32 – Semieixo maior *versus* Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3

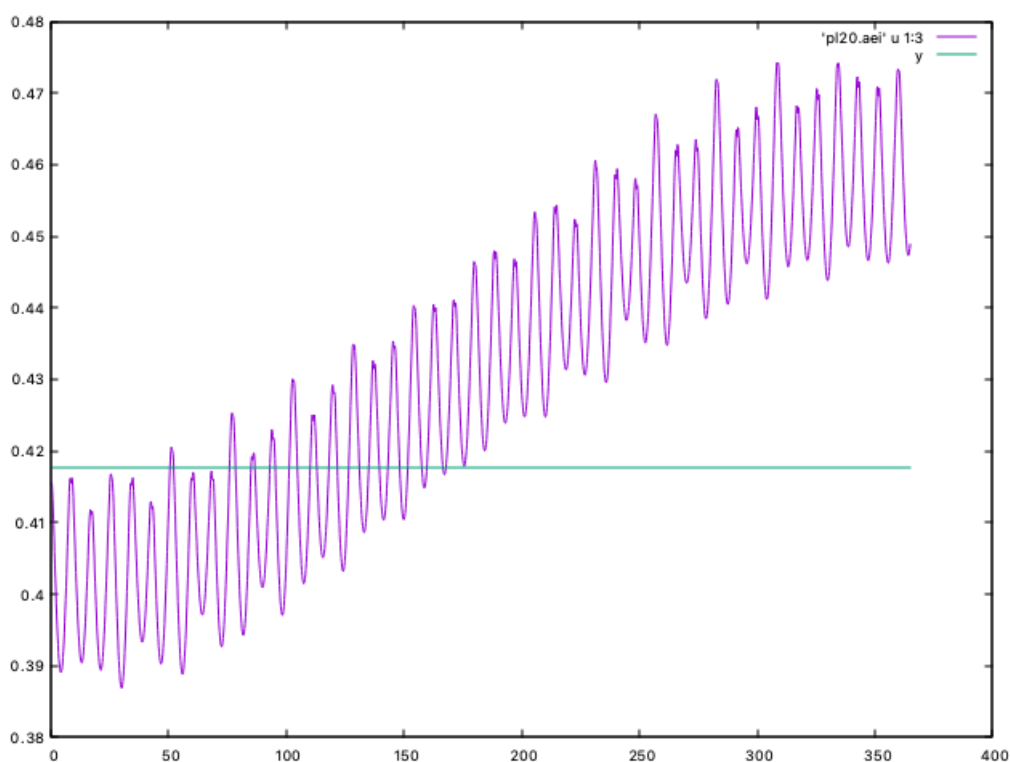


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para as partículas que permanecem mais tempo na região da missão (170 dias e 80 dias), como indicados na Figura 31 e na Figura 32, há pouca variação do semieixo maior, em torno de aproximadamente 20 km. Para o caso da partícula que fica pouco tempo na região (40 dias), a variação é em torno de 60 km. Outro detalhe é que para esta mesma partícula, dentro do tempo de um ano, existe um aumento considerável do semi eixo maior em aproximadamente 200 dias e depois, próximo de 365 dias, este valor diminui para distâncias aproximadas ao início da simulação, o que não é visto nas partículas de maior tempo. Ainda observa-se que, para as partículas de maior tempo, a variação do semieixo começa a ficar maior a partir de meio ano, o que não seria um problema, pois é justamente o tempo estimado para o término da missão.

A Figura 33, mostra a variação da excentricidade ao longo do tempo de um ano, para a partícula 1 (80 dias de permanência).

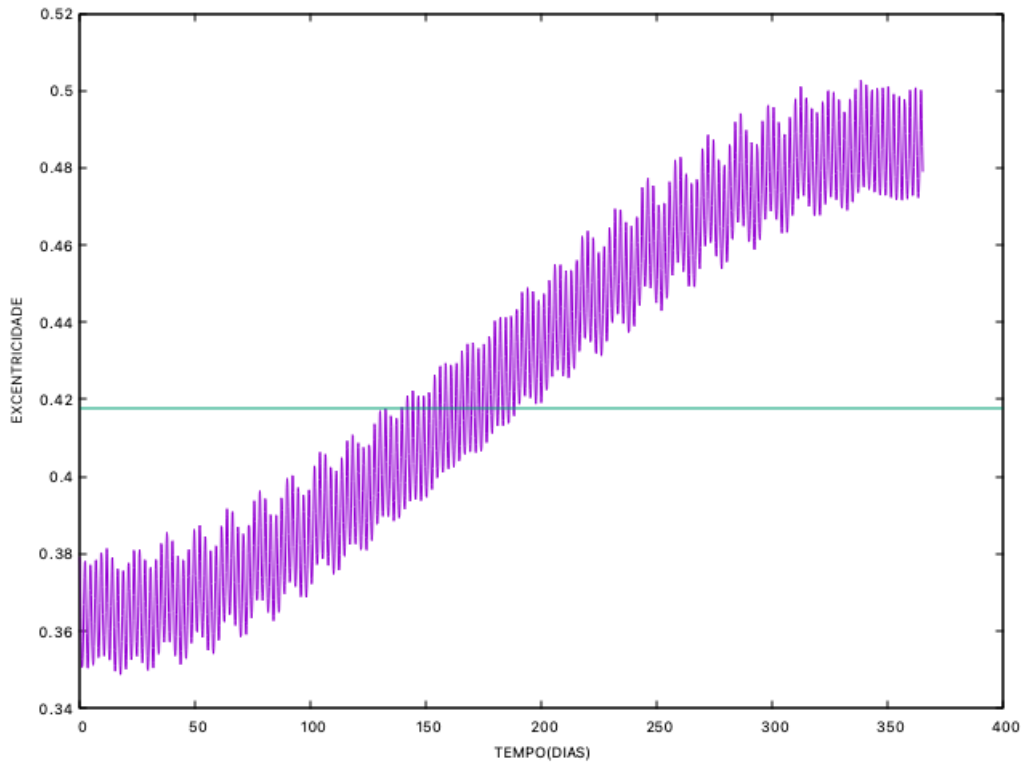
Figura 33 – Excentricidade *versus* Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 34, mostra a variação da excentricidade ao longo do tempo de um ano, para a partícula 2 (170 dias de permanência).

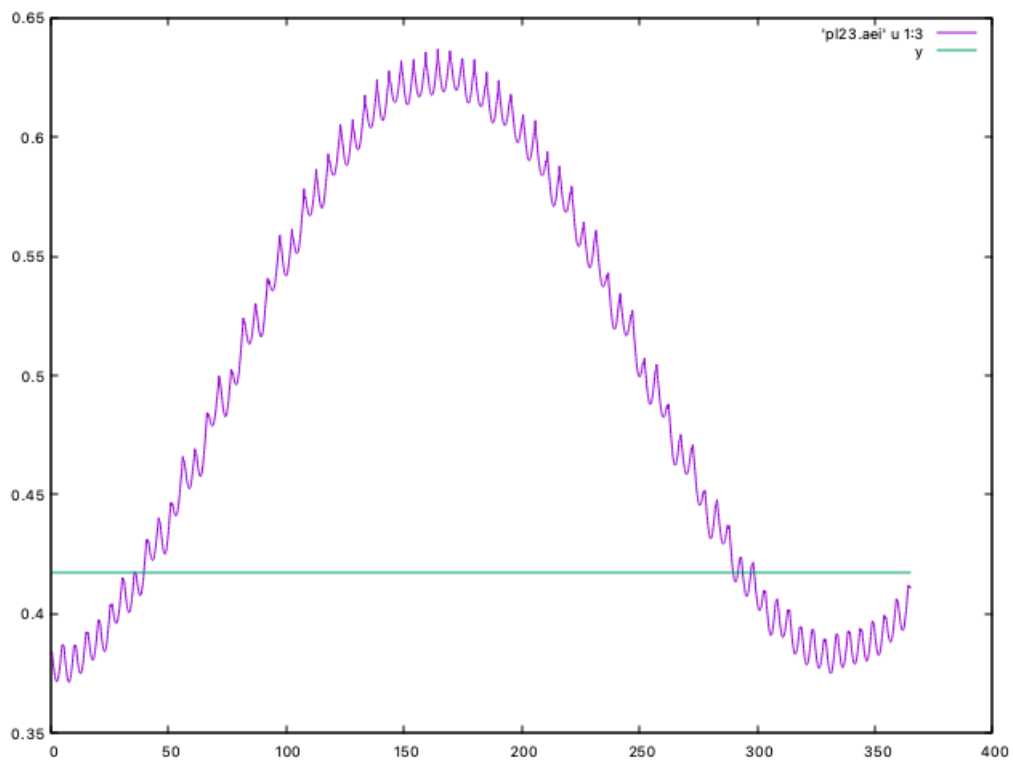
Figura 34 – Excentricidade *versus* Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 35, mostra a variação da excentricidade ao longo do tempo de um ano, para a partícula 3 (40 dias de permanência).

Figura 35 – Excentricidade *versus* Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3

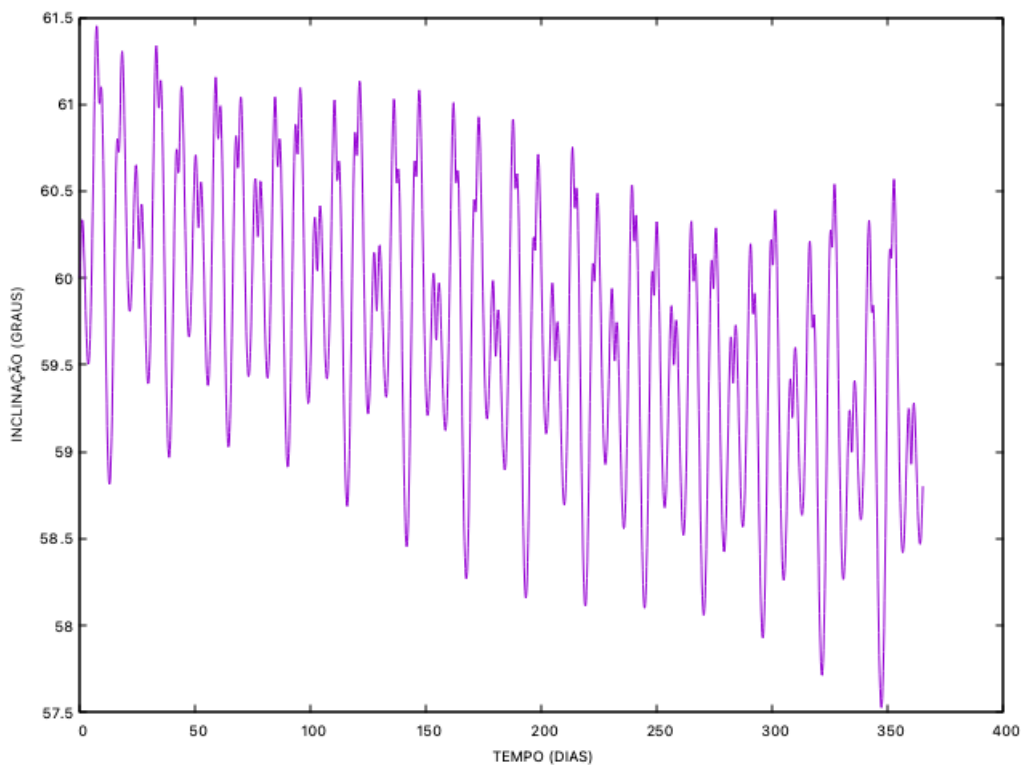


Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se que para as partículas com maior tempo na região estabelecida há uma variação da excentricidade de aproximadamente 0,1 e 0,15 para as partículas com 80 dias e 170 dias, respectivamente, conforme Figura 33 e Figura 34. Ainda é observado que a maior oscilação das excentricidades começam a partir do sexto mês. Já no caso da partícula com menor tempo de permanência, há uma variação de excentricidade em torno de 0,3, com variação rápida, já nos primeiros 100 dias, conforme Figura 35. A linha verde horizontal representa o limite superior de excentricidade para a órbita de referência. Para a partícula com 80 dias de permanência na região, esse limite é ultrapassado em aproximadamente 70 dias. No caso da partícula 2, com tempo de 170 dias de permanência, esse limite é ultrapassado com 150 dias aproximadamente. Na partícula 3, esse limite já é alcançado em 50 dias.

A Figura 36, mostra a variação da inclinação ao longo do tempo de um ano, para a partícula 1 (80 dias de permanência).

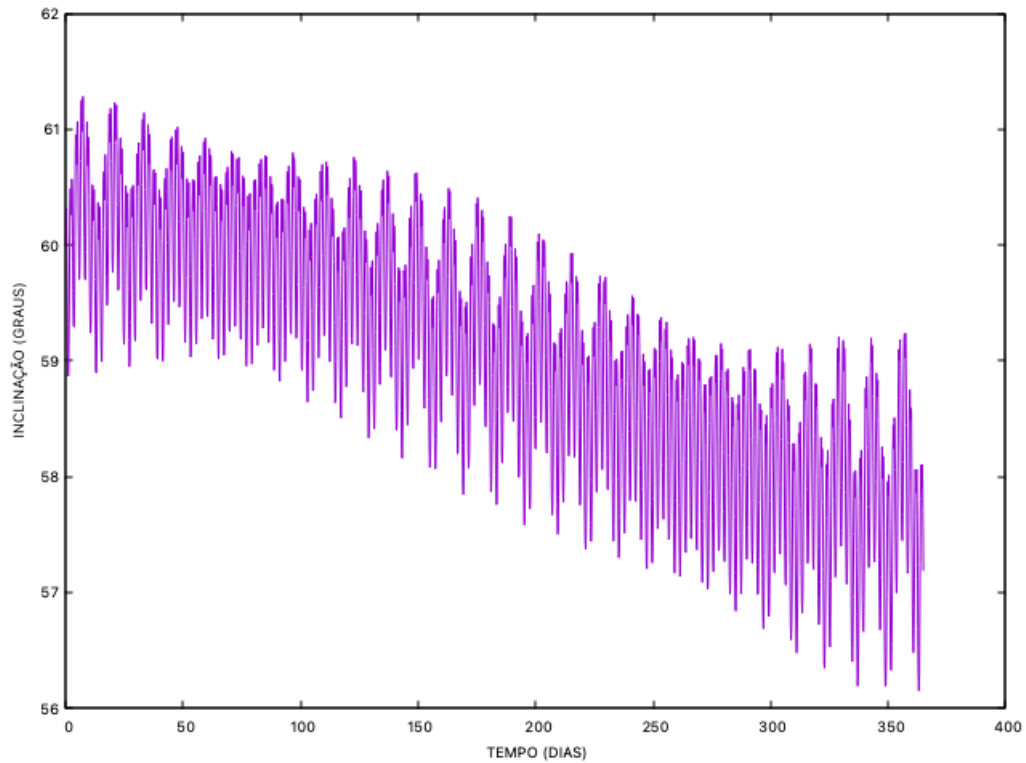
Figura 36 – Inclinação *versus* Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 37, mostra a variação da inclinação ao longo do tempo de um ano, para a partícula 2 (170 dias de permanência).

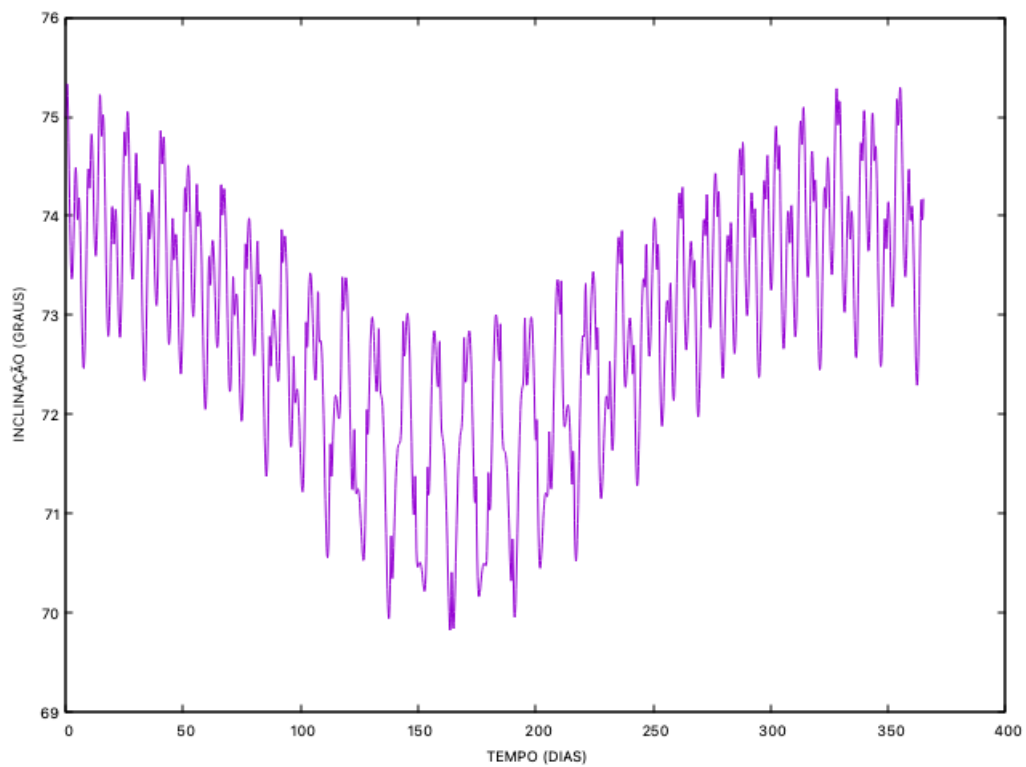
Figura 37 – Inclinação *versus* Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 38, mostra a variação da inclinação ao longo do tempo de um ano, para a partícula 3 (80 dias de permanência).

Figura 38 – Inclinação *versus* Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3



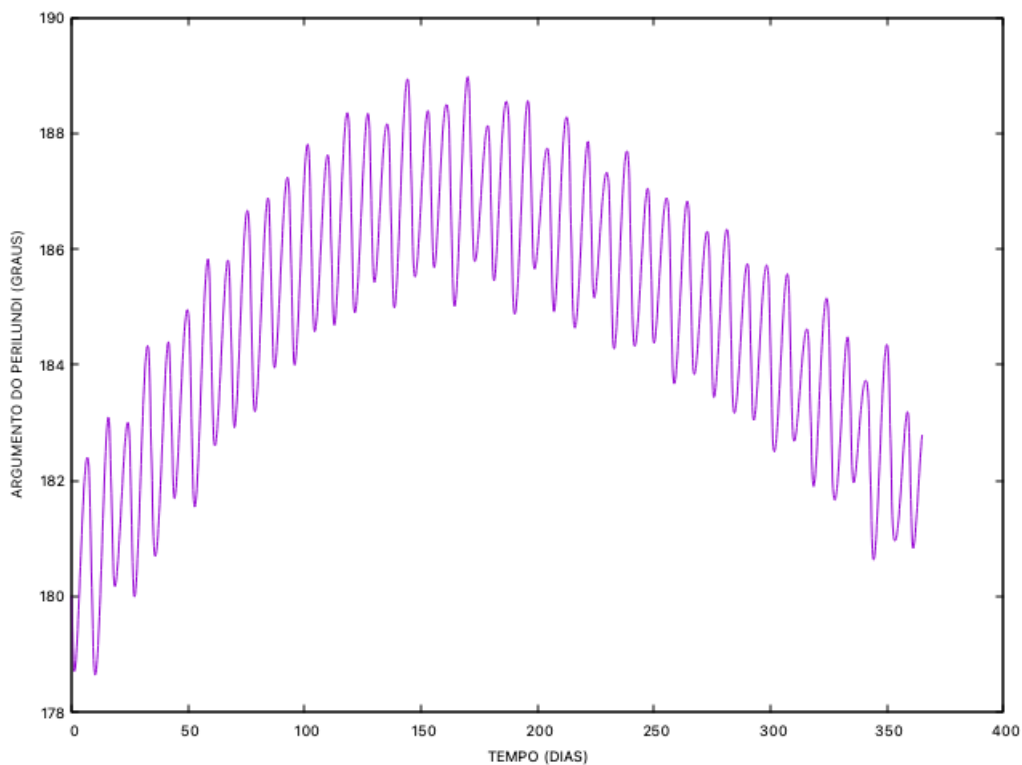
Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente percebe-se o mesmo padrão das variações descritas anteriormente. Para as partículas com maior tempo de vida útil, há uma pequena variação nas inclinações. Para as partículas analisadas, há uma variação de aproximadamente 5° mas, observa-se para a partícula com menor tempo de vida útil, uma falta de periodicidade.

Ainda como acréscimo de análise da variação dos elementos orbitais, procuramos entender a variação do argumento do periselene ao longo de um ano. Essa análise permite indicar a possibilidade da existência de órbitas congeladas, uma vez que o argumento do periselene tende a permanecer estacionário (ELIPE; LARA, 2003).

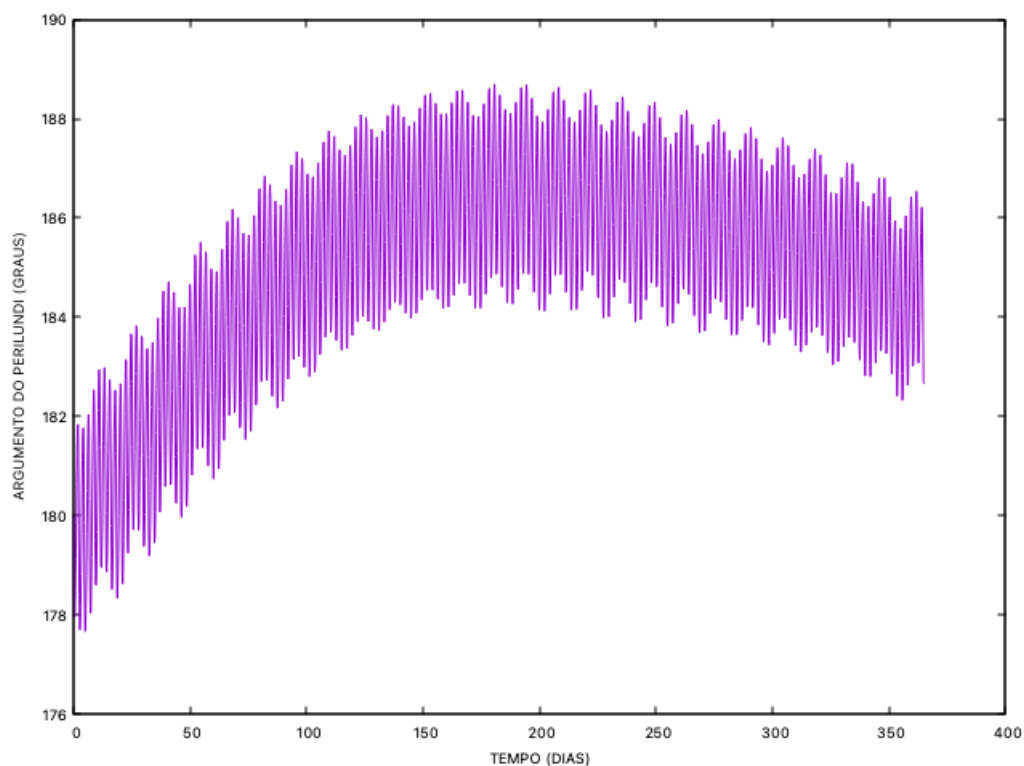
Para os casos em destaques, temos a variação do argumento do periselene na Figura 39, Figura 40 e Figura 41.

Figura 39 – ω versus Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1



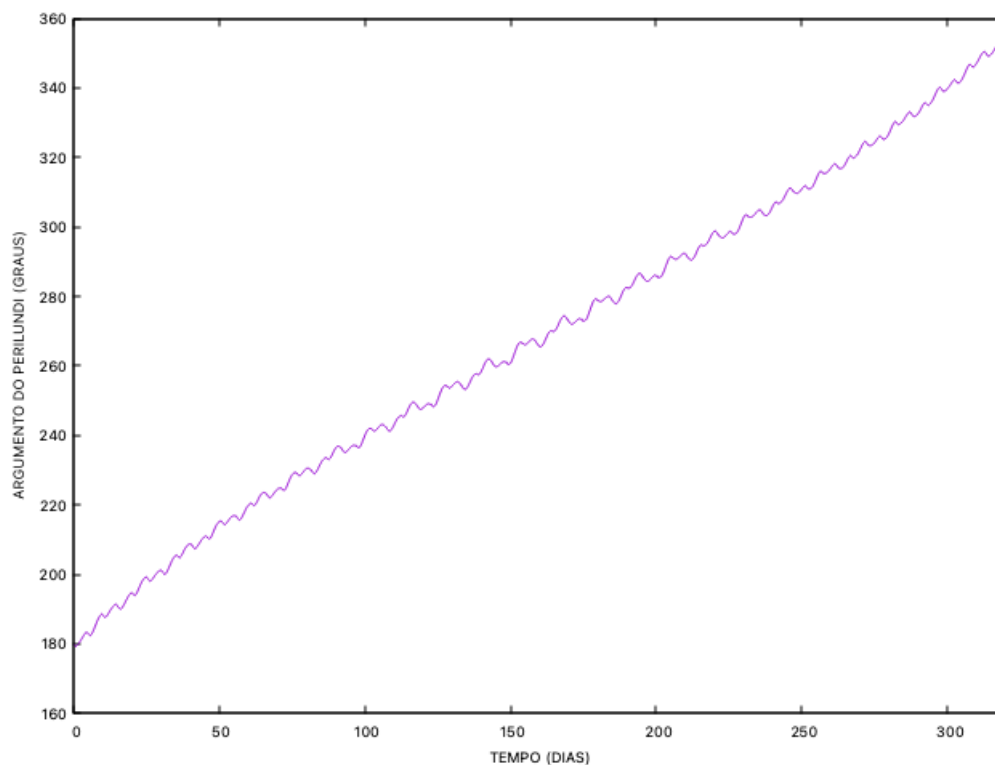
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 – ω versus Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41 – ω versus Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3



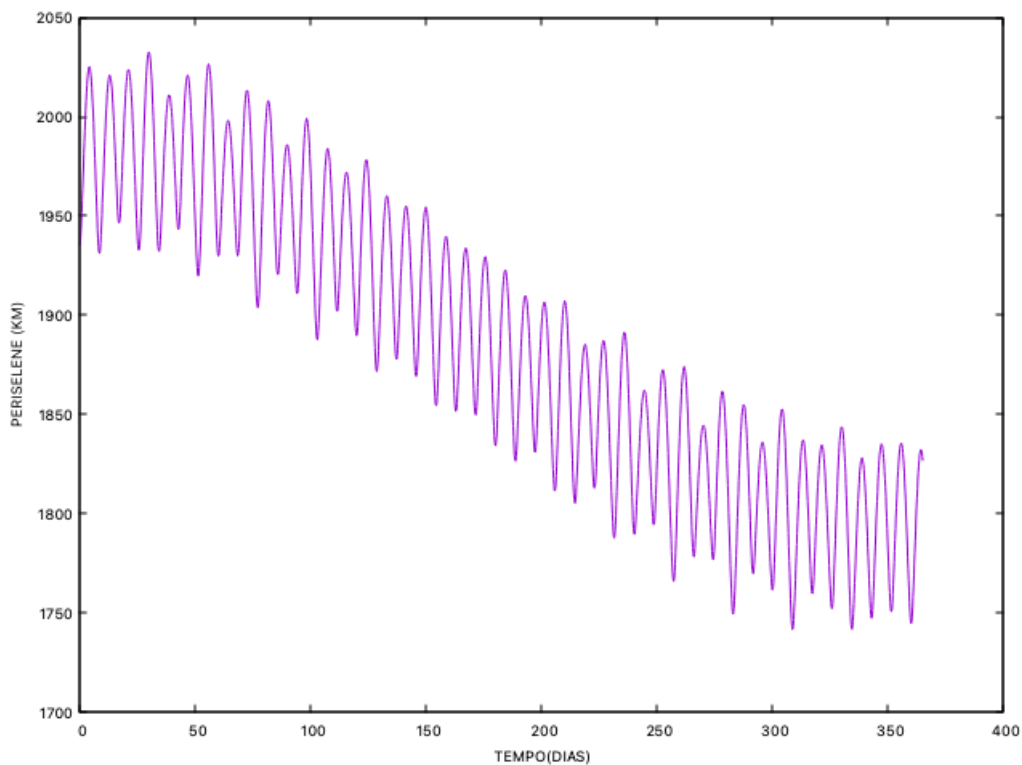
Fonte: Elaborado pelo autor.

Verificamos que as partículas com maior tempo na região de estudo possuem menor variação do argumento do periselene. Para a partícula 1, observa-se uma variação de 10° no tempo de 6 meses e no

restante do ano, uma variação 7° , aproximadamente. A partícula 2 repete o mesmo padrão da partícula 1, ou seja, variando 10° aproximadamente em meio ano e depois tende a permanecer com uma pequena variação de 5° no restante do ano. Já a partícula 3, tem um comportamento muito diferente das duas anteriores. Chega a variar 180° no tempo de um ano.

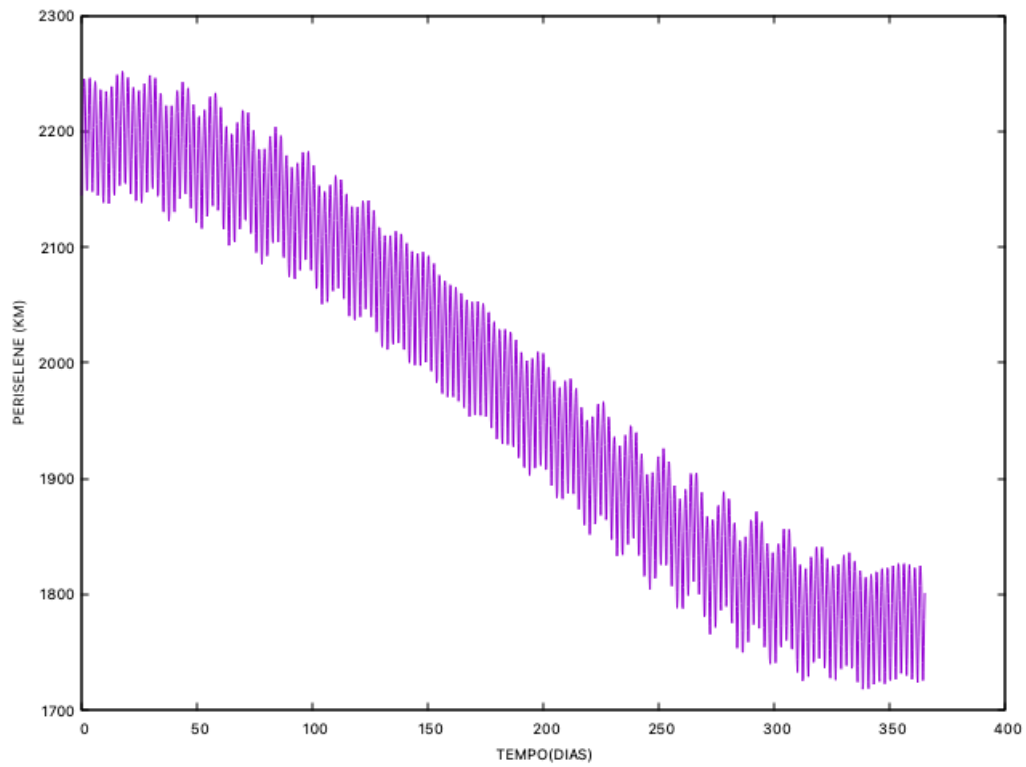
Finalmente, concluímos a análise com a variação do raio do periselene em relação ao tempo, conforme descrito na Figura 42, Figura 43 e Figura 44. Novamente, temos o mesmo padrão observado nos elementos orbitais anteriores. Para a partícula 3, há uma variação do raio do periselene de forma brusca no tempo de 180 dias da missão. Para as partículas de maior tempo, a variação acontece de forma suave, permanecendo a maioria do tempo dentro dos limites aceitáveis da missão (valores máximos e mínimos do periselene).

Figura 42 – R_p versus Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ - partícula 1



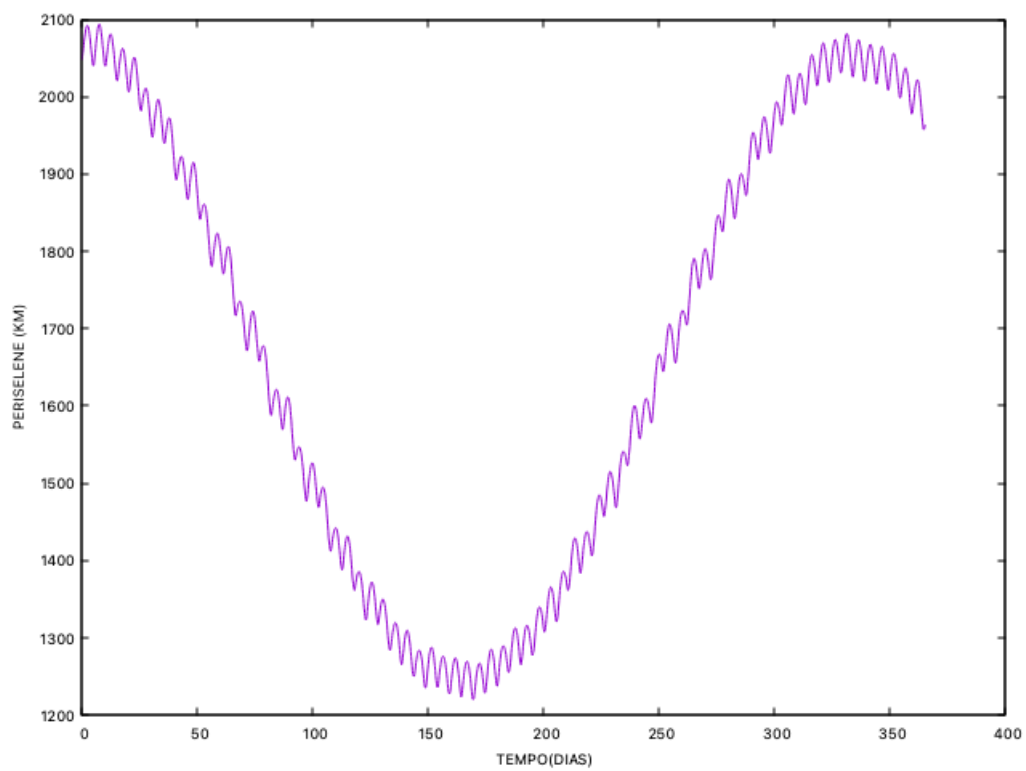
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 43 – R_p versus Tempo para $i = 60^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$ - partícula 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44 – R_p versus Tempo para $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$ - partícula 3



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.5 ÓRBITAS

Diante dos dados apresentados, sugerimos órbitas com inclinações baixas, em torno de 60° ou 65° . Assim, órbitas com as condições iniciais da missão, em 90° de inclinação, apresentam dificuldades de serem mapeadas dentro dos limites estabelecidos para que a missão seja cumprida com êxito, conforme seus objetivos específicos.

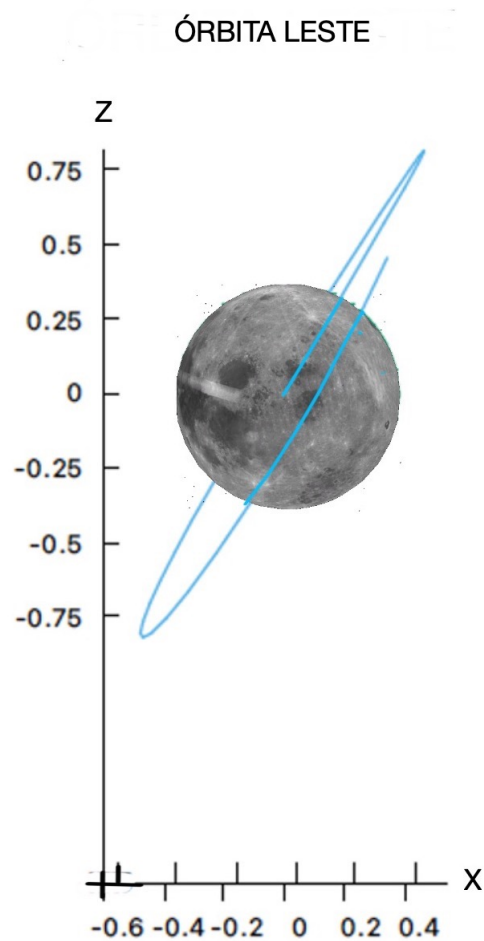
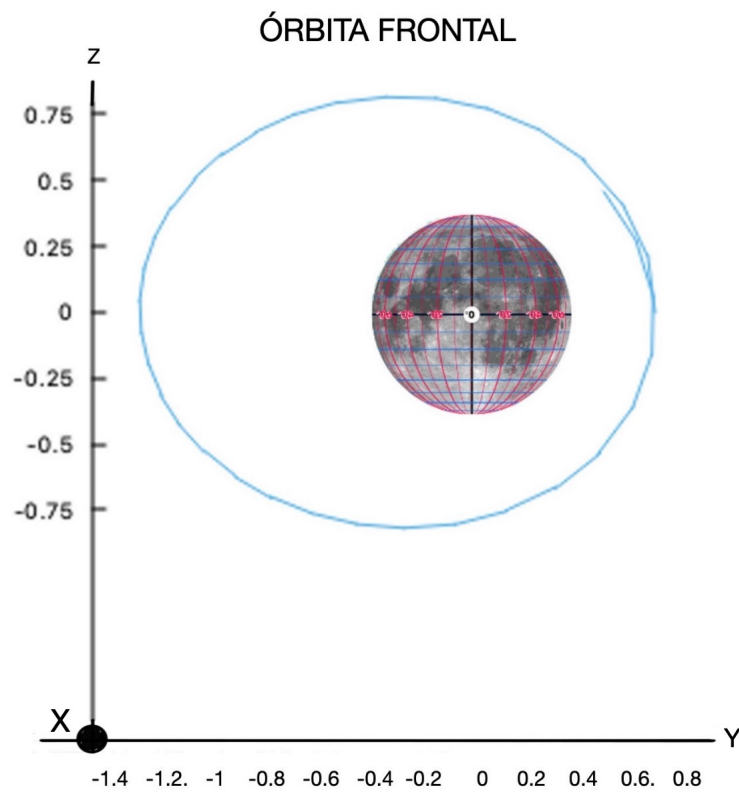
Um dos objetivos da missão é fotografar a bacia Aitken, situada próximo ao polo sul lunar, que é a maior bacia de impacto confirmada na Lua. Essa região tem sido relevante para estudos recentes, pois segundo Pieters et al. (1997), é extremamente rica em minerais. Ainda enfatiza que o estudo do manto nessa bacia, devido a alta concentração e quantidade de minerais, são sem precedentes. Além disso, a bacia fornece informações diretas do interior lunar e recentemente foi objeto de estudo da missão chinesa Chang'E-4, que pousou dentro da cratera e obteve informações de sua superfície (ZHANG; ZHOU; LIN, 2021).

Outro dado interessante da bacia é a presença de água (ROBINSON; TAYLOR, 2014). Os primeiros estudos da Lua apontavam para a inexistência dessa substância. No entanto, com técnicas mais refinadas e sofisticadas, foi possível mostrar que há água no solo lunar.

Para verificar se as partículas com maior tempo na região estabelecida da missão contemplam esse objetivo, é feita a plotagem das órbitas juntamente com a Lua. Usou-se como referência o plano equatorial lunar (plano xy) e o raio lunar está parametrizado em 0,3667. Para a plotagem da órbita, escolheu-se a partícula descrita anteriormente, de tempo de vida útil de aproximadamente 170 dias com inclinação de 60° e $\Omega = 90^\circ$, para um único período orbital. Para isso, rodamos as simulações com as mesmas condições iniciais, porém, alterando o arquivo de saída, que contém tempo, posições x , y e z e os valores de suas velocidades, $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$.

A Figura 45 mostra a vista frontal, utilizando como referência o meridiano diretamente voltado para a Terra, recomendado pela IAU (União Astronômica Internacional) (CENTER, 2020). O eixo x está saindo do plano da tela. A vista leste mostra a órbita a 90° de longitude leste.

Figura 45 – Órbitas (Frontal e Leste) - $I = 60^\circ$, $\Omega = 90^\circ$, $\omega = 180^\circ$, $e = 0,379227$ e $a = 3312$ km (170 dias de permanência)

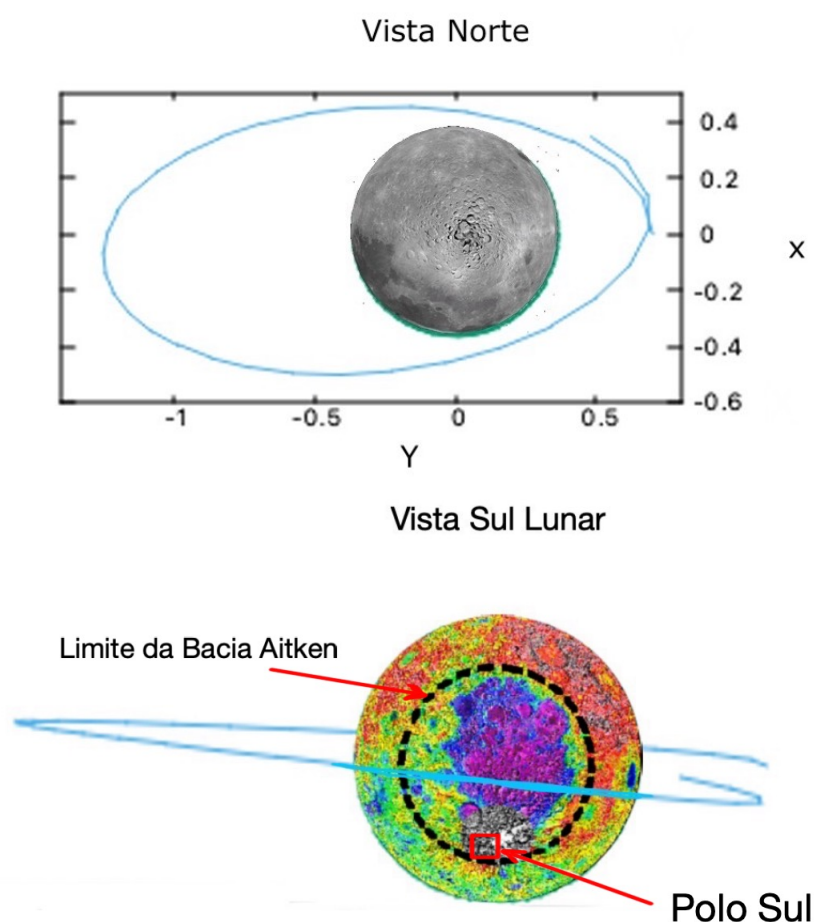


Fonte: Elaborado pelo autor.

Já a Figura 46 mostra a órbita vista da região norte e sul lunar, sendo que esta última está em destaque a região da bacia Aitken³, destacada com uma linha tracejada preta sobre a região sul. A seta vermelha indica exatamente o polo sul lunar.

Para calcular o tempo de residência da partícula sobre a bacia, os dados de posição de cada ponto da simulação foram analisados e os dados fora da região da bacia foram descartados. Cada vez que a partícula passa pela região da bacia, seu tempo de voo sobre ela é de aproximadamente 58 minutos. Traçando as órbitas no tempo de 365 dias, verificou uma quantidade superior a 20 voos sobre a região da bacia.

Figura 46 – Órbitas (Norte e Sul) - $I = 60^\circ$, $\Omega = 90^\circ$, $\omega = 180^\circ$, $e = 0,379227$ e $a = 3312$ km (170 dias)



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.6 CONCLUSÕES

Essa primeira conclusão do trabalho trata do caso Garatêa-L, missão espacial brasileira que enviará uma sonda para a Lua. O projeto inicial da missão era colocar a sonda em uma órbita congelada, com inclinação de 52° , excentricidade de 0,54, semieixo maior de 4995 km e argumento do periselene de 270° . O tempo de vida útil da missão deverá ser de 6 meses, cujos objetivos contemplam a astrobiologia, procurando contribuir com os estudos sobre o surgimento da vida na Terra e com a possibilidade de início de vida em outro lugar. Além dessa pesquisa, a missão pretende produzir dados que possibilitem

³ Bacia Aitken <http://www.psr.d.hawaii.edu/Dec96/IceonMoon.html>

melhorar os estudos sobre a manutenção da vida humana em viagens espaciais que irão contribuir com o futuro de missões tripuladas em espaço profundo e estudar a bacia do polo sul lunar (Aitken Basin), por sua riqueza de minerais e água.

Para verificar as possíveis órbitas de interesse da missão, adotamos na integração numérica os coeficientes gravitacionais J_2 , J_3 e C_{22} da Lua e os parâmetros da Terra como corpo perturbador, usando o integrador Büllirsch-Störmer do pacote Mercury Chambers (CHAMBERS, 1999) em um intervalo de tempo de 1 ano, estabelecendo uma órbita de referência de 300 km de altitude no periselene e 3000 km de altitude no aposelene. Calculamos, a partir desses valores, o semieixo maior ($a = 3387,4$ km) e excentricidade ($e = 0,3985$) e estabelecemos uma região de estudo para o raio do periselene (± 100 km) e para o raio do aposelene (± 500 km).

Produzimos uma grade de a versus e , para analisar o tempo de vida útil da partícula na região estabelecida, dividida em 400 pontos (20 versus 20) com condições iniciais de semieixo maior, excentricidade, inclinação, argumento do periselene e ângulo do nodo ascendente, para um total de 7 inclinações, variando de 60° a 90° , com intervalo de 5° .

Os resultados mostraram que as órbitas com maior tempo de vida possuem inclinações de 60° e 65° , onde casos específicos de partículas, com semieixo maior de 3460 km e excentricidade de 0,38 aproximadamente, permanecem nessa região por um período aproximando de 180 dias, tempo estimado da missão. Do total de partículas com essas inclinações, 26,8% com inclinações de 60° e $\Omega = 0^\circ$, 41,8% com inclinações de 60° e $\Omega = 270^\circ$, 1,5% com inclinações de 60° e $\Omega = 90^\circ$ e 2,0% com inclinações de 60° e $\Omega = 90^\circ$ permaneceram nessa região com tempo estimado para a realização dos experimentos da missão. Para inclinações maiores que 65° , o tempo de permanência cai consideravelmente, em torno de 60 dias ou menos.

Dentro da análise de permanência da partícula na região de estudo, verificou-se que a mudança no valor do ângulo da longitude no nodo ascendente inverte as condições da partícula. Fixando a inclinação em 60° , para $\Omega = 0^\circ$, o tempo de permanência aumenta com excentricidades maiores e semieixos menores. Porém, para $\Omega = 90^\circ$, o tempo de permanência evolui de forma oposta, ou seja, aumenta com excentricidades menores e semieixos maiores. A razão para isso é que a mudança do ângulo da longitude do nodo ascendente afeta a interação gravitacional com o corpo central e também com o corpo perturbador. Essas forças podem afetar a forma e a orientação da órbita do satélite ao longo do tempo.

Outro aspecto analisado foi a variação percentual da posição da partícula em relação a sua posição inicial. Assim, para uma determinada partícula, com valores iniciais de semieixo maior e excentricidade, variando sua inclinação de 60° a 90° , podemos observar o quanto há de desvio dentro do limite do intervalo do raio do aposelene R_a (± 500 km) e raio do periselene R_p (± 100 km). Foram geradas 28 grades com desvio percentual no raio do periselene e mais 28 grades com desvio percentual no raio do aposelene, variando a inclinação e ângulo do nodo ascendente, conforme simulação anterior, totalizando 56 grades.

Adotamos como variação aceitável 33,3% para o desvio do periselene e 16,7% para a variação do aposelene. Os resultados mostraram que as inclinações de 60° e 65° obtiveram os menores desvios do periselene e para o aposelene, a maioria das órbitas estavam dentro do limite aceitável, com exceção

para as órbitas de $i = 70^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, $i = 75^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$, $i = 75^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, $i = 80^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ e $i = 80^\circ$ e $\Omega = 180^\circ$, variaram em mais de 50%.

Passamos a verificar a variação dos elementos orbitais de algumas partículas com tempo de permanência adequado (170 dias) e outras com tempo de permanência menores (80 dias e 40 dias). Verificamos a variação do semieixo maior, excentricidade e inclinação. A partícula teste com maior tempo na região de estudo obteve pouca variação dos elementos orbitais analisados e em contrapartida, as outras partículas-teste variaram significativamente os seus elementos orbitais, principalmente no intervalo de 6 meses, tempo estimado para o término da missão. Além disso, suas órbitas não contemplam passagens pelo polo sul lunar de forma significativa, o que impediria um dos objetivos da missão, que será fotografar essa região o maior número de vezes possíveis. Essa análise foi possível a partir da verificação das coordenadas (x, y, z) da partícula ao longo do tempo, juntamente com as coordenadas da região do polo sul lunar.

Ao analisar as órbitas com inclinações de 60° , especialmente com $\Omega = 90^\circ$, a partícula sobrevoará essa região por aproximadamente 20 vezes, com tempo de 58 minutos, dentro do intervalo de 6 meses. Cabe ressaltar que as informações sobre a resolução da câmera espectral ou hiperspectral não é especificada no projeto e esta deve ter resolução suficiente para cumprir a missão dentro das variações de excentricidade e semieixo no intervalo de revisita e com 58 minutos de observação, aproximadamente.

Assim, órbitas que apresentam condições iniciais de inclinação de 60° e $\Omega = 0^\circ$, inclinação de 60° e $\Omega = 90^\circ$, inclinação de 60° e $\Omega = 270^\circ$ e poucas partículas com inclinações de 65° e $\Omega = 0^\circ$ podem ser órbitas razoáveis para a missão estudada.

Considerando as órbitas citadas acima, concluímos que a órbita mais adequada para a missão deve possuir os seguintes elementos orbitais:

- $i = 60^\circ$
- $\Omega = 90^\circ$
- $\omega = 180^\circ$
- $e = 0,379227$
- $a = 3312 \text{ km}$

4 ÓRBITAS PERIÓDICAS

Há alguns anos, as agências espaciais tem intensificado seus esforços em visitar pequenos corpos do sistema solar, com missões e envio de sondas para asteroides e cometas a fim de estudar a dinâmica desses corpos. Devido a esse avanço, vários modelos simplificados foram desenvolvidos para estudar e conhecer o ambiente complexo ao redor desses asteroides, uma vez que a maioria desses corpos possuem formas irregulares. Em uma missão, preocupações de como se representa o campo gravitacional ao redor desses corpos e pontos de equilíbrio, têm sido fundamentais para a compreensão da dinâmica de pequenos corpos ao redor de asteroides.

Para corpos como esses, a maneira clássica de expandir o potencial gravitacional em uma série de polinômios de Legendre geralmente é divergente em alguns pontos porque o raio de convergência é maior que o raio da órbita que engloba o corpo (BALMINO, 1994). Outros caminhos alternativos existentes, como o modelo do poliedro homogêneo, são bem completos, porém com um alto grau de complexidade na sua aplicação, devido a existência de muitos parâmetros livres (ELIPE et al., 2021).

Devido a isso, tem se buscado modelos mais simples e eficazes na busca da função potencial, como o caso composto por um dipolo de massa rotativo, fixo em relação a um ponto de referência (PRIETO-LLANOS; GOMEZ-TIERNO, 1994). Nesse modelo, é procurado os pontos de equilíbrio do sistema e sua estabilidade, estudando o movimento e controle de uma sonda nas proximidades desses pontos. Outro problema similar foi apresentado por Palacios et al. (2019), que consiste em um problema de quatro corpos, sendo um de massa infinitesimal, e outros três alinhados e equidistantes entre si. Nesse trabalho, é estudado a evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas a medida que o parâmetro de massa evolui.

Assim, a análise de órbitas periódicas simétricas pode contribuir para melhorar a eficiência de missões espaciais, prolongando a vida útil de satélites ou espaçonaves, além de colaborar para uma melhor compreensão de sistemas dinâmicos e de desenvolvimento de novas ferramentas e técnicas analíticas.

Devido a importância do estudo de órbitas periódicas, existe a necessidade de uma abordagem mais sistemática, explicando a existência de todas as órbitas periódicas conhecidas e suas propriedades, classificando-as e buscando propriedades ainda não conhecidas (HÉNON, 1997).

As primeiras sistematizações para famílias de órbitas periódicas surgem a partir do problema restrito de três corpos, adotando a massa do terceiro corpo tendendo a zero ($\mu \rightarrow 0$), reduzindo basicamente a um problema de dois corpos. Pode-se então entender os resultados para valores diferentes de zero para μ usando métodos de perturbações.

As órbitas periódicas nos quais a distância mínima do segundo corpo ao terceiro corpo permanece finita, no limite de $\mu \rightarrow 0$, são chamadas de Órbitas Periódicas de Primeira Espécie, ideia já conhecida por Poincaré no século XIX (HÉNON, 1997). Quando essa distância mínima tende a zero, no limite de $\mu \rightarrow 0$, temos as Órbitas Periódicas de Segunda Espécie, que desenvolve um papel importante na navegação espacial, pois nas proximidades de planetas e outros corpos celestes, podem ser usadas para alterações de velocidade sem gastar energia, técnica conhecida como *flyby*.

A existência de um número elevado de órbitas periódicas leva a classificá-las em famílias, que, por definição, é um conjunto de órbitas periódicas simétricas para as quais o parâmetro inicial $x(0)$, a constante de Jacobi inicial e o período fundamental (menor período positivo) podem ser considerados como funções contínuas de um único parâmetro.

Essas famílias são identificadas com várias letras com ou sem subscritos, sem significado algum, apenas por rótulos (BROUCKE, 1968). As famílias geradas são correspondentes a nove famílias naturais, que iniciam com órbitas circulares de raios muito pequenos ou grandes, ou em um dos pontos de equilíbrio de Lagrange. Stromgren (1935) estudou um caso específico de órbitas periódicas, adotando $\mu = 0,5$ e nomeou-as como $a, b, c, \dots$. Broucke (1968), estudando o sistema Terra-Lua ($\mu = 0,012155$) e no estudo do sistema Sol-Júpiter ($\mu = 0,00095388$), Bruno (1993) acompanhou as famílias geradoras correspondentes, adotando classificações semelhantes.

A tabela 7 mostra a correspondência usadas por Stromgren, Broucke e Bruno.

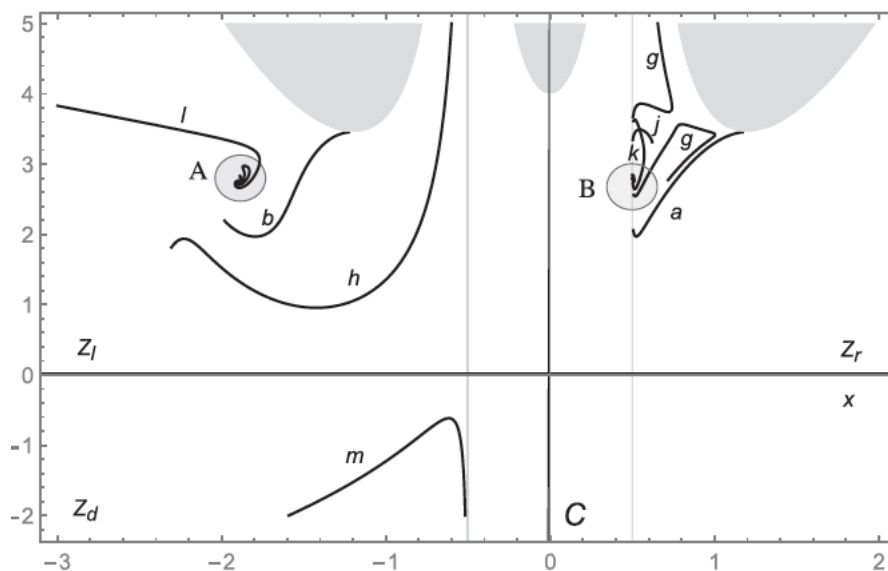
Tabela 7 – Nome das nove famílias naturais

Stromgren	a	b	c	f	g	h	i	l	m
Broucke	I	J_1	G	C	H_1, H_2	A_1	BD	E_1	F
Bruno	$L2$	$L3$	$L1$	$E + 1/1$	$2T_1$	$IR+$	$ID1$	$ID - 1$	$IR-$

fonte: Hénon (1997).

Uma família de órbitas periódicas é representada por uma curva suave no espaço das condições iniciais dos parâmetros do sistema (x, C) , onde x representa a posição inicial da órbita e C a constante de Jacobi, conforme Figura 47.

Figura 47 – Família de Órbitas Periódicas Simétricas - Exemplo



fonte: Elipe et al. (2021).

O método consiste em usar a constante de Jacobi

$$C = 2V - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (1)$$

obtendo como resultado $\dot{y}_0^2 = 2V(x_0, 0) - C$ e V é o potencial efetivo.

Assim, considerando as condições iniciais no plano (x, C) , constrói-se uma grade regular neste plano (x_i, C_i) , $1 \leq i \leq N$, sendo que $N \in \mathcal{N}$, (ELIPE et al., 2021).

A partir daí, extrai-se dois pontos consecutivos (x_i, C_k) e (x_{i+1}, C_k) e integra

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2)$$

$$\ddot{y} - 2\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (3)$$

para as condições iniciais até o instante $\frac{T}{2}$, no qual a órbita cruza novamente o eixo x (PALACIOS et al., 2019).

O sistema 2 e 3 é invariante sob a simetria $(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \rightarrow (x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t)$. Como existe essa simetria, encontra-se órbitas periódicas que são simétricas em relação ao eixo Ox . Assim, a órbita cruzará ortogonalmente o eixo das abscissas duas vezes por período.

Para as condições iniciais em $t_0 = 0$,

$$(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, 0) = (x_0, 0, 0, \dot{y}_0) \quad (4)$$

No instante $\frac{T}{2}$, que corresponde a meio período, a solução de 2 e 3 será:

$$(x_{\frac{T}{2}}, y_{\frac{T}{2}}, \dot{x}_{\frac{T}{2}}, \dot{y}_{\frac{T}{2}}, \frac{T}{2}) = (x_{\frac{T}{2}}, 0, 0, \dot{y}_{\frac{T}{2}}) \quad (5)$$

que resulta em primeiro cruzamento no eixo x :

$$y(x_0, 0, 0, \dot{y}_0, \frac{T}{2}) = 0 \quad (6)$$

$$\dot{x}(x_0, 0, 0, \dot{y}_0, \frac{T}{2}) = 0 \quad (7)$$

onde $(x_0, 0, 0, \dot{y}_0)$ são as condições iniciais de uma órbita periódica simétrica de período T .

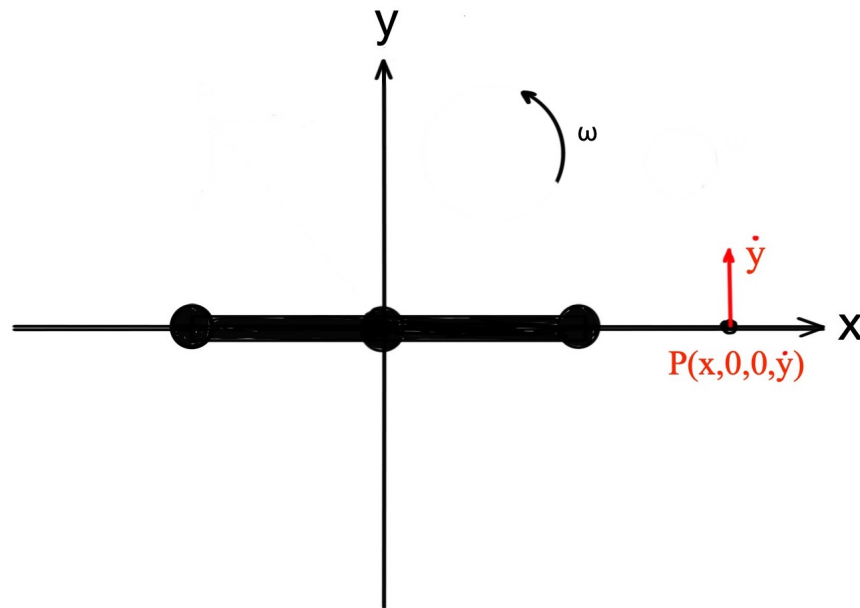
No mapa de famílias de órbitas periódicas simétricas temos 4 regiões definidas pelo valor de x e C (Figura 47). No primeiro quadrante temos x e C positivos, no segundo quadrante x negativo e C positivo e assim sucessivamente. Como o valor de $\dot{y}_0^2$ é definido pela equação abaixo

$$\dot{y}_0^2 = 2V(x_0, 0) - C, \quad (8)$$

onde V é o potencial efetivo, positivo, o valor de $\dot{y}_0^2$ vai depender da Constante de Jacobi (C). Porém, independente do valor de C , $\dot{y}_0^2$ será sempre positivo, uma vez que $C \leq 2V$. A partir dessas informações combinadas com x_0 , as quatro regiões delimitadas no gráfico também podem ser interpretadas como famílias de órbitas periódicas simétricas prógradas ($x > 0$) e retrógradas ($x < 0$), para C positivo.

A Figura 48 mostra o sistema:

Figura 48 – Sistema Tripolo-Segmento



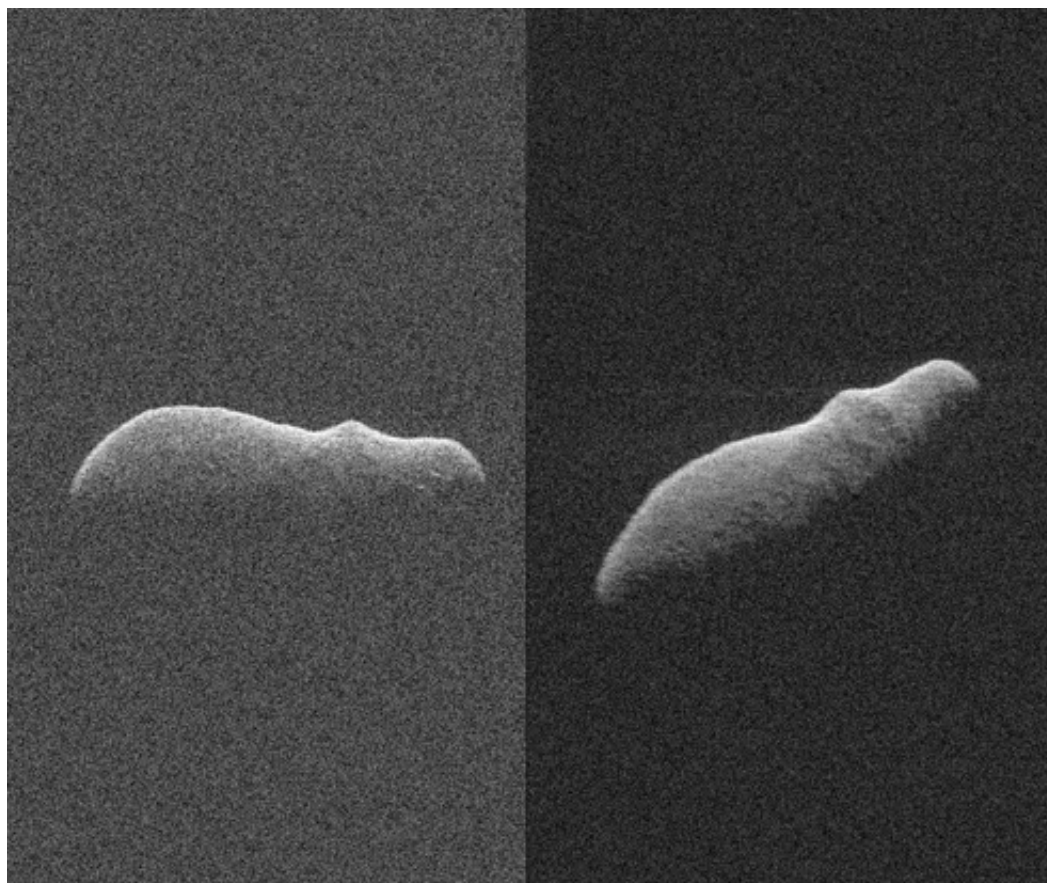
Fonte: Elaborado pelo autor.

A proposta de nosso estudo é desenvolver um modelo alternativo para estudos qualitativos das propriedades dinâmicas em asteroides em forma de alteres, denominado tripolo-segmento, composto por dois corpos em cada extremidade e um corpo sobre a haste. Modelos envolvendo corpos alongados por um segmento maciço foi desenvolvido por Riaguas, Elife e Lopez-Moratalla (2001) e mais recentemente por Elife et al. (2021). Neste último, a análise foi feita para dois corpos posicionados na extremidade de uma haste, denominado Dipolo-Segmento, sugerindo uma aproximação para se estudar o asteroide Kleopatra (SPACESHOP, 2015).

Nesse modelo, estudaremos as evoluções dos pontos de equilíbrio do sistema e das curvas de velocidade zero. De acordo com Murray e Dermott (1999), essas curvas são regiões no qual a partícula é excluída, que considera a sua velocidade zero em relação ao corpo central.

Nesse mesmo sentido, propomos o estudo do asteroide Holiday (TECHNOLOGY, 2018), (Figura 49) usando o sistema Tripolo-Segmento como aproximação. Holiday foi descoberto em 2003, por astrônomos do Lowell Observatory Near-Earth-Object Search (LONEOS) em Flagstaff, Arizona - um projeto de pesquisa inicial de Near-Earth Object (NEO) apoiado pela NASA que não está mais em operação. Possui 1,6 km de comprimento, período de rotação de aproximadamente 12 dias e é classificado como "asteroide potencialmente perigoso", devido ao seu tamanho e proximidade da órbita terrestre, aproximadamente 4 milhões de quilômetros. Assim, esse estudo ganha relevância, contribuindo para futuras missões que tenham como objetivo a aproximação em relação a esse asteroide.

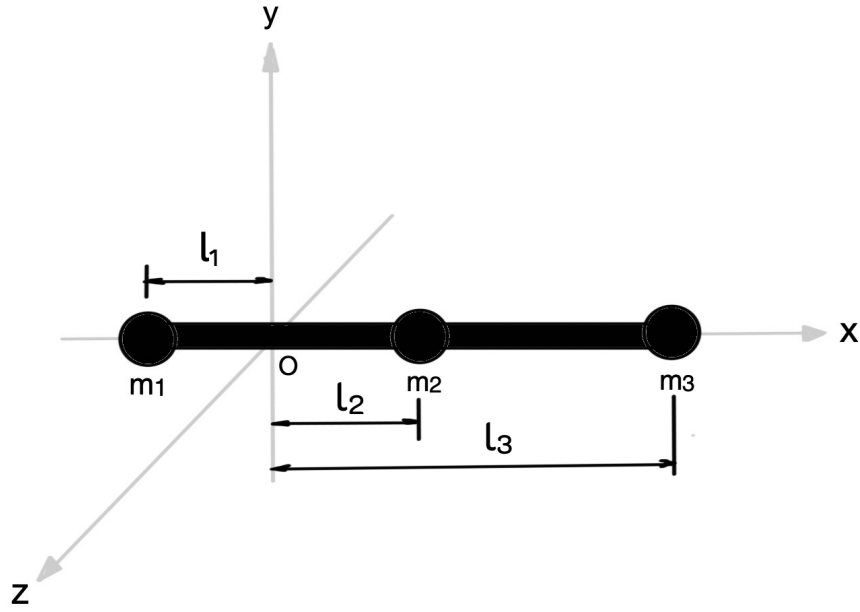
Figura 49 – Asteroide Holiday



Fonte: Technology (2018).

O sistema Tripolo-Segmento (Figura 50) consiste em três massas pontuais e uma haste, sendo uma massa sobre a haste e duas massas nas extremidades dessa haste. Foi considerado como origem do sistema de coordenadas a posição do centro de massa, localizado entre m_1 e m_2 , e a distância de m_2 a origem sempre menor que m_3 a origem. Desenvolvido o potencial, foram geradas os mapas de famílias de órbitas periódicas simétricas sobre um único eixo de simetria (Ox) e consequentemente suas análises, variando parâmetros de massas pontuais, massa e comprimento da haste e distância entre a massa sobre a haste e as extremidades.

Figura 50 – Tripolo-Segmento



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1 POTENCIAL DO TRIPOLLO-SEGMENTO

Consideremos um segmento de massa M e comprimento l . Vamos também considerar três massas pontuais m_1 , localizada na extremidade esquerda da haste, m_2 , localizada em um ponto qualquer da haste e fora das extremidades e m_3 , localizada na extremidade direita da haste. Assumimos que este corpo está girando uniformemente no plano XY com velocidade angular constante ω em torno de seu centro de massa O . Consideremos o sistema $Oxyz$ tal que $Oz = OZ$, e o corpo é colocado permanentemente no eixo rotativo Ox . O movimento de uma massa infinitesimal movendo-se sob a força gravitacional atrativa deste corpo será denominado problema TS (Tripolo-Segmento).

Assumimos que

$$m = m_1 + m_2 + m_3, \quad (9)$$

$$M_t = M + m, \quad (10)$$

$$l = l_1 + l_3, \quad (11)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (12)$$

$$\mu_x = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (13)$$

$$1 - \mu - \mu_x = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (14)$$

$$\mu_s = \frac{M}{M_t} \quad (15)$$

Vamos admitir também: $(-l_1, 0, 0)$, $(l_2, 0, 0)$ e $(l_3, 0, 0)$, as coordenadas de m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente.

A partir dessas definições, temos:

$$\frac{m_1}{M_t} = (1 - \mu - \mu_x)(1 - \mu_s), \quad (16)$$

$$\frac{m_2}{M_t} = \mu(1 - \mu_s) \quad e \quad (17)$$

$$\frac{m_3}{M_t} = \mu_x(1 - \mu_s) \quad (18)$$

Passamos agora a calcular as coordenadas do centro de massa (x_0, y_0, z_0) . Como o corpo está no eixo x, as coordenadas podem ser escritas como: $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, 0, 0)$.

$$x_0 = \frac{1}{M_t} \left[-m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 + \int_{-l_1}^{l_3} \rho x dx \right] \quad (19)$$

onde ρ é a densidade linear da haste (segmento).

Assumindo que a densidade seja constante, $\rho = \frac{M}{l} = \frac{M}{l_1 + l_3}$, temos:

$$x_0 = \frac{1}{M_t} \left[-m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 + \frac{M}{2(l_1 + l_3)} (l_3^2 - l_1^2) \right] \quad (20)$$

Como a origem do sistema de coordenadas está no centro de massa, $x_0 = 0$, obtemos:

$$\frac{l_3}{M_t} (M_t - m_2) = \frac{l_1 + l_3}{M_t} (m_1 + \frac{M}{2}) - \frac{m_2 l_2}{M_t} \quad (21)$$

Admitindo que $l_x = l_3 - l_2$, que corresponde a distância entre a massa m_2 e a massa m_3 , temos

$$l_3 = l \left[(1 - \mu - \mu_s)(1 - \mu_s) + \frac{\mu_s}{2} \right] + l_x \mu (1 - \mu_s) \quad (22)$$

Agora, calcularemos o potencial gravitacional criado pelo problema TS. O potencial total será o resultado da soma do potencial de cada corpo, resultando em quatro termos, três massas e o segmento. Para o potencial do segmento, usaremos o já desenvolvido em (RIAGUAS; ELIPE; LOPEZ-MORATALLA, 2001). Logo,

$$U = -GM_t \left(\frac{(1 - \mu - \mu_x)(1 - \mu_s)}{r_1} + \frac{\mu(1 - \mu_s)}{r_2} + \frac{\mu_x(1 - \mu_s)}{r_3} + \frac{\mu_s}{l} \log \left(\frac{r_1 + r_3 + l}{r_1 + r_3 - l} \right) \right) \quad (23)$$

em que G é a constante gravitacional, r_1 , r_2 e r_3 são os vetores posições de um ponto P qualquer de coordenada (x, y, z) em relação aos corpos m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente (Figura 48).

Assim,

$$r_1^2 = ((x + l_1)^2 + y^2 + z^2), \quad (24)$$

$$r_2^2 = ((x - l_2)^2 + y^2 + z^2) \quad e \quad (25)$$

$$r_3^2 = ((x - l_3)^2 + y^2 + z^2). \quad (26)$$

Como o Tripolo-Segmento está referenciado sobre o eixo x , a equação de movimento é dada por:

$$r'' + 2\omega \times r' + \omega \times (\omega \times r) = -\nabla U \quad (27)$$

Que resulta em

$$x'' - 2\omega y' = \omega^2 x - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (28)$$

$$y'' + 2\omega x' = \omega^2 y - \frac{\partial U}{\partial y} \quad e \quad (29)$$

$$z'' = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (30)$$

Logo, o potencial efetivo é dado por:

$$V = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{\omega^2} U \quad (31)$$

Substituindo a equação (23) na equação (31), obtemos:

$$V = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + k \left(\frac{(1 - \mu - \mu_x)(1 - \mu_s)}{r_1} + \frac{\mu(1 - \mu_s)}{r_2} + \frac{\mu_x(1 - \mu_s)}{r_3} + \frac{\mu_s}{l} \log \left(\frac{r_1 + r_3 + l}{r_1 + r_3 - l} \right) \right) \quad (32)$$

onde k é um parâmetro adimensional dado por:

$$k = \frac{GM_t}{\omega^2 l^3} \in (0, \infty). \quad (33)$$

O problema Tripolo-Segmento apresenta duas restrições:

1. $l_2 < l_3$
2. $l_1 < x_{CM} < l_2$

Todo o potencial efetivo foi escrito em função dos parâmetros de massas dos corpos (μ e μ_x) e da haste (μ_s), do comprimento da haste (l), das distâncias da partícula em relação aos corpos 1, 2 e 3 (r_1 , r_2 e r_3), do parâmetro k e das posições x e y da partícula. Assim, as posições dos corpos estão associadas as respectivas massas, desenvolvido de forma que a posição do centro de massa se localiza entre m_1 e m_2 . Por isso a segunda restrição do modelo. A primeira restrição se estabelece uma vez que a distância entre m_2 e m_3 deve ser positiva, devido a localização dessas massas estarem no sentido positivo do eixo Ox .

4.2 TIDES

Para a produção do mapa de órbitas periódicas, usamos inicialmente o pacote de software TIDES - *Taylor series Integrator for Differential Equations* - (ABAD et al., 2012), que utiliza o método da série de Taylor para a integração numérica de EDOs (Equações Diferenciais Ordinárias). Em diversos

estudos de sistemas dinâmicos, como no caso de órbitas periódicas, as integrações dos sistemas diferenciais são feitas pelo método de Taylor, o que torna esse pacote uma ferramenta poderosa na determinação de resultados. O método de integração usando a série de Taylor permite o cálculo de órbitas periódicas com precisão estendida, possibilitando estudos de regiões estáveis e instáveis, um ganho a mais do que outros métodos de integrações (BARRIO; BLESÁ, 2009).

O pacote combina uma etapa de processamento no software Mathematica, gerando programas em Fortran ou C com uma biblioteca em C. Possui duas partes principais: o pacote Mathematica, MathTIDES e a biblioteca C, LibTIDES, conforme tabela 8.

Tabela 8 – TIDES

Pacote		Linguagem
MathTIDES	Pré-processador	Mathematica
LibTIDES	Biblioteca	C

Fonte: Abad et al. (2012).

Os resultados foram gerados a partir de um programa chamado SPO2D - Symmetric Periodic Orbits 2D, desenvolvido e disponibilizado pelo autor Alberto Abad em comunicação privada, e adaptado para o caso Tripolo Segmento. No SPO2D as condições iniciais dadas são os parâmetros:

1. k (constante de movimento médio)
2. μ (parâmetro de massa do corpo 2)
3. μ_s (parâmetro de massa da haste)
4. μ_x (parâmetro de massa do corpo 3)
5. l_x (distância entre o corpo 2 e corpo 3)

É necessário também definir nesse arquivo de entrada os limites da constante de Jacobi e da posição. Além disso, podemos definir também o número de pontos da grade que definirá as famílias de órbitas periódicas.

A partir do arquivo de saída, é gerado as famílias de órbitas periódicas (SPO), através das rotinas desenvolvidas no software Mathematica. A primeira rotina analisa a simetria da equação de movimento:

Em relação ao eixo x:

$$(t, x, y) \rightarrow (-t, x, -y) \quad (34)$$

$$(t, \dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (-t, -\dot{x}, \dot{y}). \quad (35)$$

Em relação ao eixo y:

$$(t, x, y) \rightarrow (-t, -x, y) \quad (36)$$

$$(t, \dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (-t, \dot{x}, -\dot{y}). \quad (37)$$

A partir daí, registra as condições para $y = 0$ para simetria Ox e $x = 0$ para a simetria Oy . O programa separa as condições encontradas para os casos de $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$.

As condições registradas nos resultados são:

$$x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0 = (x_0, 0, 0, \dot{y}_0), \quad (38)$$

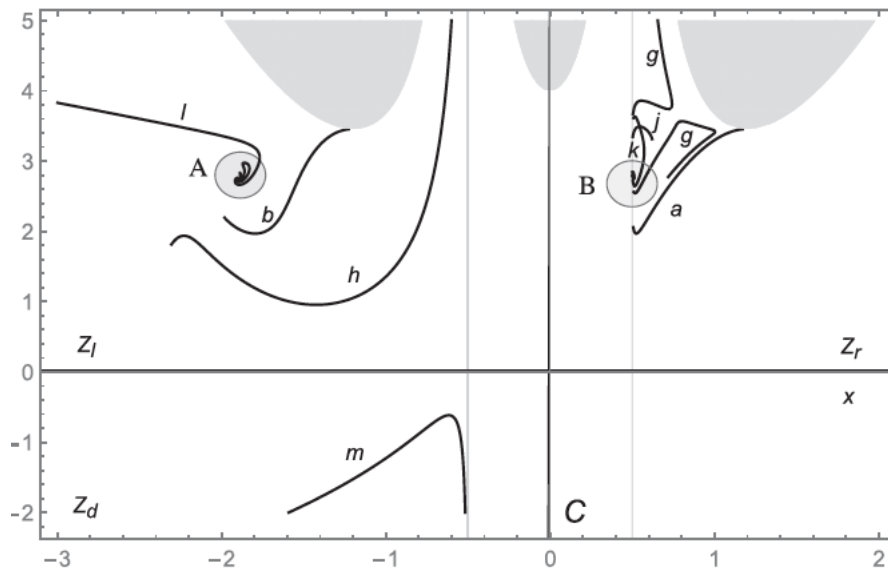
que descrevem uma órbita periódica simétrica.

O tratamento dos resultados é feito através do pacote SPO2D.m, que irá buscar os dados em outras duas rotinas: Init.m e TripoleSegment.n. O primeiro faz o registro do programa no Mathematica e o segundo hospeda o potencial gravitacional e derivada do potencial, para que sejam gerados os pontos de equilíbrio do sistema e o conjunto de órbitas periódicas simétricas.

4.3 CASO DIPOLO-SEGMENTO (DS)

O sistema Dipolo-Segmento (DS) consiste em dois corpos na extremidade de uma haste. Quando é negligenciado a massa da haste ($\mu_s = 0$), o sistema se restringe a um problema restrito de três corpos. A Figura 51 mostra o mapa das Famílias de Órbitas Periódicas Simétricas para esse caso, adotando $\mu = 0,5$ e $k = 1$. Nesta figura, fica claro uma região de inexistência de famílias de órbitas periódicas simétricas em virtude da existência da haste. Essa região pode ser comparada na Figura 53, em Z_2 e Z_3 .

Figura 51 – Família de órbitas peródicas simétricas - Dipolo-Segmento, caso $\mu_s = 0$, $\mu = 0,5$ e $k = 1$



Fonte: Elipe et al. (2021).

A partir do resultado produzido pelo sistema DS (Figura 51), verificamos a compatibilidade do potencial e as rotinas estabelecidas no desenvolvimento das órbitas periódicas simétricas no caso do Tripolo-Segmento, em condições que particularizam para o caso do DS, admitindo as seguintes condições iniciais:

- $k = 1$ (constante de rotação do corpo)

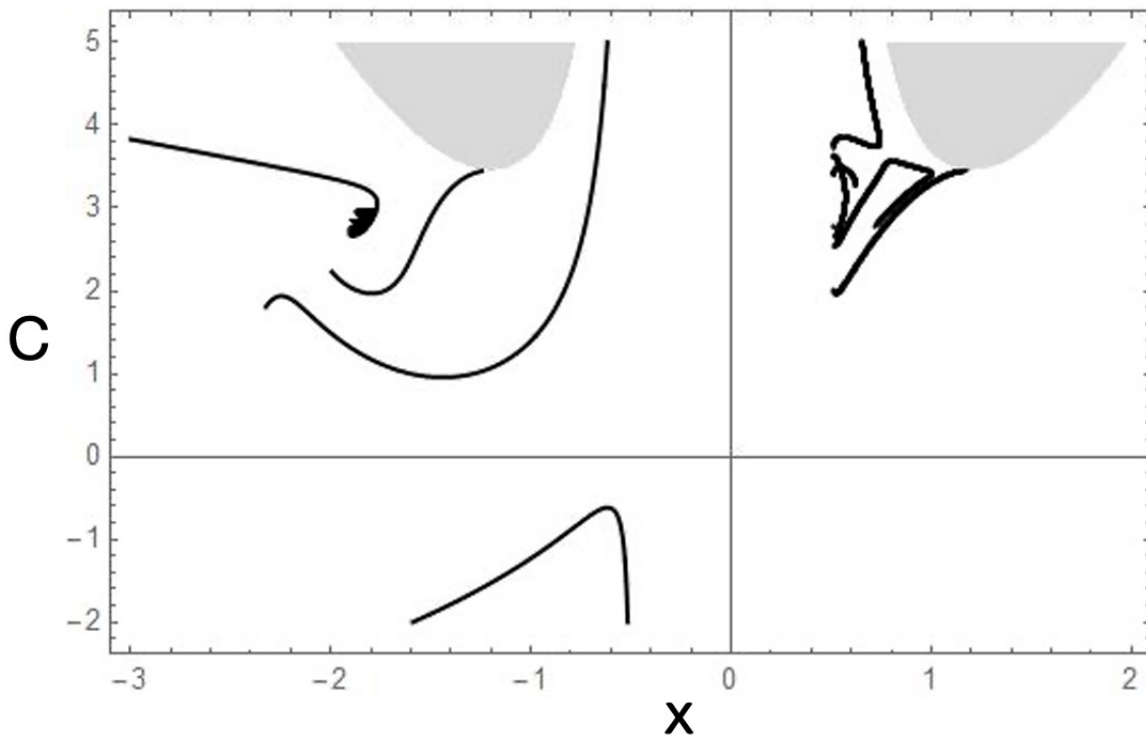
- $\mu = 0$ (parâmetro de massa do corpo 2)
- $\mu_s = 0$ (parâmetro de massa da haste)
- $\mu_x = 0,5$ (parâmetro de massa do corpo 3)
- $l_x = 0$ (distância entre o corpos 2 e 3)

A Figura 52 mostra a reprodução do mesmo conjunto de famílias, do caso apresentado por Elipse et al. (2021) no problema DS.

Há uma diferença sutil entre a Figura 52 e a Figura 51. A região proibida central, com coordenadas $(0;4,5)$ desaparece. A explicação para isso decorre do fato que corpos com segmentos, como o caso do sistema DS e TS, limitam o movimento na região entre m_1 e m_2 , para o sistema DS e entre m_1 e m_3 para o sistema TS. Porém, para o caso do DS (Figura 51) o autor simplificou o problema para o caso sem haste, aparecendo a região proibida limitada pela curva de velocidade zero ao redor do eixo x . As famílias dessa região, na Figura 51, não foram apresentadas, mas são as mesmas existentes na Figura 53.

Para o Tripolo-Segmento, em análise do primeiro caso, quando negligenciamos a massa da haste, assumimos a possibilidade de existir órbitas entre as massas. Porém, o nosso objetivo é estudar as órbitas das famílias que estão fora da região proibida descrita anteriormente, e essa análise já foi discutida em (PALACIOS et al., 2019).

Figura 52 – Família de órbitas periódicas simétricas - Tripolo-Segmento, caso $\mu_s=0$, $\mu_x=0,5$, $\mu_x=0$ e $k=1$



Fonte: Elaborado pelo autor.

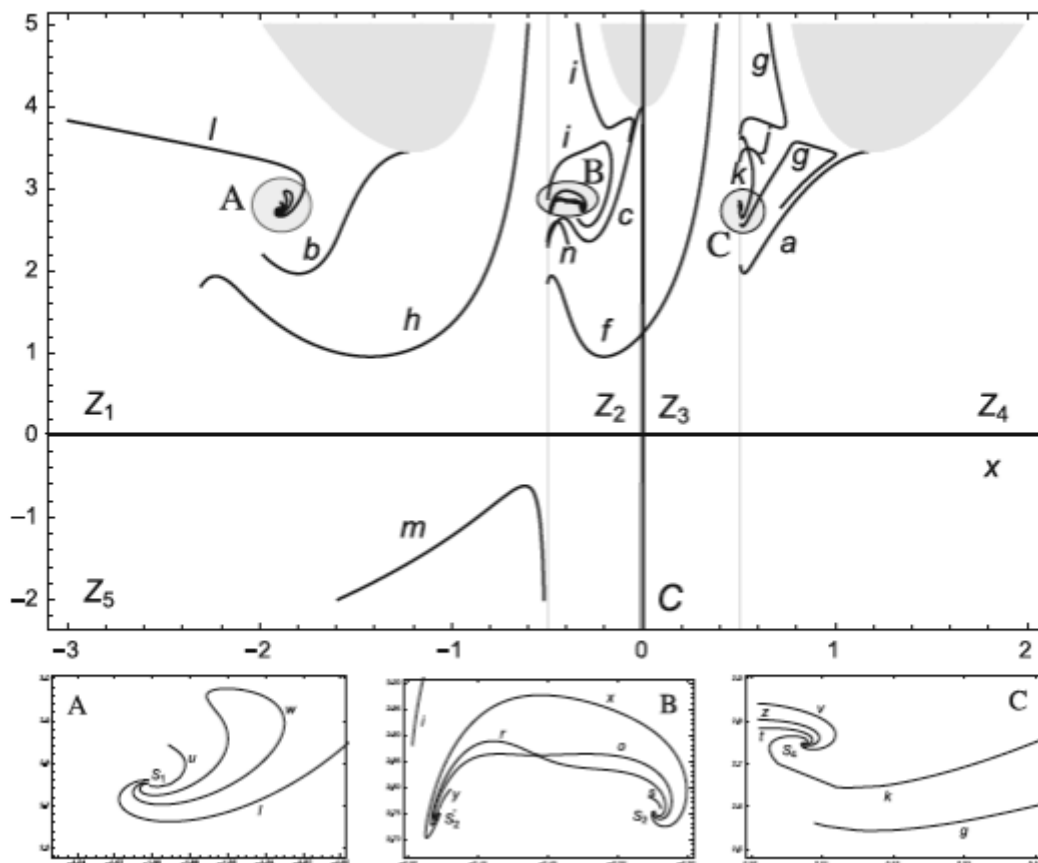
Admitiremos, a partir de então, os mesmos nomes para as famílias já estudadas e descobertas conforme Hénon (1997) e nomearemos as zonas de estudo das famílias segundo Elife *et al*(2021), descritas na Figura 51 como Z_l , Z_r e Z_d .

Na próxima seção, verificaremos a evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas e o surgimento de novas famílias a partir da mudança dos parâmetros de massas dos corpos 1, 2 e 3 e mantendo o parâmetro de massa da haste igual a zero.

4.4 EVOLUÇÃO DAS FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS SIMÉTRICAS - CASO $\mu_s = 0$

Para estudar a evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em termos dos parâmetros de massas μ , μ_x , admitimos $k = 1$, $\mu_s = 0$ e $l_x = 0,5$. O primeiro caso, em que $\mu = 0$ e $\mu_x = 0,5$, coincide com problema do DS apresentado na Figura 51. A Figura 53 mostra a notação de Henón para as famílias existentes. São 22 famílias de órbitas periódicas, denominadas: $a, b, c, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, r, s, t, u, v, w, x, y, z$. Estas famílias estão agrupadas no plano (x, C) , situadas em 5 zonas (Z_1 a Z_5). Como descrito anteriormente, manteremos a nomenclatura das zonas conforme Elife *et al* (2021).

Figura 53 – Nomenclatura das Famílias de órbitas periódicas simétricas



Fonte: Palacios et al. (2019).

Quando o corpo central é considerado, o que é um dos objetivos do presente trabalho, as curvas características das órbitas periódicas mudam dependendo da evolução do parâmetro de massa do corpo (μ). Apresentamos na Figura 54 e Figura 55 a evolução e o surgimento das novas famílias de órbitas

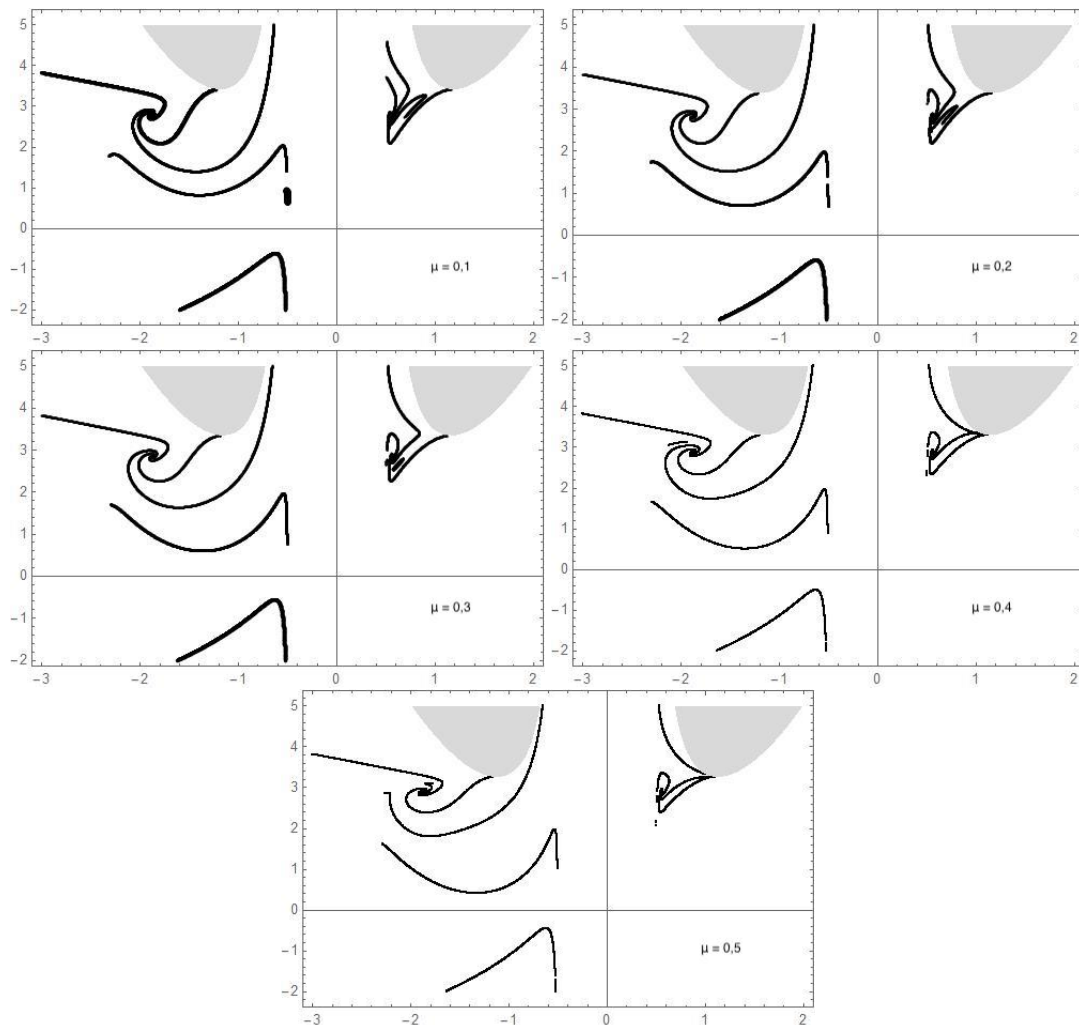
periódicas. O parâmetro de massa μ foi alterado, desde 0,1 a 0,9, em relação a massa total ($m_1 + m_2 + m_3$). O mapa de órbitas periódicas está no plano x, C , onde x é a posição inicial da órbita e C a constante de Jacobi. As linhas geradas foram produzidas em uma grade de 1000 pontos *versus* 1000 pontos.

A partir dos resultados apresentados, vamos concentrar nossa análise na mudança do número e posição dos pontos espirais com o valor de μ e o surgimento de novos pontos espirais.

Outro ponto a ser estudado é que o fato de se colocar um terceiro corpo (corpo 2) e admitir que $l_x = 0,5$, esse corpo está justamente na origem do sistema. Com isso, não pode haver nenhuma órbita periódica que passe pela origem, implicando em mudanças diretas nas famílias f e h , pois possuem órbitas com essas características (PALACIOS et al., 2019).

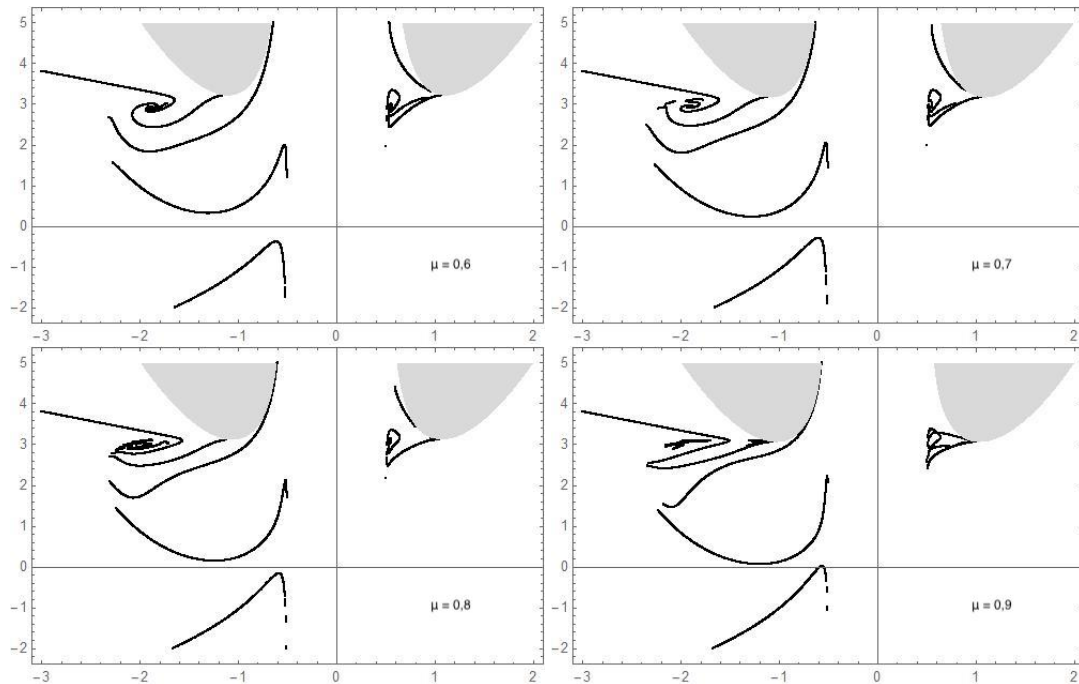
Ainda, como outro ponto a ser estudado, podemos perceber as famílias que desaparecem e outras que surgem.

Figura 54 – Evolução das Curvas Características de Órbitas Periódicas (x, C) para $\mu = 0,1$ a 0,5



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 55 – Evolução das Curvas Características de Órbitas Periódicas (x, C) para $\mu = 0,6$ a $0,9$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Iniciaremos nossa análise nas variações das espirais apresentadas na evolução dos mapas de famílias de órbitas periódicas nas regiões A e B, conforme Figura 51. A Figura 56 apresenta dois casos para a Região A, onde $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$, de forma ampliada. No mesmo sentido, a Figura 57, apresenta a região B para os mesmos valores de μ .

Figura 56 – Evolução das famílias na região A para $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 57 – Evolução das famílias na região B para $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,9$



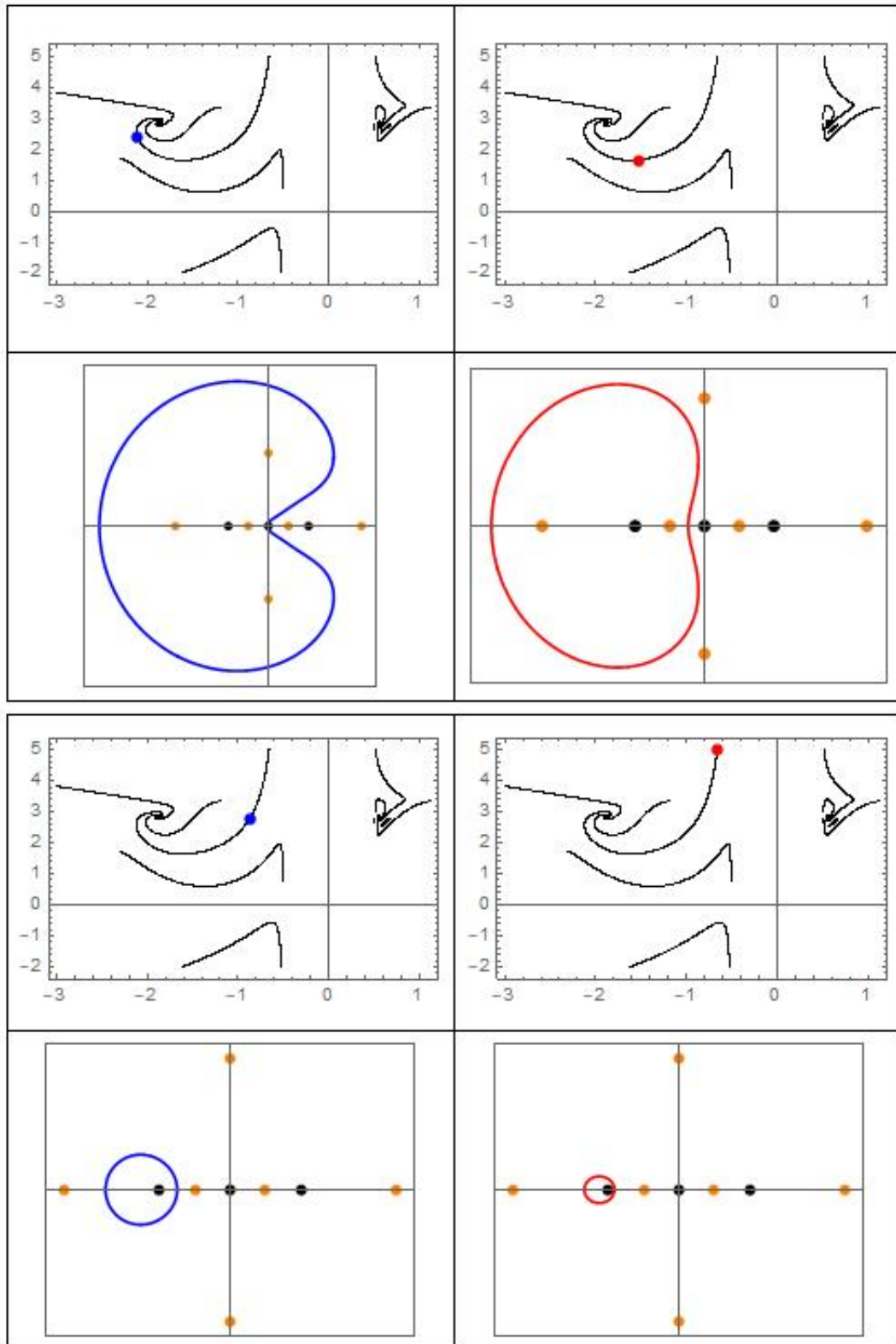
Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos perceber que essas espirais, tanto na região A quanto na região B, possuem os mesmos valores de (x, C) no plano. Isso implica que há um valor para a Constante de Jacobi em comum para esse conjunto de famílias de órbitas periódicas, indicando órbitas assintóticas. Em outras palavras, duas órbitas são assintoticamente próximas se a distância entre elas diminui infinitamente com o tempo, mas nunca atinge zero. Essas órbitas surgem a medida que os pontos lagrangianos tornam-se instáveis ((SZEBEHELY, 1967). Quando evoluímos os valores dos parâmetros de massa ($\mu = 0,9$), essas regiões espirais tendem a ir se desvanecendo.

Como segunda análise, buscaremos entender como o corpo central afeta a família de órbitas periódicas simétricas. Para isso, usaremos como referência a família h para o caso de $\mu = 0,3$ e $\mu = 0,6$.

A Figura 58 (superior) mostra a família h , para $\mu = 0,3$ e quatro pontos que representam uma órbita periódica simétrica. Na parte inferior temos a referida órbita, onde os pontos laranjas representam os pontos de equilíbrio e os pretos, os três corpos. Cada ponto descrito na família representa a órbita plotada nas figuras inferiores. Inicialmente, circundavam os pontos de equilíbrio L_1 , L_3 , L_4 e L_5 , além dos pontos de massa m_1 e m_2 . A medida que esses pontos vão evoluindo na família, da esquerda para a direita, as órbitas tendem a circundar apenas o ponto de massa m_1 .

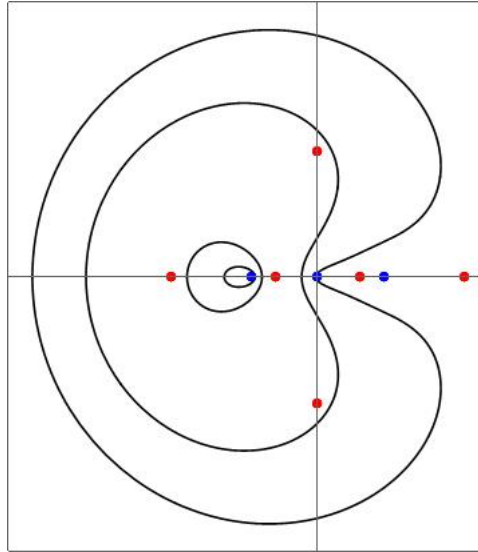
Figura 58 – Órbitas da família h para $\mu=0,3$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 59 mostra as órbitas dessa família, que iniciam com passagem próximas ao corpo central e vão se afastando deste e indo em direção ao corpo da extremidade esquerda. Existe uma evolução para órbitas mais circulares e menores. Os pontos vermelhos representam os pontos de equilíbrio e os azuis os três corpos.

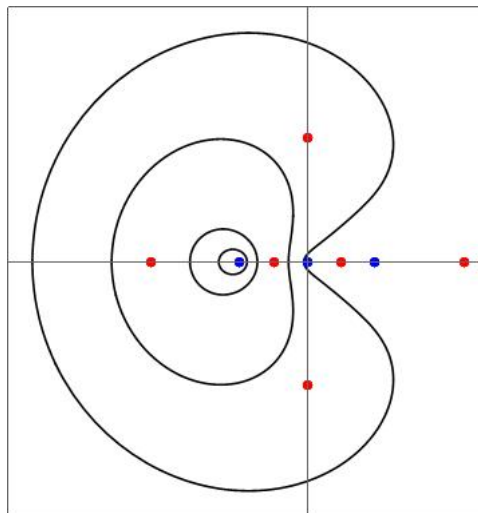
Figura 59 – Conjunto das 4 Órbitas da família h para $\mu=0,3$



Fonte: Elaborado pelo autor.

As órbitas da família h tendem a se modificar em sua evolução para valores maiores de μ , em torno de 0,8. Até esse valor, o comportamento das órbitas quase não se modificam. A Figura 60 mostra 4 órbitas sobrepostas para $\mu = 0,6$. É possível observar que as órbitas repetem o mesmo padrão para $\mu = 0,3$. Nesta figura, os pontos de equilíbrio estão em vermelho e os três corpos em azuis.

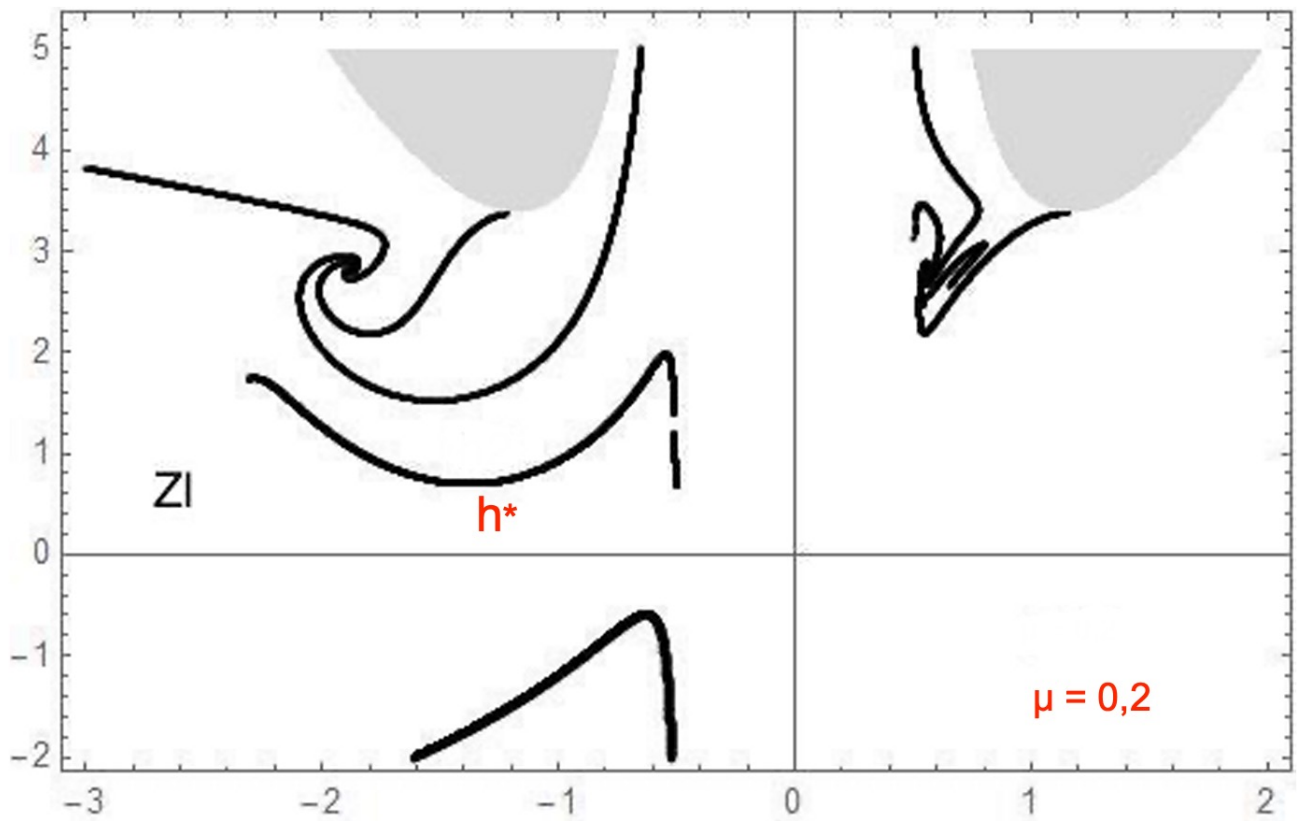
Figura 60 – Órbitas da família h para $\mu=0,6$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Também cabe ressaltar é o aparecimento de novas famílias que não estavam previstas na nomenclatura de Hénon. Destacamos a família denominada de h^* , situada na região Z_l , conforme mostra a Figura 61. Essa família surge a partir de $\mu = 0,2$ e permanece até o valor de $\mu = 0,9$. Percebe-se que esta família tende a se afastar da família h de acordo com o aumento do parâmetro de massa. Outro dado importante é que ela possui as mesmas características da família m , ou seja, independente dos valores de massa dos corpos, elas permanecem no plano (x, C) .

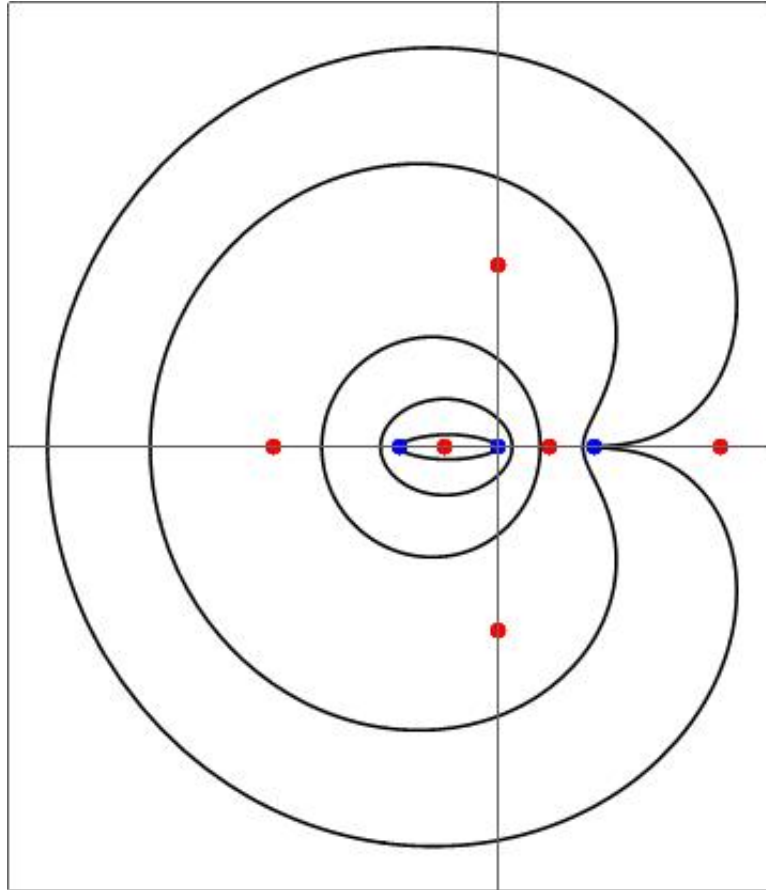
Figura 61 – Família h^* para $\mu = 0,2$, plano (x, C)



Fonte: Elaborado pelo autor.

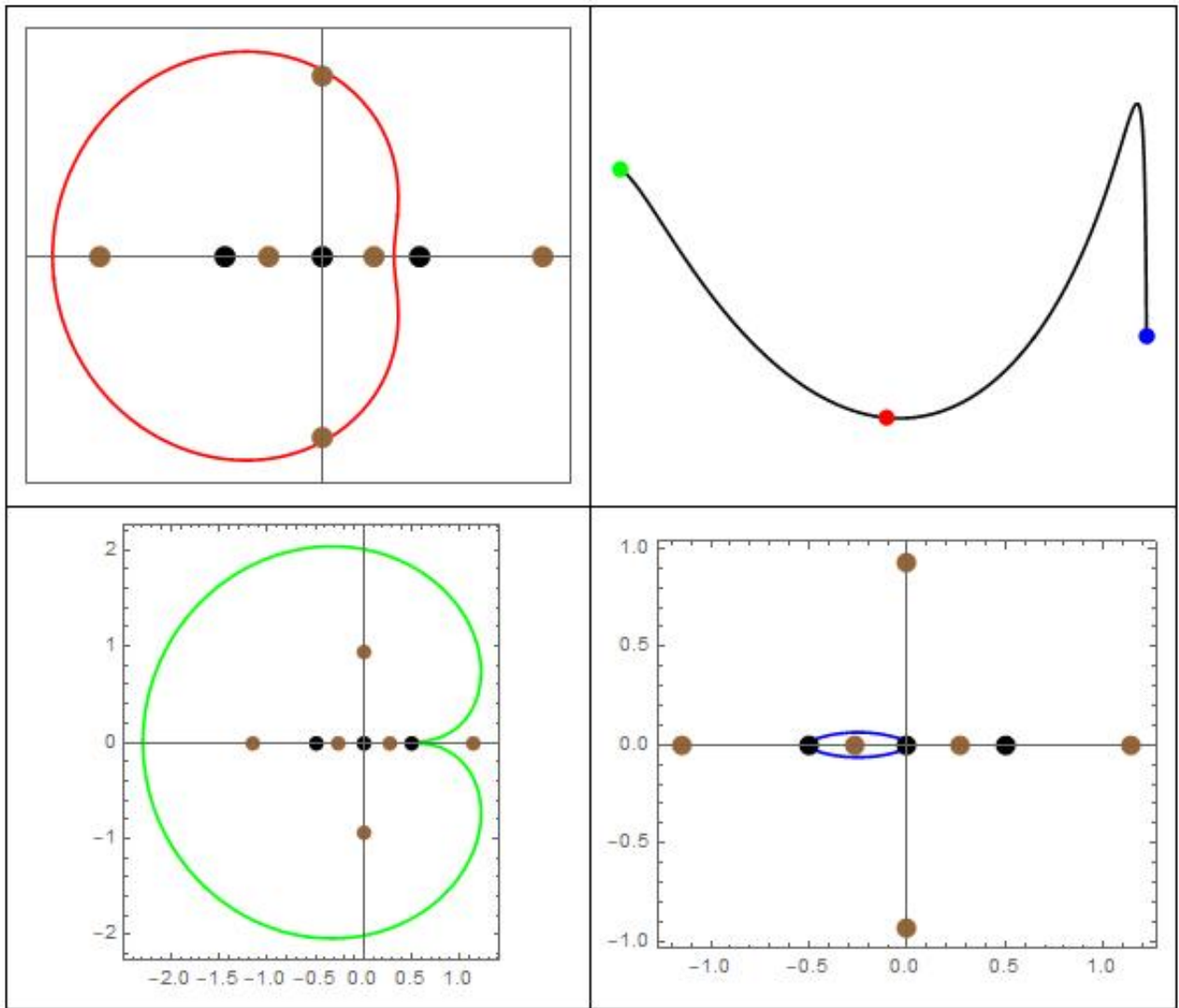
A Figura 62 apresenta um conjunto de 5 órbitas para a família h^* . Os pontos de equilíbrio estão em vermelho e os três corpos em azuis.

Figura 62 – Órbitas - família h^* para $\mu = 0,4$



Fonte: Elaborado pelo autor.

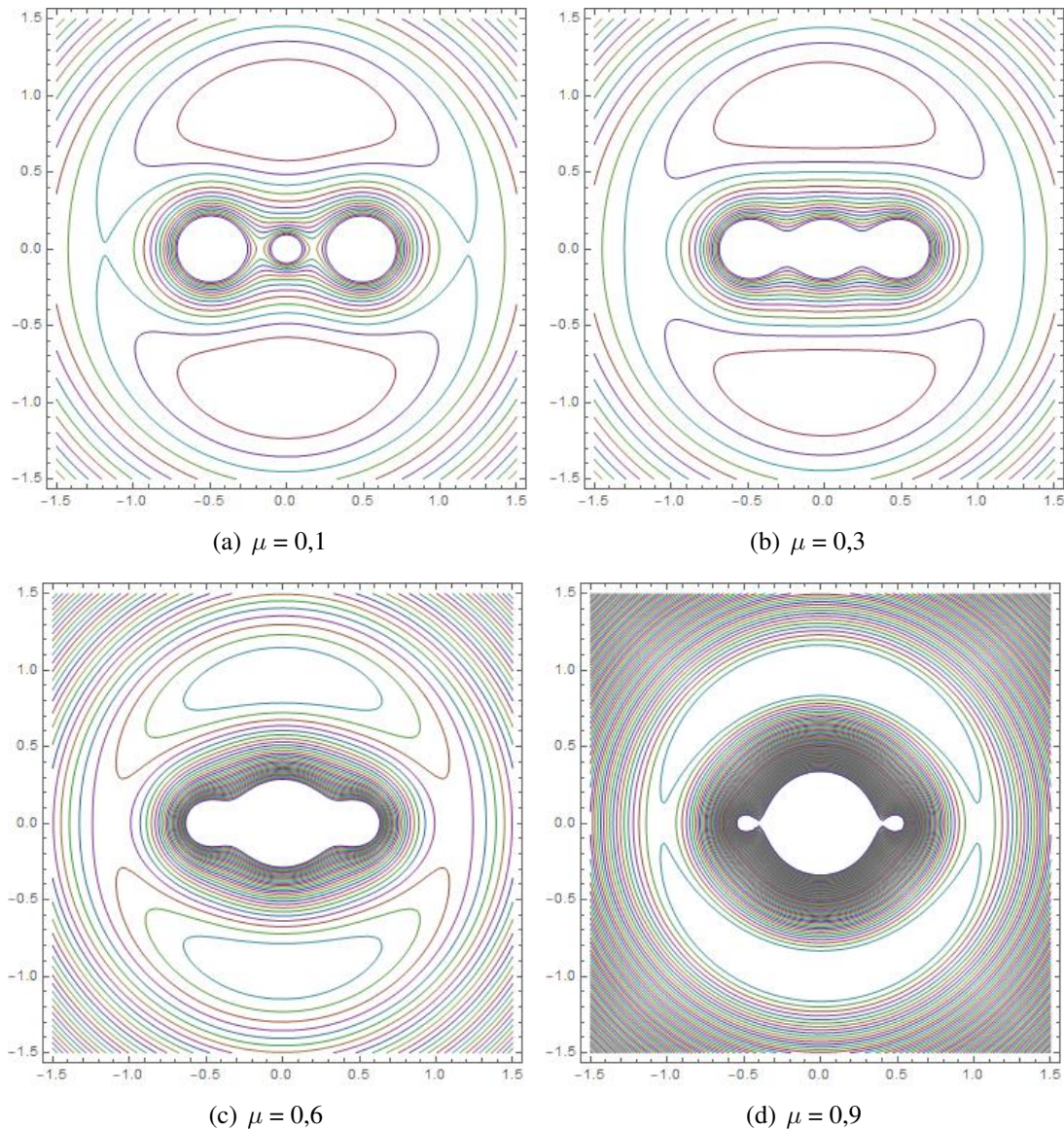
Existe uma evolução da família h^* da órbita mais externa para a mais interna, acompanhando a evolução no mapa da esquerda para a direita. A órbita mais externa circunda os 5 pontos de equilíbrio do sistema, deixando apenas o ponto L_2 de fora e existe um ponto de conversão em um dos pontos de massa (m_3). Quando a órbita passa pelos pontos de equilíbrios L_4 e L_5 há uma mudança de sentido no mapa de órbitas periódicas, conforme Figura 63, destacado no ponto vermelho da figura superior direita. É possível verificar essa órbita na figura superior esquerda. Finalmente, a família de órbitas vai evoluindo para o ponto de equilíbrio L_1 —. Nesta Figura 63, os pontos de equilíbrio estão em marrom e os três corpos em preto.

Figura 63 – Órbitas - família h^* 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para finalizar, apresentamos na Figura 64 as evoluções das Curvas de Velocidade Zero para o sistema estudado, variando o parâmetro de massa do corpo 2 ($0, 1 \leq \mu \leq 0, 9$).

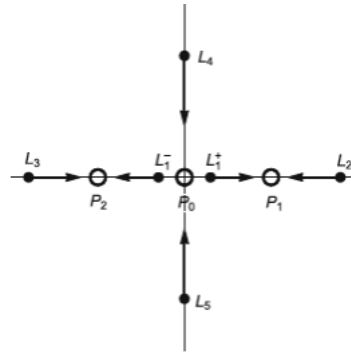
Figura 64 – Evolução das Curvas de Velocidade Zero para alguns valores de μ



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como dito anteriormente, as curvas de velocidade zero representam regiões no qual a partícula é excluída (MURRAY; DERMOTT, 1999). Assim, podemos verificar na Figura 64 as regiões de equilíbrio e estabilidade do sistema durante a evolução do parâmetro de massa do corpo 2. Dentro do limite estudado ($0,1 \leq \mu \leq 0,9$) a configuração das regiões são as mesmas para qualquer valor do parâmetro de massa, alterando apenas o tamanho das regiões. Isso deduz um deslocamento dos pontos de equilíbrios colineares (eixo x) na direção dos corpos primários extremos e os pontos de Lagrange equidistantes de m_2 sobre o eixo y em direção ao corpo 2 (ARRIBAS et al., 2016), conforme Figura 65. Essa mesma evolução dos pontos de equilíbrio podem ser observadas na Figura 60 em comparação com a Figura 62, onde os pontos vermelhos representam os pontos de equilíbrio do sistema.

Figura 65 – Evolução dos seis pontos de equilíbrio para o sistema



Fonte: Palacios et al. (2019).

4.5 EVOLUÇÃO DAS FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS - CASO $\mu_s = 0$, MASSAS DAS EXTREMIDADES FIXAS E VARIAÇÃO DA MASSA CENTRAL

A próxima análise do sistema consistiu em fixar os valores das massas das extremidades (m_1 e m_3) e variar a massa central (m_2) de 10% até 200% do valor da massa das extremidades. A massa da haste foi desprezada. Na tabela 9 é calculada a relação entre as massas e os respectivos parâmetros de massas. Para esse modelo, a massa total do sistema é:

$$M_t = m_1 + m_2 + m_3 \quad (39)$$

A massa 2 foi posicionada no ponto médio da distância entre as massas extremas, ou seja, $l_x = 0,5$. A distância entre a massa das extremidades também foi parametrizada em 1,0 unidade de distância.

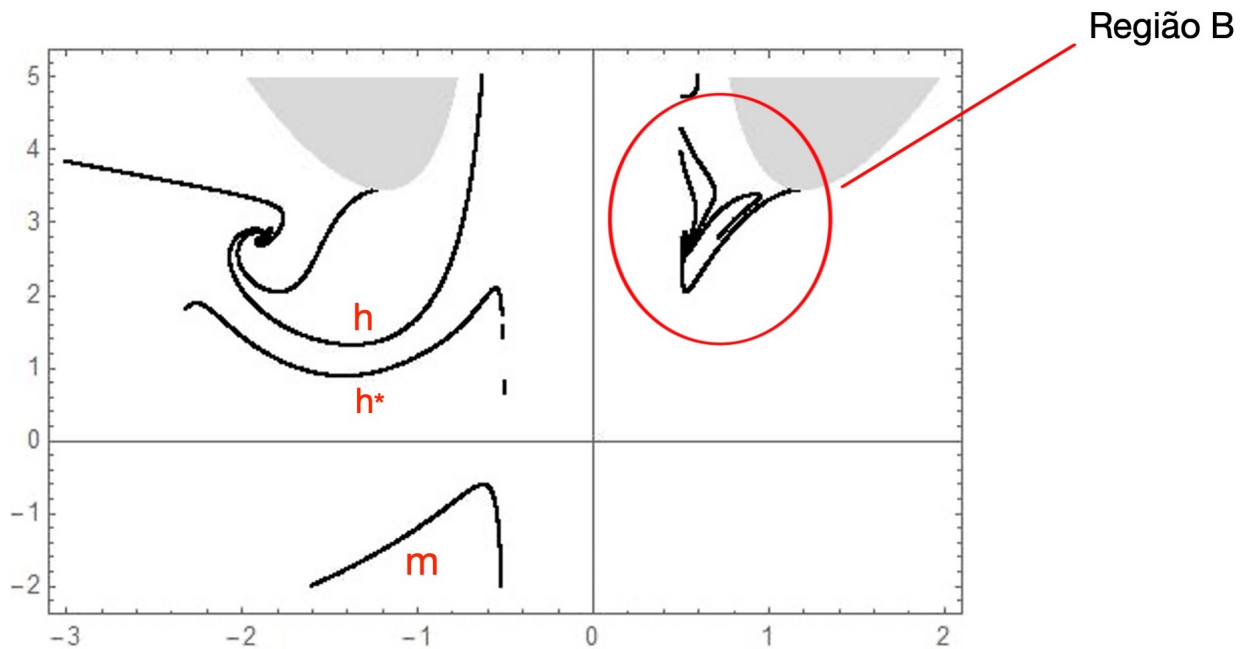
Novamente, o objeto de estudo que nos interessa é a evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas, com especial atenção ao surgimento e ao desaparecimento dessas famílias e como estas afetam diretamente as órbitas do sistema.

A Figura 66, mostra o mapa de famílias de órbitas periódicas para $m_2 = 0,1m_1$ e também destaca a região B e as famílias h , h^* e m .

Tabela 9 – Relação entre os parâmetros de massa - $\mu_s = 0$ e $m_1 = m_3 = 1,0$

m_2	μ	μ_x
0,1	0,047619	0,476190
0,2	0,090909	0,454545
0,3	0,130435	0,434783
0,4	0,166667	0,416667
0,5	0,200000	0,400000
0,6	0,230769	0,384615
0,7	0,259259	0,370370
0,8	0,285714	0,357143
0,9	0,310345	0,344828
1,0	0,333333	0,333333
1,1	0,354839	0,322581
1,2	0,375000	0,312500
1,3	0,393939	0,303030
1,4	0,411765	0,294118
1,5	0,428571	0,285714
1,6	0,444444	0,277778
1,7	0,459459	0,270270
1,8	0,473684	0,263158
1,9	0,487179	0,256410
2,0	0,500000	0,250000

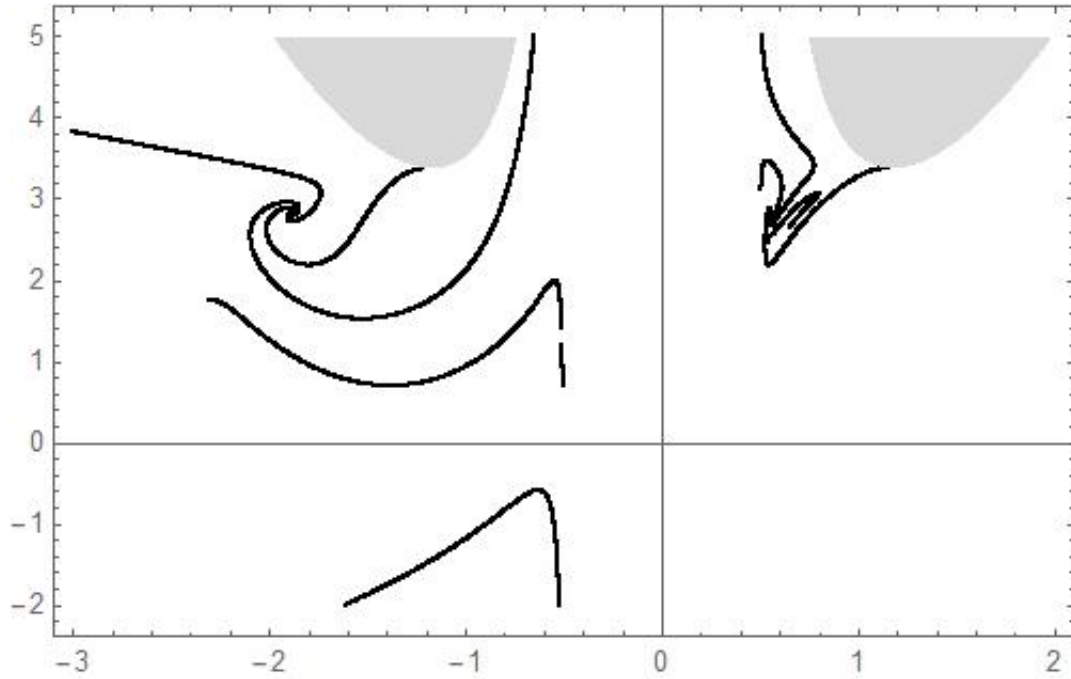
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 66 – Mapa de Órbitas Periódicas - $m_2 = 0,1m_1$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos verificar uma alteração na região B como destaca as figuras Figura 66 e Figura 67. Conforme descrito anteriormente, essa mudança nas famílias se devem a evolução dos pontos de equilíbrio (L_4 e L_5) do sistema.

Figura 67 – Mapa de Órbitas Periódicas - $m_2 = 0,5m_1$

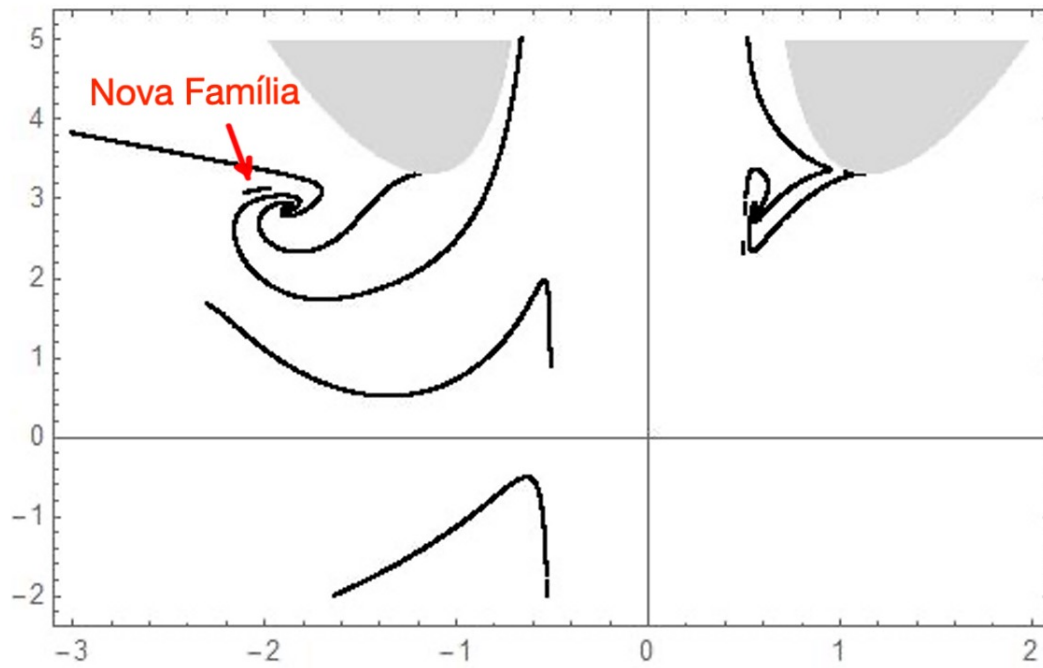


Fonte: Elaborado pelo autor.

A medida que aumentamos o valor da massa 2, as linhas que representam as famílias h e h^* vão se afastando. Em $m_2 = 1,3m_1$, esse afastamento contribui para o surgimento de uma nova família, como se vê na figura Figura 68. Daremos o nome a essa família de A_2 .

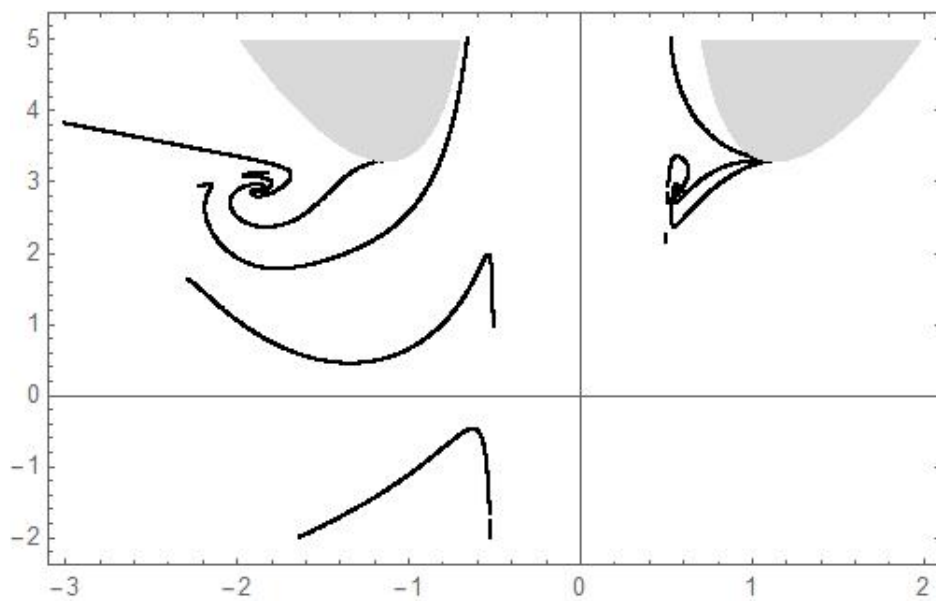
Na Figura 69, é evidenciado a divisão da família A_2 e suas modificações. O início desta família deixou de ser na região A e este ponto de transição ocorre quando a massa central (m_2) é igual 1,6 vezes a massa das extremidades.

Figura 68 – Mapa de Órbitas Periódicas - $m_2 = 1,3m_1$



Fonte: Elaborado pelo autor.

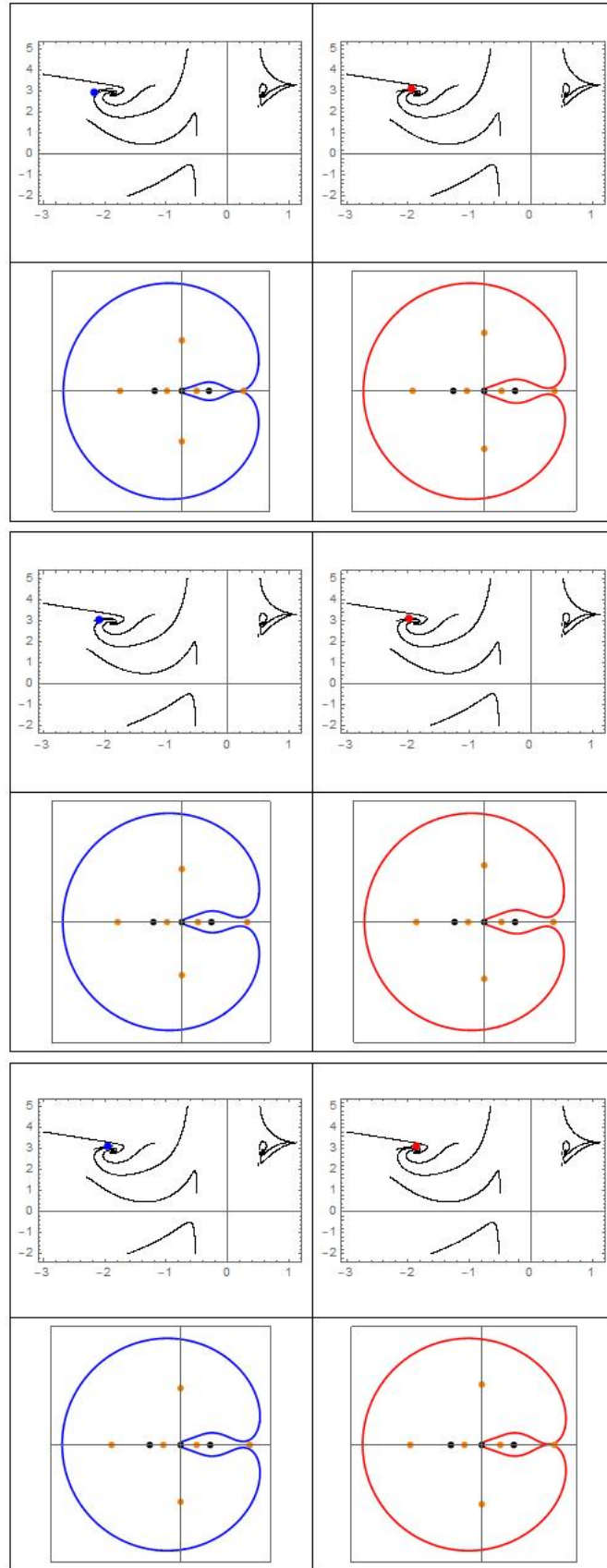
Figura 69 – Mapa de Órbitas Periódicas - $m_2 = 1,7m_1$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o valor de $m_2 = 1,5m_1$, a família A_2 possui 84 órbitas periódica simétricas. A Figura 70 destaca 6 órbitas desta família.

Figura 70 – Órbitas Periódicas Simétricas - $m_2 = 1,5$



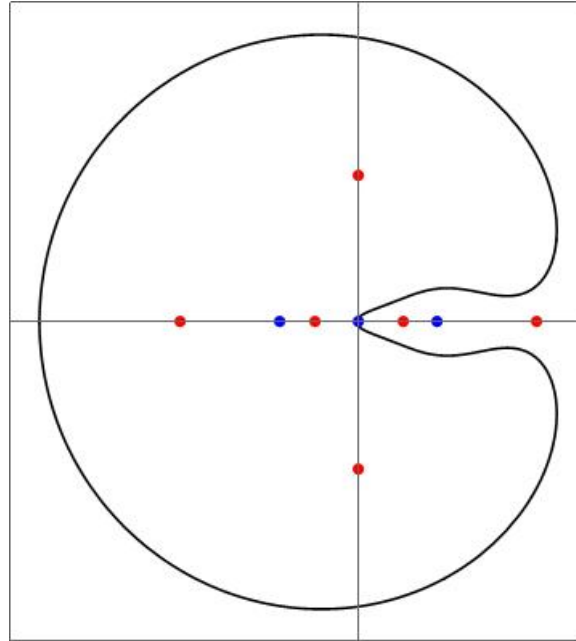
Fonte: Elaborado pelo autor.

As órbitas desta família (A_2) iniciam circundando todos os pontos de equilíbrio, com exceção dos pontos colineares L_2 e L_1^+ . Quando verificamos a evolução desta família no mapa de órbitas

periódicas, no sentido positivo de x e de C , os pontos de posição das órbitas tendem a se afastar desses dois pontos de equilíbrios citados anteriormente, conforme Figura 70. Também é verificado nesta figura que as órbitas apenas englobam m_1 e m_2 .

A transição para outra família acontece quando $m_2 = 1,6$. Nesse instante, as órbitas periódicas para essa transição de famílias tendem a ficar mais afastadas dos pontos L_2 e L_1^+ e de m_3 . Porém, as estruturas são muito próximas das órbitas antes da transição, conforme Figura 71

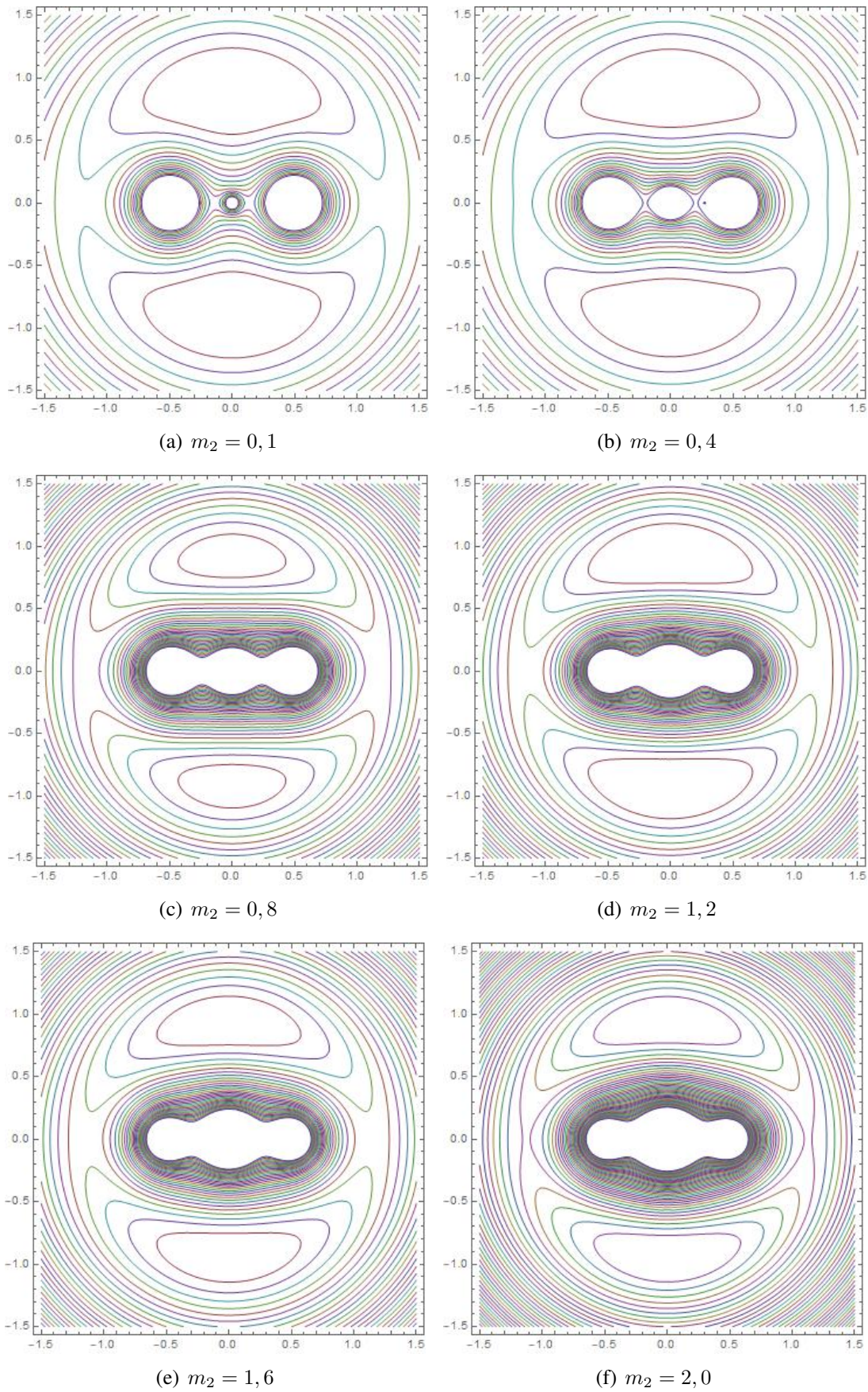
Figura 71 – Órbitas Periódicas Simétricas - $m_2 = 1,6$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 72 mostram as Curvas de Velocidade Zero para o sistema. As regiões proibidas tendem a se modificar perto de m_2 e dos pontos L_4 e L_5 . Com o aumento de massa da partícula m_2 a região proibida em torno desta massa aumenta de forma a se equiparar com as massas das extremidades até $m_2 = 1,0$. A partir de $m_2 = 1,1$ a região ao redor de m_2 tende a aumentar como se pode ver na Figura 73(d). A região proibida ao redor dos pontos L_4 e L_5 tendem a diminuir de $m_2 = 0,1$ a $m_2 = 0,4$. A partir de $m_2 = 0,5$, essa região aumenta e vai diminuindo até o valor de $m_2 = 2,0$.

Figura 72 – Evolução das Curvas de Velocidade Zero para alguns valores de m_2 ($m_1 = m_3 = 1,0$)



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.6 EVOLUÇÃO DAS FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS - $0,1 \leq M \leq 1,0$ / $m_1 = m_2 = m_3 = 1,0$

Nossa análise agora consiste em acrescentar a haste no sistema, configurando o que denominamos de Tripolo-Segmento. Verificamos a evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas para o valor da massa da haste (M) de 10% a 100% do valor das massas que permaneceram com os valores fixos e iguais. A relação entre a massa e os parâmetros de massa da haste são dados na tabela 10. Para esse caso, a massa total do sistema é:

$$M_t = m_1 + m_2 + m_3 + M \quad (40)$$

Também, para esse modelo, a partícula 2, de massa m_2 , foi colocada no ponto médio do comprimento da haste (parametrizada em 1,0 unidade de comprimento) e consequentemente, o valor de $l_x = 0,5$.

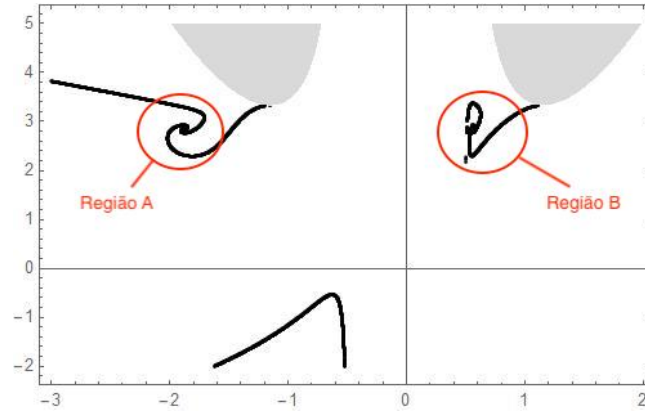
Tabela 10 – Parâmetros de massa - $0,1 \leq M \leq 1,0$ / $m_1 = m_2 = m_3 = 1,0$ / $\mu = \mu_x = 0,33333$

M	μ_s
0,1	0,032258
0,2	0,062500
0,3	0,090909
0,4	0,117647
0,5	0,142857
0,6	0,166667
0,7	0,189189
0,8	0,210526
0,9	0,230769
1,0	0,250000

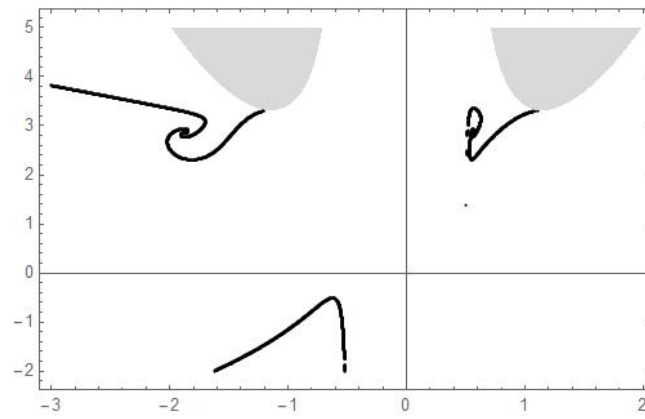
Fonte: Elaborado pelo autor.

Na análise do mapa de órbitas periódicas simétricas é observado, com a introdução da haste, o desaparecimento das famílias h e h^* , que se localizam no quadrante Z_l . No quadrante Z_d a família m permanece com o mesmo padrão e no quadrante Z_r , especificamente na região B , observou-se a maior mudança. A medida que aumentamos a massa da haste, ocorre pouca mudança no conjunto de famílias de órbitas periódicas simétricas, sendo observado uma variação na região B e uma sutil variação na região A , como podemos ver na Figura 73.

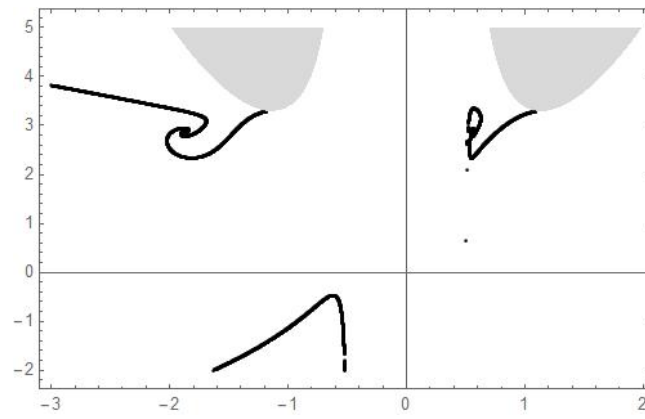
Figura 73 – Mapa de Órbitas Periódicas Simétricas para alguns valores de M



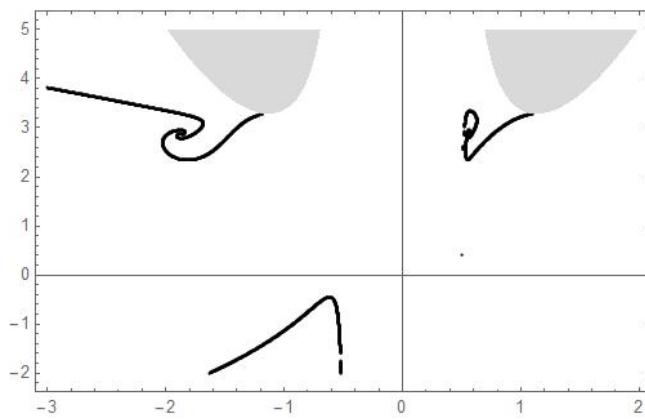
(a) $M = 0,1$



(b) $M = 0,4$



(c) $M = 0,8$

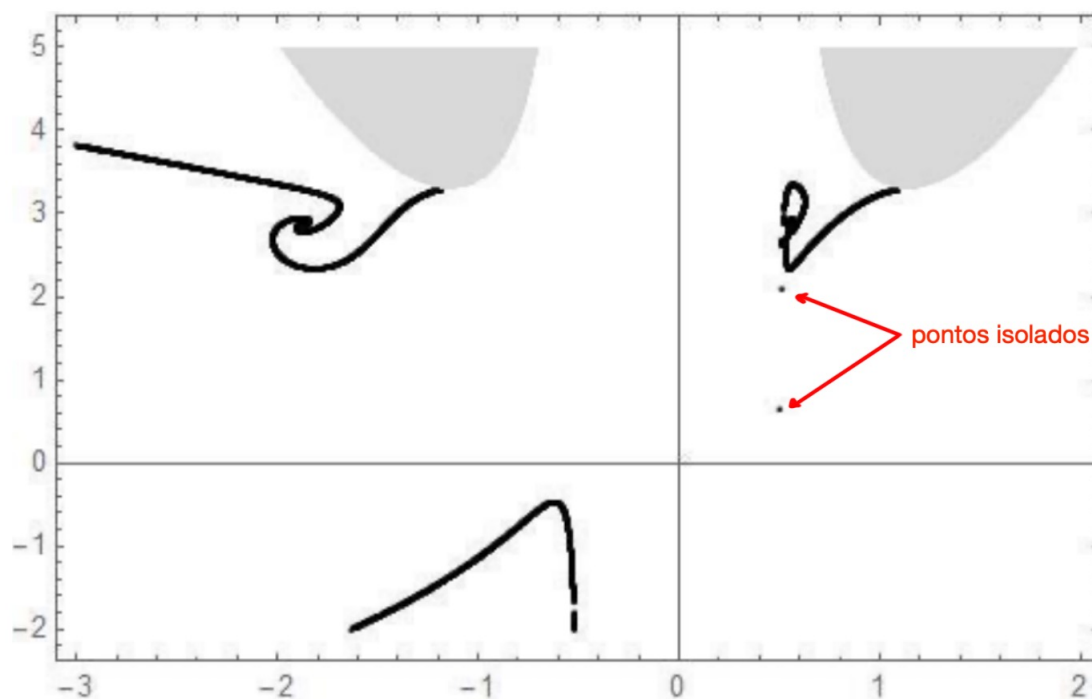


(d) $M = 1,0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Há uma tendência na evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas do aparecimento de pontos isolados no quadrante de x e C positivos, conforme mostra a Figura 74. O aparecimento desses pontos poderia sugerir uma nova família ou a continuação de famílias existentes.

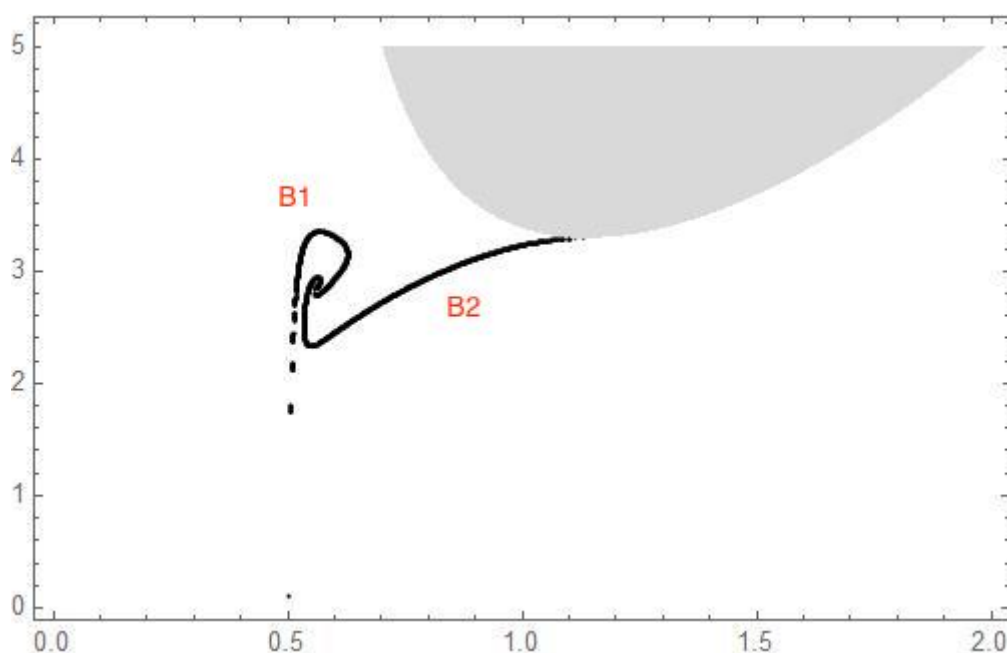
Figura 74 – Mapa de Órbitas Periódicas Simétricas - $M = 0,8$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir desse questionamento, buscamos estudar essa região específica, limitando a nossa busca dentro do intervalo de $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq C \leq 5$. O resultado é mostrado na Figura 75.

Figura 75 – Mapa de Órbitas Periódicas Simétricas - Quadrante 1

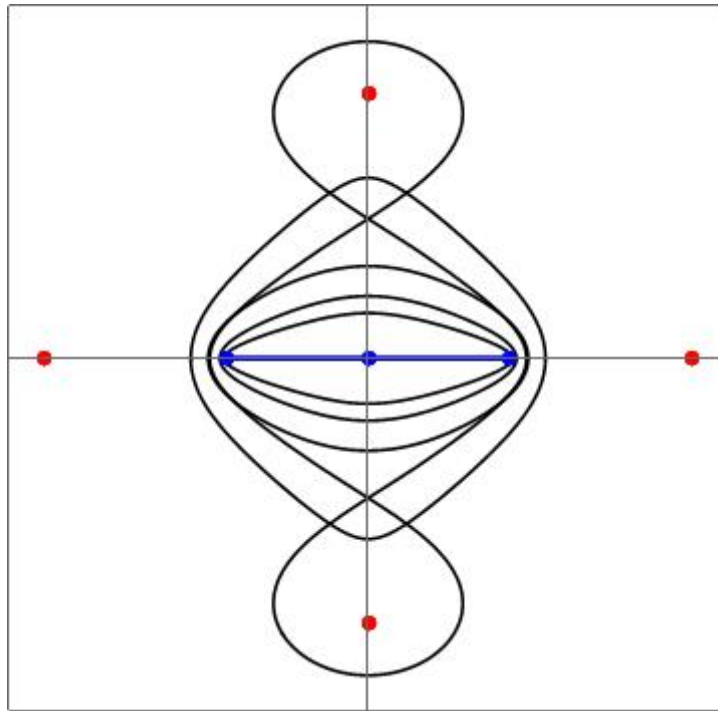


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 75 mostra uma continuidade da família de órbitas periódicas simétricas oriunda da região B. Há ainda a existência de pontos e não de linha contínua por adotarmos uma simulação de 1000 pontos em x por 1000 pontos em C . Uma grade com mais pontos mostrará estes cada vez mais próximos e formando uma linha contínua. Concluimos então que esses pontos pertencem a uma mesma família. Resolvemos nomear essa região em duas famílias de órbitas periódicas simétricas, B_1 e B_2 .

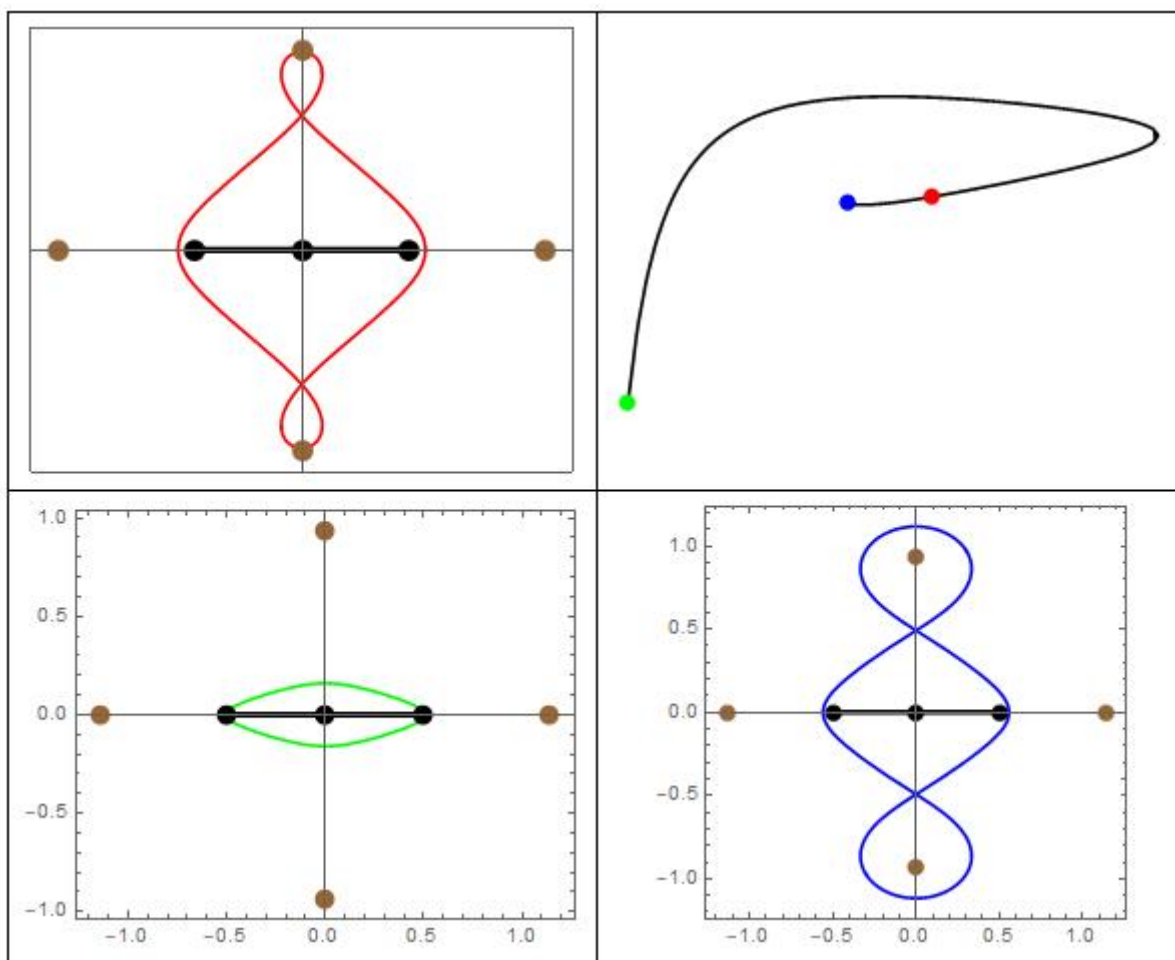
A Figura 76 e Figura 78 ilustram as órbitas para a família B_1 e B_2 .

Figura 76 – Órbitas Periódicas Simétricas - Família B_1



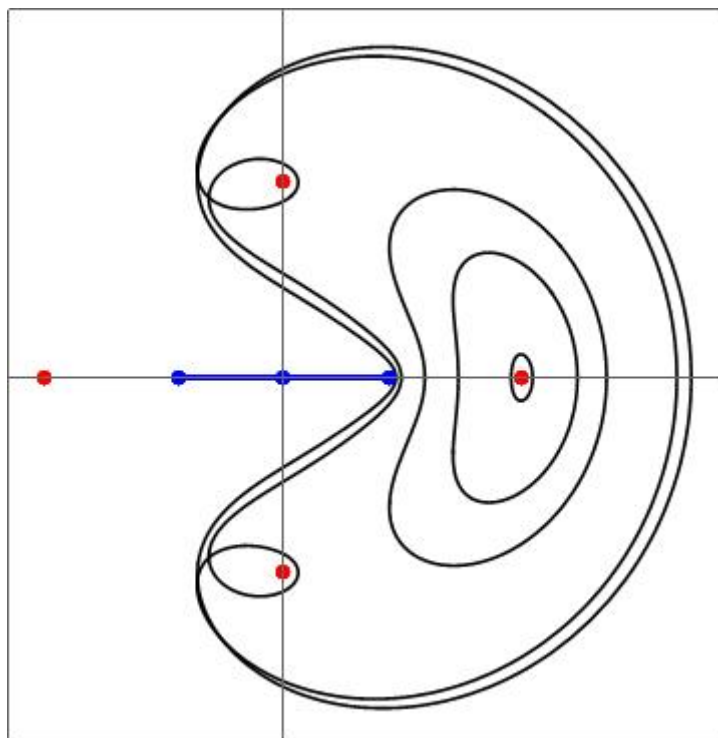
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 77 – Órbitas Periódicas Simétricas - Família B_1 - Comparação



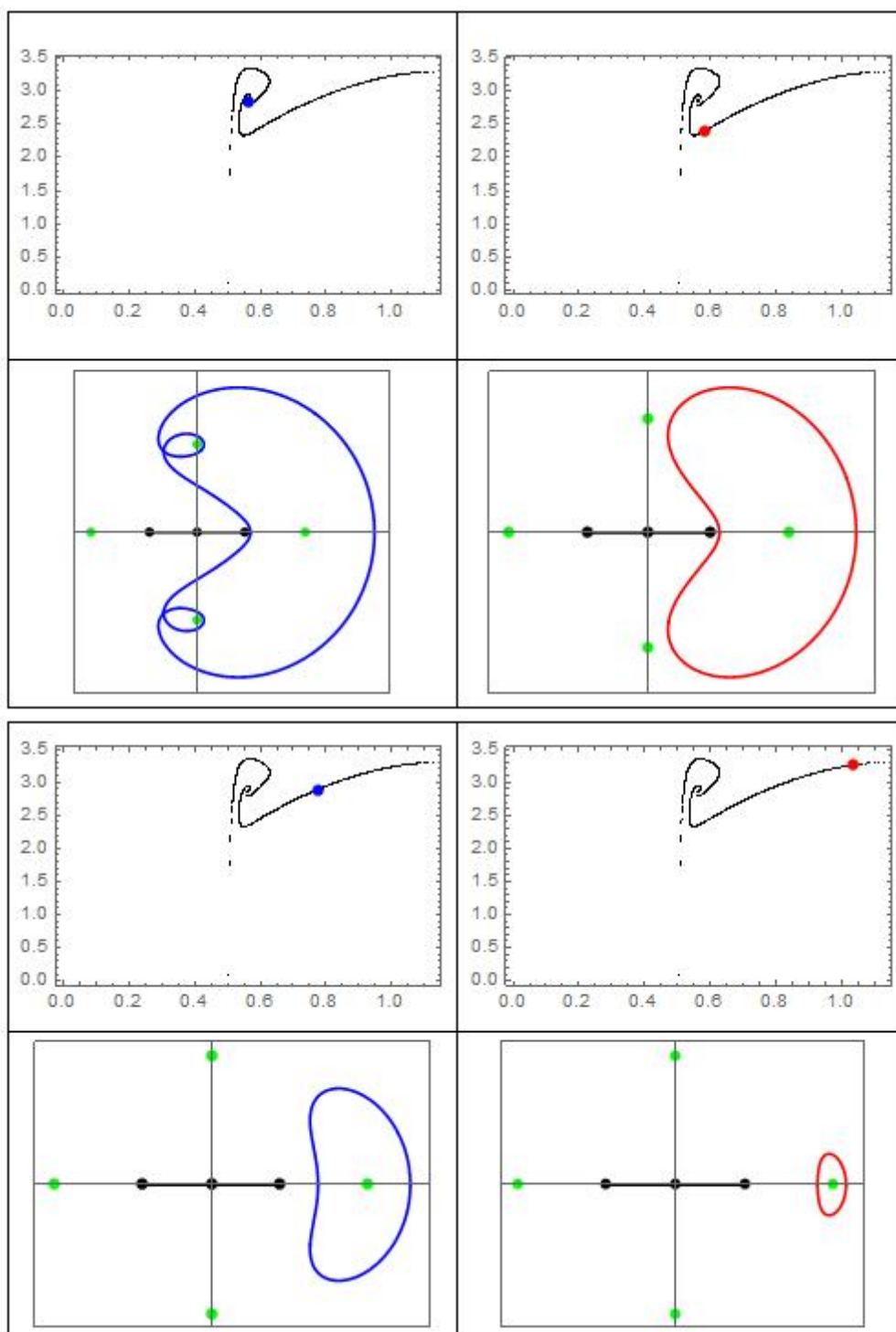
Fonte: Elaborado pelo autor.

As famílias B_1 e B_2 tendem a convergir para um ponto específico. Buscamos analisar as órbitas que são características dessa conversão ou alguma análise que possa sugerir algum evento com essas órbitas. Para o caso da família B_1 , as órbitas mais afastadas dessa convergência tendem a estar próximo do Tripolo-Segmento, circundando-o. A medida que caminhamos na curva do mapa de órbitas periódicas no sentido da convergência, tem-se uma tendência de aproximação para os pontos lagrangianos instáveis e o surgimento de órbitas heteroclínicas. Isso pode ser visto na Figura 77.

Figura 78 – Órbitas Periódicas Simétricas - Família B_2 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 79 – Órbitas Periódicas Simétricas - Família B_2 - Comparação



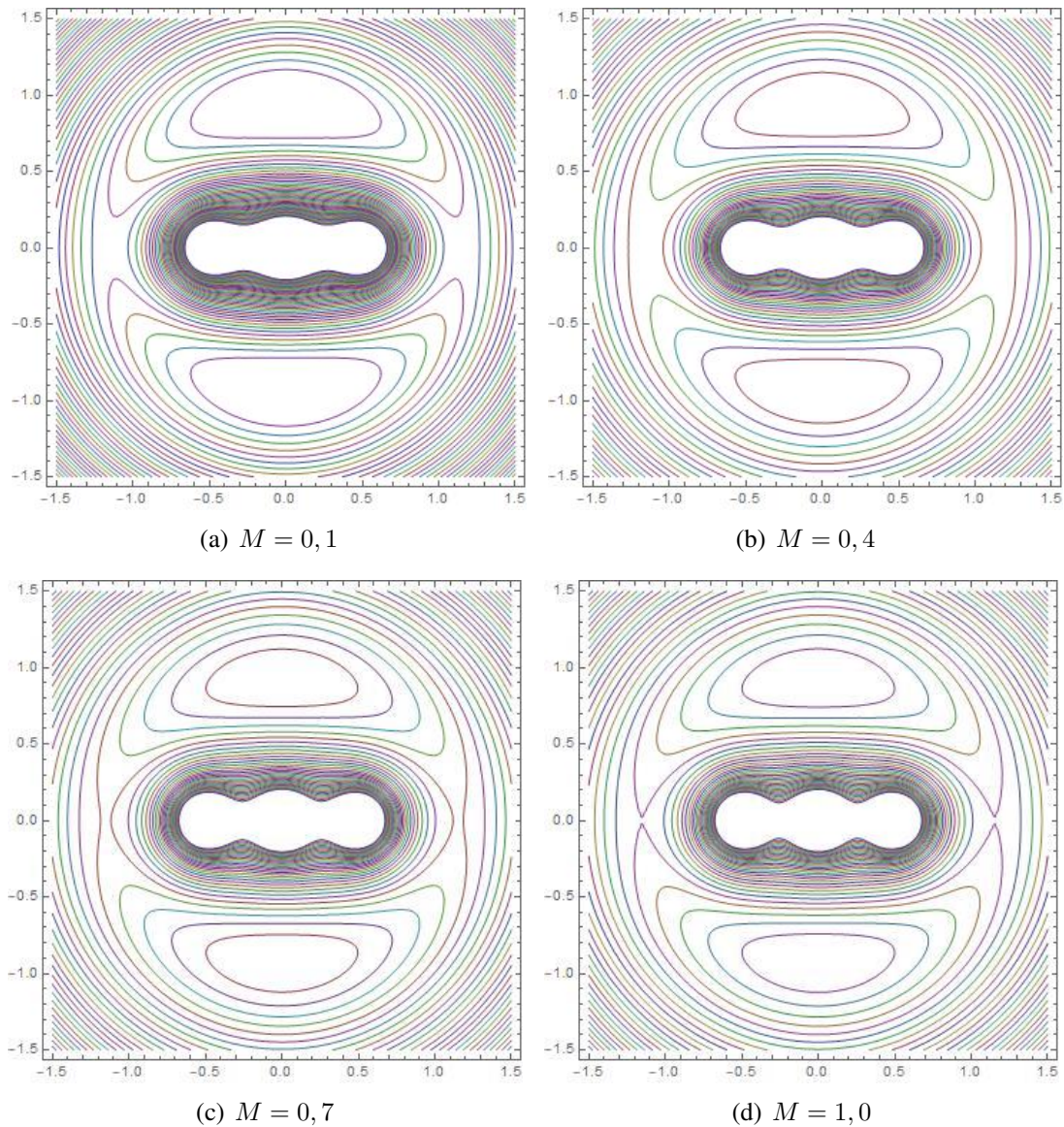
Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso da família B_2 , caminhando na curva de famílias de órbitas periódicas, percebe-se novamente no ponto de convergência uma tendência do aparecimento de órbitas heteroclínicas e a medida que afastamos desse ponto de convergência, há uma aproximação da órbita para o ponto lagrangiano L_2 , conforme Figura 79.

Há de se concluir que os pontos de convergência tendem para órbitas heteroclínicas e os outros pontos extremos das curvas de órbitas periódicas, uma possível colisão com um dos corpos ou até mesmo o aprisionamento em algum ponto de equilíbrio do sistema.

A Figura 80 mostra as curvas de velocidade zero do sistema.

Figura 80 – Evolução das Curvas de Velocidade Zero para alguns valores de M



Fonte: Elaborado pelo autor.

As figuras mostram uma pequena variação das curvas ao redor da haste. Existe uma tendência de que essas curvas se aproximem da haste a medida que aumentamos a sua massa. Isso acontece devido ao aumento de gravidade proposto pela haste em relação aos pontos de sua vizinhanças.

4.7 CONCLUSÕES

Diante dos resultados apresentados, apresentamos a análise dos dados. Verificamos basicamente três aspectos:

- A mudança das famílias de órbitas periódicas;
- O surgimento de novas famílias e o desaparecimento de outras;

- como essa variação de massa afeta as órbitas dessas partículas.

Verificamos que a principal mudança se deu nas regiões onde há convergência de famílias, formando certas espirais. Analisamos duas regiões, A e B . Essas espirais tendem a aparecer quando os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 tornam-se instáveis. Percebemos também que a massa entre intervalos pequenos de μ pouco afeta as órbitas. As mudanças ocorreram a partir de $\mu = 0,8$. E por fim, surgiram novas famílias de órbitas periódicas simétricas que não estavam previstas na nomenclatura de Hénon. Analisamos uma família de órbitas periódicas simétricas denominada h^* , não explorada em trabalhos anteriores. A tendência é que essas órbitas evoluam para circundar os pontos de equilíbrios estáveis. Também verificamos as CVZ (Curvas de Velocidade Zero) para esse modelo, o que nos possibilitou entender a evolução dos pontos de equilíbrio a medida que se altera a massa m_2 .

O terceiro caso analisado foi fixar as massas extremas mudando o parâmetro de massa do corpo central. Alteramos o valor de m_2 de 10% até 200% do valor das massas das extremidades. A ideia é limitar a atuação da massa central na evolução do mapa de órbitas periódicas simétricas, bem como as Curvas de Velocidade Zero e consequentemente a estrutura de suas órbitas. Dois resultados interessantes são apresentados. O primeiro é o surgimento de uma família nova, indicada na Figura 68, quando $m_2 = 1,3$. Essa família logo deixa de existir, sendo incorporada por outras famílias já existentes, quando $m_2 = 1,7$. Também analisamos as características das órbitas dessa família quando $m_2 = 1,5$. Essas órbitas tendem a circunscrever todos os pontos de equilíbrio, com exceção dos colineares L_2 e L_1^+ . Há uma indicação de convergência para o corpo m_2 , o que pode resultar em uma colisão.

A próxima análise do trabalho consistiu em atribuir massa para a haste, variando de 10% a 100% da massa das partículas (m_1 , m_2 e m_3) que se mantiveram fixas e iguais. O resultado se aproximou fortemente do apresentado por (ELIPE et al., 2021), com uma pequena mudança na região B. Resolvemos, a partir desse ponto de mudança, estudar mais profundamente essa região. Como é uma região espiral, algumas curvas de famílias de órbitas tendem a convergir para um ponto, conforme Figura 75. Novamente, os resultados mostraram algo que já foi indicado anteriormente: Esses pontos de convergência sugerem órbitas heteroclínicas. A medida que se afasta dessa região espiral, a tendência é que as órbitas circundem pontos de equilíbrio.

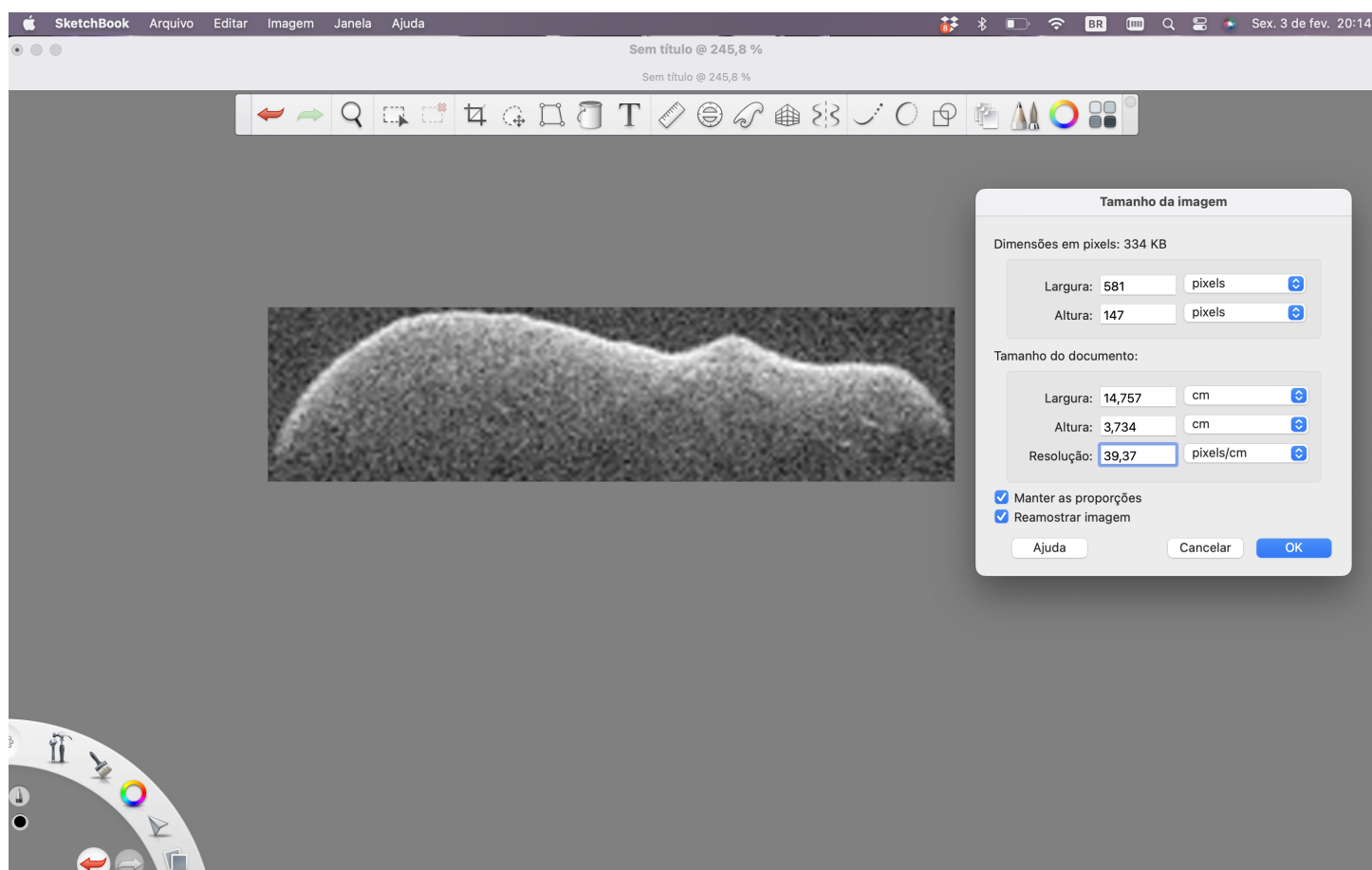
5 CASO ASTEROIDE HOLIDAY

Passamos agora a aplicação de nosso sistema. Como descrito anteriormente, escolhemos o asteroide Holiday para estudo, devido ao seu grau de importância, tanto pela proximidade com o nosso planeta, bem como sua periodicidade, o que levou a NASA a classificá-lo como potencialmente perigoso.

Como ainda não temos dados concretos sobre a densidade desse asteroide, passamos a analisar a imagem como um parâmetro para sua distribuição de massa.

Usando o software Sketchbook, que basicamente possui ferramentas de desenho e esboço, que pode ser baixado gratuitamente pelo site <https://www.autodesk.com/products/sketchbook/free-download.karikat>, analisamos a quantidade de pixels da imagem do asteroide Holiday, conforme Figura 81.

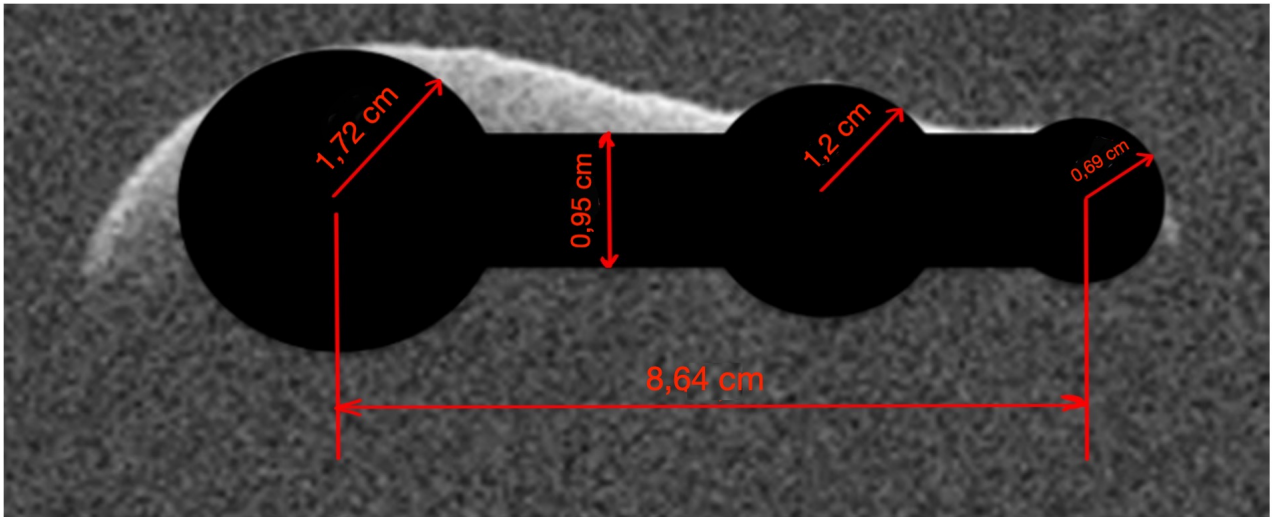
Figura 81 – Asteroide Holiday - Pixels



Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível ver na imagem que a configuração é de 39,37 pixels/cm. Assim, sobrepomos o sistema tripolo-segmento para a imagem, como vista na Figura 82 e calculamos as medidas dos diâmetros dos círculos, distância entre os círculos extremos e a medida da largura da haste. A distribuição de massa está relacionada com a quantidade de pixels da imagem do tripolo-segmento.

Figura 82 – Asteroide Holiday -Tripolo-Segmento



Fonte: Elaborado pelo autor.

Parametrizamos o raio da esfera menor como R e adotamos o raio da esfera central como R_2 e da esfera maior como R_1 . Admitiremos também a haste retangular com a medida do comprimento (c) entre os centros dos círculos extremos e sua largura (a) descrita na Figura 82. A proporção de massa de cada figura será estabelecida pela quantidade de $pixels^2$. A tabela 11 mostra a relação de pixels e as medidas das figuras parametrizadas no valor de R . Temos o valor de $R = 26,7$ pixels.

Tabela 11 – Relação entre as medidas e pixels

Medida	R	Pixels
R_1	2,49	66,5
R_2	1,73	46,2
c	12,52	334,3
a	1,38	36,9

Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 12 mostra a relação entre a área de cada figura e $pixels^2$.

Tabela 12 – Relação entre área e $pixels^2$

Área	$pixels^2$
A_1	13878,8
A_2	6702,1
A_3	2238,5
H	12335,67

Fonte: Elaborado pelo autor.

onde A_1 representa a área do círculo maior, A_2 a área do círculo intermediário, A_3 do círculo menor e H a área da haste.

A partir desses valores, podemos estabelecer a relação entre as massas. Usando a notação m_1 para a esfera maior, m_2 para a esfera intermediária, m_3 para a esfera menor e M para a massa da haste temos:

$$m_1 = 6,2m_3, \quad (1)$$

$$m_2 = 2,99m_3, \quad (2)$$

$$M = 5,51m_3. \quad (3)$$

Com essas proporções calculadas, podemos relacionar as massas com os parâmetros de massa do sistema Tripolo-Segmento, admitindo o valor de $m_3 = 1,0$, conforme tabela 13:

Tabela 13 – Relação entre massas e parâmetros de massa

M	m_1	m_2	m_3	M_t	μ_s	μ	μ_x
5,51	6,2	2,99	1,0	15,7	0,3510	0,2934	0,0981

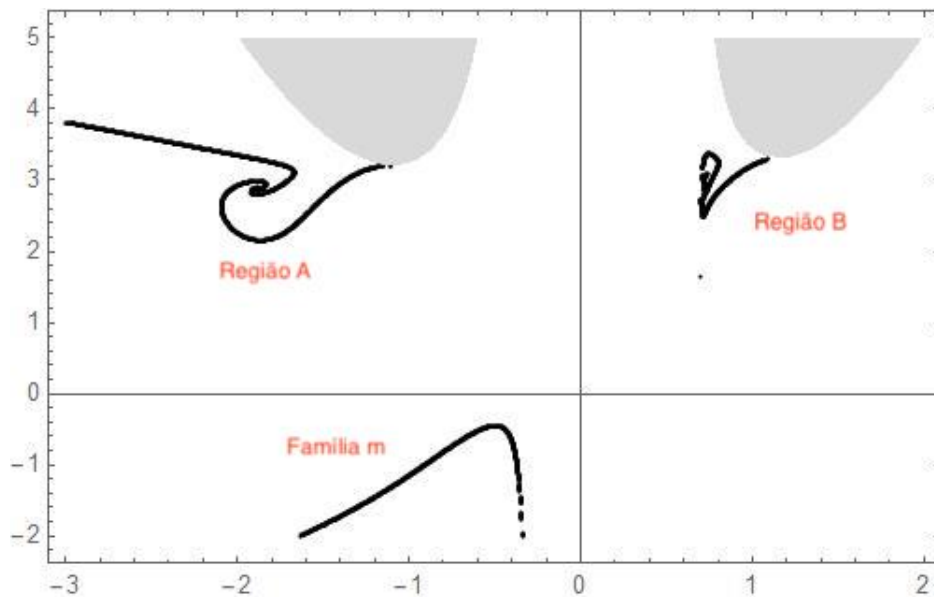
Fonte: Elaborado pelo autor.

M_t é a massa total do sistema e para a simulação

O valor de $l_x = 0,38$.

A Figura 83 mostra o resultado do Mapa de Órbitas Periódicas Simétricas para o sistema aproximado do asteroide Holiday.

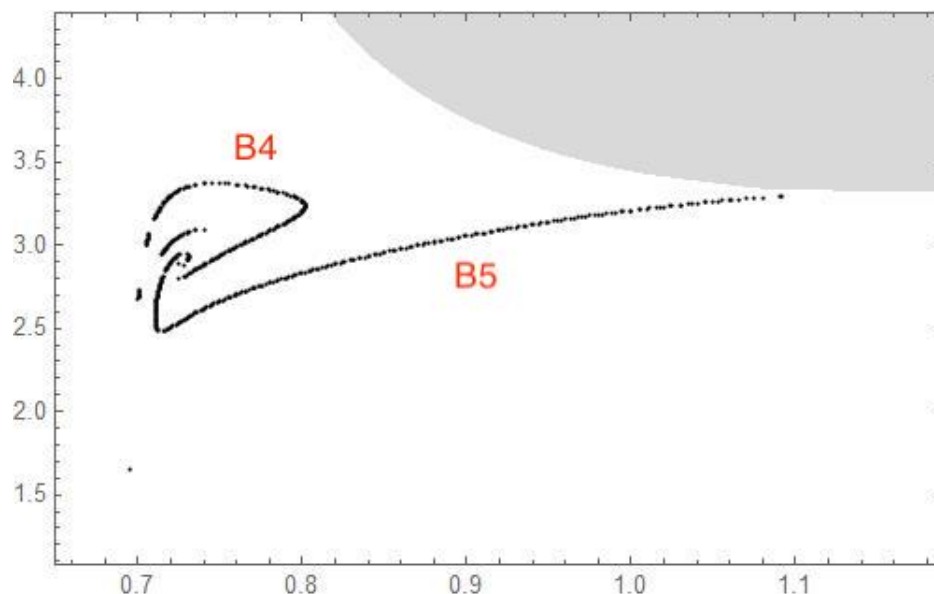
Figura 83 – MOPS -Tripolo-Segmento - Asteroide Holiday



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 83 reforça o resultado do Mapa de Órbitas Periódicas Simétricas para o caso do Tripolo-Segmento, com três massas pontuais iguais e adotando a massa da haste diferente de zero, conforme Figura 73. Há uma ligeira modificação na região B, ampliada na Figura 84. A família m continua existindo em todos os casos.

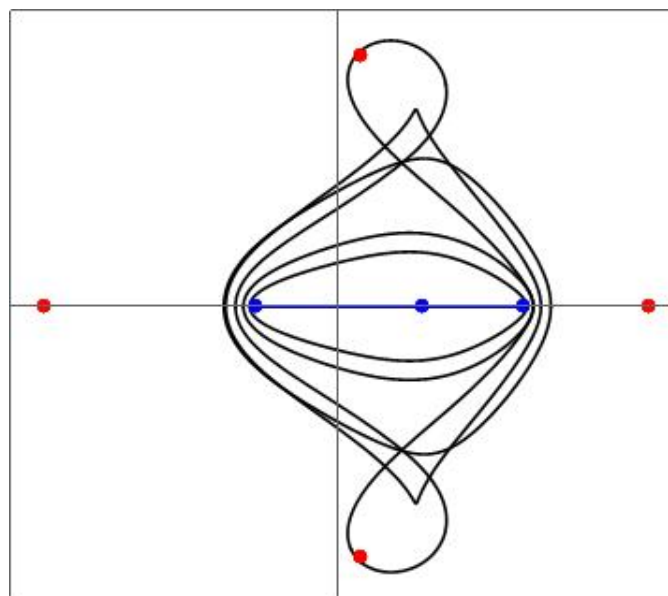
Figura 84 – MOPS -Tripolo-Segmento - Asteroide Holiday - Região B (Ampliada)



Fonte: Elaborado pelo autor.

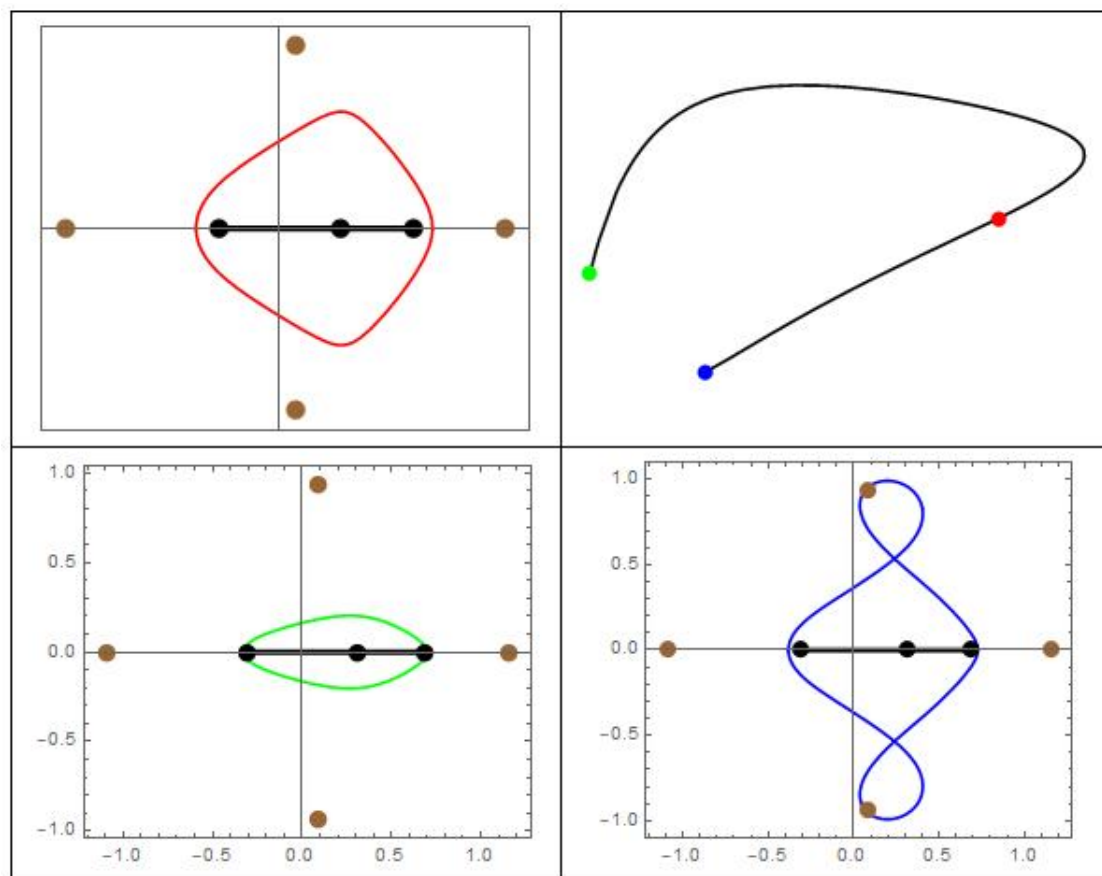
Nessa ampliação da região B, destacamos duas famílias de órbitas periódicas simétricas: a família B4 e B5. As duas famílias parecem convergir para um único ponto. As Figura 85 e Figura 87 mostram as evoluções das órbitas e como elas se manifestam próximo desse ponto de convergência.

Figura 85 – Evolução das Órbitas Periódicas Simétricas - Família B4



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 86 – Evolução das Órbitas Periódicas Simétricas - Família B4 - Progressão na Família



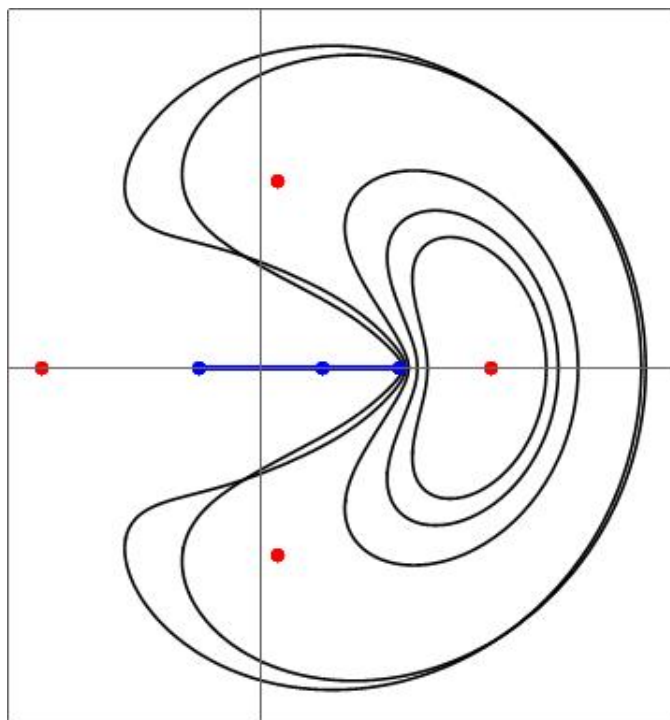
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a família B4, há de se notar o início da família como uma órbita que circunda o Tripolo-Segment (ponto verde na Figura 86) e a medida que evoluímos na curva de órbitas periódicas, essa órbita tende a passar pelos pontos lagrangianos instáveis. A órbita destacada em verde na figura aparenta tocar nos pontos de massa do Tripolo-Segment. Isso é explicado pelo fato de adotarmos cada esfera (m_1 , m_2 e m_3) como ponto de massa.

Já na família B5, a órbita de cor verde na Figura 88, que se situa no ponto de convergência com a família B4, circunda três pontos lagrangianos a direita do Tripolo-Segment. Note que a órbita também parece tocar um dos pontos de massa do sistema Tripolo-Segment. A medida que vamos evoluindo na curva de órbitas periódicas, a órbita tende a circular o ponto lagrangiano L_2 . Essa evolução na curva caminha para o afastamento do ponto de convergência das famílias.

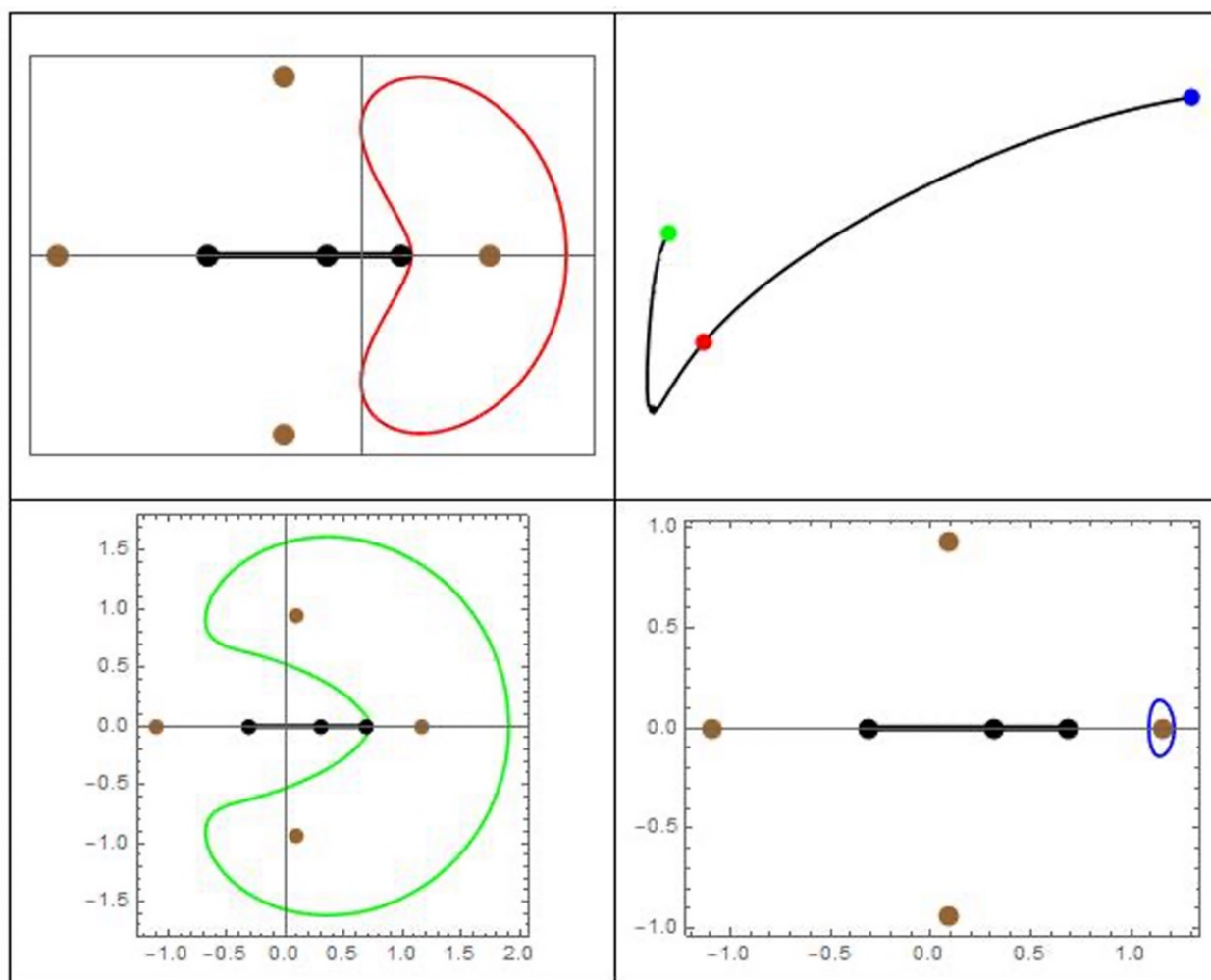
No nosso entendimento, há duas possibilidades para essas convergências de famílias. Uma é colisão com o corpo central, e outra, uma possível evolução para órbitas heteroclínicas. A medida que afastamos do ponto de convergência, há uma tendência dessas órbitas se aproximarem de pontos lagrangianos estáveis.

Figura 87 – Evolução das Órbitas Periódicas Simétricas - Família B5



Fonte: Elaborado pelo autor.

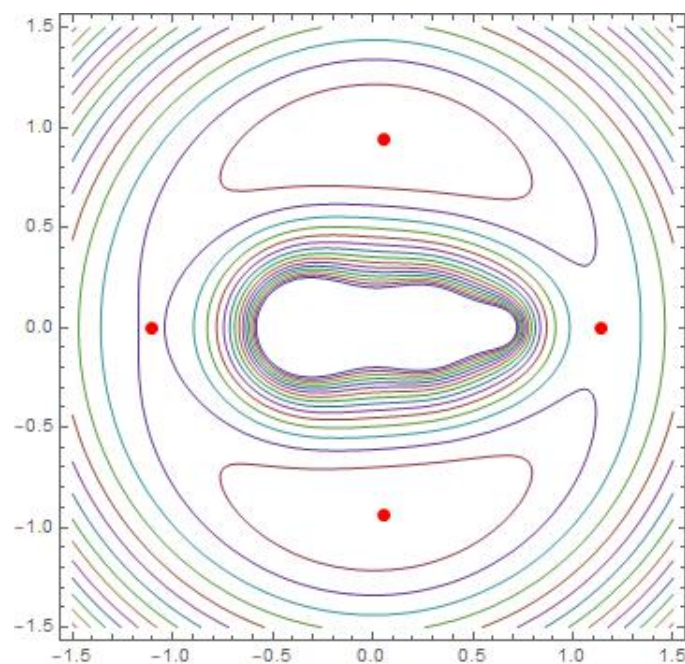
Figura 88 – Evolução das Órbitas Periódicas Simétricas - Família B5 - Progressão na Família



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 89 mostra as Curvas de Velocidade Zero e os pontos de equilíbrios para o caso Asteroide Holiday.

Figura 89 – Curvas de Velocidade Zero e Pontos de Equilíbrio - Asteroide Holiday



Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente, deixamos claro que todo esse estudo se trata de uma aproximação para o entendimento da dinâmica de um corpo central e a análise de órbitas periódicas simétricas ao redor desse corpo. Para o nosso caso, as curvas de velocidade zero podem dar boas indicações da distribuição de massa do asteroide, dentro do que propomos como caso aproximado. Também percebemos a estrutura dos pontos de equilíbrio, que se tornam úteis em uma possível missão para exploração desse asteroide.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Em um primeiro momento, desenvolvemos um estudo de órbitas para a Missão Garatêa-L, buscando analisar alguns parâmetros de órbitas que pudessem atender as necessidades dos experimentos da missão. Depois de desenvolvido todo o método numérico, buscamos verificar as partículas com maior tempo de vida dentro da região de estudo proposta e como essas partículas variam ao longo do tempo. A conclusão mais detalhada está na seção 3.6.

A segunda parte do trabalho consiste em obter resultados e análises de órbitas periódicas simétricas. Sabemos que atualmente existe um movimento das agências espaciais para visitar pequenos corpos do sistema solar, principalmente asteroides, devido a sua importância em contribuir com informações sobre a formação do universo e também para que haja um mapeamento cada vez mais seguro com relação a possibilidade de impactos contra o nosso planeta. Em uma missão, preocupações de como se representa o campo gravitacional ao redor desses corpos e pontos de equilíbrio, têm sido fundamentais para a compreensão da dinâmica desses corpos. Logo, a análise de órbitas periódicas simétricas nos permite localizar regiões de estabilidade do sistema e como essas regiões variam ao longo do tempo.

Os primeiros estudos sobre órbitas periódicas procurou classificá-las de forma sistemática em famílias, que podem ser expressadas através de um único parâmetro que constituem a posição inicial $x(0)$, a constante de Jacobi e período fundamental, que são representadas por curvas suaves no espaço das condições iniciais dos parâmetros do sistema.

Optamos por desenvolver um modelo alternativo para estudos qualitativos das propriedades dinâmicas em asteroides em forma de alteres, o Tripolo-Segmento, que pode ser uma aproximação razoável para o estudo do asteroide Holiday. Esse modelo consiste em uma haste e três corpos, sendo dois fixos nas duas extremidades e um corpo sobre a haste.

Desenvolvido o potencial gravitacional efetivo, adaptamos-o para o programa SPO2D - Symmetric Periodic Orbits 2D, que usa o TIDES (Taylor series Integrator for Differential Equations) para integrar as equações de movimento. Este pacote faz o processamento através do software Mathematica em duas partes: o processador MathTIDES e a biblioteca LibTIDES. A equação do potencial efetivo possui 5 parâmetros de entrada: k - constante de movimento médio, μ - parâmetro de massa do corpo 2, μ_s - parâmetro de massa da haste, μ_x - parâmetro de massa do corpo 3 e l_x - distância entre o corpo 2 e 3. O arquivo de saída é então usado no Mathematica para a geração dos mapas de órbitas periódicas.

O primeiro caso estudado por nós foi assumir o valor de $\mu_s = \mu = 0$, ou seja, desprezamos a massa da haste e do corpo central de massa m_2 , o que simplifica o sistema num problema de 3 corpos. Esse processo foi pensado para verificar a consistência do potencial desenvolvido para o Tripolo-Segmento em um resultado já publicado por (ELIPE et al., 2021), denominado Dipolo-Segmento. O resultado está de acordo, conforme Figura 51 e Figura 52.

A partir daí, introduzimos a massa central, estabelecendo o sistema Tripolo-Segmento. Dentro desse contexto, a primeira análise foi negligenciar a massa da haste e admitir uma massa total constante, sendo que modificamos o parâmetro de massa do corpo central de 10% a 90% da massa do sistema. Para esse caso, mantemos sempre as massas extremas iguais. Com essa variação, geramos os mapas de

órbitas periódicas simétricas para cada valor de m_2 .

Por fim, analisamos um caso de aplicação para o Tripolo-Segmento: O asteroide Holiday. Por um processo de análise de imagens, conseguimos mapear, de maneira aproximada, a sua distribuição de massa, usando a relação entre pixel e ponto de massa. Diante disso, adaptamos o modelo Tripolo-Segmento para o asteroide. O resultado mostrou duas regiões (A) e (B) e a família m , conforme Figura 84. A principal mudança aconteceu novamente na região B, que estudamos de forma ampliada. Há um dado interessante a ser colocado: A família m aparece em trabalhos anteriores e aqui se faz presente em todos os casos de simulação. Nesse estudo da região B, apresentamos duas famílias diferentes, B_1 e B_2 , e a evolução de suas órbitas. Novamente é confirmado o que víamos apresentando nos casos anteriores. Nesse ponto de convergência (uma espiral) há uma tendência do surgimento de órbitas heteroclínicas. Outro dado interessante é que em alguns casos, parece sugerir colisões. Também analisamos as CVZ (Curvas de Velocidade Zero) para o sistema. Há uma tendência dos pontos L_4 e L_5 sofrerem um pequeno deslocamento devido a distribuição não-uniforme de massa do asteroide.

Esse trabalho pode contribuir para vários estudos futuros e apresentaremos algumas possibilidades viáveis.

Com relação a Missão Garatéa-L:

- Há de se pensar na introdução da pressão de radiação e do albedo lunar como perturbações que podem tornar mais precisos os dados de órbitas lunares.
- Fazer um mapeamento de órbitas congeladas dentro das condições iniciais do modelo desenvolvido para a Missão Garatéa-L. A partir daí, analisar a evolução da órbita.

Para a análise de órbitas periódicas simétricas:

- Podemos associar a análise de órbitas congeladas com as órbitas periódicas simétricas aplicadas em asteroides.
- Podemos desenvolver um estudo maior do comportamento das órbitas heteroclínicas existentes nos pontos de convergência das famílias de órbitas periódicas.
- O modelo Tripolo-Segmento foi desenvolvido como três corpos com massas pontuais. Podemos dimensionar esses corpos, distribuindo sua massa para que seja possível verificar supostas colisões.
- Há também a possibilidade de trabalharmos com duas hastes articuladas, o que pode produzir trabalhos de produção de órbitas para corpos de diversos formatos.

Essas possibilidades apresentadas podem ser escopo de outras pesquisas que complementarão o que já foi desenvolvido até aqui.

REFERÊNCIAS

- ABAD, A. et al. Algorithm 924: Tides, a taylor series integrator for differential equations. **ACM Trans. Math. Softw.**, v. 39, n. 1, p. 28, 2012.
- AEB, C. de C. S. C. **Reunião do ProSAME atualiza situações de propostas espaciais**. 2023. Disponível em: <<https://www.gov.br/aeb/pt-br/assuntos/noticias/reuniao-do-prosame-atualiza-situacoes-de-propostas-espaciais>>.
- AERONAUTICS, N.; ADMINISTRATION, S. **Lunar Orbiter I**. 1967. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19670026411/downloads/19670026411.pdf>>.
- ARRIBAS, M. et al. Equilibria of the symmetric collinear restricted four-body problem with radiation pressure. **Astrophys Space Sci**, v. 361, n. 84, 2016.
- BALMINO, G. Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, n. 60, p. 331–364, 1994.
- BARRIO, R.; BLESA, F. Systematic search of symmetric periodic orbits in 2dof hamiltonian systems. **Chaos Solitons Fractals**, v. 41, p. 560–582, 2009.
- BRIDENSTINE, J. **Artemis plan - nasa's lunar exploration program overview**. 2020. Disponível em: <https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/artemis_plan-20200921.pdf>.
- BROUCKE, R. A. Periodic orbits in the restricted three-body problem with earth-moon masses. **Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena**, 1968.
- BRUNO, A. Simple periodic solutions of the restricted three-body problem in the sun-jupiter case (in russian). **Institute of Applied Mathematics**, n. 66, 1993.
- CARVALHO, J.; MORAES, R.; PRADO, A. Some orbital characteristics of lunar artificial satellites. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 108, p. 371–388, 2010.
- CARVALHO, J. P. S.; MORAES, R. V.; PRADO, A. F. B. A. Planetary satellite orbiters: Aplication for de moon. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2011, 2011.
- CASTILLA, A. E. R. **Órbitas nas vizinhanças da inclinação crítica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, São Paulo - Brasil, 2020.
- CENTER, U. A. S. **IAU - WGCCRE**. 2020. Disponível em: <<https://astrogeology.usgs.gov/groups/IAU-WGCCRE>>.
- CHAMBERS, J. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Mon. Not. R. Astron. Soc**, v. 304, p. 793 – 799, 1999.
- COSTA, M.; MORAES, R. V.; PRADO, A. Cálculo da variação dos elementos orbitais de satélites lunares devido à distribuição não uniforme de massa da lua. **Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE)**, 2013.
- ELIPE, A. et al. Symmetric periodic orbits in the dipole-segment problem for two equal masses. **The Astronomical Journal**, p. 161–274, 2021.
- ELIPE, A.; LARA, M. Frozen orbits about the moon. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 26, n. 2, p. 238–243, 2003.

FONSECA, L. **Garatéa-L - Uma jornada científica, tecnológica e educacional que pretende levar o Brasil até a Lua em 2023**. 2023. Disponível em: <<https://institutogaratea.com>>.

GALANTE, D. et al. **BioC: Probing the response of extremophilic microbiomes on the lunar surface**. 2019.

GONÇALVES, L.; ROCCO, E.; MORAES, R. Orbital disturbance analysis due to the lunar gravitational potential and deviation minimization through the trajectory control in closed loop. **Journal of Physics**, v. 465, 2013.

GONÇALVES, L. D.; ROCCO, E. M.; MORAES, R. V. Analysis of the influence of orbital disturbances applied to an artificial lunar satellite. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 641, 2015.

GONÇALVES, L. D. et al. Effects of the individual terms of the lunar potential in the motion of satellites around the moon. **International Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, v. 1, 2016.

GUPTA, S.; SHARMA, R. Effect of altitude, right ascension of ascending node and inclination on lifetime of circular lunar orbits. **International Journal of Astronomy and Astrophysics**, v. 1, p. 155–163, 2011.

HÉNON, M. **Generating families in the restricted three-body problem**. Springer Science and Business Media: Springer, 1997.

IVANKOV, A. **Luna 10**. 2022. Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=1966-027A>>.

JUN-YOUNG, C. et al. On the determination of the lunar gravity field from the first chinese lunar prospector mission. **Chinese Journal of Geophysics**, v. 48, n. 2, p. 303–311, 2005.

KNEZEVIC, Z.; MILANI, A. Orbit maintenance of a lunar polar orbiter. **Planetary and Space Science**, v. 46, n. 11-12, p. 1605–1611, 1998.

KONOPLIV, A. S. et al. Recent gravity models as a result of the lunar prospector mission. **Icarus**, v. 150, p. 1–18, 2001.

KOPAL, Z.; CARDER, R. W. Selenographic coordinates. **Astrophysics and Space Science Library**, v. 50, p. 61–71, 1974.

KUGA, H.; CARRARA, V.; RAO, K. **Introdução à mecânica orbital - 2 Edição**. 2012. Disponível em: <<http://urlib.net/sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.28.23.45>>.

LEMMER, K. Propulsion for cubesats. **Acta Astronautica**, v. 134, p. 231–243, 2017.

LIU, X.; BAOYIN, H.; MA, X. Extension of the critical inclination. **Astrophysics and Space Science**, 2011.

MELO, C. F. de. **Trajatórias Alternativas no Sistema Terra-Lua**. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, São Paulo - Brasil, 2006.

MEYER, K. W.; BUGLIA, J. J.; DESAI, P. N. Lifetimes of lunar satellite orbits. **NASA Technical Paper**, v. 3394, 1994.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. United States of America: Cambridge University Press, 1999.

- PALACIOS, M. et al. Symmetric periodic orbits in the moulton–copenhagen problem. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, 2019.
- PASKOWITZ, M.; SCHEERES, D. Design of science orbits about planetary satellites: Application to europa. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 29, n. 5, 2006.
- PICKRELL, J. **These six countries are about to go to the Moon — here's why**. 2022. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/d41586-022-01252-7>>.
- PIETERS, C. M. et al. Mineralogy of the mafic anomaly in the south pole-aitken basin: Implications for excavation of the lunar mantle. **Geophysical Research Letters**, v. 24, p. 1903–1906, 1997.
- PIRES, P.; WINTER, O. Location and stability of distant retrograde orbits around the moon. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 494, p. 2727–2735, 2020.
- PRIETO-LLANOS, T.; GOMEZ-TIERNO, M. Stationkeeping at libration points of natural elongated bodies. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 17, n. 4, 1994.
- RAMANAN, R. V.; ADIMURTH, V. An analysis of near-circular lunar mapping orbits. **J. Earth Syst.**, v. 114, n. 6, p. 619–626, 2005.
- RAMÍREZ, M. Álvarez. **Órbitas periódicas simétricas en el péndulo-resorte**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Autônoma Metropolitana, Iztapalapa, México, 1992.
- RIAGUAS, A.; ELIPE, A.; LOPEZ-MORATALLA, T. Non-linear stability of the equilibria in the gravity field of a finite straight segment. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, n. 81, p. 235–248, 2001.
- ROBINSON, K. L.; TAYLOR, G. J. Heterogeneous distribution of water in the moon. **Nature Geoscience**, n. 7, p. 401–408, 2014.
- SAEDELEER, B.; HENRARD, J. The combined effect of j_2 and c_2 on the critical inclination of a lunar orbiter. **Advances in Space Research**, v. 273, p. 1177, 2016.
- SAUNDERS, M. et al. **Lunar Prospector**. 2022. Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=1998-001A>>.
- SCIENCE, N. **Bizarre Lunar Orbits**. 2006. Disponível em: <https://science.nasa.gov/science-news/science-at-nasa/2006/06nov_loworbit/>.
- SPACESHOP, A. **Kleopatra**. 2015. Disponível em: <<https://nasa3d.arc.nasa.gov/detail/kleopatra>>.
- SPUDIS, P. D. **The Robotic Exploration of the Moon**. 2022. Disponível em: <<https://moon.nasa.gov/exploration/history/>>.
- STROMGREN, H. Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps. **Bull.Astron**, v. 9, n. 100, p. 87–130, 1935.
- SZEBEHELY, V. Stability of the points of equilibrium in the restricted problem. **The Astronomical Journal**, v. 72, n. 1, 1967.
- TECHNOLOGY, C. I. **Jet Propulsion Laboratory**. 2020. Disponível em: <<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>>.
- TECHNOLOGY, J. C. I. of. **Holiday Asteroid Imaged with NASA Radar**. 2018. Disponível em: <<https://www.jpl.nasa.gov/news/holiday-asteroid-imaged-with-nasa-radar>>.

- TZIRTI, S.; TSIGANIS, K.; VARVOGLIS, H. Effect of 3rd-degree gravity harmonics and earth perturbations on lunar artificial satellite orbits. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, 2010.
- WANG, Q.; LIU, J. A chang'e-4 mission concept and vision of future chinese lunar exploration activities. **Acta Astronautica**, v. 127, p. 678–683, 2016.
- WEBER, B. **Orbital Mechanics Astrodynamics**. 2023. Disponível em: <<https://orbital-mechanics.space/intro.html>>.
- WINTER, O. et al. Controlling the eccentricity of polar lunar orbits with low-thrust propulsion. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, p. 10, 2009.
- WINTER, O.; PRADO, A. **A Conquista do Espaço - Do Sputnik à Missão Centenário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- WINTER, S. G.; MADEIRA, G.; SFAIR, R. Neptune's ring arcs confined by coorbital satellites: dust orbital evolution through solar radiation. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, n. 496, p. 590–597, 2020.
- XAVIER, J. R. **Análise do mapa de frequências aplicada ao estudo de detritos espaciais na ressonância 14:1**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, São Paulo - Brasil, 2018.
- ZHANG, J.; ZHOU, B.; LIN, Y. e. a. Lunar regolith and substructure at chang'e-4 landing site in south pole–aitken basin. **Nature Astronomy**, v. 5, p. 25–30, 2021.

APÊNDICE A – ROTINA 1

Figura 90 – Rotina para gerar o tempo que as partículas permaneceram em R_a e R_p

```
rm -f salidap*a.txt salidap*p.txt Last* salidap salida* salidap* salida*.txt
rm -f salidap*.txt
rm -f app* per* todo*

#####
## Lembrar que o número 400 indica que são 400 partículas que estão sendo avalidados.
## Esse valor pode ser modificado.
#####
for i in {1..400};do
    sed "s/daniel/$i/g" contadorblz1.f90>aux.f90
    gfortran aux.f90 -o conta
    ./conta

rm -f aux.f90
rm -f conta

grep -i -n 'Nao esta no intervalo pericentro ou apocentro' 'salida'$i'.txt' | cut -d:
-f2 |uniq>nao$i.txt
grep -i -n 'Sim esta no intervalo pericentro ou apocentro' 'salida'$i'.txt' | cut -d:
-f2 |uniq>sim$i.txt

##### Corrigido ##### Parche 1 #####
#Linha de comandos que verifica os arquivos vacios que existem nos arquivos de saida
nao$i.txt e sim$i.txt
#se caso o arquivo esteja vazio o programa indicara que essa particula 'sim está no
intervalo pericentro ou apocentro' (no caso dos arquivos de saida nao$i.txt),
# 'não está no
intervalo pericentro ou apocentro' (no caso dos arquivos de saida sim$i.txt)
#####
kk=$(wc -l nao$i.txt)
kk1=$(wc -l sim$i.txt)
echo $kk>pepe
echo $kk1>pepe1
ll=$(awk '{print $1 }' pepe)
ll1=$(awk '{print $1 }' pepe1)
if [ $ll -eq 0 ];then
    echo ' '$i $ll '365.0' 'Sim esta no intervalo pericentro ou apocentro'>nao$i.txt
fi
if [ $ll1 -eq 0 ];then
    echo ' '$i $ll1 'Nao esta no intervalo pericentro ou apocentro'>sim$i.txt
fi
rm pepe
rm pepe1
#####

for n in $(ls nao$i.txt);do
    head -n 1 $n >> Last1n.txt
    tail -n 1 $n >> Last2n.txt
done

for l in $(ls sim$i.txt);do
    head -n 1 $l >> Last1s.txt
    tail -n 1 $l >> Last2s.txt
done

#####
## Se aparecem arquivos vacios em app* ou per* devem ser considerados na conta final para
colar as C.I.
## com os arquivos Last1a.txt (Não estão no intervalo de apocentro) e Last1p.txt (Não
estão no intervalo de pericentro)
#####
find -type f -empty

rm -f nao* sim* salida*

##### Contador de percentage #####
lolo=$( echo "($i*100)/400" | bc)

BAR=$( echo $lolo) # this is full bar, mine is 20 chars
coco=$( echo 'Rodando |=====>')
echo -ne "\r$coco ${BAR:0:$i}" '%' # print $i chars of $BAR from 0 position
sleep .1
#####

done
echo 'Termino de Rodar'

#Depois de colocar as particulas que sim estão no intervalo seja no apocentro ou
pericentro devem de fazer o seguinte
#No terminal

paste small.in Last1n.txt>>todo

awk '{print $1, $2, $9 }' todo>>todo1

sed -i '/Sim/d' todo1

echo 'Plotar o arquivo todos1 onde aparecem as seguintes columnas: a, e, tempo que não
está no intervalo pericentro ou apocentro'
```

Fonte: Elaborado pelo autor.