



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

Sanderson Manoel da Conceição

**“MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO E REDUÇÃO DE MODELOS
PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS
INTELIGENTES”**

Ilha Solteira

2012

**“MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO E REDUÇÃO DE
MODELOS PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES
EM ESTRUTURAS INTELIGENTES”**

Sanderson Manoel da Conceição

Prof. Dr. Vicente Lopes Junior
Orientador

Prof. Dr. Gustavo Luiz C. M. de Abreu
Co-Orientador

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia - UNESP – Campus de Ilha
Solteira, para obtenção do título de Mestre
em Engenharia Mecânica.

Área de Conhecimento: Mecânica dos
Sólidos.

Ilha Solteira

2012

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C744m Conceição, Sanderson Manoel.
Métodos de identificação e redução de modelos para atenuação de vibrações em estruturas inteligentes / Sanderson Manoel Conceição. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2015
85 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica Dos Sólidos, 2012

Orientador: Vicente Lopes Junior
Co-orientador: Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu
Inclui bibliografia

1. Algoritmo de realização de autosistemas. 2. Filtro de kalman. 3. Identificação. 4. Controle ativo de vibrações. 5. Regulador linear quadrático. 6. observador de estados.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

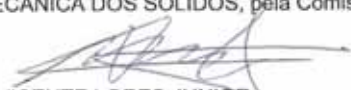
TÍTULO: MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO E REDUÇÃO DE MODELOS PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS INTELIGENTES

AUTOR: SANDERSON MANOEL DA CONCEIÇÃO

ORIENTADOR: Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHÃES DE ABREU

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica ,
Área: MECÂNICA DOS SÓLIDOS, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. MICHAEL JOHN BRENNAN

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. PAULO JOSE PAUPITZ GONCALVES

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru

Data da realização: 20 de dezembro de 2012.

Dedico este trabalho a todos os professores que tive.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por tudo que tem me concedido.

Ao Professor Vicente Lopes Junior pelo incentivo, confiança, paciência e pela oportunidade que me foi proporcionada a realizar esta pesquisa.

Ao Professor Gustavo Luiz C. M. de Abreu pela co-orientação deste trabalho. Em especial, pelas aulas e pelas discussões de teoria de controle.

Ao Professor Michael John Brennan pelas inúmeras discussões e sugestões durante o decorrer deste trabalho. Ao Professor Samuel da Silva pelas sugestões no exame de qualificação e pelas diversas conversas que enriqueceram este trabalho.

Aos membros Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes com quem tive a oportunidade de conviver nos últimos anos. Ao Douglas Domingues Bueno, Carlos Henrique Vasques, Luiz Arthur Gagg Filho, Marcelo Francisco Maesta, entre tantos, agradeço pela convivência e amizade.

Aos professores dos departamentos de matemática e engenharia mecânica, assim com aos funcionários da FEIS - UNESP, que de alguma maneira possibilitaram a realização deste trabalho.

À minha família pelo apoio.

Por último, mas não menos, a minha esposa Vânia, pelo incentivo, apoio e amor incondicional.

CONCEIÇÃO, S. M. **Métodos de identificação e redução de modelos para atenuação de vibrações em estruturas inteligentes**. 2012. 85 f. Dissertação (Mestrado -Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012.

RESUMO

Neste trabalho são apresentados dois métodos de identificação de modelos em espaço de estados. O primeiro, o Algoritmo de Realização de Autosistemas, (ERA), identifica matrizes de estado através da resposta do sistema ao impulso. Já o segundo, o método ERA/OKID, também estima as matrizes de estado do sistema, com uma vantagem que não se limita a resposta do sistema ao impulso, mas qualquer sinal pode ser usado como sinal de entrada. Os dois métodos foram aplicados na identificação experimental de uma viga de alumínio engastada. O sinal de entrada foi aplicado na viga através de um atuador PZT (*Lead-Zirconate-Titanate*) e a resposta foi medida através de um sensor PVDF (*Polyvinilidene-Fluoride*).

Com as matrizes de estado identificadas, projetou-se um controlador para a realimentação de estados. O controle Regulador Linear Quadrático (LQR), foi utilizado pela simplicidade da formulação e fácil implementação. Para realimentar os estados não mensurados, foi projetado um observador de estados. O controle aplicado à estrutura foi capaz de atenuar as vibrações quando a mesma foi submetida a diferentes tipos de perturbações externas.

Palavras-chave: Algoritmo de realização de autosistemas, Filtro de Kalman, Identificação, Controle ativo de vibrações, Regulador linear quadrático, Observador de estados.

CONCEIÇÃO, S. M. **Methods of identification and model reduction for vibration attenuation in smart structures**. 2012. 85 f. (Master of Science in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012.

ABSTRACT

This work presents two methods of system identification of models in state space. The first method, uses Eigensystem Realization Algorithm, (ERA), for identifying the state space matrices via impulse response of the system. The second method, ERA/OKID, also identifies state space matrices, however, in this method, the input data are not limited to the impulsive response, and any signal can be used as input signal. It can be a significant advantage for practical situations. Both methods were applied for experimental identification of a cantilever aluminium beam. The input excitation in beam used white noise through a (Lead-Zirconate-Titanate) PZT actuator and the beam response was measured using a PVDF (Polyvinilidene-Fluoride) sensor.

The controller was designed for state feedback using the state space matrices obtained previously. The Linear Quadratic Regulator, (LQR), was used for simplicity of design and easy implementation. A state observer was also used to feedback the unmeasured states. The controller was effective to minimize the vibrations of the structure when it was subjected to an external disturbance.

Keywords: Eigensystem realization algorithm , Observer/Kalman filter identification, Active vibration control, Linear quadratic regulator, State observer.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivo	17
1.2	Organização do Trabalho	17
2	ELEMENTOS DA TEORIA DE CONTROLE E SISTEMAS	19
2.1	Introdução	19
2.2	Teoria de Realização de Autosistemas	24
2.2.1	Controlabilidade e Observabilidade	24
2.2.2	Relação entre os Grammianos em tempo Contínuo e Discreto	27
2.3	Controle LQG (Linear Quadrático Gaussiano)	29
2.3.1	Formulação para Sistemas Contínuos	29
2.3.2	Formulação para Sistemas Discretos	32
3	MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO	33
3.1	Introdução	33
3.2	Algoritmo para Realização de Autosistemas (ERA)	35
3.2.1	Passos Computacionais para o Cálculo do ERA	39
3.3	Identificação Utilizando Observador de Estado	40
3.3.1	Cálculo dos Parâmetros de Markov	45
3.3.2	Passos Computacionais para o Cálculo do OKID	49
3.4	Normas de Sistemas	50
3.4.1	Normas de Sistemas Contínuos	50
3.4.2	Normas de Sistemas Discretos	52
3.5	Redução de Modelos	53
3.5.1	Realização Balanceada	54
3.5.2	Redução pela norma de Hankel	55

3.5.3	Redução de Modelos de Sistemas Instáveis	57
4	RESULTADOS	59
4.1	Identificação Experimental	59
4.2	Redução do Modelo	69
4.3	Controle	71
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	79
5.1	Conclusões	79
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	79
	REFERÊNCIAS	80

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Controle ativo de vibrações _____	16
Figura 2 - Diagrama de blocos de um sistema representado no espaço de estados _____	22
Figura 3 - Teorema da Separação _____	30
Figura 4 - Sistema de controle com realimentação por estado observado, com ganho do controlador K e ganho do observador L _____	31
Figura 5 - Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) _____	33
Figura 6 - Fluxograma do método ERA _____	39
Figura 7 - Fluxograma do método OKID _____	49
Figura 8 - Antena de 70 metros do Madrid Deep Space Communications Complex _____	54
Figura 9 - Bancada de realização dos ensaios de identificação e controle _____	60
Figura 10 - Placa de aquisição de sinais dSPACE1103 _____	60
Figura 11 - PZT usado com atuador e PVDF usado como sensor _____	61
Figura 12 - Diagrama de blocos do Simulink® para entrada e saída de sinais _____	61
Figura 13 - Sinal de excitação aplicado à estrutura pelo PZT _____	62
Figura 14 - Sinal de resposta à excitação medida no sensor PVDF _____	62
Figura 15 - Coerência entre os sinais de excitação e resposta _____	63
Figura 16 – Amplitude da Função de Resposta em Frequência do sistema identificado pelo método ERA/OKID e o estimado via 'etfe' _____	64
Figura 17 – Fase da Função de Resposta em Frequência do sistema identificado pelo método ERA/OKID e o estimado via 'etfe' _____	65
Figura 18 - 1º modo de vibrar _____	67
Figura 19 - 2º modo de vibrar _____	67
Figura 20 - 3º modo de vibrar – modo torcional _____	67
Figura 21 - 4º modo de vibrar _____	68
Figura 22 - 5º modo de vibrar – modo lateral _____	68
Figura 23 - 6º modo de vibrar _____	68
Figura 24 – Porcentagem da contribuição dos valores singulares de Hankel no modelo de ordem 20 _____	69

Figura 25 - Magnitude da FRF do modelo reduzido_____	70
Figura 26 - Fase da FRF do modelo reduzido_____	71
Figura 27 - Polos do sistema em malha aberta_____	72
Figura 28 - Resposta do sistema sem controle_____	72
Figura 29 - Diagrama de blocos do Simulink® do controlador e observador_____	74
Figura 30 - Resposta do sistema com controle_____	74
Figura 31 - Sinal de controle_____	75
Figura 32 – Resposta do sistema com controle (azul) e sem controle (vermelho-pontilhado)_____	75
Figura 33 - Resposta em frequência da viga sem controle_____	76
Figura 34 - Resposta em frequência da viga com controle_____	76
Figura 35 - Resposta em frequência da viga com e sem controle_____	77
Figura 36 - Polos em malha fechada_____	78
Figura 37 - Polos em malha aberta e em malha fechada_____	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedades físicas e geométricas da viga de alumínio_____	59
Tabela 2 - Valores das frequências naturais da viga dadas em Hz_____	66
Tabela 3 - Valores das frequências naturais e fatores de amortecimento da viga_____	66

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS LATINAS

A	Matriz de estado
B	Matriz de entrada
C	Matriz de saída
C_k	Matriz de controlabilidade

D	Matriz de transmissão direta
E	Esperança matemática
E	Modulo de Young
E_r	Matriz auxiliar para identificação
E_m	Matriz auxiliar para identificação
G	Ganho do observador para identificação
I	Matriz Identidade
I	Momento de inércia
H(s)	Função de Transferência
H(k)	Matriz de Hankel
J	Função de custo quadrático
K	Ganho do controlador
L	Ganho do observador
L	Comprimento da viga
O_k	Matriz de observabilidade
Q	Matriz de peso para controle
R	Matriz de restrição de energia
R_n	Matriz ortonormal
S_n	Matriz ortonormal
U	Matriz de dados de sinais de entrada/saída
u	Sinal de entrada
x	Vetor de estados
$\hat{x}$	Vetor de estados estimado
V	Matriz de dados de sinais de entrada/saída
W_c	Grammiano de controlabilidade
W_o	Grammiano de observabilidade
W_{cd}	Grammiano de controlabilidade em tempo discreto

$\mathbf{W}_{od}$	Grammiano de controlabilidade em tempo contínuo
$\mathbf{w}_n$	Sinal de ruído do processo
$\mathbf{w}_d$	Sinal de ruído do processo
$\mathbf{Y}$	Matriz dos parâmetros de Markov
$\mathbf{y}$	Vetor de saída
$\mathbf{Z}$	Matriz dos parâmetros de Markov do observador

LETRAS GREGAS

δ	Função delta de Dirac
Λ	Matriz de autovalores
Ψ	Matriz de autovetores
σ	Valor singular de Hankel
λ	Autovalor
ξ	Fator de amortecimento
ω	Frequência Natural

Gerais

$\mathbf{A}^T$	Matriz transposta
$\mathbf{A}^{-1}$	Matriz inversa
$\mathbf{A}^\dagger$	Pseudo-inversa da matriz $\mathbf{A}$
Σ	Somatório
$\text{tr}(\)$	Traço de uma matriz
$\ \mathbf{H}\ _2$	Norma H_2 da função de transferência $\mathbf{H}(s)$
$\ \mathbf{H}\ _\infty$	Norma H_∞ da função de transferência $\mathbf{H}(s)$
$\ \mathbf{H}\ _H$	Norma de Hankel da função de transferência $\mathbf{H}(s)$

SIGLAS

ARMA	AutoRegressive Moving Average
ARMAX	AutoRegressive Moving Average with eXogeneous inputs
AVC	Active Vibration Control
ERA	Eigensystem Realization Algorithm
FFT	Fast Fourier Transform
FIR	Função de Resposta ao Impulso
FEM	Finite Element Method
GMSINT	Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
LMI	Linear Matrix Inequalities
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
N4SID	Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification
PZT	Lead-Zirconate-Titanate
PVDF	Polyvinilidene-Fluoride
OKID	Observer/Kalman Filter Identification
RMS	Root-Mean-Square
SISO	Single-Input Single-Output

1 INTRODUÇÃO

A teoria de sistemas de controle é uma área de pesquisa interdisciplinar em que sistemas dinâmicos são analisados através de conceitos matemáticos. Sistemas dinâmicos podem ser definidos como entidades em que há uma relação de independência entre seus elementos, sendo um elemento (ou mais de um) a variável dependente e outro (ou outros) a variável independente.

Em um problema de controle, um objetivo importante é garantir a estabilidade do sistema, além de outras condições de desempenho. Algumas técnicas de controle modernas aplicadas para garantir a estabilidade do sistema são dependentes de um modelo matemático que representa o comportamento dinâmico do sistema. Encontrar um modelo matemático que possa representar um sistema é uma área da teoria de sistemas e controle chamada identificação de sistemas.

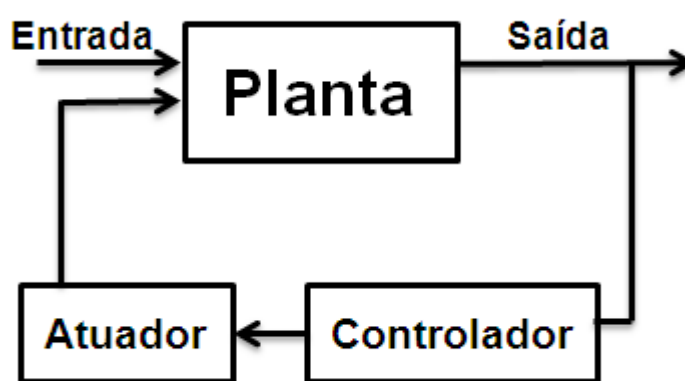
Um método que tem sido muito utilizado para identificação de sistemas é o Algoritmo para Realização de Autosistemas, conhecido como ERA, (do inglês, *Eigensystem Realization Algorithm*), Juang e Pappa (1985). Este método apresenta a vantagem do modelo encontrado ser representado em espaço de estados, o que é ideal para o projeto de controle baseado em modelo. O ERA tem sido aplicado para identificar modelos em diversas estruturas flexíveis como placas, da Silva (2005), e estruturas espaciais, Juang (1994). Apesar dos bons resultados obtidos pelo ERA, este método possui uma limitação, ou seja, necessita da resposta ao impulso, o que em muitos casos é de difícil obtenção. Em Juang (1994) um novo método é derivado do ERA, o ERA/OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*). Neste novo método, um observador é inserido nas equações para estimar a resposta ao impulso a partir de qualquer entrada. Em Alves (2005), o ERA/OKID é utilizado para identificação de um modelo para um duto acústico. Juang (1994), também utiliza este método para a identificação de um modelo obtido dados de voo do Telescópio Espacial Hubble.

Após a obtenção de um modelo que represente o sistema, o controlador pode ser projetado de maneira que certos requisitos de desempenho possam ser atendidos, como por exemplo, o tempo de estabelecimento, ou o máximo valor de ultrapassagem. O controle de vibrações em estruturas é uma necessidade constante e deve ser considerado desde o início do projeto.

Para modelos cuja dimensão é de ordem muito elevada, pode-se aplicar uma técnica de redução de modelos para obter uma representação de ordem menor, de maneira que a diferença de desempenho entre os dois modelos, nas mesmas condições, seja a menor possível, Assunção (2000). Modelos de ordem menor são mais fáceis de analisar e podem ser implementados de maneira eficiente. A redução do modelo é essencial também quando a planta original apresenta modos não controláveis e/ou observáveis. Neste caso, reduzir o modelo para a dimensão que contenha a quantidade de modos que se queira controlar e observar simplificará o cálculo dos ganhos do controlador e do observador.

Há basicamente três abordagens no controle de vibrações. O controle passivo, o controle ativo e o controle semiativo. O controle passivo consiste basicamente em acrescentar massa, amortecimento, rigidez ou modificar a geometria da estrutura. Esta técnica reduz as vibrações, mas pode aumentar o peso da estrutura, o que não é desejado. O controle ativo, conhecido pela sigla AVC (do inglês, *Active Vibration Control*), utiliza forças secundárias aplicadas na estrutura por um controlador que adquire as informações obtidas por um sensor, Gatti et al. (2007). Estas forças minimizam a vibração estrutural causada por uma fonte de vibração primária. Já o controle semiativo consiste na aplicação simultânea das duas abordagens anteriores. A Figura 1 apresenta o funcionamento típico do controle ativo.

Figura 1 - Controle ativo de vibrações



Fonte: Ogata (2008)

As técnicas de controle ativo de vibrações são impulsionadas pela necessidade de estruturas leves e sistemas com alto desempenho, que possam gerar menores custos durante a operação, assim como diminuir a quantidade e número dos equipamentos (*Hardware*). Estruturas aeroespaciais e robóticas são algumas aplicações que se beneficiam destas técnicas.

Para o controle de sistemas lineares e invariantes no tempo, o controle Linear Quadrático, LQR é uma excelente escolha, Anderson e Moore (1989). O uso do controle LQR tem sido aplicado para o controle de estruturas flexíveis por diversos autores. Em Stavroulakis et al. (2005) o controle LQR é utilizado para reduzir as vibrações em uma viga engastada utilizando materiais piezelétricos (PZT's) como sensor e atuador. O modelo do sistema é baseado no princípio de Hamilton e na teoria clássica de engenharia para vigas com aproximação pelo método dos elementos finitos. Em Zhang et al. (2008), também é feito o controle de vibrações usando o método LQR e dois PZT's como sensor e atuador, sendo que o modelo é obtido usando teoria modal para estruturas flexíveis piezelétricas. Cheng e Chen (2009) além de usar o controle LQR em uma viga engastada, introduz um modelo analítico para uma viga engastada que

descreve a relação dinâmica entre a inclinação (ângulo) na ponta e a voltagem aplicada. Hernandez et al. (2011), aplica o controle LQR em uma viga de Timoshenko.

No campo de identificação de sistemas, alguns membros do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSint) já utilizaram técnicas de identificação como o ERA, da Silva (2005), exponencial complexa, Palma, (2007), Método dos Elementos Finitos, N4SID (*Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification*), Bueno (2007). O método ERA foi aplicado nos trabalhos de da Silva (2005), Palma (2007) e Marqui (2007). Em da Silva (2005) foi identificado um modelo para uma placa de alumínio na condição engastada-livre-livre-livre e para uma viga de aço inox na condição engastada-livre. Palma (2007) também aplicou o ERA na identificação de uma placa de alumínio nas mesmas condições.

Entre os trabalhos de controle no GMSint, destacam-se os controles via Desigualdades Matriciais Lineares, LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) com realimentação de estados e realimentação na saída, Gonçalves (2003), da Silva (2005), Palma (2007), Santos (2008). Bueno (2007) utilizou o controle LQR com formulação via LMI para controle de vibrações dos dois primeiros modos de vibrar em uma treliça 3D.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar duas técnicas de identificação de sistemas utilizando uma abordagem tipo “caixa preta”, paramétrica, cujo modelo obtido será utilizado para projetar um controlador ótimo. O controle será avaliado em uma estrutura inteligente, na qual serão colocados em sua superfície o PZT (*Lead-Zirconate-Titanate*) e o PVDF (*Polyvinilidene-Fluoride*), que atuam como atuador e sensor, respectivamente. A modelagem analítica ou numérica da estrutura inteligente é complexa, razão pela qual técnicas de identificação experimental representam uma importante alternativa de análise destas estruturas.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

- O Capítulo 1 apresenta a introdução sobre identificação de sistemas e controle ativo de vibrações.
- No Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos da teoria de sistemas e controle que serão utilizados nesta dissertação, bem como as representações matemáticas para sistemas e a formulação para o projeto do controlador.
- O Capítulo 3 apresenta os dois métodos de identificação que serão utilizados para obter o modelo em espaço de estados e o método de redução de modelos.

- O capítulo 4 mostra os resultados experimentais obtidos com o controlador projetado através dos métodos de identificação e de redução mostrados nos capítulos anteriores.
- No Capítulo 5 estão as considerações finais e propostas para trabalhos futuros.

2 ELEMENTOS DA TEORIA DE SISTEMAS LINEARES

2.1 INTRODUÇÃO

Um sistema dinâmico é dito linear se ele satisfaz aos princípios da aditividade e da proporcionalidade entre excitação e resposta. O primeiro princípio estabelece que para uma entrada $\mathbf{u}_1(t)$ o sistema exibe uma resposta $\mathbf{y}_1(t)$, e para uma entrada $\mathbf{u}_2(t)$ o sistema exibe $\mathbf{y}_2(t)$ como resposta, então para uma entrada $\mathbf{u}_1(s) + \mathbf{u}_2(s)$, o sistema exibirá na saída a resposta $\mathbf{y}_1(s) + \mathbf{y}_2(s)$. O segundo princípio estabelece que, se para uma entrada $\mathbf{u}(t)$ o sistema tem como resposta $\mathbf{y}(t)$, então para uma entrada $k\mathbf{u}(t)$, sendo k uma constante, a resposta será $k\mathbf{y}(t)$. Esses dois princípios quando combinados é chamado de princípio da superposição. Então, uma entrada $k_1\mathbf{u}_1(s) + k_2\mathbf{u}_2(s)$ produz a resposta $k_1\mathbf{y}_1(s) + k_2\mathbf{y}_2(s)$, com k_1 e k_2 constantes.

Sistemas que não satisfazem estes princípios são chamados de sistemas não-lineares.

Função de Transferência

A função de transferência de um sistema com uma entrada e uma saída, SISO (do inglês, *Single-Input Single-Output*) representado por uma equação diferencial linear invariante no tempo é definida como a razão entre a transformada de Laplace da saída (função de resposta) e a transformada de Laplace da entrada (função de excitação), admitindo-se todas as condições iniciais nulas. Este conceito pode ser melhor entendido considerando o sistema linear invariante no tempo, definido pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} & a_0 \mathbf{y}^{(n)} + a_1 \mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{\mathbf{y}} + a_n \mathbf{y} \\ & = b_0 \mathbf{u}^{(m)} + b_1 \mathbf{u}^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{\mathbf{u}} + b_m \mathbf{u} \quad (\text{com } n \geq m) \end{aligned} \quad (2.1)$$

sendo $\mathbf{y}$ a saída do sistema e $\mathbf{u}$ a entrada. A função de transferência desse sistema é dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \Big|_{\text{condições iniciais nulas}} \\ &= \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde o símbolo $\mathcal{L}[\cdot]$ significa a transformada de Laplace e $\mathbf{Y}(s)$ e $\mathbf{U}(s)$ são as transformadas da saída e da entrada, respectivamente.

A transformada de Laplace da função $\mathbf{h}(t)$, $\mathbf{H}(s)$, é definida como

$$\mathbf{H}(s) = \int_0^\infty \mathbf{h}(t) e^{-st} dt \quad (2.3)$$

sendo $s = \sigma + j\omega$ uma variável complexa, com σ a parte real, ω a parte imaginária e $j = \sqrt{-1}$. A função $h(t)$ deve ser tal que $h(t) = 0$ para $t < 0$.

O conceito de função de transferência é utilizado para representar a dinâmica de um sistema por meio de uma equação algébrica em s . A ordem do sistema é a maior potência do polinômio denominador da função de transferência. As raízes do polinômio denominador, chamadas de polos, determinam a estabilidade do sistema. Se os polos estão localizados no lado esquerdo do semiplano complexo (o polo tem parte real negativa) o sistema é estável. Se pelo menos um polo se localiza no lado direito do semiplano complexo (o polo tem parte real positiva) o sistema é instável. Quando um polo é igual à zero o sistema é dito marginalmente estável.

A função de transferência de um sistema é um modelo matemático que constitui um método operacional para expressar a equação diferencial que relaciona a variável de saída à variável de entrada. Este conceito é uma representação utilizada no domínio da frequência.

Representação em espaço de estados

Estado: O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, tais que o conhecimento dessas variáveis juntamente com o conhecimento de entradas futuras, determinam completamente o comportamento do sistema.

Variáveis de estado: As variáveis de estado de um sistema dinâmico são aquelas que constituem o menor conjunto de variáveis capaz de determinar o estado desse sistema.

Obs: Uma das vantagens dos métodos em espaço de estados reside no fato de que as variáveis de estados não necessitam serem quantidades fisicamente mensuráveis ou observáveis. Assim, variáveis que não representam grandezas físicas ou não são mensuráveis ou observáveis podem ser escolhidas como variáveis de estado. Entretanto, em determinadas situações é conveniente escolher variáveis de estado grandezas que sejam facilmente mensuráveis, como no controle ótimo, que requer a realimentação de estado de todas as variáveis.

Vetor de estado: Se n variáveis de estado forem necessárias para descrever completamente o comportamento do sistema, então estas n variáveis de estado poderão ser consideradas os n componentes de um vetor $\mathbf{x}$. Esse vetor é chamado de vetor de estado. Assim, um vetor de estado é aquele que determina univocamente o estado de um sistema para qualquer instante, conhecidos o estado no instante atual e a entrada futura.

Espaço de estados: O espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, sendo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ variáveis de estado, é chamado de espaço de estados. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

Equações no espaço de estado

Suponha que um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas envolva n integradores. Considere também que existam r entradas $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots, \mathbf{u}_r(t)$ e m saídas

$y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Defina as n saídas dos integradores como variáveis de estado: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Então o sistema pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

As saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ do sistema pode ser dadas por:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Se definirmos:

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, & f(x, u, t) &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, & g(x, u, t) &= \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \\ u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

As equações (2.4) e (2.5) podem ser escritas como

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)\tag{2.6}$$

$$y(t) = g(x, u, t)\tag{2.7}$$

A equação (2.6) é chamada equação de estado e a equação (2.7) é a equação de saída. Se as funções f e/ou g envolverem explicitamente o tempo t , então o sistema será chamado de sistemas variantes no tempo.

Se as equações (2.6) e (2.7) forem linearizadas em torno de um ponto de operação, então teremos as seguintes equações de estado e de saída linearizadas:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)\tag{2.8}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)\tag{2.9}$$

Nas equações (2.8) e (2.9) $\mathbf{A}(t)$ é chamada de matriz de estado, $\mathbf{B}(t)$ de matriz de entrada, $\mathbf{C}(t)$ de matriz de saída e, $\mathbf{D}(t)$ de matriz de transmissão direta. A Figura 2 apresenta uma representação em diagrama de blocos das equações (2.8) e (2.9).

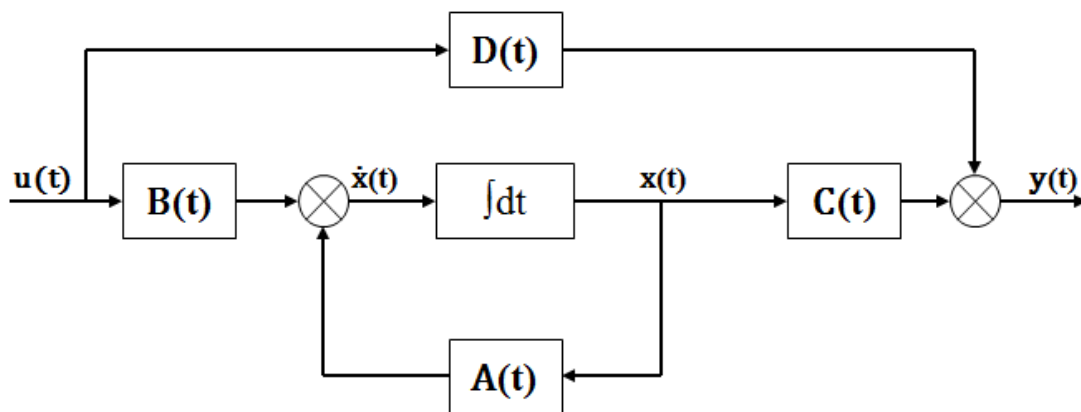
Se as funções vetoriais $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ não envolverem explicitamente o tempo, t , o sistema será chamado de sistema invariante no tempo. Nesse caso as equações (2.8) e (2.9) podem ser escritas simplesmente como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.11)$$

A equação (2.10) é a equação de estado de um sistema linear invariante no tempo, enquanto a equação (2.11) é a equação de saída para o mesmo sistema.

Figura 2 - Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo, representado no espaço de estados.



Fonte: Ogata (2008)

A representação em espaço de estados é utilizada quando o sistema está no domínio do tempo.

Correlação entre funções de transferência e equações no espaço de estados

Como um mesmo sistema pode ser representado tanto por funções de transferência ou equações no espaço de estado, é importante apresentar uma correlação entre estas duas abordagens. Para o caso SISO, seja $H(s)$ uma função dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s) \quad (2.12)$$

sendo $U(s)$ e $Y(s)$ as transformadas de Laplace da entrada $\mathbf{u}(t)$ e da saída $\mathbf{y}(t)$, respectivamente. A representação em espaço de estados para esse sistema é:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.14)$$

com $\mathbf{x}(t)$ o vetor de estados. A função de transferência $\mathbf{H}(s)$ é obtida de (2.13) e (2.14) através do seguinte procedimento. Aplicando a transformada de Laplace nas equações (2.13) e (2.14), tem-se

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (2.16)$$

Como já definido, a função de transferência é a razão entre as transformadas de Laplace da saída e da entrada quando as condições iniciais são nulas. Assim, $\mathbf{x}(0)$ é igual à zero em (2.15). Logo,

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

ou

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Multiplicando à esquerda ambos os lados da última equação por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, obtém-se

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (2.17)$$

Substituindo a equações (2.17) na equação (2.15), tem-se

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) \quad (2.18)$$

Comparando a equação (2.18) com a equação (2.12), obtém-se

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.19)$$

Esta é a expressão da função de transferência do sistema em termos de $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$.

A função de transferência $\mathbf{H}(s)$ pode ser escrita como uma razão de dois polinômios em s , ou seja,

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Q}(s)}{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}}$$

sendo $\mathbf{Q}(s)$ um polinômio em s . Logo, $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ é igual ao polinômio denominador em $\mathbf{H}(s)$. Em outras palavras, os autovalores de $\mathbf{A}$ são iguais aos polos de $\mathbf{H}(s)$. No Matlab[®], os comandos *tf2ss* e *ss2tf* realizam a conversão entre representações em espaço de estado e função de transferência.

Com esta relação estabelecida, os conceitos de sistema próprio e sistema estritamente próprio serão definidos.

Um sistema é dito semi-próprio se, e somente se, sua função de transferência $\mathbf{H}(s)$ é limitada em $s = \infty$. Na representação em espaço de estados, $\mathbf{D} \neq 0$.

Um sistema é estritamente próprio quando $\mathbf{H}(\infty) = 0$. Na representação em espaço de estados, $\mathbf{D} = 0$.

Um sistema é próprio quando ele for semi-próprio ou estritamente próprio.

Já quando $H(\infty) = \infty$, o sistema será dito impróprio, Skogestad e Postlethwaite (2005).

Sistema de controle com realimentação: Um sistema que estabelece uma relação de comparação entre a saída e a entrada de referência, utilizando a diferença como meio de controle, é denominado sistema de controle com realimentação.

Malha aberta e Malha Fechada: Os sistemas de controle a malha aberta são aqueles em que o sinal de saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema. Isso quer dizer que em um sistema de controle de malha aberta o sinal de saída não é medido nem realimentado para comparação com a entrada. Já nos sistemas de controle a malha fechada, o sinal de erro atuante, que é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de realimentação, realimenta o controlador, de modo que minimize o erro e ajuste a saída do sistema ao valor desejado.

2.2 TEORIA DE REALIZAÇÃO DE SISTEMAS

Uma questão que se levanta frequentemente em controle e identificação de sistemas, tanto em trabalhos experimentais quanto teóricos, é se todos os estados de um sistema podem ser controlados e/ou observados? A resposta é obtida estudando a controlabilidade e a observabilidade do sistema.

2.2.1 Controlabilidade e observabilidade

Controlabilidade e observabilidade são propriedades que fornecem informações úteis para testes estruturais e controle. A utilidade pode ser encontrada revisando as definições de controlabilidade e observabilidade de um sistema. Uma estrutura (viga, placa, treliça) é controlável se os atuadores instalados excitam todos os seus modos estruturais. A mesma é observável se sensores instalados detectam movimentos em todos os seus modos. Esta informação, embora essencial em muitos casos, como posicionamento de sensores e atuadores, é muito limitada. Ela só responde a questão de excitação e detecção dos modos em termos de sim ou não. A resposta quantitativa é fornecida através dos gramianos de controlabilidade e observabilidade, que representam o grau de controlabilidade e observabilidade de cada modo, (GAWRONSKI, 1998). A seguir uma definição formal destes dois tópicos é apresentada juntamente com dois critérios para verificar a controlabilidade e observabilidade.

Considere inicialmente uma representação em espaço de estados em tempo contínuo, dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.21)$$

Para as equações (2.20) e (2.21) definimos: $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estado de dimensão n , $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de controle de dimensão r , $\mathbf{y}(t)$ é o vetor de saída de dimensão m , $\mathbf{A}$ é

a matriz de estados de dimensão ($n \times n$), $\mathbf{B}$ é a matriz de entrada de dimensão ($n \times r$), $\mathbf{C}$ é a matriz de saída de dimensão ($m \times n$) e $\mathbf{D}$ é a matriz de transmissão direta de dimensão ($m \times r$).

O sistema descrito pelas equações (2.20) e (2.21) é de estado controlável em $t = t_0$ se for possível construir um sinal de controle $\mathbf{u}(t)$, não limitado, que transfira o sistema de um estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, para qualquer estado final, em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todo o estado for controlável, então o sistema será considerado de estado completamente controlável, Ogata (2008).

O critério mais utilizado para verificar a condição de controlabilidade é calculando o posto da matriz ($n \times nr$):

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sendo r a dimensão do vetor $\mathbf{u}(t)$. Se esta matriz for de posto n , que é o número de vetores-coluna linearmente independentes, o sistema é dito ser de estado completamente controlável. A matriz

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

é comumente denominada matriz de controlabilidade.

O sistema descrito pelas equações (2.20) e (2.21) é de estado observável em $t = t_0$ se o estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser determinado a partir do sinal de saída $\mathbf{y}(t)$ em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todo o estado for observável, então o sistema será considerado de estado completamente observável, Ogata (2008).

Novamente, utiliza-se o critério do posto para verificar a observabilidade do sistema, calculando-se o posto da matriz ($nm \times n$):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Se esta matriz for de posto n , então o sistema é dito ser de estado completamente observável. A matriz acima é comumente denominada matriz de observabilidade.

O critério do posto, embora seja simples, apresenta duas inconveniências. Primeiro, ele responde a questão de controlabilidade e observabilidade em termos de sim ou não. Segundo, ele só é útil para sistemas de pequenas dimensões. Para um sistema de dimensão $n=100$, calcular a matriz $\mathbf{A}^{99}$ para determinar se o sistema é controlável e/ou observável pode resultar em problemas numéricos.

Uma abordagem alternativa usa matrizes gramianas para determinar as propriedades do sistema. Graminianas são matrizes não-negativas que expressam as propriedades de controlabilidade e observabilidade qualitativamente, e são livres das

dificuldades numéricas expressadas anteriormente. Os gramínianos de controlabilidade, $\mathbf{W}_c$, e observabilidade, $\mathbf{W}_o$, são definidos, respectivamente como, Gawronski (1998)

$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(\tau)} d\tau \quad (2.24)$$

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T(\tau)} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(\tau)} d\tau \quad (2.25)$$

Uma alternativa mais conveniente para determinar os gramínianos é solucionando as seguintes equações diferenciais:

$$\dot{\mathbf{W}}_c(t) = \mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (2.26)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_o(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (2.27)$$

onde o ponto superior na variável significa a derivada em relação ao tempo. As soluções $\dot{\mathbf{W}}_c(t)$ e $\dot{\mathbf{W}}_o(t)$ são matrizes variantes no tempo. O interesse é encontrar uma solução estacionária, ou invariante no tempo. Para um sistema estável, esta solução é obtida fazendo $\dot{\mathbf{W}}_c = \dot{\mathbf{W}}_o = 0$ na equação acima. Assim, as equações diferenciais são substituídas pelas seguintes equações algébricas, chamadas de equações de Lyapunov:

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 \quad (2.29)$$

Se a matriz $\mathbf{A}$ é estável, ou seja, seus autovalores possuem parte real negativa, as matrizes dos gramínianos $\mathbf{W}_c$ e $\mathbf{W}_o$ são positivas definidas. Os elementos σ_i , $i=1, \dots, n$, definidos como

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o)} \quad (2.30)$$

são os valores singulares de Hankel do sistema, sendo λ_i os autovalores da matriz $\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o$.

Para os sistemas em tempo discreto, definidos pela equação

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (2.32)$$

podemos definir as matrizes dos gramínianos de controlabilidade e observabilidade de modo similar ao caso contínuo. Seja Δt o tempo de amostragem, a matriz de controlabilidade em tempo discreto $\mathbf{C}_k$ é definida como

$$\mathbf{C}_k = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}] \quad (2.33)$$

Já o gramíniano de controlabilidade $\mathbf{W}_c(k)$, no intervalo de tempo $[0, k\Delta t]$, é definido como

$$\mathbf{W}_c(k) = \sum_{i=0}^k \mathbf{A}^i \mathbf{B} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^i)^T \quad (2.34)$$

Diferentemente dos sistemas contínuos, o grammiano de controlabilidade $\mathbf{W}_c(k)$ pode ser obtido através da matriz de controlabilidade $\mathbf{C}_k$, ou seja,

$$\mathbf{W}_c(k) = \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^T \quad (2.35)$$

A matriz de observabilidade em tempo discreto $\mathbf{O}_k$ é definida como

$$\mathbf{O}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

e o grammiano de observabilidade em tempo discreto $\mathbf{W}_o(k)$, sobre o intervalo de tempo $[0, k\Delta t]$, é

$$\mathbf{W}_o(k) = \sum_{i=0}^k (\mathbf{A}^i)^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{A}^i \quad (2.37)$$

que também pode ser obtida de $\mathbf{O}_k$

$$\mathbf{W}_o(k) = \mathbf{O}_k^T \mathbf{O}_k \quad (2.38)$$

Os valores singulares de Hankel para sistemas discretos são obtidos de maneira similar aos obtidos para sistemas contínuos.

2.2.2 Relação entre os graminianos em tempo contínuo e discreto

Seja $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ uma representação em espaço de estados em tempo discreto. Das definições dos graminianos de controlabilidade e observabilidade em tempo discreto em (2.34) e (2.37), obtém-se

$$\mathbf{W}_c(k) = \mathbf{B}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{B}^T(\mathbf{A}^2)^T + \dots \quad (2.39)$$

$$\mathbf{W}_o(k) = \mathbf{C}^T\mathbf{C} + \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{A} + (\mathbf{A}^2)^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{A}^2 + \dots \quad (2.40)$$

Os graminianos de controlabilidade e observabilidade em tempo discreto não convergem para os seus equivalentes em tempo contínuo quando o tempo de amostragem converge para zero. De fato, considere o graminiano de observabilidade em tempo contínuo

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T(\tau)} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(\tau)} d\tau \quad (2.41)$$

Uma aproximação para o tempo discreto pode ser feita nos instantes $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$, como

$$\mathbf{W}_o = \sum_{i=0}^{\infty} e^{i\mathbf{A}^T\Delta t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{i\mathbf{A}\Delta t} \Delta t = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{A}_d^i)^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{A}_d^i \Delta t$$

As matrizes $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{B}_d$ e $\mathbf{B}_c$ indicam as versões discretas e contínuas das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente. Introduzindo a equação (2.40) na equação anterior, obtém-se

$$\mathbf{W}_o = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \mathbf{W}_o(k) \quad (2.42)$$

A relação para os gramianianos de controlabilidade é estabelecida de maneira similar. Primeiro, note que para um tempo de amostragem pequeno, tem-se

$$\mathbf{B}_d \approx \Delta t \mathbf{B}_c \quad (2.43)$$

De fato, pela definição de $\mathbf{B}_d$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_d &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c d\tau = \int_0^{\Delta t} (\mathbf{I} + \mathbf{A}_c \tau + \frac{1}{2} \mathbf{A}_c^2 \tau^2 \dots) \mathbf{B}_c d\tau \\ \mathbf{B}_c \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c \Delta t^2 + \frac{1}{6} \mathbf{A}_c^2 \mathbf{B}_c \Delta t^3 + \dots &\approx \Delta t \mathbf{B}_c \end{aligned}$$

Da definição do gramianiano de controlabilidade em tempo contínuo, segue

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_c &= \int_0^\infty e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c \mathbf{B}_c^T e^{\mathbf{A}_c^T \tau} d\tau \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^\infty e^{i \mathbf{A}_c \Delta t} \mathbf{B}_c \mathbf{B}_c^T e^{i \mathbf{A}_c^T \Delta t} \Delta t \end{aligned} \quad (2.44)$$

De $\mathbf{B}_d$ em (2.43) e $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c \Delta t}$, tem-se que, Gawronski (1998)

$$\mathbf{W}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^\infty \mathbf{A}_d^i \mathbf{B}_d \mathbf{B}_d^T (\mathbf{A}_d^i)^T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{W}_c(k)$$

Assim,

$$\mathbf{W}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{W}_c(k) \quad (2.45)$$

Note, entretanto, que das equações (2.42) e (2.45), o produto dos gramianianos em tempo discreto converge para o produto dos seus equivalentes no tempo contínuo

$$\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{W}_c(k) \mathbf{W}_o(k)) \quad (2.46)$$

Os valores singulares de Hankel em tempo discreto (σ_{disc}) convergem para os valores em tempo contínuo, conforme Δt se aproxima de zero.

$$\sigma_{icont} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma_{disc} \quad (2.47)$$

Uma realização balanceada é uma realização mínima assintoticamente estável em que os gramianianos de controlabilidade e observabilidade são iguais e diagonais. A igualdade dos gramianianos significa que cada estado é tão controlável quanto observável; em termos de estruturas, cada modo é igualmente controlável e observável (possuem o mesmo grau de excitação e detecção)

Seja $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ uma realização mínima estável da função de transferência $\mathbf{H}(s)$. A realização $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ é chamada de balanceada se as soluções para as equações de Lyapunov

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0$$

são $\mathbf{W}_o = \mathbf{W}_c = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \mathbf{\Sigma}$, sendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots, \sigma_n > 0$ os valores singulares de Hankel e $\mathbf{W}_o$ e $\mathbf{W}_c$ os gramianianos de controlabilidade e observabilidade já definidos.

2.3 CONTROLE LINEAR QUADRÁTICO GAUSSIANO, LQG

O controle ótimo, que surgiu através dos trabalhos de Norbert Wiener (1894-1964) em filtragem ótima nos anos de 1940, alcançou maturidade nos anos de 1960 com o que agora chamamos de controle Linear Quadrático Gaussiano, ou simplesmente controle LQG. O desenvolvimento do controle LQG coincidiu com o desenvolvimento dos programas espaciais dos Estados Unidos e da antiga União Soviética. Os principais problemas eram relacionados a manobras de foguete com o mínimo de consumo de combustível, que poderiam ser bem definidos e facilmente formulados como problemas de otimização. O controle LQG era eficaz quando aplicado a problemas aeroespaciais, mas quando aplicado a problemas industriais mais comuns, os resultados não eram tão eficazes. Modelos precisos não eram frequentemente disponíveis e a hipótese de ruídos não eram sempre relevantes ou significantes para trabalhos práticos.

2.3.1 Formulação para sistemas contínuos

No controle LQG tradicional, assume-se que a dinâmica da planta é linear e conhecida e que os ruídos de medida e os sinais de distúrbios (ruído do processo) são estocásticos com propriedades estatísticas conhecidas. Com estas suposições, tem-se o modelo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_d\mathbf{w}_d \quad (2.48)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{D}_n\mathbf{w}_n \quad (2.49)$$

por simplicidade, faz-se $\mathbf{D} = 0$. Nas equações (2.48) e (2.49), $\mathbf{w}_d$ é o ruído de excitação (ruído do processo) e representa um distúrbio no sistema e $\mathbf{w}_n$ é o ruído de medida, que são usualmente assumidos como processos estocásticos Gaussianos, não correlacionados, com média zero e com matrizes de densidade espectral de potência, $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$, respectivamente, constantes. Ou seja, $\mathbf{w}_d$ e $\mathbf{w}_n$ são processos de ruído branco com covariâncias:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{w}_d(t)\mathbf{w}_d(\tau)^T\} = \mathbf{W}\delta(t - \tau) \quad (2.50)$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{w}_n(t)\mathbf{w}_n(\tau)^T\} = \mathbf{V}\delta(t - \tau) \quad (2.51)$$

e $\mathbf{E}\{\mathbf{w}_d(t)\mathbf{w}_n(\tau)^T\} = 0$, $\mathbf{E}\{\mathbf{w}_n(t)\mathbf{w}_d(\tau)^T\} = 0$, sendo $\mathbf{E}$ o operador de esperança matemática e $\delta(t - \tau)$ a função delta de Dirac.

O problema do controle LQG é encontrar um controle ótimo $\mathbf{u}(t)$ que minimize a função de custo quadrático J

$$J = \mathbf{E}\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u}] dt\right\} \quad (2.52)$$

com $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ matrizes de peso, constantes, apropriadamente escolhidas (parâmetros de projeto) de maneira que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \geq 0$. O nome controle LQG vem do fato do

modelo usado ser linear, a função de custo a ser minimizada é uma função quadrática e os sinais de distúrbio e ruído são modelados por processos Gaussianos.

A solução do problema LQG, conhecida como Teorema da Separação, é surpreendentemente simples e elegante e consiste em primeiro determinar o controle ótimo para o problema do Regulador Linear Quadrático, (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*), que nada mais é que o controle LQG sem $\mathbf{w}_d$ e $\mathbf{w}_n$. A solução para o LQR pode ser escrita em termos de uma lei de realimentação de estados

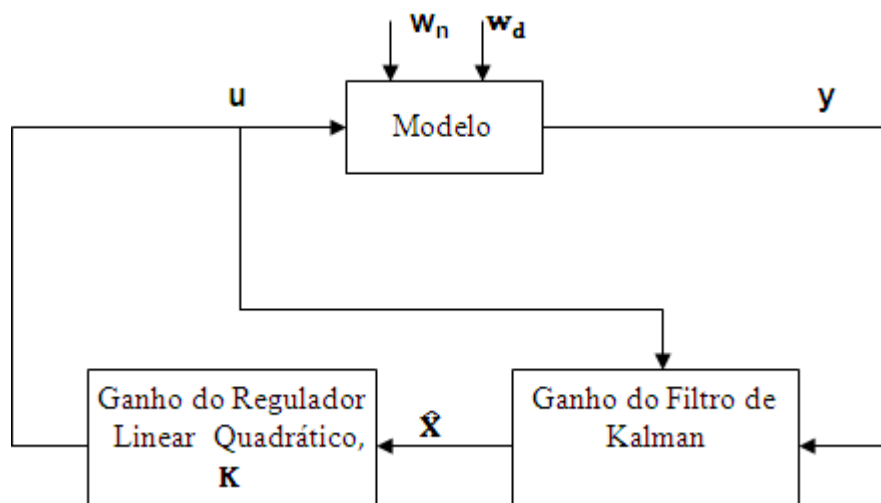
$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2.53)$$

sendo $\mathbf{K}$ uma matriz constante, fácil de ser calculada e independente de $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$. O próximo passo é encontrar $\hat{\mathbf{x}}$ o estado estimado do estado $\mathbf{x}$, de maneira que $\mathbf{E}\{[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}]^T[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}]\}$ seja minimizado. O estado $\hat{\mathbf{x}}$ é obtido através do filtro de Kalman e é independente de $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$.

A solução requerida para o problema LQG é então encontrada substituindo $\mathbf{x}$ por $\hat{\mathbf{x}}$, que é $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$.

O problema LQG e sua solução podem ser separados em duas partes distintas, como ilustrado na Figura 3.

Figura 3 - Teorema da Separação



Fonte: Skogestad e Postlethwaite (2005)

As equações necessárias para encontrar as matrizes de ganho ótimo para a realimentação de estados e do filtro de Kalman podem ser encontradas através dos seguintes procedimentos:

Ganho Ótimo para realimentação de estados: O problema LQR, quando todos os estados são conhecidos, é conhecido como problema de valor inicial: Dados o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.54)$$

o estado inicial diferente de zero $\mathbf{x}(0)$, encontre o sinal de controle $\mathbf{u}(t)$ que leve o sistema para o estado zero ($\mathbf{x}=0$) de uma maneira ótima, ou seja, que minimize a função de custo

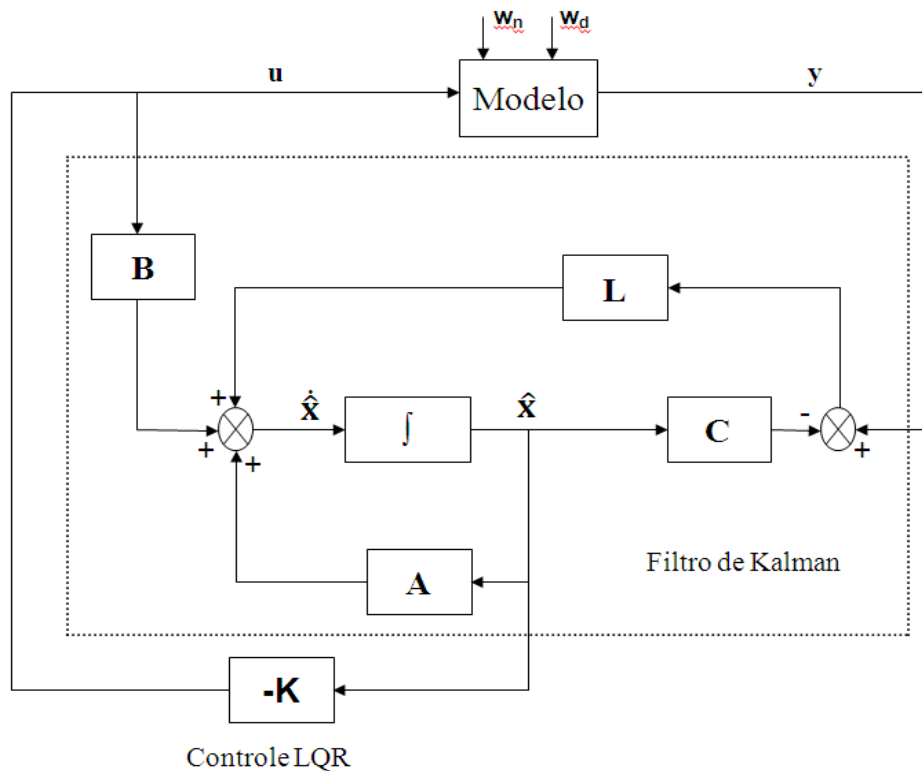
$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt \quad (2.55)$$

A solução ótima, para qualquer estado inicial, é dada por $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$ é a única solução da equação algébrica de Riccati

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.56)$$

Ganho do Filtro de Kalman: O filtro de Kalman tem a estrutura de um observador (ou estimador) de estados, como mostrado na Figura 4, com

Figura 4 - Sistema de controle com realimentação por estado observado, com ganho do controlador $\mathbf{K}$ e ganho do observador $\mathbf{L}$.



Fonte: Skogestad e Postlethwaite (2005)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.57)$$

O ganho ótimo $\mathbf{L}$ que minimiza

$$\mathbf{E}\{[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}]^T[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}]\}$$

é dado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{Y}\mathbf{C}^T\mathbf{V}^{-1} \quad (2.58)$$

sendo $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \geq 0$ a única solução da equação algébrica de Riccati

$$\mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{Y}\mathbf{C}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{W} = 0 \quad (2.59)$$

A função de transferência do controlador LQG que envolve combinação entre estimação e realimentação de estados, da saída $\mathbf{y}$ para o controle $\mathbf{u}$, é dada por:

$$\mathbf{K}_{LQG}(s) = \left[\frac{\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C}}{-\mathbf{K}} \middle| \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{0}} \right] = \left[\frac{\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{Y}\mathbf{C}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}}{-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}} \middle| \frac{\mathbf{Y}\mathbf{C}^T\mathbf{V}^{-1}}{\mathbf{0}} \right] \quad (2.60)$$

$\mathbf{K}_{LQG}$ tem o mesmo número de polos que o modelo $\mathbf{H}(s)$.

Obs: As matrizes de ganho ótimo $\mathbf{K}$ e $\mathbf{L}$ existem e o sistema controlado por LQG é internamente estável (ou seja, é estável em todos os pontos do sistema, não apenas para um ponto específico), desde que os sistemas com realização em espaço de estados $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}^{1/2})$ e $(\mathbf{A}, \mathbf{W}^{1/2}, \mathbf{C})$ sejam estabilizáveis (quando os autovalores não controláveis são estáveis) e detectáveis (quando os autovalores não observáveis são estáveis).

2.3.2 Formulação para sistemas discretos

Considere o sistema em espaço de estados em tempo discreto dado pelas equações (2.48) e (2.49). Neste caso o vetor de entrada é dado por

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) \quad (2.61)$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de ganho do controlador obtido através da minimização do índice de desempenho quadrático

$$\mathbf{J} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)) \quad (2.62)$$

As matrizes $\mathbf{Q} \geq 0$ e $\mathbf{R} > 0$ determinam a importância relativa do estado $\mathbf{x}$ e do consumo de energia $\mathbf{u}$, respectivamente. Eles também determinam a importância relativa do erro e o esforço de controle. Quando a variável toma valores de 0 a ∞ , tem-se o caso a horizonte infinito. Para valores limitados da variável, tem-se o caso a horizonte finito.

Os elementos desconhecidos da matriz $\mathbf{K}$ são determinados através da minimização do índice de desempenho de maneira que $\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k)$ seja ótima para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0)$. Para determinar os elementos da matriz $\mathbf{K}$ que minimiza o índice de desempenho, é necessário resolver a equação matricial de Riccati dada por, Anderson e Moore (1989)

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} = 0 \quad (2.63)$$

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são as matrizes de estado e de entrada, respectivamente, (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, - 2005). Após determinar a matriz $\mathbf{P}$, o ganho $\mathbf{K}$ pode ser determinado por

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A} \quad (2.64)$$

3 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO À IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Identificar uma equação matemática para representar uma estrutura ou fenômeno físico foi um dos grandes interesses de cientistas ao longo da história. A aplicação prática destes métodos ainda motiva a comunidade a experimentar novas proposições (ABREU et al. 2012; AGUIRRE 2000).

Construir um modelo matemático que represente o comportamento de um sistema físico tem sido um grande desafio para pesquisadores em diversas áreas de conhecimento. Este modelo pode ser uma tabela, um gráfico ou uma equação (ou conjunto de equações) matemática(s). Encontrar um modelo para um sistema ou fenômeno físico garante uma melhor compreensão para o mesmo. Um dos primeiros exemplos bem sucedidos de identificação de um modelo foi feito por Gauss, Figura 5, em 1801, utilizando o método dos mínimos quadrados, desenvolvido por ele em 1795.

Figura 5 - Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



Fonte: Christian Albrecht Jensen (1840)

No dia 1 de janeiro de 1801, Piazzi (1746-1826) descobriu Ceres, que está localizado no cinturão de asteroides entre Marte e Júpiter. Piazzi registrou 22 conjuntos de dados, que constavam do instante em que foi feita a observação e de dois ângulos necessários para localizar Ceres no espaço. Ceres deixou de ser visto após 41 dias, pois

sua órbita o levou para atrás do Sol. Então, um importante problema surgiu: quando e onde Ceres seria observável novamente? Surgiu assim o desafio de determinar a órbita (aproximadamente) elíptica de Ceres, usando os dados de Piazzi que, naturalmente, continham erros de observação.

Em setembro de 1801, foram publicadas as previsões feitas por vários cientistas, inclusive a de Gauss, que era muito diferente das dos demais. Ceres foi reencontrado novamente no primeiro dia do ano de 1802, muito próxima da posição prevista por Gauss. Ceres foi o primeiro asteroide a ser descoberto, (MONTEIRO, 2006).

Na teoria de sistemas e controle, este problema é denominado Identificação de Sistemas. Identificar um sistema consiste em uma técnica de modelagem pela qual um modelo matemático é construído a partir de dados obtidos em observações e/ou experimentos realizados com o sistema a ser modelado.

De acordo com Gevers (2006), o desenvolvimento da teoria de identificação de sistemas de controle iniciou por volta de 1960 e seguiu os passos do desenvolvimento do projeto de técnicas de controle baseadas em modelos. Até o final dos anos de 1950, os projetos de controladores eram baseados nos diagramas de Bode, Nyquist e Nichols, ou na análise da resposta ao degrau. Estas técnicas eram limitadas ao projeto de sistemas de uma entrada e uma saída, ou sistemas SISO, (do inglês, *single-input single-output*). A representação em espaço de estados foi introduzida por R. E. Kalman (1930 -), Gevers (2006) e definiu as bases para diversas teorias baseadas em espaço de estados, como filtragem ótima e controle ótimo, sendo o controle Linear Quadrático (LQ) a base para o controle baseado em modelos.

A disponibilidade de técnicas de controle baseadas em modelo acabou por levar a extensão da aplicação do controle moderno para esferas além das aplicações em mecânica, elétrica e aeroespacial, para as quais modelos confiáveis estavam disponíveis. Tornou-se necessário desenvolver técnicas baseadas em dados que permitiam desenvolver modelos dinâmicos para áreas tão diversas como controle de processos, sistemas ambientais, biológicos e biomédicos, de transportes, entre outros.

Embora muito já tivesse sido estabelecido em identificação por pesquisadores em estatística e econometria, 1965 foi o ano de nascimento da teoria de identificação de sistemas na área de controle. Naquele ano, a publicação de dois artigos estabeleceu o desenvolvimento das duas principais correntes de identificação que ainda são dominantes. O primeiro, era o método de subespaço, que é baseado em técnicas de projeção no espaço Euclidiano, Ho e Kalman (1965). Enquanto o segundo método de predição de erro é baseado na minimização de um critério de parâmetro dependente, Åström e Bohlin (1965).

O artigo de Ho e Kalman forneceu a primeira solução para a determinação de uma representação mínima em espaço de estados a partir de dados de resposta ao impulso. A solução deste problema de realização determinística foi depois estendida para realização estocástica, onde um modelo Markoviano é obtido para um processo

randômico puro baseado em dados de covariância. No começo dos anos de 1990, este método foi estendido para processos que também continham uma entrada (controle) que podia ser medida.

A identificação de um sistema pode basicamente ser dividida em três abordagens: caixa branca, caixa preta e caixa cinza. A caixa branca é a obtenção de um modelo através de métodos analíticos, como as leis de Newton, Métodos de Energia, Elementos Finitos, etc. O formato do modelo final é previamente conhecido. Caixa preta é a obtenção de modelos através de dados que contenham a relação entrada/saída do sistema. Nesta abordagem, assume-se pouco conhecimento do sistema. Modelagem caixa cinza é a união dos dois primeiros. Caixa cinza corresponde ao problema de ajuste de modelos, em que, obtido um modelo através de métodos analíticos, usa-se dados experimentais para correção e ajuste de parâmetros.

Quanto aos métodos, a identificação pode ser paramétrica e não paramétrica. Na primeira classe, os parâmetros são estimados para o modelo e representam o comportamento do sistema. Estes parâmetros podem ser os coeficientes dos polinômios de uma função de transferência ou as matrizes de estado. Estes elementos estimados (coeficientes dos polinômios ou os termos das matrizes) estão diretamente relacionados com os parâmetros físicos do sistema descrito por equações diferenciais, ordinárias ou parciais. Já nos métodos de identificação não paramétrica, o resultado obtido não é um modelo como função de transferência ou espaço de estados, mas sim uma representação gráfica, que fornecerá as características dinâmicas do sistema. As respostas ao impulso e em frequência são exemplos de representação não paramétrica.

3.2 ALGORITMO DE REALIZAÇÃO DE AUTOSISTEMAS (ERA)

O algoritmo para realização de autosistemas, (ERA do inglês, *Eigensystem Realization Algorithm*) foi concebido por Juang e Pappa (1985) e Juang et al. (1988) e é bastante conveniente para a teoria de controle, pois permite a identificação de um modelo em espaço de estados. O algoritmo se inicia com um conjunto de dados, a partir destes é construída uma matriz, a matriz de Hankel, e então, decompõe esta matriz em valores singulares, obtendo as matrizes de estado.

Um sistema em espaço de estados, com representação discreta é descrito por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) \quad (3.2)$$

Assumindo um impulso unitário no instante k , ou seja,

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} 0, k < t \\ 1, k = t \\ 0, k > t \end{cases} \quad (3.3)$$

Substituindo os valores da equação (3.3) nas equações (3.1) e (3.2) e assumindo condições iniciais nulas, $\mathbf{x}(0) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(0) &= \mathbf{0} & \Rightarrow \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(0) = \mathbf{D} \\
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) = \mathbf{B} & \Rightarrow \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(1) = \mathbf{CB} \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{AB} & \Rightarrow \mathbf{y}(2) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(2) + \mathbf{D}\mathbf{u}(2) = \mathbf{CAB} \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \Rightarrow \mathbf{y}(3) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(3) + \mathbf{D}\mathbf{u}(3) = \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \\
&\vdots & & \vdots \\
\mathbf{x}(l-1) &= \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(l-1-i) & \Rightarrow \mathbf{y}(l-1) &= \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{CA}^{i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(l-1-i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(l-1)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

As matrizes constantes obtidas são conhecidas como parâmetros de Markov do sistema, que denotaremos por

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}, \mathbf{Y}_1 = \mathbf{CB}, \mathbf{Y}_2 = \mathbf{CAB}, \mathbf{Y}_3 = \mathbf{CA}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{Y}_k = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} \tag{3.5}$$

Os parâmetros de Markov, $\mathbf{Y}_k$, que nada mais são do que a resposta do sistema ao impulso (FIR, Função de Resposta ao Impulso), servem de base para identificar o modelo em tempo discreto, equações (3.1) e (3.2), representado pelas matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$. Como $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$, só as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ precisam ser determinadas.

O início da realização é feito montando a matriz de Hankel generalizada, e é composta pelos parâmetros de Markov:

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\beta-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{Y}_{k+\alpha} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Para o caso $k=1$, então

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{1+\alpha} & \dots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \dots & \mathbf{CA}^{\beta-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^\beta\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^\alpha\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{\alpha+\beta-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

O elemento $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$ não está incluído em $\mathbf{H}(0)$. Se $\alpha \geq n$ e $\beta \geq n$ (n é a ordem do sistema), a matriz $\mathbf{H}(k-1)$ tem posto n . Isto pode ser confirmado substituindo os parâmetros de Markov, equações (3.5) em (3.6) e decompondo-se $\mathbf{H}(k-1)$ em três matrizes, ou seja:

$$\mathbf{H}(k-1) = \mathbf{W}_o \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{W}_c \tag{3.8}$$

sendo que $\mathbf{W}_c$ e $\mathbf{W}_o$ são definidas como:

$$\mathbf{W}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B}]$$

A matriz $\mathbf{W}_c$ é a matriz de controlabilidade, enquanto a matriz $\mathbf{W}_o$ é a matriz de observabilidade. Se a ordem do sistema é n , então a dimensão mínima da matriz de estado é $(n \times n)$. Se o sistema é controlável e observável, as matrizes $\mathbf{W}_c$ e $\mathbf{W}_o$ também tem posto n . Portanto, a matriz de Hankel, equação (3.6), tem posto n .

O método ERA inicia com a decomposição em valores singulares da matriz de Hankel para $k=1$, equação (3.6):

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}\mathbf{\Sigma}\mathbf{S}^T \quad (3.9)$$

sendo $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ matrizes ortonormais e $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz retangular, definida como:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

com

$$\mathbf{\Sigma}_n = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n]$$

e σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) monotonicamente não-crescente $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$. Seja $\mathbf{R}_n$ e $\mathbf{S}_n$ matrizes formadas pelas primeiras n colunas de $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$, respectivamente. Assim, a matriz $\mathbf{H}(0)$ e sua pseudo-inversa, $\mathbf{H}^\dagger$, tornam-se

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{S}_n^T \quad (3.10)$$

com $\mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{I}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n$
e

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{S}_n \mathbf{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{R}_n^T \quad (3.11)$$

Comparando a equação (3.10)

$$\mathbf{H}(k) = \mathbf{W}_c \mathbf{A}^k \mathbf{W}_o \quad (3.12)$$

com $k = 0$, sugere que $\mathbf{W}_o$ está relacionada com $\mathbf{R}_n$ e $\mathbf{W}_c$ está relacionada com $\mathbf{S}_n^T$. De fato, uma possível escolha é fazer $\mathbf{W}_o = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2}$ e $\mathbf{W}_c = \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T$. Esta escolha faz com que $\mathbf{W}_c$ e $\mathbf{W}_o$ tornem-se balanceados, ou seja, diagonais e iguais.

Fazendo $k = 1$ na equação (3.12), obtêm-se

$$\mathbf{H}(1) = \mathbf{W}_c \mathbf{A} \mathbf{W}_o = \mathbf{R}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{A} \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T$$

De acordo com a equação (3.8), a matriz $\mathbf{B}$ é a primeira coluna da matriz $\mathbf{W}_c$ enquanto que a matriz $\mathbf{C}$ é a primeira linha da matriz $\mathbf{W}_o$. Para encontrar a matriz de estados $\mathbf{A}$, pré e pós-multiplica os dois lados da equação acima, primeiro por $\mathbf{R}_n^T$ e $\mathbf{S}_n$, e depois por $\mathbf{\Sigma}_n^{-1/2}$. A solução é

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}$$

Para uma prova mais detalhada, definiremos uma matriz nula de ordem i , $\mathbf{O}_i$, uma matriz identidade de ordem i , $\mathbf{I}_i$, a matriz $\mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \mathbf{O}_m \dots \mathbf{O}_m]$, sendo m o número de saídas, a matriz $\mathbf{E}_r = [\mathbf{I}_r \mathbf{O}_r \dots \mathbf{O}_r]$, sendo r o número de entradas. Usando as equações (3.6), (3.8), (3.9), (3.10) e (3.11), uma realização mínima pode ser obtida como segue, Juang (1994):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{H}(k-1) \mathbf{E}_r \\ &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{W}_c \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{W}_o \mathbf{E}_r \\ &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{W}_c [\mathbf{W}_o \mathbf{H}^T \mathbf{W}_c] \mathbf{A}^{k-1} [\mathbf{W}_o \mathbf{H}^T \mathbf{W}_c] \mathbf{W}_o \mathbf{E}_r \\ &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{H}(0) [\mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{R}_n^T] \mathbf{W}_c \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{W}_o [\mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{R}_n^T] \mathbf{H}(0) \mathbf{E}_r \\ &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{H}(0) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} [\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}]^{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(0) \mathbf{E}_r \\ &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} [\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2}]^{k-1} \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r \end{aligned} \quad (3.13)$$

Assim, as matrizes identificadas são:

$$\hat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \quad \hat{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_m^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2}$$

Sendo esta uma realização mínima. O termo ‘ $\hat{}$ ’ é usado para distinguir as matrizes estimadas das matrizes verdadeiras. A ordem da matriz $\hat{\mathbf{A}}$ é a ordem do sistema, n .

A realização do modelo representado pelas matrizes $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ e $\hat{\mathbf{D}}$ está em tempo discreto e pode ser transformada para um modelo em tempo contínuo através do comando `d2c` no Matlab®. O comando `c2d` produz a operação inversa.

Seja a matriz dinâmica, de ordem n , cujos autovetores $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ são todos linearmente independentes com correspondentes autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ que não são necessariamente distintos. Seja $\mathbf{\Lambda}$ a matriz diagonal dos autovalores e $\boldsymbol{\Psi}$ a matriz dos autovetores, ou seja,

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]$$

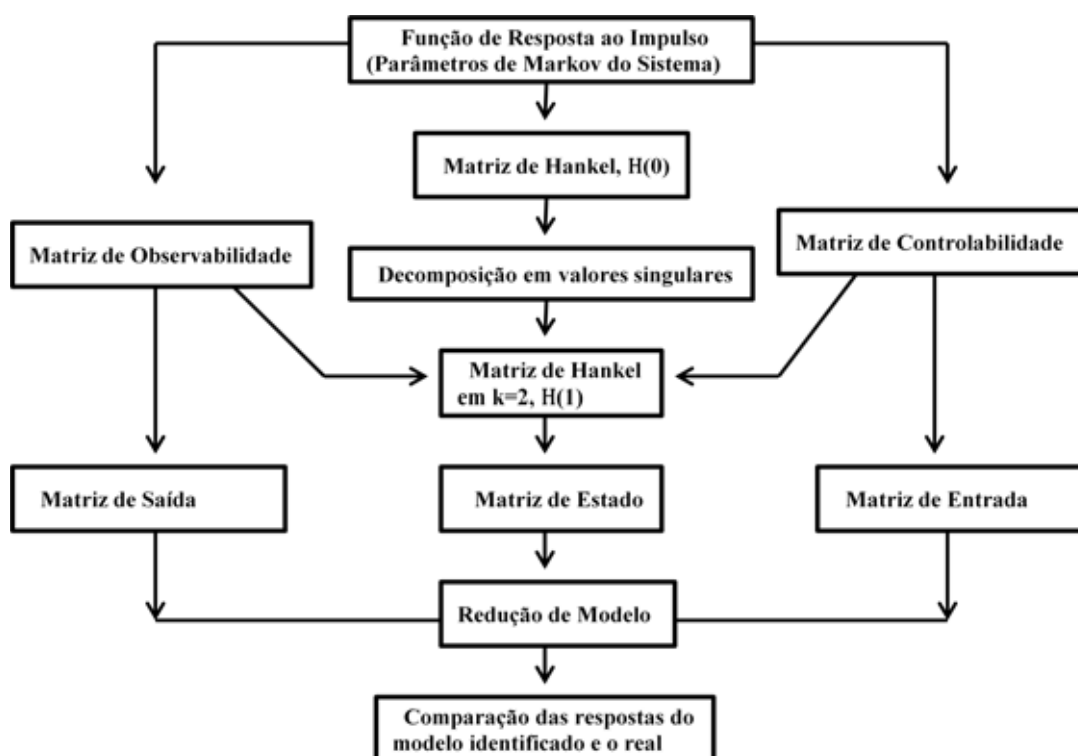
A realização $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ pode então ser transformada na realização $[\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}]$. A diagonal da matriz $\mathbf{\Lambda}$ contém as informações das taxas de amortecimento modal e as frequências naturais amortecidas. A matriz $\boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{B}$ define as amplitudes modais iniciais e a matriz $\mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}$ define os modos nos pontos onde estão localizados os sensores. Assim, todos os parâmetros modais de um sistema dinâmico podem ser identificados pelo tripé $[\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{B}, \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}]$. As taxas de amortecimento modal desejado e as frequências naturais amortecidas são simplesmente as partes real e imaginária dos autovalores de $\mathbf{\Lambda}_c$, após a transformação do tempo discreto para o tempo contínuo usando a relação $\mathbf{\Lambda}_c = \ln(\mathbf{\Lambda}) / \Delta t$, Alves (2005).

3.2.1 Passos computacionais para o cálculo do ERA

Para a identificação de um modelo através do ERA, os seguintes passos devem ser seguidos, Figura 6:

- 1) Construa a matriz de Hankel para $k=1$, $\mathbf{H}(0)$, organizando os parâmetros de Markov do sistema (as amostras de resposta ao impulso) em blocos, (equação (3.7)).
- 2) Usando decomposição em valores singulares, decompõe-se a matriz de Hankel $\mathbf{H}(0)$, (equação (3.7)).
- 3) Determine a ordem do sistema examinando os valores singulares da matriz de Hankel $\mathbf{H}(0)$, (equação (3.9)).
- 4) Construa uma realização de ordem mínima $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}]$ usando a matriz de Hankel para $k=2$, $\mathbf{H}(1)$, (equação (3.13)).
- 5) Realizar a redução do modelo $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}]$, caso seja necessário, (tópico 3.5).
- 6) Compara-se as respostas no tempo à excitações padrões e a resposta em frequência entre o modelo identificado e o real. Se os resultados não forem satisfatórios, reaplicar o algoritmo.

Figura 6 - Fluxograma do método ERA



Fonte: Juang (1994)

3.3 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO OBSERVADOR DE ESTADOS

Equação básica do observador

Considere o sistema linear, multivariável, discreto, descrito pelas equações (3.1) e (3.2). Assumindo condições iniciais nulas, $\mathbf{x}(0) = 0$, o conjunto destas equações para uma sequência de $k = 0, 1, \dots, l-1$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(0) &= 0 & \Rightarrow & \mathbf{y}(0) = \mathbf{D}\mathbf{u}(0) \\
 \mathbf{x}(1) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(0) & \Rightarrow & \mathbf{y}(1) = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{D}\mathbf{u}(1) \\
 \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) & \Rightarrow & \mathbf{y}(2) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{D}\mathbf{u}(2) \\
 & \vdots & & \\
 \mathbf{x}(l-1) &= \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(l-1-i) & \Rightarrow & \mathbf{y}(l-1) = \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(l-1-i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(l-1)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Agrupando as equações acima em uma forma matricial, tem-se

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{U} \tag{3.15}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y} &= [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(l-1)] \\
 \mathbf{Y} &= [\mathbf{D} \ \mathbf{CB} \ \mathbf{CAB} \ \dots \ \mathbf{CA}^{l-2}\mathbf{B}]
 \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \dots & \mathbf{u}(l-2) \\ & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(l-3) \\ & & & \dots & \vdots \\ & & & & \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

A equação (3.15) é uma representação matricial da evolução no tempo entre entrada e a saída. O vetor $\mathbf{y}$, de dimensão $(m \times l)$, é o vetor de saída, sendo m o número de saídas e l o número de amostras (dados). A matriz $\mathbf{Y}$ de dimensão $(m \times l)$, sendo r o número de entradas, contém todos os parâmetros de Markov a serem determinados, ou seja, os elementos $\mathbf{D}$, $\mathbf{CB}$, $\mathbf{CAB}$, ..., $\mathbf{CA}^{l-2}\mathbf{B}$. Por último, a matriz $\mathbf{U}$, triangular superior de dimensão $(rl \times l)$, é a matriz de entrada.

Analisando a equação (3.15) observa-se que há $(m \times l)$ incógnitas na matriz dos parâmetros de Markov $\mathbf{Y}$, porém só $(m \times l)$ equações. Quando $r > 1$, a solução para $\mathbf{Y}$ não é única. Entretanto, sabe-se que para um sistema linear de dimensão finita, $\mathbf{Y}$ deve ser único. A matriz $\mathbf{Y}$ só pode ser unicamente determinada do conjunto de equações para o caso $r = 1$. Mesmo neste caso, se o sinal de entrada tem valor inicial zero, ou seja, $\mathbf{u}(0) = 0$, ou se o mesmo não for rico o suficiente em frequência ou ainda se l for muito grande, então a matriz $\mathbf{U}$ será mal-condicionada e a matriz $\mathbf{Y} = \mathbf{y}\mathbf{U}^{-1}$ não pode ser calculada com precisão.

Considere o caso com $\mathbf{A}$ sendo assintoticamente estável, de maneira que, para um valor p suficientemente grande, $\mathbf{A}^k \approx 0$ para todo $k \geq p$. A equação (3.15) pode então ser aproximada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{U} \quad (3.16)$$

sendo

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(l-1)]$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{D} \ \mathbf{CB} \ \mathbf{CAB} \ \dots \ \mathbf{CA}^{p-2}\mathbf{B}]$$

e

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \dots & \mathbf{u}(p-1) & \dots & \mathbf{u}(l-2) \\ & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(p-2) & \dots & \mathbf{u}(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(l-p-1) \end{bmatrix}$$

Observe que as matrizes $\mathbf{U}(r(p+1) \times l)$ e $\mathbf{Y}(m \times r(p+1))$ referem-se as versões truncadas das matrizes $\mathbf{U}$ e $\mathbf{Y}$ da equação (3.15). A escolha de l deve ser feita $l > r(p+1)$, de maneira que $\mathbf{CA}^k\mathbf{B} = 0$, para $k \geq p$.

A equação (3.16) indica que há mais equações ($m \times l$) do que incógnitas ($m \times r(p+1)$) devido a $l > r(p+1)$. Pode-se então concluir que se os dados tem uma realização na forma das equações (3.1) e (3.2), então os primeiros p parâmetros de Markov aproximadamente satisfazem $\mathbf{Y} = \mathbf{y}\mathbf{U}^\dagger$, sendo $\mathbf{U}^\dagger$ a matriz pseudo-inversa de $\mathbf{U}$, e o erro de aproximação decresce à medida que p cresce.

Infelizmente, para estruturas espaciais levemente amortecidas, os inteiros p e l requeridos para tornar válida a aproximação dada pela equação (3.16) tornam a matriz $\mathbf{U}$ muito grande, dificultando a solução numérica da pseudo-inversa $\mathbf{U}^\dagger$. Diante deste problema, uma questão surge: existe alguma maneira de acrescentar artificialmente amortecimento no sistema para permitir solução para a equação (3.16) para os parâmetros de Markov? A teoria de controle sugere que uma realimentação seja adicionada ao sistema, tornando-o tão estável quanto se deseje.

Adicionando e subtraindo o termo $\mathbf{G}\mathbf{y}(k)$ no lado direito da equação de estado em (3.1), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{G}\mathbf{y}(k) - \mathbf{G}\mathbf{y}(k) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{x}(k) + (\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D})\mathbf{u}(k) - \mathbf{G}\mathbf{y}(k) \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k) \quad (3.17)$$

sendo

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C} \\ \bar{\mathbf{B}} &= [\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D} \quad -\mathbf{G}] \\ \mathbf{v}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.18}$$

e $\mathbf{G}$ é uma matriz $n \times m$ arbitrariamente escolhida para fazer a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ tão estável quanto se queira.

Embora a equação (3.17) seja matematicamente idêntica à equação (3.1) o sistema de matrizes usado é diferente, assim como o vetor de entrada. De fato, a equação (3.17) é uma equação de observador de estados, se o estado $\mathbf{x}(k)$ for considerado como um vetor do observador de estado. Assim, os parâmetros de Markov do sistema na equação (3.17) serão referidos como os parâmetros de Markov do observador. A relação entrada-saída em forma matricial para a equação (3.17) torna-se:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{V}\tag{3.19}$$

sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= [\mathbf{y}(0) \quad \mathbf{y}(1) \quad \mathbf{y}(2) \quad \dots \quad \mathbf{y}(p) \quad \dots \quad \mathbf{y}(l-1)] \\ \mathbf{Z} &= [\mathbf{D} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{l-2}\bar{\mathbf{B}}]\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(p-1) & \dots & \mathbf{v}(l-2) \\ & & \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(p-2) & \dots & \mathbf{v}(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(l-p-1) \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \mathbf{v}(0) \end{bmatrix}$$

sendo $\mathbf{y}$ uma matriz $(m \times l)$, $\mathbf{Z}$ uma matriz $(m \times [(m+r)(l-1)+r])$ e $\mathbf{V}$ uma matriz $([(m+r)(l-1)+r] \times l)$.

A equação (3.19) é obtida da equação (3.15) substituindo $\mathbf{A}$ por $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B}$ por $\bar{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$, exceto na primeira linha da matriz $\mathbf{V}$. Devido ao fato da matriz $\mathbf{G}$ de dimensão $n \times m$ poder ser arbitrariamente escolhida, os autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$ também podem ser atribuídos arbitrariamente por um sistema observável. Em Phan et al. (1992) a identificação dos parâmetros de Markov é considerada para qualquer locação dos polos do observador para $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}$; considera ainda que o desenvolvimento matemático pode ser interpretado como uma tentativa de colocar os autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$ na origem, isto é, um observador "sem batimentos", e de acordo com Alves (2005), este procedimento tem

o objetivo de introduzir uma frequência natural nula neste observador, daí o termo sem batimento. Disto resulta que $\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} = 0$ para $k \geq p$. Quando se usa dados reais que contém ruído, os autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$ são de fato colocados de maneira que $\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} \approx 0$ para $k \geq p$ sendo p um inteiro suficiente grande. Assim, utilizando a mesma abordagem da equação (3.6), resolvem-se os parâmetros de Markov do observador a partir de dados reais:

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{V} \quad (3.20)$$

sendo

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(p) \ \dots \ \mathbf{y}(l-1)]$$

$$\bar{\mathbf{Z}} = [\mathbf{D} \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \ \dots \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}}]$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(p-1) & \dots & \mathbf{v}(l-2) \\ & & \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(p-2) & \dots & \mathbf{v}(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(l-p-1) \end{bmatrix}$$

sendo $\mathbf{y}$ de dimensão $(m \times l)$, $\bar{\mathbf{Z}}$ de dimensão $(m \times [(m+r)p+r])$ e $\mathbf{V}$ de dimensão $([(m+r)p+r] \times l)$.

Observe que as matrizes $\bar{\mathbf{Z}}$ e $\mathbf{V}$ referem-se às versões truncadas de $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{V}$ da equação (3.19). Assim como na equação (3.16), se os dados possuem realização na forma das equações (3.1) e (3.2) ou como em (3.17) e (3.2), então os primeiros p parâmetros de Markov aproximadamente satisfazem $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{y}\mathbf{V}^\dagger$, sendo $\mathbf{V}^\dagger$ a matriz pseudo-inversa de $\mathbf{V}$, e o erro de aproximação decresce à medida que p cresce. Note que os parâmetros de Markov do observador assim identificados podem não necessariamente aparecer para ter decaimento assintótico durante os $p-1$ passos, embora isso resulte $\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} = 0$, para o caso de dados livres de ruídos. Para que a solução de $\bar{\mathbf{Z}}$ seja única, todas as linhas da matriz $\mathbf{V}$ devem ser linearmente independentes. Além disso, para minimizar qualquer erro numérico devido ao cálculo da pseudo-inversa, as linhas de $\mathbf{V}$ devem ser escolhidas de maneira que sejam o mais independentes possíveis. Como resultado, o máximo valor de p é o número que maximiza o número $(r+m)p+r \leq l$ de linhas independentes de $\mathbf{V}$. O máximo p significa o limite superior da ordem do observador "sem batimento".

Todas as equações a seguir assumem condições iniciais nulas, $\mathbf{x}(0) = 0$. Para condições iniciais não nulas, uma abordagem diferente deve ser usada. Da equação (3.17) mostra-se que

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k),$$

$$\mathbf{x}(k+2) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k+1)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\mathbf{A}}^2 \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+1), \\
\mathbf{x}(k+3) &= \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k+2) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+2) \\
&= \bar{\mathbf{A}}^3 \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}^2 \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k) + \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+1) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+2), \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(k+p) &= \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k+p-1) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+p-1) \\
&= \bar{\mathbf{A}}^p \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}^{p-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k) + \bar{\mathbf{A}}^{p-2} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+1) + \dots + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+p-1),
\end{aligned}$$

usando a equação de saída, equação (3.2), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k+p) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k+p) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k+p) \\
&= \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^p \mathbf{x}(k) + \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^{p-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k) + \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^{p-2} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+1) + \dots \\
&\quad + \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{v}(k+p-1) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k+p)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Um conjunto para estas equações para uma sequência de $k = 0, 1, \dots, l-1$ pode ser escrito como

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^2 \mathbf{x} + \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{V}} \tag{3.22}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{y}} &= [\mathbf{y}(p) \ \mathbf{y}(p+1) \ \dots \ \mathbf{y}(l-1)] \\
\mathbf{x} &= [\mathbf{x}(0) \ \mathbf{x}(1) \ \dots \ \mathbf{x}(l-p-2)] \\
\bar{\mathbf{Z}} &= [\mathbf{D} \ \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} \ \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}} \ \dots \ \mathbf{C} \bar{\mathbf{A}}^{p-1} \bar{\mathbf{B}}]
\end{aligned}$$

e

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(p) & \mathbf{u}(p+1) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ \mathbf{v}(p-1) & \mathbf{v}(p) & \dots & \mathbf{v}(l-2) \\ \mathbf{v}(p-2) & \mathbf{v}(p-1) & \dots & \mathbf{v}(l-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(l-p-1) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Observe que o primeiro termo na equação (3.22) representa o efeito dos $p-1$ passos precedentes. Para o caso que $\bar{\mathbf{A}}^p$ é suficientemente pequeno e todos os estados em $\mathbf{x}$ são limitados, a equação (3.22) pode ser aproximada ignorando o primeiro termo do lado direito, ou seja,

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{V}} \tag{3.24}$$

que tem a seguinte solução por mínimos quadrados:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{V}}^T [\bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}^T]^{-1}$$

ou

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{V}}^\dagger \tag{3.25}$$

desde que $[\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}^T]^{-1}$ exista, caso contrário $\bar{\mathbf{V}}^T[\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{V}}^T]^{-1}$ deve ser substituído por $\bar{\mathbf{V}}^\dagger$. As equações (3.24) e (3.20) são idênticas, exceto que $\mathbf{y}$ na equação (3.20) é substituído por $\bar{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{V}$ por $\bar{\mathbf{V}}$. As matrizes $\bar{\mathbf{y}}$ e $\bar{\mathbf{V}}$ são respectivamente, subconjuntos de $\mathbf{y}$ e $\mathbf{V}$, obtidas deletando as primeiras p colunas de $\mathbf{y}$ e $\mathbf{V}$. Para o caso de condições iniciais não nulas e desconhecidas, a equação (3.25) deve ser usada para eliminar os efeitos destas, pois as mesmas se tornam desprezíveis quando são multiplicadas por $\bar{\mathbf{A}}^p$. Em outras palavras, as condições iniciais tem influência desprezível nos dados medidos após p passos. Quando há ruído presente tanto na medida quanto na dinâmica do sistema, a eliminação da dependência das condições iniciais faz com que a resposta do sistema torne-se estacionária.

3.3.1 Cálculo dos parâmetros de Markov

De modo geral, há os parâmetros de Markov do sistema e os parâmetros de Markov do ganho do observador. Os parâmetros de Markov do sistema são usados no cálculo das matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ enquanto que os parâmetros de Markov do ganho do observador são usados para determinar a matriz de ganho do observador $\mathbf{G}$.

Parâmetros de Markov do sistema

Para recuperar os parâmetros de Markov em $\mathbf{Y}$ dos parâmetros de Markov do observador em $\bar{\mathbf{Z}}$, particiona-se $\bar{\mathbf{Z}}$ de maneira que

$$\bar{\mathbf{Z}} = [\bar{\mathbf{Z}}_0 \quad \bar{\mathbf{Z}}_1 \quad \bar{\mathbf{Z}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{Z}}_p] \quad (3.26)$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_0 &= \mathbf{D} \\ \bar{\mathbf{Z}}_k &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{k-1}\bar{\mathbf{B}} \\ &= [\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{G}\mathbf{C})^{k-1}(\mathbf{B}+\mathbf{G}\mathbf{D}) \quad -\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{G}\mathbf{C})^{k-1}\mathbf{G}] \\ &= [\bar{\mathbf{Z}}_k^{(1)} \quad -\bar{\mathbf{Z}}_k^{(2)}] ; k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

O sinal de menos usado para $\bar{\mathbf{Z}}_k^{(2)}$ na última igualdade da equação (3.27) é escolhida para que $\bar{\mathbf{Z}}_k^{(2)} = \mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{G}\mathbf{C})^{k-1}\mathbf{G}$. Note que o parâmetro de Markov do observador identificado tem a menor dimensão entre os demais. Da segunda equação em (3.27), o parâmetro $\mathbf{C}\mathbf{B}$ do sistema é

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D}) - (\mathbf{C}\mathbf{G})\mathbf{D} \\ &= \bar{\mathbf{Z}}_1^{(1)} - \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)}\mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para obter o parâmetro $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}$, considere inicialmente o produto

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_2^{(1)} &= \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})(\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{D}) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{B} + \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{G}\mathbf{D} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{Y}_2 + \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)} \mathbf{Y}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_2^{(2)} \mathbf{D}$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{CAB} \\ &= \bar{\mathbf{Z}}_2^{(1)} - \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)} \mathbf{Y}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_2^{(2)} \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.29)$$

De maneira similar, para obter o parâmetro $\mathbf{Y}_3 = \mathbf{CA}^2\mathbf{B}$, considera-se o produto com o termo $\bar{\mathbf{Z}}_3^{(1)}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_3^{(1)} &= \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{GC})^2(\mathbf{B} + \mathbf{GD}) \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{GCA} + \mathbf{AGC} + \mathbf{GCGC})(\mathbf{B} + \mathbf{GD}) \\ &= \mathbf{CA}^2\mathbf{B} + \mathbf{CGCAB} + \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{GC})\mathbf{GCB} + \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{GC})^2\mathbf{GD} \\ &= \mathbf{Y}_3 + \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)} \mathbf{Y}_2 + \bar{\mathbf{Z}}_2^{(2)} \mathbf{Y}_1 + \bar{\mathbf{Z}}_3^{(2)} \mathbf{D} \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_3 &= \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \\ &= \bar{\mathbf{Z}}_3^{(1)} - \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)} \mathbf{Y}_2 - \bar{\mathbf{Z}}_2^{(2)} \mathbf{Y}_1 - \bar{\mathbf{Z}}_3^{(2)} \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Por indução matemática, uma relação geral entre os parâmetros de Markov do sistema e do observador é estabelecida

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{Y}_0 = \bar{\mathbf{Z}}_0 \\ \mathbf{Y}_k &= \bar{\mathbf{Z}}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{Z}}_i^{(2)} \mathbf{Y}_{k-i} \quad \text{para } k = 1, \dots, p \\ \mathbf{Y}_k &= - \sum_{i=1}^p \bar{\mathbf{Z}}_i^{(2)} \mathbf{Y}_{k-i} \quad \text{para } k = p+1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (3.31)$$

O conhecimento dos parâmetros de Markov do sistema permitirá a obtenção de uma realização em espaço de estados para o sistema, assim como os parâmetros modais, como frequências naturais, razões de amortecimento e modos de vibrar também podem ser encontrados. Utilizando a equação (3.31), verifica-se que $\mathbf{Y}_k$, para $k \geq p+1$, é uma combinação linear dos últimos p parâmetros de Markov do sistema, isto é, $\mathbf{Y}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-2}, \dots, \mathbf{Y}_{k-p}$. Em outras palavras, existe somente p parâmetros de Markov do sistema independentes. Então, o número p que deve ser escolhido para a identificação de um sistema de ordem n é uma questão a ser respondida.

Primeiro, nota-se que há somente $p+1$ parâmetros de Markov do observador calculado pela solução de mínimos quadrados da equação (3.20). Dependendo da escolha de p , $\bar{\mathbf{Z}}_k^{(1)}$ e $\bar{\mathbf{Z}}_k^{(2)}$ são considerados nulos para $k > p$. A relação entre os parâmetros de Markov do observador e os parâmetros de Markov do sistema ainda pode ser desenvolvida como segue abaixo. Considere as matrizes $\mathbf{H}$, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}$ e $\underline{\mathbf{Y}}$ definidas como

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{Z}}_p^{(2)} & -\bar{\mathbf{Z}}_{p-1}^{(2)} & -\bar{\mathbf{Z}}_{p-2}^{(2)} & \cdots & -\bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \cdots & \mathbf{Y}_{N+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \mathbf{Y}_5 & \cdots & \mathbf{Y}_{N+2} \\ \mathbf{Y}_4 & \mathbf{Y}_5 & \mathbf{Y}_6 & \cdots & \mathbf{Y}_{N+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{Y}_{p+1} & \mathbf{Y}_{p+2} & \mathbf{Y}_{p+3} & \cdots & \mathbf{Y}_{N+p} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{Y}} = [\mathbf{Y}_{p+2} \quad \mathbf{Y}_{p+3} \quad \mathbf{Y}_{p+4} \quad \cdots \quad \mathbf{Y}_{p+N+1}] \quad (3.32)$$

Observe que $\mathbf{H}$ é a matriz de Hankel generalizada construída a partir de um número determinado de parâmetros de Markov do sistema e N é um número inteiro arbitrário suficiente grande. Das equações (3.31) e (3.32), obtém-se

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)} \mathbf{H} = \underline{\mathbf{Y}} \quad (3.33)$$

Utilizando a definição dos parâmetros de Markov do sistema, a matriz de Hankel pode ser expressa por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1} \end{bmatrix} \mathbf{A} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}] = \mathbf{O}_k \mathbf{A} \mathbf{C}_k \quad (3.34)$$

sendo $\mathbf{A}$ matriz de estado, e $\mathbf{O}_k$ e $\mathbf{C}_k$ as matrizes de observabilidade e controlabilidade, respectivamente. Então, a equação (3.33) torna-se

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)} \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{Z}}^{(2)} [\mathbf{O}_k \mathbf{A} \mathbf{C}_k] = \underline{\mathbf{Y}} \quad (3.35)$$

Sabe-se que o posto da matriz de Hankel $\mathbf{H}$, com $\mathbf{H}$ suficientemente grande, é a ordem da parte controlável e observável do sistema. Do ponto de vista experimental, a matriz de estado identificada $\mathbf{A}$ representa só a parte controlável e observável do sistema. A matriz $\mathbf{H}$ tem dimensão $(mp \times Nr)$, sendo N um inteiro arbitrário. Supondo que $Nr > mp$, então o posto máximo de $\mathbf{H}$ é mp . Se p é escolhido tal que $mp \geq n$ (dimensão de $\mathbf{A}$) e $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}$ é obtido unicamente, então a matriz de estado $\mathbf{A}$ de ordem n deve existir. Desta maneira, conclui-se que o número de parâmetros de Markov calculados, p , deve ser escolhido de maneira que $mp \geq n$, sendo m o número de saídas e n a ordem do sistema. Obviamente, p pode ser menor que a ordem do sistema para o caso em que o sistema tenha múltiplas saídas. Para o caso que só há uma saída, p deve ser maior ou igual a ordem do sistema. O número p determina o número máximo de parâmetros de Markov do sistema independentes, equação (3.31). Assim, mp representa um limitante superior da ordem do sistema identificado. Quando a matriz de Hankel é formada com o propósito de identificação, não há benefício algum em incluir parâmetros de Markov adicionais além do número necessário para criar uma matriz de Hankel de posto completo.

Parâmetros de Markov do ganho do Observador

Para identificar o ganho do observador $\mathbf{G}$, recupera-se inicialmente a sequência de parâmetros

$$\mathbf{Y}_k^o = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{G}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36)$$

em termos dos parâmetros de Markov do observador. De fato, o primeiro parâmetro da sequência é

$$\mathbf{Y}_1^o = \mathbf{CG} = \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)} \quad (3.37)$$

O próximo parâmetro na sequência é obtido considerando $\bar{\mathbf{Z}}_2^{(2)}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_2^{(2)} &= \mathbf{CA}\bar{\mathbf{G}} = (\mathbf{CAG} + \mathbf{CGCG}) \\ &= \mathbf{Y}_2^o + \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_1^o \end{aligned}$$

que permite obter

$$\mathbf{Y}_2^o = \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)} - \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_1^o \quad (3.38)$$

O terceiro parâmetro é obtido de maneira similar

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_3^{(2)} &= \mathbf{CA}^2\mathbf{G} \\ &= (\mathbf{CA}^2\mathbf{G} + \mathbf{CGCAG} + \mathbf{CA}\bar{\mathbf{G}}\mathbf{CG}) \\ &= \mathbf{Y}_3^o + \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_2^o + \bar{\mathbf{Z}}_2^{(2)}\mathbf{Y}_1^o \end{aligned}$$

assim,

$$\mathbf{Y}_3^o = \bar{\mathbf{Z}}_3^{(2)} - \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)}\mathbf{Y}_2^o - \bar{\mathbf{Z}}_2^{(2)}\mathbf{Y}_1^o \quad (3.39)$$

Por indução matemática, uma relação geral pode ser estabelecida

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1^o &= \mathbf{CG} = \bar{\mathbf{Z}}_1^{(2)} \\ \mathbf{Y}_k^o &= \bar{\mathbf{Z}}_k^{(2)} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\mathbf{Z}}_i^{(2)}\mathbf{Y}_{k-i}^o \quad \text{para } k = 2, \dots, p \\ \mathbf{Y}_k^o &= \sum_{i=1}^p \bar{\mathbf{Z}}_i^{(2)}\mathbf{Y}_{k-i}^o \quad \text{para } k = p+1, \dots, \infty \end{aligned} \quad (3.40)$$

Obtida a sequência $\mathbf{Y}_k^o$, o ganho do observador $\mathbf{G}$ pode ser calculado

$$\mathbf{G} = (\mathbf{O}_K^T \mathbf{O}_K)^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{Y}^o \quad (3.41)$$

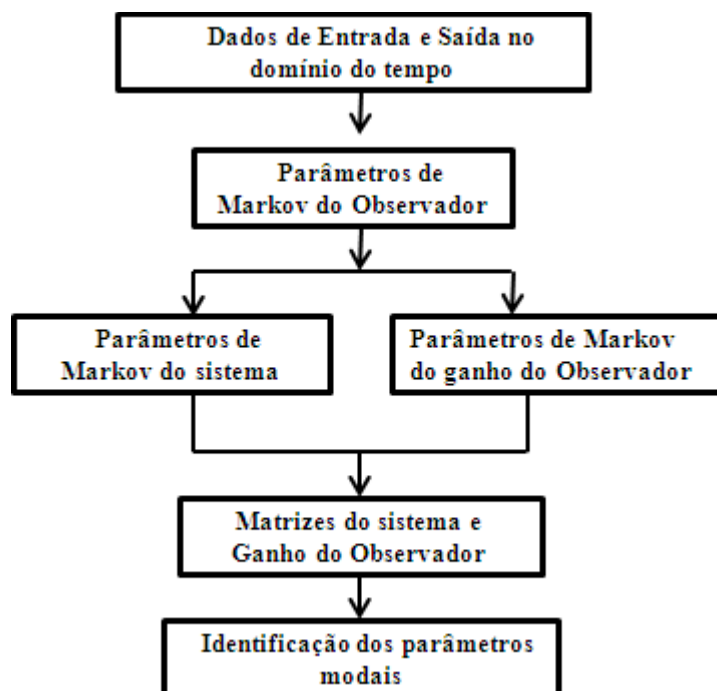
sendo

$$\mathbf{O}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^o = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^o \\ \mathbf{Y}_2^o \\ \mathbf{Y}_3^o \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{K+1}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CG} \\ \mathbf{CAG} \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^K\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

3.3.2 Passos computacionais para o cálculo do OKID

Dado um conjunto de dados experimentais contendo entrada e saída, o algoritmo de identificação utilizando o OKID (Observer/Kalman Filter Identification) segue os seguintes passos, Figura 7:

Figura 7 - Fluxograma do método OKID



Fonte: Juang (1994)

1) Calcular os parâmetros de Markov do observador. Escolha o valor p (equação (3.20)) que determina o número de parâmetros de Markov a ser identificados a partir de um conjunto de dados com entrada e saída. Em geral, espera-se que p seja suficientemente maior (pelo menos quatro ou cinco vezes) do que a ordem do sistema a ser identificado. Formar as matrizes $\mathbf{y}$ e $\mathbf{V}$ para condições iniciais nulas, ou as matrizes $\mathbf{y}$ e $\mathbf{V}$ para condições iniciais não nulas e por fim, calcule por mínimos quadrados a matriz dos parâmetros de Markov do observador $\mathbf{Y}$.

2) A partir dos parâmetros de Markov do observador, calcular os parâmetros de Markov combinados do sistema e do ganho do observador.

3) Determinar a realização em espaço de estados do sistema e do ganho do observador utilizando os parâmetros de Markov do sistema e do ganho do observador usando o ERA ou o ERA/DC. O algoritmo ERA/DC não é apresentado nesta dissertação, mas é encontrado em Juang (1994).

4) Encontrar os autovalores e autovetores do sistema realizado e transformar o modelo encontrado para coordenadas modais, possibilitando a identificação dos parâmetros modais.

3.4 NORMAS DE SISTEMAS

Normas servem como uma medida de intensidade da resposta do sistema a excitações conhecidas, como degrau unitário, impulso e ruído branco. Respostas padronizadas permitem comparar diferentes sistemas. Três normas serão apresentadas, a norma H_2 , norma H_∞ e a norma de Hankel.

3.4.1 Normas de sistemas contínuos

A norma H_2

Seja $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ um sistema linear representado em espaço de estados, e $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ sua função de transferência. A norma H_2 do sistema é definida como

$$\|\mathbf{H}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(\mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{H}(\omega)) d\omega \quad (3.43)$$

Observe que o $\text{tr}(\mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{H}(\omega))$ é a soma das magnitudes quadradas de todos os elementos de $\mathbf{H}(\omega)$, isto é, $\text{tr}(\mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{H}(\omega)) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l |\mathbf{g}_{kl}(j\omega)|^2$. Esta soma pode ser interpretada como um ganho médio do sistema, realizado sobre os elementos da função de transferência e sobre todas as frequências.

Como a função de transferência de $\mathbf{H}(\omega)$ é a transformada de Fourier da resposta do sistema a entrada impulsiva, $\mathbf{g}(t)$, e utilizando o teorema de Parseval (o teorema de Parseval relaciona a potência média de um sinal $\mathbf{u}(t)$ com os respectivos parâmetros espectrais), a definição acima pode ser escrita como a média da resposta ao impulso, ou seja

$$\|\mathbf{H}\|_2^2 = \|\mathbf{g}(t)\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{tr}(\mathbf{g}^T(t)\mathbf{g}(t)) dt \quad (3.44)$$

Uma terceira interpretação para a norma H_2 é a resposta RMS (do inglês, *Root Mean Square*) do sistema, ou valor médio quadrático, que é uma informação bastante utilizada para expressar o valor da amplitude do sinal. Quando a entrada é um ruído branco cuja densidade espectral é $\mathbf{S}_u(\omega)$, a resposta do sistema, $\mathbf{y}$, também é um processo aleatório estacionário cuja densidade espectral $\mathbf{S}_y(\omega)$ é obtido da equação

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{S}_u(\omega)\mathbf{H}^*(j\omega) \quad (3.45)$$

Para um ruído branco de variância unitária, tem-se que $\mathbf{S}_u(\omega) = \mathbf{I}$; assim, o espectro de saída é $\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{H}^*(j\omega)$. A resposta RMS do sistema σ_y^2 é obtida como uma média dos espectros da saída

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(\mathbf{S}_y(\omega)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(\mathbf{H}^*(\omega)\mathbf{H}(\omega)) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \text{tr}(\mathbf{H}^*(j\omega)\mathbf{H}(j\omega))d\omega = \|\mathbf{H}\|_2^2 \quad (3.46)$$

Logo, a norma H_2 do sistema equivale à sua resposta RMS quando a entrada é um ruído branco.

Uma maneira conveniente de determinar a norma H_2 é usando a seguinte equação

$$\|\mathbf{H}\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{W}_c)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{W}_o)} \quad (3.47)$$

sendo $\mathbf{W}_c$ e $\mathbf{W}_o$ os grammianos de controlabilidade e observabilidade, respectivamente.

A norma H_∞

A norma H_∞ é definida como

$$\|\mathbf{H}\|_\infty = \sup_{\mathbf{u}(t) \neq 0} \frac{\|\mathbf{y}(t)\|_2}{\|\mathbf{u}(t)\|_2} \quad (3.48)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é o sinal de entrada e $\mathbf{y}(t)$ é o sinal de saída. A norma H_∞ pode ser definida alternativamente como

$$\|\mathbf{H}\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(\mathbf{H}(\omega)) \quad (3.49)$$

sendo $\sigma_{\max}(\mathbf{H}(\omega))$ o maior valor singular de $\mathbf{H}(\omega)$. Para um sistema SISO, o maior pico da sua função de transferência é a sua norma H_∞ , ou seja, $\|\mathbf{H}\|_\infty = \max_{\omega} |\mathbf{H}(\omega)|$.

Como a norma H_∞ é uma norma induzida, ela é especialmente aplicável à análise de sistemas e ao projeto de controladores, pois a mesma fornece um limite para o erro na saída do sistema. Não há uma relação geral entre as normas H_2 e H_∞ . Em Gawronski (1998) uma relação é estabelecida para estruturas flexíveis. Entretanto, pode-se enfatizar a diferença entre as duas normas. Quando a norma H_2 é minimizada, a função de transferência decresce, em média, em direção e em frequência (minimiza-se a soma do quadrado de todos os valores singulares sobre todas as frequências). Já quando a norma H_∞ é minimizada, a função de transferência decresce na pior direção e na pior frequência (minimiza-se o maior valor singular).

A norma de Hankel

A norma de Hankel de um sistema é a medida do efeito de sua entrada passada sobre a sua saída futura, ou a quantidade de energia armazenada, e subsequentemente, recuperada do sistema. A norma de Hankel é definida como

$$\|\mathbf{H}\|_H = \sup \frac{\|\mathbf{y}(t)\|_2}{\|\mathbf{u}(t)\|_2} \quad (3.50)$$

sendo

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ \mathbf{y}(t) = 0, & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

Comparando as equações (3.48) e (3.50) observa-se que a norma de H_∞ é definida como a maior saída para todas as entradas possíveis, enquanto que a norma de Hankel é definida como a maior saída *futura* para todas as entradas passadas, Gawronski (1998). Dessas definições, conclui-se que a norma de Hankel nunca excederá a norma H_∞ ; assim

$$\|\mathbf{H}\|_H \leq \|\mathbf{H}\|_\infty$$

A norma de Hankel também pode ser determinada utilizando os grammianos

$$\|\mathbf{H}\|_H = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o)} \quad (3.51)$$

com $\lambda_{\max}(\cdot)$ denotando o maior autovalor, $\mathbf{W}_c$ e $\mathbf{W}_o$ os grammianos de controlabilidade e observabilidade, respectivamente. Assim, segue da definição dos valores singulares de Hankel na equação (2.30) que a norma de Hankel do sistema é o maior valor singular de Hankel, $\sigma_{\max}$,

$$\|\mathbf{H}\|_H = \sigma_{\max}$$

3.4.2 Normas de sistemas discretos:

Nesta seção serão apresentadas as normas H_2 , H_∞ e de Hankel para sistemas de tempo discreto e as mesmas serão comparadas com as equivalentes em tempo contínuo.

A norma H_2

A norma H_2 de um sistema em tempo discreto é definida como a soma RMS da integral das magnitudes da sua função de transferência, ou como a soma RMS da resposta ao impulso

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_d\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr}(\mathbf{H}_d^*(e^{j\theta}) \mathbf{H}_d(e^{j\theta})) d\theta \right)^{1/2} \\ &= (\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{h}_d^2(i\Delta t))^{1/2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Na equação acima, $\mathbf{H}_d$ é a função de transferência do sistema em tempo discreto, $\theta = \omega\Delta t$ e $\mathbf{h}_d(i\Delta t)$ é a resposta ao impulso do sistema discreto a $t = i\Delta t$.

Similar ao caso contínuo, a norma H_2 pode ser calculada usando os grammianos de controlabilidade e observabilidade em tempo discretos, $\mathbf{W}_{dc}$ e $\mathbf{W}_{do}$

$$\|\mathbf{H}_d\|_2^2 = \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{W}_{dc}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W}_{do}) \quad (3.53)$$

A relação entre as normas H_2 , discreta e contínua, é obtida introduzindo a relação entre os grammianos, equações (2.38) e (2.41) na equação acima, obtendo a seguinte relação

$$\|\mathbf{H}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \|\mathbf{H}_d\|_2 \quad (3.54)$$

Diferente das normas H_∞ e de Hankel, a norma H_2 em tempo discreto não converge para a sua equivalente em tempo contínuo quando o tempo de amostragem aproxima de zero.

A norma H_∞

A norma H_∞ do sistema em tempo discreto é definida como

$$\|\mathbf{H}_d\|_\infty = \max_{\omega \Delta t} \sigma_{\max}(\mathbf{H}_d(e^{j\omega \Delta t})) \quad (3.55)$$

Para um tempo de amostragem suficiente pequeno, a função de transferência em tempo discreto é aproximadamente igual a sua correspondente em tempo contínuo, isto é

$$\mathbf{H}_d(e^{j\omega \Delta t}) \approx \mathbf{H}(j\omega) \quad (3.56)$$

assim, para um tempo de amostragem se aproximando de zero, a norma H_∞ em tempo contínuo é igual a norma $H_{d\infty}$ em tempo contínuo.

A norma de Hankel

A norma de Hankel para um sistema em tempo discreto é o maior valor singular de Hankel deste sistema

$$\|\mathbf{H}_d\|_H = \max_i \gamma_{\text{disc}} \quad (3.57)$$

No capítulo 2, mostrou-se que os valores singulares de Hankel em tempo discreto convergem para os equivalentes em tempo contínuo, equação (2.47), portanto, a norma de Hankel em tempo discreto converge para a norma de Hankel em tempo contínuo quando o tempo de amostragem tende a zero,

$$\|\mathbf{H}\|_H = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \|\mathbf{H}_d\|_H \quad (3.58)$$

3.5 REDUÇÃO DE MODELOS

Basicamente, um problema de redução de modelos consiste em encontrar, para um modelo de alta ordem, linear, estável e invariante no tempo $\mathbf{H}(s)$, um novo modelo de ordem reduzida $\mathbf{H}_r(s)$, de maneira que a diferença de desempenho entre os dois modelos, nas mesmas circunstâncias, seja a menor possível. A ordem do modelo é a sua dimensão em espaço de estados ou o grau do polinômio denominador da função de transferência. Essa diferença de desempenho pode ser quantificada através de normas, como H_2 e H_∞ .

Um dos melhores exemplos da necessidade de redução de modelos é a antena de comunicação do *Madrid Deep Space Communication Complex*, na Espanha, Figura 8. Esta antena é um sistema flexível articulado de grande dimensão com rotação e elevação controladas. O modelo original desta estrutura via método dos elementos finitos, FEM (do inglês, *Finite Element Method*) consiste de aproximadamente 5000 graus de liberdade, e foi identificado através do ERA. A ordem do sistema depois da redução foi de dezoito estados, o que simplifica o projeto de controladores, Bueno (2007).

Figura 8 - Vista da antena de 70 metros do *Madrid Deep Space Communications Complex*, em Robledo de Chavela, Madri, Espanha.



Fonte : Deep_Space_Communications_Complex (2005)

De acordo com Assunção (2000), os métodos de redução de modelos que mais causaram impacto foram o método da realização balanceada, Moore (1981) e o método da norma de Hankel, Glover (1984).

3.5.1 Realização balanceada

Seja $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ uma realização minimal de um sistema estável $\mathbf{H}(s)$.

Particionando o vetor de estados $\mathbf{x}$, de dimensão n , em $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$, sendo $\mathbf{x}_2$ o vetor de $n-k$ estados que será removido. Particionando apropriadamente as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ as equações de estado tornam-se:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \quad (3.59)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.61)$$

Truncamento: Um truncamento de k -ésima ordem da realização $\mathbf{H} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ é dado por $\mathbf{H}_r = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D})$. O modelo truncado $\mathbf{H}_r$ é igual ao modelo $\mathbf{H}$ em frequências infinitas, $\mathbf{H}(\infty) = \mathbf{H}_r(\infty) = \mathbf{D}$, mas pouco pode ser dito para um caso geral sobre a relação entre $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}_r$. Todavia, se $\mathbf{A}$ está na forma canônica de Jordan, então é mais fácil ordenar os estados de maneira que $\mathbf{x}_2$ corresponda aos modos de alta frequência.

Truncamento Modal: Por simplicidade, suponhamos que $\mathbf{A}$ está na forma canônica diagonal, assim

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \quad (3.62)$$

Se os autovalores λ_i de $\mathbf{A}$ estão ordenados tal que $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$, então os menores modos são removidos do modelo após o truncamento. A diferença entre os modelos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}_r$ após o truncamento de ordem k é dado por

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}_r = \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{c_i b_i^T}{s - \lambda_i} \right) \quad (3.63)$$

ou

$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_r\|_{\infty} = \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{\overline{\sigma}(c_i b_i^T)}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} \right) \quad (3.64)$$

onde $\operatorname{Re}(\lambda_i)$ é a parte real dos autovalores de $\mathbf{A}$, λ_i . É interessante observar que o erro de aproximação depende tanto dos resíduos $c_i b_i^T$ como dos autovalores de λ_i . A distância dos autovalores λ_i do eixo imaginário não é, portanto, um indicador confiável se o modo associado ao autovalor deve ou não ser incluído no modelo reduzido.

Uma vantagem do truncamento modal é que os polos (autovalores) do modelo truncado são um subconjunto dos polos do modelo original e, portanto, retém qualquer interpretação física que o modelo original pode ter.

Residualização: No truncamento, todos os estados associados com $\mathbf{x}_2$ são removidos. Já na residualização, $\dot{\mathbf{x}}_2$ é simplesmente igualada a zero, $\dot{\mathbf{x}}_2 = 0$, ou seja, $\mathbf{x}_2$ é residualizado nas equações de estado. Soluciona-se então $\mathbf{x}_2$ em termos de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{u}$, obtendo-se

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{x}_1 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2)\mathbf{u} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{x}_1 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2)\mathbf{u} \quad (3.66)$$

Se $\mathbf{A}_{22}$ é não singular, pode-se então assumir

$$\mathbf{A}_r \triangleq \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{B}_r \triangleq \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2 \quad (3.68)$$

$$\mathbf{C}_r \triangleq \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{D}_r \triangleq \mathbf{D}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2 \quad (3.70)$$

3.5.2 Redução pela norma de Hankel

Nesta abordagem, o problema é tratado da seguinte maneira: dado um modelo $\mathbf{H}(s)$ de ordem n , encontre um modelo reduzido de ordem r , $\mathbf{H}_r(s)$, de maneira que a norma de Hankel do erro de aproximação, $\|\mathbf{H}(s) - \mathbf{H}_r(s)\|_H$, seja minimizada.

A norma de Hankel de qualquer função de transferência estável $\mathbf{E}(s)$ é definida como

$$\|\mathbf{E}(s)\|_H = \rho^{1/2}(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o) \quad (3.71)$$

sendo $\mathbf{W}_c$ e $\mathbf{W}_o$ os grammianos de controlabilidade e observabilidade de $\mathbf{E}(s)$, respectivamente. A norma de Hankel também é o maior valor singular de Hankel de $\mathbf{E}(s)$.

Assim, nesta otimização procura-se um erro que é de alguma maneira próximo de ser completamente não observável e completamente não controlável.

O problema de redução pela norma de Hankel tem sido considerado por diversos autores. Em Glover (1994) um completo tratamento é fornecido. Um limitante para a norma infinita é de interesse particular porque é melhor do que os limitantes para o balanceamento truncado e a residualização balanceada. O teorema abaixo fornece um procedimento para a redução de modelos para funções de transferência estáveis e quadradas, através da norma de Hankel:

Teorema: Seja $\mathbf{H}(s)$ uma função de transferência estável, quadrada com os valores singulares de Hankel $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \sigma_{r+2} = \sigma_{r+3} = \dots = \sigma_{r+l} > \sigma_{r+l+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$, então um modelo reduzido de ordem r , $\mathbf{H}_r(s)$ pode ser construído.

Seja $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ uma realização balanceada de $\mathbf{H}(s)$ com os valores singulares de Hankel reordenados de maneira que o grammiano seja

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+l+1}, \dots, \sigma_n, \sigma_{r+1}, \sigma_{r+l}) \\ &= \text{diag}(\Sigma_1, \sigma_{r+1} \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (3.72)$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade de dimensões apropriadas.

Particionando $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ de acordo com Σ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \quad (3.73)$$

Definindo $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}})$ por

$$\hat{\mathbf{A}} = \Gamma^{-1}(\sigma_{k+1}^2 \mathbf{A}_{11}^T + \Sigma_1 \mathbf{A}_{11} \Sigma_1 - \sigma_{k+1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{U} \mathbf{B}_1^T) \quad (3.74)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \Gamma^{-1}(\Sigma_1 \mathbf{B}_1 + \sigma_{k+1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{U}) \quad (3.75)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_1 \Sigma_1 + \sigma_{k+1} \mathbf{U} \mathbf{B}_1^T \quad (3.76)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - \sigma_{k+1} \mathbf{U} \quad (3.77)$$

sendo $\mathbf{U}$ uma matriz unitária satisfazendo

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}_1^T \mathbf{U} \quad (3.78)$$

e

$$\Gamma = \Sigma_1^2 - \sigma_{k+1}^2 \mathbf{I} \quad (3.79)$$

A matriz $\hat{\mathbf{A}}$ possui r autovalores ‘estáveis’ (todos têm parte real negativa); os demais $n-r$ autovalores têm parte real positiva. Assim

$$\mathbf{H}_r(s) + \mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

sendo $\mathbf{H}_r(s)$ a aproximação estável de ordem r de $\mathbf{H}(s)$ e $\mathbf{F}(s)$ a função de transferência não-estável (todos os polos tem parte real de positiva) de ordem $n-r-1$. A norma de Hankel do erro entre $\mathbf{H}(s)$ e $\mathbf{H}_r(s)$ é igual ao $(k+1)$ -ésimo valor singular de Hankel de $\mathbf{H}(s)$, ou seja,

$$\|\mathbf{H}(s) - \mathbf{H}_r(s)\|_H = \sigma_{r+1}(\mathbf{H}) \quad (3.81)$$

3.5.3 Redução de modelos em sistemas instáveis

As metodologias descritas anteriormente se aplicam apenas a modelos de sistemas estáveis. A redução de modelos que representam sistemas instáveis pode ser obtida através das seguintes abordagens:

Redução da parte estável

Enns (1984) e Glover (1984) propuseram que o sistema instável poderia ser decomposto em suas partes estável e anti-estável (instável). Assim

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_i(s) + \mathbf{H}_e(s) \quad (3.82)$$

O modelo $\mathbf{H}_i(s)$ tem todos os seus polos com parte real positiva, enquanto os polos de $\mathbf{H}_e(s)$ tem parte real negativa. Utilizando os métodos clássicos descritos anteriormente, o modelo $\mathbf{H}_{re}(s)$, a versão reduzida de $\mathbf{H}_e(s)$ pode ser obtido. Então, adicionando $\mathbf{H}_{re}(s)$ à $\mathbf{H}_i(s)$, obtém-se uma aproximação para o modelo original $\mathbf{H}(s)$,

$$\mathbf{H}_r(s) = \mathbf{H}_i(s) + \mathbf{H}_{re}(s) \quad (3.83)$$

Redução Utilizando o Fator Coprimo (*Coprime factor*)

Os fatores coprimos de uma função de transferência $\mathbf{H}(s)$ são estáveis e, portanto podem ser usados para obter modelos reduzidos de $\mathbf{H}(s)$ pelos métodos clássicos (McFarlane e Glover (1994)).

Seja $\mathbf{H}(s) = \mathbf{M}^{-1}(s)\mathbf{N}(s)$, sendo $\mathbf{M}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ fatores coprimos-a-esquerda de $\mathbf{H}(s)$.

Aproximando os fatores $[\mathbf{N} \ \mathbf{M}]$ de grau n por $[\mathbf{N}_a \ \mathbf{M}_a]$ de grau $r < n$, usando os métodos clássicos.

A função de transferência de ordem reduzida $\mathbf{H}_a(s)$, de ordem r , pode ser obtida por:

$$\mathbf{H}_a(s) = \mathbf{M}_a^{-1} \mathbf{N}_a \quad (3.84)$$

Um procedimento dual pode ser obtido utilizando a factorização-a-direita de $\mathbf{H}(s)$.

Dos métodos apresentados, a residualização, diferente de truncamento e redução pela norma de Hankel, preserva o ganho do sistema em regime permanente e, igual ao truncamento, é simples e tem baixo custo computacional. Observa-se que redução por truncamento e pela norma de Hankel apresentam melhores desempenhos em baixas e médias frequências, isto é, nas frequências de maior interesse para aplicações em sistemas estruturais, que serão abordados no próximo capítulo. Para casos em que o modelo não é tão preciso em altas frequências ou se os ganhos em regime permanente precisam ser mantidos inalterados, residualização é a melhor escolha.

4 RESULTADOS

Neste capítulo é apresentada a aplicação dos conceitos discutidos nos capítulos anteriores. Inicialmente é feita a identificação de um modelo para uma estrutura flexível, depois a redução da dimensão do modelo identificado e posteriormente aplicada uma lei de controle para reduzir as vibrações dos dois primeiros modos de vibrar da estrutura.

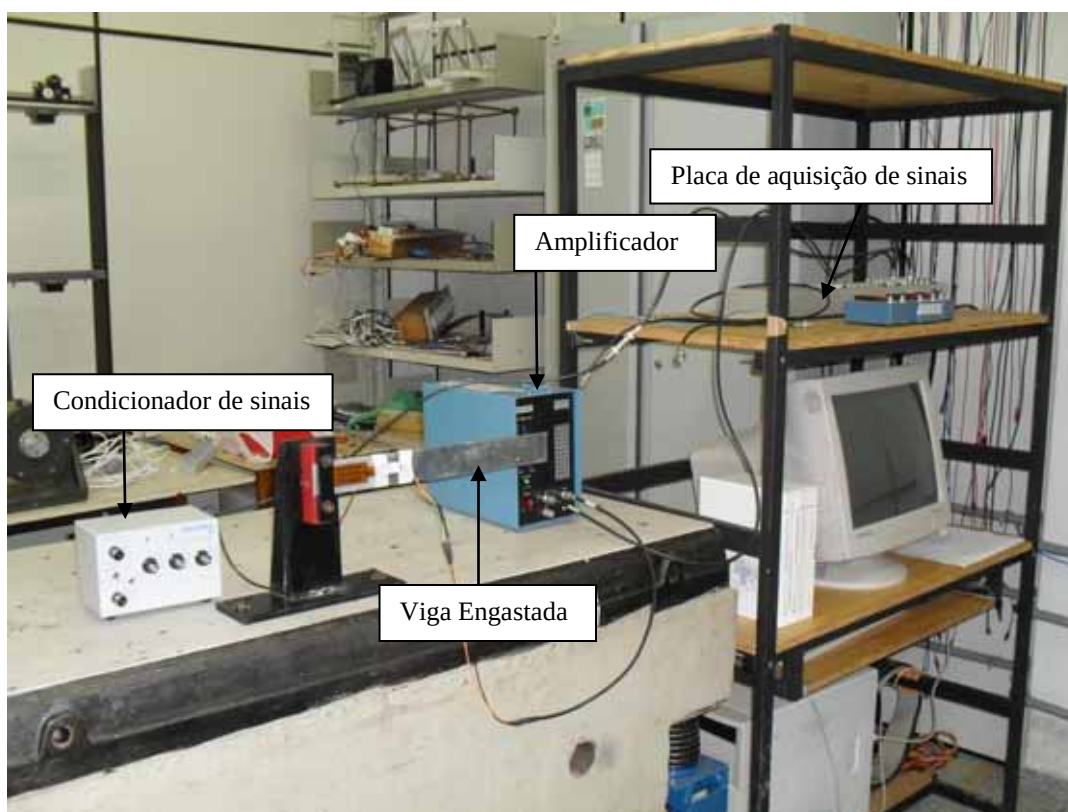
4.1 IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

O objetivo desta etapa foi identificar um modelo em espaço de estados de uma viga engastada de alumínio, Figura 9, utilizando as técnicas descritas nos tópicos 3.2 e 3.3. Na Tabela 1 têm-se as propriedades físicas e geométricas da viga. No processo de aquisição de sinais para a identificação, foi utilizado um computador, uma placa de aquisição de sinais dSPACE 1103, um amplificador de voltagem da *Mide QuickPack Power*, modelo nº 1225 e um condicionador de sinais da *Measurement Specialties*, Figura 9.

Tabela 1- Propriedades físicas e geométricas da viga de alumínio

Parâmetros da Viga	Valor
Módulo de Young (N/m^2)	0.69×10^{11}
Coefficiente de Poisson	0.3
Densidade (kg.m^{-3})	2710
Comprimento (m)	0.354
Largura (m)	0.042
Espessura (m)	0.002

Figura 9 - Bancada para a realização dos ensaios de identificação e controle



Fonte: do próprio autor

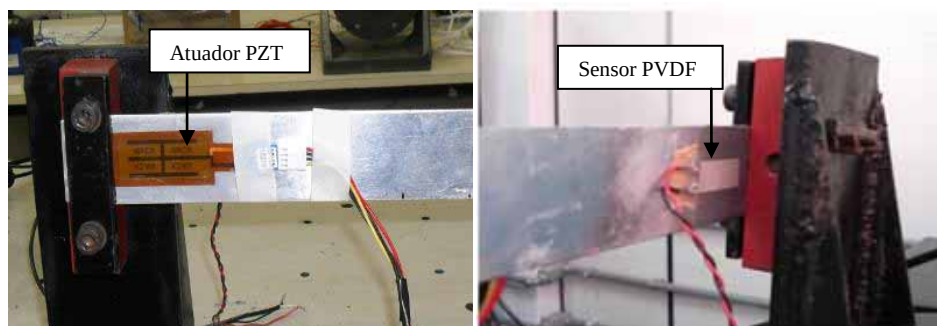
A placa dSPACE 1103, Figura 10, possui uma interface com o programa Matlab® e possui 20 canais de entrada (ADC - *Analogical / Digital Converter*) e 8 canais de saída (DAC - *Digital / Analogical Converter*).

Figura 10 - Placa de aquisição de sinais dSPACE 1103



Fonte: do próprio autor

Figura 11 - (a) PZT usado com atuador (b) PVDF usado como sensor

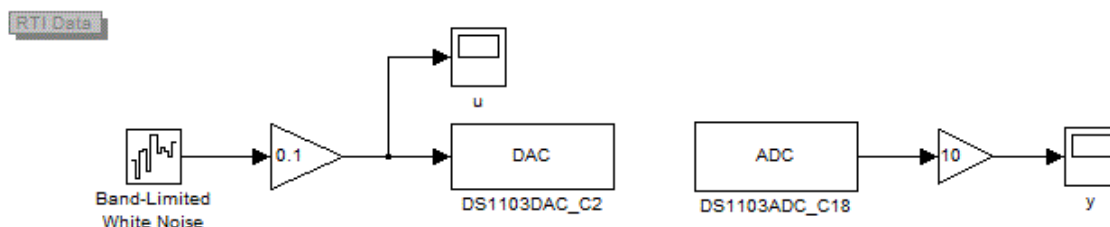


Fonte: do próprio autor

O sistema foi excitado por um PZT (*Lead-Zirconate-Titanate*), QP10N (ACX, 2011), Figura 11(a), com as seguintes dimensões $42.0 \times 23.0 \times 0.2$ mm. Como sensor foi utilizado um PVDF (*Polyvinilidene-Fluoride*), Figura 11(b), de dimensões $30.0 \times 10.0 \times 0.2$ mm. O sinal de entrada foi amplificado por um amplificador de voltagem antes de chegar ao atuador e o sinal medido no sensor foi condicionado por um condicionador de carga antes de ser capturado pela placa de aquisição dSPACE 1103. Tanto o sensor quanto o atuador foram posicionados na extremidade do engaste. Em Abreu et al. (2003) foi avaliada a melhor posição para a localização de sensores e atuadores através de uma função de custo modal e, no engaste esta função apresenta a maior magnitude.

Para estimar os parâmetros de Markov, do sistema e do observador, foi utilizado como sinal de entrada um ruído branco numa faixa de frequência de 0 a 500 Hz. Para satisfazer ao Teorema da Amostragem, a frequência de amostragem foi de 1000 Hz, e o tempo de amostragem (dt) de 0.001 segundos. Na Figura 12, têm-se o diagrama em *Simulink*® do processo de aquisição de sinais. Na placa de aquisição dSPACE 1103, todo sinal de saída deve ser dividido por 10 e todo sinal de entrada deve ser multiplicado por 10.

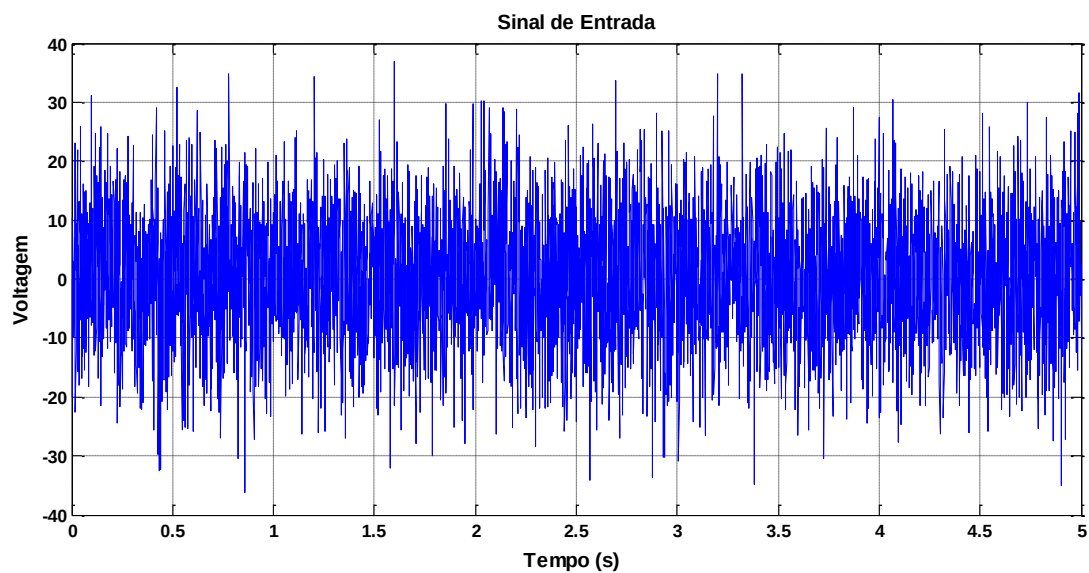
Figura 12 - Diagrama de blocos do Simulink® para entrada e saída de sinais



Fonte: do próprio autor

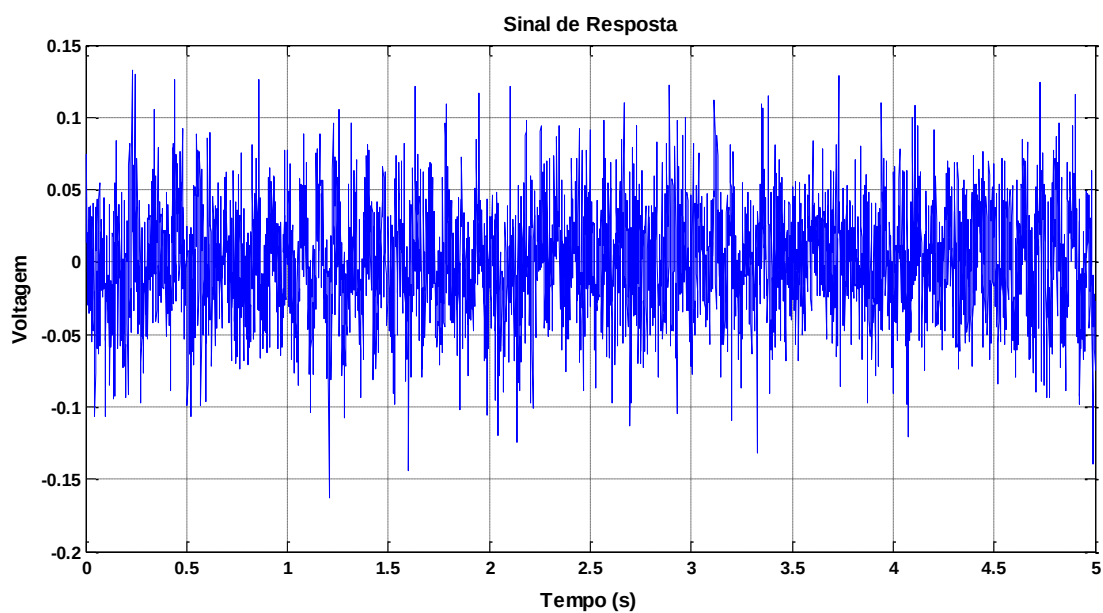
Foram feitas 10 aquisições de 5 segundos cada. As Figuras 13 e 14 apresentam os sinais de excitação e resposta, respectivamente.

Figura 13 - Sinal de excitação aplicado à estrutura pelo PZT



Fonte: do próprio autor

Figura 14 - Sinal da resposta à excitação medida no sensor PVDF

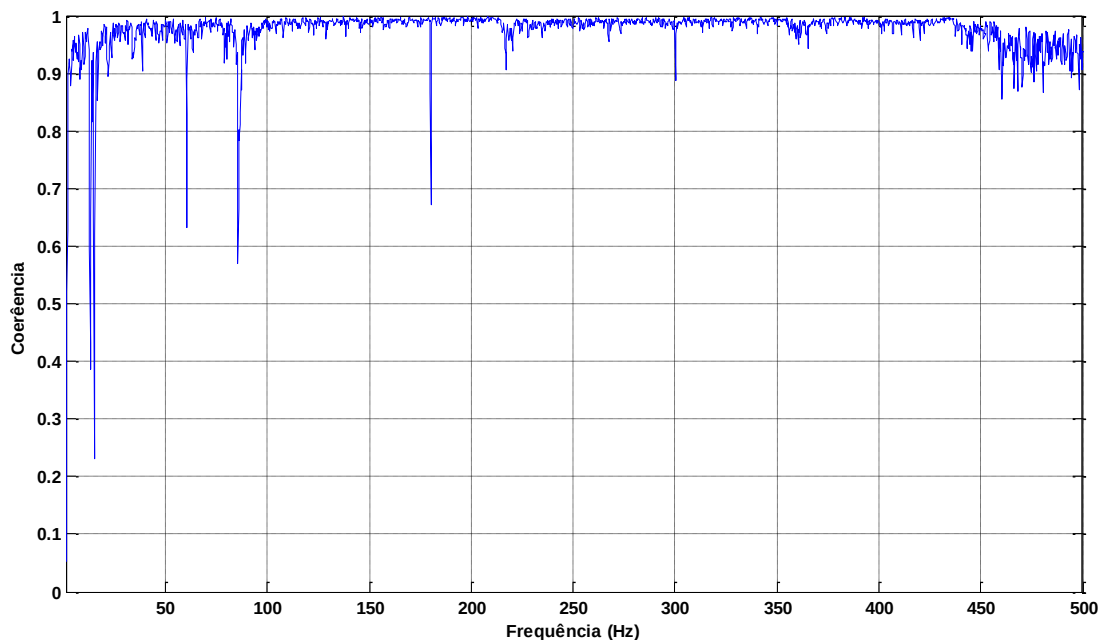


Fonte: do próprio autor

A Figura 15 apresenta a coerência entre os sinais de excitação e resposta para cada valor de frequência. A coerência é uma função de frequência com valores entre 0 e 1 e indica correlação linear entre dois sinais para cada valor de frequência. Quanto mais próximos da unidade, melhor é a coerência entre os sinais. A coerência é calculada como a razão do módulo ao quadrado da densidade espectral de potência cruzada dos sinais, S_{uy} , pelo produto das densidades espectral de potência dos dois sinais de entrada, S_u , e saída S_y , ou seja,

$$\gamma_{yu}^2(k) = \frac{|S_{uy}|^2}{S_u S_y}$$

Figura 15 - Coerência entre os sinais de excitação e resposta.



Fonte: do próprio autor

Observando a Figura 15, há uma pico de ressonância em torno de 60 Hz, esta frequência aparece pois existe contaminação da rede elétrica devido ao aterramento.

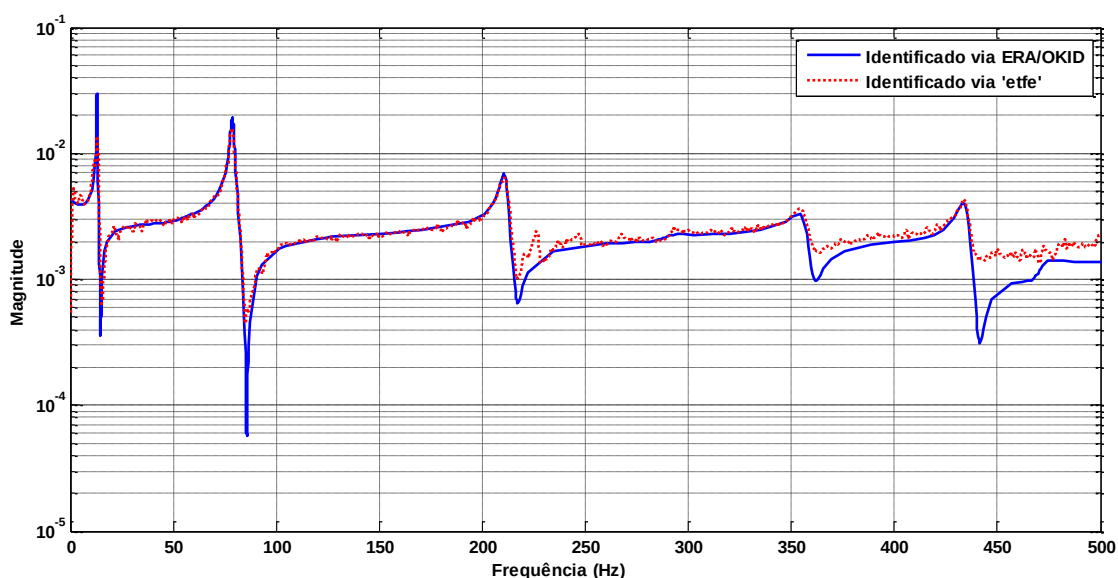
Com os dados obtidos, foram identificados os parâmetros de Markov do sistema e do observador e as matrizes de estado (**A**, **B**, **C**, **D**) foram identificadas. As matrizes de estado identificadas possuem as seguintes dimensões: matriz de estado **A** quadrada de ordem 20, matriz de entrada **B** retangular de ordem 20x1, matriz de saída **C** retangular de ordem 1x20, matriz de transmissão direta **D** quadrada de ordem 1x1.

A dimensão do sistema identificado via ERA/OKID foi 20. Se as matrizes identificadas fossem de ordem menor, os resultados das etapas seguintes, seções 4.2 e

4.3 seriam comprometidos, pois a redução de modelos e a controlabilidade e observabilidade apresentaram piores resultados para sistemas de ordem menor que 20.

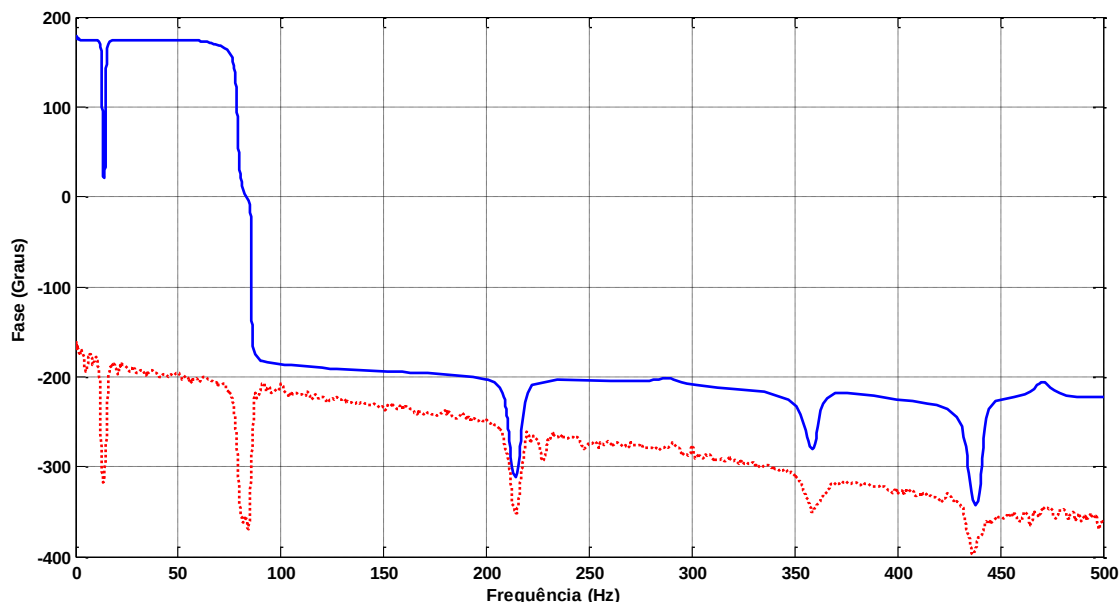
A resposta em frequência do sistema é mostrada nas Figuras 16 e 17. Nas duas figuras têm-se a resposta em frequência de todos os modos identificados. Em azul, a resposta em frequência do modelo identificado utilizando a metodologia ERA/OKID e em vermelho, a resposta em frequência do modelo utilizando um estimador de funções de transferência do Matlab®, através do comando *etfe*. O comando *etfe* estima uma função de transferência empírica como a razão da transformada de Fourier da resposta do sistema pela transformada de Fourier do sinal de entrada, utilizando a transformada rápida de Fourier, FFT (do inglês, *fast Fourier transform*).

Figura 16 - Amplitude da Função de Resposta em Frequência do sistema identificado pelo método ERA/OKID (Azul) e o estimado via 'etfe' (vermelho-pontilhado)



Fonte: do próprio autor

Figura 17 - Fase da Função de Resposta em Frequência do sistema identificado pelo método ERA/OKID (Azul) e o estimado via 'etfe' (vermelho-pontilhado)



Fonte: do próprio autor

Como para cada dois estados há um modo de vibrar associado, no modelo identificado existem 10 modos de vibrar. Na faixa de frequência em que o modelo foi identificado não existe 10 modos. Os métodos de identificação experimental normalmente acrescentam modos adicionais ao sistema identificado, chamados de modos computacionais, que são apenas valores matemáticos sem significados físicos. Os modos computacionais foram separados dos modos reais com a ajuda da Tabela 2, cujos valores foram obtidos utilizando o comando *damp* do Matlab® na matriz dinâmica identificada, **A**, para obter as frequências naturais, ω_n . Para comparação, as frequências naturais foram calculadas utilizando outros métodos. Os valores numéricos foram obtidos utilizando a seguinte equação, Harris and Crede, (1961),

$$\omega_n = A_n \sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

sendo E o módulo de Young, I o momento de inércia da seção retangular da viga, dado por $I = \frac{bd^3}{12}$, com b e d a largura e a espessura da viga, respectivamente, μ a densidade, L o comprimento da viga e A_n constantes. Os valores numéricos das frequências naturais foram calculados de acordo com os valores obtidos da Tabela 1. Também foi utilizado o *software* ANSYS® para calcular as frequências naturais na faixa desejada e plotar as formas dos modos de vibrar da viga. A comparação com os valores obtidos no programa ANSYS® foi necessária para se verificar se havia modos torcionais.

Nas Figuras 18 a 23, apresentam-se as formas de vibrar dos 6 primeiros modos da viga engastada, obtidos através do software ANSYS® 13.0. A viga foi discretizada em 60 elementos de placa com 538 nós. Os modos de número 3 (213.83Hz) e 5 (271.81Hz) foram identificados como de torção e lateral e não estão mostrados na tabela 2. Igualmente, o quarto modo identificado experimentalmente (356.56Hz) não está mostrado na tabela 2 por não ser um modo de flexão.

Tabela 2 - Valores das frequências naturais da viga dadas em Hz

Frequências Naturais	Valores dos dados experimentais	Valores Numéricos	Valores Numéricos (ANSYS)
ω_1	13.02	13.04	13.26
ω_2	78.80	83.03	83.09
ω_3	211.17	226.74	232.90
ω_4	434.51	448.52	457.27

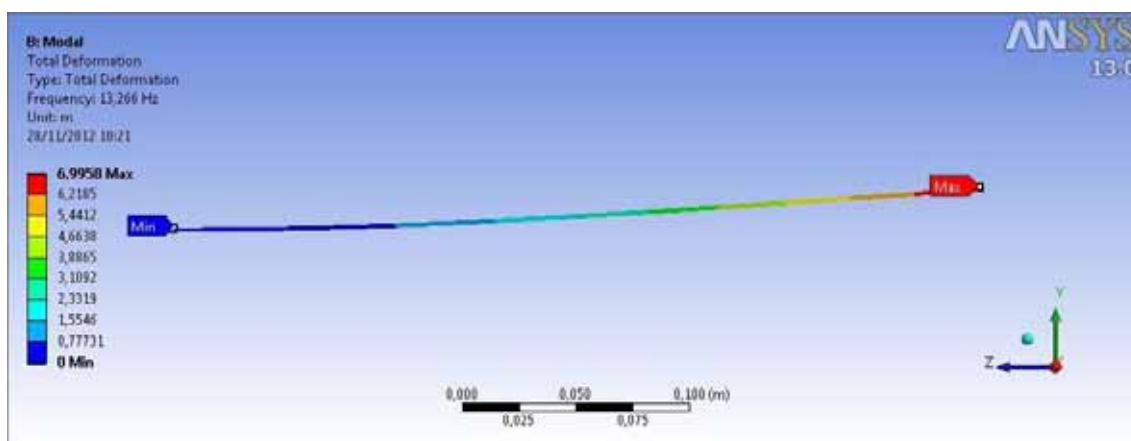
Na Tabela 3, têm-se as frequências naturais e os fatores de amortecimento dos modos reais e dos modos computacionais.

Tabela 3 - Valores das frequências naturais em Hz e dos fatores de amortecimento identificados via ERA/OKID.

	Frequências Naturais ω_n (Hz)	Fatores de Amortecimento ξ
1 ° Modo	13.02	0.0131
2 ° Modo	78.80	0.0114
3 ° Modo	211.17	0.00911
4 ° Modo	356.56	0.011
5 ° Modo	434.51	0.0061
Modos Computacionais	3.11	1.0
	53.96	0.011
	289.45	0.011
	412.55	0.024
	471.18	0.232
	564.03	0.112

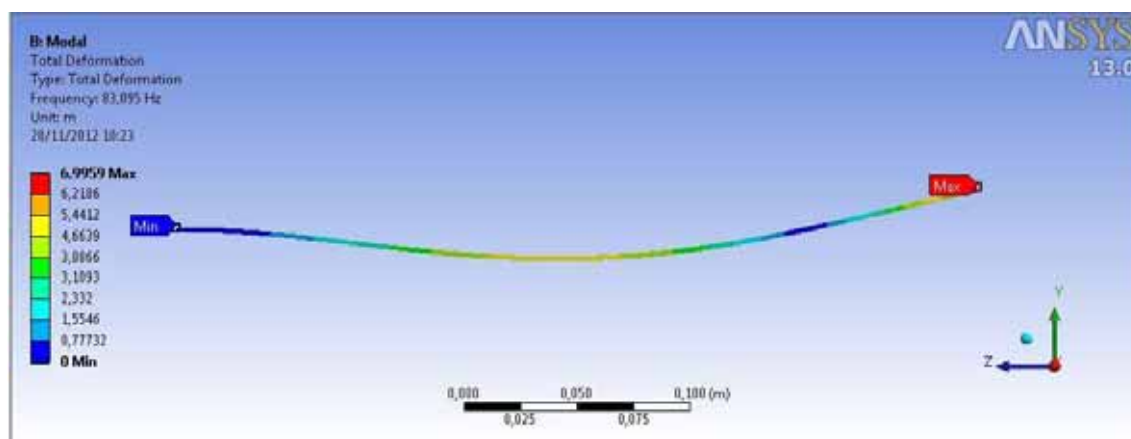
Fonte: do próprio autor

Figura 18 - 1º modo de vibrar (13.26 Hz)



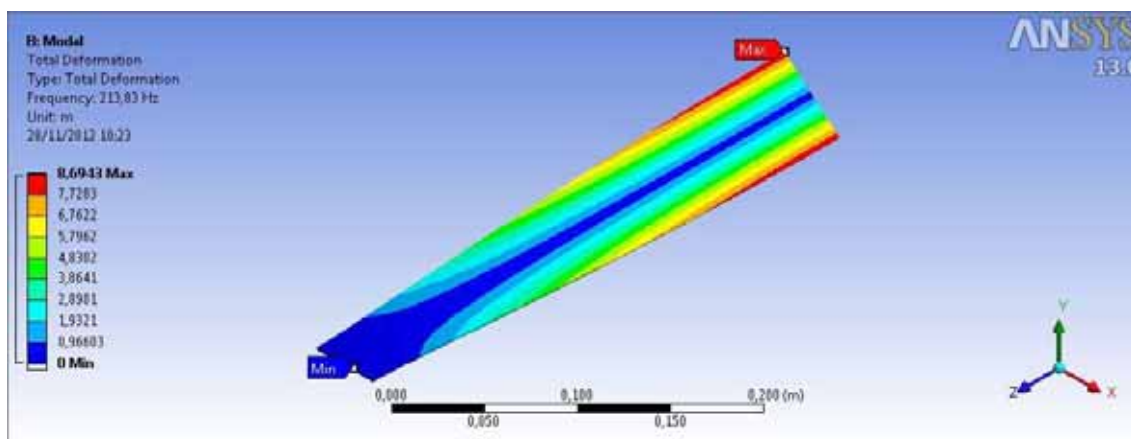
Fonte: do próprio autor

Figura 19 - 2º modo de vibrar (83.09 Hz)



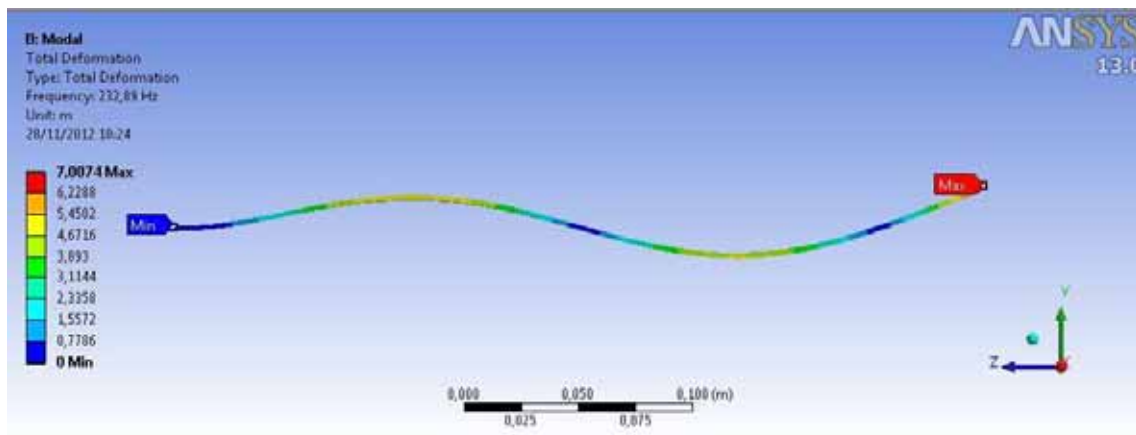
Fonte: do próprio autor

Figura 20 - 3º modo de vibrar – modo torcional (213.83 Hz)



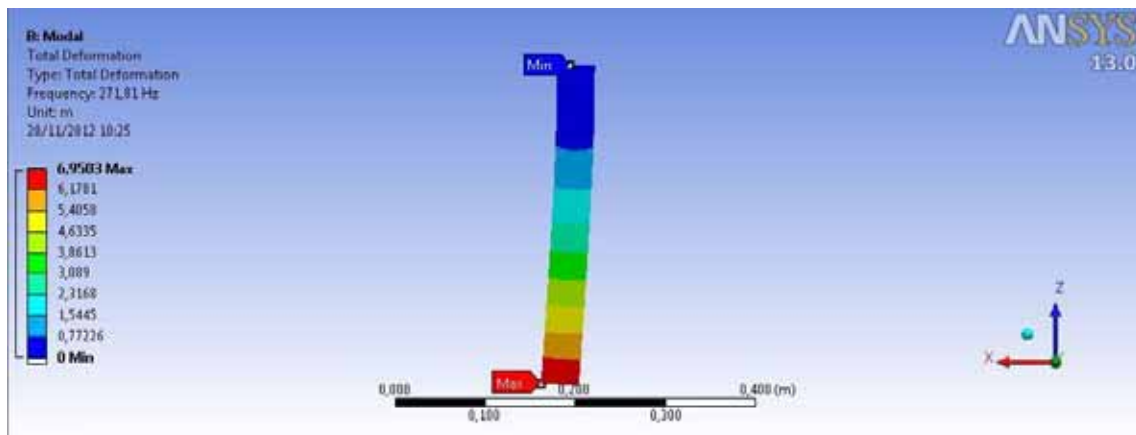
Fonte: do próprio autor

Figura 21 - 4º modo de vibrar (232.89 Hz)



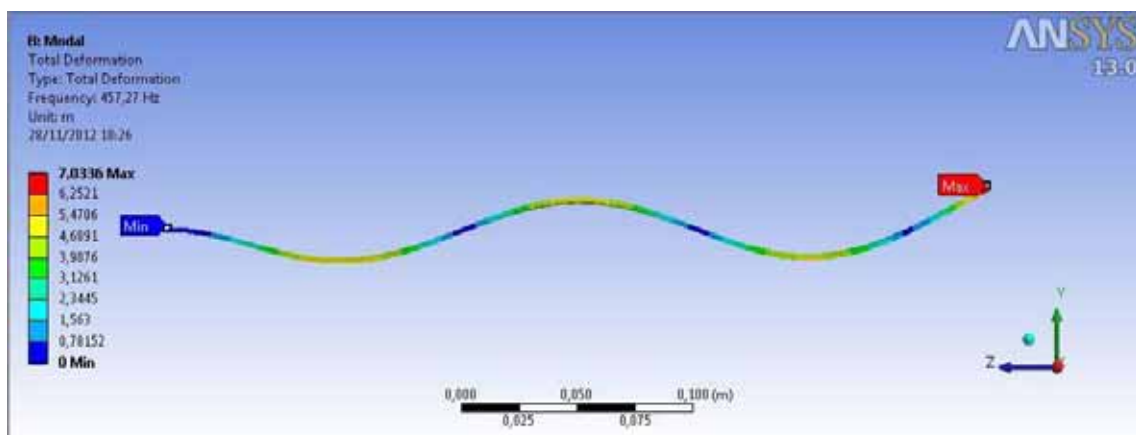
Fonte: do próprio autor

Figura 22 - 5º modo de vibrar – modo lateral (271.81 Hz)



Fonte: do próprio autor

Figura 23 - 6º modo de vibrar (457.27 Hz)



Fonte: do próprio autor

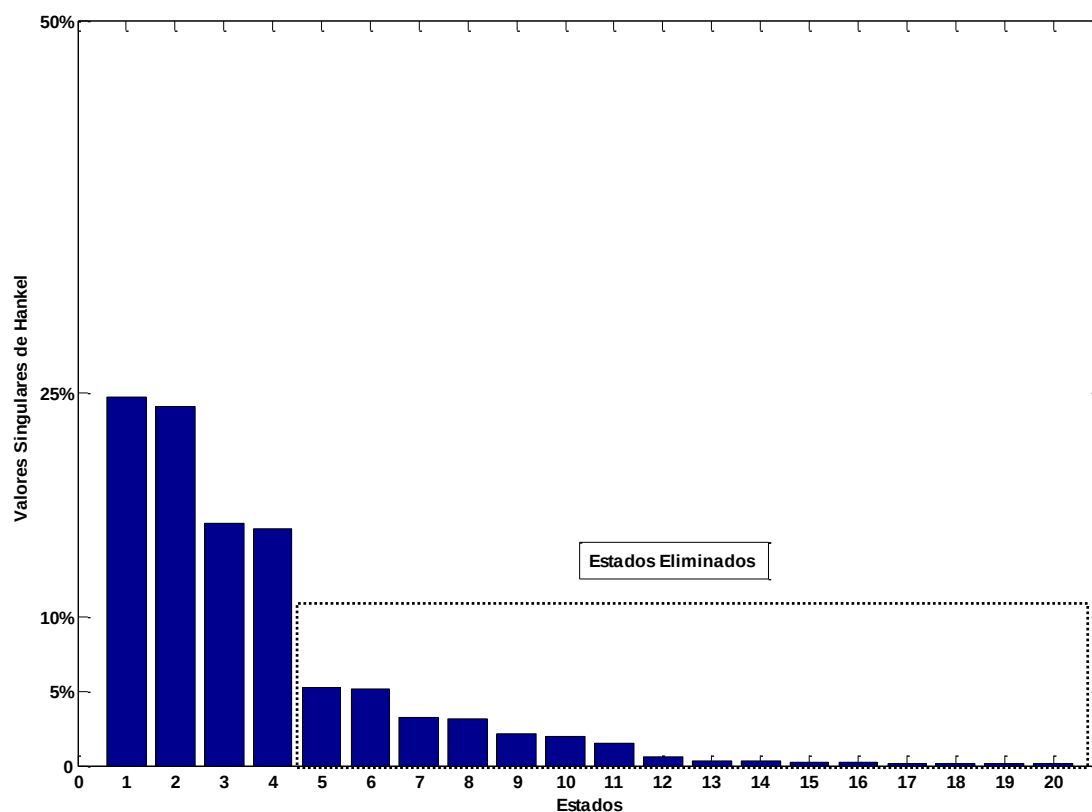
4.2 REDUÇÃO DO MODELO

Como a metodologia de controle a ser aplicada é baseada no modelo identificado, foi necessário reduzir o modelo devido às condições de controlabilidade e observabilidade apresentadas na seção 2.2. Como o posto das matrizes de controlabilidade e de observabilidade é 4, somente os dois primeiros modos de vibrar da viga podem ser controlados e observados. No Matlab®, os comandos *ctrb* e *obsv* calculam as matrizes de controlabilidade e de observabilidade, respectivamente, e o comando *rank* calcula o posto de uma matriz.

As matrizes de estado identificadas de ordem 20, (**A**, **B**, **C**, **D**), foram reduzidas para as matrizes de ordem 4, (**A_r**, **B_r**, **C_r**, **D_r**). A redução foi feita usando a metodologia da norma de Hankel, utilizando o comando *hankelmr* do Matlab®.

Foram conservados os quatro primeiros estados, associados aos quatro maiores valores singulares de Hankel, cuja porcentagem na contribuição é [23.3807% 22.7488% 15.4818% 15.0079%], os demais foram eliminados, Figura 24.

Figura 24 - Porcentagem da contribuição dos valores singulares de Hankel no modelo de ordem 20.



Fonte: do próprio autor

As matrizes de estado reduzidas são:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} -7.2558 & -495.2792 & 0.5124 & -7.3128 \\ 488.2475 & -1.7693 & -1.9075 & -5.7433 \\ 0 & 0 & -1.0785 & 79.9209 \\ 0 & 0 & -81.1264 & -2.2534 \end{bmatrix}$$

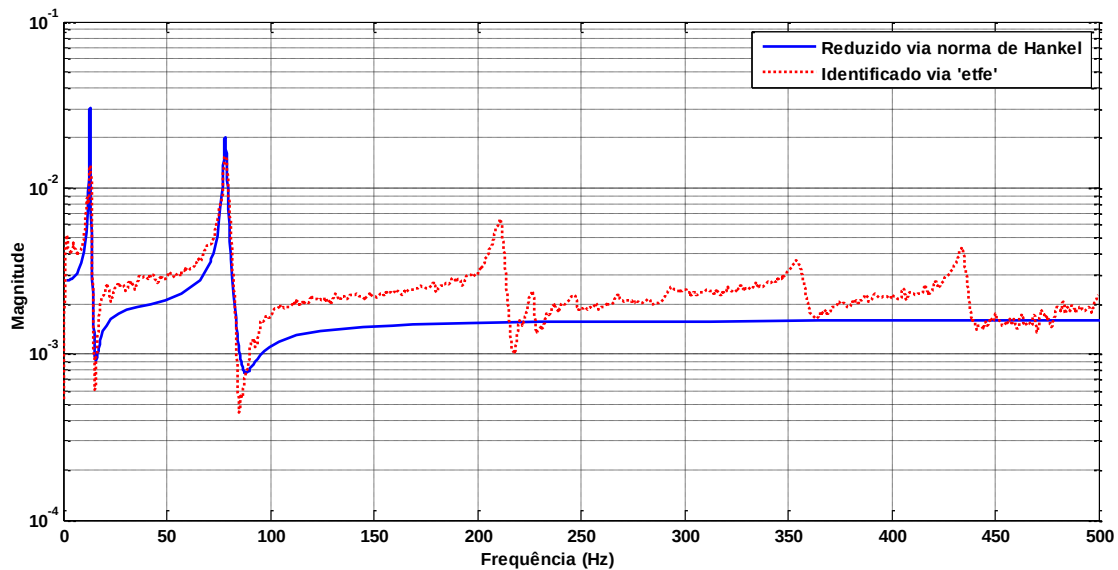
$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0.4179 \\ 0.0749 \\ -0.0301 \\ 0.2752 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_r = [-0.0761 \quad -0.4137 \quad -0.2240 \quad -0.1659]$$

$$\mathbf{D}_r = -0.0017$$

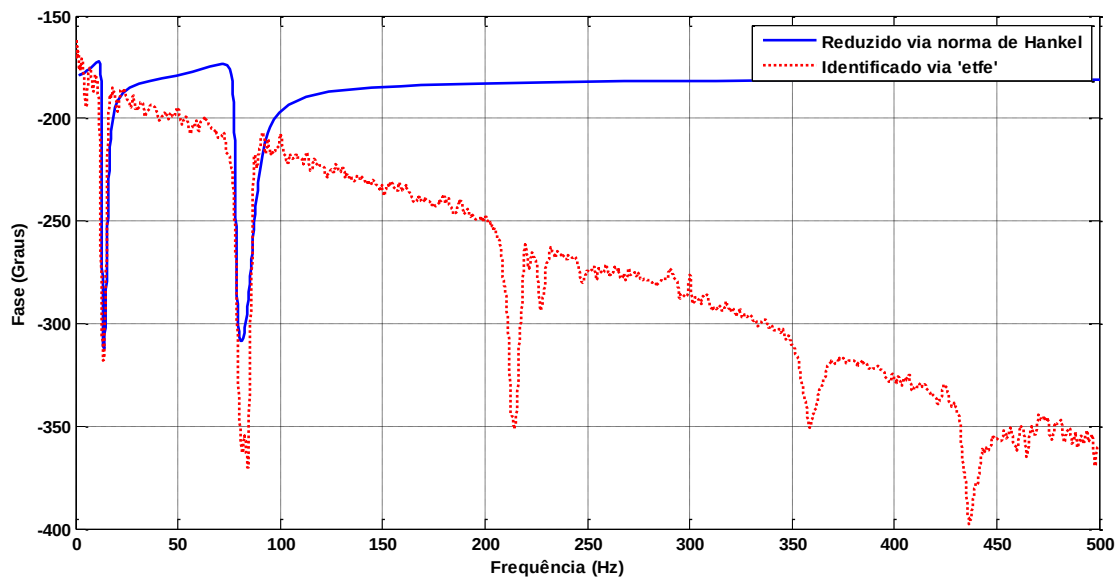
A resposta em frequência do sistema já reduzido apresentou uma melhor aproximação entre a fase, como pode ser observado na Figura 26.

Figura 25 - Magnitude da FRF do modelo reduzido (Azul). Em vermelho, a amplitude da FRF do modelo estimado via 'ette'.



Fonte: do próprio autor

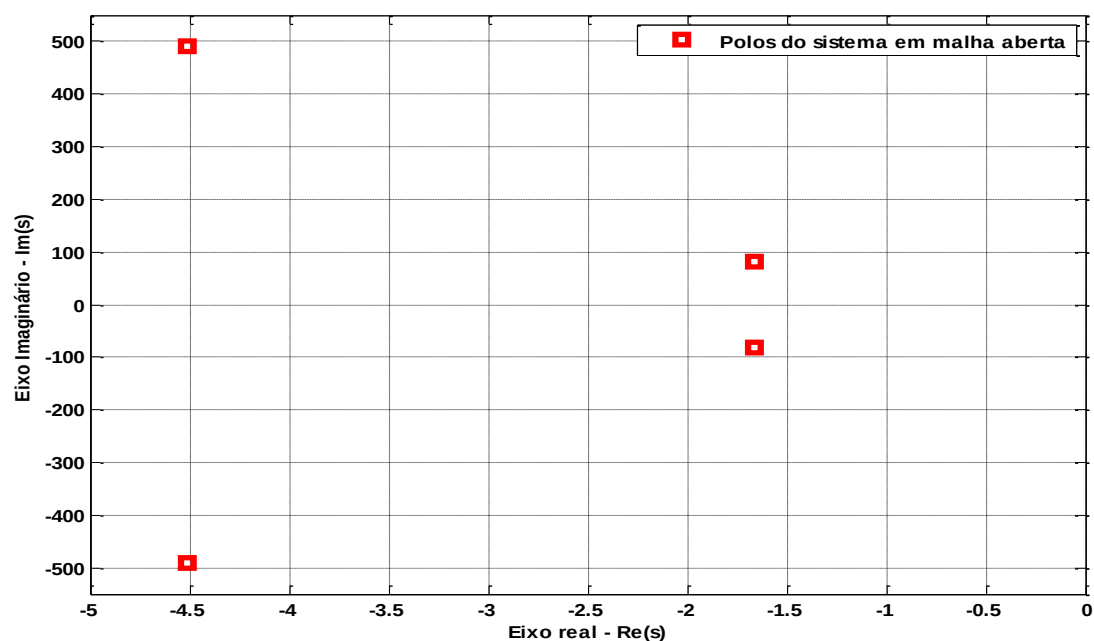
Figura 26 - Fase da FRF do modelo reduzido (azul). Em vermelho, a fase da FRF do modelo estimado via 'etfe'.



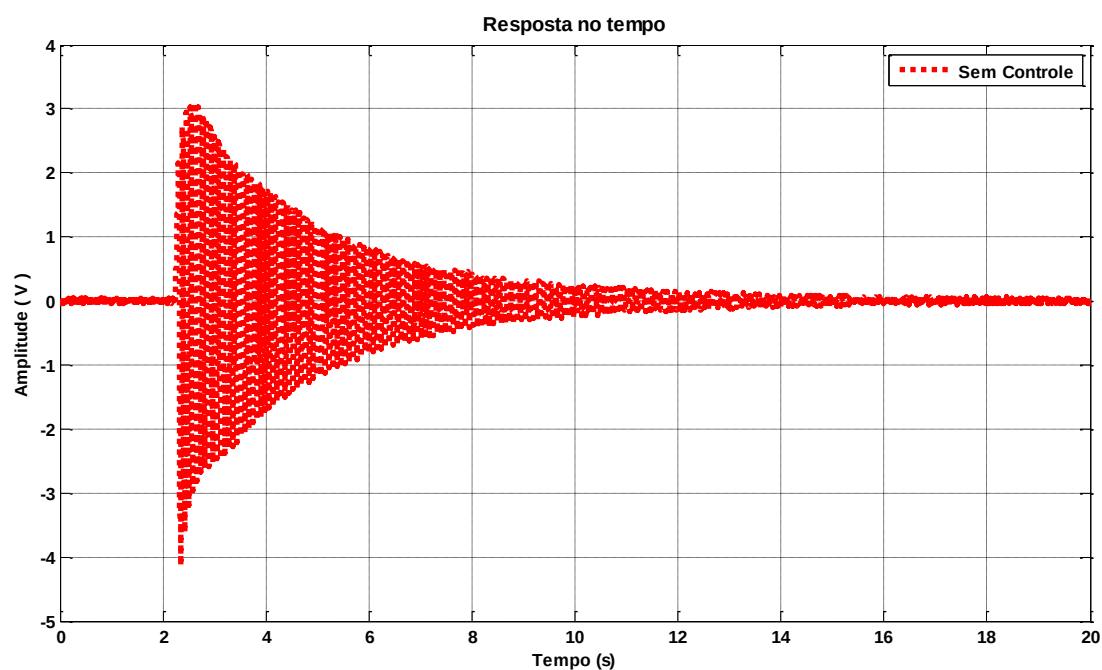
Fonte: do próprio autor

4.3 CONTROLE

Na Figura 27, é apresentado o mapeamento dos polos do sistema reduzido em malha aberta. Polos localizados no lado esquerdo do plano complexo garantem a estabilidade do sistema. O sistema em questão já é estável, mas o tempo de estabilização é muito longo, como pode ser observado na Figura 28.

Figura 27- Polos do sistema em malha aberta

Fonte: do próprio autor

Figura 28 - Resposta do sistema sem controle

Fonte: do próprio autor

A Figura 28 consiste na resposta no tempo do sistema após uma perturbação. Essa perturbação consistiu em aplicar um impulso na ponta da viga e observar a resposta temporal. Para diminuir este tempo de estabilização, foi projetado um controlador.

Com o base nas matrizes reduzidas $[A_r, B_r, C_r \text{ e } D_r]$, foi projetado um observador de estado para estimar os estados não mensurados (há um sensor e o vetor de estado $\mathbf{x}$ é 4×1). O ganho do observador, $\mathbf{L}$, foi obtido usando alocação de polos (Ogata, 2008). De acordo com Ogata (2008), “[...] a escolha do conjunto de autovalores é, em muitos casos, não única. Como regra geral, contudo, os polos do observador devem ser de duas a cinco vezes mais rápidos que os polos do controlador, para garantir que o erro de observação (erro de estimação) convirja rapidamente para zero [...]”. Se os polos do observador estiverem localizados à direita dos polos do controlador, no lado esquerdo do plano complexo, a resposta do sistema será dominada pelos polos do observador em vez dos polos do controlador. Para evitar isso, os polos do observador foram posicionados em $[-100, -200, -300, -400]$, para garantir que a resposta do sistema seja dominada pelos polos do controlador.

O ganho do observador foi calculado através do comando *place* do Matlab®.

$$\mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{A}_r', \mathbf{C}_r', [-100, -200, -300, -400])'$$

O valor do ganho do observador é $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -795.8 \\ -1802.1 \\ -514.5 \\ -399.6 \end{bmatrix}$

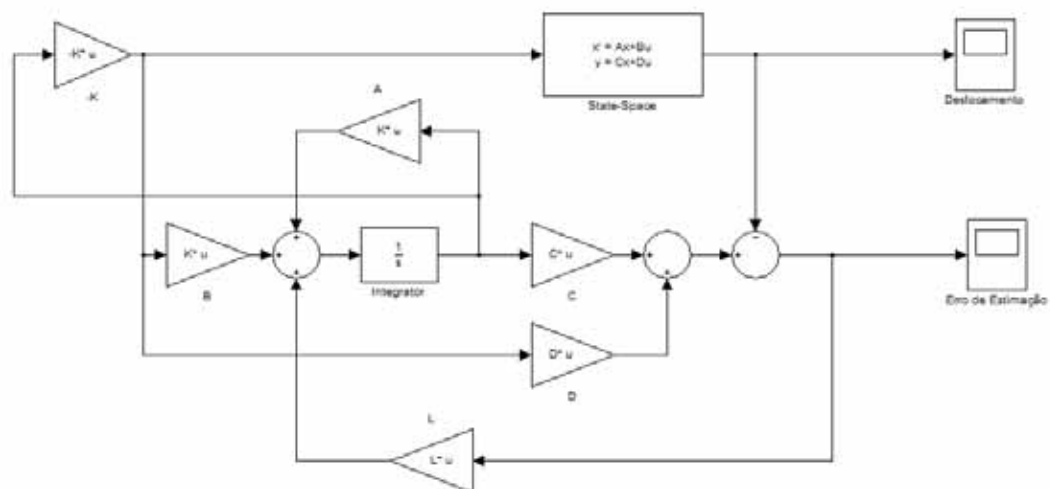
Para calcular o ganho do controlador, $\mathbf{K}$, a matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_4$ foi utilizada como identidade, para dar a todos os estados o mesmo grau de importância, enquanto $\mathbf{R} = 0.1$ foi escolhida após várias simulações. O ganho foi obtido usando o comando *lqr* do Matlab® que utiliza os conceitos apresentados na seção 2.3.

$$\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

O valor obtido para o ganho é $\mathbf{K} = [0.4517 \quad 0.0903 \quad -0.0851 \quad 0.7888]$;

No projeto do controlador, os mesmos equipamentos usados na identificação foram usados, sendo o PZT como atuador e o PVDF como sensor. A Figura 29 apresenta o diagrama de blocos do *Simulink*® utilizado na simulação do projeto do controlador e do observador.

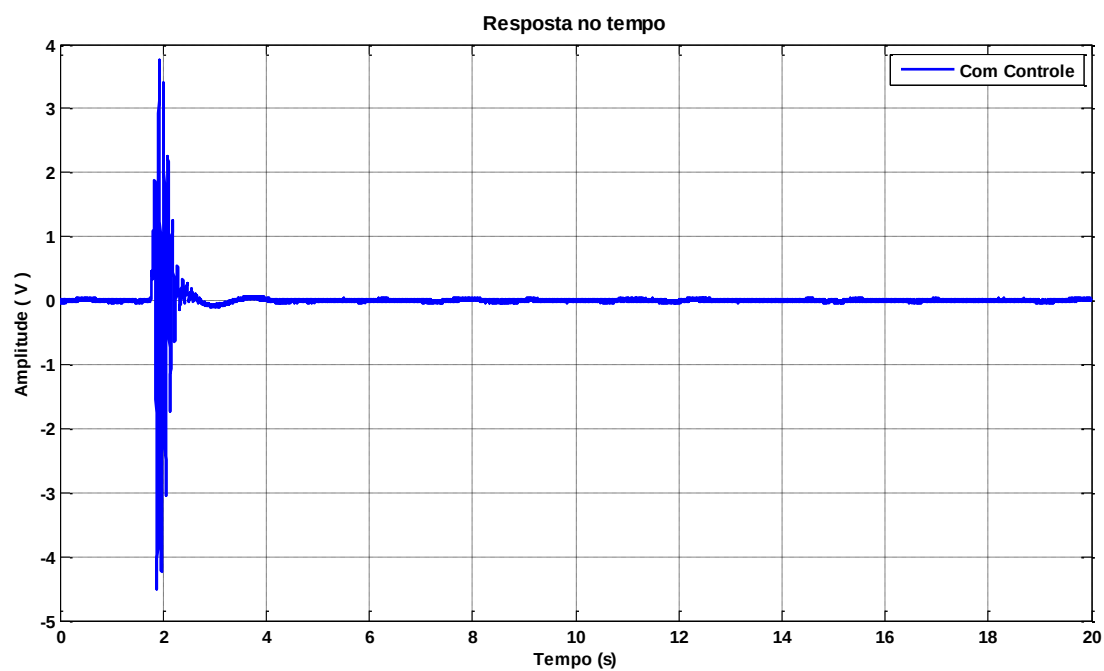
Figura 29 - Diagrama de blocos do *Simulink*® do controlador e observador



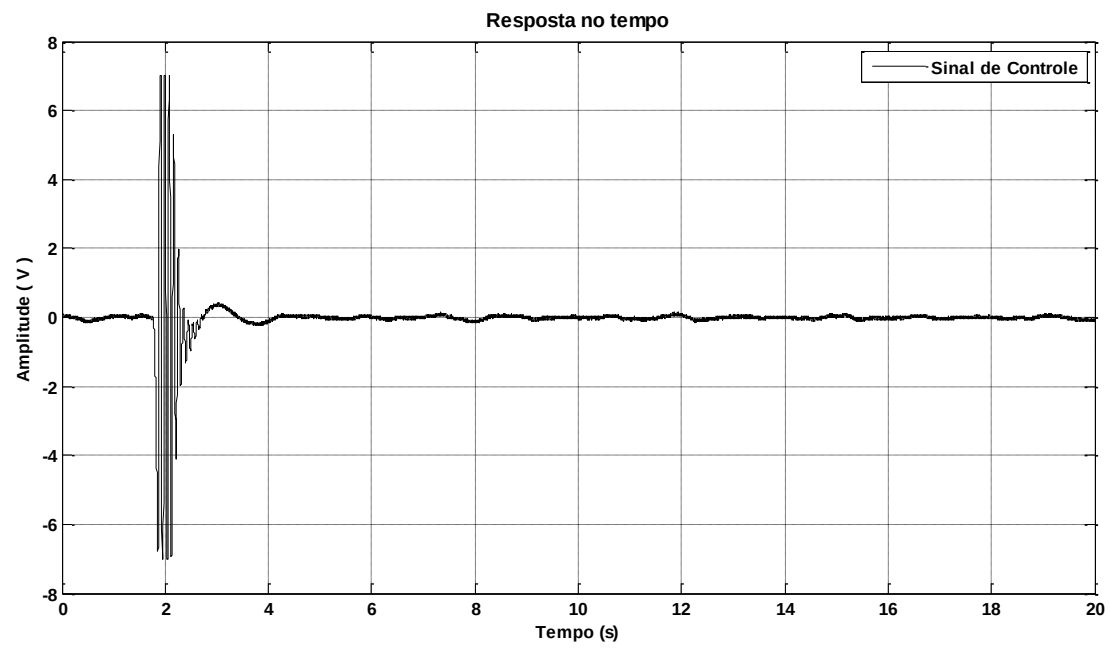
Fonte: do próprio autor

A resposta do sistema no tempo após uma perturbação pode ser vista na Figura 30. O tempo de estabilização foi reduzido para menos de dois segundos. O sinal de controle para atenuar as vibrações da viga é mostrado na Figura 31. Na Figura 32, uma comparação entre o sistema sem e com controle.

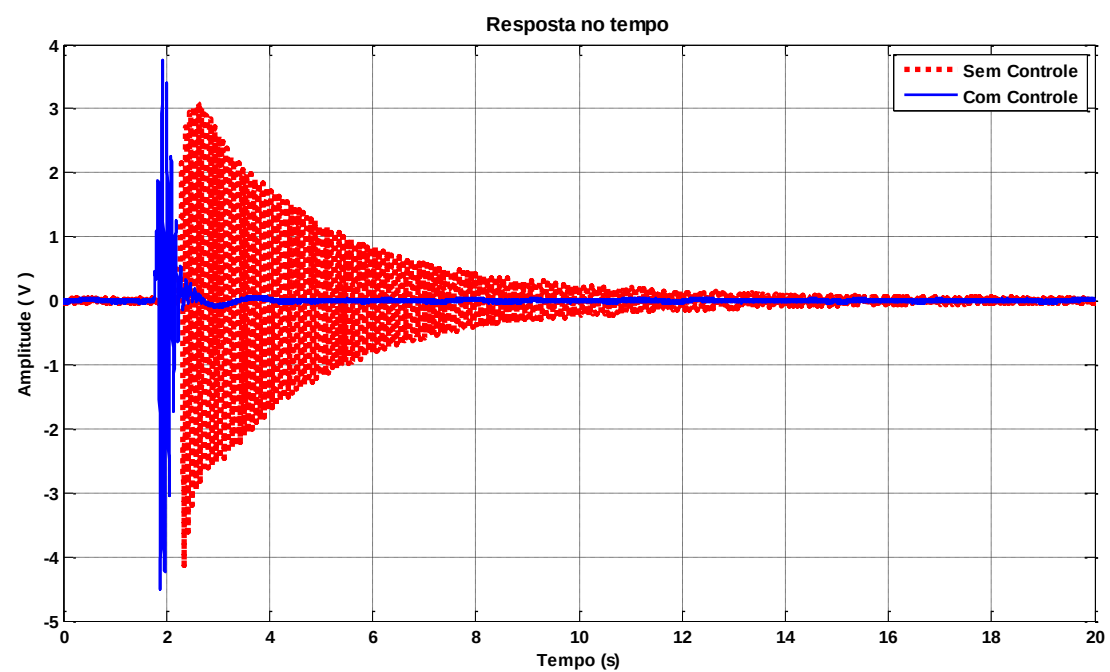
Figura 30 - Resposta do sistema com controle



Fonte: do próprio autor

Figura 31- Sinal de Controle

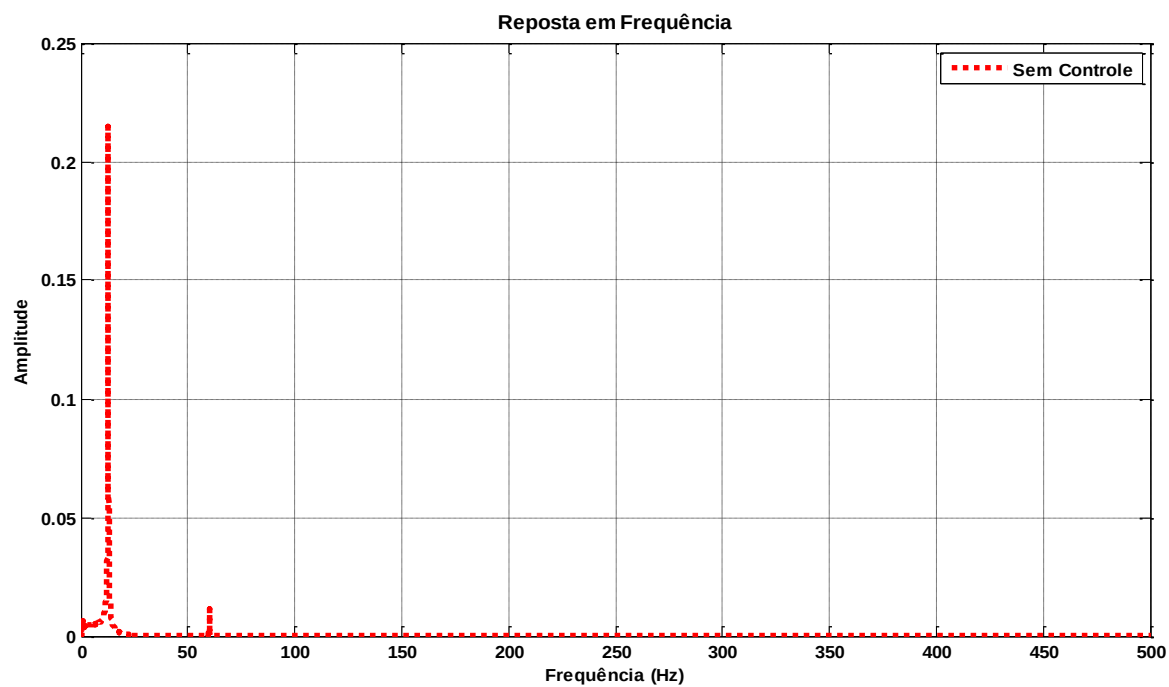
Fonte: do próprio autor

Figura 32 - Resposta do sistema com controle (azul) e sem controle (vermelho-pontilhado)

Fonte: do próprio autor

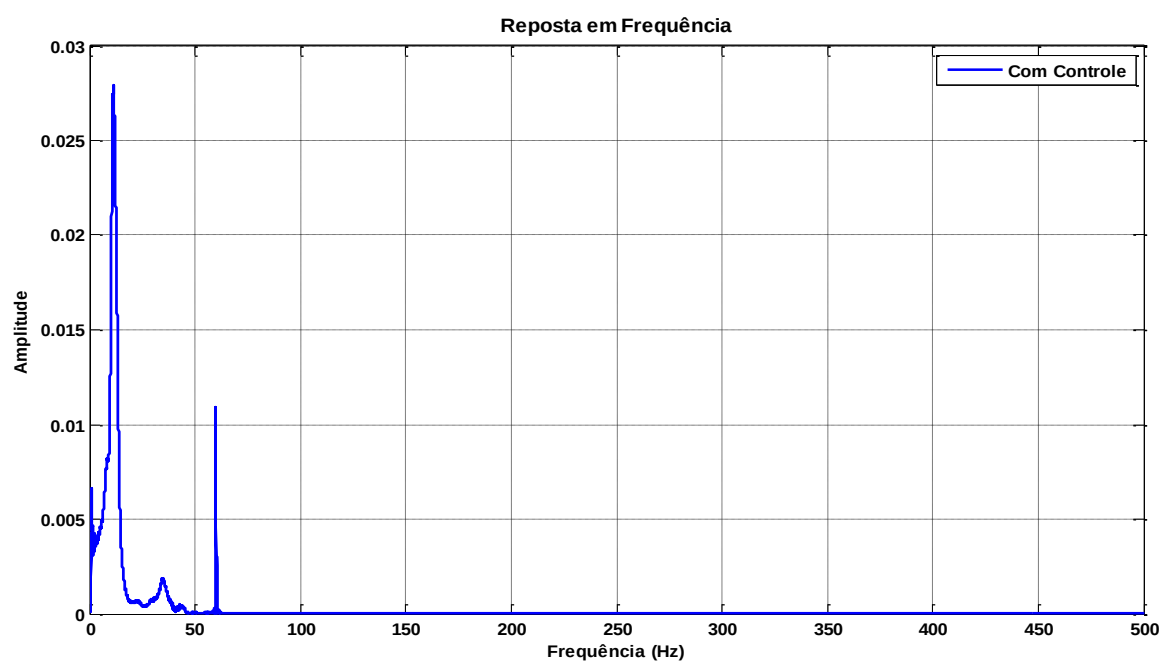
A resposta em frequência com e sem controle é apresentada nas próximas figuras. Observando que em torno de 60 Hz, há uma contaminação da rede elétrica.

Figura 33 - Resposta em frequência da viga sem controle



Fonte: do próprio autor

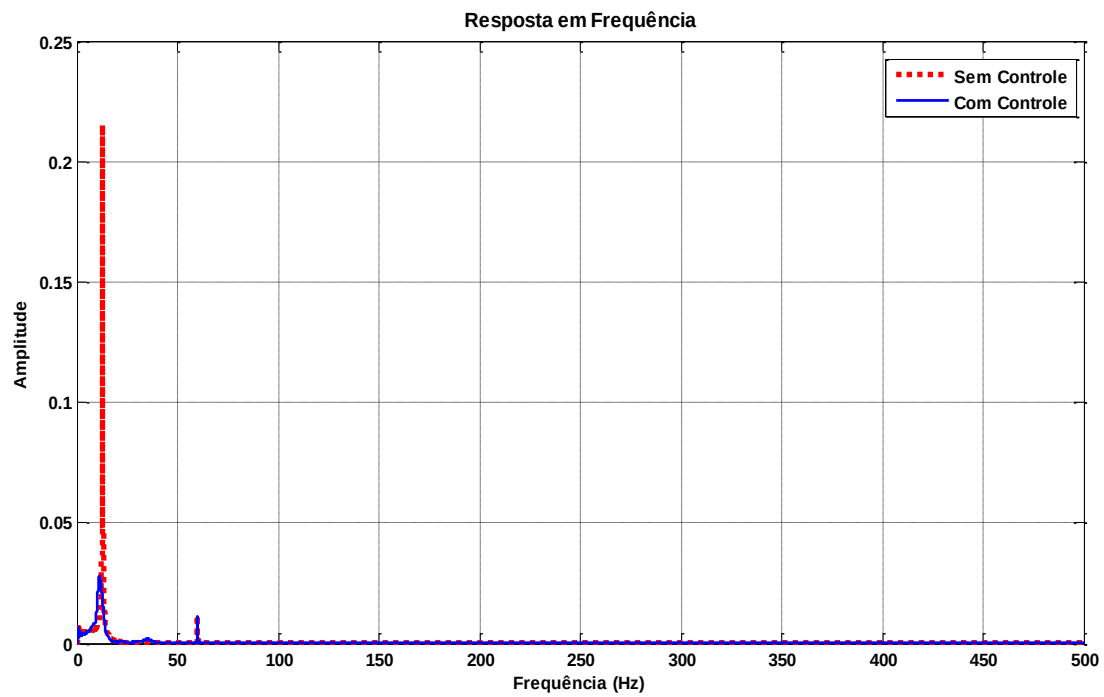
Figura 34 - Resposta em frequência do sistema com controle



Fonte: do próprio autor

Uma comparação entre as respostas em frequência do sistema sem e com controle é apresentada na Figura 35.

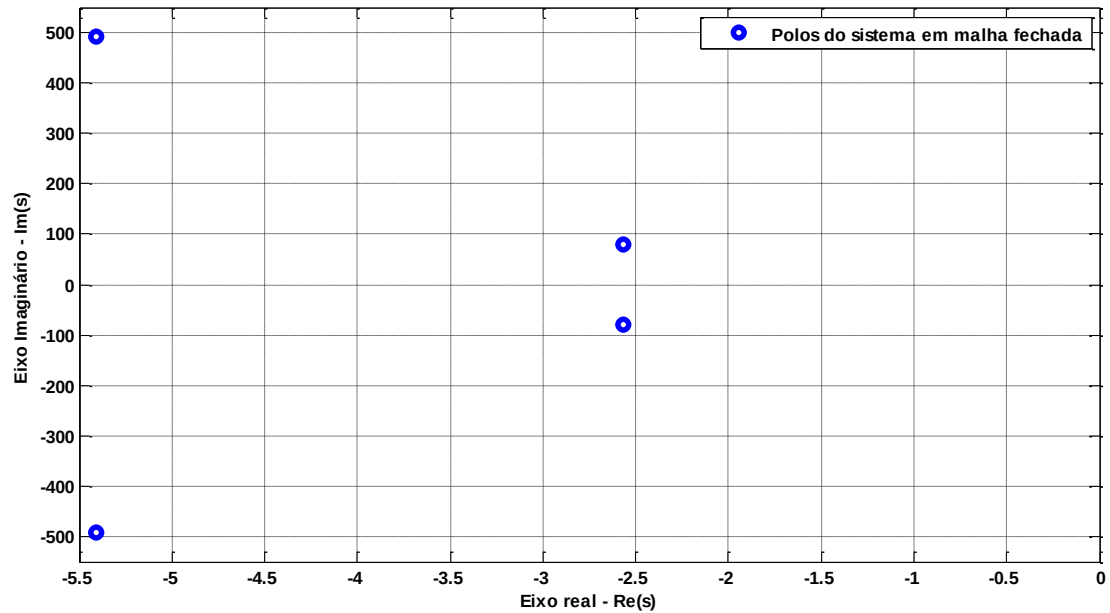
Figura 35 - Resposta em frequência da viga com (azul) e sem controle (vermelho-pontilhado)



Fonte: do próprio autor

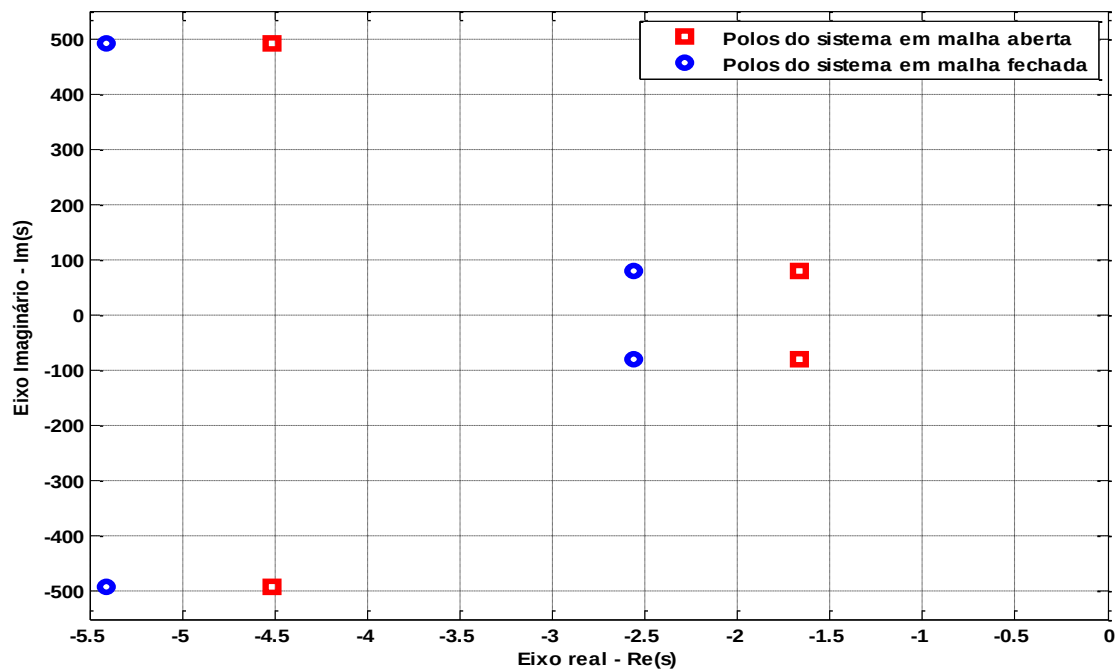
O mapeamento dos polos do sistema em malha fechada é apresentado na Figura 36. Os polos estão mais a esquerda do plano complexo, o que torna o sistema mais estável. A Figura 37 mostra uma comparação entre os dois sistemas.

Figura 36 - Polos em malha fechada



Fonte: do próprio autor

Figura 37 - Polos em malha aberta (vermelho) e em malha fechada (azul)



Fonte: do próprio autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 CONCLUSÕES

Estruturas inteligentes, geralmente, são leves e flexíveis. Estas estruturas na maioria das vezes são complexas e de difícil modelagem. A determinação do amortecimento neste tipo de estrutura, também, é difícil e pode levar a resultados errados em aplicações práticas. Portanto, métodos de identificação experimental são ferramentas importantes e fundamentais para aplicações práticas de estruturas inteligentes.

Neste trabalho, foram feitos dois estudos que se complementam. No primeiro, foram estudadas e aplicadas duas técnicas de identificação baseadas na teoria de realização de sistemas. Os métodos ERA e ERA/OKID usam dados de entrada e saída para identificar as matrizes de estado e apresentaram excelentes resultados. O objetivo foi identificar as equações em espaço de estados para uma viga engastada de alumínio. O modelo identificado foi então reduzido para um sistema de dois modos para satisfazer as condições de controlabilidade e observabilidade. O método utilizado para a redução foi a redução pela norma de Hankel.

Com o modelo identificado, foi projetado um controlador, baseado neste modelo, para reduzir as vibrações em baixas frequências da viga engastada. O controle LQR foi utilizado devido a sua simplicidade e fácil implementação para o sistema em questão. O controlador reduziu as vibrações no tempo esperado, mantendo o sistema estável quando este era perturbado por uma fonte externa.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Aplicar esta metodologia para um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas, MIMO (do inglês, *Multiple-Input Multiple-Output*).
- Aplicar o método de identificação OCID (*Observer/Controller Identification*) e ERA/DC (*Data Correlation*).
- Estudar métodos de identificação e técnicas de controle para sistemas não-lineares.
- Aplicar a redução de modelos H_2 e H_∞ via Desigualdades Matriciais Lineares (LMI's).

REFERÊNCIAS

- ABREU, G. L. C. M. **Projeto robusto H_∞ aplicado no controle de vibrações em estruturas flexíveis com materiais piezelétricos incorporados**. 2003. 299 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2003.
- ABREU, G. L. C. M.; CONCEIÇÃO, S. M.; LOPES JUNIOR, V.; BRENNAN, M. J.; ALVES, M. T. S. System identification and active vibration control of a flexible structure. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 34, p. 386 – 392. 2012. Número Especial.
- ABREU, G. L. C. M.; RIBEIRO, J. F.; STEFFEN, V. J. Experiments on optimal vibration control of a flexible beam containing piezoelectric sensors and actuators. **Shock and Vibration**, Londres, v. 10, n. 5-6, p. 283-300, 2003.
- AGUIRRE, L. A.; **Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**, Belo Horizonte, UFMG. 2000. 554 p.
- ALVES, M. T. S. **Avaliação numérica e experimental dos métodos ERA e ERA/OKID para a identificação de sistemas mecânicos**. 2005. 131 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal control : linear quadratic methods**, Englewood Cliffs, Prentice Hall International, 1989. 380 p.
- ASSUNÇÃO, E. **Redução H_2 e H_∞ de modelos através de desigualdade matriciais lineares: otimização local e global**. 2000. 90 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2000.
- ÅSTRÖM, K. J.; BOHLIN, T. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records, In: SYMPOSIUM ON SELF-ADAPTIVE SYSTEMS, 2. 1965, Teddington, **Proceedings...**, Teddington, [s. n.], 1965. p. 96-111.
- BLANCO DE FRUTOS, H. Front view of the madrid deep space network complex, and the 70m antenna. [S.l.: s. n.], 2005. Disponível em:
<http://es.wikipedia.org/wiki/Madrid_Deep_Space_Communications_Complex> ,
Acesso em: 16 nov. 2011.
- BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. **Introdução à teoria de controle e programação dinâmica**, Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 399 p.
- BUENO, D. D., **Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos**. 2007. 230 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de

Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, Ilha Solteira, 2007.

CHEN, CHI-TSONG; **Linear system theory and design**, New York, Oxford University, 1998. 334 p.

CHENG, M. H.-M.; CHEN, C.-Y. Discrete-time controller synthesis of a piezoelectric cantilever beam with the consideration of finite precision. In: IEEE SOUTHEASTCON, 26. **Proceedings...**, Atlanta: [s. n.], 2009. p. 66-71.

CONCEIÇÃO, S. M.; VASQUES, C. H.; ABREU, G. L. C. M.; LOPES JUNIOR, V.; BRENNAN, M. J. Identification and vibration control of a flexible structure. In: BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, COBEM, 21. 2011, Natal, **Proceedings...**, Natal, 2011. 1CD-ROM.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**, Rio de Janeiro, LTC. 2001. 659 p.

ENNS, D. **Model reduction for control system design**. 1984. 276 f. Tese (Ph.D.) - Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, California, 1984.

FALEIROS, A. C.; YONEYAMA, T. **Teoria matemática de sistemas**, Bela Vista, Arte e Ciência, 2002. 288 p.

GAGG FILHO, L. A.; CONCEIÇÃO, S.; VASQUES, C. H.; ABREU, G. L. C. M.; LOPES JUNIOR, V.; BRENNAN, M. J.; Experimental identification and control of a cantilever beam using ERA/OKID with a LQR controller. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, DINCON, 10. 2011, Águas de Lindóia, **Anais...** Águas de Lindóia: [s. n.], 2011. p. 128-131.

GATTI, G.; BRENNAN, M. J.; GARDONIO, P. Active damping of a beam using a physically collocated accelerometer and piezoelectric patch actuator. **Journal of Sound and Vibration**, Londres, v. 303, n. 3-5, p.798–813, 2007.

GAUSS, J. C. F. **Teoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium**, Hamburg, Perthes, 1809.

GAWRONSKI, W. K.; **Advanced structural dynamics and active control of structures**, California, Institute of Technology of Pasadena. 1998. 231 p.

GEVERS, M.; System identification without Lennart Ljung: what would have been different?, In: GLAD, T.; HENDEBY, G. (Ed.), **Forever Ljung in system identification**, Lund, Studentlitteratur, 2006, p. 61-85.

GLOVER, K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L(infinity)-error bounds. **International Journal of Control**, Abingdonm, v. 39, p. 1115-1193. 1984.

GONÇALVES, P. J. P. **Controle ativo de vibração estrutural utilizando materiais inteligentes e desigualdades matriciais lineares**. 2003.128 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, Ilha Solteira, 2003.

HARRIS, C. M.; CREDE, C. E. **Shock and vibration handbook** - New York, McGraw-Hill, 1961. v.1, pag. irreg.

HERNÁNDEZ, E.; KALISE, D.; OTÁROLA, E. A locking-free scheme for the LQR control of a Timoshenko beam. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, v. 235, n. 5, p. 1383–1393, 2011.

HO, B.; KALMAN, R. Effective construction of linear state-variable models from input-output data, In: ANNUAL ALLERTON CONFERENCE ON CIRCUIT AND SYSTEM THEORY, 3, 1965, Allerton, **Proceedings...**, Allerton [s. n.], 1965, p. 449-459.

JENSEN, C. A. JOHANN C. Friedrich Gauss. [S. l.: s. n.], 1840. Retrato. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Gauss.html>. Acesso em: 2 jul. 2012.

JUANG, JER-NAN. **Applied system identification**, Upper Saddle River, Prentice Hall PTR, 1994. 394 p.

JUANG, JER-NAN; PAPPA, R.S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Reston, v. 8, n.5, p. 620-627, set./out. 1985.

JUANG, JER-NAN; COOPER, J. E., WRIGHT. J. R., An eigensystem realization algorithm using data correlations (ERA/DC) for model parameter identification, **Control Theory and Advanced Technology**, Tokyo, v. 4, n. 1, p. 5-14, 1998.

JUANG, JER-NAN; PHAN, M.; HORTA, L. G.; LONGMAN, R. W. Identification of observer/Kalman filter Markov parameters: theory and experiments, **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, Reston, v. 16, n. 2, p. 320-329. mar./abr. 1993.

LATHI, B. P. **Sinais e sistemas lineares**. 2 ed. Porto Alegre, Bookman. 2008. 856 p.

LJUNG, L.; **System identification: theory for the user**, Englewood Cliffs, Prentice Hall PTR. 1987. 519 p.

MARQUI, C. R.; **Modelagem de estruturas piezelétricas para aplicação em localização de falhas**. 2007. 237 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, Ilha Solteira, 2007.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**, 2 ed. São Paulo, Livraria da Física, 2006. 670 p.

- MOORE, B. C. Principal components analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 26, n. 1, p. 17-32. 1981.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**, 4 ed. Rio de Janeiro, Prentice Hall Brazil. 2008. 894 p.
- PALMA, P. H. T. **Identificação experimental e controle ativo de vibrações aplicadas em estruturas inteligentes**, 2007. 148 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, Ilha Solteira, 2007.
- PHAN, M.; HORTA, L. G.; JUANG, J.-N.; LONGMAN, R. W. Linear system identification via an asymptotically stable observer, **Journal of Optimization Theory and Applications**, New York, v. 79, n. 1, p. 59-86. 1993.
- PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. **System identification: a frequency domain approach**. Piscataway. Wiley-IEEE; 2001. pag. irreg.
- RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. São Paulo. Pearson Prentice Hall. 2008. 424 p.
- SANTOS, R. B. **Controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs)**, 2008. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, Ilha Solteira, 2008.
- DA SILVA, S. **Projeto de controladores robusto para aplicações em estruturas inteligentes utilizando desigualdades matriciais lineares**. 2005. 147 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, Ilha Solteira, 2005.
- DA SILVA, S.; LOPES JUNIOR, V.; BRENNAN, M. J. Design of a control system using linear matrix inequalities for the active vibration control of a plate. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, London, v. 17, n. 1, p. 81-93, 2006.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. 2 ed. Chichester, John Wiley and Sons, 2005. 608 p.
- STAVROULAKIS, G. E.; FOUTSITZI, G.; HADJIGEORGIOU, E.; MARINOVA, D.; BANIOTOPOULOS, C.C. Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression. **Advances in Engineering Software**, Oxford, v. 36, n. 11-12, p. 806–813. 2005.
- VALER, C.E.I. **Uma introdução ao controle robusto com aplicações a estruturas flexíveis**. 1999. 163 f. Dissertação (Mestrado) - Departameno de Engenharia Mecânica, Pontifica Universidade Católica - PUC, Rio de Janeiro, 1999.

ZHANG, J.; HE, L.; WANG, E.; GAO, R. A LQR controller design for active vibration control of flexible structures. In: IEEE PACIFIC-ASIA WORKSHOP ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE AND INDUSTRIAL APPLICATION, PACIIA, 1, 2008, Wuhan. , **Proceedings...**, Wuhan, [s. n.], 2008. p. 137-132.