



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

UM CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS PARA ALUNOS INGRESSANTES DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO PAMPA – *CAMPUS ALEGRETE*

Fabiane Cristina Höpner Noguti

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Lourdes de la Rosa Onuchic

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2014

Fabiane Cristina Höpner Noguti

**UM CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO
DE PROBLEMAS PARA ALUNOS INGRESSANTES DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – *CAMPUS* ALEGRETE**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual “Júlio de Mesquita Filho”, *Campus* de Rio Claro, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Educação Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic

RIO CLARO (SP)

2014

510.07 Noguti, Fabiane Cristina Höpner
N778c Um curso de matemática básica através da resolução de problemas
para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa - Campus
Alegrete / Fabiane Cristina Höpner Noguti. - Rio Claro, 2014
370 f. : il., figs., gráfs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Educação matemática. 3.
Transição da educação básica para o ensino superior. 4. Pré-cálculo. 5.
Nivelamento em matemática. 6. Cálculo I. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

FABIANE CRISTINA HÖPNER NOGUTI

**UM CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO
DE PROBLEMAS PARA ALUNOS INGRESSANTES DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA - CAMPUS ALEGRETE**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, como requisito para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic (orientadora)
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Helena Noronha Cury
UNIFRA/ Santa Maria (RS)

Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva
PUC/ São Paulo (SP)

Profa. Dra. Maria Lúcia L. Wodewotzki
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Marcus Vinícius Maltempi
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Rio Claro, 06 de junho de 2014.

*Aos meus amores, Pedro e Marcelo, que mesmo longe sempre
estiveram tão perto...*

Aos meus pais que pelo dom da vida me permitiram estar aqui...

À minha Vó Blondina, exemplo de força.

AGRADECIMENTOS

À Professora Lourdes, minha orientadora, que acreditou no meu trabalho recebendo-me de braços abertos, pela amizade, pela dedicação e pela confiança que depositou em mim.

Aos colegas do GTERP, Andresa, Beth, Fernanda, Malu, Norma, Nilton, Raquel, Roger, Rosilda, Sandra e Tatiane, pelos momentos de convivência e aprendizado.

Aos professores membros da banca examinadora, Helena Noronha Cury, Benedito Antonio da Silva, Maria Lúcia Lorenzetti Wodewotzki e Marcus Vinicius Maltempi, pelas sugestões, críticas, opiniões e conselhos que muito contribuíram para o aprimoramento desta obra.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, pelos momentos de convivência e aprendizagem.

À Inajara, Ana e Elisa, por toda ajuda, simpatia e presteza.

À Dona Odete Calabria Ribeiro pela acolhida em sua casa em Rio Claro.

Aos meus amigos, que muito me escutaram nessa caminhada: Norma Allevato, Andresa Justulin, Divane Marcon, Rosilda Moraes, Marta Macena, Marcos Lübeck, Elizabeth Q. de Azevedo, João Batista e Regina Peneireiro...

Aos meus pais, Armim e Inês, pelo apoio sempre presente. Aos meus irmãos, cunhados e sobrinhos por comporem tão bem essa grande família.

Ao Marcelo, meu amor, que permitiu que essa realização fosse possível com sua dedicação ao Pedro, Otto, Nina e ao Chico, que chegou no meio do caminho...

Ao Pedro, meu filho, meu amor, por compreender tão bem a minha ausência.

À Unipampa, pelo apoio à qualificação docente.

À Capes, pelo auxílio financeiro.

*...Olhos abertos o longe é perto, o que vale é o sonho.
Sopram ventos desgarrados, carregados de saudade.
Viram copos, viram mundos, mas o que foi nunca mais será,
Mas o que foi nunca mais será...*
(Desgarrados – Mário Barará Dornelles/ Sérgio Napp)

RESUMO

Este trabalho investiga o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na transição da Educação Básica para o Ensino Superior, na forma de um Curso de Matemática Básica. Essa investigação foi realizada na Universidade Federal do Pampa – *Campus Alegrete*, com uma turma de 40 alunos ingressantes nos cursos de Engenharia Civil, Elétrica, Mecânica e de Telecomunicações, em que foram trabalhados conteúdos de Matemática Básica, necessários para o acompanhamento das disciplinas da graduação. Para o desenvolvimento da pesquisa foi utilizado o Modelo Metodológico de Romberg em que, a partir do fenômeno de interesse da pesquisadora, foi possível identificar três temas relevantes: a *Resolução de Problemas e o Ensino Superior*, a *Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior* e os *Cursos de Matemática Básica*. O estudo desses temas, apoiado nas ideias de outros pesquisadores levou à pergunta da pesquisa: *Quais as contribuições de um Curso de Matemática Básica, utilizando-se da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para auxiliar os alunos ingressantes, nas disciplinas de Matemática, em particular do Cálculo I, no Ensino Superior?* A partir da pergunta da pesquisa, forma elaboradas estratégias e procedimentos a fim de respondê-la. Colocados os procedimentos em ação em sala de aula, os alunos, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, atuaram como coconstrutores de seu conhecimento durante a resolução dos problemas propostos. Isso lhes possibilitou rever/construir conceitos matemáticos e técnicas operatórias de matemática básica importantes para o Cálculo I. Para a coleta dos dados, foram utilizadas a observação participante e os registros da professora-pesquisadora: avaliação diagnóstica e questionários respondidos pelos alunos, notas de caderno de campo, trabalhos produzidos pelos alunos, e vídeos dos encontros. Para a análise do material obtido, a fim de responder a pergunta da pesquisa, foi adotada uma abordagem qualitativa para os encontros e uma abordagem quantitativa para a análise do aproveitamento dos alunos cursantes de Matemática Básica e de seus aproveitamentos na disciplina de Cálculo I. No final do trabalho, constatou-se que as principais contribuições do Curso de Matemática Básica para os alunos ingressantes foram o uso de uma nova metodologia que se refletiu no interesse dos alunos em participar das aulas e consequentemente na baixa evasão do Curso e da disciplina de Cálculo I, bem como a forma de trabalho diferenciada em grupos e as diversas formas de avaliação, que propiciaram aos alunos a participação mais ativa nas aulas e nas discussões em seus grupos de trabalho e, ainda, o bom rendimento dos alunos na disciplina de Cálculo I.

Palavras-chave: Educação Matemática. Transição da Educação Básica para o Ensino Superior. Pré-Cálculo. Nivelamento em Matemática. Cálculo I.

ABSTRACT

The present work investigates the use of Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving in the transition from Basic Education to College, applied in a Basic Mathematics Course. That investigation was conducted at Universidade Federal do Pampa – Alegrete *Campus*, with a group of 40 first-year students in Civil, Electrical, Mechanical and Telecommunications Engineering schools, and necessary Basic Mathematics contents were developed to follow the college disciplines. The research was grounded on Romberg's Methodological Model in which, from the researcher's phenomenon of interest, it was possible to identify three relevant topics: *Problem Solving and College Education*, *Basic Education Mathematics necessary for College Education* and *Basic Mathematics Courses*. The study of these topics and the support of other researchers' ideas led to the research question: *What are the contributions of a Basic Mathematics Course based on the Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving to help first-year college students in Mathematics disciplines, particularly Calculus I?* From this research question, strategies and procedures were elaborated in order to answer it. Once the procedures were developed in classroom, the first-year students, by using the Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving, became co-builders of their own knowledge during the resolution of the proposed problems, which helped them review/build mathematical concepts and operation techniques in Basic Mathematics that are important for Calculus I. The data were collected through participant observation and the teacher-researcher's records: diagnostic evaluation and questionnaires to students, field notes, students' worksheets and videos of the meetings. For the analysis of the collected material, in order to answer the research question, we adopted a qualitative approach for the meetings and a quantitative one for the analysis of the students' performances in the Basic Mathematics Course and in Calculus I. At the end of the work, we realized the main contributions of Basic Mathematics Course for first-year students were the use of a new methodology that reflected in the students' interest in participating in the classes and, consequently, in the low rate of evasion from the Course and from Calculus I, as well as a differentiated group work and several kinds of assessment, which enabled the students to participate in classes and in work group discussions more actively and finally the good students' performance in Calculus I.

Keywords: Mathematics Education. Transition from Basic Education to College. Pre-Calculus. Leveling on Mathematics. Calculus I.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
Trajetória Acadêmica	11
Contextualização do Trabalho	13
<i>A Universidade Federal do Pampa - Unipampa</i>	13
<i>O Engenheiro formado pela Unipampa e o Curso de Matemática Básica</i>	14
<i>A Organização da Tese</i>	16
CAPÍTULO I - METODOLOGIA DE PESQUISA.....	20
1.1 A Metodologia da nossa Pesquisa	21
CAPÍTULO II - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO SUPERIOR.....	27
2.1 Resolução de Problemas	27
2.1.1 <i>Mudanças no ensino da Matemática</i>	29
2.1.2 <i>Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas</i>	32
2.2 A Resolução de Problemas no Ensino Superior	34
CAPÍTULO III - A MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA NECESSÁRIA PARA O ENSINO SUPERIOR	38
3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs.....	38
3.2 Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia	42
3.3 Os Cursos de Engenharia da Unipampa – <i>Campus Alegrete</i>	43
3.4 Relacionando os conteúdos da transição da Educação Básica para o Ensino Superior	44
CAPÍTULO IV - CURSOS DE MATEMÁTICA BÁSICA	48
4.1 Cursos de Matemática Básica – Panorama Geral.....	48
4.2 Os Cursos de Matemática Básica da Unipampa – <i>Campus Alegrete</i>	53
CAPÍTULO V - A NOVA PERGUNTA DA PESQUISA E O MODELO MODIFICADO ..	60
5.1 A influência dos nossos ‘outros’ na Pesquisa.....	60
5.2 O Modelo Modificado	63
5.3 A Nova Pergunta da Pesquisa.....	65
CAPÍTULO VI - ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS	66
6.1 Estratégias e Procedimentos da Pesquisa	66
6.2 Procedimentos Auxiliares em Ação	69
6.2.1. <i>P₁: A visita da pesquisadora à Unipampa – Campus Alegrete</i>	69
6.2.2. <i>P₂: Reunião com o Diretor e com o Coordenador Acadêmico do Campus Alegrete – Representante da Comissão de Ensino</i>	69

6.2.3. <i>P₃: Criação do Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”</i>	70
6.2.4. <i>P₄: A elaboração de uma Avaliação Diagnóstica dos alunos ingressantes para aplicação durante o primeiro encontro do Curso de Matemática Básica</i>	70
6.2.5. <i>P₅: Elaboração de um Termo de Compromisso e Responsabilidade</i>	72
6.2.6. <i>P₆: Elaboração do roteiro de atividades para o “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” – Seleção de Problemas Geradores</i>	73
CAPÍTULO VII - PROCEDIMENTO GERAL EM AÇÃO: IMPLEMENTAÇÃO DO	
PROJETO	75
7.1 A implementação do projeto de pesquisa	75
7.2 Os dados coletados e a Metodologia adotada para sua análise.....	77
7.3 Análise dos dados	79
7.4 Os encontros	80
7.5 Análise qualitativa dos Encontros	190
7.6 Análise quantitativa dos Encontros	193
CONSIDERAÇÕES FINAIS	198
Considerações e Limitações	198
Contribuições para a Educação Matemática.....	205
O que vem depois... ..	206
REFERÊNCIAS	207
APÊNDICE A – Avaliação Diagnóstica	213
APÊNDICE B – Termo de Compromisso e Responsabilidde	214
APÊNDICE C – Projeto de Ensino entregue à Unipampa	216
APÊNDICE D – Projeto de Ensino	223
APÊNDICE E - Avaliações dos grupos (18º Encontro)	353
APÊNDICE F – Planilha de nota dos alunos de Matemática Básica- Turma A	362
ANEXO A – Ementa e programa das disciplinas de Cálculo I e Geometria Analítica	363
ANEXO B – Ementa e programa da disciplina de Matemática Básica	367
ANEXO C – Horário do Projeto Integrado de Iniciação ao Ensino Superior 2013	370

INTRODUÇÃO

- Mamanhe te amo daqui até o infinito, ida e volta.

- E o que é o infinito?

- É todo o espaço!¹

Trajetória Acadêmica

Cursei² a Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Santa Maria – UFSM nos anos de 1995-1998. Um curso de licenciatura que considero ter sido ‘duro’, porém que muito me ajudou não somente em sala de aula, mas no embasamento de conteúdos matemáticos necessários ao longo de minha trajetória.

Ao concluir a licenciatura, prestei concurso para professora efetiva da rede municipal de Ensino Fundamental ao qual me dediquei por um ano na cidade de Itaara, próxima 20 km de Santa Maria. Ao mesmo tempo, cursava a Especialização em Matemática na UFSM e também era professora substituta da mesma instituição, ministrando aulas de Cálculo e Cálculo Numérico para os cursos de Engenharia. Pude vivenciar nesse período a matemática em quase todas as suas fases, nos Ensinos Fundamental, Superior e ainda na Pós-graduação.

Para a conclusão da Especialização optei por escrever um trabalho que envolvesse o Ensino Médio – único entre os níveis que nunca lecionara efetivamente, apenas fizera estágio obrigatório do Curso de Licenciatura. O trabalho, intitulado “*Estudo de Funções: uma aplicação do software de computação algébrica MAPLE-V no ensino e aprendizagem de matemática para a 1ª série do Ensino Médio*” foi um dos responsáveis pelo meu interesse pela Educação Matemática.

No ano seguinte (2001), iniciei os estudos de mestrado como aluna especial no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, em Rio Claro. Cheguei sem projeto pronto e aberta a conhecer as áreas de pesquisa. Participei de dois grupos de pesquisa (GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, GPHM – Grupo de Pesquisa em História da Matemática e/ou suas Relações com a Educação Matemática), fiz disciplinas e, em 2003, ingressei como aluna regular de mestrado sob a orientação do Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira, com o qual desenvolvi um trabalho na área de História da Matemática.

¹ Meu filho Pedro (5 anos) no Skype, numa manhã de segunda-feira.

² Utilizo a primeira pessoa neste capítulo por se tratar de minha trajetória antes do doutoramento.

O referido trabalho, intitulado “*O Livro Théories des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé – de Agliberto Xavier*”, era fruto do meu envolvimento em sala de aula com o Cálculo e com o Cálculo Numérico que havia trabalhado por dois anos nos cursos de Engenharia da UFSM. Nele, procurei estudar o surgimento do Cálculo Numérico como disciplina independente do Cálculo e, através do livro de Agliberto Xavier, foi possível descrever o que conhecemos como a primeira obra escrita por um brasileiro que aborda claramente um tratado de Cálculo Numérico, o livro em questão, em 1908.

Durante o mestrado, fui professora de duas instituições particulares de Ensino Superior no estado de São Paulo, onde trabalhei com disciplinas de matemática para os cursos de Administração de Empresas, a saber, Matemática Aplicada à Administração, Estatística Básica e Matemática Financeira e, na Pedagogia, com a disciplina de Conteúdos e Metodologias para o Ensino de Matemática.

Após a conclusão do mestrado, mudei-me para Santa Maria - RS e novamente prestei prova para professora substituta do Departamento de Matemática da UFSM. Voltei a trabalhar com o Cálculo e também com a Álgebra Linear nos cursos de Engenharia. No ano seguinte, 2006, prestei concurso para professora efetiva na recém-criada Fundação Universidade Federal do Pampa - Unipampa, para a cidade de Alegrete.

Ingressei, em fevereiro de 2007, como docente na Unipampa – *Campus Alegrete*, para atuar nas disciplinas de matemática que são necessárias à formação de cientistas da computação e engenheiros, ministrando aulas de Cálculo, Geometria Analítica, Álgebra Linear, Matemática Discreta, Variáveis Complexas e Equações Diferenciais Ordinárias. Foram quatro anos de trabalho observando e detectando as dificuldades dos alunos, em particular nos conceitos de matemática básica, antes do ingresso ao doutorado.

Neste período de quatro anos, observadas as dificuldades por parte dos alunos ingressantes com as disciplinas iniciais da graduação, ajudei a elaborar e participei efetivamente de um projeto de curso para auxiliar os alunos ingressantes nas disciplinas iniciais de matemática. O referido curso, inicialmente chamado de Pré-Cálculo, se tornou Nivelamento em Matemática e, posteriormente, chamou-se apenas Matemática Básica. Tais experiências, juntamente com o desejo de auxiliar os alunos ingressantes dos Cursos de Engenharia da Unipampa, tornaram-se objetos de pesquisa para o doutorado.

Contextualização do Trabalho

A Universidade Federal do Pampa - Unipampa

De acordo com o PDI - Projeto de Desenvolvimento Institucional, a Fundação Universidade Federal do Pampa (Unipampa) é o “[...] resultado da reivindicação da comunidade da região, que encontrou guarida na política de expansão e renovação das Instituições Federais de Educação Superior promovida pelo Governo Federal”.

A Unipampa foi criada com a responsabilidade de contribuir com a região em que está inserida,

[...] um extenso território, com críticos problemas de desenvolvimento socioeconômico, inclusive de acesso à educação básica e à educação superior, a “metade sul” do Rio Grande do Sul. Veio para contribuir com a integração e o desenvolvimento da região de fronteira do Brasil com o Uruguai e a Argentina (Projeto de Desenvolvimento Institucional – UNIPAMPA, 2009, p. 3).

O reconhecimento das condições regionais, aliado à necessidade de ampliar a oferta de Ensino Superior gratuito e de qualidade nesta região, motivou a proposição dos dirigentes dos municípios da área de abrangência da Unipampa a pleitear, junto ao Ministério da Educação, uma Instituição Federal de Ensino Superior.

Com o plano de expansão das Universidades Federais, foi realizado um acordo de Cooperação Técnica entre o Ministério da Educação, a Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) e a Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) que previu a ampliação do Ensino Superior na metade sul do estado do Rio Grande do Sul. A partir do segundo semestre de 2006, entrou em funcionamento a Fundação Universidade Federal do Pampa (Unipampa).

Figura 1 - Mapa de Localização dos 10 Campi da Unipampa



Fonte: Plano de Desenvolvimento Institucional – PDI

A UFSM e a UFPel tiveram a Unipampa como uma unidade de vínculo temporário. Os dez *campi* da Unipampa (Alegrete, Bagé, Caçapava do Sul, Dom Pedrito, Itaqui, Jaguarão, Santana do Livramento, São Borja, São Gabriel e Uruguaiana) passaram a ter autonomia a partir do mês de janeiro de 2008.

No *Campus* Alegrete foram implantados inicialmente os cursos de graduação em Engenharia Civil, Engenharia Elétrica e Ciência da Computação, todos com grades curriculares idênticas ao da UFSM, universidade que foi responsável pela implantação da Unipampa em cinco dos dez *campi*. A Unipampa organizou-se por centros temáticos, em que cada *campus* responde por cursos de uma determinada área do conhecimento. Coube ao *campus* Alegrete sediar cursos de graduação na área de engenharia e tecnologia.

Atualmente o *Campus* Alegrete conta ainda com os cursos de Engenharia Agrícola³, Engenharia Mecânica, Engenharia de Software e Engenharia de Telecomunicações além de cursos de pós-graduação. Possui, portanto, cursos de graduação com enfoque essencialmente tecnológico, onde existe ampla necessidade de disciplinas nas áreas de matemática e física. Para tanto, o *Campus* Alegrete possui, em seu quadro docente, quatro professores de matemática responsáveis pelas disciplinas iniciais dos cursos por ela ofertados.

A seleção dos alunos ingressantes na Unipampa – *Campus* Alegrete foi realizada nos primeiros três anos através do vestibular organizado pela UFSM. Em 2009 a Unipampa realizou o vestibular de forma autônoma através do serviço do Centro de Seleção e de Promoção de Eventos – CESPE/UnB. A partir de 2010, a Unipampa utiliza como seleção a nota do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, configurando, portanto, turmas constituídas de alunos de diversas regiões do país.

O Engenheiro formado pela Unipampa e o Curso de Matemática Básica

Dentre os cursos ofertados pelo *Campus* Alegrete, seis são voltados à formação de engenheiros: Engenharia Agrícola, Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Engenharia de Software e Engenharia de Telecomunicações. Destes, Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica e Engenharia de Telecomunicações possuem as disciplinas de matemática no núcleo básico que são relevantes para este trabalho.

De acordo com o PPC – Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia Civil, a Unipampa espera:

³ Em parceria com o Instituto Federal Farroupilha – IFF, *Campus* Alegrete.

[...] formar um profissional com consciência de sua responsabilidade profissional e social, inserido no mundo produtivo, mantendo-se atualizado e contribuindo, efetivamente, utilizando-se da tecnologia adquirida, em prol do desenvolvimento sustentável da sociedade em que vive (UNIPAMPA, 2010, p.13).

O perfil do egresso do Curso de Engenharia Elétrica cita que o aluno formado pela Unipampa deve:

[...] ter a capacidade de expandir o conhecimento e alcançar competência em novas áreas de conhecimento, em um processo de aperfeiçoamento contínuo, de forma autônoma ou de educação continuada, adaptando-se a situações novas e emergentes. O egresso deve ter uma atitude pró-ativa de busca de soluções eficientes e, se possível, inovadoras para problemas relacionados à área de Engenharia Elétrica (UNIPAMPA, 2009, p. 04).

De forma geral, os PPCs salientam que durante o desenvolvimento dos cursos é fundamental que sejam trabalhadas características como: raciocínio lógico; habilidade para aprender novas qualificações; conhecimento técnico geral; responsabilidade com o processo de produção e iniciativa para resolução de problemas.

Por outro lado, a realidade dos alunos ingressantes na Unipampa não é diferente da de muitas outras Instituições de Ensino Superior no Brasil que recebem alunos com diferentes formações do Ensino Básico e esperam torná-los profissionais bem formados em alguma área de atuação.

Como docente, percebi que muitos dos alunos, ingressantes nos cursos oferecidos pelo *Campus* Alegrete, apresentavam dificuldade em ultrapassar a barreira dos anos iniciais devido à deficiência nos conceitos básicos de matemática. Aliado a isso, o alto índice de reprovação nas disciplinas de primeiro semestre é, em geral, um entrave para estes alunos e motivo de evasão.

Foi nesse contexto que, com a colaboração dos demais colegas professores de matemática do *Campus*, propusemos, nos anos de 2007 a 2010, um Projeto de Nivelamento em Matemática com o objetivo de minimizar tais deficiências.

Após quatro anos dessa atividade, os resultados que obtivemos mostraram que boa parte dos alunos que concluíram o Curso de Nivelamento em Matemática alcançou resultados positivos nas disciplinas de Cálculo I e Geometria Analítica. Apesar disto, o número de alunos que se evadem do Curso de Nivelamento em Matemática é muito grande.

Esse resultado nos remeteu a pensar sobre a mudança na forma de apresentação do curso para os alunos, pois continuávamos acreditando que essa iniciativa poderia auxiliá-los com a aquisição dos conceitos básicos de matemática e, também, colaborar com a formação desejada pela Unipampa descrita nos PPCs dos cursos de engenharia.

Dessas inquietações surgiu este trabalho de doutorado, **que busca investigar se um novo Curso de Matemática Básica, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, poderia auxiliar os alunos, fazendo com que trabalhem de uma nova forma conceitos, conteúdos e procedimentos fundamentais de matemática necessários a um acompanhamento eficiente nas disciplinas iniciais de graduação.** Tal curso deve fomentar, nos alunos, a busca pelo raciocínio, pela matemática por vezes desconhecida e, fundamentalmente, pela participação efetiva do aluno no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Onuchic (1999, p. 208),

[...] o papel da Resolução de Problemas no currículo passaria de uma atividade limitada para engajar os alunos, depois da aquisição de certos conceitos e determinadas técnicas, para ser tanto um meio de adquirir novo conhecimento como um processo no qual pode ser aplicado aquilo que previamente havia sido construído.

Salientamos que o Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas deve colaborar com o ‘saber pensar e dar sentido’ às disciplinas iniciais de graduação, que envolvem, além do conteúdo matemático necessário, a compreensão do seu uso nas demais disciplinas, o que propicia um engajamento dos alunos na construção dos conhecimentos, gerando a autonomia necessária para o estudante avançar nas demais disciplinas de conteúdo específico.

Consideramos ainda que a meta proposta pelos PPCs no perfil do egresso não se atinge apenas nas disciplinas elencadas no currículo, e sim, faz parte da formação geral do aluno, que contempla não somente conteúdos, mas também a formação do cidadão propiciada pela sua vivência nas Instituições de Ensino Superior.

A Organização da Tese

Este trabalho está organizado em sete capítulos, além da Introdução, Referências, Apêndices e Anexos:

Na **Introdução**, onde se insere a presente seção, exponho minha trajetória acadêmica, uma breve contextualização do trabalho, apresentando em poucas palavras a criação da Universidade Federal do Pampa, o engenheiro por ela formado e a necessidade dos Cursos de Matemática Básica, a fim de explicitar a gênese do trabalho e também sua relevância para

mim e para a Instituição. Em seguida apresento, em linhas gerais, a organização dos capítulos da tese.

Capítulo I – Metodologia de Pesquisa

No primeiro capítulo do trabalho, discorremos sobre o que é pesquisa e assumimos que a nossa Metodologia da Pesquisa seguirá o Modelo de Romberg. Dentro da estrutura proposta por Romberg iniciamos a descrição das atividades de pesquisa relacionadas com nosso objeto de estudo, que é investigar se um novo Curso de Matemática Básica, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, poderia auxiliar os alunos, fazendo com que trabalhem de uma nova forma conceitos, conteúdos e procedimentos fundamentais de matemática necessários a um acompanhamento eficiente nas disciplinas iniciais de graduação.

Capítulo II – Resolução de Problemas e o Ensino Superior

Neste capítulo, apresentamos algumas relações entre a Resolução de Problemas e algumas pesquisas realizadas neste contexto no Ensino Superior. Fazemos um breve estudo sobre a Resolução de Problemas, sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e, posteriormente, um levantamento de trabalhos já realizados pelo GTERP com essa metodologia e que possuem enfoque no Ensino Superior.

Capítulo III – A Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior

Neste capítulo, apresentamos os documentos nacionais que norteiam os cursos dos Ensinos Fundamental e Médio no âmbito da Matemática e, também, as diretrizes curriculares para os cursos de Engenharia. Avançando o estudo, passaremos nossa análise para a ementa e o programa da disciplina de Cálculo I dos cursos de Engenharia da Unipampa, a fim de relacionar e estabelecer, em nossa pesquisa, os conteúdos essenciais de Matemática da Educação Básica para um bom andamento das disciplinas matemáticas dos cursos de graduação em Engenharia.

Capítulo IV – Curso de Matemática Básica

Neste capítulo, fazemos um apanhado geral dos Cursos de Nivelamento em Matemática e de algumas pesquisas que estão sendo realizadas a esse respeito no Brasil. Num segundo momento, relatamos os Cursos de Matemática Básica já realizados na Unipampa, sua metodologia de trabalho e resultados obtidos.

Capítulo V – A nova pergunta da pesquisa e o Modelo Modificado

Neste capítulo, retomamos o Modelo de Romberg, avaliando os três capítulos anteriores e a contribuição deles para a nossa pesquisa. Posteriormente, apresentamos nossa pergunta da pesquisa já apoiada na investigação realizada nos Capítulos II, III e IV e reelaborada à luz das novas variáveis que surgiram neste estudo e, também, um modelo que nos guiará até o fim desta pesquisa que chamaremos de Modelo Modificado.

Capítulo VI – Estratégias e Procedimentos

Neste capítulo iniciamos o segundo bloco do Modelo de Romberg. Nele, selecionamos estratégias e procedimentos de pesquisa, a fim de termos subsídios para responder a pergunta da pesquisa. Para o Modelo Modificado, construído no capítulo anterior, definimos uma Estratégia Geral (“o quê fazer?”) e um respectivo Procedimento Geral (“como fazer?”), para depois colocá-los em ação.

Capítulo VII – Procedimento geral em ação: Implementação do Projeto

Neste capítulo, apresentamos as ações decorrentes da pesquisa que dão sentido às informações coletadas durante a aplicação do projeto. Após a coleta das evidências, iniciamos por relatar a implementação do projeto de ensino e as atividades realizadas nos encontros previamente planejados. Posteriormente fazemos uma análise dos dados obtidos após o projeto ter sido posto em ação com vistas a responder à pergunta da pesquisa.

Considerações Finais

Nesta última parte do trabalho, retomando a pergunta da pesquisa, apresentamos as conclusões que tiramos da implementação do projeto “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” com base no referencial teórico disposto nos capítulos II, III e IV, para respondê-la. Além disso, comentamos algumas limitações que percebemos na sua implementação e salientamos as contribuições do trabalho para com a Educação Matemática. Para finalizar apresentamos algumas ideias de projetos futuros.

CAPÍTULO I

METODOLOGIA DE PESQUISA

O estudo científico deve ser claro, interessante e objetivo, tanto para as pessoas familiarizadas com o assunto quanto para as que não são.

MIRIAM GOLDENBERG

O ato de pesquisar ocorre sempre que procuramos esclarecer dúvidas com as quais nos deparamos e para as quais desejamos encontrar uma resposta. É um princípio básico da curiosidade humana de responder suas inquietações. Partimos do pressuposto que “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe.” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 13).

As perguntas, aliadas à intuição e conhecimento adquirido, desenvolveram formas de pesquisa que indicam o sucesso na busca por respostas. Para isso, utilizamo-nos de processos de pesquisa para entender o problema e escolher as formas de investigação que usaremos.

Inicialmente, julgamos importante compreender a diferença entre *método* e *metodologia*. Segundo Goldenberg (2001, p. 104), “Método – é o caminho para chegar a um fim” e, “Metodologia – é o estudo dos caminhos a serem seguidos, dos instrumentos usados para se fazer ciência”. Estes são, para nós, conceitos norteadores para a compreensão do significado de fazer pesquisa.

Pesquisa é a construção de conhecimento original, de acordo com certas exigências científicas. É um trabalho de produção de conhecimento sistemático, não meramente repetitivo, mas produtivo, que faz avançar a área de conhecimento a qual se dedica (GOLDENBERG, 2001, p. 105).

Dentre os vários métodos para desenvolver um trabalho, devemos optar por aquele que mais se adapta ao que temos em mente no desenvolvimento de nossa pesquisa. Para Romberg (2007, p. 97),

O que diferencia um método de outro não é só o modo como a informação é coletada, analisada e relatada, mas, também, os próprios tipos de perguntas tipicamente feitas e os princípios ou paradigmas sobre os quais os métodos para investigar tais perguntas estão baseados.

Segundo Schoenfeld (2002, p. 444),

Qualquer método de pesquisa é, na verdade, uma lente ou filtro através do qual os fenômenos são vistos (e possivelmente esclarecidos, ou distorcidos, ou tornados

obscuros). Assim, as maneiras com que as questões são produzidas devem moldar as maneiras que os métodos são selecionados e utilizados.⁴

Seguindo as ideias de Romberg e Schoenfeld, acima citadas, iremos agora nos deter no método de pesquisa escolhido para produzir este trabalho.

1.1 A Metodologia da nossa Pesquisa

Para fundamentarmos nossa pesquisa, nos apoiaremos na proposta de atividades descrita por Thomas A. Romberg em *Perspectives on Scholarship and Research Methods* (Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa), traduzido por Onuchic e Boero e publicado na Revista Bolema (2007, vol.27, p. 93 – 139).

Neste artigo, Romberg discorre sobre as diversas tendências de pesquisa em Educação Matemática e, propõe um cronograma de atividades comuns à grande maioria de métodos de pesquisa, a fim de orientar o pesquisador ao longo do seu trabalho. Para Romberg o termo ‘pesquisa’ refere-se a processos, ou seja, a coisas que podem ser feitas e não a objetos palpáveis.

De acordo com Romberg, a pesquisa possui características de uma arte e não simplesmente de uma disciplina técnica, por isso salienta que “... fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada.” (p. 97).

Para isso, Romberg descreve em seu artigo 10 atividades importantes a serem consideradas durante o desenvolvimento da pesquisa. São atividades que mudam de acordo com cada pesquisa e ao longo dela. O que o autor cita nas atividades são, na verdade, elementos comuns de pesquisa, que se esquecidos podem dificultar a compreensão do processo e até mesmo confundir o pesquisador.

Segundo Romberg (p. 98), “... não há nada de exclusivo nesta lista; de fato quase todo texto de métodos de pesquisa resume um conjunto semelhante de atividades.” Salienta ainda que embora as atividades estejam em uma ordem sequencial, elas não precisam ser seguidas necessariamente nessa ordem, o que deixa o pesquisador livre para adequar a sua pesquisa ao modelo proposto e também alterá-lo se assim julgar necessário.

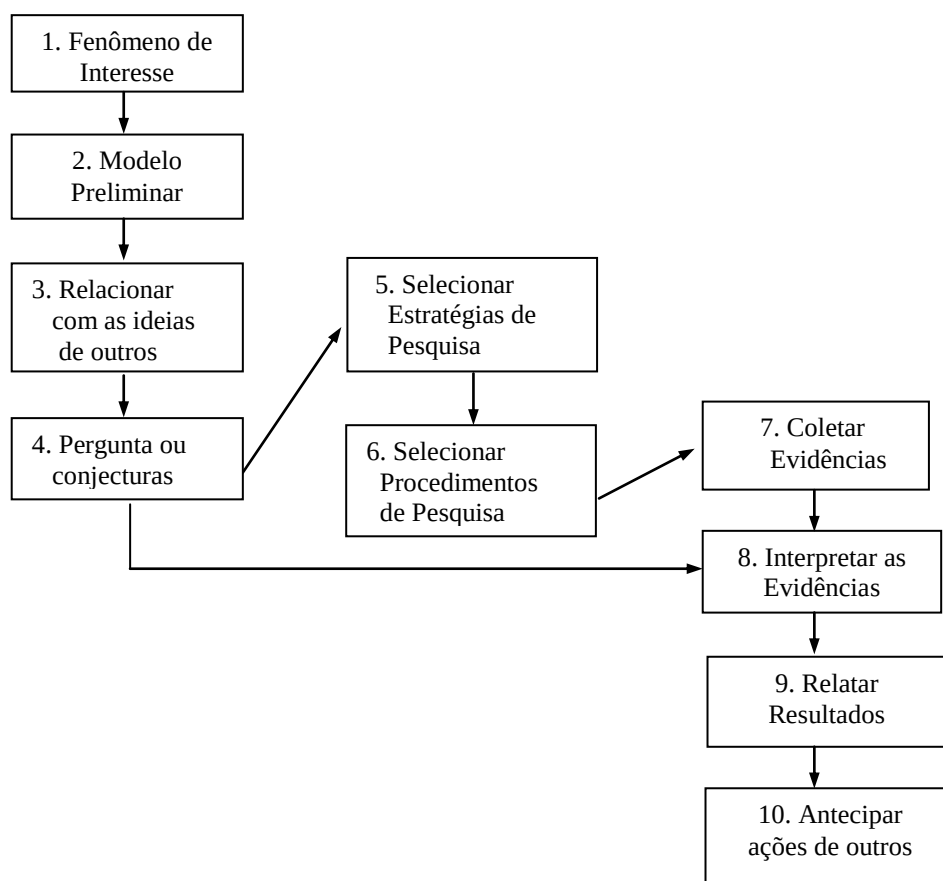
⁴ Tradução da pesquisadora para “Any research method is, in effect, a lens or filter through which phenomena are viewed (and possibly clarified, or distorted, or obscured). Thus, the ways that questions are framed should shape the ways that methods are selected and employed.”

O Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP utiliza este modelo de atividades nas pesquisas desenvolvidas e considera esta a Metodologia de Pesquisa de Romberg.

Considerando a definição de Goldenberg, entendemos que Romberg não mostra apenas “um caminho para se chegar a um fim” – *a pesquisa*, mas sim, “o estudo dos caminhos a serem seguidos, dos instrumentos usados para se fazer ciência” – *as atividades de pesquisa e todas as relações necessárias de análise e questionamentos em cada uma delas*, sendo, portanto, não apenas um caminho a ser seguido, mas um caminho a ser pensado e, para tanto, uma Metodologia de Pesquisa.

As 10 atividades do pesquisador propostas por Thomas Romberg estão relacionadas no fluxograma a seguir:

Figura 2 – Fluxograma do Modelo de Romberg



Fonte: ROMBERG, 2007, p. 98

Podemos descrever o esquema de atividades propostas em três blocos: 1º Bloco de Romberg compreende as atividades de 1 a 4; o 2º Bloco de Romberg compreende as atividades 5 e 6 e o 3º Bloco de Romberg compreende as atividades de 7 a 10.

Segundo o autor “as quatro primeiras atividades são as mais importantes, pois elas são envolvidas com situar as ideias de alguém sobre um particular problema no trabalho de outros estudiosos e decidir o que investigar”. (2007, p. 98)

As primeiras atividades iniciam-se no momento em que o pesquisador sente a necessidade de investigar algo, onde aparece o seu fenômeno de interesse. Consideramos que o pesquisador é repleto de intenção⁵ ao definir seu objeto de pesquisa, ou seja, o envolvimento do pesquisador, no trabalho proposto, surge de seus conhecimentos anteriores e de suas experiências de trabalho. A partir desse passo, inicia-se a elaboração do projeto de pesquisa, que será minuciosamente estudado e descrito nas atividades 2 a 4.

As duas atividades seguintes (5 e 6), envolvem a tomada de decisões a respeito de saber “o quê” deve ser feito e “como fazer” para se resolver o problema de pesquisa identificado. Neste momento, o pesquisador apoiado nas ideias e resultados que outros pesquisadores têm discutido e publicado, elabora um plano de ação para a pesquisa.

A atividade 7 envolve a coleta de evidências, onde o pesquisador busca elementos que garantam ou justifiquem suas condições e, por fim, as últimas três atividades estão relacionadas com a interpretação dessas evidências frente ao problema a ser investigado, e no relato dos resultados antecipando ações de outros pesquisadores.

Utilizando o Modelo de Romberg, descrevemos a seguir as atividades relacionadas com o nosso objeto de pesquisa.

I. Fenômeno de Interesse

A identificação do fenômeno de interesse, ou tema geral da pesquisa, contempla a curiosidade inicial do pesquisador, ou seja, o interesse que o levou a propor e investigar determinado tema. O fenômeno de interesse pode estar ligado à formação do pesquisador ou mesmo à sua trajetória profissional.

No caso de nossa pesquisa, o fenômeno de interesse é constituído pela experiência de quatro anos na Unipampa como professora da disciplina de Cálculo I, sendo possível identificar nesse período as deficiências nos conteúdos básicos de Matemática que os alunos ingressantes apresentavam, deficiências essas que definiram altos índices de evasão e

⁵ Neste caso, a intenção do pesquisador é sua vontade ou seu desejo de trabalhar com determinado assunto. Consideramos que o pesquisador carregue essa intenção ao determinar o seu fenômeno de interesse. Desta forma, o pesquisador não é isento de suas experiências.

reprovação em Matemática dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharia da Unipampa – *Campus Alegrete*.

Percebendo tais dificuldades e com o intuito de tentar minimizar essa situação de reprovações iminentes, nos anos de 2007 a 2009, foram ofertados aos alunos do *Campus Alegrete* cursos de Nivelamento em Matemática nos quais a pesquisadora participou efetivamente.

Após três anos desta atividade, apesar de resultados iniciais satisfatórios, devemos considerar que os índices de reprovação por nota e frequência ainda permaneceram muito elevados.

Considerando nossos esforços, entendemos que a metodologia utilizada, com foco no ensino tradicional e apostilado, pode ter sido um percalço para os alunos; e, motivados pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, entendemos que a necessidade de investigação e busca, por respostas ao problema inicial, definiu nosso fenômeno de interesse como sendo:

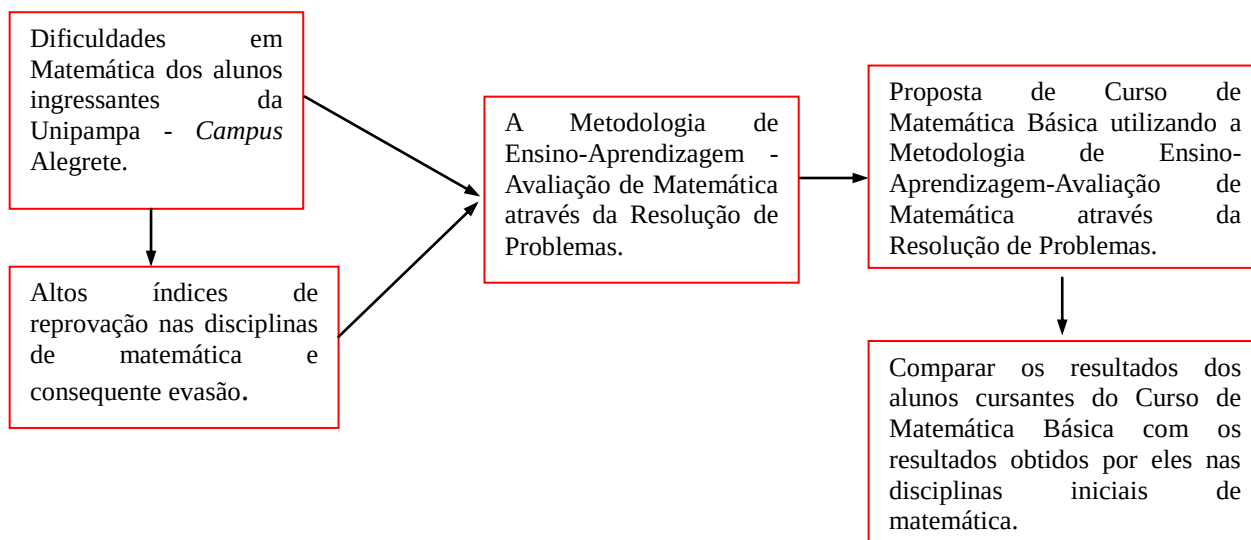
Um Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas.

II. Modelo Preliminar

O modelo preliminar funciona como um guia para o pesquisador no desenvolvimento da pesquisa, podendo sofrer alterações de acordo com os avanços da mesma.

Um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como as variáveis do fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados, depois os ilustra em um modelo (ROMBERG, 2007, p. 99).

O modelo preliminar consiste num fluxograma onde se indicam as variáveis componentes do fenômeno de interesse e as implicações entre elas. O modelo preliminar é pensado pelo pesquisador quando inicia sua pesquisa e, pode apresentar ainda, poucas informações para o seu desenvolvimento. Do modelo preliminar, o pesquisador, escreve uma primeira pergunta que poderá ajudá-lo a identificar as variáveis-chave importantes que deverão ser investigadas. Para esta pesquisa apresentamos o modelo preliminar a seguir:

Figura 3 – Modelo preliminar da Pesquisa

Fonte: Elaborado pela autora.

Mediante nosso modelo preliminar, criado para esta pesquisa, originou-se uma primeira pergunta que busca atender a contento o fenômeno de interesse e o próprio modelo criado pela pesquisadora.

É possível um Curso de Matemática Básica, utilizando-se da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, auxiliar os alunos ingressantes no ensino superior a revisar conceitos e conhecimentos básicos de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio?

III. Relacionar com ideias de outros

Segundo Romberg, para a fundamentação teórica devemos nos relacionar com “outros pesquisadores”. Em sua terceira atividade, Romberg afirma:

Uma atividade importante é examinar o que outras pessoas pensam sobre o fenômeno e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto. (...) Para fazer isso, o pesquisador deve reconhecer que cada investigador é um membro de um particular grupo de pesquisa que tem defendido uma determinada “visão de mundo”. Se alguém busca examinar a contribuição potencial das ideias de outros, deve relacionar aquelas ideias a uma particular visão de mundo (ROMBERG, 2007, p. 100).

O pesquisador deve estar a par de pesquisas já desenvolvidas, ou que estão em desenvolvimento, relacionadas ao seu tema de trabalho. Conhecendo o que outros pesquisadores pensam, suas ideias e concepções teóricas, ele terá subsídios para preencher eventuais lacunas de pesquisa e saberá como tais ideias e concepções podem ampliar, explicar ou modificar o seu modelo preliminar.

De acordo com nosso Modelo Preliminar, identificamos a necessidade de nos aprofundarmos em três temas que nele nos parecem surgir fortemente: os **Cursos de Matemática Básica** para alunos ingressantes na graduação, pois esse é o caminho que estamos trilhando desde o início das atividades na Unipampa, e no qual acreditamos. Desta forma, iremos investigar a existência de outros cursos no país; a **Resolução de Problemas no Ensino Superior**, já que a resolução de problemas é a forma que escolhemos para o curso pretendido e, em particular, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e **A Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior**, pois sabemos que a Matemática é cumulativa e que os conteúdos trabalhados durante a Educação Básica são a base para a construção dos conceitos necessários às disciplinas iniciais. Sendo assim, procuraremos estabelecer os conteúdos que consideramos importantes para a realização do novo Curso de Matemática Básica.

Devemos considerar que tais temas foram percebidos e destacados pela pesquisadora no seu modelo preliminar que, se fosse descrito ou visto por outro pesquisador, poderia ter outro caminho a ser seguido, outros temas definidos e poderia, até mesmo, definir uma outra pesquisa.

Desta forma, iremos realizar uma investigação a respeito desses três temas. Seguindo o Modelo de Romberg, iremos reunir ideias e contribuições, de outros autores ou outras obras, tomadas livremente, a fim de pesquisar mais profundamente nosso fenômeno de interesse e definir nosso problema da pesquisa. Vale lembrar que, nesse momento, ouviremos a voz de outros autores, sendo que nossa voz não deverá aparecer a menos da escolha dos autores e seus textos.

Após esse estudo, retomaremos o Modelo de Romberg a fim de estruturar nossa pesquisa e, assim, se necessário, efetuar modificações no modelo preliminar.

Apresentamos a seguir, na forma de capítulos os três temas acima citados:

Capítulo II – Resolução de Problemas e o Ensino Superior;

Capítulo III – A Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior;

Capítulo IV – Cursos de Matemática Básica.

CAPÍTULO II

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO SUPERIOR

[...] não existe método de ensino que seja indiscutivelmente o melhor, como não existe a melhor interpretação de uma sonata de Beethoven.

GEORGE POLYA (1887 – 1985)

Neste capítulo nos propusemos a estudar as relações entre a Resolução de Problemas e algumas pesquisas realizadas, nesse contexto, no Ensino Superior. Para melhor estruturar o capítulo, inicialmente faremos um breve estudo sobre a Resolução de Problemas, sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e, posteriormente, um levantamento de trabalhos já realizados pelo GTERP com essa metodologia e que possuem enfoque no Ensino Superior.

2.1 Resolução de Problemas

Resolver problemas faz parte do cotidiano do ser humano desde os primórdios da civilização. A história da humanidade mostra que os seres humanos sempre estiveram motivados a explorar e resolver problemas não somente de natureza matemática, mas, também, problemas da vida cotidiana.

Para George Polya (1985, p. 13),

Temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo. Quando temos um desejo que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos nos meios de satisfazê-lo e assim se põe um problema. A maior parte da nossa atividade pensante, que não seja simplesmente sonhar acordado, se ocupa daquilo que desejamos e dos meios para obtê-lo, isto é, de problemas.

O matemático David Hilbert em seu discurso para a o 2º Congresso Internacional de Matemáticos – Paris (1900) – enfatiza a importância dos problemas no contexto da Matemática:

Um problema matemático que nos estimule, que não ultrapasse nosso esforço e que não seja totalmente inacessível está longe de ser difícil. Este problema é para nós um sinal de que existe um atalho para se chegar às verdades ocultas, pois a alegria que ele nos oferece através de sua resolução é compensadora (HILBERT, 2003, p. 6).

Até meados do século XX, os problemas aparecem com frequência nos currículos de matemática, porém a resolução de problemas ainda não aparece como uma forma de pensar e ensinar matemática.

Para Stanic e Kilpatrick (1989, p. 1)

Os problemas ocupam um lugar central nos currículos desde a Antiguidade, mas a resolução de problemas não. Só recentemente apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece especial atenção.

Nesse contexto, questionamos: **o que é um problema matemático⁶?**

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 41):

Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução.

Segundo Hiebert (1997),

Um problema é definido aqui como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método “correto” específico de solução (Apud VAN de WALLE, 2009, p. 57).

Para Dante (2009, p. 11), “De maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo”.

Segundo Lester (1982 apud DANTE, 2009, p.11) uma definição aceita pelos educadores matemáticos é que “problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”.

Podemos considerar que uma dada situação é um problema, quando apresenta ao indivíduo alguma dificuldade que o faça pensar e refletir sobre quais caminhos de resolução deva tomar para obter uma solução.

Sintetizando as ideias anteriores, Onuchic (1999, p. 215) define que **“problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver”**.

⁶ As respostas às perguntas: O que é um problema? e O que é um problema matemático? podem ser pensadas diferentemente. A primeira, mais genérica, depende de qualquer atividade humana a que se deseja obter uma solução. Porém a segunda, deve-se ao fato de considerarmos a necessidade que seja definida por regras e hipóteses matemáticas utilizadas para se obter uma solução a um determinado problema.

De fato, há um aspecto subjetivo na definição de problema. Porém, é necessário considerarmos que, de acordo com Vianna (2002, p.2), “[] cada problema é colocado em uma situação determinada, há um lado objetivo que consiste exatamente nessa circunstância. Em sala de aula, cabe ao professor planejar e deflagrar as ações de modo que essas circunstâncias se tornem problemáticas para seus alunos”.

Problemas são trabalhados em livros texto de Matemática dos séculos XIX e XX de forma muito semelhante aos problemas propostos na Antiguidade. Muitos autores ainda mantêm tal forma de apresentação dos problemas. Para Stanic e Kilpatrick (1989, p. 4) a maioria dos exemplos encontrados nos livros de matemática, tem uma visão muito estreita da aprendizagem matemática, pois “Até muito recentemente, ensinar a resolução de problemas significava apresentar problemas e talvez, incluir um exemplo de uma solução técnica específica”.

No final da década de 1980, segundo Andrade (1998, p. 12), “A resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática”.

No livro “Princípios e Normas para a Matemática Escolar”, encontramos uma definição para a resolução de problemas de forma geral:

A resolução de problemas implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. Para encontrar a solução, os alunos deverão explorar os seus conhecimentos e através deste processo desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos. A resolução de problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática (NCTM, 2008, p. 57).

Tal forma de definir a resolução de problemas somente aparece no cenário mundial após algumas mudanças importantes no ensino da Matemática.

2.1.1 Mudanças no ensino da Matemática

Segundo Onuchic (1999), o ensino da matemática passou por vários movimentos durante o último século, sendo que, a cada mudança, foram abandonados os movimentos anteriores de ensino.

No início do século XX, o ensino de matemática foi marcado pela ideia de repetição, sendo a memorização das tabuadas um fato determinante. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Avaliava-se o aluno através de testes nos quais ele deveria repetir o que o professor havia ensinado.

Posterior a esse movimento, cresceu a ideia que os alunos deveriam aprender matemática com compreensão, sendo que a memorização já não era permitida e o aluno deveria entender o que estava estudando. Como os professores não estavam preparados para trabalhar com essas ideias, a sala de aula era um treinamento de técnicas operatórias que eram aplicadas em problemas-padrão para aprender novos conteúdos (ONUChic, 1999, p. 201).

Teve início, na década de 70 do século passado, o movimento da Matemática Moderna, onde o aluno deveria conhecer a matemática das estruturas algébricas e da teoria dos conjuntos, com ênfase na linguagem própria da matemática. Era um ensino que focava muito na formalização, sendo que professores e alunos não conseguiam perceber a importância dessa matemática no dia-a-dia. Segundo Onuchic (1999, p. 203) “Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões práticas”.

Passamos então para o ensino da resolução de problemas. Esta proposta teve seu impulso pelos trabalhos de George Polya e posteriormente foi apoiada e difundida pelo NCTM⁷ (*National Council of Teachers of Mathematics*) através do documento *An Agenda for Action*⁸ (NCTM, 1980). Esse documento enfatiza que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar para a década de 1980.

O movimento a favor do ensino de resolução de problemas teve impulso no início dos anos 80 do século passado. Em particular, estudos a esse respeito, com ênfase nos documentos publicados pelo NCTM e nas discussões decorrentes, podem ser encontrados, no Brasil, em Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004), Allevato (2005), Huanca (2006), Ribeiro (2010) e Souza (2010). Há ainda trabalhos de relevância internacional como os de Schroeder e Lester (1989) e Stanic e Kilpatrick (1989) que são referências para os trabalhos realizados pelos membros do GTERP.

Durante essa década, a resolução de problemas como foco da matemática foi trabalhada de diferentes formas pelos professores, porém esse trabalho não obteve bons resultados devido à falta de concordância entre eles nas diferentes concepções de como deveria ser utilizada a resolução de problemas sendo ela o foco da matemática escolar na década de 80 (ONUChic, 1999).

Schroeder e Lester (1989, p. 31) apresentam três maneiras de abordar a resolução de problemas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar através da resolução de problemas.

⁷ NCTM – Conselho Nacional de Professores de Matemática – EUA.

⁸ Uma Agenda para a Ação.

I. Ensinar sobre resolução de problemas:

Para ensinar sobre resolução de problemas, deve-se teorizar sobre o assunto. O professor que ensina sobre resolução de problemas realça o modelo de Resolução de Problemas de Polya (1994), focado nas quatro fases descritas pelo autor em *How to solve it*⁹: compreender o problema; estabelecer um plano; executar o plano; e fazer um retrospecto a fim de validar a solução encontrada.

II. Ensinar para resolver problemas:

Ao ensinar para resolver problemas, o professor deve concentrar-se nas formas como a matemática é ensinada e como pode ser aplicada. Devem-se evidenciar estratégias e usar o conhecimento adquirido pelo aluno anteriormente na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. É importante saber usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas.

III. Ensinar através da resolução de problemas:

Para ensinar através da resolução de problemas o professor utiliza um problema como ponto de partida e um meio para ensinar matemática. Nesse caso, temos a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. Nessa abordagem o objetivo primeiro é apresentar para os alunos problemas que gerarão novos conceitos ou conteúdos. Segundo Nunes (2010, p. 85),

[...] a expressão “através de” é uma forma de ensinar e, consequentemente, aprender e, durante o processo, fazer matemática, pois o aluno diante do problema deve se mostrar como um coconstrutor do seu próprio conhecimento.

Segundo Onuchic e Allevato (2004, p. 221),

Ensinar matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que a mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase do “durante”, os alunos trabalham e o professor observa e avalia o trabalho. Na terceira, “depois”, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-los e conduz a discussão enquanto os alunos justificam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos.

⁹ Traduzido para o português como A arte de resolver problemas.

Entendemos que as três maneiras de abordar a resolução de problemas, como ressaltam Schroeder e Lester (apud ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 216), possam ser vistas separadas, porém elas também podem acontecer através de várias combinações, inclusive todas juntas.

2.1.2 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Esta metodologia começa a ser estudada mais profundamente pelo GTERP, vinculado ao Programa de Pós-graduação da Unesp/ RC, com a orientação de trabalhos de mestrado e doutorado pela Prof.^a Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic.

A partir desses trabalhos desenvolvidos, foi possível fundamentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas:

Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário. Chamamos a esse processo de trabalho de uma forma Pós-Polya de ver a resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possibilita ligar os conhecimentos prévios à solução procurada para o problema e aos novos conhecimentos a serem construídos, já que, nesse processo, o aluno utiliza os conhecimentos anteriores que possui e o professor, o auxilia a construir, a partir desse, novos conhecimentos relacionados ao problema proposto. Ocorre uma investigação do padrão e da ordem, que são características da Matemática. Ao investigar, é possível utilizar-se de desenhos, jogos, tecnologia, esquemas, tabelas, gráficos, entre outros recursos, o que torna essa metodologia bastante abrangente.

Devemos considerar ainda que ensinar matemática através da resolução de problemas “[...] é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM e dos PCNs¹⁰, pois conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto da resolução de problemas”. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 222).

¹⁰ Parâmetros Curriculares Nacionais – MEC – Brasil.

Onuchic e Allevato (2011, p. 83) apresentam uma versão de roteiro para a utilização em sala de aula usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Este roteiro tem por finalidade ajudar professores e alunos na organização de uma aula nesta metodologia:

- 1) Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
- 2) Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
- 3) Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
 - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
 - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
- 4) Resolução do problema – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como coconstrutores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
- 5) Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
 - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
- 6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Van de Walle (2009), em seu livro ‘Matemática no Ensino Fundamental – Formação de professores e Aplicação em sala de aula’ considera a resolução de problemas como o foco do currículo de Matemática e diz que o ensino de Matemática através da resolução de problemas deve ser visto como a principal estratégia de ensino. Além disso, o autor chama a atenção para que o trabalho de ensinar comece sempre focando nos alunos, ao contrário da forma tradicional em que o ensino começa onde estão os professores.

Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessariamente e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

A Metodologia de Ensino – Aprendizagem – Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é a forma escolhida por nós para o desenvolvimento desta proposta de doutorado.

2.2 A Resolução de Problemas no Ensino Superior

Até poucos anos atrás, os trabalhos realizados na Educação Matemática tinham como objeto de pesquisa os Ensinos Fundamental e Médio, porém esta realidade vem mudando nos últimos anos com o crescente interesse dos pesquisadores em compreender e investigar o Ensino Superior.

A Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, a partir do ano 2000, instituiu um grupo de trabalho intitulado “Grupo de Educação Matemática no Ensino Superior – GT4”, que aponta um crescimento das pesquisas referentes a esse segmento de ensino.

Segundo Nasser (2004, p. 2),

Uma preocupação comum a todas as pesquisas é a de que os resultados cheguem à sala de aula, isto é, de que causem interferência real no processo ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Superior.

Pinto (2002, p. 224) esclarece que a pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior é recente também no mundo:

Internacionalmente, a pesquisa nesse nível de ensino também se consolidou mais tarde: a partir da década de 80, com a constituição do grupo (Advanced Mathematical Thinking Group¹¹) durante encontro anual do International Group for the Psychology of Mathematics Education¹².

De acordo com Palis (2005, p. 4),

A relevância da pesquisa no ensino universitário inicial foi apontada no relatório de Selden e Selden (1999) na qual estes autores mencionam que na plenária da reunião do ICMI (International Commission on Mathematical Instruction¹³) sobre o tema “The Teaching and Learning of Mathematics at University Level¹⁴”, realizada em 1998, o matemático e educador Hyman Bass apontou quatro áreas da educação matemática que necessitam decisivamente de pesquisa sistemática, defendendo que uma delas é a transição ensino médio/ensino superior. Por outro lado, Selden e Selden chamam a atenção para a necessidade de dirigir parte da pesquisa na área de educação matemática universitária para a geração de conhecimentos pedagógico-disciplinares relativos ao ensino superior. Este conhecimento é ainda raro e pouco documentado.

Segundo Pinto (2002), as pesquisas em Educação Matemática têm buscado “elaborar, experimentar e avaliar alternativas para o bom trabalho em sala de aula, bem como, já menos restrito ao espaço da sala de aula, discutir eventuais inadequações em currículos, programas, enfoques e textos trabalhados nos cursos”.

Pesquisas sobre o currículo de matemática apontam que a resolução de problemas seria um caminho de aquisição para novos conhecimentos. Desta forma, a busca de soluções para problemas propostos não é o principal papel da resolução de problemas e, sim, a compreensão, que deve ser o principal objetivo do ensino, uma forma de adquirir um novo conhecimento ou um processo no qual pode ser aplicado tudo aquilo que previamente havia sido construído. (ONUICHIC, 1999).

¹¹ Grupo de Pensamento Matemático Avançado.

¹² Grupo Internacional para Psicologia da Educação Matemática.

¹³ Comissão Internacional de Ensino de Matemática.

¹⁴ O Ensino e aprendizagem da Matemática no Nível Universitário.

A pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior que utiliza a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, é ainda mais recente e possui poucos trabalhos acadêmicos finalizados no Brasil. Os seguintes trabalhos, elencados abaixo, foram desenvolvidos relacionando a Resolução de Problemas e o Ensino Superior por membros do GTERP/Unesp –RC:

- 1) Uma proposta de mudança, na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de “ensino de matemática via resolução de problemas” – Dissertação de Mestrado - Livia Lopes Azevedo /1998.
- 2) A introdução da disciplina “Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de problemas” no Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie – Dissertação de Mestrado – Maria Lúcia Boero/ 1999.
- 3) Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações, no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista - Unip – Tese de Doutorado – Walter Paulette/2003.
- 4) Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência – Tese de Doutorado – Norma Suely Gomes Allevato /2005.
- 5) O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática – Tese de Doutorado – Célia Barros Nunes / 2010.
- 6) O Ensino do Conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da resolução de problemas – Dissertação de Mestrado – Marcos Vinícius Ribeiro /2010.

Fora os trabalhos realizados pelo GTERP, procuramos também verificar trabalhos realizados com este tema em outras instituições do país, através do Banco de Teses – Capes¹⁵, com o intuito de garantir a originalidade da tese e, também, aumentar nosso horizonte de pesquisas e referências. Não encontramos nenhum trabalho que verse sobre o assunto por nós escolhido, o que garante sua originalidade. A falta de pesquisas concluídas, que abordem a transição da Educação Básica para o Ensino Superior considerando a Resolução de Problemas como forma de trabalho, é notória.

¹⁵ Disponível em: <<http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/>> Acesso em: 07 e 08 de agosto de 2013.

Além dos trabalhos citados acima, atualmente o GTERP possui cinco teses de doutoramento em fase de pesquisa, que relacionam a Resolução de Problemas e o Ensino Superior.

Portanto, o uso da Resolução de Problemas no Ensino Superior é o caminho escolhido neste trabalho para contribuir com a pesquisa na área de Educação Matemática, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na transição da Educação Básica para o Ensino Superior.

CAPÍTULO III

A MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA NECESSÁRIA PARA O ENSINO SUPERIOR

Qualquer grande avanço das Matemáticas e da Física é quase sempre obra conjunta de muitos homens, cada um dos quais contribui com seu grão de areia e o processo costuma durar centenas de anos.

MORRIS KLEIN (1908 – 1992)

Neste capítulo iremos estudar os documentos nacionais que norteiam os Ensinos Fundamental e Médio no âmbito da Matemática e, também, as diretrizes curriculares para os cursos de Engenharia. Avançando o estudo, passaremos nossa análise para a ementa e programa das disciplinas de Cálculo I e Geometria Analítica dos cursos de Engenharia da Universidade Federal do Pampa - Unipampa, a fim de relacionar e estabelecer, em nossa pesquisa, os conteúdos essenciais de Matemática do Ensino Básico para um bom andamento das disciplinas matemáticas dos cursos de graduação em Engenharia.

3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs

Os Parâmetros Curriculares Nacionais são os documentos que orientam os Ensinos Fundamental e Médio no Brasil e foram criados em consonância com a LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1996, nº. 9.394/96).

O primeiro documento apresentado, no ano de 1997, foram os PCN que correspondem ao primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental, atualmente do 1º ao 5º ano. Em 1998, foram apresentados os PCN para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – atualmente do 6º ao 9º ano. Os PCN para o Ensino Médio foram apresentados no ano de 2000.

Os PCNs não surgiram com o intuito de fornecer um currículo para cada uma das áreas de ensino e, sim, como uma orientação para as escolas na elaboração do seu programa curricular.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, referenciais para a renovação e reelaboração da proposta curricular, reforçam a importância de que cada escola formule seu projeto educacional, compartilhado por toda a equipe, para que a melhoria da qualidade da educação resulte da corresponsabilidade entre todos os educadores. A forma mais eficaz de elaboração e desenvolvimento de projetos

educacionais envolve o debate em grupo e no local de trabalho (BRASIL, 1998, L1, p. 9).

Estamos interessados, neste trabalho, nos PCNs do Ensino Fundamental II – 3º e 4º ciclos - e Ensino Médio que apresentam as finalidades do ensino de Matemática. Os PCN para o Ensino Fundamental II estão organizados em 10 volumes distribuídos em: Introdução aos PCN, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, Geografia, História, Arte, Educação Física, Língua Estrangeira e Temas Transversais – subdividido em cinco partes. Em relação à Matemática:

Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 15).

Os conteúdos de matemática para o Ensino Fundamental estão organizados em quatro blocos: Números e operações (Aritmética e Álgebra), Espaço e forma (Geometria), Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria) e Tratamento da informação (Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade).

De acordo com a LDB, artigo 32:

O ensino fundamental, com duração mínima de oito anos, obrigatório e gratuito na escola pública, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante:

- I - o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
- II - a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
- III - o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores;
- IV - o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental II, as finalidades do ensino de Matemática visando à construção da cidadania indicam como objetivos para Ensino Fundamental levar o aluno a:

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;

- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Os PCN para o Ensino Médio estão organizados em quatro partes: Parte I – Bases Legais, Parte II – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Parte IV – Ciências Humanas e suas Tecnologias.

De acordo com os PCN,

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2000, p. 40).

Os conteúdos devem estar organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, “Isso não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles” (BRASIL, 2006, p. 70).

De acordo com a LDB, artigo 35:

O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Para isso é importante considerar que, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000, p. 42), a finalidade do ensino de matemática indica como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

De forma geral, a finalidade da Educação Básica é “[...] desenvolver o educando, assegurando-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.” (BRASIL, 1996, Art. 22).

Sendo assim, legalmente, o aluno egresso da Educação Básica estará apto a ingressar no sistema de Ensino Superior.

3.2 Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Engenharia

As diretrizes curriculares para os cursos de Engenharia são um documento nacional, aprovado pelo CNE - Conselho Nacional de Educação em 11 de março de 2002 e disponível na página do Ministério da Educação – MEC¹⁶.

Segundo o documento,

O desafio que se apresenta o ensino de engenharia no Brasil é um cenário mundial que demanda uso intensivo da ciência e tecnologia e exige profissionais altamente qualificados. O próprio conceito de qualificação profissional vem se alterando, com a presença cada vez maior de componentes associadas às capacidades de coordenar informações, interagir com pessoas, interpretar de maneira dinâmica a realidade. O novo engenheiro deve ser capaz de propor soluções que sejam não apenas tecnicamente corretas, ele deve ter a ambição de considerar os problemas em sua totalidade, em sua inserção numa cadeia de causas e efeitos de múltiplas dimensões (BRASIL, 2002, p. 01).

Além disso, o documento salienta que “o aprendizado só se consolida se o estudante desempenhar um papel ativo de construir o seu próprio conhecimento e experiência, com orientação e participação do professor” (BRASIL, 2002, p. 02).

Nas diretrizes curriculares, encontramos: perfil dos egressos, competências e habilidades, estrutura do curso, conteúdos curriculares e estágios. Dentre estes seis itens, iremos nos ater às competências e habilidades e aos conteúdos curriculares, já que esses são fundamentais para o nosso objeto de estudo.

De acordo com o documento, os cursos deverão dar condições a seus egressos para adquirir competências e habilidades para:

- a) **aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;**
- b) projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;
- c) conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos;
- d) planejar, supervisionar, elaborar e coordenar projetos e serviços de engenharia;
- e) identificar, formular e resolver problemas de engenharia;
- f) desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas;
- g) supervisionar a operação e a manutenção de sistemas;
- h) avaliar criticamente a operação e a manutenção de sistemas;
- i) comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica;
- j) atuar em equipes multidisciplinares;
- k) compreender e aplicar a ética e responsabilidade profissionais;

¹⁶ Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1362.pdf>> Acesso em: 24 de maio de 2012.

- l) avaliar o impacto das atividades da engenharia no contexto social e ambiental;
- m) avaliar a viabilidade econômica de projetos de engenharia;
- n) assumir a postura de permanente busca de atualização profissional.

O documento salienta que **o núcleo de conteúdos básicos, cerca de 30% da carga horária mínima**, versará sobre os seguintes tópicos: Metodologia Científica e Tecnológica, Comunicação e Expressão, Informática, Expressão Gráfica, **Matemática**, Física, Fenômenos de Transporte, Mecânica dos Sólidos, Eletricidade Aplicada, Química, Ciência e Tecnologia dos Materiais, Administração, Economia, Ciências do Ambiente, Humanidades, Ciências Sociais e Cidadania.

O núcleo de conteúdos profissionalizantes, cerca de 15% de carga horária mínima, deverá abarcar um subconjunto de determinados tópicos, a ser definido pelas IES - Instituições de Ensino Superior, descritos nos documentos em questão.

É importante lembrar que esta diretriz curricular deve ser obedecida por todo e qualquer curso de Engenharia, em qualquer especificidade, sendo que os professores dos referidos cursos devem organizar cada um deles de acordo com as suas necessidades.

Todo o curso de Engenharia, independente de sua modalidade, deve possuir em seu currículo um núcleo de conteúdos básicos, um núcleo de conteúdos profissionalizantes e um núcleo de conteúdos específicos que caracterizem a modalidade (BRASIL, 2002, p. 5).

De acordo com as diretrizes curriculares, cada IES organiza os conteúdos que julga necessários para cada tópico de conteúdos básicos e profissionalizantes. Como nosso estudo está embasado nos cursos de Engenharia da Universidade Federal do Pampa, descrevemos abaixo as disciplinas, semestres e respectivas cargas horárias das disciplinas de matemática ofertadas aos Cursos de Engenharia.

3.3 Os Cursos de Engenharia da Unipampa – *Campus Alegrete*

A Unipampa possui ingresso anual de turmas de Engenharia, cuja seleção é realizada através do Exame Nacional do Ensino Médio. Ingressam em cada curso de graduação 50 alunos a cada ano letivo. As disciplinas são organizadas por semestres e possuem pré-requisitos entre elas.

Os cursos ofertados pela Unipampa que possuem disciplinas de matemática são organizados de acordo com um núcleo básico comum a toda a universidade, como segue:

Tabela 1 – Núcleo Básico de Matemática

Disciplina	Carga Horária	Semestre
Geometria Analítica	60 horas	1º semestre
Cálculo I	60 horas	1º semestre
Álgebra Linear	60 horas	2º semestre
Cálculo II	60 horas	2º semestre
Cálculo III	60 horas	3º semestre
Equações Diferenciais I	60 horas	3º semestre
Cálculo Numérico	60 horas	4º semestre
Equações Diferenciais II	60 horas	4º semestre

Nosso objeto de pesquisa constitui-se em um Curso de Matemática Básica preparatório para o acompanhamento das disciplinas iniciais de graduação. Sabemos que a matemática tem caráter cumulativo e, portanto, deve também influenciar os alunos nas demais disciplinas de matemática da graduação, o que não se constitui foco principal deste trabalho, podendo ser analisado em trabalhos posteriores.

No Anexo A apresentamos a ementa e o programa para as disciplinas de Cálculo I e Geometria Analítica que são cursadas no primeiro semestre letivo na Unipampa.

3.4 Relacionando os conteúdos da transição da Educação Básica para o Ensino Superior

Entendemos que considerar os objetivos definidos pelos PCNs, para os Ensinos Fundamental e Médio, juntamente com a análise das Diretrizes Curriculares para os cursos de Engenharia, são fatores importantes para que possamos encontrar relações de conteúdos matemáticos que liguem os dois níveis de ensino, a Educação Básica e o Ensino Superior.

Considerando que, de acordo com a LDB, o aluno egresso da Educação Básica está apto a ingressar no Ensino Superior, questionamos a razão de os referidos alunos apresentarem, em sua maioria, grande dificuldade em ultrapassar a barreira dos anos iniciais devido à deficiência nos conceitos básicos de matemática.

Sabe-se também, que o altíssimo índice de reprovação, nas disciplinas de primeiro semestre dos cursos de ciências exatas e tecnologia, é um entrave para estes alunos, e motivo de evasão. Este é um cenário conhecido nacionalmente e, de acordo com Cury (2007, p. 72):

No Ensino Superior, atualmente, sabe-se que se vai trabalhar com muitos estudantes

que apresentam dificuldades em Matemática por variadas razões que, no momento, não cabe discutir. Mas é para esses alunos que se vão elaborar atividades de ensino, e é sua aprendizagem nas disciplinas matemáticas dos cursos superiores que será avaliada.

É também uma das preocupações do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), a dificuldade dos alunos que chegam ao Ensino Superior com deficiências na matemática dos Ensinos Fundamental e Médio.

De acordo com Nasser, Freire e Cardador (2008, p. 01),

O número de alunos ingressantes do ensino superior que trazem lacunas de aprendizagem em diversas áreas do conhecimento em sua formação básica vem aumentando ano a ano. Pesquisas apontam a matemática como uma das áreas de maior defasagem de formação.

Esta realidade tem gerado recentemente pesquisas que abordam a transição da Educação Básica para o Ensino Superior em diversas áreas, inclusive na matemática. De acordo com Fagundes,

...[] a problemática da transição ensino médio – Educação Superior é hoje fenômeno de preocupação e um tema de debate. Entre os objetivos pendentes dessa questão está a própria otimização dos sistemas educativos. O estudo das transições acadêmicas, mais especificamente o estudo da transição à Educação Superior – análise que contempla o processo educativo e os diversos aspectos que permeiam a qualidade da educação – trata de qualificar a ação educativa (FAGUNDES, 2012, p. 62).

A autora salienta ainda que podemos definir o conceito de transição como “um processo de transformação que implica uma descontinuidade na trajetória vital, aspecto que condiciona uma mudança de conduta, de papéis e/ou de entorno que é mediada por fatores institucionais e sociais” (FAGUNDES, 2012, p. 64).

Desta forma a transição da Educação Básica para o Ensino Superior depende de condições de adaptação do sujeito ao novo nível de ensino, além da necessidade de conhecer quais conteúdos ele carrega como bagagem de um nível para o outro. A análise dos conteúdos necessários faz parte desta adaptação e é um dos elementos importantes para que o sujeito consiga fazer a transição.

A transição pode ser considerada completa quando ocorre a adaptação dos alunos ao novo nível educativo, sendo o desempenho acadêmico um indicador de êxito do processo de transição para a Educação Superior. (FAGUNDES, 2012, p. 67)

O período definido como ‘transição’, em geral, abarca os dois primeiros semestres letivos, como afirma Fagundes:

A transição acadêmica é concebida como o processo iniciado pelos estudantes com a escolha de uma trajetória acadêmica e de um futuro campo profissional durante os

estudos de Ensino Médio, e que culmina na superação dos dois primeiros semestres de estudos universitários. (FAGUNDES, 2012, p. 71)

As transições acadêmicas que estão mais documentadas no Brasil são as que ocorrem da Educação Infantil para o Ensino Fundamental e do Ensino Fundamental para o Ensino Médio, por serem objeto de pesquisa nos cursos de licenciatura das diversas áreas.

Para as transições que envolvem a Educação Básica e o Ensino Superior muito ainda deve ser pesquisado, e as pesquisas mais divulgadas em Matemática relacionam o Ensino Médio à disciplina de Cálculo I no Ensino Superior.

As lacunas de aprendizagem, que os alunos apresentam ao ingressarem no Ensino Superior, são uma realidade que se mostra cada vez mais comum nas IES no Brasil e têm gerado Cursos de Nivelamento e a publicação de diversos livros de Pré-Cálculo, com o intuito de auxiliar os professores universitários a revisar, com seus alunos, os conceitos básicos de matemática.

Dentre os livros disponíveis no mercado, escolhemos três livros de Pré-Cálculo com o propósito de verificar quais os conteúdos considerados, pelos autores, importantes para os alunos que ingressam nos cursos das ciências exatas e tecnologia. Nossa ideia é verificar algumas bibliografias da transição da Educação Básica para o Ensino Superior, a fim de estabelecer quais conteúdos serão por nós trabalhados. Para isso, escolhemos três livros que versam sobre esse tema, a saber, Pré –Cálculo - Paulo Boulos, Teoria e Problemas de Pré-Cálculo - Fred Safier - Coleção Schaum, e Precalculus with Limits – A graphing approach – Ron Larson, Robert P. Hostetler e Bruce H. Edwards. Os conteúdos, que encontramos nos referidos livros, reportam-se basicamente aos conceitos matemáticos do Ensino Médio e dão ênfase aos conceitos preliminares abordados nos cursos de Cálculo I e algumas noções de Geometria Analítica.

Além disso, escolhemos alguns livros de Matemática, dos Ensinos Fundamental e Médio, para verificar o elenco de conteúdos estudados nesses níveis de ensino (Coleção Matemática na medida certa e Coleção Matemática: Ideias e Desafios – Ensino Fundamental; Coleção Matemática: Ciência e Aplicações e Coleção Matemática – Ensino Médio). Da mesma forma, escolhemos alguns livros de Cálculo e de Geometria Analítica, que constam nas ementas das disciplinas na Unipampa, para verificar quais conteúdos necessitam de conceitos básicos de matemática, a saber, Cálculo (Cálculo – um novo horizonte, Cálculo A, Cálculo com geometria analítica, O Cálculo com geometria analítica); Geometria Analítica (Vetores e Geometria Analítica, Geometria Analítica).

Considerando os livros escolhidos dos Ensinos Fundamental e Médio, de Pré-Cálculo, de Cálculo e de Geometria Analítica e, também, a ementa da disciplina de Matemática Básica, julgamos possível elaborar um elenco de conteúdos para o Curso de Matemática Básica.

É importante salientar que, neste trabalho, procuraremos abordar conceitos que tratem da matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e não nos ateremos aos conceitos iniciais do Cálculo e da Geometria Analítica, pois estamos preocupados em oferecer, aos alunos ingressantes, uma forma de construir ou reconstruir os conteúdos importantes já vistos na Educação Básica, preparando-os para as diversas disciplinas que fazem uso desses conteúdos na graduação.

CAPÍTULO IV

CURSOS DE MATEMÁTICA BÁSICA

There are no proofs in mathematics education.

HENRY POLLAK (1927 -)

Neste capítulo faremos um apanhado geral dos Cursos de Nivelamento em Matemática e de algumas pesquisas que estão sendo realizadas a esse respeito no Brasil. Num segundo momento, relataremos os Cursos de Matemática Básica já realizados na Unipampa, sua metodologia de trabalho e resultados obtidos.

4.1 Cursos de Matemática Básica – Panorama Geral¹⁷

Várias pesquisas nas áreas de Ensino de Matemática e da Educação Matemática têm mostrado que os estudantes que ingressam nos cursos superiores possuem deficiência nos conteúdos básicos de matemática. Em particular, estudos a respeito das dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo podem ser encontrados em Flemming e Luz (1999), Nascimento (2002), Cury (2005) e Nasser, Freire e Cardador (2008). Eles nos mostram que os problemas enfrentados no Ensino Superior são, na verdade, manifestações de falta de compreensão, pelos alunos, de conceitos matemáticos básicos, supostamente abordados nos Ensinos Fundamental e Médio.

Algumas pesquisas apontam que, para uma análise mais completa das reprovações e evasões no Ensino Superior, devem ser também considerados aspectos socioculturais e pessoais, que determinam, em muitos casos, o insucesso dos alunos.

De acordo com Boero e Silva (2006, p.2107),

O simples ingresso no Ensino Superior não garante o êxito educacional do estudante, pois as características deste nível de ensino são bem diferentes das características do Ensino Médio. Essa nova fase causa no aluno certa insegurança quanto à nova carreira e exige mudanças significativas de hábitos. A ocorrência de decepções, quanto às expectativas levantadas em relação à vida universitária, à estrutura e à metodologia do trabalho acadêmico e ao excesso de aulas teóricas nos

¹⁷ Neste tópico, utilizaremos livremente trechos do trabalho “*Cursos de Nivelamento como estratégia para a melhoria no rendimento do aluno nas disciplinas básicas de matemática dos cursos de graduação do Campus Alegrete*”, escrito e publicado pela pesquisadora e por Divane Marcon.

primeiros semestres acaba frustrando o aluno, apesar do pouco conhecimento em relação ao exercício da profissão.

Além disso, é necessário considerar que o sistema educacional brasileiro tem passado por mudanças, de acordo com Fagundes (2012, p.63),

O sistema de progressão automática na educação básica, a redução da exigência em todo o sistema educativo brasileiro entre outros problemas, estão levando às portas da universidade jovens que não só têm déficit de habilidades de aprendizagem, como também não adquiriram capacidades socioadaptativas, aspectos que, no seu conjunto, dificultam a adaptação ao novo ambiente educativo. Sendo assim, podemos afirmar que esse aumento de alunos que ingressam na Educação Superior vem acompanhado de desajustes de planificação, aspecto que influi no baixo desempenho dos estudantes, conduz ao abandono dos estudos e, consequentemente, gera um aumento dos gastos públicos com a Educação Superior, entre outros desajustes. Esses fenômenos acontecem por diferentes motivos, sejam socioeconômicos ou pessoais, dentre os quais se descreve uma insuficiente preparação acadêmica dos estudantes que ingressam nos diferentes cursos superiores. Tal panorama exige um planejamento de diversas questões relacionadas à qualidade no processo educativo brasileiro. Diante desse contexto, a problemática da transição Ensino Médio- Educação Superior é hoje um fenômeno de preocupação e um tema de debate (FAGUNDES, 2012, p. 63).

É preciso salientar, também, que assim como os alunos estão chegando ao Ensino Superior sem a mesma base matemática de alguns anos atrás, alguns professores não estão preparados para recebê-los de forma apropriada, pois em alguns casos, em particular na Engenharia, desconhecem a realidade dos alunos provenientes da Educação Básica.

Segundo Fonseca Bom (2003 apud Silva 2011, p.400),

[...] as organizações matemáticas que se estudam no ensino médio são pontuais, rígidas e pouco articuladas entre si e, além disso, existem múltiplas descontinuidades entre a matemática ‘mostrativa’ da educação básica e a matemática ‘demonstrativa’ da universidade.

Paralelamente, podemos considerar que as mudanças sofridas pelos cursos de Engenharia nas últimas décadas, principalmente na redução da carga horária das disciplinas consideradas do ciclo básico, também acarreta dificuldades de ensino. Os cursos tendem a se tornarem mais ‘enxutos’ e, como consequência, algumas disciplinas do ciclo básico foram excluídas das grades curriculares dando espaço para novas disciplinas específicas que devem atender as necessidades de cada curso. Essa é a realidade da Unipampa, que diminuiu as disciplinas do ciclo básico para atender a todas as áreas de atuação de cada curso perante o seu reconhecimento pelo MEC e também o credenciamento no CREA – Conselho Regional de Engenharia e Agronomia. Sendo assim, a Unipampa cumpre a carga horária mínima de disciplinas do ciclo básico, exigida pelas Diretrizes Curriculares Nacionais, para os cursos de Engenharia.

Além disso, estudos apontam que as aulas tradicionais, com muitas definições e longas listas de exercícios, pouco motivam os alunos a estudar os novos conceitos exigidos pelas disciplinas iniciais como, por exemplo, no Cálculo, limites, derivadas e integrais. Como sabemos, esses são conceitos estudados nos primeiros anos da graduação e a falta de motivação para estudá-los também se reflete nos índices de evasão e reprovação.

Segundo Kessler et al. (2011, p. 01), “o fenômeno da evasão ocorre de forma mais expressiva nos dois primeiros anos de curso, fato geralmente associado à falta de conhecimentos prévios por parte dos estudantes”.

Aos professores das disciplinas iniciais dos cursos de graduação, conhecendo as dificuldades dos alunos ingressantes e conhecendo os cursos iniciais, cabe perguntar como lidar com tais deficiências e conseguir a aprendizagem em suas disciplinas.

De acordo com Doering, Nácul e Doering (2004, p. 216),

Apesar dos esforços para tornar mais acessíveis os conteúdos das disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica, os professores repetidamente deparavam-se com a dificuldade dos estudantes, as quais remontavam ao Ensino Médio e, muitas vezes, ao Ensino Fundamental.

Devido à crescente reprovação dos alunos ingressantes, muitas IES - Instituições de Ensino Superior, particulares e públicas, têm se preocupado em ofertar a seus alunos cursos de matemática básica, buscando reduzir o crescente número de reprovações e evasões.

É possível, em uma pesquisa na internet, verificar que existem vários cursos de pré-cálculo e/ou nivelamento acontecendo nas IES, como por exemplo, FURG – Fundação Universidade do Rio Grande, UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UFPB – Universidade Federal da Paraíba, UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, UFF – Universidade Federal Fluminense, UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais, UFS – Universidade Federal de Sergipe, UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, dentre outras.

Entramos em contato, via e-mail, com as IES que apresentavam, em suas páginas na *web*, endereços eletrônicos de contato. Relataremos aqui os cursos das IES que responderam nosso email e com mais detalhes, ao longo do capítulo, os cursos desenvolvidos na UNISINOS e UFRGS.

Na UFPB, segundo o responsável, o curso é ofertado a todos os alunos interessados da universidade, porém é mais frequentado pelos alunos que estão matriculados na disciplina de Cálculo I e sentem necessidade de ajuda. O curso é ministrado por alunos bolsistas e algumas vezes foi encerrado prematuramente por falta de alunos. São trabalhados os seguintes

tópicos: Funções, Polinômios, Exponenciais e Logaritmos, Trigonometria, Geometria Plana, Geometria Analítica, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. São aceitos 20 alunos e o curso é semestral.

Na FURG, o curso vem sendo realizado desde 2010, sempre no início do semestre letivo, com aulas presenciais, com duração de 15 a 30 horas. O número de alunos varia entre 300 e 500 dependendo do número de professores envolvidos naquele ano. Segundo o responsável, de 8 a 15 professores estão envolvidos no projeto. São trabalhados os seguintes tópicos: Revisão de operações básicas, Expressões polinomiais, Domínio e Imagem de Funções, Funções lineares, quadráticas, modulares, polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e inversas. Estudo dos gráficos das funções acima citadas.

As demais IES não responderam os emails enviados.

Percebemos que os cursos ofertados possuem cargas horárias distintas, sendo que cada instituição oferece o curso de acordo com as suas necessidades de público, de estrutura física e de corpo docente.

Iremos detalhar aqui, os casos da UFRGS e UNISINOS por apresentarem materiais publicados sobre seus trabalhos, e diferentes condições de organização e resultados do curso. A UFRGS é uma instituição federal que possui vários cursos de graduação, sendo que todos os alunos matriculados podem utilizar o Pré-Cálculo; e a UNISINOS, instituição particular, que inicialmente teve um projeto pré-cálculo que necessitou reformas e hoje atende estudantes de matemática e de outras áreas.

Na UFRGS, a necessidade de implantação de um curso de Pré-cálculo foi sentida pelos professores. De acordo com Doering, Nácul e Doering (2004, p. 216),

Aos poucos foi tomando corpo a ideia de que deveríamos implementar ações visando a reduzir o desnível existente entre a bagagem de Matemática que o aluno traz do Ensino Médio e a que se necessita para um bom desempenho no Cálculo, o que acabou se concretizando no segundo semestre de 2002, quando foi oferecida a primeira edição do Curso de Extensão Pré-Cálculo.

No caso da UFRGS, o curso de Pré-Cálculo existe desde 2002 e faz parte do Programa Pró-Cálculo, um “movimento dos professores na direção de uma unificação total do ensino”, com as seguintes ações em conjunto: adoção de um único livro texto para todas as turmas de Cálculo I, elaboração de um cronograma único de atividades, horários de atendimento extraclasse por professores e monitores, unificação dos critérios de avaliação, unificação na aplicação das provas: todas as turmas de uma mesma faixa horária realizam a mesma prova, critérios de correção elaborados pela equipe de professores e a correção das provas de uma faixa de horário feita pelo mesmo professor (Doering, Nácul e Doering, 2004).

Especificamente, para o Pré-Cálculo da UFRGS, foi disponibilizada aos estudantes uma apostila elaborada pelos professores que posteriormente foi publicada na forma de livro, as aulas contaram com a utilização de tecnologias através do software MAPLE em que são trabalhadas visualizações e animações, a metodologia via Resolução de Problemas foi utilizada pelos professores para abordar o conteúdo matemático.

Segundo Doering, Nácul e Doering (2004), com esse programa de atendimento, o número de evadidos e reprovados em Cálculo I, na UFRGS tem diminuído.

Alguns cursos de pré-cálculo, de acordo com Nasser (2004, p. 4), não tiveram o resultado esperado e foram remodelados,

(...) como na UNISINOS (RS), o curso de Pré-Cálculo não surtiu efeito, e foram introduzidos módulos de tópicos de matemática básica, opcionais e concomitantes com a disciplina de Cálculo I, o que tem dado bons resultados.

De acordo com Kessler¹⁸, a mudança na Unisinos instituiu o projeto Ensino Propulsor, que se dedica à “construção de propostas de ensino para acadêmicos na Universidade, com vistas à diminuição dos seus índices de repetência continuada e de evasão.”

[...] o projeto Ensino Propulsor, destinado a impulsionar a aprendizagem dos acadêmicos mediante a oferta de novos instrumentos pedagógicos e do acompanhamento sistemático às dificuldades, ambos ajustados aos estilos e às condições de aprendizagem significativa (KESSLER, 2008, p. 02).

O projeto da Unisinos promove como ações: o acompanhamento presencial ou a distância do processo de aprendizagem do acadêmico realizado por monitores com a supervisão de professores; pequenos grupos de estudo auxiliados por material didático produzido pela equipe do Ensino Propulsor e acompanhados de monitores ou professores; oficinas temáticas presenciais e a distância que desenvolvem temas voltados às necessidades dos alunos e à produção de material didático¹⁹ em formato digital (hipertextos).

De acordo com Kessler (2008), as reprovações e evasões têm diminuído e “o projeto tem resultados positivos que atuam na integração do Ensino Propulsor à cultura acadêmica da Unisinos”.

Na Unipampa – *Campus Alegrete*, o Curso de Matemática Básica iniciou-se no ano de 2007 e teve três versões presenciais e uma versão que utilizou recursos da educação à distância com tutoria de alunos monitores.

¹⁸ Disponível no endereço <<http://unisinos.br/propulsor/category/artigos>> Acesso em: 22 de junho de 2012.

¹⁹ Disponíveis em <<http://unisinos.br/propulsor/>> Acesso em: 22 de junho de 2012.

4.2 Os Cursos de Matemática Básica da Unipampa – *Campus Alegrete*

Na Unipampa - *Campus Alegrete*, as primeiras discussões, que surgiram a respeito do desnível em Matemática dos alunos ingressantes, foram embasadas no histórico dessa instituição. Sendo recém-criada e pouco conhecida no Brasil e no estado do Rio Grande do Sul em particular, os alunos interessados em vagas na Unipampa eram, na grande maioria, provenientes das cidades onde a Unipampa estava inserida.

Historicamente, a região de abrangência da Unipampa ocupou importante espaço na economia regional e nacional, porém sofreu, em anos passados, processo gradativo de perda de população e de produção agrícola e industrial. Deve-se considerar também que,

A distância geográfica, o limite na logística de distribuição e as dificuldades de agregação de valor à matéria-prima produzida regionalmente, colaboram para o cenário econômico aqui descrito (UNIPAMPA, 2009, p. 7).

Sendo assim, a região permaneceu estagnada economicamente e passou a depender de setores primários e de serviços. Com isso é também relevante salientar que tal região possui baixo investimento per capita, baixa densidade populacional e alta dispersão urbana, sendo composta por médias e grandes propriedades. Essa realidade afeta a geração de empregos e os indicadores sociais, principalmente os relativos à educação e à saúde (UNIPAMPA, 2009). Esse fato pôde ser constatado pelos professores, nas primeiras turmas ingressantes na Unipampa, quase que totalmente de alunos da região, que não tinham despertado para a continuidade dos estudos no nível superior.

Além disso, também é relevante considerarmos que, no ato de implantação da Unipampa, a oferta de cursos em Alegrete foi direcionada à Engenharia, e muitos alunos, com interesse em fazer um curso superior decidiram candidatar-se aos cursos oferecidos, sendo que, nem sempre a vocação deles fosse a engenharia.

A concepção inicial dos professores, de se trabalhar com alunos iniciantes, considerando que a formação deles era deficitária por estarem inseridos nesta região, começou a ser afetada no ano de 2010 quando a primeira turma de alunos selecionados pelo ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio ingressou na universidade. Percebeu-se que os alunos ingressantes, provenientes de regiões distintas do país, tinham em comum o desnível nos conceitos de matemática trazidos por eles dos Ensinos Fundamental e Médio.

Em 2007, no segundo semestre de funcionamento da Unipampa

, iniciou-se o primeiro curso chamado de Pré-Cálculo ofertado aos alunos ingressantes. O curso foi desenvolvido com o intuito de proporcionar aos alunos a revisão de conceitos de matemática básica detectados como pontos deficitários, através de avaliações diagnósticas.

Para o desenvolvimento do referido curso, os professores elaboraram uma apostila de conceitos básicos de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, com os seguintes conteúdos: Produtos Notáveis, Fatoração, Radiciação, Notação Científica, Operações com Conjuntos, Conjuntos Numéricos, Intervalos, Produto Cartesiano, Relações, Polinômios, Funções, Equações e Inequações Exponenciais, Logaritmos, Introdução à Trigonometria, Equação Linear, Sistema Linear e Conceitos básicos de Geometria Analítica.

A apostila era disponibilizada aos alunos através de cópia física e também na plataforma MOODLE²⁰. As aulas eram expositivas com apresentação de conteúdos e resolução de exercícios na lousa. Nesse ano não houve o auxílio de alunos monitores, sendo que os professores foram responsáveis pelo esclarecimento de dúvidas extraclasse.

No primeiro ano, 2007, o Curso de Pré-Cálculo foi ofertado para três turmas, cada uma com 50 vagas, formadas por alunos ingressantes e alunos que haviam reprovado em Cálculo I. As aulas foram realizadas durante o primeiro mês letivo, contabilizando 16 horas-aula. Nesse ano tínhamos, na Unipampa, três turmas de alunos ingressantes e três turmas de alunos veteranos, num total de 300 alunos.

A Unipampa encontrava-se em fase de implantação e, como não possuía prédios próprios, utilizava salas de aula cedidas pela prefeitura do município de Alegrete. Como as referidas salas de aula eram pequenas, era necessário limitar o número de alunos que poderiam participar do Curso de Pré-Cálculo. Para isso, os alunos eram convidados a se inscrever no curso e, após uma aula de apresentação dos objetivos, os alunos inscritos realizavam uma avaliação diagnóstica.

A seleção dos alunos que teriam vaga no curso era realizada observando aqueles que possuíam maior número de erros nas questões da avaliação diagnóstica. A avaliação diagnóstica contava com questões objetivas de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, cuja correção dava-se pelos professores e pelos próprios alunos na sala de aula, após sua realização. A avaliação diagnóstica encontra-se na íntegra no Apêndice A deste trabalho. A seguir apresentamos os dados do ano de 2007.

²⁰ Moodle (*Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*) é uma plataforma de aprendizagem a distância baseada em software livre. Disponível em <<http://moodle.org/about/>> Acesso em: 22 de junho de 2012.

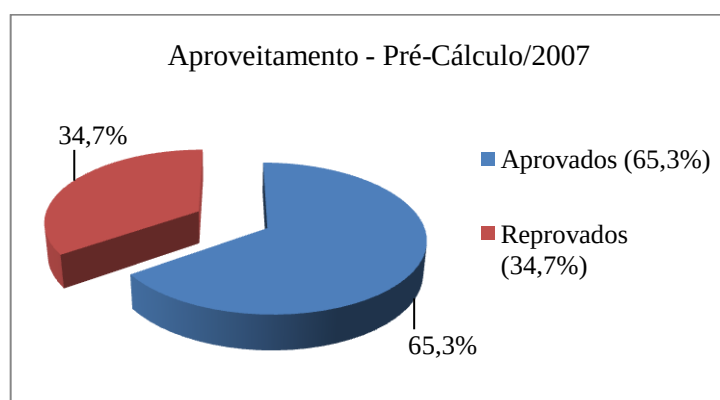
Dados de 2007²¹:

Nesta versão do curso, foram considerados aprovados todos os alunos que obtiveram no mínimo 75% de frequência, ou seja, não foi realizada prova de avaliação de conteúdos.

Nesse ano tivemos 124 alunos inscritos, dos quais 81 foram aprovados e 43 foram reprovados no Curso de Pré-Cálculo. Dos 43 alunos aprovados em Pré-Cálculo, 15 também aprovaram em Cálculo I.

O gráfico abaixo mostra os percentuais de alunos aprovados e reprovados no curso de Pré-Cálculo, considerando o total de 124 alunos inscritos.

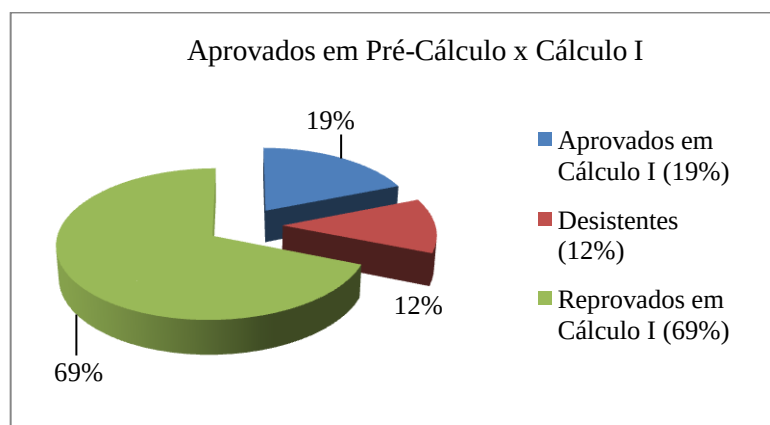
Figura 4 - Percentual de alunos aprovados em Pré-Cálculo.



Fonte: Noguti e Marcon (2012, p. 5)

No gráfico a seguir apresentamos os resultados obtidos pelos alunos aprovados no Curso de Pré-Cálculo, na disciplina de Cálculo I.

Figura 5 - Resultados dos alunos aprovados em Pré-Cálculo em Cálculo I.



Fonte: Noguti e Marcon (2012, p. 5)

²¹ Dados retirados do trabalho “*Cursos de Nivelamento como estratégia para a melhoria no rendimento do aluno nas disciplinas básicas de matemática dos cursos de graduação do Campus Alegrete*”, escrito e publicado pela pesquisadora e por Divane Marcon.

No ano de 2008, devido à carga horária dos professores envolvidos, foram ofertadas duas turmas de 50 alunos, com aulas concentradas em uma semana antes do início das aulas da graduação, totalizando o curso em 20 horas-aula. Nesse ano, o público alvo era formado apenas pelos alunos ingressantes, que receberam uma carta convite no momento da matrícula, convidando-os para o curso. O Curso recebeu o nome de Nivelamento em Matemática Básica. Novamente foi aplicada a mesma avaliação diagnóstica aos alunos, porém ela não teve caráter de seleção para o curso, pois apenas 50% dos alunos convidados compareceram às aulas. A seguir apresentamos os dados do ano de 2008.

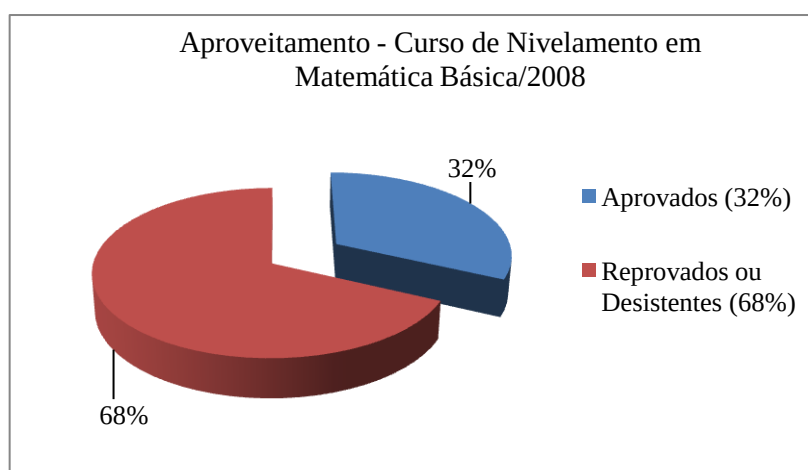
Dados de 2008:

Foram realizadas atividades de avaliação de rendimento dos alunos durante o curso com base nos exercícios da apostila adotada, ficando nesse ano mais clara a relação aprovados em Nivelamento em Matemática Básica x aprovados em Cálculo I.

Nesse ano tivemos 138 alunos convidados, dos quais 69 compareceram às aulas. Destes, 22 foram aprovados no Curso de Nivelamento em Matemática Básica e 47 foram reprovados. Dos 22 alunos aprovados em Nivelamento em Matemática Básica, 14 também aprovaram em Cálculo I.

O gráfico abaixo mostra os percentuais de alunos aprovados e reprovados no curso de Nivelamento em Matemática Básica, considerando o total de 69 alunos cursantes.

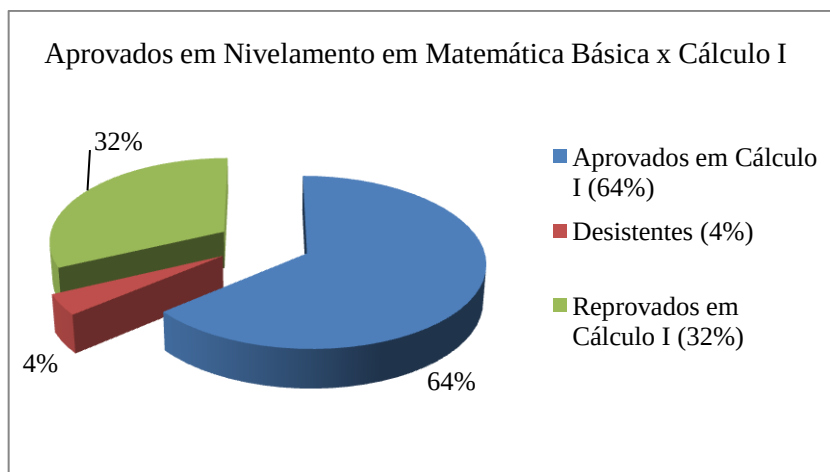
Figura 6 - Percentual de aprovados em Nivelamento em Matemática Básica.



Fonte: Noguti e Marcon (2012, p. 6)

No gráfico a seguir apresentamos os resultados obtidos pelos alunos aprovados no Curso de Nivelamento em Matemática Básica, na disciplina de Cálculo I.

Figura 7 - Resultados dos alunos aprovados em Nivelamento em Matemática Básica e em Cálculo I.



Fonte: Noguti e Marcon (2012, p. 6)

No ano de 2009, o curso foi ofertado a duas turmas de 50 alunos, durante todo o semestre letivo na forma de DCG - Disciplina Complementar de Graduação, totalizando 30 horas-aula. Foram aceitas inscrições de alunos ingressantes e alunos reprovados em Cálculo I. Foi aplicada a avaliação diagnóstica como uma sondagem para que os professores soubessem como trabalhar com as turmas.

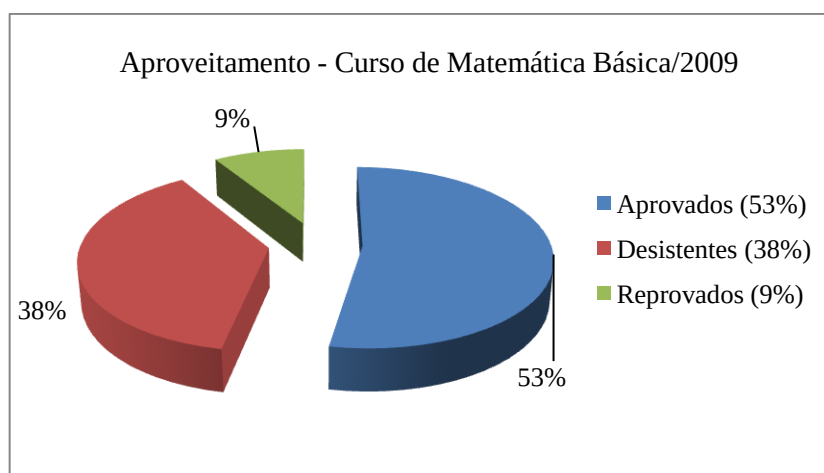
O programa e a ementa da DCG foram elaborados pelos professores do *Campus*, com base na literatura matemática disponível, e nos Cursos de Matemática Básica conhecidos. A referida disciplina consta no PPC – Projeto Pedagógico dos Cursos de Engenharia da Unipampa – *Campus Alegrete* e seu programa e ementa podem ser encontrados no Anexo B deste trabalho. A seguir apresentamos os dados do ano de 2009.

Dados de 2009:

Foram realizadas atividades de avaliação de rendimento dos alunos em sala de aula através de trabalhos e provas, com base nos exercícios da apostila adotada.

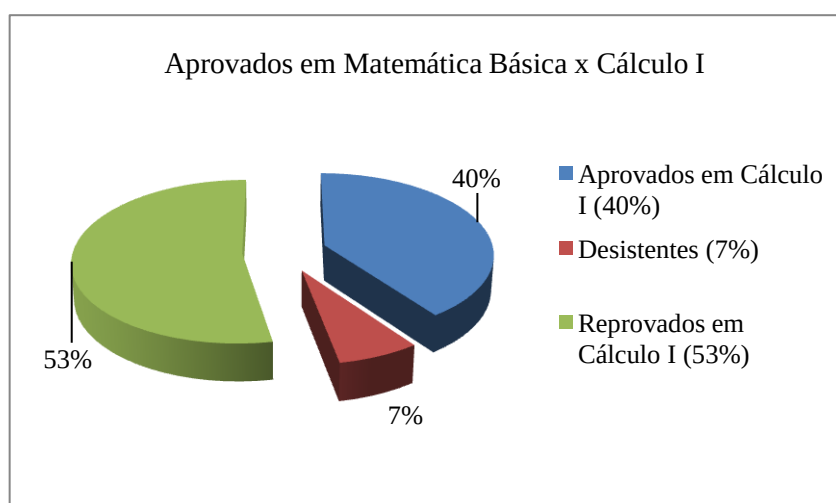
Nesse ano tivemos 100 alunos inscritos, sendo que 62 alunos concluíram o curso. Do total de alunos, 53 foram aprovados, 38 são considerados desistentes e 9 reprovados no Curso de Matemática Básica. Dos 53 alunos aprovados em Matemática Básica, 21 também aprovaram em Cálculo I.

O gráfico abaixo mostra os percentuais de alunos aprovados, reprovados e desistentes no curso de Matemática Básica, considerando o total de 100 alunos inscritos.

Figura 8 - Percentual de aprovados em Matemática Básica.

Fonte: Noguti e Marcon (2012, p.7)

No gráfico a seguir apresentamos os resultados obtidos pelos alunos aprovados no Curso de Matemática Básica, na disciplina de Cálculo I.

Figura 9 - Percentual de aprovados em Matemática Básica que aprovaram em Cálculo I

Fonte: Noguti e Marcon (2012, p.7)

Após três anos desta atividade, os resultados quantitativos obtidos nos mostraram que, apesar do índice de aprovação dos alunos cursantes do Curso de Matemática Básica ser relativamente pequeno, os que concluem este curso com resultados positivos tiveram, na sua maioria, bom desempenho também na disciplina de Cálculo I. Contudo, o número de alunos que se matricularam no Curso de Matemática Básica e posteriormente evadiram-se nas disciplinas iniciais e no próprio Curso de Matemática Básica é relevante.

Acreditamos que, considerando os três anos de atividades realizadas, alguns fatores que não levaram ao sucesso pretendido em relação à aprendizagem dos alunos, são de grande

importância nesta análise: a adoção de uma apostila de conteúdos e exercícios no estilo ‘pré-vestibular’ que, por vezes, desestimulava o aluno ingressante, pois ele acredita que conhece os pré-requisitos para o curso escolhido já que foi aprovado na seleção e é aluno do ensino superior; a curta duração do curso, de 20 a 30 horas que não permitiu trabalhar as dúvidas que os alunos poderiam ter, e a metodologia adotada, que era baseada em aulas expositivas, com repetição de exercícios, no estilo ‘aulão’²² de pré-vestibular, dando ao aluno a nítida impressão de que ainda está na educação básica, ou mesmo galgando uma vaga no ensino superior.

Consideramos que estes fatores contribuíram para a evasão dos alunos nos Cursos de Matemática Básica ofertados até então e, conseqüentemente, contribuíram para o baixo rendimento de alguns alunos nas disciplinas iniciais da graduação. É importante considerarmos que o Curso de Matemática Básica poderia ser um fator de comprometimento dos alunos com o seu curso de graduação, desde o início de suas atividades no Ensino Superior.

²² Estamos nos referindo aqui, às aulas dadas na semana que antecede o exame de vestibular, onde são relembradas apenas fórmulas e memorização de conceitos.

CAPÍTULO V

A NOVA PERGUNTA DA PESQUISA E O MODELO MODIFICADO

A pesquisa científica exige criatividade, disciplina, organização e modéstia, baseando-se no confronto permanente entre o possível e o impossível, entre o conhecimento e a ignorância.

MIRIAM GOLDENBERG

Neste capítulo retomamos o Modelo de Romberg. Após o estudo realizado nos três capítulos anteriores pudemos esclarecer e definir melhor nossa pesquisa. Sendo assim, apresentamos nossa pergunta de pesquisa já apoiada na investigação realizada nos Capítulos II, III e IV e reelaborada à luz dos fatores relevantes estudados e, também, um modelo que nos guiará até o fim desta pesquisa a que chamaremos de Modelo Modificado.

5.1 A influência dos nossos ‘outros’ na Pesquisa

Após a investigação feita nos três temas identificados em nossa pesquisa: Capítulo II - Resolução de Problemas e o Ensino Superior, Capítulo III - A Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior e Capítulo IV - Cursos de Matemática Básica, entendemos que é necessário reavaliar a nossa pergunta inicialmente proposta e, conseqüentemente, nosso modelo preliminar.

No capítulo “*Resolução de Problemas e o Ensino Superior*” conseguimos aprofundar nosso conhecimento sobre as mudanças que ocorreram no ensino da matemática, sob a ótica da Resolução de Problemas, que culminaram no desenvolvimento da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Além disso, foi possível perceber que as pesquisas que relacionam a Resolução de Problemas e o Ensino Superior são ainda escassas no Brasil. Neste estudo não identificamos nenhum trabalho que apresente como tema Cursos de Nivelamento, Pré-cálculo ou Matemática Básica utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na transição da Educação Básica para o Ensino Superior. Essa informação é importante, pois garante a originalidade da tese.

Ao pesquisarmos sobre “*A Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior*”, nos aprofundamos na legislação que trata dos Ensinos Fundamental e Médio e ainda do Ensino Superior, em particular com as Diretrizes Curriculares para a Engenharia, para que pudéssemos estruturar o Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas. Identificamos alguns livros dos Ensinos Fundamental e Médio, de Pré-Cálculo, de Cálculo e Geometria Analítica, para que fosse possível definir quais conteúdos seriam trabalhados no Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas. Foi possível perceber que para os livros de Pré-Cálculo existe um núcleo comum de conteúdos considerados importantes para o aluno ingressante nos cursos de graduação em tecnologias e ciências exatas que abarca conteúdos iniciais da graduação.

Compreendemos a importância de abordar conceitos que tratem da matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e que façam uma ligação entre os conceitos matemáticos da Educação Básica com os do Ensino Superior, sem que tratemos claramente de conceitos trabalhados nas disciplinas da graduação. Além disso, foi possível compreender que o curso deverá tratar de apenas uma das disciplinas iniciais, o Cálculo I, visto que devemos considerar que o tempo é fator determinante para que possamos realizá-lo a contento.

Por fim estabelecemos uma ementa de conteúdos a serem trabalhados no Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas, com base nos documentos oficiais, nos livros escolhidos e na ementa da Disciplina de Matemática Básica da Unipampa.

EMENTA PARA O CURSO DE MATEMÁTICA BÁSICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

UNIDADE 1 - REVISÃO DO ENSINO FUNDAMENTAL

- 1.1 Números e Operações:
 - Operações Fundamentais
 - Potenciação e Radiciação
- 1.2 Álgebra:
 - Polinômios
 - Fatoração e Produtos Notáveis
 - Resolução de Equações e Inequações
- 1.3 Medida

UNIDADE 2 - REVISÃO DO ENSINO MÉDIO

- 2.1 Linguagem e notação de conjuntos
- 2.2 Conjuntos numéricos e suas operações
- 2.3 A reta real e seus intervalos
- 2.4 Valor absoluto

UNIDADE 3 - PRODUTO CARTESIANO E FUNÇÕES

- 3.1 Produto cartesiano
- 3.2 Funções Polinomiais
- 3.3 Função Modular

UNIDADE 4 – EXPONENCIAL E LOGARITMO.

- 4.1 Equações e inequações exponenciais e logarítmicas.
- 4.2 Função Exponencial
- 4.3 Função Logarítmica

UNIDADE 5 – INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA E AOS SISTEMAS LINEARES.

- 5.1 Introdução à Trigonometria
- 5.2 Matrizes e Sistemas Lineares

A diferença, entre o elenco de conteúdos que elaboramos com relação ao elenco trabalhado anteriormente na disciplina de Matemática Básica, está na disposição de conteúdos e na maior ou menor ênfase dada a alguns deles. Na Unidade 1, a inserção das Medidas como conteúdo a ser abordado é o maior diferencial; na Unidade 2, apesar de se tratar do mesmo assunto, foi dada uma menor ênfase à Teoria de Conjuntos passando-se a trabalhar mais os Conjuntos Numéricos; na Unidade 3, a mudança está em não abordar o conteúdo de Relações; a Unidade 4 ficou totalmente dedicada ao estudo das Equações e Funções Exponenciais e Logarítmicas, sendo excluído o estudo de Trigonometria; a Unidade 5 trabalha com a Introdução à Trigonometria e aos Sistemas Lineares sendo que, no novo elenco de conteúdos, não iremos abordar conceitos de Geometria Analítica como uma unidade e, sim, conceitos interligados às unidades anteriores.

Ao longo de nossa investigação a respeito dos “*Cursos de Matemática Básica*” no Brasil, verificamos a existência deles nas IES, particulares e públicas em todo o território nacional. Identificamos formas de apresentação do mesmo, metodologias e conteúdos apresentados pelas IES que oferecem os cursos e, em particular, duas instituições foram investigadas com maior cuidado, a UFRGS e a UNISINOS. Apresentamos ainda, os Cursos de Nivelamento realizados na Unipampa – *Campus Alegrete*, a metodologia adotada, o conteúdo programático, a carga- horária e os resultados obtidos.

Devemos ter bem definido que o objetivo deste trabalho é investigar se um novo Curso de Matemática Básica, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, poderia auxiliar os alunos, fazendo com que

trabalhem, de uma nova forma, conceitos, conteúdos e procedimentos fundamentais de matemática necessários a um acompanhamento eficiente no curso de Cálculo I.

Como um dos propósitos desta pesquisa é o de oferecer, aos alunos ingressantes no Ensino Superior, uma possibilidade de se prepararem para as disciplinas da graduação, de forma geral esperamos que os alunos, matriculados no Curso de Matemática Básica, despertem para os estudos e consigam, além de revisar conceitos, identificar um método de estudo que lhes seja útil para todas as disciplinas do curso de graduação.

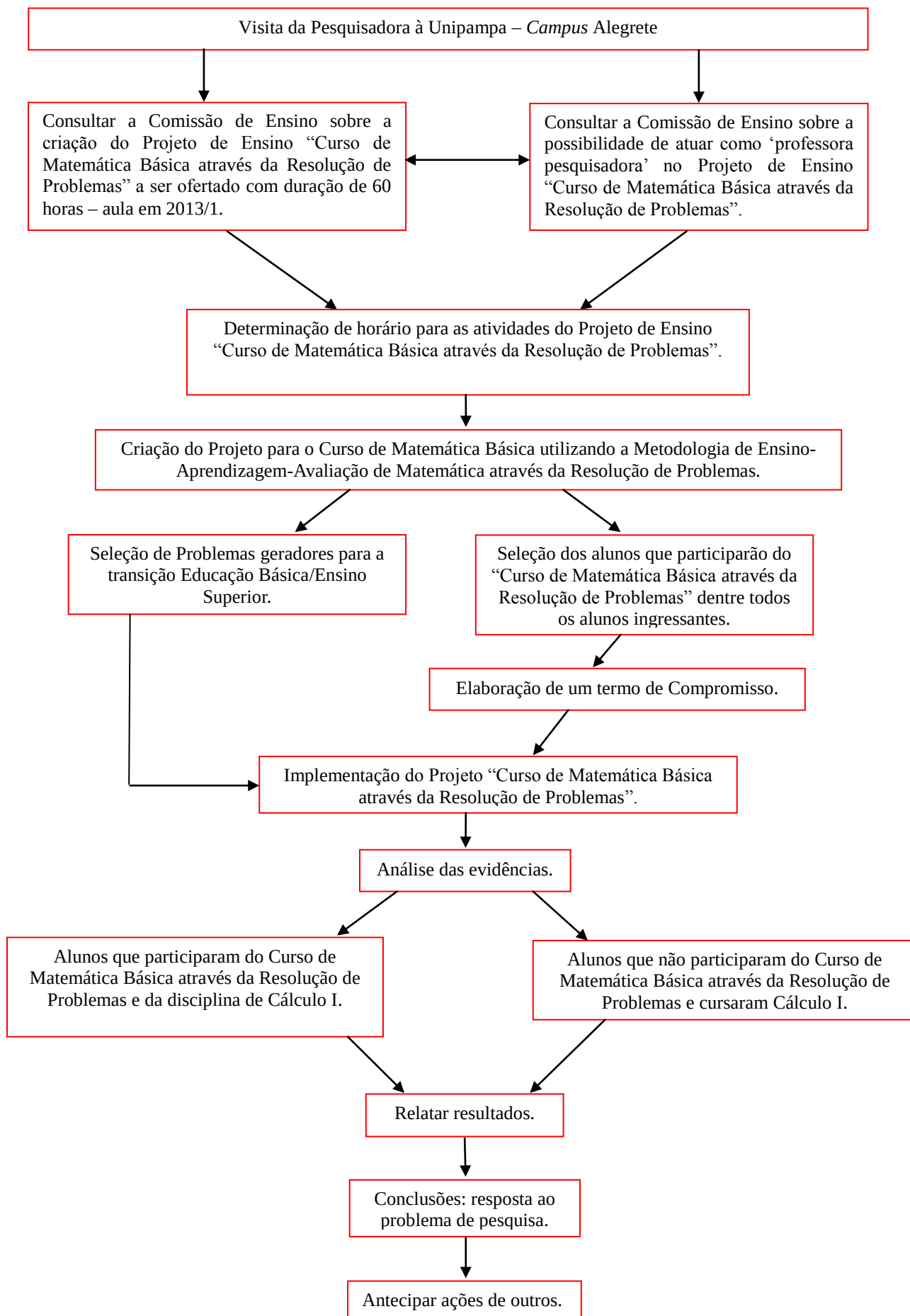
Desejamos que esses alunos tenham autonomia para estudar os diversos conteúdos necessários à formação de engenheiros e esperamos que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas seja o foco principal para que isso aconteça.

5.2 O Modelo Modificado

Como definido na página 22, é importante salientar que o Modelo Preliminar inicial permanece como espinha dorsal para um possível Modelo Modificado. O que ocorre é que o Modelo Preliminar expõe, de forma simples, os problemas detectados pela pesquisadora antes do doutoramento para enfrentar esse problema sem as investigações necessárias para delimitar o tema. Sendo assim, descreveremos o Modelo Modificado detalhando as variáveis que foram detectadas no estudo dos capítulos anteriores, para auxiliar na busca pelas respostas às questões propostas neste trabalho.

Cabe novamente salientar que o Modelo Modificado apresentado aqui é fruto do conhecimento da pesquisadora, podendo ser estruturado de outra forma por outro pesquisador. É a influência do sujeito na pesquisa.

Consideramos que são ‘variáveis’ as ações dispostas nas caixas ao longo do fluxograma do modelo, e que possuem ‘relações’ através das setas de indicação. As relações podem ser compreendidas como de tempo, de ordem etc.



5.3 A Nova Pergunta da Pesquisa

Após relacionar o fenômeno de interesse e o modelo modificado, com ideias de ‘outros’ em nossa pesquisa, chegamos à nova pergunta norteadora:

Quais as contribuições de um Curso de Matemática Básica, utilizando-se da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para auxiliar os alunos ingressantes, nas disciplinas de Matemática, em particular do Cálculo I, no Ensino Superior?

Além da reestruturação de nossa pergunta de pesquisa, durante a investigação e a relação com ideias de outros pesquisadores, nos deparamos com outras questões importantes que agregam valor e consistência à nossa pesquisa e que consideramos importantes para atingir os objetivos propostos:

- Como trabalhar, com a Metodologia de Ensino –Aprendizagem – Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com alunos recém-chegados ao Ensino Superior?
- Como utilizar problemas para construir e relacionar conteúdos de Matemática da Educação Básica com o Ensino Superior?

CAPÍTULO VI

ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS

[...] a educação é um campo de estudo, um local que contém fenômenos, eventos, instituições, problemas, pessoas e processos que em si mesmos constituem a matéria-prima para investigações de muitos tipos.

LEE S. SHULMAN

Neste capítulo iniciamos o segundo bloco do Modelo de Romberg. Nele, as atividades cinco e seis nos orientam a selecionar estratégias e procedimentos a fim de termos subsídios para responder a pergunta da pesquisa. Para o Modelo Modificado, construído no capítulo anterior, devemos definir uma Estratégia Geral (“o quê fazer?”) e um respectivo Procedimento Geral (“como fazer?”), para depois colocá-los em ação.

6.1 Estratégias e Procedimentos da Pesquisa

Para resolver o problema de pesquisa proposto, devemos elaborar um plano de ação. Este plano é focado no Modelo Modificado e deve contemplar itens importantes que nele apareceram. Para isso, em seu segundo bloco, Romberg coloca as atividades cinco e seis, em que o pesquisador deve, antes de colocar seu projeto em ação, planejar as estratégias e procedimentos necessários para que se obtenha sucesso na realização de seu trabalho.

As teses e dissertações desenvolvidas pelos membros do GTERP utilizam a Metodologia de Romberg. Após algumas pesquisas concluídas, o grupo propõe que as Estratégias e Procedimentos, descritos por Romberg, sejam complementadas por Estratégias Auxiliares e Procedimentos Auxiliares, de forma que o pesquisador consiga englobar um maior número de variáveis que se apresentam no Modelo Modificado.

Dessa forma, além da Estratégia Geral e do Procedimento Geral, se necessário devemos criar estratégias auxiliares $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, de modo que, a partir delas, também criemos procedimentos auxiliares relacionados, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. A diferença entre as Estratégias e Procedimentos encontra-se basicamente em ‘pensar’ como fazer (estratégias) e colocar tais ‘pensamentos’ em ação (procedimentos).

De modo a descrevermos nossas estratégias e procedimentos, primeiramente iremos retomar a nossa pergunta da pesquisa:

Quais as contribuições de um Curso de Matemática Básica, utilizando-se da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para auxiliar os alunos ingressantes, nas disciplinas de Matemática, em particular do Cálculo I, no Ensino Superior?

Olhando nosso Fenômeno de Interesse, o Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa definimos a seguir nossa Estratégia Geral e suas Estratégias Auxiliares:

Estratégia Geral (EG):

Criar um Projeto para o Curso de Matemática Básica utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas visando a responder o problema da pesquisa.

Estratégias Auxiliares:

E₁: Planejar uma visita à Unipampa – *Campus* Alegrete.

E₂: Consultar a Comissão de Ensino sobre a implementação do Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” e a possibilidade de atuar como ‘professora-pesquisadora’ no referido projeto.

E₃: Elaborar o Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”.

E₄: Selecionar os alunos que participarão do Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” dentre todos os alunos ingressantes.

E₅: Elaborar o Termo de Compromisso e Responsabilidade entre os alunos e a professora-pesquisadora.

E₆: Elaborar o roteiro de atividades para o “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”.

E₇: Implementar o roteiro de atividades.

E₈: Tirar conclusões.

É importante salientar que algumas Estratégias Auxiliares apareceram e serão realizadas antes da elaboração do Projeto de Ensino (E₃), pois alguns ‘passos’ da pesquisa

devem ser tomados anteriormente a ele. É o caso das estratégias E_1 e E_2 , que dizem respeito ao local onde deve ocorrer o projeto, a Unipampa – *Campus Alegrete*.

O Projeto “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” não deve ser confundido com o Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” apesar de os dois referirem-se ao mesmo objeto de estudo: o primeiro é o cerne do trabalho de doutorado e engloba o segundo, que é um projeto necessário para que a atividade da pesquisadora seja reconhecida e registrada dentro da Universidade Federal do Pampa – Unipampa.

Para as estratégias, geral e auxiliares, temos os respectivos procedimentos geral e auxiliares, descritos a seguir.

Procedimento Geral (PG):

Criação do Projeto para o Curso de Matemática Básica utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas visando a responder o problema da pesquisa.

Procedimentos Auxiliares:

P₁: A visita à Unipampa – *Campus Alegrete*.

P₂: Reunião com o Diretor e com o Coordenador Acadêmico do *Campus Alegrete* – Representante da Comissão de Ensino.

P₃: A criação do Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”

P₄: A elaboração de uma Avaliação Diagnóstica dos alunos ingressantes para aplicação durante o primeiro encontro do Curso de Matemática Básica.

P₅: A elaboração de um Termo de Compromisso e Responsabilidade.

P₆: A elaboração do roteiro de atividades para o “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” – Seleção de Problemas Geradores.

P₇: A implementação do roteiro de atividades.

P₈: Conclusões.

6.2 Procedimentos Auxiliares em Ação

Para atingirmos o Procedimento Geral (PG), ‘Criação do Projeto para o Curso de Matemática Básica utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas’, colocamos antes os procedimentos auxiliares P₁, P₂, P₃, P₄, P₅, e P₆ em ação.

6.2.1. P₁: A visita da pesquisadora à Unipampa – Campus Alegrete

A proposta inicial do projeto de doutorado foi elaborada visando à realização da pesquisa na instituição de origem da pesquisadora, a saber, a Universidade Federal do Pampa – Unipampa. No momento do afastamento para cursar o doutoramento, a Unipampa, conjuntamente com a Capes, ofereceu uma bolsa PLANFOR²³ à pesquisadora, sendo firmado que o objeto de estudo deveria envolver a comunidade da área de abrangência da Unipampa ou mesmo a própria instituição.

Nessa visita, realizada no mês de julho de 2012, a pesquisadora apresentou ao Coordenador Acadêmico²⁴ o Projeto “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” e informou-se sobre as formas legais de sua implementação.

6.2.2. P₂: Reunião com o Diretor e com o Coordenador Acadêmico do Campus Alegrete – Representante da Comissão de Ensino

Após apresentar o Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”, a pesquisadora esteve em reunião com o coordenador acadêmico e também com o diretor do Campus Alegrete, a fim de viabilizar a implementação do projeto. Nesse encontro, os dois professores demonstraram total apoio à aplicação do projeto no primeiro semestre de 2013 e concordaram com o pedido da pesquisadora, para que o projeto tivesse 60 horas-aula. Foi sugerido pelo Coordenador Acadêmico que o Projeto fosse realizado na Modalidade Projeto de Ensino, pois desta forma a pesquisadora teria maior autonomia para a escolha dos alunos participantes, o que não ocorreria se fosse ofertada a

²³ PLANFOR - Plano Institucional de Formação de Quadros Docentes. Convênio entre a Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e a Universidade Federal do Pampa.

²⁴ À Coordenação Acadêmica compete coordenar o planejamento, o desenvolvimento e a avaliação das atividades acadêmicas do Campus (Regimento Geral da Unipampa, 2010, p. 21).

Disciplina Complementar de Graduação “Matemática Básica”, já existente na Grade Curricular do Curso de Engenharia Civil.

Como a pesquisadora está afastada de suas atividades docentes desde o ano de 2011 para a realização do doutorado, ela não pode atuar como docente durante a realização do projeto e, sim, como professora-pesquisadora. Sendo assim, a pesquisadora entrou em contato com um colega professor do *Campus* Alegrete que se dispôs a colocar o projeto em seu nome para fins de registro no SIPPEE - Sistema de Informação para Projetos de Pesquisa, Ensino e Extensão da Unipampa.

Para a determinação da carga horária semanal do Projeto de Ensino e as datas de sua realização, a Coordenação Acadêmica pediu que a pesquisadora encaminhasse o Projeto de Ensino via SIPPEE até o mês de novembro de 2012, a fim de reservar, no calendário acadêmico de 2013, horário livre para a sua realização.

6.2.3. P₃: Criação do Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”

O SIPPEE possui um modelo padrão de Projetos de Ensino que deve ser preenchido e submetido à Comissão Local de Ensino para apreciação. O modelo do projeto pode ser obtido na página da Unipampa²⁵.

O Projeto de Ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” apresentado à Unipampa encontra-se no Apêndice C deste trabalho.

6.2.4. P₄: A elaboração de uma Avaliação Diagnóstica dos alunos ingressantes para aplicação durante o primeiro encontro do Curso de Matemática Básica

A avaliação diagnóstica deve ser utilizada no primeiro encontro do Curso de Matemática Básica, com o intuito de conhecermos os conceitos básicos de Matemática trazidos pelos alunos. Devemos, com isso, identificar qual o tipo de dificuldade que os alunos possuem no que se refere aos conteúdos de matemática por eles estudados nos Ensinos Fundamental e Médio.

Optamos por utilizar a mesma avaliação diagnóstica dos cursos de nivelamento dos anos de 2007 a 2009, para que possamos ter mais um elemento de estudo para trabalhos

²⁵ <<http://www10.unipampa.edu.br/sippe/>> Acesso: 18 de março de 2013.

futuros de pesquisa após a conclusão da tese. É importante considerar que a avaliação satisfaz o elenco de conteúdos definidos por nós como importantes no Capítulo III. A avaliação diagnóstica consta no Apêndice A deste trabalho.

Os alunos, ao efetuarem a matrícula, indicaram, em um questionário sociocultural elaborado pela Unipampa, dois dentre quatro cursos de nivelamento que desejam realizar no período que antecede o semestre letivo. Os cursos, oferecidos pela Unipampa, neste ano letivo, aos alunos, são das áreas de: Matemática, Algoritmos, Física e Português. Tais cursos serão desenvolvidos de forma independente e os alunos poderão frequentar até dois cursos à sua escolha, sendo um matutino e outro vespertino com encontros diários. A Unipampa-*Campus* Alegrete, reconhecendo a importância de receber os alunos e garantir sua permanência na Instituição, aposta no conjunto de cursos acima citados como um Projeto Integrado de Iniciação ao Ensino Superior.

Durante o processo de seleção não poderíamos deixar de considerar que, de acordo com Charlot (2000, p.54), “uma educação é impossível se o sujeito a ser educado não investe pessoalmente no processo que o educa”, ou seja, esperamos selecionar alunos que estejam interessados em participar do Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas.

A seleção de quem deverá participar não é tarefa fácil. Do total de alunos interessados, devemos selecionar 28, pois desejamos um grupo pequeno, múltiplo de quatro, para trabalharmos com a metodologia escolhida.

Caso ocorra de termos mais de 28 alunos inscritos para o curso, faremos a seleção através das notas do ENEM. Tal seleção deve contemplar os alunos que possuem as notas mais baixas no ENEM.

No primeiro encontro, será exposto o objetivo do curso, o horário das atividades, a dinâmica de sala de aula e a forma de trabalho, utilizando grupos cooperativos e colaborativos²⁶ e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

²⁶ Grupo colaborativo é compreendido pela pesquisadora como sendo aquele no qual todos podem contribuir com o trabalho e o grupo cooperativo é compreendido pela pesquisadora como sendo aquele onde todos atuam juntamente para um mesmo fim (HOUAISS, 2009).

6.2.5. *P₅: Elaboração de um Termo de Compromisso e Responsabilidade*

O termo de compromisso e responsabilidade define a relação existente entre os alunos e o professor. Com esse documento espera-se que fique claro para os alunos que o professor não é o ‘detentor do conhecimento’ e que não decide sozinho como as aulas devem ser realizadas. O termo é apresentado aos alunos, que podem fazer sugestões que, se aceitas pelo grupo, podem alterá-lo. Pode-se encontrar tal documento com outros nomes, como ‘Termo de Compromisso’, ‘Contrato Pedagógico’, etc. O que se deseja que ocorra é que os alunos e a professora-pesquisadora tenham o documento como um acordo entre as partes. A palavra responsabilidade, neste contexto, deve ser entendida como uma obrigação que ambas as partes possuem sobre suas próprias ações.

Considerando o tipo de trabalho que iremos realizar em que os alunos são coconstrutores de seu conhecimento, o Termo de Compromisso e Responsabilidade auxilia, aos alunos e à professora, a estabelecerem condições de desenvolver as atividades de ensino e aprendizagem em sala de aula. As avaliações realizadas pelos alunos devem ser feitas de forma continuada, contando com a colaboração dos demais colegas de grupo num processo de avaliação em conjunto.

Inicialmente a professora deverá explicar aos alunos o que é o Termo de Compromisso e quais seus objetivos. Para que as discussões sejam focadas no Termo de Compromisso e Responsabilidade, a professora-pesquisadora irá apresentar um termo previamente pensado, discutido e analisado por ela e sua orientadora. As sugestões e modificações que possam vir a ocorrer serão analisadas na sala de aula e, mediante o consentimento da maioria, será reescrito o termo para que o “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” possa ser realizado sem contratempos.

Após a apresentação, discussão e consenso de todos, o Termo de Compromisso e Responsabilidade será assinado por todos os presentes e, cópia dele, pode ser encontrado no Apêndice B deste trabalho de tese.

6.2.6. P₆: Elaboração do roteiro de atividades para o “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” – Seleção de Problemas Geradores

Ao escolhermos trabalhar com a Matemática que julgamos necessária para o aluno ingressante do Ensino Superior, em um Curso de Matemática Básica, estamos assumindo que nosso trabalho não possui um único padrão de conteúdo. Seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para os Ensinos Fundamental e Médio, iremos abordar três dos quatro blocos de conteúdos de matemática para o Ensino Fundamental, a saber: Números e operações (Aritmética e Álgebra); Espaço e forma (Geometria); e Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria). Não nos ateremos ao bloco de Tratamento da informação (Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade), pois esses não são conteúdos amplamente utilizados no Cálculo. Da mesma forma, em relação ao Ensino Médio, trataremos de três dos quatro blocos, a saber: Números e operações; Funções; e Geometria.

Considerando que os alunos ingressantes tenham sido classificados pelo ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio – os conteúdos abordados durante o Projeto de Ensino não serão novos e, portanto, o Curso de Matemática Básica irá oferecer a eles uma forma de construir ou reconstruir os conteúdos importantes já vistos na Educação Básica.

Os problemas geradores utilizados nas atividades serão selecionados de acordo com os blocos de conteúdos propostos pelos PCNs e serão trabalhados de forma mista, sem necessariamente fazermos menção aos blocos no desenvolvimento das atividades. Para a seleção dos problemas, escolhemos livros de Pré-Cálculo, livros de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, Provas do Exame Nacional do Ensino Médio e Cadernos do Professor de Matemática do Governo do Estado de São Paulo.

O planejamento das aulas e as respectivas atividades, para cada encontro, foram definidos de acordo com o número de encontros. Como cada encontro a ser realizado terá 3 horas-aula, as atividades devem ser escolhidas de forma a serem desenvolvidas utilizando todo o tempo da aula. Serão 20 encontros, no total de 60 horas-aula.

O Projeto de Ensino desenvolvido está apresentado na íntegra no Apêndice D deste trabalho. Para cada atividade proposta nos encontros, descrevemos os objetivos do encontro, os conteúdos a serem trabalhados e objetivos pretendidos em cada problema. Mostramos as ‘Estratégias de resolução pensadas pela professora’, que são as resoluções que a professora assumiu ao escolher os problemas. Além disso, apresentamos a formalização e as atividades extraclasse que os alunos deverão resolver em casa. A atividade extraclasse serve como uma

oportunidade de o aluno se envolver com o conteúdo estudado em sala de aula, como afirmam Coxford e Shulte (1995, p. 33),

Para garantir um domínio adequado de uma determinada habilidade [...], ou de um determinado conceito [...], deve-se primeiro oferecer uma carga adequada de prática dirigida; porém, a certa altura do curso o aluno deve ter a oportunidade de se envolver independentemente com a habilidade ou o conceito em estudo. Nas classes de matemática, isso em geral significa passar tarefa para casa. Pesquisas têm mostrado que, geralmente, passar tarefa para casa com regularidade é melhor do que não passar tarefa nenhuma ou do que passar tarefa voluntária (Coxford, Shulte, 1995).

A atividade extraclasse será o primeiro trabalho a ser realizado no início do encontro seguinte. Seguiremos o roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, onde também serão realizadas a plenária, que ocorre livremente em sala de aula com a participação de todos os alunos, e a formalização, relacionada aos conteúdos que se desejava abordar em cada encontro, elaborada pelo professor.

Os procedimentos **P₇**: A aplicação do roteiro de atividades e **P₈**: Conclusões encontram-se detalhados no próximo capítulo em que apresentamos o terceiro bloco do Modelo de Romberg. Esse bloco é destinado a descrever as ações da pesquisa e, através das informações coletadas, busca-se responder a pergunta da pesquisa.

CAPÍTULO VII

PROCEDIMENTO GERAL EM AÇÃO: IMPLEMENTAÇÃO DO PROJETO

A pesquisa é talvez a arte de se criar dificuldades fecundas e de criá-las para os outros. Nos lugares onde havia coisas simples, faz-se aparecer problemas.

PIERRE BOURDIEU

Neste capítulo iniciamos o terceiro bloco do Modelo de Romberg. Este bloco refere-se às ações decorrentes da pesquisa que dão sentido às informações coletadas. As atividades sete, oito, nove e dez nos orientam a coletar evidências, interpretá-las, relatar os resultados e antecipar a ação de outros pesquisadores frente à nossa pesquisa. Iniciamos por relatar a implementação do projeto de ensino e as atividades realizadas nos encontros previamente planejados. Posteriormente faremos uma análise dos dados obtidos após o projeto ter sido posto em ação com vistas a responder a pergunta da pesquisa.

7.1 A implementação do projeto de pesquisa

O Projeto Integrado de Iniciação ao Ensino Superior ofertado pelo *Campus Alegrete*, composto pelos cursos de Matemática, Português, Algoritmos e Física, nasceu após nosso pedido de mais uma vez trabalhar com os alunos ingressantes ao Ensino Superior. Esse projeto tem como base oferecer uma revisão/construção de conceitos necessários em tais áreas, visando à graduação. O projeto de ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas” ocorreu nas dependências da Unipampa – *Campus Alegrete* - no período de 08 de abril a 03 de maio de 2013.

Considerando o número de alunos interessados nos cursos ofertados e mediante a escolha de cada aluno, foram organizadas as turmas.

A seleção dos alunos matriculados em nosso curso foi realizada, pela Coordenação Acadêmica do *Campus Alegrete*, com base no projeto de ensino encaminhado e em uma pesquisa feita com os alunos no momento da confirmação de vaga para o curso escolhido. De acordo com a Coordenação Acadêmica, a seleção foi realizada considerando os dez primeiros

alunos inscritos para o curso de Matemática Básica, de cada um dos cursos de graduação a que se destinava nosso projeto: Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica e Engenharia de Telecomunicações.

A Coordenação Acadêmica do *Campus* Alegrete, ao tomar conhecimento do grande número de alunos interessados no curso de Matemática Básica, entrou em contato com a professora-pesquisadora pedindo para ampliar o número de vagas que constava no projeto de ensino de 28 para 40 alunos. A professora-pesquisadora aceitou o aumento do número de alunos na turma, pois soube que havia mais de 160 alunos interessados em frequentar as aulas de matemática.

Para viabilizar o Projeto Integrado com o maior número de alunos possível, o *Campus* Alegrete montou duas turmas, chamadas A e B, que possuíam aulas nos períodos da manhã, tarde e noite. Cada aluno pôde se inscrever nos cursos que julgava que possuía dificuldades e/ou que gostaria de acompanhar antes do início do semestre letivo. Sendo assim, nem todos os alunos estavam matriculados em todos os cursos e, portanto, nem todos possuíam aulas nos três turnos.

A turma A teve 20 encontros, em 60 horas-aula e trabalhou o Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas, ministrado pela pesquisadora. A turma B teve 15 encontros, em 30 horas-aula no curso de Noções Básicas de Matemática, porém com apostilas de conteúdos e aulas expositivas trabalhadas por outro professor. O curso de Noções Básicas de Português teve duração de 15 horas-aula e os cursos de Noções Básicas de Algoritmos e Noções Básicas de Física tiveram duração de 30 horas-aula.

A turma de Matemática Básica através da Resolução de Problemas foi a única que possuía 40 alunos matriculados. As demais turmas, Matemática Básica – Turma B, Física, Português e Algoritmos possuíam de 60 a 74 alunos. Os cursos de Matemática e Algoritmos foram os mais procurados pelos alunos e, para esses cursos, houve falta de vagas, restando uma lista de espera de mais de 50 nomes. Segundo a Coordenação Acadêmica do *Campus* Alegrete, seria importante ter-se aberta mais uma turma de Matemática Básica devido ao grande número de alunos interessados, o que não pode ser realizado por falta de professores.

As aulas da turma A ocorreram cinco vezes por semana no período da tarde das 14:00h às 17:00h. O horário completo, das turmas A e B, está disponível no Anexo C deste trabalho.

O projeto de ensino “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”, que fora planejado anteriormente, precisou de algumas adaptações durante sua realização. A diferença entre o planejamento de um projeto e sua implementação em sala de aula encontra-se em diversos fatores que não podem ser mensurados e muito menos

previamente considerados. Depende, por exemplo, dos alunos que frequentam a sala de aula, do tempo necessário para que cada um realize uma determinada atividade, da duração dos encontros, etc.

No primeiro encontro da turma A compareceram 47 alunos. Posteriormente, a turma foi reduzida a 40 alunos, uma vez que a pesquisadora já havia atendido ao pedido da Coordenação Acadêmica da Unipampa que sugerira 40 ao invés de 28 alunos. Os sete alunos restantes não haviam conseguido a matrícula no curso e compareceram voluntariamente à aula a fim de tentar participar do mesmo. Após a liberação da lista de presença, foram regularizados os 40 alunos matriculados, dos quais um optou por trocar para a turma do período da manhã por motivos profissionais e dois não compareceram às aulas.

Dos sete alunos extras que participaram da primeira aula, um pediu permissão para continuar assistindo as aulas, sendo autorizado pela professora-pesquisadora. Após a mudança de um dos alunos matriculados para a turma da manhã, esse aluno foi incluído como regular no “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”.

Dos 40 alunos matriculados, um nunca compareceu às aulas e três foram reprovados por frequência, pois obtiveram mais de 25% de faltas. Os demais alunos foram aprovados e a planilha de notas encontra-se no Apêndice F deste trabalho.

7.2 Os dados coletados e a Metodologia adotada para sua análise

Para a coleta de dados, utilizamos a observação em sala de aula, os registros no caderno de campo que foram assinalados diariamente pela professora-pesquisadora, os vídeos das aulas, questionários e os materiais produzidos pelos alunos durante os encontros.

Dentre os materiais produzidos pelos alunos temos as atividades desenvolvidas em cada encontro, a avaliação diagnóstica, uma avaliação individual e duas avaliações em grupo, necessárias para a formação do conceito para a aprovação no curso de Matemática Básica. Além dessas avaliações, para a composição da nota do aluno foi considerada a avaliação do professor e a frequência, de acordo com o Termo de compromisso previamente discutido com os alunos.

Na primeira e na última semana do curso os alunos responderam a questionários que tratavam do andamento do curso e do seu aproveitamento.

Dentro da estrutura do trabalho de tese, delineada através do Modelo de Romberg, neste capítulo iremos relatar os encontros ocorridos e, posteriormente, analisar os dados obtidos.

Levando em consideração a nossa pergunta de pesquisa, adotaremos duas abordagens para analisar os dados obtidos: a **abordagem qualitativa**, que nos possibilita múltiplas interpretações dos dados coletados, orientados por nossas expectativas e experiências e, posteriormente, a **abordagem quantitativa**, quando fizermos uma análise final do aproveitamento dos alunos cursantes do Curso de Matemática Básica – Turma A e cruzarmos seus resultados com os da disciplina de Cálculo I.

De acordo com Goldenberg (2001, p. 62),

A integração da pesquisa quantitativa e qualitativa permite que o pesquisador faça um cruzamento de suas conclusões de modo a ter maior confiança de que seus dados não são produto de um procedimento específico ou de alguma situação particular.

Concordamos com Carneiro (apud PUTI, 2011, p. 167) que a análise de todos os dados é um processo que pode ser complexo e mesmo confuso ao pesquisador, pois:

Exige destes (pesquisadores) um olhar atento aos dados e à identificação de aspectos que dialoguem com o objeto investigado. Além disso, o pesquisador necessita realizar a associação dos dados com o aporte teórico da pesquisa. É comum os pesquisadores, em início de investigação, produzirem um grande volume de dados, o que ocasiona um número mais extenso ainda a ser analisado. Desse modo, muitas vezes, pesquisadores iniciantes sentem-se perdidos diante da quantidade de aspectos e dimensões a serem analisados.

Sendo assim, na análise dos dados, optamos por não apresentar todas as atividades desenvolvidas nos encontros pelos alunos e, sim, aquelas que tiveram maior significado nos seus processos de ensino-aprendizagem, uma vez que tivemos 20 encontros com um total de 37 atividades em sala de aula e 20 em atividades extraclasse. No total foram selecionados 123 problemas distribuídos nas atividades dos encontros ao longo do curso, já que muitas atividades eram compostas por dois ou mais problemas. As atividades que serão relatadas foram selecionadas pelo nível de dificuldade que os alunos apresentaram ao resolverem-nas (muito difíceis ou, declarada por eles, como muito fáceis) e também pelo nível de envolvimento que os grupos tiveram na resolução dos problemas. Apresentaremos esses momentos através de diálogos dos grupos com a professora-pesquisadora e do material por eles produzido. Não foi pedido que os alunos entregassem a resolução dos problemas das atividades extraclasse. Sendo assim, durante o relato dos encontros, quando falarmos dessas atividades, nem sempre serão apresentados os materiais produzidos por eles, entretanto, eles poderão ser abordados na plenária e nas discussões em sala de aula.

7.3 Análise dos dados

Para a análise dos dados obtidos, utilizaremos os três temas nos quais nos apoiamos desde o início do trabalho: *Resolução de Problemas e o Ensino Superior*, *A Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior*, e os *Cursos de Matemática Básica*, para criarmos categorias de análise do material produzido pelos alunos. Além desses três temas, iremos apresentar e comentar os erros por eles cometidos nos problemas selecionados com o intuito de, a partir do erro, criar uma oportunidade de aprendizagem, dando ênfase aos conteúdos planejados para as atividades. Nossa preocupação aqui são as causas desses erros, já que estamos interessados em fazer uma revisão/construção de conceitos advindos dos Ensinos Fundamental e Médio. Vale salientar que não utilizamos a análise de erros como metodologia de sala de aula, mas iremos olhar os erros para que possam nos ajudar a compreender a resolução dos problemas pelos alunos e seus conhecimentos prévios de matemática.

Segundo Brousseau (apud CURY, 2007, p. 33)

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos.

Enquanto avaliamos o trabalho do aluno como um todo e não apenas como a resposta para um problema, estamos interessados no processo que gerou a sua solução. Desta forma, é possível perceber quais estratégias foram utilizadas e também quais os erros que cometeram. Os erros cometidos nos fornecem informações importantes a respeito do conhecimento matemático trazido por eles.

Para a análise qualitativa dos encontros, partiremos do tema *Resolução de Problemas e o Ensino Superior*, em que iremos analisar o que ocorreu em sala de aula, considerando as etapas do roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Nesse contexto, nos utilizamos da pesquisa pedagógica, “cujos propósitos ou objetos devem fluir de questões, ou problemas autênticos e observados pelo próprio professor que, ao investigar a sua turma, busca contribuir para um ensino e aprendizagem na sala de aula em que atua” (LANKSHEAR, KNOBEL, 2008, p.14).

Como todos os encontros foram elaborados a partir de problemas e considerando que os alunos do Curso de Matemática Básica estão na transição da Educação Básica para o Ensino Superior, estaremos olhando para os conceitos por eles trazidos da Educação Básica, com vistas aos conceitos que deverão construir na disciplina de Cálculo I, ou seja, analisando o tema *A Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior*.

Em um terceiro momento, iremos trabalhar o tema *Cursos de Matemática Básica*, quando faremos a análise quantitativa e um cruzamento de dados dos aproveitamentos dos alunos do Curso – Turma A, com os respectivos aproveitamentos da disciplina de Cálculo I. Tal análise vem acrescentar dados ao acompanhamento que a professora tem realizado na Unipampa há alguns anos. Esse estudo merece atenção e terá continuidade após o término do doutorado.

Permeando os três temas apresentados nos capítulos anteriores, iremos durante o relato dos encontros, comentar sobre os erros cometidos pelos alunos nas atividades de sala de aula e nas avaliações em grupo e individual.

Para a análise apresentada e diálogos inseridos no texto deste capítulo, consideramos a seguinte identificação:

Pp: para as falas do professor-pesquisador;

A, B, C... para os alunos participantes do diálogo, sendo que eles podem mudar a cada atividade;

G_1, G_2, G_3 ... para os grupos que participam do diálogo.

(...) indicará que não foi possível compreender o que foi dito;

(texto) indicará um comentário feito pela pesquisadora para esclarecer o significado de uma frase;

[...] supressão de parte do diálogo, por não ser relevante.

7.4 Os encontros

Ao iniciarmos o relato dos encontros ocorridos, tiramos uma primeira conclusão da implementação do projeto, que é, sem dúvida, a necessidade de um curso com maior tempo de trabalho. O tempo que estipulamos para a realização dos encontros não foi suficiente para rever todos os conteúdos de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio. Esta conclusão antecipada deve-se ao fato de não termos realizado o encontro 19 a contento e o encontro 20 não ter sido trabalhado. O planejamento dos encontros está na íntegra no Apêndice D, para a

consulta dos leitores interessados. Os gráficos, tabelas e desenhos apresentados nas atividades foram elaborados pela autora como parte da compreensão e resolução dos problemas.

No relato dos encontros que seguem, a professora-pesquisadora será denominada apenas de professora.

No momento da plenária, a professora dividia a lousa em nove partes para que cada grupo pudesse apresentar suas resoluções. As fotos mostram como os alunos apresentavam suas resoluções na lousa e uma lousa ao final da exposição dos alunos.

Figura 10: Alunos apresentando suas resoluções na lousa.

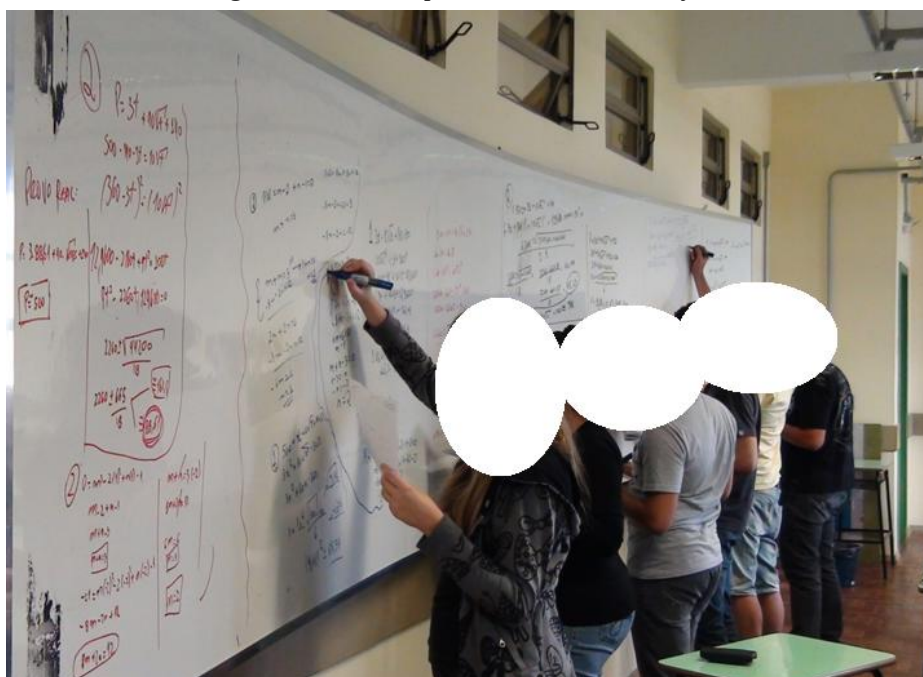
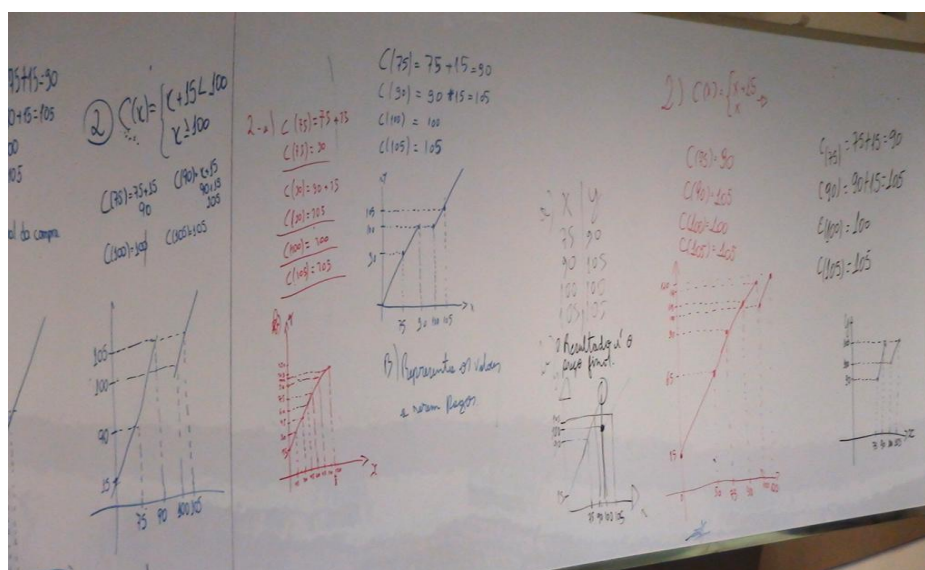


Figura 11: Lousa com as resoluções dos alunos.



1º Encontro

No primeiro encontro foi feita a apresentação do curso, da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a apresentação dos alunos e da professora e a discussão do Termo de Compromisso. Nessa discussão, os alunos concordaram com o Termo de Compromisso e pediram, que fosse acrescentado ao texto, um intervalo de 10 minutos dividindo as 3 horas de aula.

Nesse dia não foi realizada a avaliação diagnóstica que estava prevista, pois compareceram à aula 47 alunos, sendo que o pedido da Unipampa à professora fora de 40 alunos, impedindo que a programação planejada pudesse ser obedecida. Optamos por não realizar a avaliação diagnóstica, pois a listagem definitiva dos nomes dos alunos matriculados na Turma A não havia sido entregue pela Coordenação Acadêmica. Como havíamos preparado 40 cópias da avaliação para os alunos matriculados na Turma A, deixamos para realizá-la no segundo encontro, já que a coordenadora acadêmica havia se comprometido de entregar a listagem dos alunos até essa data. A professora passou, então, à formação dos grupos de trabalho para o curso, mesmo que esses pudessem mudar nos próximos encontros devido à nova listagem de alunos.

A formação de grupos para as atividades foi feita de forma espontânea pelos alunos. Vale salientar que eles, de forma geral, não se conheciam já que a turma possuía alunos de diversas cidades do Rio Grande do Sul, de Santa Catarina, Paraná, Minas Gerais e Bahia. Foi discutida com todos a possibilidade de se fazer a mudança dos grupos a cada encontro – pedido feito por um dos alunos – mas que não teve aceitação da grande maioria. Sendo assim, os grupos seriam mantidos mesmo que algum dos membros faltasse ao encontro.

Passamos, então, à primeira atividade (na íntegra na página 224 deste trabalho) que pedia aos alunos que, dadas cinco figuras, escolhessem qual delas seria diferente das demais. Tal atividade foi definida como a primeira a ser trabalhada com os alunos, pois proporciona o início da ‘ruptura’ com a forma de ensino conhecida por eles durante a Educação Básica. O fato de o problema apresentar mais de uma solução era o ponto de partida, para que os alunos pudessem discutir e ouvir a opinião dos colegas, sobre as formas de pensamento utilizadas por cada um deles e iniciar o exercício de mudança na forma de trabalho, passando de uma metodologia tradicional, do “copiar e resolver sozinho” para o trabalho colaborativo da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em que se faz necessário “ouvir os colegas e discutir resultados”.

Os alunos timidamente iniciaram as discussões em grupo, mas podiam, nessa atividade, dar uma resposta individual. A maioria dos alunos, 28 alunos, escolheram a letra B, 10 escolheram a letra A, 5 escolheram a letra C, 2 a letra D e 2 a letra E. Seguem algumas justificativas para as escolhas dadas pelos alunos:

A: B é a única que é formada por três retas.

B: B é a única que tem ângulo reto...

C: A letra A é a única sem ‘pontas’...redonda quero dizer...

D: A letra C é diferente porque dela foi tirado um pedaço...

E: A letra D é diferente porque tem uma parte reta e outra com curva...

F: A letra E tem três pontas e é unida por curvas... ela é diferente.

Após essa pequena plenária, a professora leu o texto “Aprendendo a Pensar” que acompanha o problema das figuras. Os alunos ficaram surpresos pelo fato de o problema não admitir uma só solução e compreenderam que a atividade queria mostrar a eles que um problema pode ter uma solução, nenhuma ou muitas soluções e que, algumas vezes, precisamos estar dispostos a perceber tais diferenças. Salientamos que muitas vezes irão encontrar situações matemáticas como essa e que, de acordo com a pergunta do problema, devem dar uma resposta.

Como não foi realizada a avaliação diagnóstica nesse encontro, propusemos aos alunos resolver a atividade extraclasse em grupo.

Atividade Extraclasse

Um terreno retangular tem 36 m de comprimento por 21 m de largura. O dono desse terreno deseja cercá-lo com árvores plantadas a iguais distâncias umas das outras e quer manter entre as árvores a maior distância possível medida em um número inteiro de metros. Se em cada canto do terreno for plantada uma árvore, qual será a distância entre as árvores e quantas árvores ele deverá plantar?

Pretendíamos, nessa atividade, compreender como os alunos conseguiam se organizar e trabalhar com os dados do problema. Além disso, tal atividade abordava os conceitos de divisibilidade, medida, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, fatores primos e operações fundamentais.

Pudemos verificar que houve problemas de interpretação e compreensão da atividade. Alguns alunos iniciaram o problema esboçando as quatro árvores, como se elas fossem plantadas antes das demais.

As respostas encontradas pelos grupos foram:

10 grupos encontraram 38 árvores

01 grupo encontrou 34 árvores

01 grupo encontrou 36 árvores

Questionados sobre os resultados encontrados, os grupos se manifestaram da seguinte forma:

G_1 : Profe, nós encontramos 34 árvores mais as 4 que já estavam plantadas...

Pp : O problema disse que estavam plantadas?

G_1 : ..sim...acho que sim...foi isso que entendemos....

G_2 : A gente fez erro de contas mesmo...não contamos duas árvores..

Pp : Como não contaram?

G_2 : ...deixamos elas fora no desenho...e daí não contamos....

Apesar de nem todos os grupos acertarem o problema, pois houve erro de interpretação, muitos deles compreenderam que a distância buscada entre as árvores é de 3 metros e apresentaram cálculos corretos para o máximo divisor comum. Um dos grupos que encontrou 38 árvores fez o raciocínio desenhando o perímetro do retângulo em uma única linha, ou seja, considerou a soma de seus lados e depois fez a divisão pelo número de árvores. Esse grupo avançou um pouco na compreensão, já que os alunos perceberam claramente que deveriam considerar $n + 1$ árvores no perímetro esticado. Ao fechar o retângulo, as extremidades deveriam coincidir em uma árvore, já que o retângulo deve possuir n árvores.

Como uma primeira atividade, o envolvimento entre os grupos foi muito bom e os erros ocorreram também no anseio de responder corretamente a questão. A plenária funcionou bem e os alunos estavam motivados com o trabalho em grupos. Conseguimos atingir nosso objetivo para o encontro que era discutir com aos alunos as diferentes formas de pensar, preparando-os para o trabalho em grupo no curso.

Nesse dia, os alunos não levaram atividade extraclasse.

2º Encontro

No segundo encontro foi realizada uma avaliação diagnóstica com o intuito de verificar o conhecimento matemático trazido pelos alunos dos Ensinos Fundamental e Médio.

Estavam presentes na aula 37 dos 40 alunos matriculados. Três alunos não compareceram a nenhum dos dois encontros.

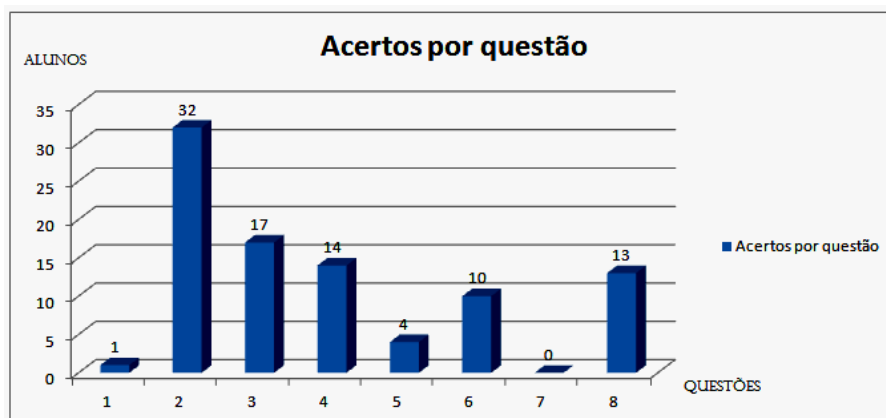
Foi disponibilizada para a realização da avaliação diagnóstica 1 hora de aula. Após esse momento, os alunos pediram que essa fosse resolvida na lousa pela professora. Nesse momento, os alunos participaram comentando seus erros e questionando algumas das soluções apresentadas.

Iremos, brevemente, comentar quais os resultados que os alunos obtiveram na avaliação diagnóstica. Não nos ateremos em analisar os erros por eles cometidos, deixando esse trabalho para ser realizado em outro momento, fazendo agora uma análise mais global dos dados.

A avaliação diagnóstica, que se encontra na íntegra no Apêndice A deste trabalho, é composta por questões de múltipla escolha, tal como as provas do ENEM que os alunos fizeram para obter aprovação para o ingresso na universidade. Numa breve análise dos resultados, pudemos categorizar as respostas como erradas, corretas e em branco, que se divide em dois grupos: sem marcação de nenhuma resposta e a que os alunos marcaram uma resposta sem apresentar nenhum raciocínio.

Apresentamos a seguir um gráfico que mostra o número de acertos por questão da avaliação:

Figura 12 – Número de acertos por questão



Fonte: Elaborado pela autora.

Comentaremos as duas questões com maior número de erros cometidos pelos alunos. Para a questão 1, que tratava de operações fundamentais, apenas um aluno acertou o desenvolvimento e a resposta. Os demais, ou não a desenvolveram (32,5%) ou apresentaram soluções erradas (64,8%). Para a questão 7, que tratava de uma função exponencial definida em partes, não houve nenhum acerto, sendo que três alunos (8,1%) apresentaram

desenvolvimento errado, sete alunos (18,9%) não marcaram qualquer resposta apresentada e 27 alunos (73%) não apresentaram cálculos e marcaram uma das respostas dadas.

Ao analisarmos o resultado final da avaliação diagnóstica, observando o número de questões acertadas pelos alunos, percebemos que um aluno zerou a avaliação, nove alunos acertaram uma questão, oito alunos acertaram duas questões, treze alunos acertaram três questões, seis alunos acertaram quatro questões e um aluno acertou cinco questões. Nenhum aluno acertou seis, sete ou oito questões. Tais números indicam que apenas 18,9% dos alunos acertaram quatro questões ou mais, o que representa pelo menos 50% da avaliação. O índice de notas abaixo de 50% da avaliação diagnóstica é alto, pois devemos considerar que os alunos cursaram a Educação Básica e o Ensino Médio e, ainda, foram aprovados em um exame de seleção de ingresso ao Ensino Superior, o ENEM.

Tais dados corroboram com Nasser (2006, p. 01), quando comenta:

É notoriamente crescente o número de alunos ingressantes no curso superior que apresentam dificuldades em matemática básica. Essas dificuldades prejudicam o desempenho dos calouros principalmente na disciplina de Cálculo.

Fazendo uma análise geral dos resultados da avaliação diagnóstica, reafirmamos a necessidade de trabalhar, com os alunos ingressantes, os conceitos básicos de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, como sugerido no capítulo *A Matemática da Educação Básica necessária para o Ensino Superior*.

Após realizarmos a correção da avaliação diagnóstica na lousa, propusemos aos alunos as atividades preparadas para o 2º encontro. O tempo restante permitiu que apenas a primeira atividade proposta fosse realizada. As demais atividades foram deixadas como extraclasse para serem discutidas no início do encontro seguinte.

Atividade 1

Ivete decidiu dar a maior parte de sua coleção de livros de bolso. Sua coleção é composta de menos de 100 livros. Ela está planejando dar a metade da coleção para o hospital e, em seguida, manter seus 10 livros favoritos. Ela vai dividir os livros restantes igualmente entre quatro amigos. Quantos livros podem estar na coleção de Ivete? Encontre todas as respostas possíveis.

A princípio alguns grupos ficaram um pouco ‘perdidos’ para iniciar o problema. A professora passou nos grupos, fez a leitura do problema e os alunos, aos poucos, começaram a compreender o que realmente era pedido e o que deveriam fazer.

Todos os grupos conseguiram encontrar as soluções procuradas, mas alguns apresentaram dificuldades de compreensão de sinais e operações matemáticas, no processo de escrita.

Um grupo resolveu essa atividade utilizando conceitos de progressão aritmética e os demais resolveram utilizando aritmética básica. Os alunos se sentiram confiantes nesse encontro e acharam o problema proposto de simples resolução. Logo no início dos trabalhos, um grupo solicitou a presença da professora:

A: Professora, mas se é menor do que 100, eu posso escolher que número eu quero? Porque eu quero 94 e eles querem 96...

Pp: Como assim? Vamos ler de novo? (a professora fez a leitura do problema em voz alta com o acompanhamento do grupo)

A: Pois é... disse que é menor de 100...

Pp: Sim...mas veja: a Ivete tem menos de 100 livros. Não dá para a gente 'escolher' quantos livros ela tem. Certo?

B: Mas então não é escolher um número?

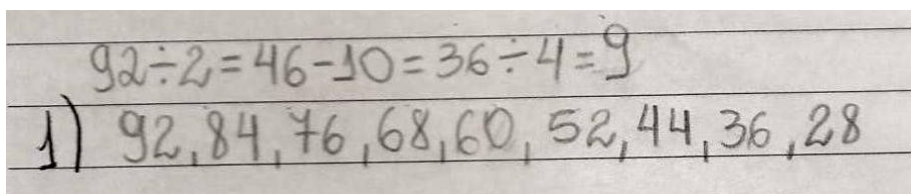
Pp: O que você entendeu? Leia de novo! Ela quer doar uma parte para o hospital, para amigos e quer ficar com alguns. Não vale cortar livros...

A: Posso fazer uma tabela? Não tem uma fórmula?

Pp: Ótima ideia! Não...não precisa de uma fórmula.

Os alunos desse grupo não haviam entendido que era possível obter mais de uma solução para o caso do problema da Ivete. Estavam ainda considerando a possibilidade de utilizar uma fórmula para obter a solução. Depois da nova leitura compreenderam que o problema podia ter mais de uma solução possível.

Figura 13 – Resolução da Atividade 1 – Encontro²⁷ 2.1



$$92 \div 2 = 46 - 10 = 36 \div 4 = 9$$

1) 92, 84, 76, 68, 60, 52, 44, 36, 28

O grupo acima apresentou as respostas possíveis mostrando seu raciocínio apenas para o caso de 92 livros. No cálculo apresentado, podemos identificar um erro de compreensão da

²⁷ Na apresentação dos trabalhos dos alunos, identificaremos o nome da figura seguido pelo encontro e grupo que a apresentou, por exemplo, Resolução da Atividade 1 – Encontro 2.1, ou seja, segundo encontro, grupo 1.

linguagem matemática ao escreverem as contas com sinais de igualdade sem interrupção. Parecem compreender o sinal de igualdade como um operador, como os sinais de subtração e divisão utilizados, já que $92 \div 2 \neq 46 - 10 \neq 36 \div 4$. Uma forma estruturada de apresentar esses cálculos deveria ser:

$$92 \div 2 = 46, \quad 46 - 10 = 36, \quad 36 \div 4 = 9$$

A professora chamou a atenção dos alunos em relação à notação utilizada pedindo que eles lessem o que estava escrito e verificassem que, na leitura e interpretação, era possível ver que as operações não eram iguais e que eles estavam errando ao escrever as operações na sequência. Os alunos argumentaram que faziam dessa forma '*porque era mais rápido*'. Nesse momento, a professora aproveitou a oportunidade de novamente reforçar aos alunos a importância da utilização correta da linguagem matemática.

Figura 14 – Resolução da Atividade 1 – Encontro 2.2

Atividade 1

84 livros	76 livros	68 livros	60 livros	52 livros
42 hospital	38 hospital	34 hospital	30 hospital	26 hospital
10 suete	10 suete	10 suete	10 suete	10 suete
$32 \div 4 = 8$	$28 \div 4 = 7$	$24 \div 4 = 6$	$20 \div 4 = 5$	$16 \div 4 = 4$
44 livros	36 livros	28 livros	92 livros	
22 hospital	18 hospital	14 hospital	46 hospital	9 respostas
10 suete	10 suete	10 suete	10 suete	possíveis
$12 \div 4 = 3$	$8 \div 4 = 2$	$4 \div 4 = 1$	$36 \div 4 = 9$	
(92, 84, 76, 68, 60, 52, 44, 36, 28)				

O raciocínio aritmético dos alunos foi o suficiente para a resolução do problema. Acreditamos que a estratégia dos alunos, na grande maioria, foi encontrar o primeiro número menor que 100 que satisfizesse o problema e, a partir desse, considerando os múltiplos de oito, fazer a distribuição dos livros de acordo com o pedido.

Quando os grupos terminaram de resolver o problema, foi iniciada a apresentação dos resultados na lousa. Todos os grupos participaram desse momento. A professora dividiu a lousa e os alunos colocaram suas resoluções.

Depois de todas as resoluções na lousa, a professora iniciou a plenária perguntando aos alunos qual era a solução para o problema. Os alunos, em coro, leram as respostas que estavam na lousa: 92, 84, 76, 68, 60, 52, 44, 36, 28.

Pp: E o que esses números possuem em comum?

Alunos: São pares...

Pp: O que mais eles têm em comum?

B: São múltiplos de 4 e de 8...

Pp: E o que são múltiplos? E divisores?

C: Que sempre multiplica pelo mesmo... 4, 16, 64... Ou que divide e não dá número quebrado...

Pp: Isso... no nosso caso não era sempre multiplicar pelo mesmo número e sim, que todos os números são resultantes de uma multiplicação por 4 ou por 8, já que os números são pares e $4 \times 2 = 8$. Ou que podem ser divididos por 4.

Nenhum grupo utilizou a álgebra para resolver o problema. Quando a professora apresentou uma solução que fazia uso de uma abordagem que os alunos não haviam utilizado, a álgebra, eles disseram que o problema *‘ficava mais difícil’* assim. A professora perguntou por que, e alguns alunos argumentaram que *‘pensar em x quando não precisa, é mais difícil’*.

As atividades entregues pelos alunos apresentaram apenas um resumo das respostas, não justificando como trabalharam o problema matematicamente e nem os passos utilizados na resolução. Foi pedido aos alunos que apresentassem suas resoluções completas mesmo que estivessem erradas.

Os objetivos do encontro foram alcançados, pois para esse problema, esperávamos que os alunos apresentassem quais eram seus conhecimentos prévios relacionados à divisibilidade, à verificação de padrões e às operações fundamentais com números naturais. Isso foi possível perceber nas atividades por eles apresentadas, nas exposições na lousa e nas discussões em sala de aula.

3º Encontro

Iniciamos o terceiro encontro pelas atividades extraclasse. Os alunos, ao serem questionados sobre a resolução das atividades extraclasse, afirmaram que as haviam feito em

casa. Sendo assim, convidamos um representante de cada grupo a expor sua resolução na lousa.

Percebemos que os alunos estão engajados no curso, pois todos, sem exceção, tentaram resolver as atividades extraclasse. Alguns com maiores dificuldades e outros nem tanto, mas o interessante é que eles estão motivados a pensar nos problemas propostos.

Dentre as atividades deixadas como extraclasse, os alunos apresentaram mais dificuldade na Atividade 3.

Atividade 3

Mike acabou de comprar uma bicicleta nova. Incluindo 6% de imposto sobre a venda, Mike pagou R\$ 296,80 pela bicicleta. A loja acrescentou R\$ 20,00 ao custo para cobrir o trabalho de montagem, o que deu uma margem de lucro de 40%. Quanto custou a bicicleta para a loja?

Os alunos disseram não conseguir compreender o que estava sendo pedido no enunciado do problema e, após algumas discussões com os colegas, todos chegaram à conclusão de que deveriam resolvê-lo utilizando porcentagem e/ou regra de três. Ficou clara a dificuldade em compreender o ‘todo’ e a ‘parte’ de cada passo do problema. Apenas um grupo apresentou raciocínio correto, efetuando cálculos por regra de três. Os demais erraram ao calcular o desconto do imposto sobre a bicicleta. É importante salientar que o problema proposto pode gerar dúvidas em sua interpretação, levando o leitor a pensar que o imposto possa ser descontado apenas no final.

Figura 15 – Resolução da Atividade 3 – Encontro 3.1

Atividade 3

$$\begin{array}{l} \text{Total pago} \quad 296,80 - 140\% \quad 140x = 296,80 \cdot 100 \\ x = \frac{29680}{140} \\ x = 212 - 20 = 192 - 6\% = 180,48 \quad \text{lucro} \end{array}$$

Esse grupo apresenta o cálculo do lucro da loja, depois desconta o valor de montagem e efetua um desconto de 6% sem se referir ao 6% de quê e, finalmente, indicando a resposta como sendo o lucro. Podemos verificar muito fortemente, nesse grupo, a dificuldade de interpretação do problema e da organização do raciocínio matemático pois, mesmo realizando as operações matemáticas corretas, não soube interpretar os dados, utilizando-os de forma

errada. Por exemplo, ao calcularem $x = 212 - 20 = 192 - 6\% = 180,48$, outra vez escrevendo as operações em sequência. Os alunos apresentam o valor da bicicleta descontados os 40% de lucro e, posteriormente, fazendo o desconto de R\$20,00 da montagem, resultando R\$ 192,00. Sobre esse valor, aparentemente, eles calcularam o valor do imposto, chegando a uma solução errada, vinda de um raciocínio errado.

Um grupo apresentou raciocínio correto considerando os R\$ 296,80 como 106% do valor da bicicleta e, posteriormente, calculando o lucro e o valor da montagem.

Figura 16 – Resolução da Atividade 3 – Encontro 3.2.

3) 296,8 — 106%.	280 — 40%.
x — 6%.	x — 40%.
x = 16,8 imposto	x = 80 lucro
296 - 16,8 = 280	
	280
	- 80
	200 - 20 = 180 mais

Dentre todas as atividades propostas até o momento, os alunos consideraram esta a mais difícil. Durante a plenária, a professora questionou os alunos sobre porcentagem:

Pp: O que é uma porcentagem?

A: É uma parte...

Pp: Como assim?

A: ...se eu tenho uma quantia e quero saber quanto é uma parte... eu uso a porcentagem...

Pp: Ok, e como eu chamo o 'todo' em porcentagem?

B: 100%!

As soluções apresentadas pelos alunos foram todas diferentes das pensadas pela professora, que, juntamente com eles, expôs, na lousa, outra forma de resolvê-lo, utilizando álgebra.

Após esse momento, foi iniciado o encontro propriamente dito, em que os alunos, em grupos, receberam a folha de atividades do dia, em que constavam problemas de potenciação e radiciação.

Enquanto os alunos trabalhavam, a professora observava e estimulava o trabalho em grupo. Os grupos não tiveram dificuldade de resolver as atividades propostas, porém

questionaram a conversão de unidades na Atividade 2 e as unidades de medida inglesa utilizadas na Atividade 3.

Figura 17 – Resolução da Atividade 2 – Encontro 3.3.

Atividade 2

O aquário de João tem a forma de um cubo e seu volume é 125 dm^3 . Quais são as dimensões deste aquário em centímetros?

$$\begin{array}{l}
 l^3 = 125 \text{ dm}^3 \\
 l^3 = 5^3 \\
 l = 5 \text{ dm} \rightarrow \boxed{50 \text{ cm}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|c|c|c}
 \text{m} & \text{dm} & \text{cm} & \text{mm} \\
 \hline
 & 0 & 5 & 0
 \end{array}$$

O grupo resolveu o problema escrevendo na forma de potência o número 125 como 5^3 , passando diretamente para a solução do problema. Para a resposta final, apresentou uma tabela para fazer a conversão de unidades.

Atividade 3

Devido à curvatura da Terra, a distância máxima D , que você pode ver do último piso de um edifício cuja altura é h , pode ser estimada pela fórmula:

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

Onde $r = 3960$ milhas é o raio da terra e D e h também são medidos em milhas. Qual a distância que se pode ver do mirante da Torre CN em Toronto, a 1135 pés acima do solo?



Para a Atividade 3 foi necessário que a professora colocasse para os alunos uma tabela de conversão de medidas inglesas (polegada, pé e milha). Foi discutida na plenária a necessidade de um sistema internacional de medidas como forma de padronizar as quantidades. Nesse momento, a professora aproveitou para lembrá-los que algumas medidas inglesas são utilizadas no nosso dia-a-dia, como as polegadas que definem o tamanho das telas de televisores e de celulares e, também as tubulações utilizadas na construção civil.

Seguem algumas soluções propostas pelos grupos:

Figura 18 – Resolução da Atividade 3 – Encontro 3.2.

$1 \text{ polegada} = 2,54 \text{ cm}$
 $1 \text{ pé} = 12 \text{ polegas} = 30,4799 \text{ cm}$
 $1 \text{ milha} = 5280 \text{ pés} = 1.6093 \text{ km}$
 $1 \text{ milha} = 5280 \text{ pés}$
 $n = 1135$
 $w = 0,21$
 $D = \sqrt{2 \cdot 3960 \cdot (0,21)^2}$
 $D = 40,78 \text{ milhas}$

Esse grupo apresenta cálculos que não condizem com a resposta obtida. Ao fazer a substituição de valores na fórmula dada no problema, $\sqrt{2rh + h^2}$, deixa de multiplicar o primeiro termo por $h = 0,21 \text{ milhas}$ e, além disso, o resultado apresentado não corresponde aos dados do problema, ou seja, $\sqrt{2 \cdot 3960 \cdot (0,21)^2} = \sqrt{349,272} \neq 40,78 \text{ milhas}$.

Aparentemente, o resultado encontrado se refere a uma provável utilização dos dados diretamente na calculadora, sem o uso de todas as casas decimais. O que ocorre com esse grupo é que erram na escrita do problema, porém chegam a uma aproximação da resposta correta, evidenciando que não tiveram cuidado com o processo de escrita.

A professora lembrou-os que esse descuido é causador de erros que podem comprometer a resolução do problema e sua interpretação. Salientou ainda que os alunos, em cálculo, terão que resolver e interpretar problemas e que deverão dar atenção para isso.

Figura 19 - Resolução da Atividade 3 – Encontro 3.3.

$1 \text{ mi} \rightarrow 5280 \text{ pés}$
 $1 \text{ pé} = 37 \text{ cm}$
 $X = 0,21 \text{ mi}$
 $D = \sqrt{2 \cdot 3960 \cdot 0,21 + 0,21^2}$
 $D = \sqrt{1702,49 + 0,0441}$
 $D = \sqrt{1702,5341} \Rightarrow 41,261 \text{ mi}$

Os alunos do grupo resolveram a questão corretamente. Porém, ao calcular a altura da torre em milhas (h), escreveram duas casas decimais e na calculadora utilizaram todas as

casas para ter melhor precisão na resposta, já que $\sqrt{2.3960.0,21 + (0,21)^2} = \sqrt{1663,2441} \cong 40,78$ milhas.

Os alunos apresentaram suas resoluções na lousa e foi realizada a plenária conjunta para as duas atividades. A professora iniciou as discussões perguntando aos alunos sobre as operações de radiciação e potenciação:

Pp: Qual a operação inversa da potenciação?

A: A radiciação...

Pp: Tem mais alguma?

Alunos: (silêncio)

Pp: A logaritmação. Lembram-se dos logaritmos do Ensino Médio?

(muitos alunos em silêncio e alguns concordando afirmativamente com a cabeça)

Pp: Ok. Falaremos mais delas agora na formalização e quando estudarmos os logaritmos.

A professora lembrou os alunos sobre as operações inversas da adição (subtração) e da multiplicação (divisão). Apresentou exemplos para elas, e, também, para a potenciação e radiciação, com o intuito de tentar esclarecer as dúvidas dos alunos.

Nesse encontro não foi possível terminar toda a formalização dos conteúdos trabalhados, ficando para o encontro seguinte.

Nos problemas resolvidos hoje, pudemos novamente perceber que alguns alunos têm dificuldades com a linguagem matemática. Talvez possa ser falta de atenção ou até mesmo uma forma de ‘agilizar’ a escrita, porém muitos erros que eles cometeram, sem comprometer gravemente os resultados finais, são de mau uso da linguagem. É necessário que, em novos problemas, apresentemos situações que explorem essa dificuldade deles.

Mesmo assim, os objetivos pensados para o encontro puderam ser atingidos ao estendermos as operações fundamentais já estudadas, acrescentando a potenciação e a radiciação. Também foi possível trabalharmos com a conversão de medidas de comprimento, área, volume e capacidade, assuntos que são importantes para a disciplina de Cálculo.

4º Encontro

A professora precisou, a partir deste encontro, pedir aos alunos que entregassem as atividades realizadas nos grupos antes da realização da plenária, pois percebeu, olhando as atividades entregues nos dois encontros anteriores, que parte dos alunos estava entregando a resposta corrigida na plenária.

Tal atitude teve de ser conversada com os alunos, visto que já havia sido explicado a todos que uma das notas seria destinada às avaliações dos trabalhos produzidos em sala de aula e que as plenárias serviam para mostrar formas diferentes e até mesmo erradas de resolução. Para que a professora pudesse ter um material de análise verdadeiro, foi decidido, então, entregar, juntamente com a folha de atividades, uma folha em branco para que os alunos resolvessem as questões e as entregassem antes do momento da plenária.

Demos início ao quarto encontro pela formalização de conteúdos, que faltava do encontro anterior. Após esse momento, iniciamos a correção das atividades extraclasse. Os alunos encontraram dificuldade em resolver o problema 2 dessa atividade.

Atividade Extraclasse

2) Utilize as propriedades de radiciação para:

a) Mostrar que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$

b) Mostrar que existem a e b racionais tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$

No início da aula, um aluno pediu auxílio à professora. Ele queria mostrar como havia resolvido parcialmente o problema 2 da atividade extraclasse:

A: Professora, não sei como continuar... (o aluno mostrava o caderno com a questão 2)

Pp: O que você pensou?

A: Eu elevei ao quadrado (apontando o caderno) e cortei as raízes...

No caderno do aluno estava a expressão:

$$\left(\sqrt{18 - 8\sqrt{2}}\right)^2 = (a + b\sqrt{2})^2$$

$$(18 - 8\sqrt{2}) = a^2 + 2b^2$$

Pp: Quais raízes?

A: ...dos dois lados da igualdade...olha...(apontando o caderno)

Pp: E isso é possível?

A: Sim! Cortei as raízes.

Pp: E como ficou o lado direito? (observando que o lado esquerdo estava correto)

A: Aí, eu cortei a raiz e depois eu coloquei ao quadrado...

Pp: Quem você colocou ao quadrado?

A: o a e o b ...

Pp: Qual propriedade me garante isso?

A: Isso não sei, mas eu sei que posso....olha só...tá certo!

B: Mas se cortou o quadrado como pode elevar ao quadrado? Hein, professora? Ele cancelou e elevou ao quadrado? Eu acho que não pode...já usou o quadrado...

Pp: Isso mesmo. Pensem nisso. Como resolver então?

O aluno em questão mostra desconhecer as propriedades de potenciação e radiciação e ignora a adição $a + b\sqrt{2}$ ao 'cortar' a raiz e elevar ao quadrado os demais termos, sem identificar a soma de dois termos ao quadrado.

Não apenas os dois alunos do diálogo acima tiveram dificuldades de resolver o problema. Dos 9 grupos presentes, 3 não conseguiram apresentar qualquer solução, quando convidados a comparecer à lousa na plenária. Esse fato nos leva a crer que os conceitos de potenciação e radiciação são deficitários para a maioria dos alunos do curso. Este foi o primeiro momento crítico do curso, onde foi necessário, além das atividades preparadas, fortalecer as bases, citar mais exemplos, pedir a ajuda deles para propor atividades a serem discutidas e trabalhar mais os conceitos da álgebra.

Após a plenária, em que os alunos mostraram-se bastante desanimados, foi solicitado que a professora resolvesse o problema na lousa. Aproveitando a oportunidade de salientar a utilização das propriedades de radiciação e potenciação a professora resolveu o problema e os alunos participaram questionando e, assim, sanando algumas de suas dúvidas relacionadas ao problema proposto.

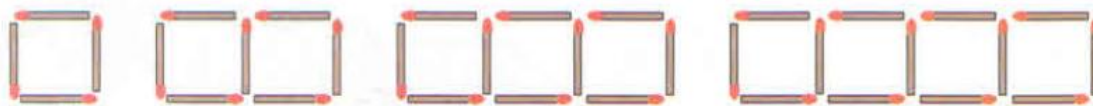
Após a discussão da atividade e dos demais problemas na plenária, deu-se início à entrega das folhas de atividade relativas ao 4º encontro.

Os alunos formaram os grupos e iniciaram as atividades. Foi possível trabalhar as duas primeiras atividades propostas, sendo que a terceira ficou como extraclasse.

A atividade 1 foi resolvida pelos alunos sem maiores dificuldades. Dos oito grupos que participaram da aula, sete resolveram-na utilizando conceitos de progressão aritmética.

Atividade 1

Observe a sequência de retângulos formados por palitos como a que está abaixo:



- Quantos palitos são necessários para formar uma fileira de 10 quadrados?
- E para formar uma fileira de 100 quadrados?
- É possível escrever uma forma geral para as fileiras de palitos?

Figura 20 – Resolução da Atividade 1 – Encontro 4.1.

Atividade 1

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \\ S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \end{cases}$$

a) $a_n = 4 + (10-1) \cdot 3$
 $a_n = 4 + 9 \cdot 3$
 $a_n = 31$
 $a_{10} = 31$

b) $a_n = 4 + (100-1) \cdot 3$
 $a_{100} = 4 + 99 \cdot 3$
 $a_{100} = 4 + 297$
 $a_{100} = 301$

c) Termo Geral da P.A. $\rightarrow$
 $a_1 = a_n = 4 + (10-1) \cdot 3$
 $b) a_n = 4 + (100-1) \cdot 3$

Esse grupo apresenta a solução para o problema utilizando conceitos de progressão aritmética. As letras (a) e (b) do problema foram resolvidas corretamente. Porém, na letra (c), os alunos parecem ter compreendido que a forma geral deveria ser escrita para $n=10$ ou $n=100$ quadrados e não para n quadrados.

Figura 21 – Resolução da Atividade 1 – Encontro 4.2.

Ativ. 1

a) 31

b) $a_n = 4 + (100-1) \cdot 3 = 301$

c) $a_n = 4 + (n-1) \cdot 3$

Esse grupo fez as operações provavelmente utilizando a calculadora, pois apresenta os resultados, mas não mostra, na escrita, os procedimentos utilizados. Desde a apresentação do

curso aos alunos, a professora sempre salienta que, neste curso, os alunos não devem somente apresentar resultados, mas mostrar como chegaram a eles, já que essa é uma das contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, pois consideramos que todo o material produzido pelo aluno será avaliado, bem como suas atividades em grupo.

Apenas um grupo resolveu a atividade através da aritmética básica. Pudemos perceber que alguns dos conceitos do Ensino Médio parecem estar mais presentes no raciocínio utilizado pelos alunos, uma vez que eles foram estudados recentemente pela grande maioria deles, que são oriundos diretamente do Ensino Médio.

Atividade 2

Nas estantes que faz, além dos R\$30,00 pelo carro de entrega, Luciano cobra R\$8,00 por metro quadrado da madeira que efetivamente usa. Quanto cobrará por uma estante que tem duas tábuas verticais laterais de x metros de comprimento e quatro prateleiras de y metros de comprimento, todas com largura de 40 cm?

Na Atividade 2 resolvida pelos alunos, a grande dúvida presente era: como responder a questão se não foram dadas as medidas dos lados das tábuas?

Os alunos não conseguiram chegar ao raciocínio algébrico. Ficaram presos à aritmética e alguns grupos chegaram a afirmar que faltavam dados no problema, ou que, da forma que estava escrito, não havia solução. Foi necessário que a professora lesse o problema em voz alta com os alunos e, através de várias perguntas, indicasse que havia uma forma geral de solução.

G_1 : Não tem como resolver...

Pp : Por que não tem como resolver?

G_1 : Não dá... não tem as medidas das tábuas...

Pp : (dirigindo-se a toda a turma, que nesse momento reclamava...) Vamos ver então, se o aluno A quisesse sua estante com 2 metros de altura e 5 prateleiras, e se o aluno B quisesse sua estante com 1,50 metros de altura e 3 prateleiras, eles pagariam o mesmo preço?

G_2 : Não... não tem sentido...então a gente deixa o x e o y ?

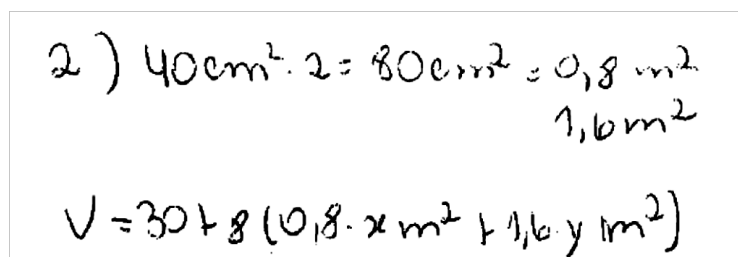
G_3 : Ah! Então professora é para encontrar uma equação?

Pp : Tem como colocar várias alturas e quantidades variadas de prateleiras em uma única forma? (dirigindo-se ao G_1)

G_1 : Não sei...acho que sim... vamos tentar fazer.

Depois de mais algumas discussões os grupos apresentaram suas respostas na plenária e apenas um grupo errou a construção do problema. Os alunos argumentaram que achavam que tinha que ter uma resposta numérica. A professora lhes perguntou se lembravam da primeira atividade realizada no primeiro encontro e eles logo fizeram ligação com a atividade das figuras distintas e novamente foi discutida a possibilidade de soluções diferentes de acordo com o problema proposto.

Figura 22 - Resolução da Atividade 2 – Encontro 4.3.



The image shows handwritten mathematical work. The first line is: $2) 40\text{cm}^2 \cdot 2 = 80\text{cm}^2 = 0,8\text{m}^2$. Below this, $1,6\text{m}^2$ is written. The second line is: $V = 30 + 8(0,8 \cdot x\text{m}^2 + 1,6y\text{m}^2)$.

Esse grupo desenvolveu o problema e apresentou uma resposta simplificada, indicando o raciocínio utilizado. Essa foi a forma de apresentação que os alunos, em geral, encontraram para responder a questão: cálculos simplificados e nenhuma explicação para os dados obtidos e para o seu desenvolvimento.

Na primeira linha, os alunos fizeram o cálculo em metros quadrados, para a construção das laterais e das prateleiras da estante. Na segunda linha, apresentaram a resposta final acrescentando o valor do carrinho, e multiplicaram por R\$8,00 a metragem necessária de madeira para a construção da estante. Escreveram: $V = 30 + 8 \cdot (0,8x + 1,6y)$ sem utilizar as unidades de medida necessárias para identificar as ações que levariam à resposta em reais por metro quadrado.

É perceptível que existe uma ansiedade nos alunos no que se refere a compreender conceitos e sanar dúvidas. Mesmo aqueles alunos que cometeram algum erro grave, como o aluno do diálogo da atividade extraclasse, ao ‘cortar’ a raiz e elevar todos os termos ao quadrado, não aceitam responder as perguntas que os façam lembrar de tais conceitos. Eles pedem ajuda ao professor no intuito de receber uma resposta pronta. Em muitos casos, é perceptível que eles sabem que estão errando, mas não sabem onde estão errando e nem por quê, pois não identificam seus erros, *‘querem pensar de forma correta’*, como disse o aluno à professora, que entendemos que seja *‘pensar com a cabeça do professor’*.

Claramente percebemos que o planejamento do curso e sua aplicação em sala de aula são momentos muito diferentes. Até este encontro, sempre tivemos contratempos ou dificuldades que necessitavam ser sanadas naquele momento e, por isso, o desenrolar do curso

mostrara-se mais dependente das necessidades dos alunos do que do planejamento da professora. Isso é muito bom, porque é a necessidade dos alunos que deve ser atendida. Com isso, a professora conseguiu perceber que existem muitas condições importantes que não consideramos na elaboração do projeto, mas que, em sala de aula, se mostraram necessárias. Isso fez com que a professora ‘alterasse’ o que estava planejado, de forma a atender melhor as dúvidas dos alunos. É o aluno mostrando o que precisa rever/aprender.

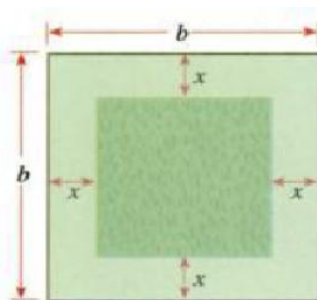
Não foi possível trabalhar a terceira atividade proposta para o encontro, pois as discussões foram intensas e tomaram a aula. Deixamos a terceira atividade para ser pensada juntamente com a atividade extraclasse a ser apresentada no encontro seguinte. Os objetivos para este encontro foram parcialmente atingidos pois, apesar de conseguir trabalhar com quase todos os conteúdos previstos, não conseguimos avançar com os problemas.

5º Encontro

Iniciamos o quinto encontro pela Atividade 3 do encontro anterior. Os alunos foram à lousa e apresentaram suas resoluções. Todos demonstraram compreender o problema e muitos apresentaram nas folhas entregues suas soluções, sem apresentar os procedimentos utilizados, como tem ocorrido com frequência. A professora tem pedido aos alunos, desde o início do curso, que apresentem seus raciocínios e desenvolvimento de cálculo, para que seja possível compreender o que está sendo feito, porém nem sempre os alunos atendem ao pedido.

Atividade 3

A cada semana corta-se o pasto das margens de um terreno quadrado de um estacionamento. O resto do terreno permanece intacto para que sirva de *habitat* de pássaros e outros pequenos animais. O terreno mede b metros por b metros e a margem podada é de x metros de largura.



- Explique porque a área da parte podada é dada por $b^2 - (b - 2x)^2$
- Trabalhe a expressão encontrada na letra a) e mostre que a área da parte podada também pode ser escrita como $4x(b - x)$.

Figura 23 - Resolução da Atividade 3 – Encontro 5.1.

3) $(b^2 - (b - 2x)^2)$ *→ maior* *→ menor*

$$b^2 - (b^2 - 2xb - 2xb + 4x^2) - 4xb + 4x^2 \cdot (-1)$$

$$4xb - 4x^2$$

b) $4x(b - x)$

$$4xb - 4x^2 = 4xb - 4x^2$$

Os alunos, em geral, não apresentam seus raciocínios na íntegra, sendo sempre necessário questioná-los sobre como os desenvolveram. É perceptível a falta de sinais de igualdade e de organização do raciocínio, como no caso acima. Além disso, há pequenos erros de compreensão do que está sendo realizado: ao resolver a primeira parte do problema o grupo, ao realizar o produto notável, escreve $(b - 2x)^2 = b^2 - 2xb \cdot 2xb + 4x^2$, errando a escrita da operação no segundo termo de subtração para multiplicação. Na linha seguinte, voltam a exibir a estrutura correta, escrevendo $-4xb + 4x^2$, a menos do sinal que continuam errando. Na sequência, aparentemente para organizar a resposta, que segundo a compreensão do grupo não poderia ser negativa, multiplicam por (-1) . Transcrevendo a resposta do grupo temos:

$$b^2 - (b - 2x)^2 = b^2 - (b^2 - 2xb \cdot 2xb + 4x^2) =$$

$$= -4xb - 4x^2(-1) = 4xb - 4x^2$$

Durante a plenária, ao serem questionados sobre as formas de fatorar um polinômio, um aluno respondeu que “*deveria colocar em evidência as partes iguais*” e que, depois, “*cortava esses termos*” (iguais).

Pp: Vocês concordam com o colega?

Alunos: Sim.

Pp: Ok, vocês lembram de que já trabalharam com agrupamento e diferença de quadrados?

Alunos: (Silêncio)

Diante dessa posição, a professora resolveu que deveria apresentar aos alunos sua estratégia de resolução do problema e, também, aproveitar a oportunidade para dar alguns exemplos de fatoração de polinômios.

Na sequência, propusemos aos alunos apresentarem a resolução das atividades extraclasse do encontro anterior. A grande maioria disse não ter conseguido fazer as atividades

e pediram que fosse dado tempo para que se reunissem em grupo e trabalhassem em sala de aula, já que, com o término da formalização do 4º encontro, disseram perceber que haviam cometido muitos erros nessa atividade.

A professora percebeu que os alunos necessitavam de maior tempo para as atividades de álgebra e lhes permitiu que voltassem à formação de grupos, após a formalização, para trabalharem. Nesse momento, decidimos utilizar a atividade extraclasse como reforço para o encontro anterior, em que havíamos percebido dificuldades na resolução das atividades propostas.

Após a resolução dos problemas, os alunos foram conduzidos à lousa tal como nas atividades de aula e fizemos mais uma formalização, acrescentando mais exemplos e novos problemas nos quais foram trabalhadas as dúvidas que surgiram.

Depois, iniciamos de fato o 5º encontro, em que a professora entregou as folhas de atividades e folhas em branco para a resolução.

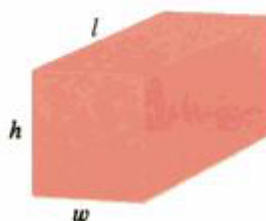
Na Atividade 1 do 5º encontro estavam propostos dois problemas.

Atividade 1

1) Noemi tem certa quantia em um banco. Sua irmã Alice tem R\$ 500,00 a mais. Juntas, elas têm R\$ 3.000,00. Quanto tem Noemi? Quanto tem Alice?

2) A área de superfície total A da caixa abaixo pode ser obtida através da soma das superfícies determinadas pela altura h , da largura w e da profundidade l como

$$A = 2lw + 2lh + 2wh$$



Escreva w em termos das outras variáveis da equação.

Os alunos, na grande maioria, não tiveram dificuldade com essa atividade. Durante a plenária a professora pediu que eles pensassem em resolver o problema 2 da atividade de outra forma. Alguns alunos prontamente apresentaram outras soluções para o problema, isolando as variáveis l e h .

Figura 24 - Resolução da Atividade 1 – Encontro 5.2.

1) $3.000,00$
 $x + x + 500 = 3000$
 $2x + 500 = 3000$
 $2x = 3000 - 500$
 $2x = 2.500$
 $x = \frac{2.500}{2}$
 $x = 1250$
 Joemi = R\$ 1250,00
 Alice = R\$ 1750,00

2) $A = 2lw + 2lh + 2wh$
 $2lw + 2lh + 2wh = A$
 $2lw + 2wh = A - 2lh$
 $w(2l + 2h) = A - 2lh$
 $w = \frac{A - 2lh}{2l + 2h}$

Esse grupo resolveu corretamente os problemas, apresentando, no problema 1, as unidades monetárias na resposta final. No problema 2, foi possível perceber que os alunos refletem o que comumente os professores da escola sugerem: que a variável que se deseja obter esteja no primeiro membro da igualdade.

Durante a plenária os alunos pareciam bem confiantes e responderam as questões feitas pela professora.

Pp: Qual a diferença entre as duas questões?

A: uma delas é uma equação...

Pp: Apenas uma?

A: Não...quero dizer que a segunda dá uma equação de resposta...

Pp: Ah, sim. Então quer dizer que nem sempre conseguimos determinar uma solução numérica para as equações?

Alunos: Sim!

A Atividade 2 e a Atividade extraclasse foram deixadas para o encontro seguinte, pois a professora havia planejado um pequeno questionário, com duas perguntas, para os alunos responderem, sem se identificar, sobre o curso de Matemática Básica e sobre o trabalho em grupo. Tal questionário fora pensado no sentido de ouvir os alunos e, se necessário, fazer novas adaptações ou mudanças no restante do curso. Essa ação não havia sido planejada antecipadamente, foi uma necessidade da professora no andar do curso, para saber como os alunos estavam se adaptando à nova forma de trabalho.

Os alunos receberam uma folha em branco e responderam às seguintes perguntas:

1) Como você está trabalhando em grupo?

2) O Curso está atendendo às suas necessidades?

Com essas perguntas, gostaríamos de compreender como os alunos se sentiam trabalhando em grupos e se eles percebiam que estávamos fazendo uma revisão da matemática dos Ensinos Fundamental e Médio a partir de problemas.

Apenas um aluno respondeu a pergunta 1 dizendo que não gostava de trabalhar em grupo, pois era muito tímido, mas que estava tentando colaborar com os colegas.

Os demais alunos salientaram que estavam gostando, porque podiam debater com os colegas e, muitas vezes, tirar suas dúvidas com eles. Apresentamos abaixo algumas respostas dadas pelos alunos para a primeira pergunta:

A: Bem, discuto questões, dou ideias, aprendo com o conhecimento dos demais integrantes. Dividir e ouvir os métodos de cálculo de cada questão faz com que eu veja mais de uma maneira para chegar a conclusão do cálculo. Embora as vezes não estejam todos presentes.

B: O trabalho em grupo estimula o aprendizado e faz com que a dúvida de um seja resolvida pelo colega, chegando a um resultado.

C: Estou achando bom o trabalho em grupo, ambos se ajudam e um acaba completando o pensamento do outro muitas vezes. Além disso, promove o entrosamento dos colegas.

Um aluno sugeriu, novamente, que os grupos fossem mudados a cada encontro. Sugestão que a professora apresentou ao grande grupo e não teve boa aceitação.

Todos os alunos salientaram na pergunta 2 que o Curso estava atendendo as necessidades e que muitos conteúdos, que já estavam esquecidos, começavam a ser lembrados. Os alunos ainda acrescentaram que estavam aprendendo conteúdos novos no curso. Seguem algumas respostas para a segunda pergunta:

A: Sim, pois muitos detalhes que acabamos nos esquecendo ao longo do tempo é (são) lembrados. Coisinhas que fazem a diferença na hora da resolução do cálculo.

B: Sem dúvidas. O curso além de sanar dúvidas antigas e lembrar conteúdos, também apresenta novas formas para a resolução dos problemas.

C: Sim. Muitos conteúdos que eu não recordava, ou até mesmo nunca tinha visto estão sendo recordados e vistos aqui. Também há bastante atividades, o que faz com que pratiquemos bastante.

Tais depoimentos anônimos dos alunos serviram de motivação para a continuidade do trabalho, além de afirmar uma premissa que já considerávamos como verdadeira: que os alunos necessitam de preparação para as disciplinas do Ensino Superior. Pelo fato de ser um questionário sem identificação, percebemos que os alunos expressaram suas opiniões a respeito do curso sem receio de dizer o que pensam e, com isso, conseguimos entender, na fala deles, a sua importância.

O encontro foi bastante produtivo, pois os alunos estavam interessados e confiantes no desenvolvimento dos problemas. Foi possível trabalhar os objetivos do encontro anterior e também avançar um pouco nos objetivos planejados para o 5º encontro. Para os dois encontros, os objetivos estavam relacionados com a álgebra e com resolução de sistemas lineares.

Além disso, consideramos que é bastante importante acompanhar o andamento dos alunos no curso, e isso foi feito através do questionário proposto. O acompanhamento ocorreu diariamente pela professora, porém as respostas dos alunos, sem identificação, poderiam apresentar novas compreensões do curso por eles.

6º Encontro

Iniciamos o sexto encontro retornando à Atividade 2 do encontro anterior. A professora questionou os alunos, perguntando se eles haviam tentado resolver essa atividade em casa e eles responderam que sim, porém disseram não ter conseguido desenvolver todo o problema. Os alunos, na grande maioria, apresentaram muitas dúvidas em escrever matematicamente o problema 1 desta atividade. Argumentaram, com a professora, que precisavam de um tempo no grupo para que conseguissem trabalhar essa atividade.

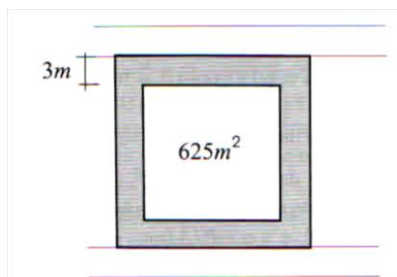
Novamente percebemos que era necessário dar mais tempo para que os alunos trabalhassem e discutissem os problemas, já que acreditamos que retomar as atividades, quando necessário, dá aos alunos uma maior segurança em relação aos conceitos e ao desenvolvimento de raciocínios utilizados por eles. Sendo assim, a professora pediu que se reunissem em grupos e trabalhassem.

Já em grupos, os alunos começaram a discutir o problema. Percebemos que nos grupos, os alunos pensavam conjuntamente e juntos buscavam soluções. Sentiam-se mais confiantes ao discutirem os problemas. No início do curso, o trabalho em grupo não se mostrava tão colaborativo e cooperativo.

Atividade 2

1) A diferença entre dois números é 3. Aumentando cada um desses números 5 unidades, o seu produto aumentará 270 unidades. Determine a soma desses números.

2) Um terreno de forma quadrada foi reduzido, como na figura abaixo, para dar lugar a uma calçada com 3 m de largura. No final, sua área passou a ser de 625 m^2 . Qual era a medida do lado do quadrado original?



Alguns grupos perceberam que se tratava de um sistema de duas equações, enquanto outros não conseguiam escrever as relações para determinar a soma dos dois números.

Um grupo que, desde o início da aula, dizia que não haviam tido dificuldades com a atividade, aproveitou o tempo para resolvê-la de outra forma. Quando questionados, sobre as duas maneiras diferentes, os alunos disseram que parte do grupo tinha resolvido o problema sem utilizar a primeira equação, chegando diretamente à solução da soma dos números, enquanto outros preferiram a segunda maneira de resolver, onde apresentaram além do resultado da soma dos números também os valores para cada um dos números, $x = 23$ e $y = 26$. A primeira forma de resolução apresentada pelos alunos não havia sido pensada pela professora ao resolver o problema no projeto de ensino.

Figura 25 - Resolução da Atividade 2- Encontro 6.1.

Handwritten mathematical work showing two methods to solve a system of equations:

1) $x + y = 3$
 $(x+5)(y+5) = xy + 270$
 $xy + 5x + 5y + 25 = xy + 270$
 $5x + 5y = 270 - 25$
 $5x + 5y = 245$
 $x + y = 245/5 = 49$ ou

2) $\begin{cases} x - y = 3 \\ (x+5)(y+5) = xy + 270 \end{cases}$
 $x = 3 + y$
 $(3+y+5)(y+5) = (3+y)y + 270$
 $(8+y)(y+5) = y(3+y) + 270$
 $8y + 40 + y^2 + 5y = 3y + y^2 + 270$
 $13y + 40 = 3y + 270$
 $13y - 3y = 270 - 40$
 $10y = 230 \quad y = 23$
 $x = 3 + 23 = 26$
 $x + y = 23 + 26 = 49$

O problema 2 da Atividade 2 foi resolvido mais rapidamente pelos alunos sendo que eles não apresentaram muitas dúvidas. Alguns alunos mostraram os seus cálculos, outros

apenas indicaram o raciocínio utilizado para resolver o problema. A professora questionou-os sobre as diferenças entre os dois problemas:

Pp: Qual a diferença que vocês perceberam entre os problemas, já que acharam o segundo mais fácil?

A: Ah! O segundo é mais visual...

Pp: Como assim?

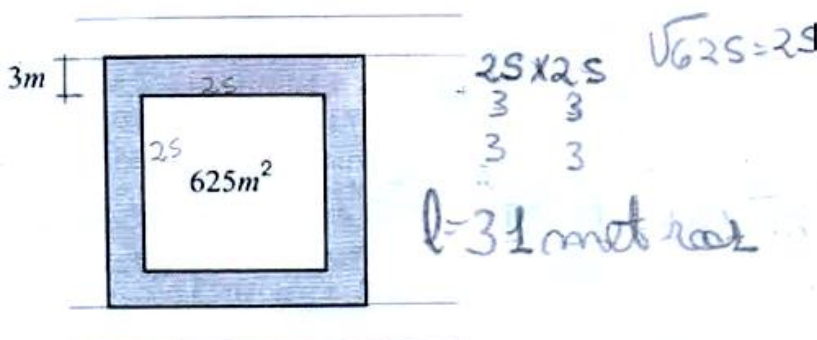
A: A gente consegue ver, entende profe? Fica mais fácil...dá para resolver sem escrever uma equação...

Pp: E o primeiro?

A: O primeiro é muito mais difícil....cheio de letras...

O grupo a que esse aluno do diálogo pertencia, apresentou uma solução para o problema 2 utilizando a aritmética e o raciocínio lógico:

Figura 26 - Resolução da Atividade 2- Encontro 6.2.



Escreveram que o lado da figura interna possuía 25 m, já que a área total dessa figura era de $625 m^2$. Depois, como ainda restavam 3 metros de calçada ao redor do terreno, escreveram 6m ($3m + 3m$) que era o que faltava adicionar, para obter, no final, 31m de lado, que era o que estava sendo perguntado. A forma de resolução utilizada pelo grupo não havia sido pensada pela professora no momento de planejar o problema e mostrou-se bem mais simples do que a dos demais grupos.

Figura 27 - Resolução da Atividade 2- Encontro 6.3.

Handwritten work showing the solution of a system of equations:

$$\begin{aligned} d) \quad y &= x + 3m + 3m & \sqrt{65} &= 25 \\ y &= 25 + 3 + 3 & \text{ou } (x-6)^2 &= \sqrt{65}m^2 \\ y &= 31m & x - 6 &= \pm 25 \\ & & x &= 25 + 6 = 31m \\ & & x &= -25 + 6 = -19 \end{aligned}$$

Os alunos desse grupo resolveram a equação para determinar o lado do quadrado original escrevendo inicialmente que tal lado seria descrito como $y = x + 3m + 3m$. Ao lado apresentam a equação que define a área da figura interna e através das operações necessárias, obtiveram duas raízes. Como o problema se tratava de uma área, excluíram a segunda resposta, que era um número negativo, e consideraram apenas o valor $x = +25m$ para, então, obter a resposta final, $y = 31m$.

Após a resolução dessa atividade, os alunos foram convidados à plenária. Ao serem perguntados, pela professora, sobre as diferenças entre as equações encontradas nos dois problemas da atividade, responderam que poderiam resolver as duas como quadráticas ou como lineares. E que a diferença era que 'uma tem o quadrado' e a outra 'não tem termo quadrado, a potência é o 1'. O grupo que usou a equação quadrática optou por trabalhar com a área do problema, enquanto o grupo que trabalhou com a linear utilizou o lado do quadrado. As duas resoluções, citadas acima, foram apresentadas pelos grupos na plenária e, pelas respostas dadas, eles conseguiram perceber que era possível trabalhar o mesmo problema com dois enfoques: da equação quadrática e da linear.

Na sequência, os alunos pediram que as atividades extraclasse do 5º encontro fossem resolvidas em sala de aula. A professora resolveu deixar que os alunos voltassem aos grupos para discutir a atividade extraclasse, mesmo sabendo que tal atitude poderia atrasar o planejamento das atividades. Sendo assim, os alunos voltaram aos seus grupos para realizarem a atividade extraclasse do encontro anterior. Dentre os problemas propostos, os alunos apresentaram maiores dificuldades no problema 1, letra (e), que envolvia a resolução de uma equação biquadrada. As demais equações foram resolvidas sem muitas dúvidas pelos alunos.

Atividade Extraclasse

1) Resolva a equação:

$$e) x^4 + x^2 - 6 = 0$$

2) Contração de Vigas de Concreto - Como são conjuntos de concreto, encolhem quanto maior o teor de água e mais baixa será a contração. Se uma viga de concreto tem um conteúdo $w \text{ kg/m}^3$, então sofrerá contração de acordo com um fator

$$S = \frac{0,032w - 2,5}{10.000}$$

Onde S é a fração de longitude da viga original que desaparece devido à contração.

a) Uma viga de $12,025m$ de comprimento é produzida com concreto que contém $\frac{250kg}{m^3 \text{ de água}}$.

Qual é o fator de contração S ? Quanto medirá o comprimento da viga quando secar?

b) Uma viga mede $10,014m$ de comprimento quando produzida. Queremos que se contraia a $10,009m$, por isso o fator de contração deve ser $S = 0,00050$. Que quantidade de água proporcionará esta contração?

Figura 28 - Resolução da Atividade extraclasse – Encontro 6.4.

Handwritten work for solving the equation $x^4 + x^2 - 6 = 0$:

$$1) x^4 + x^2 - 6 = 0$$

$$(x^2)^2 + x^2 - 6 = 0$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$b^2 - 4ac$$

$$1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$

$$\Delta = 25$$

$$y = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$y' = \frac{-b}{a} = -3$$

$$y'' = \frac{b}{a} = 2$$

$$x^2 = y$$

$$x^2 = -3$$

$$x = \sqrt{-3}$$

$$\text{R}$$

$$x^2 = y$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Esse grupo, ao resolver o problema, desenvolve a técnica operatória de forma correta, porém erra ao trabalhar com números positivos e negativos fazendo $\frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 2$ e $\frac{1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ e, como consequência, erra a resposta, o que parecem erros de falta de atenção.

No problema 2, as dúvidas que surgiram foram em relação ao número de casas decimais utilizadas e nas unidades de medida. A grande maioria dos alunos utilizou a calculadora para realizar os cálculos e apresentaram respostas e raciocínios corretos para o problema.

Os alunos foram à plenária e debateram bastante sobre os problemas. Quando questionados sobre a solução da equação biquadrada, alguns alunos alegaram que ‘aprenderam’ a fazer com os colegas durante o grupo, já que afirmaram não ter estudado na

escola. A professora lembrou-os que tal equação já havia sido trabalhada no curso, no segundo encontro, e alguns alunos falaram que *‘voltaram no caderno e olharam o problema para lembrar de como fazer.’* Segue um diálogo sobre as soluções da equação biquadrada:

Pp: Quantas soluções vamos encontrar?

A: Quatro professora. Tem grau quatro!

B: Eu não achei quatro....então errei...

Pp: Quantas achou?

B: Duas...

C: Mas nosso grupo também achou duas...agora não entendi mais nada!

Pp: Pessoal, vamos ver com calma. Primeiramente não está errado o problema. É possível encontrar quatro raízes, mas podem aparecer menos raízes com multiplicidade. Mais de quatro não pode. Alguém achou mais de quatro?

Alunos: Não!

Pp: Ok. E todas as raízes que acharam são reais?

A: Eu achei duas reais e duas complexas...por isso eu disse quatro.

Pp: Aham...e os outros?

B: É...eu tinha esquecido das outras que eu joguei fora...

Pp: Pessoal, estamos trabalhando nos reais, mas isso não impede de vermos que temos raízes complexas...Considerando as complexas, quantas raízes encontraram?

Alunos: quatro...

Na conversa da plenária ficou evidente que alguns alunos, não apresentam muita dificuldade em utilizar as fórmulas que conhecem, como a da equação de segundo grau, porém não possuem o hábito de analisar se as soluções obtidas são válidas.

Nessa aula, alguns alunos questionaram a necessidade de ir à lousa no término de cada atividade. A professora salientou a troca de experiência que tal atitude propicia, visto que os alunos podem aprender formas diferentes de resolver o mesmo problema, além de ter, em alguns casos, a explicação dos colegas de como resolveram tal problema. Os alunos concordaram que, algumas vezes, se aprende com a ida à lousa, porém sugeriram que tal procedimento não fosse realizado em todas as atividades, pois acreditam que se perde tempo com isso.

A professora salientou aos alunos que continua acreditando que a troca de experiências de grupo pode trazer-lhes mais conhecimento e que apenas os conteúdos sem discussão

podem tornar a aula um tanto sem sentido, e que reconhece que, algumas vezes, a ida à lousa pode ser substituída por uma conversa mais informal ou que alguns grupos apresentem suas soluções, desde que sejam soluções distintas e que possamos nos organizar com isso. Tal decisão, tomada pelo grupo e aceita pela professora, não afeta as condições do termo de compromisso. Quanto à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o roteiro de atividades a ser seguido é uma sugestão que pode, se necessário, aceitar mudanças na ordem e ou na sua organização. Ficou acertado, então, que quando a turma possuir dificuldades em resolver algum problema, todos os grupos devem apresentar seus raciocínios e cálculos na lousa e que, em outros momentos, podem apenas alguns grupos irem à lousa.

A aula já estava se encaminhando para o fim, então a professora entregou a folha de tarefas do 6º encontro para que os alunos a lessem em casa e trouxessem ideias para resolver os problemas na próxima aula.

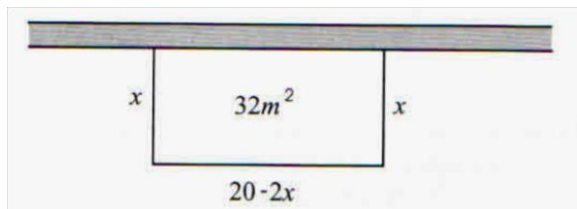
Os objetivos do encontro, como planejados, não foram atingidos visto que os problemas deste encontro não puderam ser totalmente trabalhados, porém foi possível trabalhar as atividades restantes do encontro anterior que haviam sido deixadas para casa e que, se mostraram difíceis para os alunos.

7º Encontro

Iniciamos o sétimo encontro pela folha de atividades do sexto encontro. Os alunos pareciam desanimados e apresentavam dificuldades de concentração. Já se conhecem há mais de uma semana e começam a interagir mais facilmente, sendo que muitas vezes os assuntos de fora da sala de aula tendem a tomar parte dos comentários dos alunos nos grupos de estudo. A professora pediu atenção e colaboração de todos para que o encontro fosse produtivo. Questionou-os se haviam lido as atividades do 6º encontro levadas para casa e todos afirmaram que sim. Foram organizados os grupos para trabalhar na folha do 6º encontro. Os alunos resolveram a atividade 1, problema 1, após algumas discussões nos grupos, porém não conseguiram resolver o segundo problema.

Atividade 1

1) Meu vizinho, com 20 m de cerca, construiu um cercado retangular de $32 m^2$ de área, utilizando seu muro como um dos lados. Quanto medem os lados desse retângulo?



2) É possível que o vizinho da atividade anterior use o muro como um dos lados, fazendo um cercado retangular de $32 m^2$ de área, porém usando uma cerca menor?

Os alunos não perceberam que, no problema 1, havia duas equações que, juntas, formavam o sistema $\begin{cases} x \cdot y = 32 m^2 \\ 2x + y = 20 m \end{cases}$ e que, no problema 2, o sistema formado era $\begin{cases} x \cdot y = 32 m^2 \\ 2x + y = c m \end{cases}$, onde c representa o comprimento da cerca e x e y são dados em metros.

Utilizaram a figura proposta no problema e dela escreveram: $x(20m - 2x) = 32m^2$ obtendo como solução $x = 2 m$ e $x = 8 m$.

Nesse momento um grupo chamou a atenção da professora argumentando que a figura posta no problema 2 garantia que apenas uma das soluções encontradas era válida, $x = 2 m$.

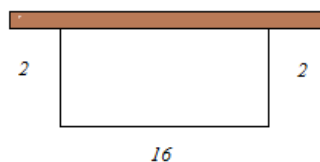
G_1 : Professora, a resposta é só essa não é?

Pp : Como assim só essa? O que querem dizer?

G_1 : Que o desenho que está no problema só aceita essa resposta...

Pp : Por que só essa resposta? Não entendi. Me expliquem melhor...

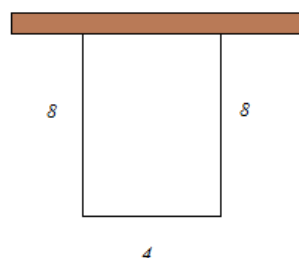
G_1 : Olha só...(um aluno do grupo inicia um esboço no caderno...) se for como está no problema seria assim (mostrando o desenho que fez...)



Se fosse virada, pode ter outra solução...mas aí não está no problema....

Pp : Como não está no problema?

G_1 : Por que daí seria assim ó....(mostrando um outro desenho) e esse não é o desenho do problema...



Pp: Pessoal, o problema apresenta um esboço apenas e não define que essa forma é a única solução... Vamos conversar no grande grupo.

A professora iniciou uma discussão a esse respeito com o grande grupo, e mais um grupo se manifestou dizendo que concordavam com o primeiro. Alguns alunos disseram que, para não haver engano, o problema não deveria apresentar nenhum esboço. Segundo eles, o problema proposto, ao trazer um esboço no enunciado, deixa a possibilidade de que a interpretação seja feita apenas pela figura dada. A professora então explicou a todos que os esboços são um auxílio para a resolução dos problemas e não uma ‘apresentação de soluções’.

Apenas um grupo apresentou a resolução com a análise do discriminante.

Figura 29 - Resolução da Atividade 1- Encontro 7.1.

Sim. $x(c-2x)=32$
 $xc - 2x^2 = 32$
 $-2x^2 + xc - 32$
 $2x^2 - xc + 32$

$c \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4 \cdot 2 \cdot 32}}{4}$
 $c \pm \frac{\sqrt{c^2 - 256}}{4}$

$\Delta = c^2 - 256 = 0$
 $c^2 - 256 = 0$
 $c = \pm 16$
 $c = 16m$

Foi combinado com os grupos que todos iriam à lousa após o término da Atividade 2 e, então, apresentariam as duas atividades completas.

Atividade 2

1) Utilize o discriminante para determinar quantas soluções reais cada equação dada possui:

- a) $x^2 + 4x - 1 = 0$
- b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
- c) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

Nesta atividade os alunos, na grande maioria, tiveram dificuldade com a palavra ‘discriminante’ que apareceu no enunciado do problema 1. Alguns alunos argumentaram que

não sabiam o que era o discriminante e, então, a professora utilizou o dicionário²⁸ para dar definições da palavra. Dois grupos compreenderam inicialmente o que era o ‘discriminante’ e disseram aos demais que era o ‘delta’.

O problema 2 desta atividade, após a leitura do dicionário e discussão entre os grupos, foi resolvido pelos alunos sem maiores dificuldades, pois usaram a fórmula para obter a solução.

Figura 30 - Resolução da Atividade 1- Encontro 7.2.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \rightarrow 16 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20 = \Delta > 0 \quad 2 \text{ raízes} \\ \Delta &= 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 \rightarrow \Delta = 0 \quad 1 \text{ raíz} \\ \Delta &= 4 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \rightarrow -\frac{4}{3}, \Delta < 0 \quad 0 \text{ raízes } \times \end{aligned}$$

Esse grupo, assim como os demais, apresenta as respostas para o problema utilizando a fórmula $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ e, no final, classifica as respostas obtidas.

Após a resolução das Atividades 1 e 2 os alunos as apresentaram na lousa. Nesse dia, em particular, a plenária desenvolveu-se durante todo o encontro, visto que os alunos levaram a professora a discutir algumas questões na aula como, por exemplo, o discriminante. Depois da plenária, foi realizada a formalização dos conteúdos matemáticos do encontro. Os alunos levaram as atividades extraclasse para resolver em casa.

Os objetivos para o 6º encontro, que eram discutir o discriminante nas equações quadráticas e estudar os sistemas de equações, puderam ser atingidos totalmente.

Os alunos, após dois encontros trabalhando com a álgebra, começaram a se sentir mais confiantes. Consideramos que foi muito importante deixar mais tempo para que os alunos trabalhassem os problemas propostos nos dois últimos encontros, já que, nesse encontro, os alunos sentiram-se mais confiantes e as discussões, nos grupos, foram mais produtivas.

²⁸ A professora levava à sala de aula um exemplar de dicionário da Língua Portuguesa, emprestado da biblioteca, para tentar sanar possíveis dúvidas dos alunos durante a resolução dos problemas.

8º Encontro

Iniciamos o encontro pelas atividades extraclasse do 6º encontro. Os alunos apresentaram suas resoluções e demonstraram compreender os problemas, pois comentaram que eles foram resolvidos mais facilmente depois do último encontro. Quando questionados pela professora sobre suas dificuldades, argumentaram que não as tiveram, pois estudaram em grupos depois da última aula. Comentaram que as dificuldades que eles sabiam que possuíam da Educação Básica, estavam começando a aparecer no Curso de Matemática Básica. A professora os questionou se achavam os problemas propostos anteriormente fáceis, e eles responderam que *‘de início acharam os problemas muito fáceis’*, mas que, agora, *‘estavam achando tudo muito difícil’*.

A professora entregou a folha do 7º encontro e os alunos se organizaram em grupos para trabalhar.

Logo na leitura das atividades da folha entregue, os alunos começaram a reclamar sobre os problemas, alegando que não haviam estudado nada sobre conjuntos no Ensino Médio. A professora pediu que eles os discutissem nos grupos e tentassem resolvê-los. Os alunos juntaram-se em grupos, porém não mostraram interesse em resolver os problemas propostos, e a professora precisou intervir no andamento dos trabalhos, discutindo com eles primeiramente a notação utilizada, já que eles argumentavam que não sabiam ou não lembravam o que significava alguns dos símbolos da atividade. Após esse momento, a professora pediu que os alunos retornassem à discussão nos grupos e fixou um tempo de 5 minutos para que a atividade fosse apresentada na lousa, visto que já haviam se passado mais de 30 minutos da entrega da folha.

Atividade 1

1) Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, e, v\}$, $C = \{\}$ a afirmativa correta é:

- a) $\{a\} \in A$
- b) $C \in B$
- c) $B \subset A$
- d) $B \not\subset C$
- e) $C = \{x/x \neq x\}$

2) Se A é um conjunto com 5 elementos, determine o número de subconjuntos que podem ser formados contendo pelo menos 1 elemento.

3) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d\}$; $C = \{a, c, d, e\}$, encontre o conjunto $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$.

Na apresentação dos resultados na lousa, apenas um grupo acertou o problema 1, sendo que 6 grupos marcaram a opção letra (a), 1 grupo letra (b), 1 grupo letra (d) e 1 grupo letra (e) demonstrando que não dominavam os conceitos e as relações possíveis entre conjuntos e elementos. O problema 2 da mesma atividade foi resolvido por todos os grupos sendo que três acertaram a resolução e o resultado, pois os demais erraram ao não considerar o conjunto vazio ou algum dos subconjuntos do conjunto. O problema 3 foi resolvido por 5 grupos dos quais apenas 1 acertou a resolução.

Os alunos pediram que a professora resolvesse os problemas na lousa e também solicitaram não entregar suas respostas justificando que as folhas, na maioria, estariam em branco. Apenas um grupo entregou a resolução da atividade.

Figura 31 - Resolução da Atividade 1- Encontro 8.1.

1. e

2. $2^n = 2^5 = 32$ elementos

3. $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$
 $(b) \cup (a, e) \cup (c)$
 $S = \{b, a, e, c\}$

Esse grupo não apresentou justificativa para a resposta do problema 1. Para o problema 2, apresentou seu desenvolvimento pela forma geral, que se obtém fazendo a somatória das combinações dos elementos do conjunto e, para o problema 3, apresentou a solução escrevendo os elementos resultantes de cada uma das operações dos conjuntos. O grupo respondeu corretamente todos os problemas da atividade. A professora esperava que os grupos escrevessem os conjuntos no problema 2 o que não ocorreu.

A professora aceitou o pedido dos alunos e foi à lousa resolver os problemas com intuito de auxiliá-los nos conceitos pertinentes à Teoria dos Conjuntos, apresentando novos exemplos e aproveitando o momento para questioná-los e fazê-los participar da aula. A professora reforçou aos alunos a importância do conceito de conjunto comentando com eles que esse é um conceito fundamental da matemática.

Nesse momento do curso, ficou claro para a professora que muitos alunos não compreendiam a linguagem da Teoria dos conjuntos e alguns deles argumentavam que nunca haviam visto esse conteúdo.

A plenária ocorreu muito timidamente nessa atividade, já que, em geral, os alunos não respondiam as perguntas feitas pela professora. Um grupo apresentou respostas e

desenvolvimento correto para quase todas as questões e, na plenária, um membro desse grupo participou respondendo algumas perguntas feitas pela professora:

Pp: O que é um conjunto vazio?

A: É um conjunto que não tem elementos....

Pp: Ok. E como poderíamos dar exemplos de subconjuntos de um conjunto?

A: É uma parte dele né profe?

Pp: Isso...vejam ... aqui na sala da Turma A , temos um conjunto de alunos da Unipampa e subconjuntos que são, por exemplo, os alunos da Civil, os alunos da Mecânica, os alunos da Elétrica e os alunos da Telecom. Podemos ver de outra forma: homens e mulheres, por idade, etc.

A professora então questionou esse aluno sobre como ele via a atividade e ele respondeu “*eu estudei isso no Ensino Médio... na verdade só tem que saber as regras...*”.

A professora salientou aos alunos que a ‘ideia’ do curso não era saber somente regras e, sim, compreender conceitos como a teoria dos conjuntos que é fundamental para trabalhar conceitos importantes do Cálculo, tais como funções, limites, derivadas e integrais.

Após esse momento, os alunos passaram para a Atividade 2 da folha.

Atividade 2

1) Liste os elementos dos conjuntos dados que são:

- a) Números naturais ($\mathbb{N}$) b) Números inteiros ($\mathbb{Z}$)
c) Números racionais ($\mathbb{Q}$) d) Números irracionais ($\mathbb{I}$)

$\{0; -10; 50; \frac{22}{7}; 0,538; \sqrt{7}; -\frac{1}{3}; \sqrt[3]{2}\}$

$\{1,001; 0,333 \dots; -\pi; -11; 11; \frac{13}{15}; \sqrt{16}; 3,14; \frac{15}{3}\}$

2) A respeito dos conjuntos numéricos, comente as afirmativas abaixo:

- a) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$
b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$
c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
d) $\mathbb{N}^* \not\subset \mathbb{R}$
e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
f) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$

Os alunos resolveram a atividade 2 sem muita dificuldade. Disseram que trabalhar com os conjuntos numéricos era mais ‘fácil’ e, que, depois da formalização da atividade anterior, ficara mais fácil ‘lembrar’ ou ‘saber’ como resolvê-los, pois agora sabiam a notação.

Figura 32 - Resolução da Atividade 2- Encontro 8.2.

1- a) $\{0; \sqrt{16}; \frac{15}{3}; 11; 50\}$
 b) $\{-11; -10; 0; \sqrt{16}; \frac{15}{3}; 11; 50\}$
 c) $\{0,538; 1,001; 3,14; -\frac{1}{3}; 0; -10; 50; 0,333...; -11; 11; \sqrt{16}\}$
 d) $\{\frac{22}{7}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; -\pi\}$

Os alunos desse grupo acertaram algumas das respostas, como a letra (a) e letra (b), porém mostraram dificuldades em compreender os conjuntos dos números racionais e dos irracionais, pois na letra (c), onde pedia-se os racionais, não listaram os números $\frac{22}{7}$, $\frac{15}{3}$ e $\frac{13}{15}$ e na letra (d), onde pedia-se para listar os irracionais, colocaram todos os irracionais mais o número $\frac{22}{7}$. Na letra (c) parece que os alunos se esqueceram de alguns números da listagem $\{\frac{13}{15}, \frac{15}{3}\}$ já que $\frac{13}{15}$ não apareceu em nenhum outro momento e $\frac{15}{3}$ foi escrito na lista dos naturais. Na letra (d) apresentaram um erro ao considerar que $\frac{22}{7}$ é um irracional.

Figura 33 - Resolução da Atividade 2- Encontro 8.3.

1)
 a) $N = \{0; 11; 50\}$
 b) $Z = \{-10; 11; 0; 11; 50\}$
 c) $Q = \{0,333; -\frac{1}{3}; 0,538; 1,001; -11; 0; 3; 14; 11; 50; \frac{15}{3}; \sqrt{16}; \frac{13}{15}\}$
 d) $I = \{-\pi; \frac{22}{7}; \sqrt{2}; \sqrt{3}\}$

Os alunos do grupo não reconheceram os números $\sqrt{16}$ e $\frac{15}{3}$ como números naturais, porque, segundo eles, ‘associaram a forma como o número está apresentado no problema à forma geral de números irracionais e de números racionais’. Na letra (b) os alunos do grupo

não consideraram $\sqrt{16}$ e $\frac{15}{3}$ na resposta. Na letra (c) não consideraram $\frac{22}{7}, -10$ como elementos do conjunto dos racionais. Este grupo, assim como a grande maioria, considerou que $\frac{22}{7}$ é um número irracional, pois disseram eles que, na divisão de 22 por 7 há infinitos números.

Dos nove grupos presentes, seis apresentaram o número $\frac{22}{7}$ como irracional. Um considerou apenas os números $\sqrt{7}$ e $-\pi$ como respostas para a letra (d), outro grupo considerou que os números $\sqrt{16}, \sqrt{7}, -\pi, \sqrt[3]{2}$ como respostas para a letra (d). Apenas um grupo considerou que a resposta da letra (d) seria $\sqrt{7}, -\pi, \sqrt[3]{2}$. A professora, na plenária, aproveitou para lembrá-los que os números irracionais não são aqueles que ‘possuem infinitas casas’ e sim aqueles que não possuem um período que se repete, não podendo, portanto ser escrito como um racional.

No segundo problema da atividade, apenas um grupo não acertou todas as alternativas considerando que a letra (e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ estava errada. Os demais grupos acertaram todas as alternativas porém, dos nove grupos, apenas quatro apresentaram justificativas para as suas respostas, sendo que os demais só colocaram certo ou errado.

Durante a plenária, a maioria dos alunos se envolveu respondendo as questões que a professora colocou e foram discutidas as dificuldades apresentadas por eles. Na plenária, a professora perguntou aos alunos se conheciam a construção dos conjuntos numéricos. Como muitos responderam negativamente, aproveitou o momento para contar um pouco dessa história e da necessidade que os seres humanos tiveram, propiciando a criação de novos conjuntos, dotados de novas propriedades.

Nesse encontro tivemos o primeiro momento de desinteresse dos alunos em relação aos problemas propostos. Parte desse desinteresse pode ser atribuído ao fato de que os alunos não consideraram os problemas propostos como ‘problemas’ para eles. Esse argumento é válido e deve ser considerado, porém podemos, também, tentar avaliar a negativa dos alunos em relação a esse conteúdo específico. O conteúdo do encontro em questão faz parte do elenco de conteúdos do Ensino Médio, ou seja, não era ou não deveria ser ‘novo’ para os alunos. Não eram problemas porque não apresentavam um texto? Não eram problemas porque não foram os alunos que escolheram? Quando trabalhamos com Resolução de Problemas, queremos que o aluno construa um conhecimento novo. Para boa parte da turma os problemas desse encontro não seriam problemas de fato, pois não geravam interesse em resolvê-los. Porém, para um grupo, os problemas foram tratados como o de qualquer outro conteúdo.

Como os conceitos da Teoria de Conjuntos são importantes para o Cálculo, consideramos esses ‘supostos exercícios’ como problemas. Nesse encontro foi possível perceber que a escolha dos problemas e até mesmo dos conteúdos abordados não se mostraram interessantes para os alunos.

A quebra desse desinteresse ocorreu, quando os problemas começaram a apresentar os conjuntos numéricos. A partir desse momento, os alunos se sentiram mais confiantes e diziam ‘saber’ como deviam trabalhar.

Os objetivos do 7º encontro foram trabalhados, uma vez que os alunos estudaram as relações e as operações entre conjuntos.

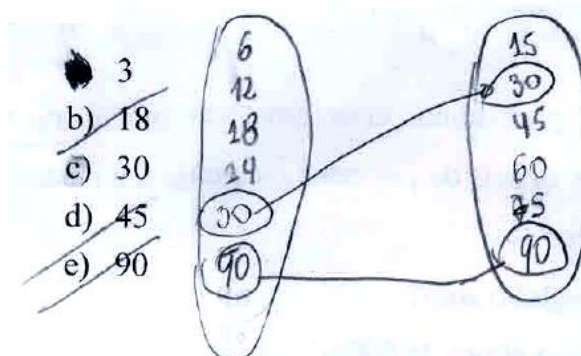
9º Encontro

Iniciamos este encontro pelas atividades extraclasse do 7º encontro. Os alunos apresentaram suas resoluções oralmente e a professora foi à lousa registrar as respostas dadas. Quando iniciada a discussão sobre os problemas, a professora percebeu que os alunos, no primeiro problema, não se sentiam seguros sobre as resoluções que haviam feito.

Atividade Extraclasse

- 1) A interseção do conjunto de todos os inteiros múltiplos de 6 com o conjunto de todos os inteiros múltiplos de 15 é o conjunto de todos os inteiros múltiplos de: (justifique sua resposta)
- a) 3
 - b) 18
 - c) 30
 - d) 45
 - e) 90

Figura 34 - Resolução da Atividade extraclasse- Encontro 9.1.



Esse grupo aparentemente utilizou o método da ‘tentativa e erro’, já que o problema era de múltipla escolha. Os alunos fizeram um diagrama de Venn e nele colocaram alguns múltiplos de 6 e 15. Apresentaram como resposta a letra (a), mas é visível a dúvida durante sua resolução, visto que parecem ter marcado anteriormente a letra (c).

Segue o diálogo da primeira atividade durante a plenária, quando a professora e os alunos discutiam sobre os múltiplos e divisores:

Pp: Primeiro... pessoal, são inteiros...Vamos ver...quem são os múltiplos de 6?

A: 2,3,6...

Pp: Esses são múltiplos ou divisores de 6?

B: os múltiplos são {6,12,18,24,30,36,42,48,60...}

P: Ok, e os múltiplos de 15, quem são?

A (em geral): {15, 30, 45, 60,...}

Pp: Dá para identificar quem são os inteiros múltiplos comuns de 6 e de 15?

B: Olhando dá para ver que são... {30, 60,...}

Pp: Como podemos escrever então...?

A: Não pode ser o 90? Eu acho que é o 90...

Pp: E o 30? E o 60? Porque esses não são? Como podemos encontrar, sem chutar?

C: Fazendo o mínimo múltiplo?

Pp: Isso... e quanto dá?

C: 30 professora...eu achei 30, letra (c)

A professora, no diálogo, não deixou o aluno A desenvolver seu raciocínio e, prontamente, quando o aluno C colocou a resposta correta, a professora desviou o centro de atenção para ele, esquecendo-se de que o aluno A não havia concluído seu raciocínio.

É um aprendizado para o professor utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e, na plenária, não ‘tomar partido’ de uma resposta ou outra dos alunos. O professor deve estar preparado para conseguir avançar nas atividades, sem menosprezar o conhecimento de um aluno ou outro. Nesse caso a professora aceitou a resposta do aluno e fechou a discussão, sem explorar o significado de suas falas. O aluno que respondeu ter encontrado a resposta letra (c) foi convidado a ir à lousa mostrar sua resolução. Os demais colegas concordaram com sua resposta e, mais uma vez, a professora salientou a diferença entre múltiplos e divisores, colocando-lhes mais alguns exemplos.

Após esse momento, a professora entregou aos alunos a folha de atividades do 8º encontro. Os alunos reuniram-se em grupos e iniciaram os trabalhos.

Atividade 1

1) A relação entre temperatura em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$) e temperatura em graus Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) é dada pela fórmula

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

- Se durante o mês de janeiro as temperaturas em Montreal variam entre $-15^{\circ} < ^{\circ}\text{C} < -5^{\circ}$, encontre a variação em graus Fahrenheit para o mesmo período. Esboce sua solução em um intervalo.
- Se durante o mês de junho as temperaturas na cidade de Nova York variam entre $63^{\circ} < ^{\circ}\text{F} < 80^{\circ}$, encontre a variação em graus Celsius para o mesmo período. Esboce sua solução em um intervalo.

2) Expresse o intervalo dado na forma de desigualdades e esboce-o como um subconjunto de $\mathbb{R}$:

- $(-3, 0)$
- $[2, 8)$
- $[2, \infty)$
- $[-6, -\frac{1}{2}]$
- $(-\infty, 1)$

No problema 1 da primeira atividade, os alunos o resolveram substituindo separadamente os valores da desigualdade $-15^{\circ} < ^{\circ}\text{C} < -5^{\circ}$ e, depois, fizeram uma representação na reta.

Esperávamos que os alunos trabalhassem com a desigualdade em ambos os termos, $-15^{\circ} < \frac{5}{9}(^{\circ}\text{F} - 32) < -5^{\circ}$, o que não ocorreu em nenhum grupo.

Figura 35 - Resolução da Atividade 1- Encontro 9.2.

1)

$$a) -15 = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow -15 = \frac{5F - 160}{9} \Rightarrow 160 - 135 = 5F \Rightarrow F = 5$$

$$-5 = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow -5 = \frac{5F - 160}{9} \Rightarrow 160 - 45 = 5F \Rightarrow F = 23$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 23\} \rightarrow \begin{array}{c} 5^{\circ} \quad 23^{\circ} \\ \text{-----} \end{array}$$

Figura 36 - Resolução da Atividade 1- Encontro 9.2.(continuação)

Handwritten work on lined paper:

$$1b) \frac{e = 5(63 - 32)}{9} \quad e = \frac{155}{9} \quad e = 17,2222^\circ\text{C}$$

$$\frac{C = 5(80 - 32)}{9} \quad C = \frac{240}{9} \quad C = 26,666^\circ\text{C}$$

$$\{x \in \mathbb{R} / 17,2222 < x < 26,666\}$$

Esse grupo utilizou os extremos do intervalo dado no problema para efetuar o cálculo da equação associada e, depois de encontrar tais valores, escreveu os resultados como solução da inequação.

Durante a discussão sobre o problema 2, alguns alunos tiveram dúvidas com relação à nomenclatura dos intervalos.

A: Profe...o intervalo é fechado ou aberto quando é escrito com parênteses?

Pp: Como vocês viram na escola? Qual a notação?

A: A gente usava esse (apontando o colchete no caderno)...

Pp: Ok, então utilize o que você conhece.

A: Mas e aí, é fechado ou aberto quando está assim (apontando novamente para o papel onde está escrito o intervalo $(-3,0)$)?

Pp: Aberto. Esta nomenclatura é a mesma de] [.

A: Ah, tá...obrigada.

Eles tiveram mais dificuldades com a notação utilizada para intervalos do que propriamente com a resolução dos problemas. Foi combinado que a plenária e a formalização iriam ocorrer depois do término da segunda atividade da aula.

A segunda atividade era composta por problemas que exigiam dos alunos leitura, interpretação e análise da resposta. A professora esperava que, nessa atividade, os alunos apresentassem muitas dificuldades, o que aparentemente não ocorreu de forma generalizada, já que eles conseguiram discutir o problema nos grupos e apresentar resoluções. Os alunos gastaram um pouco mais de tempo para resolver a questão, mas a grande maioria conseguiu resolvê-la, mesmo sem acertar o resultado e, também, participou da plenária.

Atividade 2

1) Uma companhia telefônica oferece dois planos para ligações de longa distância:

Plano A: 25 reais por mês e 5 centavos por minuto

Plano B: 5 reais por mês e 12 centavos por minuto

Para quantos minutos de chamadas de longa distância o plano B é mais vantajoso financeiramente?

2) Um grupo de estudantes resolveu assistir a um concerto. O custo de contratar um ônibus para levá-los ao concerto é de R\$ 450,00 que deve ser dividido entre todos os estudantes. Os organizadores do concerto dão desconto a grupos que chegarem de ônibus. Os bilhetes custam, em geral, R\$ 50,00 para cada um, porém reduz-se R\$0,10 do preço do bilhete para cada pessoa que chegar em grupo (até a capacidade máxima do ônibus).

Quantos estudantes deve ter o grupo para que o custo total por estudante seja menor do que R\$54,00?

Figura 37 - Resolução da Atividade 2 – Encontro 9.3.

① $25 + 0,05x \geq 5 + 0,12x$ 285 $\left\{ \begin{array}{l} A = 285 \cdot 0,05 + 25 = 39,25 \\ B = 285 \cdot 0,12 + 5 = 39,20 \end{array} \right.$

$25 - 5 \geq 0,12x - 0,05x$

$20 \geq 0,07x$

$x \leq \frac{20}{0,07}$ $x \leq 285$ 286 $\left\{ \begin{array}{l} A = 286 \cdot 0,05 + 25 = 39,30 \\ B = 286 \cdot 0,12 + 5 = 39,32 \end{array} \right.$

Os alunos montaram as equações e desenvolveram a desigualdade corretamente, determinaram o valor de x (sem considerar as casas decimais) e voltaram às equações iniciais para verificar se a resposta encontrada era válida.

Figura 38 - Resolução da Atividade 2- Encontro 9.4.

$y = \frac{5x}{100} + 25$ $y - 25 = \frac{5x}{100}$ $5x = 100y - 2500$

$y = \frac{12x}{100} + 5$ $y - 5 = \frac{12x}{100}$ $12x = 100y - 500$

$5x = 100y - 2500$ $7x = 2000$ $x = 285$

$-12x = 100y - 500$ $x = \frac{2000}{7}$

Os alunos resolveram o problema montando as equações para cada um dos planos, trabalharam as equações, porém esqueceram-se de colocar o sinal de igualdade nas duas equações. Reescrevendo, de forma organizada, sem referenciar as unidades de medida:

$$y = \frac{5}{100}x + 25 \rightarrow y - 25 = \frac{5}{100}x \rightarrow 100y - 2500 = 5x$$

$$y = \frac{12}{100}x + 5 \rightarrow y - 5 = \frac{12}{100}x \rightarrow 12x = 100y - 500$$

Depois disso, resolveram o que seria um sistema e encontraram a resposta $x = 285$, sem analisar a resposta obtida.

O problema 2, foi resolvido pelos alunos como se fosse uma equação do segundo grau, pois desconsideraram que se tratava de uma inequação. Muitos alunos tiveram dificuldade em escrever a inequação para o problema. Dos nove grupos que entregaram a atividade, nenhum apresentou a análise do sinal da inequação, sendo que apenas dois grupos colocaram, como solução final, $x > 50$, resposta correta.

Os alunos, durante a resolução dos problemas, comentaram com a professora que os sinais de $>$ e $<$ ‘*são sempre confusos*’ e que não gostavam de resolver questões como essas. A professora respondeu dizendo a eles que as desigualdades são importantes, pois a partir delas é que conseguimos mostrar que determinadas coisas são maiores ou menores e que esse é um conceito que se inicia quando somos crianças. Salientou ainda que, possivelmente, o fato de não gostarem do conteúdo estava relacionado à simbologia matemática, mas que deveriam se esforçar e, quando necessário, pedir auxílio.

Figura 39 - Resolução da Atividade 2- Encontro 9.5.

$$450 + 50x - 0,10x^2 < 54$$

$$450 + 50x - 0,10x^2 < 54x$$

$$-0,10x^2 - 4x + 450 < 0$$

$$4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-0,10) \cdot 450} < 0$$

$$4 \pm \sqrt{16 + 180}$$

$$4 \pm \sqrt{196}$$

$$4 \pm 14$$

$$-0,2 \quad -10$$

$$x < 50$$

Esse grupo resolveu a inequação e considerou que, na solução, não deveria ter um número negativo. Por isso, excluiu o valor de $x = -90$ e, na resposta positiva, adicionou o sinal inicial da inequação, encontrando $x < 50$, resultado errado.

Quando questionados sobre qual poderia ser a forma geral de solução do problema, os alunos sugeriram que, depois de obter as soluções, fosse feita a '*prova real*', que seria utilizar, a solução encontrada, no problema original, validando a resposta. A professora questionou-os sobre a validade da '*prova real*' para inequações e os alunos disseram não haver nenhuma diferença em relação à '*prova real*' das equações. A professora teve que refletir com os alunos que, em uma inequação, a solução encontrada deve estar na forma de intervalo e, portanto, nem sempre a '*prova real*' é possível de ser feita.

Foi realizada a plenária, onde a professora auxiliou os alunos na análise das soluções da inequação e pediu a participação de todos os grupos. Na sequência foi realizada a formalização dos conteúdos.

Os alunos apresentavam maiores dificuldades de trabalhar com problemas que necessitavam de interpretação e, conseqüentemente, da análise das respostas obtidas. Aparentemente, problemas de equações em que as soluções são obtidas de forma direta não assustam os alunos, já nas inequações a dificuldade está em tirar as informações do problema e de obter respostas válidas. Eles continuavam acreditando que é possível tirar uma '*prova real*' da solução de inequações. A professora discutiu com eles sobre a diferença entre se trabalhar com equações, onde encontramos, como solução números e, com as inequações, em que obtemos como solução, intervalos.

Foi possível, nesse encontro, atingirmos nossos objetivos de trabalhar com inequações e a análise de suas soluções.

A professora havia combinado com os alunos que, quando se chegasse à metade do curso, seria realizada uma avaliação de grupo, com uma questão, para que se pudesse verificar como os grupos estavam trabalhando e como estava a aprendizagem dos alunos nos conteúdos já trabalhados. Sendo assim, como neste dia restavam 30 minutos de aula, a professora, entregou aos alunos o seguinte problema para ser resolvido pelo grupo e entregue até o final da aula:

Avaliação de Grupo

Nomes:

Problema:

Se um fabricante vende x unidades de um certo produto, sua receita R e seus custos C todos em dólares, são dados por:

$$R = 20x \quad \text{e} \quad C = 2000 + 8x + 0,0025x^2$$

Lembrando que Lucro = Receita – Custo, determine quantas unidades deve vender para ter um lucro de pelo menos 2400 dólares.

Nenhum dos grupos apresentou a análise do sinal da equação do segundo grau. Os grupos, que entenderam que esse problema trabalhava uma inequação e encontraram as raízes da equação relacionada, partiram para uma análise através da substituição de valores na equação (inequação) e não se lembraram de fazer a análise do sinal pelo gráfico, por exemplo.

De forma geral, os alunos apresentaram dificuldade em resolver o problema, sendo que problemas semelhantes já haviam sido trabalhados em aula no mesmo dia.

Analisando as respostas dadas temos: quatro grupos apresentaram como solução

$\{x \in \mathbb{R}/400 \leq x \leq 4400\}$, sendo que um dos grupos encontrou, inicialmente, $x \geq 400$ e $x \geq 4400$ e na resposta final escreveu $\{x \in \mathbb{R}/400 \leq x \leq 4400\}$, o que demonstra que não souberam analisar o sinal da inequação. Dois grupos responderam que $x = 400$ é a solução para o problema, mesmo tendo encontrando duas raízes, $x = 400$ e $x = 4400$. Não houve justificativa para a escolha de apenas uma das raízes. Outros dois grupos encontraram duas soluções, $x = 400$ e $x = 4400$, e responderam que, para ter lucro de pelo menos 2400 dólares, deveriam vender $x \geq 4400$ unidades; o grupo também não apresentou justificativa da escolha de uma das raízes. Um único grupo errou todo o problema porque considerou $20x - (0,0025x^2 + 8x - 2000) \leq 2400$, ou seja, houve erro de interpretação que acarretou um erro no sinal dos termos da inequação.

Os alunos terminaram a atividade proposta, entregaram suas folhas e a professora disse que traria as correções desta avaliação no encontro seguinte. As atividades extraclasse do 8º encontro deveriam ser resolvidas em casa.

10º Encontro

Iniciamos o encontro pelas atividades extraclasse do encontro anterior. Os alunos apresentaram suas soluções oralmente e a professora foi à lousa registrar as respostas dadas.

Não houve grandes dúvidas sobre a resolução dos problemas propostos. Os alunos estavam muito ansiosos para saber a resposta da avaliação em grupo que fora realizada na aula anterior. A professora fez o relato dos erros dos alunos, antes de entregar a folha de atividades resolvida para os grupos. Sobre os erros mais frequentes cometidos, a professora comentou as resoluções apresentadas por eles, a partir da estratégia de resolução que ela havia pensado para o problema, que foi exposta na lousa.

Estratégia de resolução pensada e apresentada aos alunos pela professora:

Sejam L o lucro, R a receita, C o custo, todos em dólares e x as unidades vendidas. É dado pelo problema que: $R = 20x$ e $C = 2000 + 8x + 0,0025x^2$, desta forma:

$$L = R - C$$

$$US\$[20x - (2000 + 8x + 0,0025x^2)] \geq US\$[2400]$$

$$20x - 2000 - 8x - 0,0025x^2 \geq 2400$$

$$-0,0025x^2 - 8x + 20x - 2000 - 2400 \geq 0$$

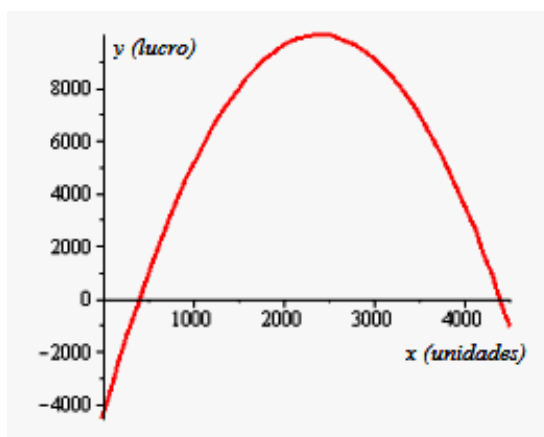
$$-0,0025x^2 + 12x - 4400 \geq 0$$

Devemos encontrar o(s) zero(s) para a equação associada:

$$-0,0025x^2 + 12x - 4400 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(-0,0025)(-4400)}}{2(-0,0025)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 44}}{-0,005} = \frac{-12 \pm 10}{-0,005}$$

Que resulta nas raízes $x_1 = 400$ unidades e $x_2 = 4400$ unidades. Analisando o sinal da equação associada graficamente, temos:



Como queremos valores tais que $-0,0025x^2 + 12x - 4400 \geq 0$, então:

$$\{x \in \mathbb{R} / 400 \leq x \leq 4400\}$$

Ou seja, a empresa terá lucro quando vender entre 400 unidades e 4400 unidades.

Após a professora construir com os alunos uma das formas de resolução do problema, ela pediu que eles olhassem suas resoluções e comparassem com o que fora feito na lousa e, então, tirassem suas dúvidas. Muitos alunos, nesse momento, lamentaram a falta de atenção na leitura e na resolução do problema. Novamente a professora comentou o erro que eles frequentemente têm cometido de substituir valores na inequação para obter soluções, lembrando-os que essa prática era válida para equações, como já dito na aula anterior. Depois de alguns novos exemplos na lousa, aparentemente os alunos pareceram estar convencidos deste fato.

Os alunos pediram que a professora propusesse mais problemas de análise de inequações e que os resolvesse na lousa juntamente com eles, para que, juntos, todos pudessem ver a explicação e fazer perguntas. A professora atendeu ao pedido dos alunos e propôs dois problemas para serem discutidos:

Resolva as inequações:

$$1) \quad \frac{1+x}{1-x} \geq 1$$

$$2) \quad x < \frac{2}{x-1}$$

Os alunos participaram da resolução respondendo as questões feitas pela professora e, também, fazendo perguntas a respeito do raciocínio utilizado para resolver o problema. A professora aproveitou o momento para relembrar, com os alunos, os conteúdos relacionados, já trabalhados em sala, tais como equações, intervalos e conjuntos numéricos. Após a resolução da primeira questão na lousa, os alunos, animados, pediram tempo para resolver a segunda questão sozinhos, nos grupos. A professora concordou, cedendo tempo para trabalharem na questão. Apenas um grupo alegou não ter encontrado a mesma resposta dos demais, ao final da resolução do segundo problema. Esse grupo havia multiplicado a inequação por (-1) e, na análise do sinal, buscou por um resultado positivo e não negativo.

Depois desse momento, a professora entregou a folha de atividades do 9º encontro para ser trabalhado pelos grupos. O 9º encontro abordava módulo ou valor absoluto, suas propriedades, equações e inequações modulares.

Atividade 1

1) Avalie as expressões:

a) $|100|$

b) $|-73|$

c) $|\sqrt{5} - 5|$

d) $|10 - \pi|$

e) $||-6| - |-4||$

f) $-1 - |1 - |-1||$

g) $\left| \frac{7-12}{12-7} \right|$

2) Resolva as equações e inequações em $\mathbb{R}$:

a) $|5x - 3| = 12$

b) $|2x - 3| = |7x - 5|$

c) $\left| \frac{x+2}{x-2} \right| = 5$

d) $|x + 1| < 2$

e) $|3x + 2| \geq 4$

3) Qual a distância entre os números -8 e 2? E qual a distância entre 2 e -8?

Na Atividade 1, problema 1, os grupos não tiveram dificuldade em operar com os módulos já que um dos alunos, logo de início, em voz alta, chamou a professora:

A: Profe! Esse problema é daquele conteúdo que transforma tudo em positivo?

Pp: E como ficaria um número negativo em módulo?

A: Positivo! Troca o sinal....

Pp: E um positivo?

A: Positivo...(em dúvida).

Pp: Lembra de como escrevemos de forma genérica essa ‘regra’?

A: Não...não mesmo!

A professora pediu que todos pensassem em como escrever a tal ‘regra’ e os alunos voltaram ao trabalho. Na letra (c) um dos alunos teve dúvida ao calcular $|\sqrt{5} - 5|$, argumentando que havia colocado $|\sqrt{5} - 5| = \sqrt{5} + 5$. A professora pediu a ele que usasse a definição de módulo e, como eles não conseguiam lembrar, a professora foi à lousa e pediu a ajuda de todos para escrevê-la:

Pp: Pessoal, como podemos escrever um número que, quando estiver em módulo é sempre positivo?

Alunos: ...(silêncio)

Pp: Vamos lá...se eu digo que ele é sempre positivo, então quando ele for negativo, devo escrever sua solução em módulo como positivo?

A: Sim! É positivo...

Pp: Certo. Então (escrevendo na lousa), $|-x| = x$?

Alunos: Isso!

Pp: E se for positivo? Fica positivo?

Alunos: Sim...

Pp: Então, posso escrever $|x| = x$? Isso vale sempre? Tem restrição?

B: Mas professora, a gente não pode escrever isso tudo de uma vez só...vai ter que separar....

Pp: Separar como?

B: Pelo que me lembro tem duas partes...mas não sei direito...

Pp: Alguém ajuda?

C: Tem que escrever em chaves...escreve aí profe!

Pp: Ok, vamos ver se concordam:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Alunos: Sim...

É perceptível, pelo diálogo, que os alunos não parecem possuir o domínio do conceito e, sim, apresentam mais fortemente um conhecimento de aspectos procedimentais, pois falam que ‘tem que escrever em chaves’ ou que ‘tem duas partes’, sem lembrar a definição de módulo. Depois de nossa conversa, o aluno percebeu que o sinal que se alterava seria da expressão contida no módulo e não apenas o sinal dos termos, compreendendo seu erro.

Já no segundo problema da Atividade 1, os alunos tiveram muita dificuldade. A professora questionou se haviam estudado módulo e função modular, e eles responderam negativamente, lembrando que esse não é assunto de vestibular em muitas universidades e que os colégios já não trabalham mais o tema. Apenas duas alunas responderam que haviam estudado esse conteúdo na escola.

Figura 40 - Resolução da Atividade 1- Encontro 10.1.

a) $4 \geq 3x + 2 \geq -4$
 $2 \geq 3x \geq -6$
 $2 \geq x \geq -2$
 3
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2/3\}$

Esse grupo ao resolver o problema, considerou que $4 \geq 3x + 2 \geq -4$, ao invés de trabalhar com as duas inequações $3x + 2 \geq 4$ ou $3x + 2 \leq -4$. Tal erro pode ser também acarretado pela falta de conhecimento conceitual, e necessitou de atenção da professora, que reforçou com o grupo, na plenária, a utilização das propriedades de módulo.

Figura 41 - Resolução da Atividade 1 - Encontro 10.2.

e) $3x+2 \geq 4$	$3x+2 \leq -4$	
$3x \geq 4-2$	$3x \leq -4-2$	$\{x \in \mathbb{R} / \frac{2}{3} \leq x \leq -2\}$
$3x \geq 2$	$3x \leq -6$	
$x \geq \frac{2}{3}$	$x \leq -2$	

O grupo resolveu o problema de forma correta, porém ao escrever a solução final, esqueceu-se de esboçar as duas soluções encontradas na reta, o que mostraria que a solução correta era dada por $S = (-\infty, -2] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$ e não pelo intervalo dado por eles, que inicia em um número positivo e termina em um negativo. Segundo o grupo, '*não pensamos em analisar, só escrevemos como intervalo*', novamente reforçando a ideia de que sabem os procedimentos a serem utilizados, mas não estão habituados a analisar soluções e, consequentemente, estudar conceitos.

Havia sido decidido que os alunos iriam resolver as duas atividades propostas para, depois, ser realizada a plenária. Foi possível, para os alunos, resolverem ainda o problema 1 da Atividade 2, ficando o problema 2 para ser resolvido juntamente com as atividades extraclasse.

Atividade 2

1) Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 3|x| - 4 = 0$

Os alunos, inicialmente, não conseguiram perceber que a substituição de variável, já trabalhada anteriormente nas equações biquadradas, era uma das formas de resolução. Além disso, os grupos que utilizaram dessa técnica, não conseguiram fazer a volta da variável utilizada na substituição, pela variável inicial do problema, ou mesmo, houve falta de análise das soluções obtidas. Nem todos os alunos utilizaram a substituição de variáveis para resolverem o problema:

Figura 42 - Resolução da Atividade 2 - Encontro 10.3.

$x^2 - 3x - 4 = 0$	$x^2 + 3x - 4 = 0$
$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot -4$	$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot -4$
$\Delta = 25$	$\Delta = 25$
$x = \frac{3 \pm 5}{2} \rightarrow x' = 4$	$x = \frac{-3 \pm 5}{2} \rightarrow x' = 1$
$\rightarrow x'' = -1$	$x'' = -4$
$S = \{-1, 4\} \cup \{-4, 1\}$	

Esse grupo utilizou a definição para o módulo de x , fazendo uma troca de sinal no termo que possuía o módulo: $x^2 - 3x - 4 = 0$ e $x^2 + 3x - 4 = 0$. Por fim, resolveram as duas equações quadráticas e escreveram as soluções encontradas para cada uma delas, sem uma análise da definição de módulo, o que lhes permitiu apresentar todas as soluções encontradas. A professora, na plenária, discutiu com os alunos as soluções encontradas, e pediu que eles verificassem que não eram todas válidas.

Figura 43 - Resolução da Atividade 2 - Encontro 10.4.

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2}$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$\frac{3 + 5 - 8}{2} = 4$$

$$\frac{3 - 5}{2} = -1$$

$$4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 0$$

$$16 - 12 - 4 = 0$$

$$16 - 16 = 0$$

$$0 = 0$$

O número -1 nem é analisado porque a resposta do módulo não pode ser negativa

Esse grupo fez a troca de variável, $y = |x|$, obteve a solução para a equação equivalente, porém não apresentou a volta à variável inicial. O grupo cometeu alguns erros de escrita, não considerando o sinal de igualdade nos passos apresentados de resolução e não escrevendo o denominador no segundo passo apresentado. Porém sua explicação para não considerar o valor de $y = -1$ é satisfatória, pois percebemos que o grupo conseguiu compreender a definição de módulo. Faltou organização para as ideias e uma escrita mais clara da solução final, já que o grupo apenas apresentou uma verificação para o valor de $y = 4$ esquecendo-se de considerar $y = -4$.

Percebemos, nesse encontro, que os alunos possuíam algumas dificuldades em trabalhar com o módulo. As dificuldades em trabalhar as equações e inequações modulares são decorrentes das dificuldades já detectadas em três assuntos já trabalhados: equações, inequações e módulo. Apesar disso, a aula transcorreu muito bem e os alunos estavam empenhados em resolver os problemas propostos.

A plenária desenvolveu-se durante todo o encontro e a formalização dos conteúdos não pôde ser realizada, pois extrapolamos o período de aula. Será retomada no início do encontro seguinte, juntamente com a atividade extraclasse.

Os objetivos do 9º encontro planejado foram atingidos, uma vez que, esperávamos trabalhar com o valor absoluto ou módulo, suas propriedades e equações e inequações com valor absoluto.

11º Encontro

Iniciamos o encontro pelas atividades de aula e extraclasse do encontro anterior. Quase todos os alunos encontraram solução para o problema 2 da segunda atividade da aula, que era uma aplicação do teorema de Pitágoras, e mostraram maiores dificuldades ao resolverem os problemas propostos na atividade extraclasse.

A professora pediu que cada grupo colocasse na lousa a resolução de um dos problemas propostos e, então, a partir dessas resoluções, fez comentários sobre outras formas de resolvê-los. Na sequência, foi realizada a formalização de conceitos do encontro anterior.

Percebemos que os alunos, em geral, sentem-se inseguros em relação às suas resoluções. Precisam ver a solução que o professor pensou. Isso parece ser um reflexo do trabalho feito com eles, por anos, copiando a ‘ideia’ dos professores ao resolverem problemas. Sentem-se incapazes e inseguros em acreditar em seus próprios raciocínios. Sempre que isso ocorre, a professora procura estimular os alunos no sentido de acreditarem em suas resoluções e, também, de verificarem se estas estão corretas, fazendo um exercício de leitura do problema e compreensão do que está sendo pedido e análise da resposta.

Depois desse momento, a professora entregou aos alunos a folha de atividades relativa ao 10º encontro planejado para o curso.

Os alunos reuniram-se em grupos e iniciaram os trabalhos. Como as atividades extraclasse, em geral, eram resolvidas pelos alunos sem os demais integrantes de seus grupos, a professora permitia que eles, se quisessem, permanecessem sem a formação de grupos até a entrega da folha de atividades do dia. Sabíamos que estávamos atrasados em relação ao planejamento, porém sabíamos, também, que a motivação principal do curso ofertado aos alunos, é sanar suas dúvidas e encaminhá-los a ‘pensar e dar sentido’ aos conteúdos matemáticos que estudaram até então.

Atividade 1

1) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 4\}$ representar graficamente os conjuntos:

- a) $A \times B$
- b) $B \times A$
- c) $(A \times B) \cup (B \times A)$

Tiveram, os alunos, algumas dificuldades, inicialmente, ao resolverem os problemas por não saberem a linguagem matemática necessária para a resolução do problema. Foi o que aconteceu com o produto cartesiano. Logo na primeira atividade proposta, os alunos de um grupo disseram não lembrar-se do produto cartesiano, e chamaram a professora:

A: Profe...eu entendi os conjuntos...é mais ou menos...na verdade eu não entendi o segundo. E também o que é mesmo esse 'x'?

Pp: Vamos por partes. O que você não entendeu do segundo?

A: É que o primeiro são os números e daí tudo bem. No segundo eu demorei um pouco para entender que era um intervalo....mas agora tudo bem.

Pp: Certo. Então vamos à segunda pergunta: Qual 'x'?

A: Esse que aparece nas letras (a), (b) e (c)...

Pp: Esse não é um 'x'...não lembra dele?

B: É o produto cartesiano, né profe?

Pp: Sim! Mas como se faz?

B: Pega o primeiro desse (mostrando no caderno o primeiro elemento do primeiro conjunto) e faz pares (ordenados) com esses (mostrando o segundo conjunto)...

A: Mas aqui tem um intervalo...não dá!

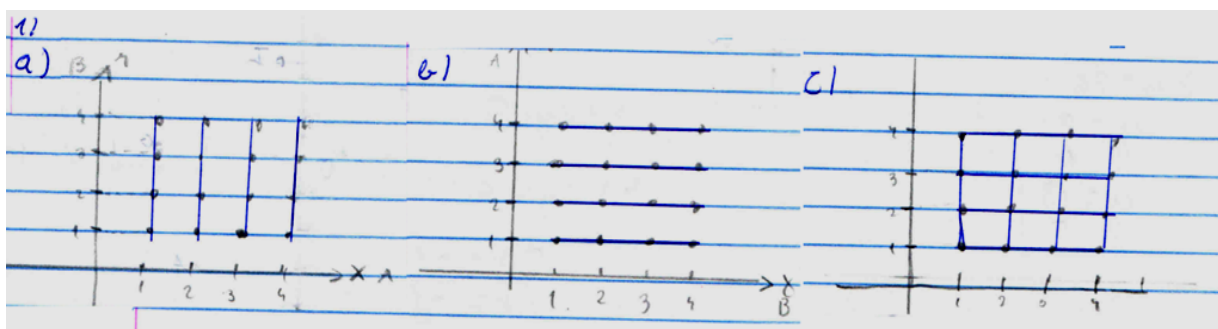
Pp: Não é possível escrever todos os pares, mas eles não existem?

B: Existem, mas então ...ah! vai dar um intervalo, né?

Pp: Continuem. A ideia está boa. Tentem fazer.

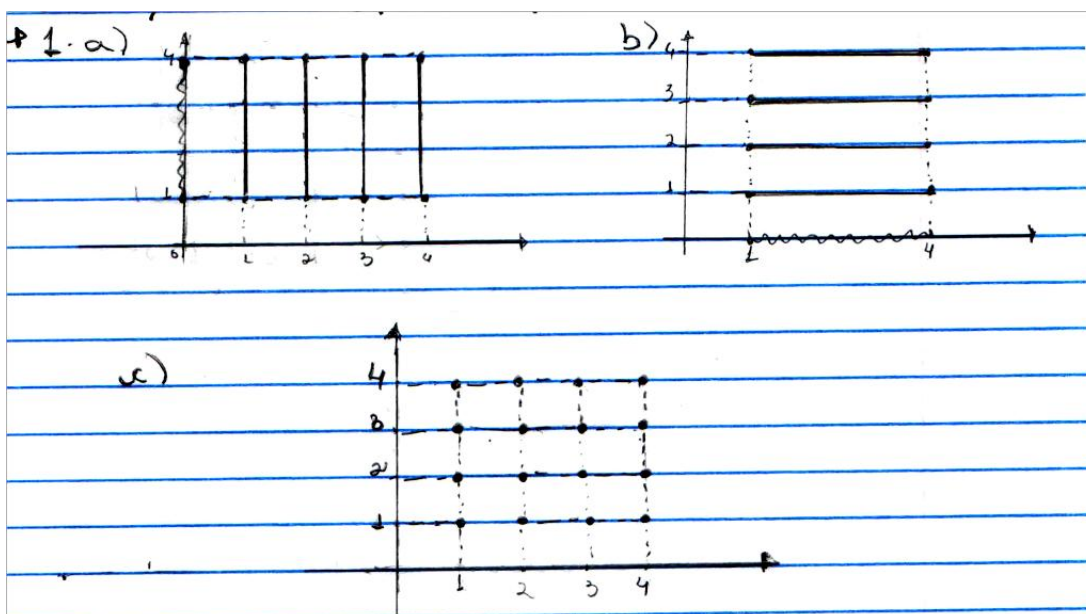
Os alunos conseguiram, no grupo, discutir sobre o produto cartesiano sem a necessidade de a professora interferir utilizando conceitos. Isso é importante, pois nos mostra que os alunos, muitas vezes, possuem o conceito latente e, com a ajuda dos colegas, conseguem pensar e resolver os problemas. Essa é uma das contribuições do trabalho em grupo para a metodologia que utilizamos e para o curso.

Figura 44 - Resolução da Atividade 1 - Encontro 11.1.



O grupo fez os esboços corretos para o produto cartesiano nas letras (a) e (b), porém na letra (c) apresenta a solução apenas marcando os lados da figura, esquecendo-se que, como são intervalos, também a área interna deveria ser considerada. Esse fato ocorreu em quase todos os grupos e foi debatido na plenária.

Figura 45 - Resolução da Atividade 1 - Encontro 11.2.

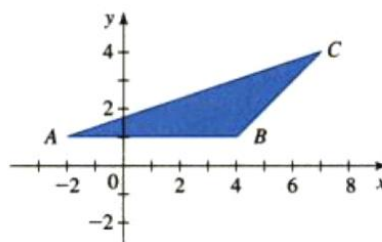


O grupo esboça corretamente os produtos cartesianos das letras (a) e (b), porém, na letra (c), considera que a resposta será dada por pontos e não por intervalos.

Foi combinado com os alunos que eles iriam à lousa após a resolução, nos grupos, das atividades 1 e 2. Conforme os grupos terminavam a atividade 1, iniciavam a resolução da atividade 2.

Atividade 2

1) Determine a área do triângulo ilustrado na figura:



2) Demonstre que os pontos $A(-2,9)$, $B(4,6)$, $C(1,0)$ e $D(-5,3)$ são os vértices de um quadrado.

3) Um quadrado de perímetro 20 é inscrito em um quadrado de perímetro 28. Qual é a maior distância entre um vértice do quadrado e um vértice do quadrado externo?

Apenas um grupo não conseguiu resolver o problema 1, sendo que os demais grupos acertaram a questão. O problema 2 gerou uma pequena discussão sobre o ‘demonstre’, pois alguns alunos disseram que na escola nunca demonstraram nada e não sabiam como fazer. Dois grupos afirmaram à professora que, fazendo o desenho eles ‘mostravam’ que era um quadrado. Nesse momento, a professora aproveitou a oportunidade para dizer aos alunos que a matemática possui formas de prova e demonstração e que muitas delas eram simples. Além disso, argumentou com os alunos que o desenho em si não é uma prova, pois o desenho poderia nos dar uma noção errada do problema, o que os cálculos (forma analítica) com certeza não fariam. Os alunos quiseram saber, então, como deveriam fazer a prova e a professora respondeu pedindo que comesçassem pensando o que é um quadrado. Um dos grupos prontamente respondeu que seria mostrar que os lados eram de mesmo tamanho e, empolgados, explicaram aos demais grupos em voz alta. A professora concordou com o aluno e os incentivou a encontrar tais medidas, lembrando-os que deveriam pensar se somente os lados garantiam a prova.

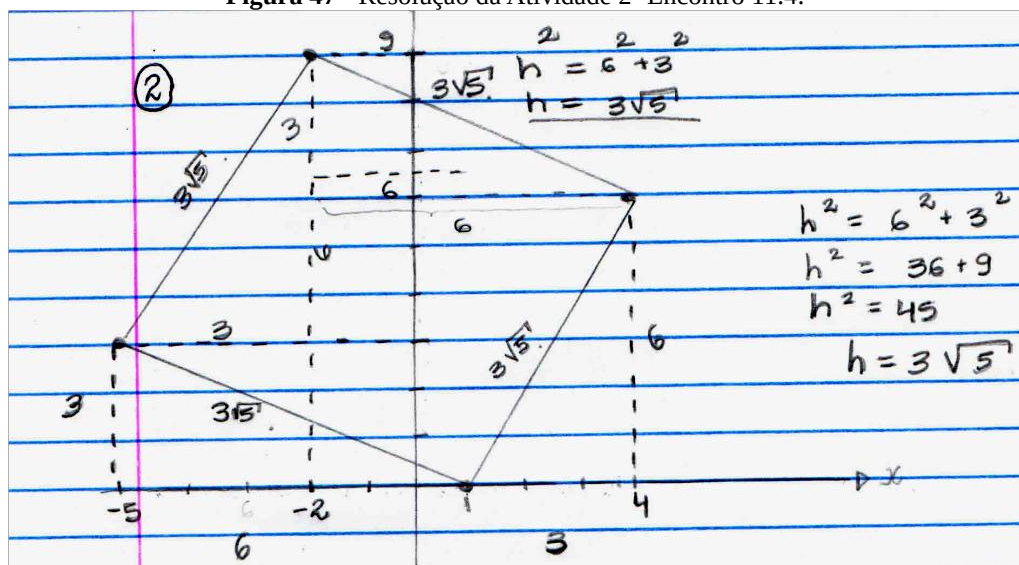
Os alunos apresentaram soluções bem distintas para o problema. Um grupo apresentou apenas o esboço dos pontos ligados formando um quadrado; quatro grupos apresentaram os cálculos completos para as medidas dos lados mais o esboço; dois grupos apresentaram cálculos parciais; e dois grupos apresentaram cálculos utilizando Pitágoras e calculando os lados como se fossem hipotenusas, e cabe salientar, que tal forma não havia sido apresentada pela professora no planejamento do trabalho. Segue abaixo algumas respostas:

Figura 46 - Resolução da Atividade 2- Encontro 11.3.

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 D_{AB}^2 &= (4+2)^2 + (6-9)^2 \\
 D_{AB}^2 &= 36 + 9 \\
 D_{AB} &= \sqrt{45} \\
 D_{CD}^2 &= (-5-1)^2 + (3-0)^2 \\
 D_{CD}^2 &= 36 + 9 \quad \rightarrow \boxed{D_{AB} = D_{CD}} \\
 D_{CD} &= \sqrt{45}
 \end{aligned}$$

O grupo apresenta cálculos parciais para dois lados do quadrado. Os demais lados não foram calculados. O grupo não apresenta justificativa para ter realizado o cálculo de apenas dois lados do quadrado e não cita a necessidade do ângulo reto na prova.

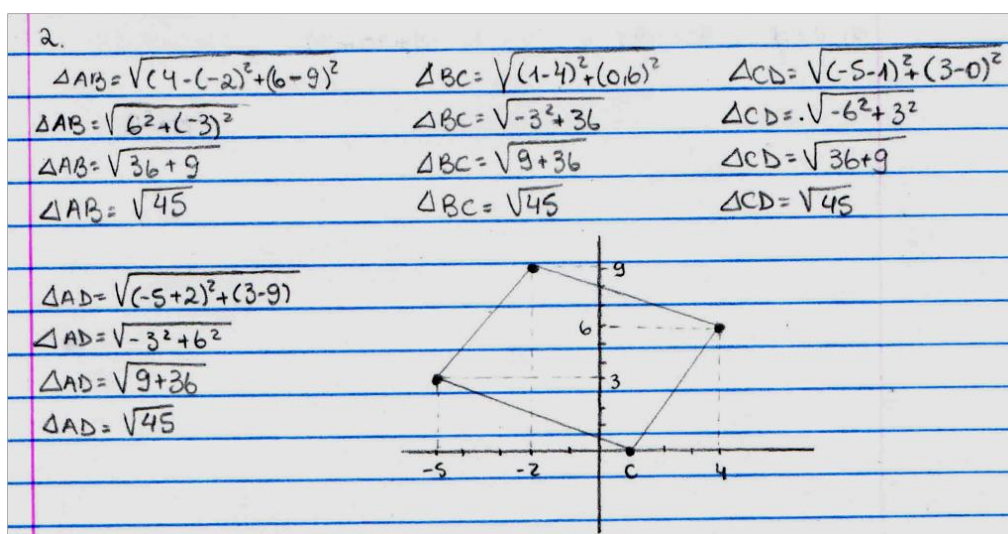
Figura 47 - Resolução da Atividade 2- Encontro 11.4.



Esse grupo apresenta uma forma diferente para os cálculos, em que os lados do quadrado são calculados como hipotenusas de triângulo externos ou internos. Ainda assim, o grupo não realiza o cálculo dos ângulos do quadrado. A professora não havia pensado nessa forma de resolver o problema.

Já o terceiro grupo, abaixo, apresenta todas as soluções para o cálculo das medidas dos lados, realizado através da forma de distância entre pontos. O grupo fez todas as contas e também apresentou um esboço para o problema, porém não menciona ou apresenta os cálculos para os ângulos do quadrado.

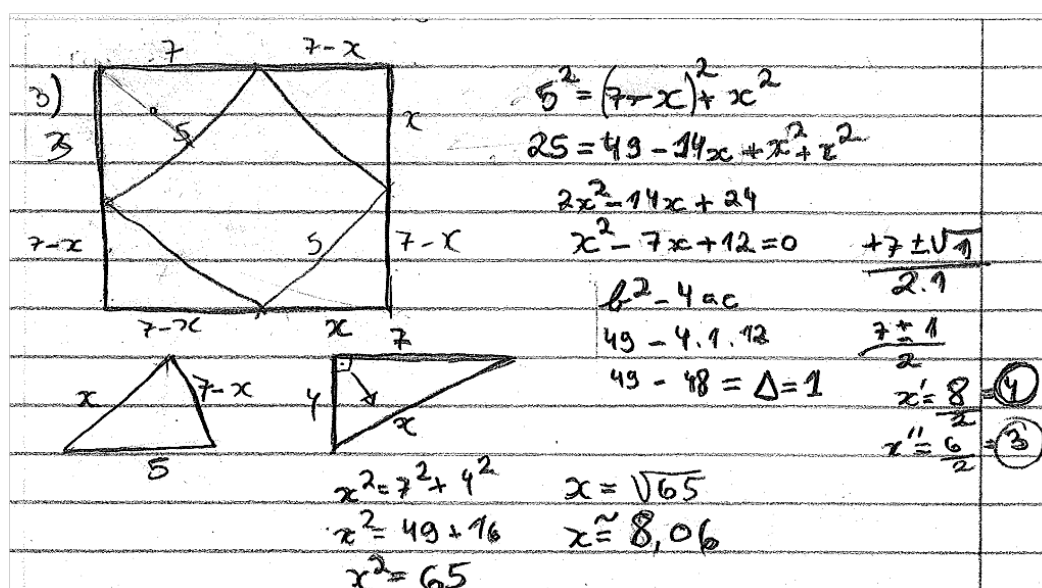
Figura 48 - Resolução da Atividade 2- Encontro 11.5.



Nenhum grupo apresentou cálculos ou justificativas sobre os ângulos do quadrado. Todos consideraram que bastava que os lados do quadrado fossem iguais. Na plenária, a professora mostrou aos alunos uma das formas que poderia ter sido utilizada para a prova dos ângulos.

O problema 3 desta atividade gerou dúvidas em relação ao que é 'ser inscrito' e a professora, com o auxílio de um dicionário, fez uma nova leitura do problema para os grupos. Sanada a dúvida, os alunos o resolveram. Dos nove grupos presentes, quatro não apresentaram cálculos e, sim, apenas os esboços do problema, cinco apresentaram os cálculos e acertaram a atividade.

Figura 49 - Resolução da Atividade 2- Encontro 11.6.



Esse grupo resolve o problema fazendo uso do Teorema de Pitágoras para saber em que ponto o quadrado interno deverá tocar o quadrado externo (ser inscrito). Posteriormente, toma um dos triângulos para determinar a maior distância. Os alunos não apresentam os cálculos para todos os vértices, assumindo que a maior distância é a que calcularam. O problema foi resolvido de forma correta, porém a professora pediu aos alunos que apresentassem todos os cálculos, visto que, sem a explicação do grupo, não seria possível compreender o que foi realizado. Os alunos, na plenária, explicaram que *‘fizemos o cálculo para todos os vértices, mas como deram valores menores, deixamos escrita apenas a resposta correta’*.

Os alunos conseguiram trabalhar bem nesse encontro. Estavam empolgados. Mesmo que não soubessem as definições necessárias, intuitivamente conseguiram pensar sobre o problema.

A professora falhou ao não dar atenção à importância dos ângulos retos no quadrado e isso pode ter sido a causa de nenhum aluno apresentar tal cálculo. Os objetivos do encontro foram trabalhados, visto que os alunos conseguiram compreender o que é um produto cartesiano e como marcar os pontos no plano.

O uso do dicionário na aula foi fator determinante para que os alunos resolvessem o problema 3, o ‘inscrito’ foi aceito por eles como ‘traçado dentro’.

Depois de encerradas as atividades dos grupos, foram realizadas a plenária e a formalização de conteúdos, ficando para o encontro seguinte a atividade extraclasse.

12º Encontro

Iniciamos o encontro pela atividade extraclasse deixada no encontro anterior. Os alunos foram à lousa apresentar as resoluções do problema.

Foi realizada uma plenária para a atividade extraclasse e a professora precisou questionar os alunos sobre suas resoluções, já que muitos grupos utilizaram regra de três e, portanto, encontraram aproximações para a resposta do problema, que se referia a uma equação quadrática proveniente de uma distância entre pontos. A professora novamente fez um breve comentário dos erros cometidos pelos alunos e discutiu com eles, mostrando-os na lousa, explicando e justificando a necessidade de outra abordagem para a solução correta do problema. Os alunos gostaram da atividade e colaboraram na sua resolução, efetuando os cálculos e ajudando a professora.

Depois desse momento, foi entregue a folha de atividades do 11º encontro. Os alunos organizaram-se em grupos e começaram a trabalhar. O combinado era resolver as duas atividades e, posteriormente, ir à lousa fazer a plenária.

Na primeira atividade proposta os alunos não tiveram muitas dúvidas. O problema 1 foi considerado por eles muito fácil. A ideia da professora para tal problema era a de iniciar o conceito de função. Todos os grupos responderam corretamente a esse problema.

Para o problema 2 alguns grupos tiveram dificuldade em esboçar o gráfico da função.

Atividade 1

- 1) A velocidade média de um automóvel em uma estrada é de 90km/h.
- Qual é a distância percorrida pelo automóvel em 1 hora? E em 2 horas?
 - Em quanto tempo o automóvel percorre a distância de 360 km?
 - Escreva uma expressão matemática que relacione a distância percorrida (d) em função do tempo (t).
 - Determine em quanto tempo o carro percorre 495 km.
 - A partir da expressão encontrada, esboce os pontos em um plano cartesiano.
- 2) Suponha que o número de carteiros necessários para distribuir, em cada dia, as correspondências entre as residências de um bairro seja dado pela função $f(x) = \frac{22x}{500+2x}$, em que x é o número de residências e $f(x)$ é o número de carteiros.
- Se forem necessários 6 carteiros para distribuir, em um dia, estas correspondências, qual o número de residências desse bairro?
 - É possível que esse bairro não necessite de carteiros? Justifique sua resposta e faça o esboço do gráfico.

Um dos grupos chamou a atenção da professora após alguns minutos:

A: Profe? Pode vir aqui?

Pp: Diga.

A: Não entendo essa letra (b).

Pp: Como assim não entende? Por quê?

A: Olha só: não preciso fazer nenhuma conta aqui.

Pp: Por que não precisa?

A: Porque para não ter carteiros não tem nenhuma casa, certo? Se tiver uma casa, vai ter que ter carteiro em algum dia...

Pp: Sim. E qual é a dúvida então?

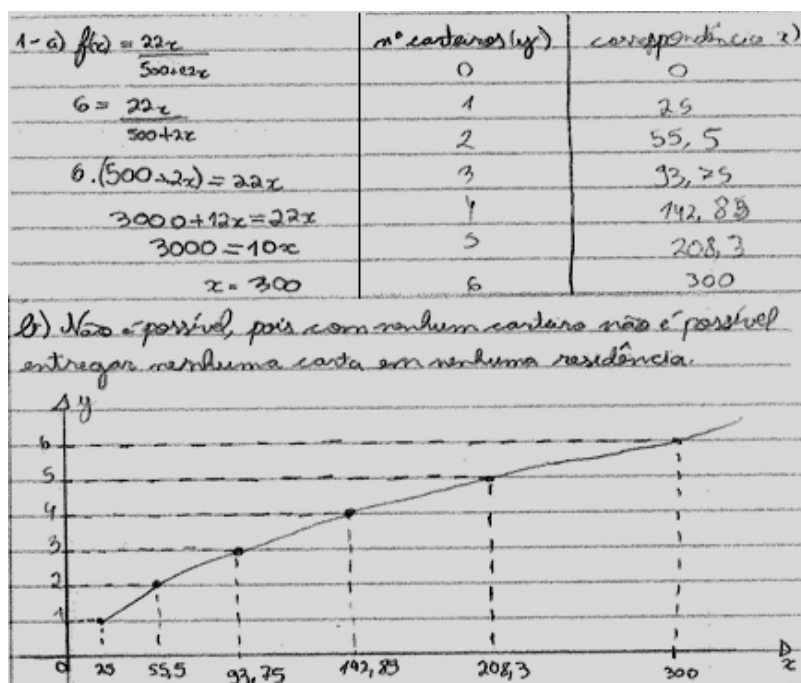
A: Como fazer conta? Não precisa!

Pp: Ok, entendo seu argumento. Mas é possível. Escreva a resposta. Depois veremos o que os demais grupos fizeram, ok?

A: Ok.

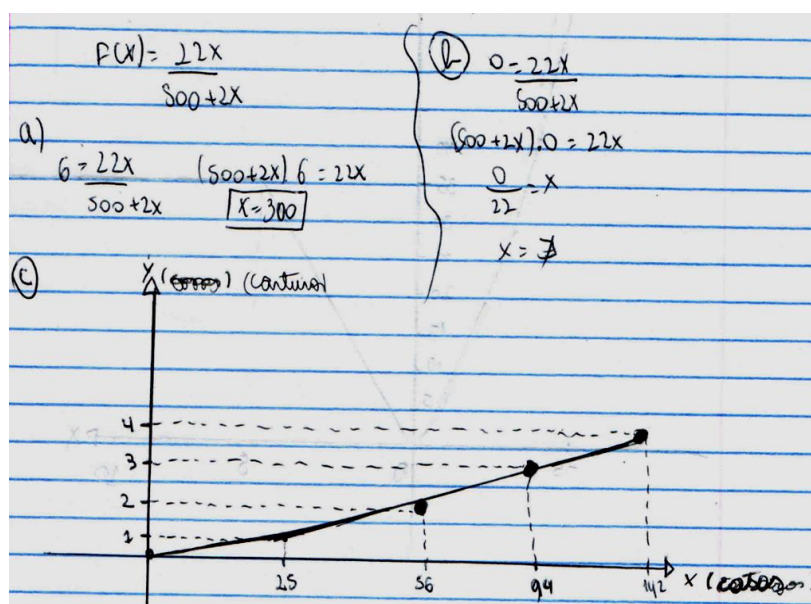
O grupo que chamou a atenção da professora em relação à letra (b) do problema 2, apresentou os cálculos para a letra (a) e fez o esboço de uma tabela de dados e do gráfico da função. Para a letra (b) responderam: “Não é possível, pois com nenhum carteiro não é possível entregar nenhuma carta em nenhuma residência”. Além desse grupo, outros três grupos também responderam a letra (b) com frases semelhantes, justificando que não havia a necessidade de cálculos.

Figura 50 - Resolução da Atividade 1- Encontro 12.1.



O grupo constrói a tabela partindo do número de carteiros (y) e obtendo, pela função dada, o número de residências (x) (chamada de correspondência por eles). Não considerou que o número de residências é um número natural e carrega esses dados para o esboço do gráfico da função. É interessante que o grupo, ao esboçar o gráfico da função, não marca o par ordenado (0,0) que escolheram na tabela. Parece considerar que o par não satisfaz o problema. Ao serem questionados pela professora, disseram que ‘se não há casas, não precisa carteiro e por isso não esboçamos o ponto no gráfico’.

Figura 51- Resolução da Atividade 1- Encontro 12.2.



O grupo resolveu corretamente a letra (a) do problema. Na letra (b) errou ao considerar que $\frac{0}{22} = x \rightarrow x = \cancel{0}$. Já na letra (c) o esboço do gráfico parece ser uma reta com uma leve inclinação positiva.

Os alunos do grupo, ao serem questionados sobre a função ter iniciado no par (0,0), responderam:

A: Mas não podemos colocar um número negativo de carteiros. E se tiver zero casas...não precisa carteiro...então vale...

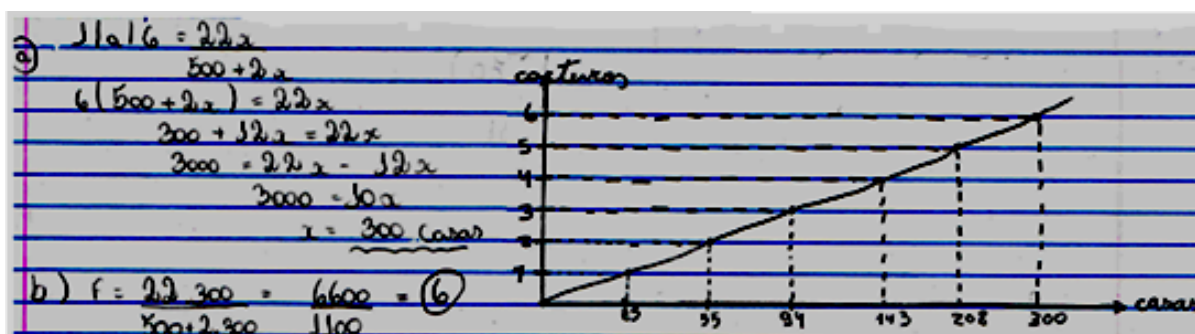
Pp: Muito bem. E como vemos isso na função?

A: Pelo esboço e domínio dela...

Pp: Isso mesmo!

Outra apresentação da atividade:

Figura 52 - Resolução da Atividade 1- Encontro 12.3.



Esse grupo efetuou os cálculos corretamente para a letra (a) do problema. Porém, na letra (b), compreenderam que deveriam efetuar os cálculos utilizando o valor de $x = 300$ obtido na letra (a), ou seja, fizeram a confirmação de que, para 300 residências, seriam necessários 6 carteiros. Nesse caso, faltou a leitura e a interpretação do problema para, depois, efetuar os cálculos. O esboço do gráfico foi feito como uma reta passando pela origem.

Atividade 2

1) Determine o domínio e a imagem das funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x-8}$

b) $g(x) = \sqrt{x-5}$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2-49}$

2) Esboce os gráficos das funções e determine suas raízes:

a) $f(x) = 5x + 3$

b) $g(x) = x^2 + 9$

c) $h(x) = \frac{1}{x}$

Nesta atividade os alunos tiveram dificuldade em determinar o domínio e a imagem das funções no problema 1.

Figura 53 - Resolução da Atividade 2- Encontro 12.4.

The image shows handwritten student work on lined paper. It contains three rows of calculations for domain (D) and image (Im) of functions:

- Row 1: For $f(x) = \frac{1}{x-8}$, the student writes $x-8 \neq 0$ and $x \neq 8$. The domain is $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 8\}$ and the image is $Im = \{\mathbb{R} \neq 0\}$.
- Row 2: For $g(x) = \sqrt{x-5}$, the student writes $x-5 \geq 0$ and $x \geq 5$. The domain is $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$ and the image is $Im = \{\mathbb{R} \neq 0\}$.
- Row 3: For $h(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2-49}$, the student writes $x-4 \geq 0$ and $x \geq 4$. The domain is $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 7 \text{ e } x \geq 4\}$. The image is $Im = \{0 < x < 7\}$. There are also additional notes $x^2-49 \neq 0$, $x^2 \neq 49$, and $x \neq \pm 7$.

O grupo resolveu separadamente os problemas de domínio da função apresentando-os corretamente, porém, ao escrever as imagens não conseguiu escrevê-las, pois erraram seus intervalos e não conseguiram colocá-las em uma linguagem matemática correta.

Figura 54 - Resolução da Atividade 2- Encontro 12.5.

The image shows handwritten mathematical work on lined paper. It consists of three parts, each with a domain D and an image I .

- Top left: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 8\}$ and $I = \{y \in \mathbb{R} / \}$
- Top right: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$ and $I = \{y \in \mathbb{R} / \}$
- Bottom left: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$ and $I = \{y \in \mathbb{R} / \}$

Esse grupo apresenta somente as respostas para o problema, sem mostrar os cálculos ou o raciocínio utilizado. Ao responder as questões de domínio os alunos acertaram as letras (a) e (b), porém na letra (c) não representaram o domínio da função dada. Os alunos se esqueceram de avaliar o denominador da função que possui valores que comprometem sua existência. Para as imagens, os alunos não souberam escrever as respostas, parecendo não compreender o que é a imagem de uma função, apresentando em todas as letras apenas $\{y \in \mathbb{R}\}$.

Na plenária, a professora perguntou aos alunos porque eles não haviam dado respostas à imagem da função. Eles argumentaram que não sabiam muito bem como fazê-lo e a professora, utilizando as atividades expostas na lousa por eles, ajudou-os a interpretar as funções para obter o domínio e a imagem.

O problema 2 dessa atividade apresentou algumas dúvidas mas, de forma geral, os alunos fizeram esboços para os gráficos das funções. A letra (c) gerou um pouco mais de trabalho para ser construída, porém um dos alunos de um grupo conhecia a função e auxiliou os outros sugerindo que utilizassem números positivos e negativos para a tabela e, com isso, conseguiram fazer o esboço.

A professora observou que dois grupos já haviam resolvido a atividade extraclasse em sala de aula. Os demais grupos iriam resolvê-la em casa. Para o encontro seguinte, a professora iria preparar problemas extras para os grupos mais adiantados.

Foi realizada a plenária em que os grupos apresentaram suas resoluções. A professora havia preparado, para este encontro, os esboços gráficos das funções trabalhadas em sala, no software Maple, para que os alunos pudessem, juntamente com ela, verificar que as funções, em determinados intervalos, podem apresentar problemas de definição ou, mesmo, terem esboços confusos em alguns intervalos mal escolhidos. Os alunos participaram dessa atividade, mostrando interesse de visualizar as funções em diferentes intervalos, sugeriram intervalos e funções, que a professora ‘plotou’ no software e apresentou a todos no data show.

Após esse momento foi realizada a formalização dos conteúdos trabalhados e a atividade extraclasse ficou para ser trabalhada pelos alunos em casa.

Neste encontro, os alunos estavam confiantes em relação ao que haviam estudado no Ensino Médio sobre funções. Alguns alunos não sabiam muito bem como começar um esboço de gráfico ou mesmo não sabiam avaliar o domínio da função antes de esboçar o gráfico, mas como essa era uma atividade que os empolgou, acabaram trocando ideias entre os grupos, o que a professora permitiu, por perceber que eles estavam conseguindo construir um conhecimento em relação ao conteúdo.

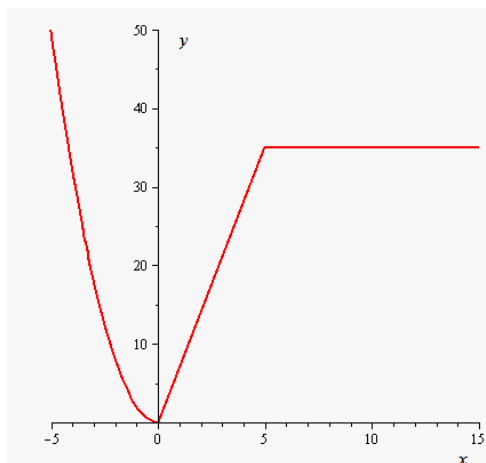
Foram atingidos os objetivos planejados e a professora salientou aos alunos que o encontro havia sido muito proveitoso. Eles concordaram e disseram que “*funções era legal, difícil eram os gráficos*”. A professora aproveitou os últimos minutos de aula para, novamente, discutir com eles a construção de gráficos de funções.

13º Encontro

Iniciamos o encontro pela atividade extraclasse deixada na aula anterior. O primeiro problema proposto nessa atividade foi comentado pela professora e pelos alunos oralmente, já que não houve necessidade de resolvê-lo na lousa, uma vez que os alunos consideraram-no muito fácil. Para o segundo problema, a professora perguntou quem gostaria de apresentá-lo na lousa e três alunos se prontificaram a fazê-lo. Depois da apresentação, como não houve dúvidas, a professora entregou aos alunos a folha de atividades do 12º encontro.

Atividade 1

1) Considere o gráfico da função f representado a seguir:



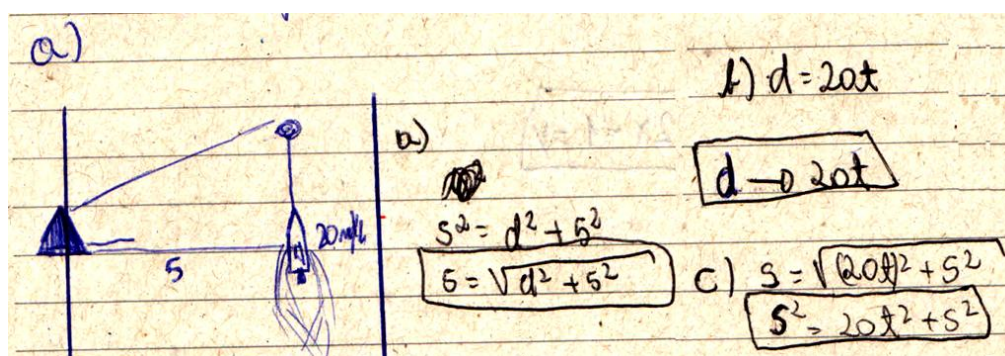
- a) Em qual (ais) intervalo(s) a função é crescente?
- b) Em qual (ais) intervalo(s) a função é decrescente?
- c) Em qual (ais) intervalo(s) a função é constante?

2) Um barco está viajando a 20 milhas/h paralelo à costa. O barco está a 5 milhas da borda. Passou por um farol ao meio-dia.

- a) Expresse a distância s entre o farol e o barco como uma função de d , a distância que foi percorrida pelo barco desde o meio-dia, ou seja, encontre f de modo que $s = f(d)$.
- b) Expresse d como uma função de t , o tempo transcorrido desde o meio-dia, ou seja, encontre g tal que $d = g(t)$.
- c) Encontre $f \circ g$. O que representa essa função?

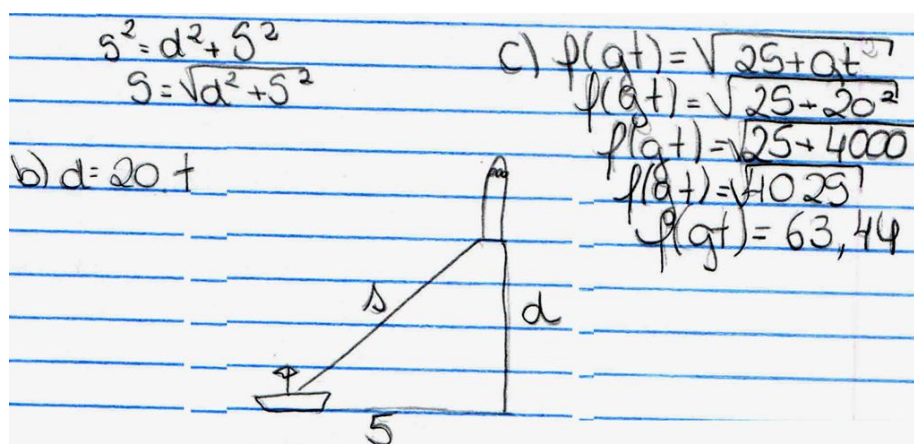
Os alunos reuniram-se em grupos e iniciaram os trabalhos. Na primeira atividade proposta para o dia, os alunos não tiveram dúvidas na resolução do problema 1, que tratava do crescimento e decrescimento de uma função, e pediram que a atividade fosse comentada oralmente na plenária. Porém, o segundo problema desta atividade, que tratava de composição de funções, gerou bastante discussão entre os alunos e entre os grupos. A dúvida estava em compreender o problema. Foi realizada uma discussão em conjunto com todos os grupos para que pudessem interpretá-lo e buscar sua resolução. Dois entre os nove grupos não conseguiram chegar à resposta esperada. Seguem algumas soluções apresentadas pelos alunos:

Figura 55 - Resolução da Atividade 1- Encontro 13.1.



O grupo apresenta de forma abreviada a solução correta, fazendo um esboço para melhor compreender o problema e apresenta cálculos simplificados. Como tem ocorrido com frequência, não apresenta justificativa para o desenvolvimento. Esse grupo ao ir à lousa para apresentar sua resolução, conseguiu explicar aos colegas como resolveu o problema com bastante confiança.

Figura 56 - Resolução da Atividade 1- Encontro 13.2.



Esse grupo fez o esboço correto como auxílio para a resolução do problema, resolve as letras (a) e (b) corretamente, porém, ao resolver a letra (c), não escreve $f(g(t)) = f(20t) = \sqrt{25 + (20t)^2}$ e sim, $f(20) = \sqrt{25 + (20)^2} \cong 63,44$. Na apresentação de resultado na lousa, afirmaram que foi falta de atenção do grupo ao resolver o problema, pois nas letras (a) e (b), os resultados estão corretos e que, ao escrever a letra (c), o grupo sabe que deve calcular $f(g(t))$ mas, como não havia escrito quem eram $f(t)$ e $g(t)$, não conseguiu escrever corretamente o que se pede.

A professora durante a resolução dos problemas circulava por entre os grupos e percebeu, em quatro grupos, que os alunos estavam novamente ‘distribuindo a raiz quadrada’ para os dois termos da soma na letra (c), resultando em $f(20t) = \sqrt{25 + (20t)^2} = \sqrt{25} + \sqrt{(20t)^2}$. Para cada um dos quatro grupos a professora pediu que os alunos explicassem o motivo de resolverem o problema dessa forma e, em todos os casos, os alunos disseram que era possível ‘cortar’ os quadrados. A professora pedia então para que os alunos fizessem o cálculo de $\sqrt{9 + 25}$ e de $\sqrt{9} + \sqrt{25}$ com o intuito de mostrá-los que os resultados eram diferentes. Depois de questionados e de resolverem o exemplo proposto pela professora, os alunos percebiam que estavam errando e falavam que realmente não podiam resolver como estavam fazendo. Apesar de esse ser um erro recorrente, a professora insistia em pedir atenção dos alunos e sempre que possível, lhes dava outros exemplos com o intuito de ajudá-los a perceber o erro cometido.

Conforme combinado, após o término da Atividade 1, os alunos iniciaram a Atividade 2 e, posteriormente, foi realizada a plenária.

Atividade 2

1) No interior de uma caverna existe uma estalagmite cuja altura aumenta de modo constante à razão de 1 cm a cada 10 anos. Nessas condições, a função h , definida por $h(t) = \frac{t}{10}$, com $t \geq 0$, relaciona a altura da estalagmite (em centímetros) com o tempo (em anos) decorrido desde o início de sua formação. Justifique as seguintes afirmações:

a) A função inversa de h é definida por $h^{-1}(t) = \frac{10}{t}$.

b) Serão necessários 200 anos para que haja um aumento de 20 cm na altura da estalagmite.

c) $h(h^{-1}(50)) = 50$.

Logo no início do problema, um grupo chamou a professora:

A: Profe, aqui é para usar como ‘um sobre’?

Pp: Um momento..... Sim?

A: Aqui ó (mostrando no caderno $h^{-1}(t) = \frac{10}{t}$). É como $\frac{1}{h^1(t)}$?

Pp: Porque pensou assim?

A: Olha professora, é como a gente fazia nas potências (mostrando o caderno de encontros anteriores)...

Pp: Veja bem, eram potências, aqui estamos tratando de ...

A: Funções... sim eu sei. E não é a mesma coisa que faz?

B: Não. Eu já mostrei para ele. Mas ele achou que estava certo!

Pp: Não ‘A’. Aqui queremos obter uma função inversa, ou seja, queremos que seu domínio passe a ser a sua imagem e vice-versa. Mas para isso precisamos ver as condições da função...ver se isso é possível.

A: Por isso é complicado! Cada hora é uma coisa!

Pp: Não. Na verdade não é isso. Cada um dos assuntos possui determinadas condições....são assuntos diferentes.

B: Viu A? Vamos fazer.

A: Tá bem. Me fala de novo...

O aluno ‘A’ do diálogo acima esperava que as ‘regras’ fossem as mesmas para os dois conteúdos. Novamente o que aparece forte é o procedimento. Muitos alunos não nos mostram que conhecem o conceito e sim, que ‘*lembram*’ de algumas regras que aprenderam nos Ensinos Fundamental e Médio. E essa é uma das razões de eles errarem ao resolverem alguns problemas. Querem utilizar as ‘*fórmulas ou regras*’ sem necessariamente saber se elas se aplicam aquele caso. A professora, na plenária, conversou com os alunos sobre a necessidade

de ler e interpretar os problemas e, acima de tudo, de pensar como resolvê-los, antes de iniciar utilizando uma fórmula já conhecida.

Figura 57 - Resolução da Atividade 2 – Encontro 13.3.

1) a) F $h(t) = \frac{t}{10}$
 $y = \frac{t}{10} \rightarrow t = \frac{y}{10} \rightarrow y = 10t \rightarrow f(t)^{-1} = 10t$

b) $\checkmark$ $1 \text{ cm} = 10 \text{ anos}$ $20 \text{ cm} = x$
 $x = 200 \text{ anos}$

c) $10t \cdot (50) = 500$

Esse grupo, assim como os demais, não apresentou justificativas para as questões limitando-se a esboçar os cálculos. Na letra (b) ao invés de utilizar a função, preferiu fazer os cálculos por regra de três.

Dois grupos de alunos terminaram antes as atividades e a professora ofereceu a eles mais problemas sobre o assunto da aula. Os grupos trabalharam no Problema extra, porém não o concluíram nesse encontro e a professora pediu que, no encontro seguinte, entregassem as resoluções da atividade.

Atividade Extra

1) Determine a composição de funções:

Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, encontre as seguintes funções e seus domínios:

- a) $(f \circ g)$
- b) $(g \circ f)$
- c) $(f \circ f)$
- d) $(g \circ g)$

2) Encontre a inversa de $f(x) = \frac{x^5-3}{2}$

Figura 58 - Resolução da Atividade Extra – Encontro 13.4.

ATIVIDADE EXTRA

a) $\sqrt{2-x} \rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$

b) $\sqrt{2-\sqrt{x}} \rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$

c) $\sqrt{x} \rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

d) $\sqrt{2-\sqrt{2x}} \rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$

2) $y = \frac{x^5-3}{2} \rightarrow x = \frac{y^5-3}{2} \rightarrow 2x = y^5-3 \rightarrow 2x+3 = y^5 \rightarrow y = \sqrt[5]{2x+3}$

O grupo conseguiu responder a todas as questões corretamente e aparentemente não se incomodou de receber uma tarefa extra durante a aula.

Figura 59 - Resolução da Atividade Extra – Encontro 13.5.

Atividade extra

1- a) $f(x) = \sqrt[4]{2-x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$
 b) $g(x) = \sqrt[4]{2-x/2}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$
 c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$
 d) $g(x) = \sqrt[4]{2-\sqrt[4]{2-x}}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$

2- $y = \frac{x^5 - 3}{2} \rightarrow x = \frac{y^5 - 3}{2} \rightarrow y^{-1} = \sqrt[5]{2x+3}$
 $f(x) = y$

O grupo respondeu a todas as questões, porém apresenta erros nas letras (a), (b) e (d) do problema 1, mostrando que não compreenderam que o domínio da função nos três casos, deve ser maior ou igual a zero, pois trata-se de raízes com índice par.

Este encontro nos mostrou mais fortemente a diferença de trabalho e conhecimento que existe entre os grupos que participam do curso. Enquanto alguns grupos estavam trabalhando em problemas do encontro, dois grupos já tinham concluído essa etapa e trabalhavam nas atividades extraclasse. O interessante é que os grupos que receberam atividades extras e também os grupos que estavam trabalhando nas atividades do encontro não se incomodaram com isso. Muito interessante a postura dos grupos. Eles estão trabalhando cada dia mais ‘soltos’ e pedem mais a ajuda dos membros do grupo e menos da professora. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se mostra como um caminho para isso. Os objetivos planejados que eram estudar as funções inversa e composta foram atingidos.

Após terminarem as atividades, os alunos foram à lousa e apresentaram suas resoluções. Foi realizada a plenária e a formalização dos conteúdos trabalhados, ficando a Atividade extraclasse para ser resolvida em casa pelos grupos que não a resolveram na sala de aula.

14° Encontro

Iniciamos o encontro pela atividade extraclasse. A professora perguntou aos alunos se haviam resolvido a atividade e todos os grupos responderam afirmativamente. Quando perguntados sobre qual o problema que tiveram mais dificuldade, os alunos responderam que eram os números 2 e 3, então a professora pediu que eles dissessem oralmente as soluções encontradas. Os alunos relataram que o problema 2 admitia duas soluções: $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, o que estava errado, uma vez que não consideraram o intervalo dado no problema, que pedia apenas soluções positivas. A professora, então, a pedido dos alunos, foi à lousa comentar os problemas, em particular, o terceiro. Nesse problema, que tratava de um estudo sobre condições ambientais que relacionavam a taxa de monóxido de carbono no ar e a população, os alunos não conseguiram compreender primeiramente que se tratava de uma composição de funções. Além disso, o problema perguntava: *Atualmente, qual é a taxa de monóxido no ar?* Eles não haviam compreendido que a palavra atualmente significava $t = 0$. Não apresentamos aqui as resoluções dos alunos por ser uma atividade extraclasse que não havia obrigatoriedade de entrega. As discussões foram intensas e os alunos participaram auxiliando a professora na resolução do problema na lousa.

Sanadas as dúvidas, os grupos receberam a folha de Atividades do 13° encontro e iniciaram os trabalhos.

Atividade 1

1) Em certo país, as pessoas maiores de 21 anos pagam um imposto progressivo sobre os rendimentos. Esse imposto corresponde a 10% sobre as primeiras 1.000 unidades monetárias recebidas e 20% sobre os ganhos que ultrapassam esse valor.

a) Nessas condições, indicando i para o valor do imposto e por r uma renda superior a 1.000, escreva uma forma geral para o cálculo do imposto.

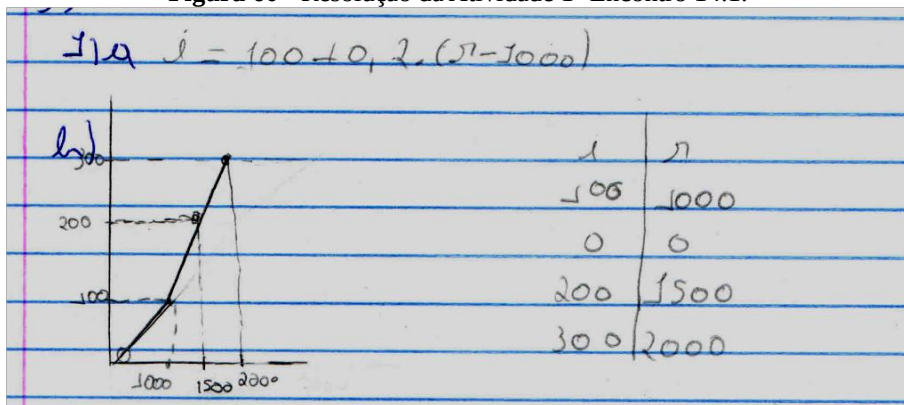
b) Esboce o gráfico.

2) Uma função é definida por $f(x) = kx + 3$. Sabendo que $f(1) + f(-2) = 8$, determine o valor de $f(-1)$.

No primeiro problema, os alunos demoraram a escrever a função que dava uma forma geral para o imposto e, também, tiveram dúvidas ao esboçar o gráfico da função. Cinco dos nove grupos erraram o esboço do gráfico, pois se tratava de uma função definida em dois

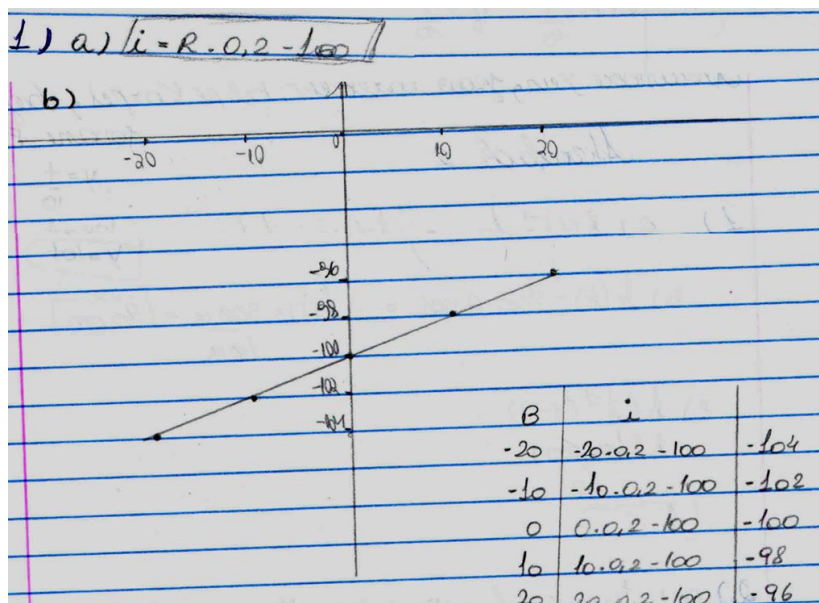
intervalos distintos. Alguns alunos alegaram que não sabiam fazer uma função ‘em pedaços’ e a professora comentou com eles que a função não estava em pedaços e sim era constituída por duas funções, pois cada intervalo definia um comportamento.

Figura 60 - Resolução da Atividade 1- Encontro 14.1.



Esse grupo apresenta a equação e esboça corretamente o gráfico do problema 1.

Figura 61 - Resolução da Atividade 1- Encontro 14.2.



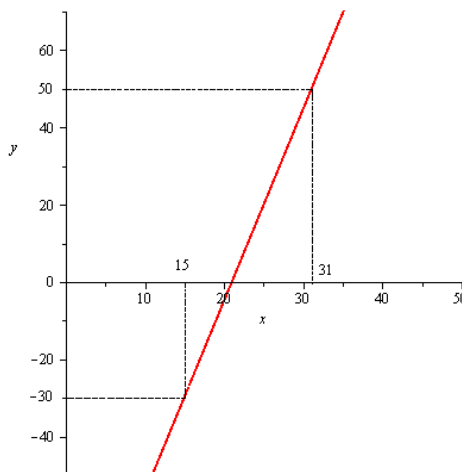
O grupo encontra a função que expressa o problema corretamente, porém no esboço do gráfico escolhe valores negativos para a variável r (renda), o que é incompatível com o problema dado. Os alunos se ativeram a resolver o problema sem analisar as soluções e, portanto, construíram um esboço de gráfico que não condiz com o problema apresentado. A professora perguntou ao grupo, na apresentação da resolução na lousa, se eles, ao esboçarem o gráfico e construir a tabela, haviam pensado que as grandezas eram positivas, e eles responderam que ‘*não, pois estavam preocupados em dar todos os valores para que o gráfico*

ficasse correto'. A professora lembrou-os que, de acordo com o problema, é que são escolhidos os valores de seu domínio (campo de definição) e os alunos concordaram que faltou fazer a análise.

O segundo problema da Atividade 1 foi resolvido pelos alunos sem grandes dúvidas. Novamente foi combinado, a pedido dos alunos, que a plenária e a formalização seriam realizadas após a segunda atividade do encontro. Sendo assim, os alunos que terminavam a primeira atividade passavam à resolução da segunda.

Atividade 2

1) No período de 15 a 31 de março, o saldo y , em milhares de dólares, da balança comercial de um país (a diferença entre o valor das exportações e o das importações, nessa ordem), em função do tempo x , em dias, pôde ser descrito por 17 pontos (um para cada dia) da reta representada abaixo:



Com base nessas informações, determine:

- a lei correspondente a esse gráfico;
- o dia nesse período em que o saldo da balança comercial foi nulo;
- os dias nesse período em que o saldo da balança comercial foi positivo;
- os dias nesse período em que o saldo da balança comercial foi negativo.

2) Uma livraria, hospedada na web, cobra R\$ 15,00 pelo envio de pedidos menores do que R\$100,00, porém, para o envio torna-se gratuito para pedidos iguais ou acima de R\$100,00. O custo C de um pedido é uma função do preço total x dos livros comprados, dada por:

$$C(x) = \begin{cases} x + 15, & \text{se } x < 100 \\ x, & \text{se } x \geq 100 \end{cases}$$

- Encontre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ e $C(105)$
- O que representam as respostas da letra a).

Figura 62 - Resolução da Atividade 2- Encontro 14.3.

a) $\begin{cases} 31a + b = 50 \\ 15a + b = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 50 - 31a \\ b = -30 - 15a \end{cases}$ $f(x) = ax + b$
 $50 - 31a = -30 - 15a$ $b = -105$
 $50 - 31a = -30 - 15a$
 $15a + 50 - 31a = -30$
 $-16a = -80$
 $a = 5$
 $b = -105$
 $f(x) = 5x - 105$

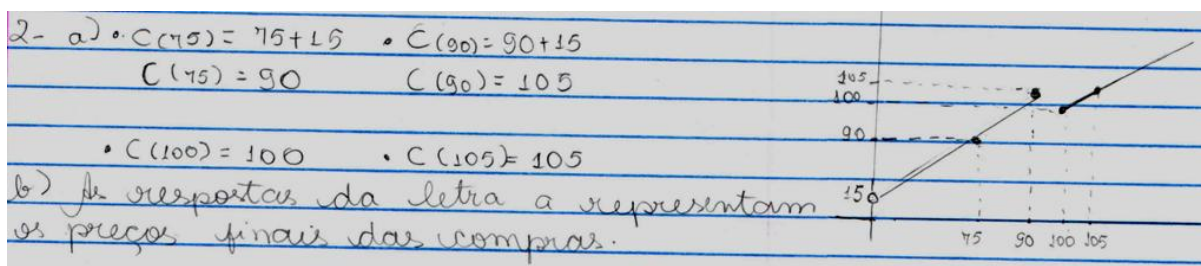
b) $5x - 105 = 0$
 $x = 21$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} / 21 < x \leq 31\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} / 15 \leq x < 21\}$

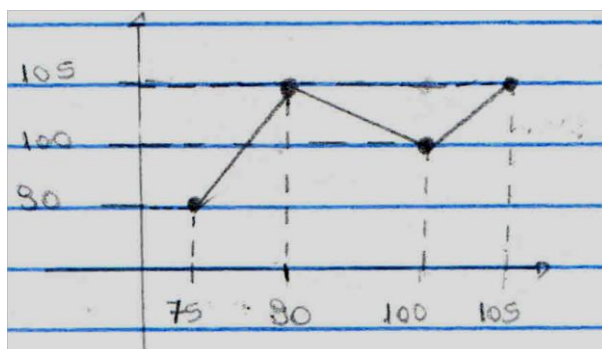
Esse grupo, assim como os demais grupos presentes, não encontrou dificuldades em resolver o primeiro problema proposto. Os alunos se mostraram muito confiantes na resolução da atividade.

Figura 63 - Resolução da Atividade 2 – Encontro 14.4.



O grupo resolveu o problema corretamente e esboçou o gráfico considerando, erroneamente, que no intervalo $90 < x < 100$ a função não está definida. Além disso, considera que os extremos das duas funções são fechados em $x = 90$ e $x = 100$. Dos nove grupos participantes do encontro, apenas três erraram o esboço do gráfico.

Figura 64 - Resolução da Atividade 2- Encontro 14.5



Os alunos consideraram que no intervalo $[90, 100)$ o gráfico era decrescente. Na apresentação dos resultados na lousa, o grupo percebeu que havia cometido um erro e disse à professora que *‘ligaram os pontos, porque acharam que não podia ter um buraco.’* A professora utilizou o resultado desse grupo, e dos outros dois que erraram o problema, para mostrar a todos que não havia um ‘buraco’ no gráfico da função e sim, um ‘salto’. Aproveitou o momento para mostrar a eles que deveriam interpretar os problemas e analisar os gráficos pois esses seriam de extrema valia em Cálculo ao estudarem os conceitos de limite e continuidade.

Durante a plenária os alunos participaram ativamente ao responder algumas questões feitas pela professora. Quando perguntados sobre quantos pontos são necessários para fazer o esboço do gráfico de uma função um aluno prontamente respondeu:

A: Três. Sempre três profe. Depois a gente só aumenta a função para cada lado e deu...

Pp: E se a função não for linear? Não for uma 'reta' vale isso?

A: Claro! Eu sempre faço isso e dá certo! (risos)

Alunos: Não...ele tá errado, não é assim....depende da função...

A professora comentou com os alunos, de que apenas para a função linear, determinada por uma reta, era possível construir a tabela com 2 pontos e que, para as demais funções era necessário construir uma tabela com um número maior de pontos, para que se pudesse obter um esboço mais fiel do gráfico, sempre obedecendo o seu domínio ou campo de definição.

Os alunos trabalharam bem nesse encontro, porém no início estavam um pouco dispersos. Ao serem questionados sobre o que estava acontecendo, alguns alunos declararam que teriam prova em outro curso, e os outros alunos disseram que estavam um pouco desanimados com o fato de que, após o Curso de Matemática Básica, não teriam atividade e ficariam mais de 30 dias sem aulas até o início do semestre letivo. A professora tentou motivar os alunos dizendo a eles que o que estavam revendo nos cursos não estaria ‘perdido’ e que eles logo iniciariam o semestre letivo.

Nesse encontro os alunos trabalharam bem os problemas de função polinomial de primeiro grau, e alegaram que essa era a *‘função mais fácil de todas’*. Foi possível trabalhar todos os problemas preparados, ficando para casa apenas a atividade extraclasse, evidenciando que os alunos estavam comprometidos com o curso.

Como ainda havia tempo para o final do encontro, os alunos iniciaram a tarefa

extraclasse durante a aula. Muitos grupos conseguiram terminar o primeiro problema da atividade em sala.

15° Encontro

Iniciamos este encontro pela atividade extraclasse. A maior parte dos grupos havia resolvido a primeira questão da atividade extraclasse no final do 13° encontro. Quando questionados sobre os problemas 2, 3 e 4, os alunos disseram que foram resolvidos em casa. A professora pediu que os alunos fossem à lousa colocar suas resoluções. Foi realizada uma pequena plenária com eles para sanar dúvidas relacionadas a essa atividade.

Após esse momento foi entregue à turma a folha do 14° encontro.

A professora sentia que os alunos estavam mais à vontade em trabalhar em seus grupos, fato esse que, muitas vezes, era percebido pela conversa entre eles. Essa conversa nem sempre estava relacionada com os problemas, e era necessário chamar a atenção deles, para fazê-los direcionar o assunto. Porém, muitas vezes, eles conversavam sobre o andamento do curso, sobre as atividades e suas expectativas do semestre que logo iniciaria. Muito dessa conversa é, também, gerada pelo entrosamento que os alunos estão adquirindo.

Os alunos iniciaram seus trabalhos nos grupos. Nesse dia, todos se sentiam confortáveis em resolver os problemas de funções quadráticas, pois, segundo eles, se lembravam do tema.

Atividade 1

1) Estima-se que, daqui a x anos, o número de pessoas que visitarão um determinado museu será dado por $N(x) = 30x^2 - 120x + 3000$.

- Atualmente, qual é o número de pessoas que visitam o museu?
- Quantas pessoas visitarão o museu no 10° ano?
- Daqui a quantos anos será registrado o menor número de visitantes? Esboce o gráfico.

2) Quando certo remédio é tomado oralmente, sua concentração na corrente sanguínea do paciente depois de t minutos está dada por:

$$C(t) = 0,06t - 0,0002t^2 \quad \text{onde } 0 \leq t \leq 240$$

e a concentração é medida em mg/l . Quando é alcançada a concentração máxima, e qual é essa concentração? Esboce o gráfico de $C(t)$.

Todos os nove grupos acertaram a resolução da primeira questão proposta na atividade. Um dos grupos chamou a professora durante a resolução do problema:

A: Professora, na questão (1), quando pede na letra (b) então eu faço:
 $10 = 30(10)^2 - 120(10) + 3000$ não é? Os guris estão dizendo que não, mas foi assim que aprendi com minha professora particular...

Pp: Qual o valor de x ?

A: x é 10...

Pp: E quem é $N(x)$?

A: N é...(olhando o problema)...o número de pessoas que visita o museu.

Pp: E o $N(x)$ quando $x = 10$ significa o quê?

A: Não sei. Só sei que aprendi assim...

Pp: Vamos pensar um pouco *A*, se você tem um valor de $x = 10$, o que corresponde a $N(10)$?

B: (entra na conversa, até o momento estava só observando...) O valor de y ?

Pp: Isso, ou seja, $N(10)$ é o número de pessoas que visitam o museu no ano 10, então não podemos igualar $10 = 30(10)^2 - 120(10) + 3000$ e sim, $N(10) = 30(10)^2 - 120(10) + 3000$, ok *A*, *B*?

C: (que estava ouvindo)...Eu disse gente! De onde saiu esse 10?

A: Eu aprendi assim...

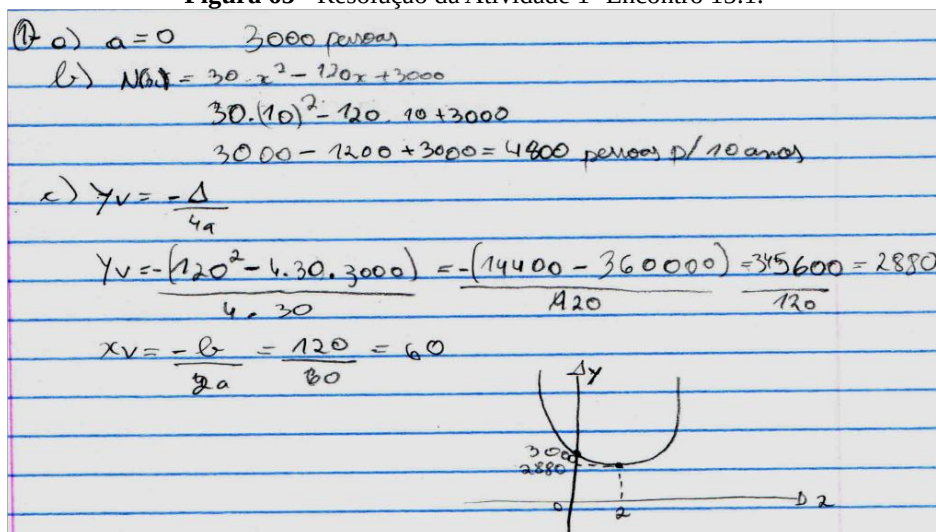
Pp: Ok, mas pensem...faz sentido para vocês?

B e C: Sim, agora entendi. Agora sim, dá certo.

Pp: Certo. *B* e *C* ajudem *A*. Qualquer coisa me chamem.

O diálogo acima demonstra que os alunos deste grupo tiveram dificuldade de compreender e aplicar o valor da função no ponto. O aluno *A* realmente acreditava que suas justificativas estavam corretas e se sentia seguro, pois dizia estar fazendo aula particular de matemática e que ‘a professora dele havia explicado assim.’ Depois da intervenção da professora, o grupo conseguiu chegar à resolução do problema o que exigiu um tempo maior na atividade. Enquanto isso os demais grupos avançaram para o próximo problema.

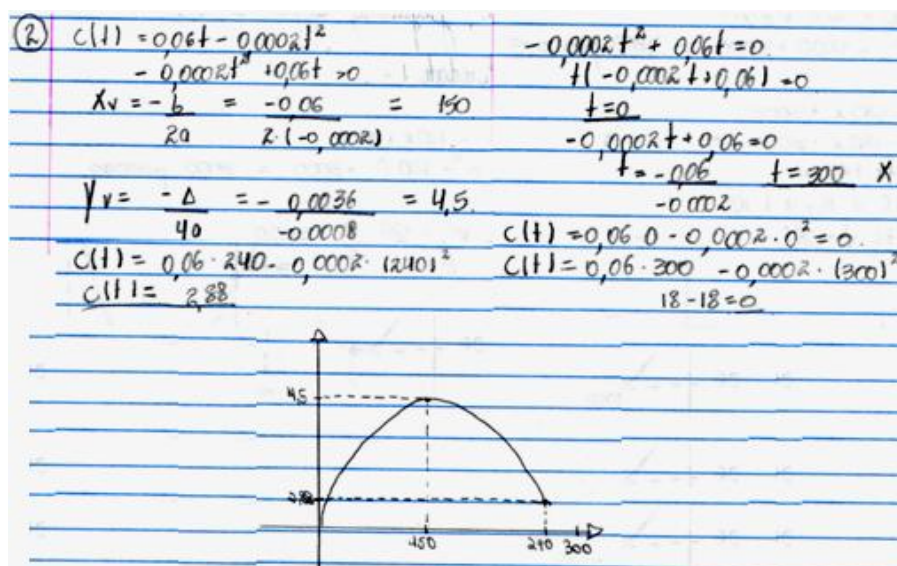
Figura 65 - Resolução da Atividade 1- Encontro 15.1.



Os alunos desse grupo, assim como os demais, efetuaram os cálculos corretamente. Iniciaram o problema obtendo o valor da função no ponto zero e, depois, o vértice da parábola para descobrir em que ano seria registrado o menor número de visitantes, além de esboçar um gráfico para a função.

O problema 2 os alunos, também, conseguiram resolver com facilidade:

Figura 66 - Resolução da Atividade 1 – Encontro 15.2.



Esse grupo determinou os zeros para a equação quadrática e fez a ‘prova real’ voltando com os valores na função. O grupo ainda fez os cálculos do vértice da função quadrática para responder qual a concentração máxima do medicamento e em que tempo se obtém tal concentração. Para o esboço do gráfico, considerou a função definida no intervalo $0 \leq t \leq 240$, excluindo, corretamente, a segunda raiz obtida, $t = 300$. A resolução proposta

pelo grupo foi muito bem estruturada, raciocínio bem explicado, apresentação muito boa, deixando a desejar apenas na utilização das unidades de medida, um dos temas que a professora tem discutido muito com os alunos, já que eles não têm o hábito de usá-las nem mesmo na resposta final. Uma resolução de problema como essa realmente nos faz acreditar no curso que estamos desenvolvendo, pois não foi somente esse grupo que conseguiu apresentar a solução correta, mas oito dos nove grupos.

Figura 67- Resolução da Atividade 1- Encontro 15.3.

Handwritten work on lined paper:

$$2 - 0,0002t^2 + 0,06t = 0$$

$$t(-0,0002t + 0,06) = 0$$

$$t = 0$$

$$t = 300$$

A graph of a downward-opening parabola is sketched on a coordinate system. The x-axis is labeled with 240 and 300. The y-axis has a point labeled 0,4. The vertex of the parabola is marked with a dot.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = 4$$

O grupo fez o cálculo das raízes da função, desprezou o valor $t = 300$ (por estar fora do intervalo dado no problema), porém esboçou o gráfico para valores menores do que zero o que não contempla o problema. Como não utilizou todas as casas decimais, obteve, como solução de tempo para a máxima concentração $t = 4 \text{ min}$, sem efetuar os cálculos para responder qual seria a concentração máxima nesse tempo.

Depois do trabalho em grupo, foi realizada a plenária onde os alunos foram à lousa apresentar suas resoluções e a professora fez a formalização dos conteúdos.

Após o término dos problemas dessa atividade, como ainda restava tempo, a professora solicitou aos alunos a resolução em sala de aula da tarefa extraclasse. Eles colaboraram com a professora e foi possível o término da tarefa em sala de aula, ficando para o dia seguinte a exposição dos resultados na lousa. Nesse encontro os alunos trabalharam muito bem. As dúvidas foram solucionadas com conversas nos grupos e com a professora, sem que elas atrapalhassem o desenvolvimento dos problemas.

Os alunos comentaram que as funções polinomiais de 2º grau foram estudadas na escola e que esse conteúdo estava bem ‘fresco’ na memória. Essa posição parece um tanto contraditória, uma vez que em encontros anteriores, ao estudar as equações quadráticas, esses alunos haviam apresentado dificuldade ao resolver e analisar graficamente problemas desse tipo.

16° Encontro

Iniciamos o encontro pela apresentação das resoluções da atividade extraclasse que fora resolvida no final do encontro anterior. Todos os grupos acertaram a atividade.

Depois deste momento, a professora entregou aos alunos a folha de atividades do 15° encontro e os alunos reuniram-se em grupos para trabalhar.

Atividade 1

1) População de Peixes – Um tanque tem peixes de grande porte. A população de peixes P é descrita pela fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, onde t é o número de dias a partir do momento em que os peixes são colocados no tanque. Em quantos dias a população de peixes será de 500 indivíduos?

2) Determine m e n no polinômio $P(x) = mx^3 - 2x^2 + nx - 1$, sabendo-se que 1 é a raiz do polinômio e que $P(-2) = -21$.

3) Quais das expressões abaixo representam um polinômio na variável x ? Explique.

a) $x^5 + x^3 + 2$

b) $0x^4 + 0x^2$

c) 3

d) $x^2 + 2x + 3$

e) $x^{\frac{5}{2}} + 2x^2$

f) $(\sqrt{x})^4 + x + 2$

g) x^{15}

h) $x + 2$

i) $\frac{1}{x^4} + x$

j) $x^3 + x^6 + x + x^4$

k) $x\sqrt{x} + x^2$

l) $(3x^2 - 5x + 3)(7x^3 + 2)$

O problema 1 da Atividade 1 suscitou em dois grupos dúvidas na sua resolução, devido aos conceitos algébricos associados. Um dos grupos (que já apresentara muitas dúvidas nos encontros que trabalharam a álgebra) chamou a professora logo no início da aula, com dúvidas. A seguir segue o diálogo da professora com o grupo:

A: Professora, olha só...aqui eu isolei os termos e ficou assim (apontando para o caderno): $(3t + 10\sqrt{t})^2 = 360^2$, e daí eu ‘cortei’, e ficou assim: $3t^2 + 10t = 129.600$, tá certo né?

Pp: O que você fez com o quadrado?

A: Bom, eu elevei ao quadrado o t e o $\sqrt{t}$ e aí eu simplifiquei...

Pp: Será que $(3t + 10\sqrt{t})^2$ pode ser simplificado dessa forma?

A: Não tá errado...eu acho....

B: Ah, não! Não pode porque é ‘o quadrado do primeiro, duas vezes o primeiro pelo segundo mais o quadrado do último’, né profe?

Pp: Olha só, *A*, o seu colega pensa diferente. Vamos verificar como? *B*, discuta, com *A* e o seu grupo, a sua ideia.

Alguns alunos do grupo pareciam desanimados e, dessa vez, segundo eles, não era pela linguagem matemática, mas sim, com eles mesmos. A professora perguntou porque se sentiam assim e um aluno respondeu: *“é como se eu soubesse que já trabalhei com esses conteúdos...mas na hora de utilizar, eu não consigo”*. A professora conversou com os alunos, explicando-lhes que, muitas vezes, os erros poderiam novamente aparecer, mas que eles não podiam desistir de aprender e de trabalhar para superá-los.

A professora afastou-se do grupo para que pudessem discutir o problema. Esse grupo já havia apresentado dificuldades em resolver os problemas de álgebra dos primeiros encontros e a professora acreditara até então que esta dúvida, em particular, já estava sanada. Parecem-nos que alguns erros que eles carregam em relação à álgebra permanecem nebulosos mesmo depois de terem sido discutidos várias vezes. Eles tentam fazer de forma correta e existe empenho, porém algo acontece que eles não conseguem trabalhar com a álgebra.

Depois de alguns minutos os alunos solicitaram novamente a presença da professora:

A: Olha só professora, mas ficou tudo na mesma... acho que o meu jeito tava mais certo..assim não acaba com a raiz! (mostrava indignado o caderno):

$$(3t + 10\sqrt{t})^2 = 360^2 = 9t^2 + 60t\sqrt{t} + 100t = 129.600$$

Pp: Bem, não há outra forma de escrever os termos antes de elevar o quadrado? A operação parece correta, mas o resultado não está ajudando...

A: Mas eu fiz certo. Separei o que tinha ‘t’ de um lado e o que não tinha do outro...(o aluno parecia desolado com seu fracasso)

Pp: E se deixássemos o $10\sqrt{t}$ sozinho o que aconteceria? (tentando dar um ânimo no grupo...)

A: E pode? (com dúvida e esperança...)

Pp: Podemos escrever da forma que melhor convier, desde que obedeça os sinais...

A: Ah, tá! Deixa eu ver...(escrevendo no caderno...):

$$(10\sqrt{t})^2 = (-3t + 360)^2. \text{ Isso! Agora sim...acabei com a raiz!}$$

Pp: Certo! Agora siga em frente....

A professora percebeu no rosto dos alunos a alegria de ver que estavam no caminho certo.

Outro grupo também teve dificuldade para resolver o mesmo problema, e chamou a professora:

Pp: Sim?

A: Profe, eu fiz assim...(mostrando o caderno) mas aí temos um problema...deu duas raízes negativas....(apontando o caderno)

Pp: Como assim? Vamos ver...

A: (Mostra os seus cálculos): $t = -10 \pm \frac{66,48}{6} \rightarrow t' = -1,08$ e $t'' = -21,08$

Pp: Ok, mas como fez isso? Veja os sinais...estão certos?

A: Deixa eu ver...(faz as contas em voz alta repetindo o que está escrito)...

Ah! Olha só, eu errei: $-10 \pm \frac{66,48}{6} \rightarrow t' = -10 + 11,08 = 1,08$ e

$t'' = -21,08$

Pp: Ok, e a sua conta está correta?

A: Tá! Agora tá.

Pp: Veja a divisão...

A: Sim, dividi $\frac{66,48}{6}$... tá certo!

Pp: O teu sinal de divisão não vale para toda a equação?

A: (Totalmente confuso, em dúvida olhava o caderno...)

B: Tá errado! Olha só eu fiz (apontando o caderno para *A*)..o sinal da divisão é esse né profe? (mostrando no caderno $\frac{-10 \pm 66,48}{6}$)

P: Muito bem *B*, deu para ver que você conseguiu resolver o problema. Ajude *A*.

Estes dois episódios envolvendo os dois grupos deixou a professora preocupada, pois o assunto já havia sido tratado anteriormente. Os alunos continuavam apresentando erros em operar com os produtos notáveis. A professora decidiu reforçar a formalização com mais alguns exemplos.

O problema 1 da Atividade 2 foi resolvido por quatro grupos utilizando a substituição de variável e cinco grupos que o resolveram através da equação original com produtos notáveis. Vale salientar que os nove grupos acertaram o problema apesar de algumas dificuldades localizadas.

Figura 68- Resolução da Atividade 1- Encontro 16.1.

Handwritten mathematical work for Figure 68:

$$1) \sqrt{t} = y$$

$$(\sqrt{t})^2 = y^2$$

$$t = y^2$$

$$3y^2 + 10\sqrt{y^2} + 140 = 500$$

$$3y^2 + 10y - 360 = 0$$

$$y = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4320}}{6}$$

$$t_1 = (9,41)^2$$

$$t_1 = 88,55$$

$$t_2 = (-12,74)^2$$

$$t_2 = 162,30$$

$$y = \frac{-10 \pm 66,48}{6} \rightarrow \frac{56,48}{6} = 9,41$$

$$\rightarrow \frac{-76,48}{6} = -12,74$$

$$3t_1 + 10\sqrt{t_1} + 140 \rightarrow 3 \cdot 88,55 + 10\sqrt{88,55} + 140 = 499,75$$

$$3t_2 + 10\sqrt{t_2} + 140 \rightarrow 3 \cdot 162,30 + 10\sqrt{162,30} + 140 = 542,00$$

Esse grupo resolveu por substituição de variável, obteve as duas soluções, voltou à variável original e, por fim, tirou a ‘*prova real*’ das duas soluções substituindo-as na equação inicial. Como a segunda solução obtida representava mais de 500 peixes, foi excluída da resposta final.

Figura 69 - Resolução da Atividade 1- Encontro 16.2.

Handwritten mathematical work for Figure 69:

$$1- P = 3t + 10\sqrt{t} + 140 \quad t = \text{dias}$$

$$500 = 3t + 10\sqrt{t} + 140$$

$$500 - 140 = 3t + 10\sqrt{t}$$

$$360 = 3t + 10\sqrt{t}$$

$$(360 - 3t)^2 = (10\sqrt{t})^2$$

$$(360)^2 - 2 \cdot 360 \cdot 3t + (3t)^2 = 100t$$

$$129600 - 2160t + 9t^2 = 100t$$

$$9t^2 - 2260t + 129600 = 0$$

$$b^2 - 4ac$$

$$(-2260)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 129600$$

$$5107600 - 4665600 = 942000$$

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{2260 \pm \sqrt{942000}}{2 \cdot 9}$$

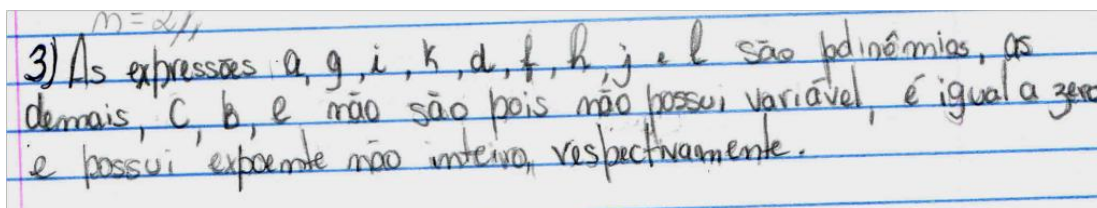
$$\frac{2260 \pm 66,48}{18} = \frac{2260 + 66,48}{18} = 127,48$$

$$x' = 88,62 = \text{OK}$$

$$x'' = 162,48$$

Os alunos do grupo resolveram o problema trabalhando a equação original e transformando-a em uma equação quadrática, obtendo assim suas duas raízes. Descartaram a raiz $x'' = 162,48$, porém não apresentaram justificativa para tal descarte.

O problema 2 da Atividade 1 foi resolvido pelos alunos sem maiores dúvidas, porém o terceiro problema proposto gerou muita polêmica. Os alunos não lembravam a definição de polinômios. Sendo assim, dos nove grupos, cinco apresentaram resposta escrita para o problema, mesmo que todos eles tenham errado a justificativa para alguma das alternativas, e quatro grupos não apresentaram nenhuma resposta escrita para o problema.

Figura 70 - Resolução da Atividade 1 – Encontro 16.3.

Esse grupo foi o único que apresentou justificativas, nem sempre corretas, para as respostas. Os demais grupos se limitaram a escrever ‘verdadeiro ou falso’ ou, até mesmo, ‘sim ou não’. Os alunos não identificaram como polinômios aqueles que possuem apenas o termo independente ou constante nula como verdadeiros, porém, acertaram, inclusive na justificativa, o polinômio da letra (e) que não possui expoente inteiro, passando despercebido que isso ocorre com a letra (i), onde a variável encontra-se no denominador e, na letra (k), que possui um expoente inteiro multiplicando uma raiz quadrada.

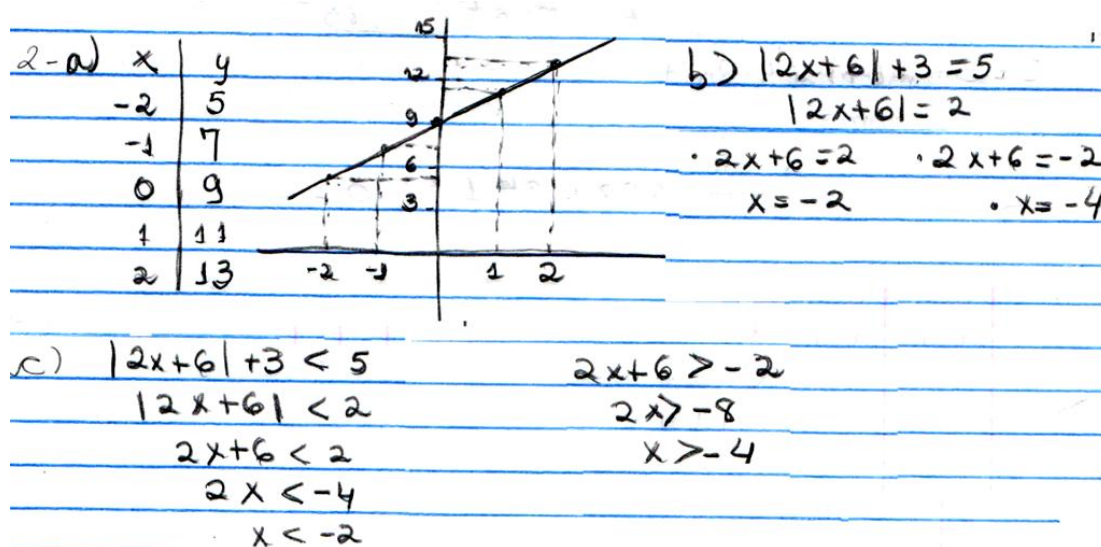
Na apresentação dos resultados na lousa a professora perguntou a todos os alunos se eles sabiam a definição de polinômios e eles responderam negativamente. Desta forma, a professora, utilizando as resoluções dos alunos, discutiu todos os itens do problema, utilizando a definição de polinômios escrita por ela na lousa.

A professora resolveu fazer a plenária e a formalização separadamente para cada uma das atividades, já que estas tratavam de assuntos diferentes: polinômios - Atividade 1 e função modular – Atividade 2. Foi realizada a plenária e a formalização dos conteúdos e, posteriormente, os alunos retornaram aos grupos para desenvolver a segunda atividade do dia.

Atividade 2

- 1) Construa o gráfico da função $f(x) = 2|x| - |x - 1|$ e determine suas raízes.
- 2) Seja $f(x) = |2x + 6| + 3$:
 - a) construa o gráfico;
 - b) Determine os pontos do gráfico de f que têm ordenada 5.
 - c) Determine as abscissas dos pontos do gráfico de f que têm ordenada menor que 5.

Figura 71 - Resolução da Atividade 2 – Encontro 16.4.



O grupo resolveu corretamente o problema 2, porém escolheu pontos insuficientes para que o esboço ficasse mais claro, já que o ponto mínimo do gráfico encontrava-se em (-3,3). Outros dois grupos também fizeram o esboço parcial do gráfico por considerarem poucos pontos de domínio. A professora perguntou aos alunos se já haviam estudado a função modular e novamente eles responderam que não. Pediu então que os alunos observassem os esboços dos demais grupos que estavam corretos e perguntou se eles percebiam qual a diferença entre eles.

A: Tem mais pontos...

Pp: Como assim 'A'?

A: Eles colocaram mais pontos na tabela para montar o gráfico!

Pp: Pessoal (dirigindo-se ao grupo que fizera o esboço correto), o que vocês fizeram de diferente?

B: É mais ou menos o que ele disse...a gente colocou mais pontos...ah! e também a gente sabia o domínio...

Pp: Sabia o domínio? E qual era? Não escreveram isso...

B: É... não escrevemos...mas a 'C' (aluna) escreveu na folha dela....é os reais.

Pp: Isso mesmo. Obrigada.

A professora discutiu com os alunos a importância de fazer a análise do domínio de uma função antes de iniciar o esboço do gráfico. Os alunos pareceram um pouco resistentes a isso e a professora disse que isso seria trabalhado em Cálculo. A professora, então, lembrou a

todos que, durante o semestre, eles poderiam ir à biblioteca e retirar livros de matemática básica, se necessário, e entrar em contato por email. Ao fazer a formalização, apresentou mais exemplos, pedindo ajuda aos alunos para que sugerissem problemas, e eles participaram.

Nesse encontro, a professora decidiu não entregar a atividade extraclasse preparada, pois o número de encontros restantes é pequeno e grande parte dos alunos fariam uma avaliação no dia seguinte para outro curso em que estão matriculados. Tal problema será utilizado na Avaliação de grupo que deverá ocorrer no 20º encontro.

17º Encontro

Iniciamos a aula entregando aos alunos a folha de trabalho do 16º encontro. As atividades desse dia tratavam de equações exponenciais e logarítmicas.

Atividade 1

1) Seja I_0 e I a intensidade de luz antes e depois de passar por um material e x a distância (em pés) que viaja a luz em um material, então de acordo com a Lei de Beer-Lambert:

$$-\frac{1}{k} \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = x$$

Onde k é uma constante que depende do tipo de material.

a) Isole I na equação.

b) Quando $k = 0,025$ e a intensidade luminosa é $I_0 = 14$ lumens (lm). Encontre a intensidade de luz para uma profundidade de 20 pés.

2) Suponha que um automóvel está funcionando em um dia frio de inverno (20°F no exterior) e a máquina se aquece (cerca de 220°F). Quando se estaciona o carro, a máquina começa a esfriar. A temperatura T da máquina t minutos depois de que se estaciona é dada por:

$$\ln \left(\frac{T - 20}{200} \right) = -0,11t$$

a) Isole T na equação.

b) use a letra a) para determinar a temperatura do motor depois de 20 minutos ($t = 20$).

Logo no início da atividade, a professora foi chamada a um dos grupos por um aluno:

Pp: Sim?

A: Professora a gente não entendeu o que é o 'ln'...

Pp: Que ‘in’? Onde você viu isso? Leia o problema para mim.

A: (lendo o problema em voz alta até chegar na fórmula e diz): ... um sobre k , ‘in’ que multiplica...

Pp: Veja bem, isso...

Os alunos do grupo ao lado entram na conversa.

A(G_2): A gente também tem dúvida, esse ‘in’ é o quê?

Pp: Pessoal o que está escrito não é ‘in’, e sim ‘ln’. (A professora decidiu então se dirigir a todos os alunos da turma).

Pp: Pessoal, todos leram o problema 1?

Todos: Sim!

Pp: Vejam bem, o que está escrito ali não é o ‘in’ como alguns grupos leram, e sim, o ‘ln’. Quem sabe me dizer o que é o ‘ln’?

C: É o logaritmo natural...

Nesse momento, muitos alunos argumentaram que nunca haviam visto tal nomenclatura. A professora pediu que eles lessem novamente e discutissem no grupo ou mesmo em grupos. Os alunos pediram se poderiam ligar o computador para procurar na internet. A professora não aceitou o pedido, estimulou-os a continuar a pensar no problema e discutir com os colegas que lembravam como fazer.

Consideramos que não lembrar ou não saber as técnicas e propriedades de logaritmos poderia ser um percalço a ser trabalhado nesse encontro. Porém a dúvida da notação matemática soou muito forte. Aqueles alunos não sabiam mesmo o que era o logaritmo natural.

Em quatro grupos, os alunos responderam que haviam estudado logaritmos no Ensino Médio e seguiram normalmente com os trabalhos, porém os demais grupos não conseguiam resolver o problema. Alguns tentaram, em vão, isolar as variáveis com as técnicas lineares que conheciam. Como não tiveram sucesso, ficaram desestimulados. A professora atendeu a todos os alunos que a chamavam, mas as perguntas não eram em relação ao conteúdo e sim, para pedir: *Como se resolve isso?*

Sendo assim, a professora atendeu as dúvidas, lembrou com os alunos as aulas iniciais com as propriedades de potenciação e, muitas vezes, precisou ajudar os alunos para que pudessem avançar. A professora pediu auxílio aos alunos que já conheciam o conteúdo e haviam resolvido a atividade, para que fossem ajudar os grupos como monitores. Desta forma, os grupos trabalharam conjuntamente, contando com a participação dos colegas, o que se

mostrou uma decisão de sucesso. Apesar das dificuldades, todos os grupos conseguiram, ao final do tempo, resolver os problemas, e apenas um grupo errou o problema 2 da atividade 1.

Figura 72 - Resolução da Atividade 1- Encontro 17.1.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & -\frac{1}{K} \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = x & \textcircled{5} \quad & I = e^{-Kx} \cdot I_0 \\
 & \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = -Kx & & I = e^{-0,025 \cdot 20} \cdot 14 \\
 & e^{\ln \left(\frac{I}{I_0} \right)} = e^{-Kx} & & I = e^{-0,5} \cdot 14 \\
 & \boxed{I = e^{-Kx} \cdot I_0} & & \boxed{I = 8,48}
 \end{aligned}$$

Todos os grupos acertaram a resolução do primeiro problema, mesmo que tivessem esquecido as unidades de medida, como tem ocorrido com frequência.

Figura 73 - Resolução da Atividade 1 – Encontro 17.2.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & \ln \left(\frac{T-20}{200} \right) = -0,11t & \left(\frac{T-20}{200} \right) &= e^{-0,11t} \\
 \textcircled{a} \quad & e^{\ln \left(\frac{T-20}{200} \right)} = e^{-0,11t} & T-20 &= e^{-0,11t} \cdot 200 \\
 & & T &= e^{-0,11t} \cdot 200 + 20 \\
 \textcircled{b} \quad & T = e^{-0,11 \cdot 20} \cdot 200 + 20 & & \\
 & T = 2,71^{2,2} \cdot 220 & & \\
 & T = \left(\frac{1}{2,71} \right)^{2,2} \cdot 220 = 0,36^{2,2} \cdot 220 = 0,10 \cdot 220 & & \\
 & \boxed{T = 22,30} & &
 \end{aligned}$$

O grupo foi o único a errar o problema 2, letra (b). A primeira coisa que o grupo fez foi escrever $e = 2,71$, mesmo tendo sido orientado a utilizar o valor na memória da calculadora. Depois disso, o grupo iniciou a resolução cometendo o erro de adicionar $200 + 20$, na expressão $T = e^{-0,11 \cdot 20} \cdot 200 + 20$, sendo que 200 está multiplicando $e^{-0,11 \cdot 20}$. A professora perguntou aos alunos do grupo se isso era possível e uma aluna disse que sim, enquanto os demais integrantes ficaram em silêncio. Nesse momento a professora pediu que os alunos calculassem $5 \cdot 200 + 20$ e a aluna respondeu 1020. A professora perguntou qual a diferença em relação ao problema dado e porque ela primeiro havia multiplicado e depois somado. A aluna respondeu que ‘no problema não dava para multiplicar porque eu não sabia

quanto era aquele número e por isso somei primeiro'. A professora retomou com o grupo a existência de prioridades nas operações, lembrando que eram válidas sempre, deixando com o grupo alguns problemas a mais para serem trabalhados.

Após a resolução da primeira atividade foi acordado que os alunos resolvessem a segunda atividade antes da plenária, para que na formalização fosse possível colocar mais exemplos e aplicações.

Para a segunda atividade os alunos reclamaram menos do conteúdo, porém continuaram com muita dificuldade.

Atividade 2

- 1) Calcule : $\log_{100} 27$ se $\log_{10} 3 = 0,48$
- 2) Resolva as equações exponenciais:
 - a) $(2^x)^x = 16$
 - b) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$
- c) $\sqrt[3]{3^{x-2}} = 27$
- 3) Resolva as equações logarítmicas:
 - a) $\log_2[\log_3(\log_4(x^{3x}))] = 0$
 - b) $\log_2(x^2 + 2x) = 3$

Figura 74 - Resolução da Atividade 2 – Encontro 17.3.

① a) $\frac{\log 27}{\log 100} = \frac{\log 3^3}{\log 10^2} = \frac{3 \cdot 0,48}{2} = 0,72$

② a) $(2^x)^x = 2^4$
 $x^2 = 4$
 $x = \pm \sqrt{4}$
 $x = \pm 2$

b) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$
 $5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^2 = 30$
 $5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^2 = 30$
 $5 + 25 = 30$
 $x = 0$

c) $3^{x-2} = 27^2$
 $3^{x-2} = 3^{12}$
 $x-2 = 12$
 $x = 14$

③ a) $\log_3(\log_4(x^{3x})) = 1$
 $\log_4(x^{3x}) = 3$
 $x^{3x} = 4^3$
 $x^{3x} = 64$
 $x^{3x} = 8^2$
 $x^{3x} = (2^3)^2$
 $x = 2$

b) $x^2 + 2x - 8$
 $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot -8$
 $\Delta = 36$
 $x' = \frac{-2 + 6}{2} = 2$
 $x'' = \frac{-2 - 6}{2} = -4$

O grupo acertou parte das resoluções para a segunda atividade. Na letra (b) do problema 2, apresentam uma substituição de valores, parecendo se tratar de 'tentativa e erro', para obter uma resposta. Outros grupos também tiveram dificuldade em resolver a letra (b),

pois consideraram possível tomar as potências e escrevê-las mesmo quando as bases estão sendo adicionadas:

Figura 75 - Resolução da Atividade 2 – Encontro 17.4.

Handwritten work for problem (b):

$$\begin{array}{rcl}
 & x+1 & x+2 & & 2 & 1 \\
 b) & 5 & + 5 & = & 5^2 & + 5^1 \\
 & (x+1)(x+2) & = & 3 \\
 & 2x+3 & = & 3 \\
 & x & = & 0
 \end{array}$$

Handwritten work for problem (c):

$$\begin{array}{l}
 c) \\
 5^{x+1} + 5^{x+2} = 5^2 + 5^1 \\
 x+x+x+x = 2+1 \\
 2x = 0 \\
 x = \frac{0}{2} = 0
 \end{array}$$

Nesse problema, percebemos claramente que os alunos não dominam as propriedades de potenciação. O erro de utilizar as potências e descartar as bases foi recorrente em toda a turma. Dois grupos não apresentaram nenhuma solução e os demais cometeram o mesmo erro que o grupo acima.

O problema 2, letra (c) foi resolvido pelos alunos normalmente e a professora fez, com eles, sua análise, visto que se tratava de um problema mal posto, pois a solução obtida, $x = -1$, não pode ser o índice de uma raiz, uma vez que o índice deve ser um número natural, maior do que 1.

A professora solicitou aos alunos que fossem à lousa e os grupos que não haviam resolvido os problemas não participaram da atividade por escolha própria. Os demais grupos apresentaram suas resoluções. Com base nos erros percebidos, a professora foi à lousa e com a colaboração dos alunos, foram discutidos mais alguns problemas.

Percebemos que cada encontro planejado mostra-se com algumas diferenças grandes entre planejamento e execução. Nesse encontro, a professora não esperava que os alunos não soubessem o que era o 'ln' e isso foi um fato que causou certa surpresa.

A ideia de pedir ajuda aos que compreendiam o conteúdo, para que auxiliassem os colegas, deu muito certo e todos os alunos gostaram. Foi um momento deles. Um trabalho deles, em que houve explicações gerais, de técnicas, mas também houve dúvidas interessantes como quem inventou os logaritmos e para que eles servem. A professora aproveitou as perguntas feitas e na formalização comentou com os alunos um pouco sobre a história dos logaritmos e sua utilidade e necessidade durante as grandes navegações. Mesmo a aula tendo sido muito interessante, ao final foi possível perceber que algumas propriedades, como as de

potenciação, não eram de domínio da turma, nem mesmo dos colegas monitores, o que não diminuiu o empenho de todos.

18º Encontro

Iniciamos o encontro pela atividade extraclasse do encontro anterior. Os alunos foram à lousa apresentar suas resoluções para os problemas propostos, sendo que todos conseguiram resolvê-los em casa.

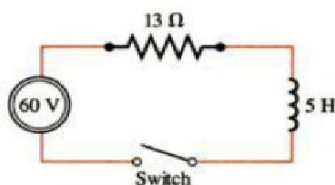
Na sequência, a professora entregou aos alunos a folha de atividades do 17º encontro.

Atividade

1) Um circuito eletrônico contém uma bateria que produz uma voltagem de 60 volts (V), um resistor com uma resistência de 13 ohms (Ω), e um indutor com uma indutância de 5 henrys (H), como mostra a figura. Por meio de cálculos, pode-se demonstrar que a corrente $I=I(t)$ (em ampères, A) t segundos depois de que se fecha o interruptor é dado por:

$$I = \frac{60}{13} \left(1 - e^{-\frac{13t}{5}}\right)$$

- Use esta equação para expressar o tempo t como uma função da corrente I .
- Depois de quantos segundos a corrente é de 2 A?



2) Em uma festa é servido um prato de sopa quente. Ela esfria segundo a lei de resfriamento de Newton, de modo que sua temperatura no instante t se determina por:

$$T(t) = 65 + 145e^{-0,05t}$$

Onde t é medido em minutos e T em $^{\circ}\text{F}$.

- Qual a temperatura inicial da sopa?
- Qual a temperatura depois de 10 minutos?
- Depois de quanto tempo a temperatura será de 100°F ?
- Esboce o gráfico de $T(t)$.

O problema 1 foi escolhido para motivar os alunos da engenharia elétrica e da engenharia de telecomunicações. A professora, ao selecionar tal problema, procurou auxílio de um colega engenheiro eletricista para compreender os conceitos necessários para aplicar o conhecimento nesse contexto e não apenas resolvê-lo como uma aplicação de fórmula.

Depois da leitura e explicação do problema nesse contexto, os alunos organizaram-se em grupos para trabalhar, apoiados no esboço proposto e na leitura do problema.

A professora perguntou-lhes como estava a resolução dos problemas nessa aula, pois havia observado que os alunos estavam com poucas dúvidas. Os alunos responderam que haviam estudado em casa, pois sabiam que esse conteúdo era difícil e seria cobrado na avaliação de grupo.

Nessa aula todos os grupos apresentaram resoluções para os problemas.

Figura 76 - Resolução da Atividade 1- Encontro 18.1.

$$\textcircled{1} \quad I = \frac{60}{13} \left(1 - e^{-\frac{13}{60}t} \right)$$

$$a) \quad I = \frac{60}{13} \left(1 - e^{-\frac{13}{60}t} \right) = I \cdot \frac{13}{60} = 1 - e^{-\frac{13}{60}t} = I \cdot \frac{13}{60} - 1 = -e^{-\frac{13}{60}t}$$

$$\ln e^{-\frac{13}{60}t} = \ln \left(1 - \frac{13I}{60} \right) = -\frac{13}{60}t = \ln \left(1 - \frac{13I}{60} \right) \Rightarrow t = \frac{-5}{13} \ln \left(1 - \frac{13I}{60} \right)$$

$$b) \quad I = 2A$$

$$t = \frac{-5}{13} \ln \left(1 - \frac{13 \cdot 2}{60} \right) = \frac{-5}{13} \ln \left(\frac{17}{30} \right) = 0,2184$$

O grupo desenvolveu corretamente os cálculos, chegando à solução correta. Porém, cometeu o erro de igualar todos os passos ao trabalhar a equação, deixando de ver que ao passar de uma situação para outra, a equação necessita de uma implicação, pois embora equivalentes, não expressam o mesmo valor. Os alunos não apresentaram unidades de medida para as respostas obtidas. Durante a plenária a professora discutiu com os alunos a necessidade de utilizar corretamente os símbolos matemáticos.

O segundo problema proposto foi resolvido pelos alunos sem maiores dificuldades. Logo após a resolução da Atividade 1, os alunos foram convidados a irem à lousa apresentarem suas resoluções. Após esse momento, a professora sugeriu aos alunos a resolução da atividade extraclasse em sala, já que ainda restava tempo antes da avaliação.

Atividade Extraclasse

1) Esboce o gráfico das funções abaixo no mesmo plano cartesiano:

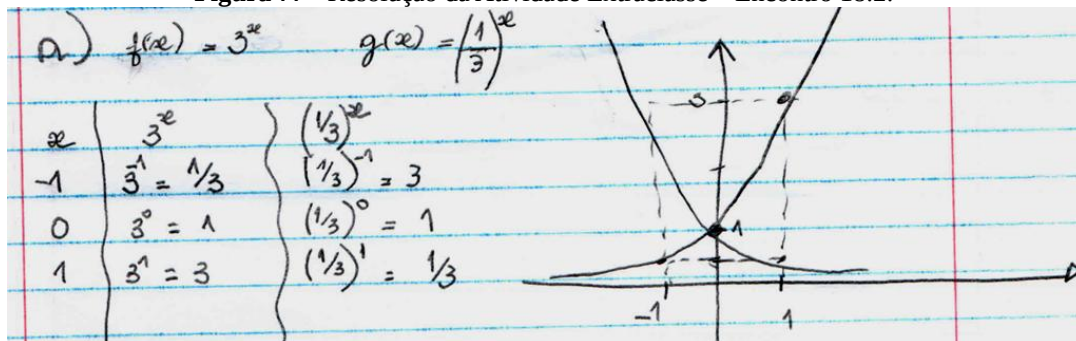
a) $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = 3^x$

O que é possível observar no esboço de tais funções? Quais são as regularidades encontradas?

Os grupos, a princípio, não demonstraram interesse em resolver o problema, mas um aluno de um dos grupos, perguntou à professora se, na avaliação, teria gráficos de funções. A professora respondeu que sim e os alunos resolveram esboçar os gráficos para ‘*estudar para a prova*’ como disseram.

Figura 77 - Resolução da Atividade Extraclasse – Encontro 18.2.



Os grupos esboçaram os gráficos para a atividade extraclasse sem muitas dúvidas. A professora conduziu a plenária e os alunos participaram respondendo as perguntas feitas por ela e também perguntando:

A: Professora, como eu vejo as raízes da função exponencial?

Pp: Pessoal, é possível obter raízes para a função exponencial?

A: Sim...deve ter...

Pp: Pensem bem...acabamos de construir um gráfico...

B: Não professora....não têm raízes!

A: Mas professora, como pode não ter raízes?

Pp: Veja bem A (mostrando um esboço de gráfico de função exponencial que havia na lousa): a função não possui valor negativo e também não se anula. Ela é sempre positiva para qualquer x que tomemos. Veja a tabela: no zero ela vale 1...

A: Ah, sim!! Claro. Entendi professora.

Pp: Mais alguém possui dúvidas?

Todos: Não!

A professora ao final da plenária e formalização utilizou o software Maple para trabalhar, com os alunos, os esboços de gráficos e lhes pediu sugestões de funções exponenciais que eles gostariam de esboçar. Além do problema da atividade extraclasse, outros gráficos sugeridos por eles foram esboçados e foi feita a análise de seus comportamentos utilizando diferentes intervalos de domínio.

Após esse momento, os alunos tiveram um intervalo de 10 minutos antes de realizar a atividade de avaliação em grupo. Essa atividade continha duas questões: uma sobre funções polinomiais e outra sobre aplicações de função exponencial e logarítmica.

Ficou reservado um pouco mais de uma hora para eles resolverem, em grupo, as duas questões da avaliação. A professora optou por colocar, na avaliação dos grupos, um exercício não resolvido, preparado como atividade extraclasse, de função polinomial e uma questão sobre exponenciais e logaritmos.

Como os encontros projetados sofreram alguns atrasos, a professora utilizou os problemas do encontro 18, planejados anteriormente e apresentados no Apêndice D deste trabalho, na avaliação dos grupos. Vale salientar que a avaliação no curso é um instrumento solicitado pela Coordenação Acadêmica da Unipampa para fins de aprovação e ou reprovação.

As avaliações dos grupos estão na íntegra no Apêndice E deste trabalho.

19° Encontro

Iniciamos o encontro pela entrega da avaliação dos grupos e discussão dos resultados obtidos pelos alunos. A avaliação valia 4,0 pontos e foi corrigida e entregue para os alunos verificarem suas resoluções.

Como as avaliações possuíam uma questão igual e uma questão diferente para todos os grupos, pudemos avaliar o resultado da questão comum e, depois, caso a caso cada avaliação diferente por grupo.

Para a questão da função polinomial, comum a todas as provas, esperava-se que os alunos fizessem a análise do gráfico e tentassem obter uma boa aproximação para as respostas. A intenção era a de fazê-los utilizar a calculadora e, também, conceitos básicos de funções tais como: valor da função no ponto, crescimento e decrescimento de funções, zeros ou raízes de funções, etc.

Apenas três grupos conseguiram encontrar as soluções esperadas, mostrando cálculos e justificando-os. Os demais grupos atenderam parcialmente as respostas, sendo que nenhum grupo errou totalmente a questão.

Figura 78 - Resolução da Avaliação – Encontro 19.1.

2) a) $P(27) = -0,0037(27)^3 + 0,3(27)^2 + 8(27) - 372$
 $P(27) = -61,0173 + 218,7 + 216 - 372$
 $P(27) = 1,6827$

$P(110) = -0,0037(110)^3 + 0,3(110)^2 + 8(110) - 372$
 $P(110) = -4126,1 + 3630 + 880 - 372$
 $P(110) = 11,9$

$P(-41) = -0,0037(-41)^3 + 0,3(-41)^2 + 8(-41) - 372$
 $P(-41) = 213,6551 + 504,3 - 328 - 372$
 $P(-41) = 17,9551$

entre 27 e 110 liquidificadores a produção não terá perdas.

b) $P(76) = -0,0037(76)^3 + 0,3(76)^2 + 8(76) - 372$
 $P(76) = -1360,8256 + 1732,8 + 608 - 372$
 $P(76) = 607,9744$
 $P(75) = 607,6875$
 $P(77) = 607,4477$

Não. Com a produção de 76 liquidificadores há um ganho de R\$ 607,9744, sendo o mesmo o máximo ganho possível.

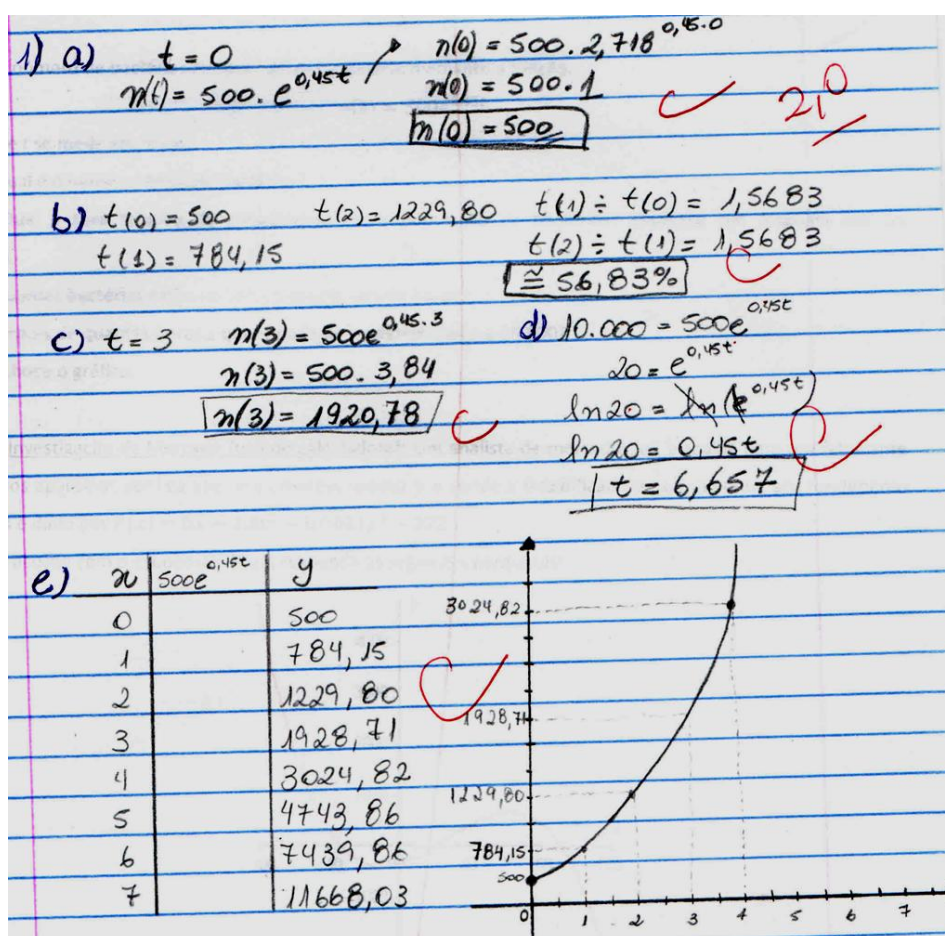
Esse grupo apresentou uma resolução bem organizada do problema, fez os cálculos para determinar o número de liquidificadores e, também, apresentou os cálculos para determinar o máximo ganho possível, sendo que, apenas na resposta inseriu a unidade monetária, apesar de usar casas decimais a mais que o normal, na moeda corrente.

Para as questões diferenciadas (exponencial e logaritmo) de cada grupo, houve quatro grupos que acertaram a questão. Todos os outros grupos erraram o esboço de gráfico e/ou cometeram erros nas operações fundamentais, porém nenhum grupo errou totalmente o problema.

A menor nota obtida por um grupo foi 2,6. Todos os grupos tiveram um bom índice de aproveitamento na avaliação (> 60%).

A figura abaixo se refere à solução do primeiro problema da avaliação de grupos, em que o grupo em questão acertou toda a resolução do problema. No problema letra (b) os alunos mostram que compreenderam a ideia de taxa e que ela era mantida nos passos analisados. Foi permitido que os alunos usassem a calculadora e, ao que nos parece, eles souberam utilizá-la.

Figura 79 - Resolução da Avaliação – Problema 1– Encontro 19.2.



Os alunos obtiveram um bom resultado nas questões que tratavam de exponenciais e logaritmos, diferentemente do que ocorreu nas atividades de aula. De alguma forma eles conseguiram apresentar resultados para os problemas, seja porque estavam em grupos e algum dos membros dominava as técnicas, ou porque realmente aprenderam como trabalhar com elas fazendo uso das explicações da professora ou dos colegas monitores.

Depois de encerrar os comentários, a professora entregou aos alunos a folha de atividades do 19º encontro e eles reuniram-se em grupos para trabalhar.

Desde o início do curso, alguns alunos questionavam a professora se teríamos tempo de rever o conteúdo de trigonometria. A professora respondeu-lhes que tal conteúdo se encontrava preparado e que seria trabalhado no final do curso. Desde então, os alunos, a cada aula, cobravam da professora quando seria a aula de trigonometria, revelando seu desconhecimento nesse assunto.

Sendo assim, mesmo sabendo que provavelmente não fosse possível avançar muito nesse conteúdo, a professora resolveu trabalhar as atividades preparadas normalmente. Os

alunos trabalharam em grupos as duas atividades propostas e, posteriormente, foram à lousa e foi realizada a plenária e a formalização.

Os alunos não encontraram dificuldades na primeira atividade proposta.

Atividade 1

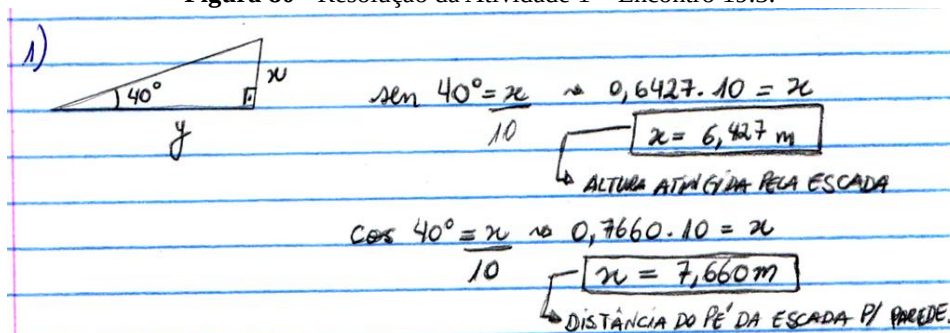
1) Uma escada de pedreiro de 10 m está apoiada numa parede e forma com o solo um ângulo de 40° . Qual a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? E qual a distância do pé da escada à parede?

2) Calcular o lado c de um triângulo ABC em que $a = 6\text{ m}$, $b = 3\text{ m}$ e $\hat{A} = 38^\circ$.

3) Classifique o triângulo retângulo que tem hipotenusa medindo 6 cm e um cateto com $3\sqrt{2}\text{ cm}$.

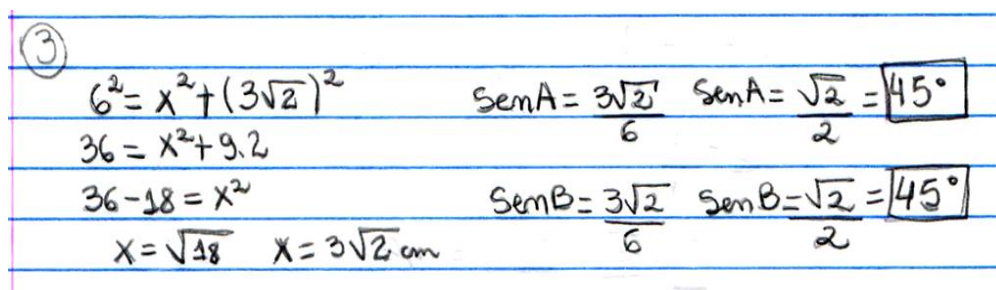
A seguir, obtenha as razões trigonométricas dos ângulos agudos desse triângulo.

Figura 80 - Resolução da Atividade 1 – Encontro 19.3.



Esse grupo esboçou o triângulo e fez os cálculos para a altura da escada (x) e distância da escada até a parede (y). Utilizou variáveis diferentes no esboço, porém ao efetuar os cálculos, por costume provavelmente, utilizou a mesma variável.

Figura 81 - Resolução da Atividade 1 – Encontro 19.4.

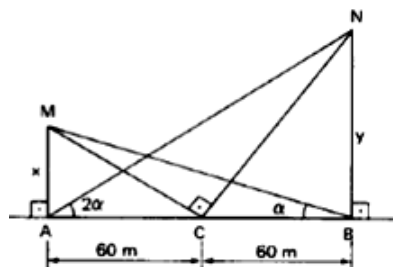


O grupo apresentou os cálculos corretos para a classificação do triângulo retângulo usando o Teorema de Pitágoras, determinou o lado que faltava e depois obteve as razões trigonométricas para os ângulos agudos.

Conforme combinado no início da aula, depois de resolverem a Atividade 1, os alunos resolveriam a Atividade 2 deixando a plenária e a formalização para o fim da aula.

Atividade 2

1) Tendo em vista as relações descritas na figura abaixo calcular as distâncias x e y .



2) Sabendo que $\sec x = 3$, calcular o valor da expressão $y = \sen^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x$.

3) Provar que $(1 - \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{cotg} x)^2 = (\sec x - \operatorname{cosec} x)^2$ para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Na Atividade 2, os grupos tiveram muitas dificuldades em resolver os problemas propostos, já que esta atividade contava com problemas mais elaborados e que necessitavam que os alunos conhecessem as relações trigonométricas fundamentais.

Para essa atividade, nenhum grupo conseguiu resolver o problema 1, que exigia dos alunos conhecer a tangente para arcos duplos. Logo na leitura do problema, muitos grupos estavam reclamando e um deles chamou a professora:

A: Professora, não entendemos nada.

Pp: Não entenderam nada de quê?

A: Desses três problemas! É muito difícil! Problema 'bruxo'....

Pp: Bem, vamos ver. Vamos ler juntos? Pessoal? Vamos ler? (e iniciou a leitura no grande grupo para todos os alunos)

Pp: O que entendemos?

Alunos: Nada!

Pp: Não é bem assim, certo? Sabemos, no primeiro, quais são as distâncias, temos informações dos ângulos..., no segundo sabemos a secante e a partir dela podemos escrever o resto! E no terceiro, sabemos que é uma igualdade.

B: Sim, professora, mas isso não adianta muito....a gente não sabe nem por onde começar...olha isso: 'provar que...'

Pp: O provar é mostrar que os dois lados são iguais, ok?

A: Vamos começar pelo segundo...acho que esse eu sei começar.

Pp: Ok.

Percebemos que os alunos realmente não tinham muito conhecimento sobre trigonometria. Apenas dois grupos de alunos conheciam o conteúdo e conseguiram trabalhar bem os problemas. Os alunos desses dois grupos pediram para a professora se poderiam auxiliar os colegas dos outros grupos. A professora concordou e eles, após o término das atividades do seu grupo, ajudaram os colegas dos outros grupos. Essa política de ajuda entre os alunos de grupos distintos passou a ser comum e a turma achou isso bem interessante.

O problema 2 foi resolvido por seis dos nove grupos, os demais deixaram a atividade em branco. O problema 3 foi resolvido por dois grupos, sendo que os outros o deixaram em branco. Nesse problema alguns alunos declararam que o enunciado, pedindo uma prova, assustou-os e eles nem tentaram resolver.

Figura 82 - Resolução da Atividade 2 – Problema 2 - Encontro 19.5.

The image shows a handwritten solution on lined paper. It starts with the given $\sec x = 3$. From this, it derives $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ and $3 = \frac{1}{\cos x}$, leading to $\cos x = \frac{1}{3}$. Then, it uses the identity $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ to find $\tan^2 x = 8$. The final calculation for y is $y = \frac{8 + 144}{9} = \frac{152}{9} \approx 16,9$.

$$\begin{aligned} \sec x &= 3 \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ 3 &= \frac{1}{\cos x} \\ \cos x &= \frac{1}{3} \\ \sec^2 x &= 1 + \tan^2 x \\ 3^2 &= 1 + \tan^2 x \\ 9 &= 1 + \tan^2 x \\ \tan^2 x &= 8 \\ y &= \frac{\sec^2 x + 2 \tan^2 x}{9} \\ y &= \frac{9 + 16}{9} \\ y &= \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Esse grupo apresenta a resolução do problema de forma bem organizada. Utilizam corretamente as relações trigonométricas e encontram a solução correta para o problema.

Um dos grupos resolveu todos os problemas. A professora perguntou aos alunos se eles já haviam estudado trigonometria, e um dos integrantes disse:

A: Estudei no ensino médio e também eu fiz cursinho antes da faculdade...sei todas as manhas...

Pp: Quer dizer que sabe todas as fórmulas?

A: É...sei quase todas né...

Pp: E os outros? (dirigindo-se aos outros 3 alunos)

B: Eu sei um pouco...estudei para a ESA (Escola de Sargentos das Armas)

C: Eu também....

D: Não sei muito...estudei no ensino médio, mas aprendi mesmo com os meus colegas de grupo...aqui no curso.

Esse grupo era realmente diferenciado. Desde o início do curso se mostrava bastante interessado e resolvia todos os problemas. Mas não era essa a nossa realidade e a grande maioria não havia estudado nada além das relações de seno, cosseno e tangente.

Figura 83 - Resolução da Atividade 2 –Problema 3 - Encontro 19.6.

$$\begin{aligned}
 (1 - \tan x)^2 + (1 - \sec x)^2 &= (\sec x - \tan x)^2 \\
 \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\right)^2 \\
 \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}\right)^2 \\
 \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right)^2 &= \left(\frac{\cos^2 x - 2 \cos x + 1}{\cos^2 x}\right) \\
 \frac{(\cos^2 x - 2 \cos x + 1) + (\cos^2 x - 2 \cos x + 1)}{\cos^2 x} &= \frac{1 - 2 \cos x}{\cos^2 x} \\
 \frac{1 - 2 \cos x}{\cos^2 x} &= \frac{1 - 2 \cos x}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

Esse grupo apresenta o desenvolvimento para o problema 3. Os alunos optaram por trabalhar dos dois lados da igualdade e chegar ao mesmo resultado.

Grande parte dos grupos, não conseguiu fazer os problemas propostos. O encontro estava se encaminhando para o fim e a professora pediu que eles levassem os problemas para casa e tentassem pensar em formas de resolvê-los.

Não foi possível fazer a plenária e a formalização desse encontro devido à falta de tempo. Ficou marcado que, no próximo e último encontro, antes da Avaliação individual, seria realizada a plenária e a formalização e os alunos deveriam trazer os problemas discutidos em aula e, se possível, as atividades extraclasse resolvidas.

20° Encontro

Iniciamos o encontro pelos problemas do último encontro e da atividade extraclasse. Os alunos não resolveram os problemas do encontro anterior, mas foram à lousa apresentar suas resoluções dos problemas propostos na atividade extraclasse e todos, sem exceção, conseguiram resolvê-los. Após esse momento foi realizada a plenária e a formalização dos conteúdos. A professora retomou os problemas do encontro anterior e pediu a colaboração dos alunos para que, juntos, encontrassem uma solução. Os alunos deram ideias de como resolvê-los e aqueles que conseguiram avançar no encontro anterior foram à lousa ajudar a professora. Foi um momento muito interessante como grupo de trabalho, porém ficou muito claro que os alunos tinham dificuldades com trigonometria.

O planejado para este encontro seria o de trabalhar com matrizes e determinantes, entretanto, não foi possível fazê-lo uma vez que, nesta aula, foi realizada a avaliação individual dos alunos e eles responderam a um questionário avaliando o curso, seus colegas e a si mesmos.

A professora entregou aos alunos a folha de atividades do 20° encontro para que eles estudassem em casa e se colocou à disposição para auxiliá-los por email ou pessoalmente.

A avaliação individual foi planejada pela professora com questões de matemática básica e funções. Não foram avaliados os conteúdos de funções exponenciais e logaritmos, pois, tais assuntos, foram desenvolvidos na avaliação de grupos. Trigonometria não foi contemplada por não ter havido tempo de trabalhá-la mais profundamente. Essa avaliação possuía quatro questões e valia 4,0 pontos.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

CAMPUS ALEGRETE

Noções Básicas de Matemática

Profa. Fabiane C Höpner Noguti

Avaliação Individual de Noções Básicas de Matemática

Nome:

As questões serão avaliadas pelo raciocínio explicitado pelo aluno, portanto esperam-se resoluções claras.

1) Observe as sentenças abaixo e diga qual(ais) delas estão corretas. Justifique sua resposta.

I) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

II) $(3y + b)(3y - b) = 9y^2 - b^2$

III) $(b - 2c)^2 = b^2 + 4bc + 4c^2$

2) Simplifique as expressões:

$$\frac{a^3 - a^2b}{3a^5 - 6a^4b + 3a^3b^2}$$

$$1 - \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}}$$

3) Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $\left| \frac{3x+8}{2x-3} \right| = 4$

b) $\frac{\frac{1}{2}x-3}{4+x} > 1$

4) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo. Em uma indústria de cerâmica, o fogo é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função:

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geq 100 \end{cases}$$

Em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for de 48°C e retirada quando a temperatura for de 200°C .

Qual o tempo de permanência dessa peça no forno em minutos? Esboce o gráfico de $T(t)$.

Compareceram à aula nesse dia 35 alunos que responderam o questionário e fizeram a avaliação individual. As notas da avaliação individual podem ser acompanhadas pela tabela abaixo:

Número de Alunos	Nota da avaliação
12	$\geq 6,0$
6	$5,0 \leq N < 6,0$
17	$0 \leq N < 5,0$

Analisando a tabela percebemos que, na avaliação individual os alunos tiveram um aproveitamento bem abaixo do esperado, já que apenas 12 alunos (34,3%) obtiveram notas acima de 60% de aproveitamento, 6 alunos (17,2%) obtiveram notas entre 50% e 60% de aproveitamento e 17 alunos (48,5%) obtiveram notas abaixo de 50% de aproveitamento.

Dos 17 alunos citados, dois não acertaram nenhuma questão da avaliação. Iremos analisar com mais detalhes as avaliações destes dois alunos:

Figura 84 – Prova aluno 1

Handwritten student work for three math problems, marked with red X's indicating incorrect answers:

① $(b-2c)^2 = b^2 + 4bc + 4c^2$ $\times$

② $a^3 - a^2b$
 $3a^5 - 6a^4b + 3a^3b^2$
 $3a^2 - 6a^2 + 3a^3b^2$
 $3 + 3a^3b^2$ $\times$

③ $\frac{3}{4} + 8 = 4$ $\frac{11}{11} - 11 - 4 = -4$ $\times$

④ $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ $\times$

O aluno apresentou respostas para as questões 1, 2 e 3. Não apresenta nenhuma resposta para a questão 4. No primeiro problema, o aluno indica a terceira alternativa como a única que está correta, sem justificar sua resposta. O erro está em considerar que o sinal do segundo termo do trinômio é positivo. Na segunda questão, letra (a), o aluno apresenta o seguinte raciocínio:

$$\frac{a^3 - a^2b}{3a^5 - 6a^4b + 3a^3b^2} = 3a^2 - 6a^2 + 3a^3b^2 = 3 + 3a^3b^2$$

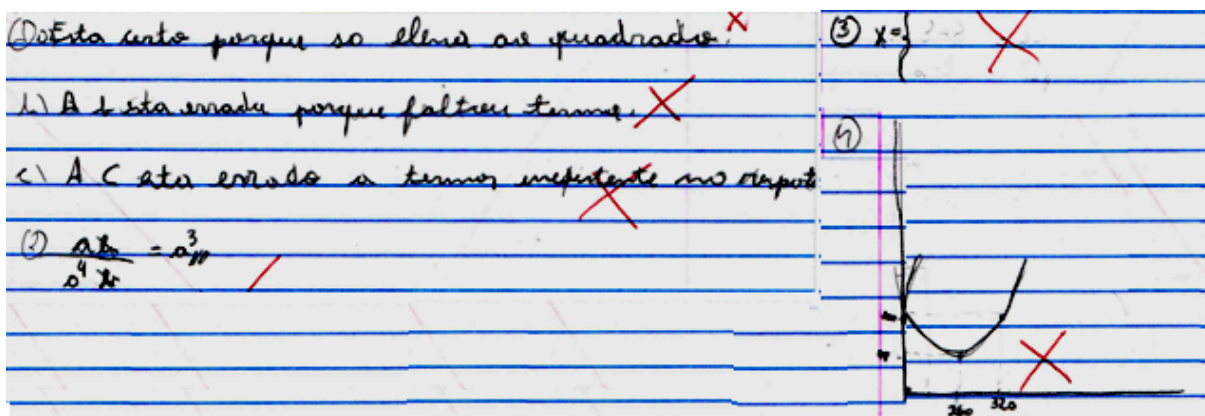
O aluno simplifica termos que estão sendo subtraídos no numerador e transforma o denominador em numerador. Após essa ‘operação’ o aluno ainda simplifica os termos ao quadrado e adiciona os termos numéricos mantendo o sinal positivo e, enfim, resultando uma soma de dois termos.

O mesmo aluno, na questão 2, letra (b), considera que os denominadores são iguais e soma as frações de forma a eliminá-las resultando a soma no terceiro termo (1).

No terceiro problema o aluno atribui valores a x , substitui e encontra soluções para o que poderíamos compreender como um possível método de ‘tentativa e erro’.

A avaliação deste aluno nos mostra que os conceitos por ele trazidos dos Ensinos Fundamental e Médio não estão claros. Vale lembrar que este é um aluno selecionado pelo ENEM e já matriculado para cursar uma das Engenharias.

Figura 85 – Prova aluno 2



O aluno da prova acima apresentou justificativas para o primeiro problema, porém todas erradas. Diz o aluno para a primeira alternativa “Esta certo porque so eleva ao quadrado”, o aluno entende que deveria distribuir o quadrado para os termos do produto notável; na segunda “A b esta errada porque faltou termo” talvez pelo número de termos existentes no produto o aluno pense que o resultado é pequeno para estar correto; e para a terceira “A C esta errada a termo inexistente na resposta”. Como o aluno compreendeu na primeira alternativa que deveria ser apenas elevado ao quadrado, a terceira alternativa apresenta, na sua lógica, termos a mais. O aluno parece não entender o conteúdo em questão e apresenta ainda, muitos erros de português.

No segundo problema, o aluno escreve: $\frac{ab}{a^4 b} = a^3$ mostrando erroneamente como obteve a resposta. O problema 3 não é esboçado e para o problema 4 é apresentado um gráfico errado sem nenhuma justificativa.

Assim como o aluno anterior, este também parece não conseguir compreender o que se pede em cada questão e, sendo assim, as respostas apresentadas não obedecem a nenhum conhecimento matemático anteriormente estudado.

As avaliações individuais realizadas pelos alunos poderão ser amplamente analisadas em um trabalho posterior à tese de doutorado, já que esse não é um de nossos objetivos nesse trabalho.

O questionário proposto pela professora, com oito questões, solicitava que o aluno respondesse quais os conteúdos que não havia estudado nos Ensinos Fundamental e Médio e em quais deles, após o término do curso, ainda possuía dúvidas. Além disso, o aluno deveria fazer uma avaliação dos seus Ensinos Fundamental e Médio e de seu envolvimento com os estudos durante esses níveis.

Na sequência, o aluno era questionado sobre o quê ele mudaria no curso de Matemática Básica e por quê e, por fim, qual a nota que daria para o seu envolvimento e do

seu grupo com o curso. Para finalizar, a professora pediu a opinião dos alunos se eles recomendariam o curso para os alunos ingressantes em 2014.

Todos os alunos responderam às questões propostas no questionário.

	UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA CAMPUS ALEGRETE Curso de Matemática Básica Profa. Fabiane C. Höpner Noguti																
NOME: _____ 1) Para os conteúdos abaixo, marque quais deles você NÃO estudou nos ensinos fundamental e médio: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td>☐ trigonometria</td> <td>☐ números complexos</td> </tr> <tr> <td>☐ inequações</td> <td>☐ matrizes</td> </tr> <tr> <td>☐ determinantes</td> <td>☐ logaritmos</td> </tr> <tr> <td>☐ frações</td> <td>☐ equações</td> </tr> <tr> <td>☐ módulo</td> <td>☐ exponenciais</td> </tr> <tr> <td>☐ funções</td> <td>☐ intervalos da reta real</td> </tr> <tr> <td>☐ operações com conjuntos</td> <td>☐ progressões</td> </tr> <tr> <td colspan="2">☐ outro(s). Cite: _____</td> </tr> </table> 2) Qual dos conteúdos estudados nos ensinos fundamental e médio você considera que ainda possui dúvidas? 3) Avalie seus ensinos fundamental e médio com notas de 0 – muito fraco, 1 – fraco, 2 – bom, 3 – muito bom, 4 – excelente. Ensino Fundamental: _____ Ensino Médio: _____ 4) Avalie sua participação nos seus ensinos fundamental e médio com notas de 0 – muito fraco, 1 – fraco, 2 – bom, 3 – muito bom, 4 – excelente. 5) O que você mudaria no Curso de Matemática Básica e porquê? 6) Qual nota (0 – 10) você daria para o seu envolvimento no Curso de Matemática Básica? Justifique. 7) Qual nota (0 – 10) você daria para o envolvimento do seu grupo no Curso de Matemática Básica? Justifique. 8) Com base na sua experiência, você recomendaria aos alunos ingressantes 2014 participarem do Curso? Justifique.		☐ trigonometria	☐ números complexos	☐ inequações	☐ matrizes	☐ determinantes	☐ logaritmos	☐ frações	☐ equações	☐ módulo	☐ exponenciais	☐ funções	☐ intervalos da reta real	☐ operações com conjuntos	☐ progressões	☐ outro(s). Cite: _____	
☐ trigonometria	☐ números complexos																
☐ inequações	☐ matrizes																
☐ determinantes	☐ logaritmos																
☐ frações	☐ equações																
☐ módulo	☐ exponenciais																
☐ funções	☐ intervalos da reta real																
☐ operações com conjuntos	☐ progressões																
☐ outro(s). Cite: _____																	

Os alunos responderam, na questão 1, que os conteúdos não estudados nos Ensinos Fundamental e Médio foram :

Conteúdos não estudados	Número de alunos
Módulo	18
Números Complexos	13
Logaritmos	12
Progressões	9
Exponenciais	8
Inequações	7
Trigonometria	6
Matrizes	3
Determinantes	2
Operações com Conjuntos	2
Intervalos na Reta	2
Funções	1

Os conteúdos de frações e equações não foram marcados por nenhum aluno. Cinco alunos não marcaram nenhuma opção, ou seja, consideram que estudaram todos os conteúdos elencados. Além disso, na opção ‘outros’, foram também lembrados os conteúdos de função composta, função modular, funções trigonométricas, leis do seno e cosseno, probabilidade e estatística, geometria espacial e geometria analítica (citado por dois alunos). Vale salientar que os alunos poderiam marcar mais de uma opção, por isso os valores excedem ao número de alunos em sala de aula nesse dia.

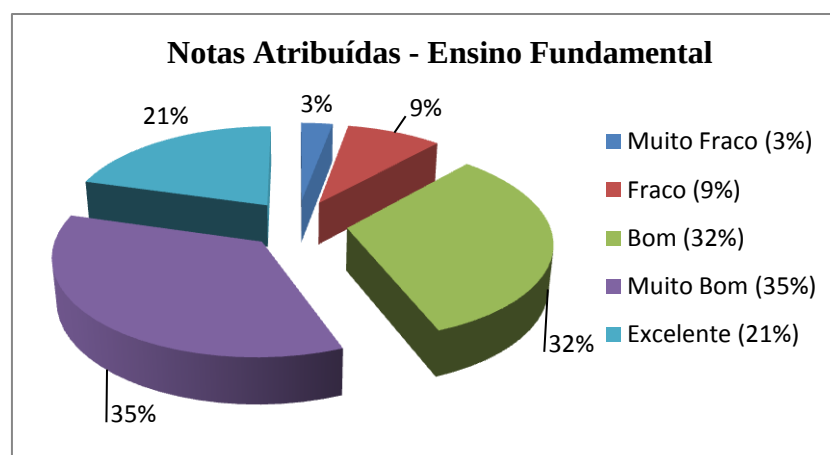
Para a segunda questão, os conteúdos elencados nos quais os alunos dizem ainda possuir dúvidas são:

Conteúdos que ainda possuem dúvidas	Número de alunos
Logaritmos	16
Trigonometria	13
Exponenciais	9
Funções	9
Números Complexos	4

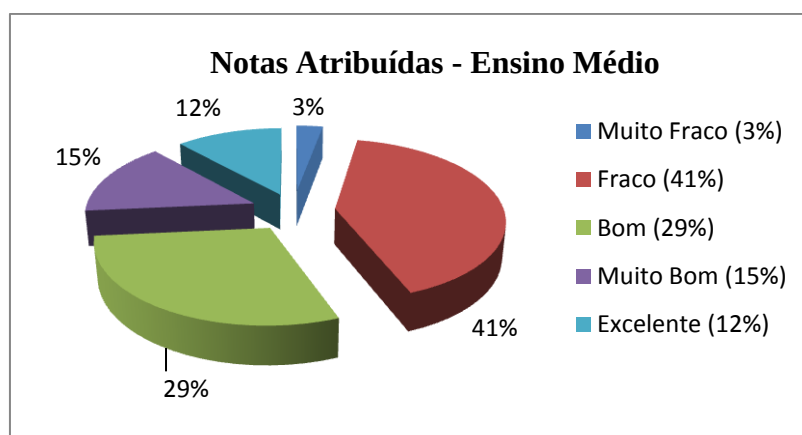
Determinantes	4
Matrizes	3
Módulo	2
Geometria	1
Progressões	1
Conjuntos	1
Inequações	1
Matemática Básica	1
Intervalos na reta	1
Todos os conteúdos	2
Nenhum conteúdo	3

Quanto à avaliação feita pelos alunos de seus Ensinos Fundamental e Médio, as respostas variaram bastante, porém a maioria dos alunos considerou que o Ensino Fundamental cursado foi melhor do que o Ensino Médio. No geral, as notas atribuídas foram baixas, sendo que apenas dois alunos deram notas máximas para os dois níveis de ensino. Os gráficos abaixo apresentam, em percentuais, as respostas dos alunos:

Figura 86 - Respostas para a questão 2 (Ensino Fundamental)



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 87 - Respostas para a questão 2 (Ensino Médio)

Fonte: Elaborado pela autora

Quanto à participação dos alunos nos Ensinos Fundamental e Médio, as notas atribuídas são, em geral, muito boas.

Quando perguntados sobre o que mudariam no Curso de Matemática Básica, a grande maioria dos alunos respondeu que aumentaria o número de horas, alegando que dessa forma, teriam mais tempo para estudar. A segunda resposta que mais apareceu foi que não mudaria nada. Seguem algumas falas dos alunos:

A: Eu gostei do curso e da maneira que trabalhamos nele, foi exigido que o aluno pensasse bastante. No entanto, teve alguns conteúdos que eu, por exemplo, não vi na minha escola e não sabia mesmo fazer, logo não tinha como lembrar.

B: Ter mais tempo.

C: Foi bom, mas melhor seria se não tivéssemos aulas nos outros turnos porque, então, teríamos tempo para revisar o que foi visto em casa e, assim, muito mais coisas seriam fixadas na memória.

D: Talvez poderia ter mais tempo de curso e deveria ser mais próximo ao começo das aulas.

E: Não vejo algo que eu mudaria, aprendi ou reaprendi várias coisas que já havia esquecido, garanto que esse curso me ajudará muito.

Para as questões 6 e 7 os alunos avaliaram muito bem o envolvimento deles no curso de Matemática Básica e, na grande maioria, atribuíram notas mais altas aos colegas de grupo do que a si próprios.

Para a última questão, se os alunos recomendariam o curso para os ingressantes 2014, as respostas afirmativas foram unânimes. Seguem algumas falas dos alunos:

A: Com certeza. Mesmo que eu não atinja a média necessária, eu aprendi bastante e lembrei várias matérias que eu vi de maneira mais simples, ou não vi no colégio.

B: Sim, pois esse curso serviu para eu lembrar algumas coisas e aprender outras, portanto, começar a faculdade com uma base é muito melhor, porque de alguma maneira nos situa no ambiente de estudos que enfrentaremos.

C: Sim, recomendaria, pois me ajudou a lembrar aquilo que tinha esquecido e aprender algumas coisas novas também.

D: Sim, para tentarem aprender o que não tiveram no Ensino Médio e ter uma preparação para o seu curso.

E: Sim, sem este curso acho que eu chegaria bem perdida no começo do semestre, é uma chance de aprender o que não conseguiu antes e melhorar o que tinha dificuldades.

Os alunos pareciam cansados, mas felizes por estarem encerrando as atividades. Antes da entrega da avaliação e do questionário a professora questionou os alunos sobre o curso. Os alunos foram unânimes em dizer que gostaram de participar e se tivessem que escolher hoje, participariam novamente. Sobre o trabalho em grupo, todos disseram que a experiência havia sido muito boa e questionaram porque as aulas normais não eram realizadas com essa metodologia de trabalho. Salientaram que o trabalho em grupo muitas vezes ajudou na resolução dos problemas, já que algum dos membros auxiliava os outros e assim eles conseguiam *‘reunir as ideias e resolver os problemas’*.

Depois dessa conversa informal, os alunos realizaram a avaliação e responderam o questionário, sendo então encerrado o Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas.

7.5 Análise qualitativa dos Encontros

Com base no relato dos encontros, faremos agora uma análise considerando alguns aspectos que se mostraram relevantes durante o Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas. Essa análise nada mais é do que um estudo mais aprofundado sobre os encontros ocorridos, em que pretendemos sintetizar as informações mais importantes que foram percebidas no desenrolar do mesmo. Nesta síntese, procuramos, também, encontrar relações com os Capítulos II, III e IV em que ouvimos outros autores a respeito de temas que são considerados de suporte para nossa pesquisa.

Procuraremos elencar e analisar pontos importantes, que identificamos na descrição e na análise dos encontros, que são frequentes e que possam nos auxiliar a responder nossa pergunta da pesquisa. Para isso, identificamos como recorrente em nosso relato os seguintes tópicos: *o elenco de conteúdos trabalhados, o tempo de duração do curso, o elenco de*

problemas selecionados, o conhecimento conceitual dos alunos, o conhecimento procedimental ou técnico dos alunos e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Quanto ao *elenco de conteúdos trabalhados*, pudemos perceber que, em cada conteúdo, existiam dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. Foi uma surpresa, para nós, que os alunos tivessem certa resistência em trabalhar conceitos algébricos por exemplo. Esses alunos, muitas vezes preferiam pensar aritmeticamente a pensar algebricamente quando era necessário problematizar (passar da linguagem vernácula para a linguagem matemática). Entretanto, quando nos enunciados dos problemas constavam relações matemáticas dadas por fórmulas algébricas, em geral sabiam utilizar as técnicas conhecidas na vida escolar. Além disso, durante o curso, abordamos assuntos que, muitas vezes, não foram aprendidos por parte dos alunos enquanto cursavam a Educação Básica, e que, naquele momento, se mostraram bastante deficientes, como foi o caso de inequações; módulo ou valor absoluto; função modular; logaritmos; exponenciais; funções logarítmicas e exponenciais; e trigonometria.

Arelado ao conteúdo planejado é impossível não considerarmos que *o tempo de duração do curso* foi muito curto em relação à quantidade de tópicos elencados como importantes para os alunos ingressantes. Não conseguimos abordar todos os conceitos considerados importantes por nós, assim como não conseguimos efetivamente trabalhar em sala de aula todos os encontros planejados. É importante lembrar ainda que, ao elaborarmos o elenco de conteúdos que iríamos trabalhar no curso, não inserimos funções trigonométricas, determinantes e números complexos, todos lembrados pelos alunos, no questionário final, como assuntos que eles ainda possuíam dúvidas.

Essas constatações nos permitem dizer que, para uma nova versão, o curso deveria ter mais tempo de trabalho e/ou deveria ser dividido em dois cursos (Ensino Fundamental e Ensino Médio) para que assim fosse possível rever o elenco de conteúdos definidos a partir dos estudos realizados no Capítulo III.

O *elenco de problemas selecionados* foi considerado pelos alunos como muito bom, e foi possível envolvê-los, nas discussões decorrentes, na maioria dos encontros. Tivemos um pouco de desinteresse dos alunos no momento de trabalhar o encontro que tratava de Teoria dos Conjuntos e Conjuntos Numéricos. Tais conteúdos exigiram dos alunos um conhecimento de linguagem matemática que, percebemos, era pouco utilizada e conhecida por eles.

A dificuldade de trabalhar com a linguagem matemática, entretanto, não foi apenas percebida no encontro que tratava de conjuntos. Esse foi um dos momentos em que começamos a entender que *o conhecimento conceitual dos alunos*, na Matemática dos Ensinos

Fundamental e Médio, era limitado. Nos diálogos ao longo dos encontros, verificamos que os alunos não conseguiam compreender muitos conceitos por não conhecê-los, ficando evidente que o domínio deles em matemática era muito ligado ao *conhecimento procedimental ou técnico* que apresentavam, na resolução dos problemas e nos diálogos, ao dizerem, por exemplo, que tal conceito *precisa de um quadrado, deve ter chaves, é escrito em duas partes*, etc., e que, ao serem perguntados por quê? sabiam responder apenas que *era assim* e que *lembravam de ter visto assim*. Mesmo que, aparentemente grande parte dos alunos parecia ter esse conhecimento procedimental, em muitos ele era falho, pois não conseguiam utilizar corretamente as técnicas ou procedimentos necessários para obter sucesso na resolução dos problemas.

O trabalho desenvolvido nos grupos foi muito importante para que os alunos se sentissem mais à vontade ao trabalhar com os problemas. A princípio os alunos tiveram certa resistência e até mesmo certo desconforto em trabalhar nos grupos, fato que também foi levantado em outros trabalhos desenvolvidos por membros do GTERP, como Azevedo (1998), que descreve que os alunos sentiam dificuldade em trabalhar em grupo, pois, segundo a autora, o trabalho individual é mais comum na Educação Básica; e Paulette (2003), que comenta que inicialmente houve certo desconforto na escolha dos componentes do grupo, pois eles não se conheciam e demonstravam não saber trabalhar em grupo e discutir os problemas com seus pares, sendo que, muitos deles, apresentavam dificuldades em interpretar e compreender os problemas.

Entre nossos alunos, depois de alguns encontros, foi sendo criada certa cumplicidade nos grupos e não houve mais momentos de ‘gozação’ quando se percebia que um aluno ou grupo fazia ou falava algo errado. Eles tentavam se ajudar, alunos e alunos, grupos e grupos. Essa foi a grande diferença desse curso em relação aos cursos anteriores, descritos no Capítulo IV. Era possível errar e, percebendo o erro, discutir com os colegas, com a professora e tentar uma nova forma de resolução. Nesse sentido, o nosso trabalho está em sintonia com o de Allevato (2005), citado por nós no Capítulo III, que também salienta que levar os alunos a pensar e dar sentido ao que fazem é uma das principais finalidades da resolução de problemas.

Nesse ponto, a *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas* foi a grande protagonista durante o curso. Depois dos encontros iniciais, os alunos realmente sentiram-se com vontade de trabalhar nos grupos. Achavam que compreendiam melhor, muitas vezes, o que os colegas explicavam mais do que quando a professora o fazia. Mesmo assim, foi possível perceber, assim como Azevedo (1998), que os alunos que participavam menos das plenárias eram aqueles que tinham mais

dificuldade em justificar seus raciocínios e desenvolvimentos para os problemas. Queriam saber por que não trabalharam assim na Educação Básica e, também, se iriam trabalhar assim no Ensino Superior. A professora respondeu que a metodologia de trabalho dos professores era variada e que isso era importante para que eles tivessem oportunidade de trabalhar de diferentes formas. Salientou que a metodologia utilizada no curso era nova e que muitos professores de Matemática da Educação Básica ainda não a conheciam, fato que também ocorre no Ensino Superior, como levantado no Capítulo II deste trabalho.

7.6 Análise quantitativa dos Encontros

Iremos analisar a Turma ‘A’ de Matemática Básica olhando para os dados quantitativos que compreendem o número de alunos aprovados, alunos reprovados por nota, alunos reprovados por frequência, e evadidos. Consideramos que os alunos reprovados por frequência são aqueles que possuíram mais de 25% de faltas alternadas no curso, e os alunos evadidos são aqueles que possuíram mais de 25% de faltas consecutivas no curso.

Sendo assim, apresentamos os resultados dos alunos do curso de Matemática Básica – Turma ‘A’ - na disciplina de Cálculo I, realizada por eles no primeiro semestre de 2013.

Julgamos que a análise do aproveitamento dos alunos, cursantes em Matemática Básica através da Resolução de Problemas e em Cálculo I, acompanha os estudos realizados anteriormente pela pesquisadora e que, apesar de não se configurarem como fator determinante de análise e resposta à pergunta da pesquisa, pode acrescentar mais dados à pesquisa quando comparados com os cursos anteriores.

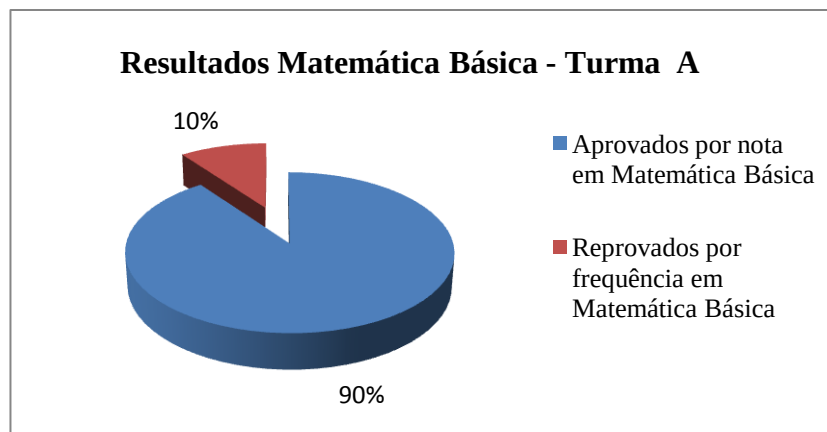
A análise quantitativa deverá ser considerada como um complemento à análise qualitativa dos encontros que foi apresentada no item 7.5 deste capítulo. Sendo assim, após a análise quantitativa iremos apresentar uma síntese dos resultados obtidos, tentando responder a nossa pergunta da pesquisa.

Dados da Turma ‘A’ de Matemática Básica

O gráfico abaixo representa o aproveitamento da Turma ‘A’ no Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas. Dos 40 alunos selecionados, 36 concluíram o curso com aprovação. É importante salientar que não houve nenhum aluno reprovado por nota, o que percebemos ser reflexo do interesse deles em participar das aulas, envolvendo-se com a resolução dos problemas propostos e, também, da forma de avaliação utilizada. Apenas

quatro alunos foram reprovados por frequência sendo que um deles (evadido) nunca compareceu às aulas e três tiveram um número de faltas maior do que 25% do total de aulas.

Figura 88 - Resultados finais de aproveitamento da Turma 'A'



Fonte: Elaborado pela autora

O número de alunos evadidos ou reprovados por frequência na Turma 'A' foi de 10%, o que consideramos ser um índice baixo já que o curso realizou-se em período não letivo.

Não houve nenhum aluno reprovado por nota na Turma 'A'. Todos os alunos, que permaneceram acompanhando as aulas, obtiveram nota mínima para a aprovação. O fato de não haver aluno reprovado por nota, pode nos indicar que a escolha dos instrumentos de avaliação que compõem as notas, diferenciados por não considerar apenas a nota de uma prova e, sim, o conjunto de atividades desenvolvidas pelo aluno (avaliação diagnóstica, duas avaliações em grupos, uma avaliação individual, autoavaliação e avaliação dos colegas e professor), além da presença em sala de aula, gerou comprometimento por parte dos alunos. Os alunos que frequentaram o curso de Matemática Básica foram avaliados por vários instrumentos que puderam qualificar sua aprendizagem. Também é importante considerar que a metodologia de ensino empregada com trabalho em grupo e através de problemas propiciou um melhor entrosamento dos alunos, sendo um dos fatores do interesse deles em permanecer no curso.

Ao compararmos os resultados obtidos no Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas com os resultados dos cursos anteriormente realizados e apresentados no Capítulo IV deste trabalho, salientamos que em nenhuma versão anterior os índices de aprovação foram tão positivos. Utilizando as aulas tradicionais, o melhor índice de aprovação que se teve foi de 65%.

Análise do Aproveitamento dos alunos de Matemática Básica em Cálculo I

Apresentamos, nesta seção, a análise quantitativa das notas dos alunos da Turma ‘A’, em relação ao seu aproveitamento na disciplina de Cálculo I. Para tal análise é importante salientar que os alunos matriculados na Turma ‘A’ de Matemática Básica, foram selecionados dentre os ingressantes nos cursos de Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica e Engenharia de Telecomunicações e que, não foram aceitas inscrições de alunos veteranos que já haviam cursado a disciplina de Cálculo I.

Como citado, na Introdução deste trabalho, os cursos escolhidos para a Turma ‘A’, possuem o mesmo núcleo básico de disciplinas matemáticas na grade curricular, sendo todas de responsabilidade da Unipampa – *Campus Alegrete*.

A escolha de trabalhar na Turma ‘A’ com apenas quatro dos sete cursos ofertados pela Unipampa deve-se também aos seguintes fatores: 1) o curso de Ciência da Computação possui grade semelhante às engenharias, porém é um curso noturno dificultando a montagem de horários para atendê-los diurnamente, já que muitos alunos desse curso trabalham durante o dia; 2) no curso de Engenharia Agrícola as disciplinas do núcleo básico são de responsabilidade do Instituto Federal Farroupilha, não existindo um acompanhamento dos alunos pela Unipampa nessa etapa; 3) o curso de Engenharia de Software trabalha todas as disciplinas como Projetos de Estudo, não possuindo disciplinas de matemática como os demais.

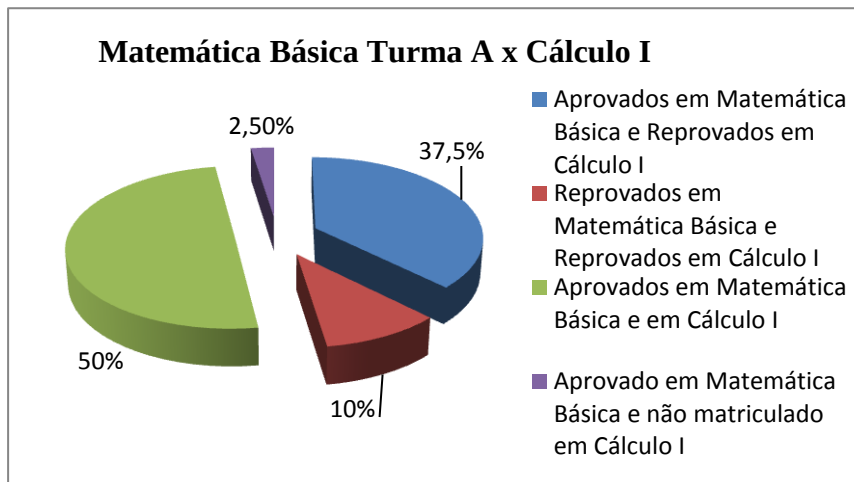
Nossa escolha foi pautada pela possibilidade de acompanhar quantitativamente os alunos cursantes de Matemática Básica durante o curso de Cálculo I. Apesar dessa não ser a melhor forma de acompanhamento, os índices são, também, resultado do desempenho e aprendizagem dos alunos. Embora as notas não possam ser consideradas o principal reflexo da aprendizagem dos alunos, elas são uma medida dos resultados do ensino, como afirma Escudero (1999, apud FAGUNDES, 2012, p.71):

As notas são uma medida dos resultados do ensino, mas não estritamente da sua qualidade, pois a qualidade da instituição está condicionada não somente pela qualidade dos alunos, mas também pelo critério e rigor pessoal do professor no momento de preparar, valorar e qualificar a aprendizagem e o seu desempenho (ESCUDEIRO, 1999, p. 254).

Mesmo considerando que a professora-pesquisadora não foi a docente responsável pela disciplina de Cálculo I, esperávamos que os resultados do Curso de Matemática Básica fossem notados nessa disciplina e também nas demais disciplinas do primeiro semestre.

Sendo assim, apresentamos os dados quantitativos dos alunos cursantes de Matemática Básica em relação ao seu aproveitamento na disciplina de Cálculo I.

Figura 89 - Resultados de aproveitamento de Matemática Básica Turma 'A' x Cálculo I



Fonte: Elaborado pela autora

Os resultados quantitativos do aproveitamento, dos alunos cursantes de Matemática Básica – Turma 'A' - nos mostra que 50% dos aprovados em Matemática Básica também obtiveram sucesso na disciplina de Cálculo I. Ainda assim, 37,5% dos alunos, aprovados em Matemática Básica, foram reprovados em Cálculo I e, 2,5% (um aluno) foi aprovado em Matemática Básica, porém não se matriculou em Cálculo I. O total de alunos reprovados por frequência no curso de Matemática Básica, 10%, manteve-se em Cálculo I.

O índice de alunos que foram aprovados em Matemática Básica, porém não obtiveram sucesso em Cálculo I, (37,5%), deve ser também analisado com vistas às dificuldades inerentes dos conceitos estudados no Cálculo I. A Matemática Básica é um importante componente para o bom rendimento dos alunos na disciplina de Cálculo I, porém não pode ser vista como a 'solução' para modificar o baixo rendimento dos alunos. De acordo com Silva (2011, p. 400),

Ao ingressarem no curso superior, os estudantes trazem suas expectativas: Aqueles, que no Ensino Médio logravam sempre boas avaliações em matemática, levam para a universidade a esperança de que o curso de Cálculo não deva representar obstáculos para o seu aprendizado. Entretanto, ao se depararem com questões globais envolvendo os temas anteriormente estudados, em geral de modo departamentalizado, acrescidas de novas ideias impactantes como o infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade, etc., quase sempre veem frustradas suas expectativas iniciais. De seu lado, os professores de Cálculo também têm suas expectativas quanto ao nível de desempenho dos alunos, muitas vezes guiado por uma visão idealizada de que os estudantes trazem uma bagagem da educação básica suficiente para compreender suas explicações e construir seu próprio saber matemático.

Sendo assim, consideramos que os alunos da Turma 'A' do curso de Matemática Básica obtiveram um bom resultado na disciplina de Cálculo I, pois dos 90%, aprovados em Matemática Básica, 55,5% foram aprovados em Cálculo I.

Comparando esse resultado com os resultados obtidos nos cursos anteriores realizados na Unipampa (Capítulo IV), o melhor índice foi obtido no ano de 2008, quando de 69 alunos matriculados, 32% (22 alunos) foram aprovados em Nivelamento em Matemática e, desses, 64% (14 alunos) foram aprovados em Cálculo I.

Devemos considerar ainda que, por terem as aulas do semestre letivo normal se iniciado 45 dias depois do encerramento dos Cursos de Matemática Básica, o rendimento dos alunos pode ter sido influenciado no Cálculo I. O fato de os alunos terem sido aprovados e/ou reprovados em Matemática Básica e terem ficado um período afastados dos estudos pode ter causado uma falsa impressão de que eles estavam realmente preparados para enfrentar o semestre letivo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A arte de ensinar é a arte de ajudar a descobrir.

Mark Van Doren

Considerações e Limitações

Concluindo nossa pesquisa, pautada no Modelo Metodológico de Romberg, passamos agora para a finalização deste trabalho, encerrando o terceiro bloco. Nesta última parte, retomando a pergunta da pesquisa, apresentamos as conclusões observadas ao longo da investigação, antecipando a ação de outros pesquisadores, ou mesmo as nossas próprias ações, mediante as respostas que encontramos para nosso estudo.

Nossa pergunta, já no modelo modificado, ficou assim definida:

Quais as contribuições de um Curso de Matemática Básica, utilizando-se da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, para auxiliar os alunos ingressantes, nas disciplinas de Matemática, em particular do Cálculo I, no Ensino Superior?

A pergunta norteadora, hoje analisada à luz do projeto inicial, sua implementação e da coleta de evidências faz um duplo papel: de organizar as ideias em prol de respondê-la e também de possibilitar o surgimento de novas questões durante nossa caminhada. Quando olhamos para a totalidade do trabalho, podemos perceber que muitas respostas surgem durante esse processo. Sendo assim, o objetivo agora é comentar as impressões que tivemos durante a investigação e, também, fazer uma breve avaliação do trabalho.

É importante salientar que, no modelo modificado apresentado na página 64 deste trabalho, nos propusemos a considerar, para a análise das evidências, dois grupos: dos alunos que participaram do curso de Matemática Básica e da disciplina de Cálculo I e dos alunos que não participaram do curso de Matemática Básica e cursaram Cálculo I. A análise que apresentamos não contempla o segundo grupo acima citado já que esse é muito complexo, pois depende de dados que não possuímos – como no caso do curso de Engenharia Agrícola, ou mesmo de dados que não existem – como no caso do curso de Engenharia de Software. A impossibilidade de analisar esse grupo, devido à falta de dados e/ou sua inexistência, não

empobrece e nem diminui a importância dos dados que obtivemos e analisamos no primeiro grupo e que, por si só, respondem integralmente nossa pergunta de pesquisa.

Ao analisarmos a estrutura do curso de Matemática Básica por nós proposto, podemos perceber que o fato de as aulas terem ocorrido antes do período letivo foi um ganho para os alunos e para a professora-pesquisadora, já que a dedicação dispensada pelos alunos que participaram desse Curso pôde ser maior. Sugerimos que, para os próximos anos, o curso possa ocorrer em períodos anteriores às aulas regulares dos cursos programados para os alunos ingressantes ao Ensino Superior.

O número elevado de alunos, que participaram do curso, foi um dos fatores que limitou um pouco o desenvolvimento do trabalho, da análise de materiais produzidos e, também, das atividades desenvolvidas em sala de aula como, por exemplo, o momento de a professora circular entre os grupos e a plenária. Foram, inicialmente, organizados 10 grupos de 4 alunos e, posteriormente, pela desistência de alguns, passou-se a ter nove grupo, com 4 alunos.

É importante frisar que, em nosso entendimento, os alunos que ingressam na universidade possuem 12 anos de estudos preliminares e, portanto, aqueles alunos que, ao iniciar um curso de graduação, continuam com defasagem de aprendizagem, necessitam de um tratamento diferenciado daquele tradicionalmente utilizado pela maioria das escolas. Nesse contexto, consideramos que o universo de alunos que participou do curso de Matemática Básica é grande, pois foram muitos alunos que, reconhecendo sua fraca formação em matemática básica, pediram para participar do curso ofertado. Por outro lado, espera-se que alunos, que já possuem 12 anos de escolaridade básica, não apresentem tantas dificuldades com os conteúdos de matemática. Uma pergunta que surge desses questionamentos é: *Como alunos que não possuem empatia pela matemática durante a Educação Básica são levados a cursar uma Engenharia?* Respostas possíveis seriam a disponibilidade do Curso na região ou cidade ou, até mesmo, o ‘status’ que esse curso pode proporcionar ao profissional dessa área.

No momento do pedido de Projeto de Ensino para a Unipampa, estava estabelecido que os alunos fariam um mês de aulas no Projeto Integrado de Iniciação ao Ensino Superior e, no mês seguinte, teriam uma disciplina introdutória à Engenharia. Devido ao atraso no calendário, pela greve docente, a disciplina de Introdução à Engenharia não ocorreu, fazendo com que os alunos ficassem com mais de 45 dias de lacuna entre o final do curso de Matemática Básica e o início das aulas de Cálculo I do primeiro semestre letivo. Tal lacuna

pode ter prejudicado o ritmo de estudo dos alunos e, por isso, julgamos importante que o curso se desenvolva em um período próximo que anteceda o início do semestre letivo.

Uma das questões que colocamos juntamente com a pergunta da pesquisa e que pretendíamos responder era: *“Como utilizar problemas para construir e relacionar conteúdos de Matemática da Educação Básica com o Ensino Superior?”*

No primeiro momento, no planejamento dos problemas, a professora-pesquisadora estava preocupada em selecionar problemas que cobrissem os conteúdos elencados como importantes para a transição da Educação Básica para o Ensino Superior e, também, problemas que apresentassem alguma aplicação na engenharia. Nem todos os problemas selecionados conseguiram atingir essa ideia inicial, porém, de forma geral, os problemas foram bem aceitos pelos alunos.

Nesse curso não nos propusemos definir um problema gerador de conteúdos e, sim, apresentar cada problema, dos 123 trabalhados, como gerador de conteúdo. Consideramos que a escolha dos problemas geradores foi adequada e, que mesmo para os problemas mais técnicos, existia a proposta de ser gerador de algum tipo de conhecimento. É fato que, para uma turma com 36 alunos, nem sempre os problemas propostos seriam interessantes para todos, e coube à professora tentar despertar o interesse dos alunos a cada encontro. Concordamos com Dalla Vechia (2012, p.86) quando afirma que *“...da mesma forma que o objetivo pedagógico, o modo como o problema é compreendido assume um papel fundamental em sala de aula, podendo nortear as ações e direcionar o processo educacional”*.

Ao trabalharmos com uma turma que pode ser considerada ‘grande’ para a coleta de dados sabíamos que o interesse dos alunos, questão subjetiva da definição de problema, poderia ser uma das dificuldades encontradas, o que ocorreu mais fortemente principalmente no 8º e 17º encontros, quando os alunos apresentaram dificuldades e falta de interesse em resolver os problemas propostos. Nesse sentido Dalla Vechia (2012, p. 87) destaca o problema como tendo um lado subjetivo, baseado na conscientização de uma situação de necessidade e outro objetivo, relacionado à própria situação que concretizou a necessidade.

Durante o curso a professora-pesquisadora foi percebendo que, as atividades previamente selecionadas, eram mesmo pontos de deficiência de conteúdos matemáticos por parte dos alunos. Isso é possível perceber nas respostas dadas por eles no questionário final, aplicado no 20º encontro e devidamente comentado no capítulo anterior. Dos conteúdos e problemas relacionados, o que menos se mostrou interessante para os alunos foi o conteúdo de Conjuntos e Conjuntos Numéricos. Em um próximo curso, para esse assunto, é importante

que busquemos mais alguns problemas, que possam nos auxiliar e melhorar o material disponibilizado para os alunos.

As deficiências nos conteúdos de matemática básica, que encontramos nos alunos ingressantes da Unipampa em 2013, são semelhantes às relatadas pelos pesquisadores citados nos Capítulos III e IV deste trabalho. Os dados que obtivemos no desenrolar do curso nos fazem concordar com Nasser, Freire e Cardador (2008, p.01), quando afirmam que:

A existência dessas lacunas desafia a comunidade educacional a identificar estratégias para assegurar que todos os estudantes superem suas dificuldades e alcancem altos níveis acadêmicos. Nesse sentido, várias iniciativas para suprir as deficiências dos alunos ingressantes nos cursos de graduação têm sido testadas, como cursos de pré-cálculo obrigatórios ou optativos, aulas de apoio e disciplinas eletivas presenciais paralelas às disciplinas da grade curricular.

A segunda questão que colocamos juntamente com a pergunta da pesquisa era: “*Como trabalhar, com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com alunos recém-chegados ao Ensino Superior?*”

Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas não era de conhecimento prévio de nenhum dos alunos participantes, logo de início, muitos deles sentiram-se à vontade em trabalhar em grupos e apresentar seus resultados aos demais colegas. Porém, alguns alunos não se sentiam confortáveis nessa condição, como também ocorreu nos trabalhos desenvolvidos por Ribeiro (2010) e Paulette (2003). Essa forma de trabalho teve de ser incentivada inicialmente pela professora-pesquisadora que percebeu que os alunos estavam mais acostumados com a rotina de ‘*copiar teoria e resolver exercícios*’, que era o treino que receberam na escola.

As respostas obtidas, nos dois questionários respondidos pelos alunos, mostram claramente que eles aprovaram o uso da metodologia e consideraram importante trabalhar em grupos. No final do curso, alguns alunos chegaram a questionar a professora-pesquisadora sobre o porquê na escola não era utilizada essa forma de trabalho que, segundo eles, era mais dinâmica e que contribuía com ‘*dividir conhecimento*’ entre os colegas. A professora respondeu que a metodologia utilizada era recente e que poucas pessoas conheciam essa forma de trabalho.

Nesse sentido percebemos que ensinar os alunos considerando aquilo que eles já conhecem, utilizando uma forma de trabalho envolvente, auxiliou-os como agentes de seus próprios conhecimentos, seja no seu grupo de trabalho ou no grande grupo.

Concordamos com os PCN, quando afirmam que:

A utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino exige do professor muita dedicação, avaliação contínua, além do planejamento para a escolha ideal de situações-problema geradoras que provoquem a curiosidade e mantenham a motivação do aluno. No entanto, com o desenrolar das atividades, essa prática utilizada vai se tornando cada vez mais essencial, destacando qualquer outra metodologia de trabalho, pois o resultado é muito satisfatório. [...] essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução (BRASIL, 1998, p. 40).

Os alunos realmente participaram efetivamente dos encontros, e isso foi fruto da metodologia empregada que proporcionou a eles uma maior interação com os colegas. Foram contrários à plenária em cada atividade resolvida, ficando estabelecido que esta seria realizada uma única vez por encontro, pois argumentavam que perdia-se muito tempo indo à lousa.

No momento das dúvidas, na resolução dos problemas nos grupos, ao serem questionados pela professora-pesquisadora, alguns alunos utilizavam o seguinte argumento: *Professora, se a senhora precisa perguntar e não sabe, como eu vou saber?* O que reforça novamente a ideia de que o professor é o detentor do conhecimento e que o aluno está na escola para ‘receber’ os conteúdos do professor. Tal visão prevalece nas escolas em geral, e condiciona nossos estudantes a serem apenas repetidores de seus professores. Essa passagem evidencia a diferença entre a ‘aula tradicional’ e o trabalho com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, também apresentada no trabalho de Ribeiro (2010). A resistência inicial em trabalhar com uma nova forma de ensino foi diminuindo ao longo dos encontros iniciais e os alunos começavam a perceber que, dessa forma, tinham mais autonomia e deveriam ter mais comprometimento com o grupo em que estavam inseridos, passando de uma atitude passiva para o agente de seu conhecimento, buscando significado e compreensão na resolução dos problemas propostos.

Um fato que é visível neste trabalho, pelos materiais coletados dos alunos, é que o nível de conhecimento matemático trazido pelos alunos egressos da Educação Básica é realmente baixo. Esse dado também foi evidenciado no trabalho desenvolvido por Allevato (2005), em que a pesquisadora comenta que seus alunos possuíam uma quantidade grande de dúvidas que, embora básicas, dificultavam o andamento das atividades, afirmando que seus alunos chegavam com pouca ‘bagagem matemática’.

Levando-se em consideração que tais alunos passaram por um processo seletivo (ENEM) para ingressarem na universidade, eles deveriam possuir uma bagagem de conhecimento matemático mais ampla do a que foi apresentada. Essa conclusão corrobora o apresentado por nós no Capítulo III, em que, segundo os documentos nacionais, o aluno egresso da Educação Básica deveria estar apto a ingressar no sistema de Ensino Superior.

Durante o desenvolvimento do curso, muitas lacunas de conhecimento foram evidenciadas e a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propiciou, muitas vezes, o preenchimento das mesmas, já que os alunos conseguiram compreender e relacionar conceitos, apresentando-nos, nas plenárias, seu conhecimento construído.

Os diferentes tipos de avaliação a que os alunos foram submetidos também parece tê-los ajudado no engajamento com o curso. Além da ‘temida’ avaliação individual, a presença e a avaliação em grupos e dos colegas parece tê-los motivado, fato que se revela na baixa reprovação por frequência da turma ‘A’, que foi mantida pelos mesmos alunos no Cálculo I. Nenhum aluno aprovado ou reprovado por nota em Matemática Básica evadiu-se na disciplina de Cálculo I.

Acreditamos que, enquanto trabalharmos, com os alunos ingressantes, conteúdos por eles já vistos, com a mesma metodologia que eles estão acostumados na Educação Básica, a evasão e o baixo interesse, mesmo para aqueles alunos que têm consciência da sua deficiência de conteúdos, estarão presentes.

Comparando os resultados que obtivemos nesse curso com suas versões anteriores, já citadas no Capítulo IV, podemos garantir que a maior contribuição foi a da melhoria significativa nos índices de evasão e reprovação no curso. Todas as versões anteriores apresentaram índices acima de 30% de reprovação, enquanto neste curso, tivemos 10%.

O aproveitamento em Cálculo I, como foi comentado no item 7.6, apresenta como fator importante a aprovação de boa parte dos alunos (50%), porém não podemos deixar de levar em consideração, os alunos que não aprovaram em Cálculo I mesmo tendo sido aprovados em Matemática Básica, (37,5%). Tal índice nos alerta sobre as dificuldades inerentes aos conteúdos estudados em Cálculo I, tais como a compreensão do ‘discreto’ e ‘contínuo’, do ‘finito’ e do ‘infinito’, dos conceitos de limites, derivadas e integrais, que não são tratados na Educação Básica. Entendemos que trabalhar com os alunos os conteúdos que eles apresentam dificuldades na transição da Educação Básica para o Ensino Superior, mudar a metodologia de ensino e a carga horária não são ações suficientes para garantir que seu desempenho na disciplina de Cálculo I seja bom.

Mesmo sem ter acompanhado os alunos efetivamente em sala de aula, após o fim do semestre, a professora-pesquisadora encaminhou um email aos alunos a fim de saber como havia sido o aproveitamento deles na disciplina de Cálculo I. Dentre algumas respostas, já que nem todos retornaram o email, um aluno respondeu: *‘Passei professora! Deu pra perceber que as aulas do nivelamento ajudaram bastante!’*

Sendo assim, dentre as principais contribuições do Curso de Matemática Básica, consideramos o interesse dos alunos nas aulas, a forma de trabalho diferenciada em grupos, e as diversas formas de avaliação, que propiciaram aos alunos terem de participar mais ativamente das aulas e das discussões nos seus grupos de trabalho. Esse perfil de trabalho parece que instigou neles a necessidade de estar sempre estudando e tirando suas dúvidas. O conhecimento produzido pelos alunos, que a princípio se mostrava confuso e muito técnico, passou a ser voltado para o desenvolvimento do raciocínio, fruto do trabalho colaborativo que a metodologia adotada utiliza.

Nos grupos, os alunos necessitavam utilizar a linguagem oral para poder trabalhar com os seus pares e isso é uma mudança grande em relação ao que eles estavam acostumados, uma quebra de paradigma que desenvolveu neles autoestima, confiança e respeito ao modo de pensar dos colegas, tornando-se um aprendizado não somente de conteúdos matemáticos, mas também, de postura para todos os momentos da vida. O comprometimento que eles tinham com os colegas nos grupos foi, também, fruto do termo de compromisso que os alunos e a professora assinaram no início do curso. Esse comprometimento foi essencial para a baixa evasão que tivemos. Os alunos começaram a acreditar mais em si e no seu conhecimento.

Ensinar matemática utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas auxiliou na compreensão dos conceitos abordados no curso, instigou os alunos a relacionar conteúdos por eles conhecidos com os novos conteúdos trabalhados e contribuiu para a sua autoestima, desempenho e aprovação no curso e também na disciplina de Cálculo I. Os alunos tornaram-se mais comprometidos com o andamento do curso e, no final dos encontros, pudemos perceber que o trabalho colaborativo havia despertado neles um caráter investigativo e reflexivo mostrando claramente que não estavam mais esperando ‘resolver exercícios’ e sim, participar ativamente das resoluções, mostrando uma autonomia adquirida. Nossa experiência é muito parecida com as de Azevedo (1998), Paulette (2003), Allevato (2005), Ribeiro (2010) e Nunes (2010) membros do Gterp que também fizeram trabalhos com a Resolução de Problemas no Ensino Superior.

Com esse espírito de trabalho feito, mas não de trabalho concluído é que nos colocamos hoje a pensar em ampliar esta investigação e tentar avaliar que outras questões e aspectos aqui não considerados, ou parcialmente considerados, podem ser mudados para que nossa pesquisa possa colaborar com outras pesquisas relacionadas à transição da Educação Básica para o Ensino Superior.

Contribuições para a Educação Matemática

Embora o presente trabalho tenha sido desenvolvido com alunos do Ensino Superior, consideramos que ele possa ser uma referência aos professores dos Ensinos Fundamental e Médio, pois os conteúdos nele abordados são, na verdade, provenientes desses níveis de ensino.

Como não há, no Brasil, pesquisas que abordem a transição da Educação Básica para o Ensino Superior utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, esperamos que este trabalho seja a semente de novos estudos que possam contribuir ainda mais com os alunos que necessitam de auxílio nessa transição.

O que nele se apresenta fortemente é o fato de este estudo tratar da sala de aula, dos alunos ingressantes no Ensino Superior, da transição da Educação Básica para o Ensino Superior, que merece atenção especial devido à importância do conhecimento matemático da educação básica para a graduação.

As dificuldades enfrentadas ao longo do trabalho em sala de aula são fruto das condições em que muitos alunos adentram ao Ensino Superior, em particular na Engenharia, sem ter de fato o conhecimento prévio do que tal curso exige e o que oferece.

A utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas mostrou aos alunos que é possível rever/aprender, de uma forma diferente, mais participativa e envolvente, os conteúdos que já haviam sido estudados, sem a necessidade de aulas meramente expositivas.

Durante a construção deste trabalho, fomos consultados por colegas, professores de Matemática de vários estados do Brasil, que tinham interesse em trabalhar com alunos ingressantes. Esse movimento de compreensão da importância da transição da Educação Básica para o Ensino Superior pode gerar novas pesquisas e, com elas, novos dados que possam nos ajudar nesse caminho que é melhorar o ensino pelos professores e a aprendizagem dos alunos.

Sendo assim, acreditamos que nossa investigação venha a contribuir com as pesquisas em sala de aula, com o desenvolvimento da área de Resolução de Problemas e suas relações com a transição da Educação Básica para o Ensino Superior.

O que vem depois...

O trabalho aqui desenvolvido não deve acabar ao terminarmos esta tese. Ao retornar como docente da Unipampa, após a conclusão do doutorado, a pesquisadora deve continuar sua pesquisa com vistas a alguns pontos importantes que não puderam ser considerados neste trabalho.

Como a professora-pesquisadora, docente da Unipampa, estava afastada de suas atividades para o doutoramento, não pôde dar continuidade ao trabalho na disciplina de Cálculo I. Sendo assim, não foi possível fazer um acompanhamento individual de cada aluno, nem de suas provas e erros ou acertos cometidos. A pesquisa ganha um novo aspecto no momento em que, de volta à Unipampa, a professora-pesquisadora possa, além de trabalhar no Curso de Matemática Básica, também trabalhar ao longo do semestre com os alunos avaliando e acompanhando seus desempenhos, dúvidas e avanços.

Além de acompanhar os alunos na primeira disciplina de Matemática do Ensino Superior, é desejo da pesquisadora prolongar os estudos, avaliando uma turma ingressante que participe de tal projeto desde o primeiro semestre até o último que aborda disciplinas matemáticas, para que, com esse acompanhamento, possa traçar novos rumos ao Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas.

REFERÊNCIAS

Daqui a cinco anos você estará bem próximo de ser a mesma pessoa que é hoje, exceto por duas coisas: os livros que ler e as pessoas de quem se aproximar.

Charles Jones

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

ANDRADE, S. **Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. Rio Claro, 1998. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista.

AZEVEDO, L. L. Uma proposta de mudança, na **Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de “Ensino de Matemática via Resolução de Problemas”**. 1998. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1998.

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. **Matemática aula por aula: volume único**: Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2000.

BARROSO, J. M. **Projeto araribá**: Matemática – ensino fundamental. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2007.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. v.4. São Paulo: FTD, 2000.

BOERO, M. L.; SILVA, A. F. **A evasão escolar em uma universidade privada**. In: Anais do XXXIV Congresso Brasileiro de Engenharia, Passo Fundo, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC, 2000.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Ensino de 5º a 8º séries. Brasília-DF: MEC, 1998.

_____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2)** Brasília, 2006.135 p.

_____. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional** n. 9394, de 20 de Dezembro de 1996 Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: MEC, 1996.

_____. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução. **CNE/CES 1.362/2001**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Engenharia. Brasília: MEC, 2002.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Prova do Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: INEP, 2010.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. São Paulo: Gradiva, 2003.

CENTURIÓN, M. **Conteúdo e metodologia da Matemática: Números e Operações**. Editora Scipione, 1994.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. **Novo Matemática na medida certa**, 8ª série. 10 ed. São Paulo: Scipione, 2007.

CHARLOT, B. **Da relação com o saber: elementos para uma teoria**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P (Orgs). **As ideias da álgebra**. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

CURY, H. N. Aprendizagem em Cálculo: uma experiência com avaliação formativa. In: **XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**. Santo Amaro, 2005.

_____. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007, 116p.

DALLA VECCHIA, R. **A modelagem matemática e a realidade do mundo Cibernético**. 2012. 275 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2012.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática: ensino fundamental**. 4 vol. São Paulo: Ática, 2005.

_____. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. São Paulo: Ática, 2009. 192p.

DOERING, C. I.; NÁCUL, L. B. C.; DOERING, L. R. O programa Pró-Cálculo da UFRGS In: CURY, H. N.(Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004, p.201-224.

FAGUNDES, C. V. **Transição Ensino Médio-Educação Superior: Qualidade no Processo Educativo**. In: Revista Educação por Escrito, PUCRS, v.3, n.1, p. 62-73, jul.2012.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E.F. **Tendências atuais no ensino das disciplinas da área de matemática nos cursos de engenharia**. In: XXVII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Natal, 1999.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais**. Rio de Janeiro, Record, 2001.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM, 2005.

HILBERT, D. **Problemas Matemáticos – Discurso para o 2º Congresso Internacional de Matemáticos – Paris**. Trad. Sérgio Roberto Nobre. In: Revista Brasileira de História da Matemática, n.05, v.03, p.3-10, 2003.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 1. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

HUANCA, R. H. **A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 2006. 253 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2006.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicação**.v.01. São Paulo: Saraiva, 2001.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. V.3. São Paulo: Atual, 1977.

_____. **Fundamentos de Matemática Elementar**. V.1. São Paulo: Atual, 1977.

KESSLER, M. C.; PAULA, C. G.; ALBÉ, M. H.; MANZINI, N. I. J.; BARCELLOS, C. K.; CARLSON, R. L. R. **Ensino Propulsor: Impulsionando a aprendizagem dos acadêmicos da Unisinos**, 2011. Disponível em: < <http://unisinos.br/propulsor/category/artigos> > Acesso em: 22/06/2012.

KESSLER, M. C. **Produzindo material didático em multimídia para os estudantes de engenharia**. Anais: XX Cobenge, São Paulo, 2008.

KRULICK, S.; RUDNICK, J.A. **Problem-Driven Math: Applying the Mathematics Beyond Solutions**. Estados Unidos: Wright Group /McGraw-Hill, 2005.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica: do projeto à implementação**. Trad. Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008. 328 p.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. v.1. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

_____. **Temas e Problemas Elementares**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MARCON, D.; NOGUTI, F. C. H. **Caderno Didático para o Curso de Nivelamento em Matemática**. 70p, 2009.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática: ideias e desafios**. 5 ed. 8 série. São Paulo: Saraiva, 1998.

NASCIMENTO, J. L. Matemática: conceitos e pré-conceitos. In: **Educação em Engenharia: metodologia**. São Paulo: Mackenzie, 2002, p. 247-295.

NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino Superior**. Mesa Redonda do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. UFPE, 2004.

_____. **Aprimorando o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos.** Atas do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Disponível em: www.desenho.ufpr.br/IIISIPEM/GT4, SBEM, 2006.

NASSER, L.; FREIRE, J. L.; CARDADOR, D. Preenchendo Lacunas de Aprendizagem em Educação Matemática no Ensino Superior por meio da Educação a Distância. In: **VI SPEM – Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro**. UNIRIO, 2008.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action**. Reston: NCTM, 1980. 29 p.

_____. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** (trad.) Associação de Professores de Matemática. Reston: Library of Congress Cataloguing, 2008. 454p.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Mathematics Teacher**. Calendar Problems. Reston: NCTM, 2012, v.106, nº 3, p.200-201.

_____. **Mathematics Teacher**. Special Issue: 100 Years of Mathematics Teacher (2007, p.04)

NOGUTI, F. C. H.; MARCON, D. **Cursos de Nivelamento como estratégia para a melhoria no rendimento do aluno nas disciplinas básicas de matemática dos cursos de graduação do Campus Alegrete.** In: 2º Simpósio de Ensino de Física e de Matemática. UNIFRA, 2012.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática.** 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

_____. ONUCHIC, L. R. **Tópicos Especiais: Resolução de Problemas - Teoria e Prática:** Disciplina de Pós-graduação, 28 fev. – 30 jun. de 2011. 5f. Notas de Aula. Impresso.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org). **Educação Matemática - pesquisa em movimento**. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

_____. **As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas.** In: Bolema, n. 31, p. 79 – 102, 2008.

_____. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** In: Bolema, n. 41, v.25, p.73 -98, 2011.

PAIVA, M. **Matemática: Ensino Médio**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

PALIS, G. de L. R. **Educação Matemática: entrelaçando pesquisa e ensino, compreensão e mudança. Educação on-line, N.1.** Disponível em: www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/cgi-bin/db2www/PRG_1357.D2W/INPUT, PUC-Rio, 2005.

PAULETTE, W. **Novo enfoque da disciplina Matemática e suas Aplicações no Curso de Administração de Empresas da Universidade Paulista – UNIP**. 2003. 398 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2003.

PINTO, M. M. F. **Educação Matemática no Ensino Superior**. In: Educação em Revista, Belo Horizonte, n.36, 2002, p.223-238.

POLYA, G. **O ensino por meio de problemas**. Trad. Elza Gomide e Seiji Hariki. In: Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 1985, p.11-16.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PONTE, J. P., BROCARD, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PUTI, T. **A Produção de Significados durante o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática de Equações Polinomiais**. 2011. 245 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2011.

RIBEIRO, M.V. **O Ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas**. 2010. 327 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

ROMBERG, T. A. **Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa**. Trad. Lourdes de la Rosa Onuchic e Maria Lúcia Boero. In: Bolema, 2007, vol.27.

SÃO PAULO, estado. **Caderno do Professor: matemática, ensino fundamental – 8ª série, volume 2**. Secretaria da Educação; FINI, M. I. (coord), Machado, N. J.; Granja, C. E. S. C.; Mello, J.L.P.; Moisés, R. P.; Spinelli, W. (equipe). São Paulo: SEE, 2009.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p.31-42, 1989. (Yearbook).

SCHOENFELD, A. Research Methods in (Mathematics) Education. In English, D. L. (Ed). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers. 2002. p. 435 – 487.

SILVA, B. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. In: **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.3, pp.393-413, 2011.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino- aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. Rio Claro, 2010. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: Charles, R.I.; Silver, E. A. (Eds). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum pp.1-22, 1989.

STEWART, J; REDLIN, L.; WATSON, S. **Precálculo** – Matemáticas para el Cálculo. 5 ed. Madrid: Thomson, 2007.

TAN, S. T. **Matemática aplicada à administração e economia**. Tradução de Fábio Armando. 2 ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – UNIPAMPA. **Plano de Desenvolvimento Institucional**: Unipampa 2009 -2013. Bagé – RS, 2009, 58 p.

_____. **Regimento Geral**. Bagé – RS, 2010.

_____. **Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia Civil**. Alegrete, 2010.

_____. **Projeto Pedagógico do Curso de Engenharia Elétrica**. Alegrete, 2009.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e Aplicação em Sala de Aula**. 6a edição. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Editora Artmed, 2009.

VIANNA, C. R. Resolução de problemas. **Temas em Educação I**: Futuro Congressos e Eventos, Pinhais, p.401-410, 2002.

APÊNDICE A – Avaliação Diagnóstica

Avaliação Diagnóstica - Noções Básicas de Matemática

1. Determine o valor da expressão :

$$\frac{(2^{n+4} - 2^{n+1}) \cdot 2^{-1}}{2^{n+2}}$$

- a) $\frac{1}{2^{n+3}}$
 b) $2^{-(n+5)}$
 c) 28
 d) $\frac{7}{4}$
 e) -1

2. Se (a, b) é a solução do sistema podemos afirmar que $a \cdot b - 2$, vale:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 12 \end{cases}$$

- a) 32
 b) 30
 c) 12
 d) 10
 e) 8

3. Dados os números reais $a = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$ e $c = 0,12$, podemos obter:

- a) $c < b < a$
 b) $a < b < c$
 c) $c < a < b$
 d) $b < c < a$
 e) $b < a < c$

4. O conjunto solução da inequação $(x+3) \cdot (x-2) \leq 0$ é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$
 b) $\{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 3\}$
 c) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$
 d) $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 2\}$
 e) $\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 3\}$

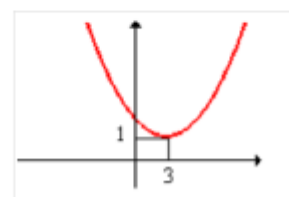
5. O domínio da função é:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x-x^2}}$$

- a) $] -2, 1[$
 b) $]0, \infty)$
 c) $[-2, 1[$

- d) $] -\infty, -2[\cup]1, \infty[$
 e) $] -\infty, -2[\cup]1, \infty[$

6. Considerando o gráfico abaixo, da função definida por $y = ax^2 + bx + c$, podemos afirmar que:



- a) $a > 0, \Delta = 0, V(1, 3)$
 b) $a > 0, \Delta < 0, V(-1, 3)$
 c) $a > 0, \Delta < 0, V(3, 1)$
 d) $a < 0, \Delta > 0, V(3, 1)$
 e) n.r.a

7. Considerando a função $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{se } x \geq 0 \\ 2^{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ analise as afirmações abaixo:

- I) O menor valor da função é 1
 II) A imagem da função é $\mathbb{R}$.
 III) A função é crescente em $\mathbb{R}$.

É (são) verdadeira(s):

1. a) apenas I
 b) apenas II
 c) apenas I e III
 d) apenas II e III
 e) I, II e III

8. Se $\log_8 16 = a$ e $\log_{125} 25 = b$, então $a + b$ vale:

- a) 2
 b) $\frac{17}{2}$
 c) $\frac{3}{4}$
 d) $\frac{3}{2}$
 e) 6

APÊNDICE B – Termo de Compromisso e Responsabilidde

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – *CAMPUS ALEGRETE* PROJETO DE ENSINO “CURSO DE NIVELAMENTO EM MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”

Quantidade de Alunos: 40

Quantidade de Aulas Previstas: 60 horas/aula

Quantidade de Encontros Previstos: 20 encontros.

Período: 08/04/2013 até 03/05/2013

Este termo de compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização do Projeto de Ensino “Curso de Nivelamento em Matemática através da Resolução de Problemas”, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e da professora-pesquisadora. O trabalho será realizado para alunos ingressantes dos cursos de Engenharia Civil, Elétrica, Mecânica e Telecomunicações da Unipampa – *Campus Alegrete*.

Normas:

- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. Os estudantes trabalharão em grupos de quatro alunos com o objetivo de resolver problemas visando à construção ou reconstrução de conceitos matemáticos;
- Todos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo;
- Cada grupo deverá entregar as atividades ao final de cada encontro. A pesquisadora recolherá os trabalhos e, após tirar cópia, os devolverá aos grupos no encontro seguinte;
- A tarefa extraclasse deverá ser feita e entregue no início do encontro seguinte.
- Será realizado um intervalo de 10 minutos durante os 3 períodos de aula.

Avaliação:

Os alunos serão avaliados individualmente, para fins de recebimento de certificado de participação no Projeto de Ensino, da seguinte forma:

- **FREQUÊNCIA** (Peso 2): Todos deverão estar presentes no local e horários estipulados.
- **TRABALHO DE GRUPO** (Peso 2): Os trabalhos de grupo serão observados e avaliados pela professora-pesquisadora durante as atividades.

- **PARTICIPAÇÃO** (Peso 2): Participação nas discussões e no desenvolvimento de atividades propostas.
- **AVALIAÇÃO DOS COLEGAS** (Peso 2): Todos os membros do grupo farão a avaliação dos colegas participantes.
- **AVALIAÇÃO DO GRANDE GRUPO** (Peso 2): Todos os alunos farão a avaliação dos demais colegas.

Outras resoluções:

Questões e problemas sugeridos durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos por todos, alunos e professora-pesquisadora, a fim de chegar-se a um comum acordo, ficando estabelecido que as normas devam ser cumpridas por todos.

Ciente dessas normas e de pleno acordo com todas as condições estabelecidas assinam abaixo.

Alegrete, 08 de abril de 2013.

Professora Pesquisadora

Aluno (a)

Aluno (a)

Aluno (a)

Aluno (a)

Aluno (a)

Aluno (a)

Aluno (a)

Aluno (a)

APÊNDICE C – Projeto de Ensino entregue à Unipampa



Formulário para Registro de Projetos de Ensino

Título	Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas		
Data Início	08/04/2013	Data Fim	03/05/2013
Campus ou setor reitoria	Campus Alegrete		
Vinculado a quais cursos?	Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica e Engenharia de Telecomunicações.		
Área do Conhecimento	Ciências Exatas e da Terra – Subárea: Ensino de Matemática		
Carga Horária Total da Ação	60 horas	Carga horária EAD	
Palavras-chave	Matemática Básica, Cálculo I, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.		
Local de Realização	Salas de aula do <i>Campus Alegrete</i> .		
Resumo			
Este Projeto de Ensino tem como objetivo principal proporcionar, aos alunos ingressantes dos cursos de Engenharia do <i>Campus Alegrete</i>, a possibilidade de realizar um curso de Matemática Básica, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Vale salientar, que a presente proposta é a de oferecer um Curso de Matemática Básica, diferente de um curso apenas voltado para o desenvolvimento de habilidades, nos alunos cursantes de Cálculo I. As bases deste Projeto de Ensino são os conceitos matemáticos iniciais necessários a todas as disciplinas que envolvem os conteúdos matemáticos para os alunos dos cursos de Engenharia, a saber, Cálculo, Geometria Analítica, Álgebra Linear e consequentemente Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, que dependem das disciplinas iniciais. Espera-se, portanto, com este projeto, desenvolver habilidades e competências nos alunos, que promovam a autonomia e a aprendizagem significativa dos mesmos e, além disso, diminuir os índices de reprovação e evasão nas disciplinas iniciais da graduação.			

Equipe Executora

Adicionar quantas linhas for necessário.

Nome	Vínculo (Discente, Docente, TAE ou outro)	Campus ou Instituição de Origem	Função	Carga horária/semana
Sidinei Ghissoni	Docente	Alegrete	Coordenador	6
Fabiane Cristina Höpner Noguti	Docente/ professora - pesquisadora	Alegrete	Professora - Pesquisadora	6
Lourdes de la Rosa Onuchic	Professora Voluntária	Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita Filho' – Rio Claro/SP	Colaboradora	4

Aluno Voluntário	Discente	Alegrete	Voluntário	6

Parcerias

Adicionar quantas linhas for necessário. * Não é obrigatório o preenchimento.

Nome da Pessoa ou Instituição	Descrição da Participação
Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita Filho' – Unesp/ RC	Instituição de origem da professora colaboradora.

Introdução

As reprovações e evasões dos alunos, nas disciplinas iniciais de matemática dos cursos de graduação do *Campus Alegrete*, acarretam problemas de fixação do aluno na instituição e, no mínimo, retardam a conclusão de curso de boa parte dos mesmos. Sendo assim, em uma ação dos professores de matemática do *Campus*, nos anos de 2007 a 2009, foram desenvolvidos Cursos de Nivelamento em Matemática Básica, com o intuito de auxiliar os alunos ingressantes especificamente nas disciplinas de Cálculo I e Geometria Analítica. Os resultados obtidos, após três anos de curso, nos mostraram que apesar do índice de aprovação dos alunos cursantes do Nivelamento em Matemática ser relativamente pequeno, os que concluíram esta atividade com resultados positivos tiveram, na sua maioria, bom desempenho também na disciplina de Cálculo I. Apesar desses resultados, o número de alunos que se matricularam no Curso de Nivelamento em Matemática e posteriormente evadiram-se nas disciplinas iniciais e no próprio Nivelamento em Matemática é relevante (NOGUTI e MARCON, 2012).

Dessas constatações, identificamos que o Curso de Matemática Básica é importante para os alunos ingressantes e, também, que a forma como foram realizados, com apostilas de conteúdos e exercícios do Ensino Médio em aulas expositivas e, a curta duração dos cursos, de 20 a 30 horas aula, não conseguiu atingir o objetivo maior que é, além de ensinar conteúdos de matemática básica, propiciar ao aluno autonomia de estudo durante a graduação e o envolvimento necessário nas disciplinas iniciais para que isso os motive a permanecer no curso escolhido.

Apoiados nos estudos realizados pelo GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas da Unesp/RC e nos trabalhos orientados pela Prof^a. Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic, propusemos a realização do “Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas”. Este curso, desenvolvido com base na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, coloca o foco de atenção para o aluno e o professor, como mediador, trabalha as atividades com os alunos em grupos num processo de coconstrução do conhecimento.

Justificativa

Pesquisas apontam que os estudantes que ingressam nos cursos superiores possuem deficiência nos conceitos básicos de matemática oriundos do Ensino Básico. Em particular, estudos a

respeito das dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo podem ser encontrados em Cury (2005), Flemming e Luz (1999), Doering, Nácul e Doering (2004), Nascimento (2002) e Nasser, Freire e Cardador (2008), e nos mostram que os problemas enfrentados no Ensino Superior são, na verdade, o resultado de como a matemática é apresentada aos alunos nos Ensinos Fundamental e Médio, muitas vezes sem a compreensão de conceitos básicos. Com isso, muitas instituições de Ensino Superior têm se preocupado em ofertar, aos alunos ingressantes, cursos de matemática básica buscando reduzir o crescente número de reprovações e evasões.

A experiência que tivemos no *Campus Alegrete*, nos anos de 2007-2009, não é diferente do que é relatado nos trabalhos de pesquisa que envolvem a transição Ensino Médio/Ensino Superior especificamente com conteúdos de matemática.

O presente Projeto de Ensino retoma a oferta de Curso de Nivelamento, como já ocorreu no *Campus Alegrete*, propondo um Curso de Matemática Básica com uma nova abordagem metodológica que possa auxiliar os alunos ingressantes nas disciplinas iniciais de matemática.

Objetivos

O objetivo deste projeto é o de proporcionar aos alunos, ingressantes dos cursos de Engenharia Civil, Elétrica, Mecânica e Telecomunicações, a participação em um Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas, na qual se pretende evidenciar os processos de ensino e aprendizagem utilizando atividades para auxiliar os alunos na construção/desenvolvimento de conceitos de matemática.

O Projeto de Ensino tem por objetivos específicos:

- Utilizar a resolução de problemas para desenvolver conteúdos matemáticos;
- Preparar o aluno ingressante para as disciplinas de matemática, dando ênfase no raciocínio e desenvolvendo nele a habilidade de resolver problemas.
- Trabalhar em grupos, resolvendo problemas.

Fundamentação Teórica

Este Projeto de Ensino fundamenta-se nas recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998-2000) e na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ONUICH; ALLEVATO, 2011).

A referida metodologia possibilita ligar os conhecimentos prévios dos alunos à solução procurada para o problema proposto e aos novos conhecimentos a serem construídos. Ocorre uma investigação do padrão e da ordem, que são características da Matemática. Durante a investigação, sempre realizada em grupos, é possível fazer-se uso de desenhos, jogos, tecnologia, esquemas, tabelas, gráficos, entre outros recursos, o que torna essa metodologia bastante abrangente.

Sendo assim, o ensino da Matemática através da Resolução de Problemas trabalha os conteúdos matemáticos, possibilitando, aos alunos e professores envolvidos, a discussão de ideias, estratégias e a formulação de conjecturas e demonstrações para a resolução de problemas propostos. Dessa forma, para ensinar através da resolução de problemas, o professor utiliza um problema como ponto de partida e um caminho para se ensinar matemática.

Material e Método

No desenvolvimento deste projeto, devemos utilizar alguns elementos na perspectiva de experimento de ensino (BORBA, 2004). Os experimentos de ensino propiciam um espaço de discussão para os alunos que, trabalhando em grupos, têm a possibilidade de refletir, conjecturar, buscar e apresentar soluções para os problemas propostos e o professor auxilia os alunos, a fim de que o trabalho desenvolvido possa, de fato, cumprir com as expectativas de ambos.

Serão elaboradas atividades que envolvam os conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio e, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, realizar o Curso de Matemática Básica. Também será feita uma entrevista, com os alunos cursantes, e acompanhamento do seu aproveitamento nas disciplinas do primeiro semestre.

Aos alunos ingressantes dos cursos de Engenharia (Civil, Elétrica, Mecânica e Telecomunicações) será primeiramente apresentada a dinâmica de trabalho deste Projeto de Ensino, no primeiro encontro do Curso. Os interessados serão selecionados, num total de 28 vagas, através de um questionário a que seriam submetidos no momento da matrícula. Também deve ser considerada a nota de matemática que os referidos alunos obtiveram no ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio – que foi a forma de seleção utilizada pela Unipampa. Dentre os alunos interessados no Curso de Matemática Básica serão selecionados aqueles que obtiveram as notas mais baixas no ENEM, já que a proposta do curso é auxiliar os alunos que apresentam mais dificuldades em Matemática. O Curso de Matemática Básica é uma atividade de apoio às disciplinas de matemática.

Serão realizados 20 encontros de 3 horas-aula todos os dias da semana. Consideramos importante que a duração do curso seja de 60 horas-aula para que seja possível relembrar e/ou reconstruir conceitos necessários de matemática para o bom acompanhamento das disciplinas iniciais.

Relação ensino, pesquisa e extensão.

O presente projeto faz parte da tese de doutorado da professora-pesquisadora (docente afastada da Unipampa), sendo, portanto, parte de uma pesquisa em andamento. Os resultados obtidos neste Projeto de Ensino serão utilizados na tese e em prováveis artigos a serem publicados.

Este projeto é, também, a sequência de trabalhos anteriormente desenvolvidos na Unipampa que já tiveram resultados apresentados em congressos, entre eles, no ano de 2009 foi premiado com o primeiro lugar no Salão Integrado de Ensino, Pesquisa e Extensão da UNIPAMPA (SIEPE). Os

resultados do Projeto de Nivelamento 2007-2009 foram apresentados, como comunicação oral, no 2º Simpósio de Ensino de Física e de Matemática na UNIFRA – Universidade Franciscana, no ano de 2012.

O estudo prevê, ainda, o acompanhamento dos alunos, ingressantes em 2013, que frequentaram o Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas até o término das disciplinas básicas de matemática, a fim de verificar seus aproveitamentos e aprofundar nossos estudos na melhoria deste Projeto de Ensino. Esse acompanhamento pode resultar em novas pesquisas e prováveis artigos.

Vale salientar que a professora colaboradora, ao visitar a Unipampa – *Campus Alegrete*, pode realizar palestras ou minicursos tanto à comunidade acadêmica como à comunidade de professores de Matemática das redes municipal e estadual de ensino, configurando um Projeto de Extensão.

Resultados Esperados

Esperamos diminuir os níveis de reprovação e evasão dos alunos nas disciplinas iniciais de graduação e, comparativamente com os cursos de nivelamento anteriormente realizados, reduzir a evasão do próprio Curso.

Desenvolver nos alunos as habilidades e competências necessárias para o bom andamento dos cursos de graduação no qual estão vinculados e, além disso, estabelecer nos alunos a relação de trabalho em grupo e autonomia de estudo.

Realizar, a longo prazo, um acompanhamento quantitativo das notas dos alunos nas disciplinas de matemática das grades curriculares de seus respectivos cursos, a saber, Cálculo I, II e III, Geometria Analítica, Álgebra Linear e Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, a fim de realizar um acompanhamento efetivo do rendimento dos mesmos.

Referências

BORBA, M. C. **A pesquisa qualitativa na Educação Matemática**. Publicado em CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, Minas Gerais, 2004.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais; Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999. 364p.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino de 5º a 8º séries**. Brasília-DF: MEC, 1998.

_____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2)**. Brasília, 2006.135 p.

CURY, H. N. (Org.) **Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores – Reflexões Relatos Propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

DOERING, C. I.; NÁCUL, L. B. C.; DOERING, L. R. O programa Pró-Cálculo da UFRGS In: CURY, H. N.(Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004, p.201-224.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E.F. **Tendências atuais no ensino das disciplinas da área de matemática nos cursos de engenharia.** In: XXVII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, Natal, 1999.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais.** Rio de Janeiro, Record, 2001.

NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino Superior.** Mesa Redonda do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. UFPE, 2004.

NOGUTI, F. C. H.; MARCON, D. **Cursos de Nivelamento como estratégia para a melhoria no rendimento do aluno nas disciplinas básicas de matemática dos cursos de graduação do Campus Alegrete.** In: 2º Simpósio de Ensino de Física e de Matemática. UNIFRA, 2012.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org). **Educação Matemática - pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

_____. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** In: Bolema, n. 41, v.25, p.73 - 98, 2011.

POLYA, G. **O ensino por meio de problemas.** Trad. Elza Gomide e Seiji Hariki. In: Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 1985, p.11-16.

Outras informações relevantes (Não obrigatório)

Conteúdos a serem abordados no Curso:

UNIDADE 1 - REVISÃO DO ENSINO FUNDAMENTAL

1.1 Números e Operações:

Operações Fundamentais
Potenciação e Radiciação

1.2 Álgebra:

Polinômios
Fatoração e Produtos Notáveis
Resolução de Equações e Inequações

1.3 Medida

UNIDADE 2 - REVISÃO DO ENSINO MÉDIO

- 2.1 Linguagem e notação de conjuntos
- 2.2 Conjuntos numéricos e suas operações
- 2.3 A reta real e seus intervalos
- 2.4 Valor absoluto

UNIDADE 3 - PRODUTO CARTESIANO E FUNÇÕES

- 3.1 Produto cartesiano
- 3.2 Funções Polinomiais
- 3.3 Função Modular

UNIDADE 4 – EXPONENCIAL E LOGARITMO.

- 4.1 Equações e inequações exponenciais e logarítmicas.
- 4.2 Função Exponencial
- 4.3 Função Logarítmica

UNIDADE 5 – INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA E AOS SISTEMAS LINEARES.

5.1 Introdução à Trigonometria

5.2 Matrizes e Sistemas Lineares

Cronograma de Atividades

Adicionar quantas linhas for necessário.

Encontro	Conteúdo	Professor
1º	Apresentação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMRP) Dinâmica de aula. Termo de compromisso e responsabilidade.	Professora Pesquisadora.
2º ao 5º	Trabalho em grupos na MEAAMRP. Unidade 1.	Professora Pesquisadora.
6º ao 8º	Trabalho em grupos na MEAAMRP. Unidade 2.	Professora Pesquisadora.
9º ao 14º	Trabalho em grupos na MEAAMRP. Unidade 3.	Professora Pesquisadora.
15º ao 17º	Trabalho em grupos na MEAAMRP. Unidade 4.	Professora Pesquisadora.
17º ao 20º	Trabalho em grupos na MEAAMRP. Unidade 5.	Professora Pesquisadora.

Plano de Aplicação de Recursos

Os recursos para diárias e passagens da professora colaboradora (Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic) serão custeados pelo PLANFOR - Plano Institucional de Formação de Quadros Docentes do qual a professora pesquisadora (Profa. Ma. Fabiane Cristina Höpner Noguti) é bolsista. O PLANFOR é um convênio existente entre a Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e a Universidade Federal do Pampa.

APÊNDICE D – Projeto de Ensino

Apresentamos, na sequência, o planejamento dos 20 encontros previstos para o Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas. Tal planejamento faz parte das atividades propostas por Romberg em seu fluxograma, com o intuito de pensar no que fazer antes de colocar o projeto em ação. Ao colocá-lo em ação, estaremos descrevendo sua implementação com as contribuições dos alunos que podem complementar e expandir a programação organizada aqui. As atividades são compostas por até quatro problemas, que são geradores dos conceitos que foram planejados para o encontro. As atividades extraclasse foram planejadas para cada um dos encontros e podem conter até seis problemas que se dividem em problemas de fixação dos conteúdos e problemas que desafiam os alunos a trabalhar com um ‘passo além’ do que foi trabalhado em sala de aula.

Para cada problema planejado, apresentamos seu(s) conteúdo(s) específico(s) e objetivo(s) esperado(s), além das estratégias de resolução pensadas pela professora-pesquisadora e da formalização que servem como um guia para o leitor compreender como a pesquisadora organizou as suas aulas e como pensara em utilizar os conteúdos que seriam abordados no encontro e, também, como comparativo com as soluções propostas pelos alunos. Para os problemas sugeridos nas atividades extraclasse, apresentamos somente as estratégias de resolução pensadas pela professora, pois a ideia de propô-los era de que os alunos pudessem trabalhar em casa e reforçar os conteúdos estudados nos encontros.

1º Encontro:

No primeiro encontro será feita a apresentação do Curso para os alunos, explicando-lhes a forma de trabalho, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Será realizada a Avaliação Diagnóstica, sua correção e discussão dos problemas, além da leitura e a avaliação do Termo de Compromisso e Responsabilidade. Apresentaremos ainda, um primeiro problema aos alunos a fim de referenciar os diferentes modos de pensar de cada indivíduo.

Objetivos do Encontro:

Motivar e mobilizar os alunos em relação aos encontros e discutir a participação de todos no Curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas. Discutir os diferentes modos de pensar de cada indivíduo que, quando trabalhado em grupos, podem gerar bons resultados no processo de ensino-aprendizagem.

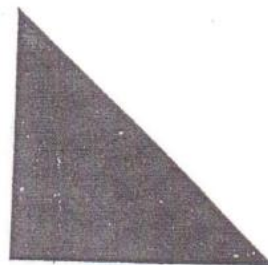
Para a atividade ‘Aprendendo a Pensar’ é importante lembrar que os alunos devem receber apenas a primeira folha que contém as figuras. Após a discussão do grupo e finalização do problema, a professora-pesquisadora fará a leitura do texto com os alunos.

Atividade²⁹ 1

Há cinco figuras abaixo. Selecione a que for diferente de todas as outras.



a)



b)



c)



d)



e)

²⁹ Atividade retirada das notas de aula de Onuchic (2011).

Aprendendo a Pensar

Onde se aprende a pensar? Uma fonte importante são os estudos formais na escola. Através da educação, você aprende o que é adequado e o que não é. Aprende muitas das perguntas que usa para sondar seu ambiente. Aprende onde buscar informação, a que tipo de ideias prestar atenção e como pensar sobre elas. Em suma, seu treinamento educacional fornece muitos dos conceitos que você usa para ordenar e compreender o mundo.

E, por falar em educação, como foi que você se saiu no exercício das cinco figuras? Se apontou a figura B, parabéns, você escolheu a resposta certa. A figura B é a única que só tem linhas retas. Cumprimente-se com uma palmadinha nas costas.

Pode ser, porém que você tenha escolhido a figura C, por ser a única assimétrica. Se for isso, também está certo. C é a resposta certa. A figura A também é defensável, pois é a única sem pontos de ruptura. Portanto, A é a resposta certa. E que tal a D? Só ela tem uma linha curva e uma linha reta.

Portanto, D também é a resposta certa. E a figura E? Entre outras coisas, ela é a única que parece a projeção de um triângulo não-euclidiano sobre o espaço euclidiano. Também é a resposta certa. Em outras palavras, todas são certas, dependendo do ponto de vista.

Quase todo o nosso sistema educacional, porém, objetiva ensinar às pessoas *uma única* resposta certa. Na época em que a média das pessoas termina a faculdade, o rapaz ou a moça terá feito mais de 2600 testes, exames e provas muito semelhantes ao exercício que você acabou de fazer. É dessa maneira que a abordagem da “resposta certa” fica profundamente enraizada em nossa maneira de pensar. Isso pode ser ótimo em alguns problemas de matemática, que realmente só tem uma resposta certa. O problema é que a vida geralmente não é assim. A vida é ambígua. Nela existem muitas respostas certas – e todas dependem do que você está procurando. Mas, se pensar que só existe uma resposta correta, é óbvio que vai parar de procurar outras e, portanto, só vai encontrar uma.

Objetivos Específicos:

Apresentar aos alunos as diferentes formas de pensar. Discutir a existência ou não de solução para problemas matemáticos. Problemas podem ter uma única solução, muitas soluções ou mesmo nenhuma solução.

Atividade³⁰ Extraclasse

Um terreno retangular tem 36 m de comprimento por 21 m de largura. O dono desse terreno deseja cercá-lo com árvores plantadas a iguais distâncias umas das outras e quer manter entre as árvores a maior distância possível medida em um número inteiro de metros. Se em cada canto do terreno for plantada uma árvore, qual será a distância entre as árvores e quantas árvores ele deverá plantar?

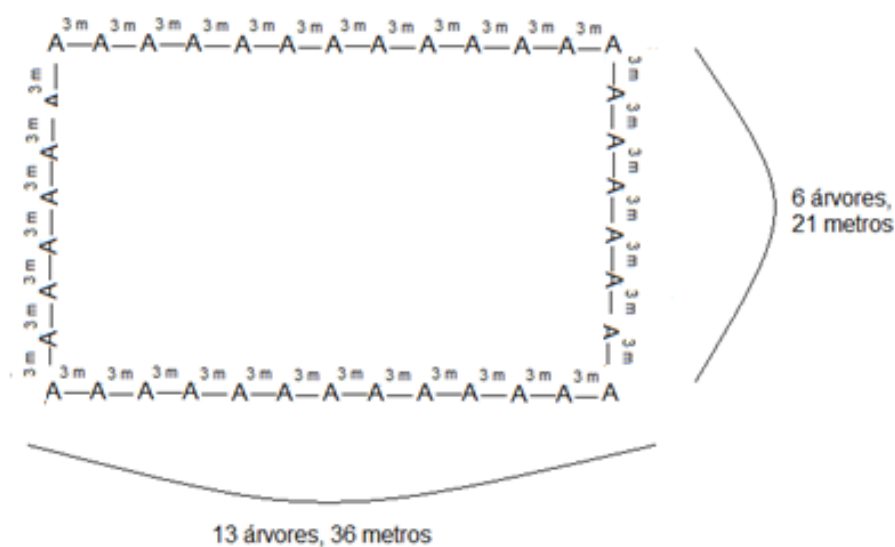
Estratégia de resolução pensada pela professora:

Calculando o máximo divisor comum:

$$\begin{array}{r|l}
 21 & 3 \\
 & 7 \\
 & 1 \\
 \hline
 & 3 \times 7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 36 & 2 \\
 & 18 \\
 & 9 \\
 & 3 \\
 & 1 \\
 \hline
 & 2 \times 2 \times 3 \times 3
 \end{array}$$

$$\text{mdc}(21,36)=3\text{ m}$$

O que significa que devemos ter 3 metros de espaço entre cada árvore plantada. A representação pode ser assim considerada:



Teremos $13 + 13 + 6 + 6 = 38$ árvores.

Formalização:

Número primo:

Dizemos que um número inteiro é primo quando for divisível por 1 e por ele mesmo.

³⁰ Problema retirado de Centurión (1994, p. 143).

Mínimo Múltiplo Comum (m.m.c):

Sejam a , b e c números inteiros não nulos. Dizemos que c é um *múltiplo comum* de a e b se: a divide c ($a|c$) e b divide c ($b|c$). O menor dos múltiplos comuns a a e b é chamado de *mínimo múltiplo comum*.

Máximo Divisor Comum (m.d.c):

Sejam a , b e c números inteiros não nulos, dizemos que c é um *divisor comum* de a e b se: c divide a ($c|a$) e c divide b ($c|b$). O maior dos divisores comuns a a e b é chamado de *máximo divisor comum*.

2º Encontro:**Objetivos do Encontro:**

Inicialmente iremos trabalhar a atividade extraclasse deixada no encontro anterior. Na sequência, estudar as operações fundamentais com números, o conceito de divisibilidade e o conceito de padrão, e investigar as operações fundamentais com os números racionais. Estudar suas diferentes interpretações: divisão, fração, números decimais e razão (proporção e porcentagem), também fazem parte das atividades deste encontro.

Atividade³¹ 1

Ivete decidiu dar a maior parte de sua coleção de livros de bolso. Sua coleção é composta de menos de 100 livros. Ela está planejando dar a metade da coleção para o hospital e, em seguida, manter seus 10 livros favoritos. Ela vai dividir os livros restantes igualmente entre quatro amigos. Quantos livros podem estar na coleção de Ivete? Encontre todas as respostas possíveis.

Conteúdos Específicos:

Operações fundamentais com os números naturais. Divisibilidade. Padrões.

Objetivos Específicos:

Investigar as possíveis soluções do problema. Discutir o conceito de divisibilidade. Discutir o conceito de padrão. Verificar o desenvolvimento de estratégias por parte dos alunos para resolver o problema. Investigar seus conhecimentos prévios a respeito das operações fundamentais com os números naturais.

Estratégias de resolução pensadas pela professora:**1) Tabela de valores:**

³¹ Problema adaptado de Krulick e Rudnick (2005, p. 34).

Inicialmente podemos pensar na construção de uma tabela de valores que satisfaça o problema. Para isso, começamos com um valor qualquer menor do que 100 e, a partir disso, buscamos padrões:

Número de Livros	Doados ao Hospital	Livros da Ivete	Livros para 4 amigos
90	45	10	35*
28	14	10	4
32	16	10	6*
36	18	10	8
40	20	10	10*
44	22	10	12
48	24	10	14*
52	26	10	16
56	28	10	18*
60	30	10	20
64	32	10	22*
68	34	10	24
72	36	10	26*
76	38	10	28
80	40	10	30*
84	42	10	32
88	44	10	34*
92	46	10	36
96	48	10	38*

* O total de livros a ser distribuído para os amigos não é múltiplo de 4!

Logo após a primeira tentativa, o número 90, é possível verificar que os números devem ser múltiplos de 4. Sendo assim, vamos escrevê-los: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92 e 96. Todos os múltiplos satisfazem o problema? Não, pois 4, 8, 12, 16, 20 e 24 são menores do que a metade dos livros mais 10, não restando livros para dividir para os 4 amigos. Devemos testar os demais múltiplos e verificar quais satisfazem a relação.

Sendo assim, através da tabela, verificamos que Ivete pode ter 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, ou 92 livros.

2) Algebricamente:

Seja l o número de livros de Ivete. Então, $\frac{l}{2}$ é o total de livros doado ao hospital e como Ivete reteve para si 10 livros, $\frac{l}{2} - 10$ é o restante de livros a serem distribuídos para os 4 amigos. Assim,

$$\frac{\frac{l}{2} - 10}{4} = x$$

Onde x é o número de livros que cada amigo deverá receber.

$$\frac{\frac{l}{2} - 10}{4} = x \rightarrow \frac{\frac{l-20}{2}}{4} = x \rightarrow \frac{l-20}{2} = 4x \rightarrow l - 20 = 8x.$$

Ou seja, que $l-20$ tem que ser divisível por 8. A partir daqui, o aluno deve considerar todos os múltiplos de 8 para obter todos os valores possíveis de livros que Ivete deve ter.

$$l - 20 = 8 \rightarrow l = 28$$

$$l - 20 = 16 \rightarrow l = 36$$

$$l - 20 = 24 \rightarrow l = 44$$

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

$$l - 20 = 72 \rightarrow l = 92$$

Formalização:

“Dados dois números naturais a e b com $a \neq 0$, diremos que a divide b , escrevendo b/a , quando existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Neste caso, diremos que a é um *divisor* ou um *fator* de b ou, ainda, que b é *múltiplo* de a ” (HEFEZ, 2005, p.30).

Múltiplo de um número é todo número que se obtém multiplicando o número dado por um número inteiro qualquer.

O zero é múltiplo de qualquer número e qualquer número é múltiplo de si próprio.

Divisor de um número é qualquer número inteiro e, no contexto do problema dos livros, um número natural, que o divide em um número exato de vezes.

Um é divisor de todos os números.

Atividade³² 2

Marcos, Pablo, e Jamile são garçons. Eles juntam suas gorjetas, colocando-as em uma jarra grande e, no final do dia de trabalho, cada um deles leva $1/3$ do dinheiro. Um dia ao ir embora Marcos levou $1/3$ do dinheiro do pote. Pablo, não sabendo que Marcos já tinha tomado a sua parte, levou $1/3$ do dinheiro do pote. Jamile, não sabendo que os colegas já haviam pegado suas partes, levou $1/3$ do dinheiro do pote. Restaram R\$16,00 no pote.

Quanto dinheiro tinha no pote antes deles retirarem suas partes?

Conteúdos Específicos:

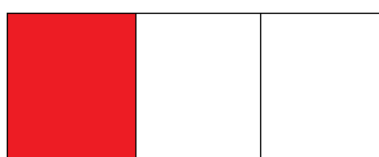
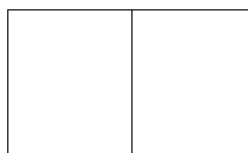
Operações fundamentais com os números racionais. Divisibilidade. Números racionais.

Objetivos Específicos:

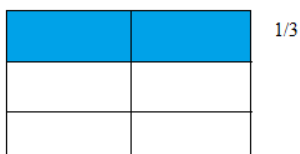
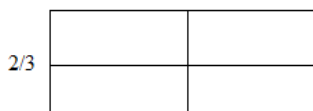
Investigar as possíveis soluções do problema. Discutir o conceito de números racionais. Relacionar parte-todo. Buscar estratégias para a resolução do problema.

Estratégias de resolução pensadas pela professora:**1) Graficamente:**

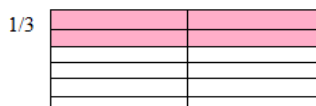
Marcos levou $\frac{1}{3}$ do que havia no pote e restaram $\frac{2}{3}$:

 $\frac{1}{3}$  $\frac{2}{3}$

Destes $\frac{2}{3}$, Pablo retirou $\frac{1}{3}$ e restaram $\frac{2}{3}$ do que sobrou:

 $\frac{1}{3}$  $\frac{2}{3}$

Jamile retirou $\frac{1}{3}$ da nova parte restante:

 $\frac{1}{3}$

Como o que restou equivale a R\$16,00, cada pedaço restante vale R\$2,00. Assim, contando as partes retiradas por cada um dos colegas, temos:

Jamile: 4 partes de R\$ 2,00 = R\$ 8,00. Pablo: 6 partes de R\$ 2,00 = R\$ 12,00. Marcos: 9 partes de R\$ 2,00 = R\$ 18,00.

Somando os valores temos: $8 + 12 + 18 + 16 = 54$. Dentro do pote havia R\$ 54,00.

2) Algebricamente:

Seja D o dinheiro que havia no pote.

Marcos: $\frac{1}{3} D$, restaram $\frac{2}{3} D$.

Pablo: $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} D \right)$, restaram $\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} D \right)$.

Jamile: $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} D \right) \right)$, restaram $\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} D \right) \right)$.

$$\text{Ou seja, } \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right) \right) D = R\$16,00 \rightarrow \frac{8}{27} D = R\$16,00 \rightarrow D = \frac{16,27}{8} = R\$54,00$$

Dentro do pote havia R\$54,00.

Formalização:

O *número racional* é definido como todo número que pode ser escrito na forma a/b onde a e b são números inteiros e b diferente de zero.

Representa-se o conjunto dos Números Racionais pela letra Q , e escreve-se:

$$Q = \left\{ x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0 \right\}.$$

Os números racionais apresentam diferentes personalidades³³: ponto na reta, quociente, fração e medida, números decimais, operador e razão. Do conceito de razão derivam outros conceitos matemáticos como a proporção e a porcentagem.

Atividade³⁴ 3

Mike acabou de comprar uma bicicleta nova. Incluindo 6% de imposto sobre a venda, Mike pagou R\$ 296,80 pela bicicleta. A loja acrescentou R\$ 20,00 ao custo para cobrir o trabalho de montagem, o que deu uma margem de lucro de 40%. Quanto custou a bicicleta para a loja?

Conteúdos Específicos:

Operações fundamentais com os números decimais. Porcentagem. Números decimais.

Objetivos Específicos:

Discutir porcentagem. Números decimais. Investigar a utilização do conceito de porcentagem.

Estratégias de resolução pensadas pela professora:

1) Método inverso:

Inicialmente devemos calcular o valor do imposto sobre a bicicleta. Seja P o preço da bicicleta para Mike. 6% de P pode ser escrito na forma decimal como: $6\%P = \frac{6}{100}P = 0,06P$.

$$P + 0,06P = 296,80 \rightarrow 1,06P = 296,80 \rightarrow P = \frac{296,80}{1,06} = R\$280,00$$

A bicicleta, sem o imposto, custou R\$280,00.

Devemos calcular o lucro da loja que foi de 40%. Chamando o valor da bicicleta de V , temos $40\%V = \frac{40}{100}V = 0,40V$. Sendo assim:

³³ Mais informações em: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N.S.G. **As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas**. In: Bolema, n. 31, p. 79 – 102, 2008.

³⁴ Problema adaptado de Krulick e Rudnick (2005, p. 32).

$$V + 0,4V = 280,00 \rightarrow 1,4V = 280,00 \rightarrow V = \frac{280,00}{1,4} = R\$200,00$$

Assim, $V = R\$200,00$.

Devemos ainda subtrair o valor da montagem, que é cobrada pela loja:

$$R\$200,00 - R\$20,00 = R\$180,00$$

O custo da bicicleta para a loja é de $R\$180,00$.

2) Método Algébrico:

Seja C o custo da bicicleta. Então $(C + R\$20,00)$ será o custo da bicicleta mais o valor da montagem. Sobre esse custo, calculamos o percentual de lucro da loja e posteriormente o imposto sobre o produto:

$$1,06[1,4(C + R\$20,00)] = R\$296,80 \rightarrow 1,06[1,4C + R\$28,00] = R\$296,80 \rightarrow 1,484C + R\$29,68 = R\$296,80$$

$$1,484C = R\$296,80 - R\$29,68 \rightarrow 1,484C = R\$267,12 \rightarrow C = \frac{R\$267,12}{1,484} = R\$180,00$$

E encontramos o custo da bicicleta para a loja, que é de $R\$180,00$.

Formalização:

Todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Escreve-se um número racional $\frac{a}{b}$ na forma de número decimal dividindo o inteiro a pelo inteiro b . Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

1. O número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, é uma decimal exata.

$$\frac{1}{2} = 0,5; \quad \frac{77}{100} = 0,77$$

2. O número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica.

$$\frac{1}{3} = 0,333333 \dots \quad \text{ou} \quad \frac{5}{6} = 0,833333 \dots$$

A porcentagem é um modo de comparar números usando a proporção direta simples, onde uma das razões da proporção é uma fração cujo denominador é 100. Toda razão $\frac{a}{b}$ na qual $b=100$ chama-se porcentagem. Representa-se a porcentagem pelo símbolo % e lê-se: “por cento”. É comum representarmos uma porcentagem na forma decimal, por exemplo,

$$3\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

Atividades³⁵ Extraclasse

1) Ian tem menos de 100 cartões de beisebol em sua coleção. Se ele coloca em pilhas de quatro, sobram três cartões. Se ele colocá-los em pilhas de três ou pilhas de sete, não sobram cartões. Se ele colocá-los em pares, sobra apenas um cartão. Quantos cartões Ian têm?

2) Um tanque contém 800 litros de combustível, dos quais 24% são de álcool e 76% de gasolina. Quantos litros de gasolina devem ser despejados no tanque a fim de que o combustível resultante tenha apenas 20% de álcool? (Admite-se que a capacidade do tanque seja de 1000 litros).

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Como as pilhas de 4 e de pares sobram cartões e as pilhas de 3 e 7 possuem resto zero. Sendo assim, o número que buscamos é múltiplo de 3 e 7, e devemos considerar que Ian possui menos de 100 cartões.

Possibilidades: $3 \times 7 = 21$ (muito menor que 100 cartões)

$3 \times 7 \times 7 = 147$ (passou do total de cartões de Ian)

$3 \times 3 \times 7 = 63$ (candidato a ser o número de cartões de Ian).

Verificando, devemos dividir 63 por 4 e por 2 e analisar os restos que encontraremos:

$$\begin{array}{r} 63 \overline{) 4} \\ - 60 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 63 \overline{) 2} \\ - 62 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \overline{) 7} \\ - 63 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 63 \overline{) 3} \\ - 63 \\ \hline 0 \end{array}$$

Logo, Ian possui 63 cartões.

2) 800 litros dos quais 24% são álcool e 76% gasolina.

$800 \times 0,24 = 192$ litros de álcool.

Os 192 litros de álcool devem representar 20% do tanque, sendo assim, temos:

$$\frac{1}{5}(800 + x) = 192 \rightarrow 800 + x = 960 \rightarrow x = 960 - 800 = 160 \text{ litros.}$$

Devem ser colocados 160 litros de gasolina para que a mistura tenha apenas 20% de álcool, porém, os 800 litros que havia no tanque mais os 160 litros que devem ser colocados não enchem o tanque que possui 1000 litros. Para enchê-lo é necessário colocar mais 40 litros de mistura para manter a proporção.

Os 40 litros devem ter 20% de álcool e 80% de gasolina.

³⁵ Problema 1) traduzido pela autora de Krulick e Rudnick (2005, p. 28).
Problema 2) retirado de Lima et al (2006, p. 23).

$$40 \times 0,2 = 8 \text{ litros de álcool}$$

$$40 \times 0,8 = 32 \text{ litros de gasolina.}$$

Para que o tanque cheio mantenha a proporção de 20% de álcool e 80% de gasolina, devemos adicionar aos 960 litros já existentes, 8 litros de álcool e 32 litros de gasolina.

3º Encontro:

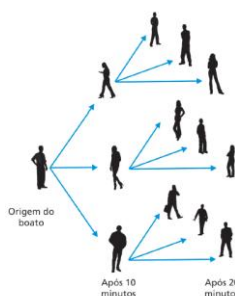
Objetivos do Encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Estender as operações fundamentais: potenciação e radiciação. Relacionar a potenciação com as suas inversas, a radiciação e a logaritmação. Utilizar as unidades de medida e estudar a conversão de medidas de comprimento, área, volume e capacidade.

Atividade³⁶ 1

Pensemos numa situação em que uma pessoa fica sabendo de um boato, não necessariamente verdadeiro, e gasta 10 minutos para contar para os seus três melhores amigos. Imagine que cada um dos três amigos resolve fazer a mesma coisa e 10 minutos depois contam a novidade para três colegas que ainda não a conheciam.

Assim, cada um que recebia a notícia sempre a transmitia para três colegas desinformados, gastando, para isso, 10 minutos.



Tempo (minutos)	Novos alunos que ouvem a fofoca	Representação em forma de potência
10	3	3^1
20	3×3	3^2
30	$3 \times 3 \times 3$	3^3
40		
50		
60		
70		

³⁶ <http://cejarij.cecierj.edu.br/pdf/Matematica_Unidade_08_seja.pdf. > Acesso: 10 de setembro de 2012.

- a) Quantos alunos ficaram sabendo do boato no período entre 20 e 30 minutos?
- b) Quantos alunos ficaram sabendo do boato na primeira meia hora?
- c) Se, na escola onde estudam, há 364 alunos, em quantos minutos todos os alunos ficaram sabendo do boato?

Lembre-se que a quantidade de pessoas que ficam sabendo do boato acumula-se. Por exemplo, a partir do momento que a primeira pessoa conta para outras três, já são quatro pessoas sabendo do boato. No segundo momento, já são $1 + 3 + 9$ e assim sucessivamente.

Conteúdos Específicos:

Operações Fundamentais com os números inteiros. Potenciação. Radiciação.

Objetivos Específicos:

Definir os conceitos de potenciação e radiciação. Operar com potenciação. Estabelecer propriedades da potenciação.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Analisando a tabela:

Tempo (minutos)	Novos alunos que ouvem a fofoca	Representação em forma de potência
10	3	3^1
20	3×3	3^2
30	$3 \times 3 \times 3$	3^3
40	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^4
50	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^5
60	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^6
70	$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^7

Agora respondendo às perguntas:

a) Quantos alunos ficaram sabendo do boato no período entre 20 e 30 minutos?

Observando a tabela temos:

$$3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18 \text{ pessoas.}$$

b) Quantos alunos ficaram sabendo do boato na primeira meia hora?

Analisando a tabela temos o total de alunos que será a soma de quantos alunos sabem desse boato a cada 10 minutos: $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$ pessoas.

c) Se, na escola onde estudam, há 364 alunos, em quantos minutos todos os alunos ficaram sabendo do boato?

$$1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364 \text{ pessoas.}$$

Em apenas 50 minutos, todos os alunos da escola saberiam da fofoca.

Formalização:

De acordo com Caraça (2003, p.19), define-se a potenciação como um produto de fatores iguais:

$$\underbrace{a^n}_{\text{base}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{b}_{\text{potência}}$$

Chama-se a de base, n de expoente e o resultado de potência. Na potenciação, a operação inversa consiste em que dada a potência e um dos dados, base ou expoente, determina o outro.

Para a potenciação, existem duas inversas já que a comutatividade não é válida:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

São operações inversas da potenciação a radiciação e a logaritmação.

Dada a potência e o expoente, para determinar a base utiliza-se a **radiciação**.

$$a = b^n \rightarrow b = \sqrt[n]{a}$$

Definição: a radiciação é a operação pela qual, dado um número $a \geq 0$ e um número $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, se determina um novo número $b = \sqrt[n]{a}$ tal que $a = b^n$.

Dada a potência e a base, para determinar o expoente utiliza-se a **logaritmação**.

$$a = b^n \rightarrow n = \log_b a$$

Definição: a logaritmação é operação por meio da qual, dado um número $0 < a \neq 1$ e um número $b > 1$, se determina um terceiro número $n = \log_b a$ tal que $a = b^n$.

Propriedades da potenciação:

$a = b^n \rightarrow b = \sqrt[n]{a}$	$a^0 = 1$
$a^1 = a$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$
$(-a)^n = \begin{cases} \text{negativo, se } n \text{ ímpar} \\ \text{positivo, se } n \text{ par} \end{cases}$	$(a)^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$1^n = 1$
0^0 indeterminação	

Atividade³⁷ 2

O aquário de João tem a forma de um cubo e seu volume é 125 dm^3 . Quais são as dimensões deste aquário em centímetros?

³⁷ Problema adaptado de Mori e Onaga (1998, p. 21).

Conteúdos Específicos:

Potenciação. Radiciação. Conversão de Medidas.

Objetivos Específicos:

Relacionar as operações de potenciação e radiciação. Conversão de unidades de medida e unidades de volume (análise dimensional).

Estratégias de resolução pensadas pela professora:1) Utilizando as propriedades de potenciação:

Como o aquário do problema possui as três medidas, largura, altura e profundidade iguais pois é um cubo, podemos escrever que se:

$$l = \text{lado do cubo}$$

Volume do cubo: $l \cdot l \cdot l = l^3$

Assim, $l^3 = 125 \text{ dm}^3$.

Fatorando 125, obtemos: $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

Ou seja, $l^3 = 5^3 \text{ dm}^3$, de onde temos, extraindo a raiz cúbica de ambos os termos, que $l = 5 \text{ dm}$.

Como o problema pede a medida em centímetros, temos que $l = 5 \times 10 \text{ cm}$, ou seja, $l = 50 \text{ cm}$.

2) Aplicando a radiciação de forma direta:

$$l^3 = 125 \text{ dm}^3 \rightarrow l = \sqrt[3]{125 \text{ dm}^3} \rightarrow l = \sqrt[3]{5^3 \text{ dm}^3} = 5 \text{ dm}.$$

Como o problema pede a medida em centímetros, temos $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$ e, que $l = 5 \times 10 \text{ cm}$, ou seja, $l = 50 \text{ cm}$.

Formalização:**Propriedades da Radiciação:**

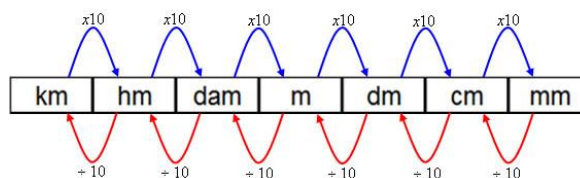
$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a \cdot x}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\frac{a}{x}}, \quad x \neq 0$	$\sqrt[n]{a^x} = \sqrt[\frac{n}{m}]{\frac{x}{a^m}}$

Unidades de medida

De acordo com o Sistema Internacional de Medidas, o metro (m) é considerado a principal unidade de medida e possui múltiplos (km, hm, dam...) e submúltiplos (dm, cm, mm...).

Para fazer a conversão do metro para os seus múltiplos, devemos multiplicar por 10 e para os submúltiplos, devemos dividir por 10.

Figura 90 – Medida de Unidade de Comprimento.



Fonte³⁸: Página da internet.

Unidades de Medida de área:

Quilômetro quadrado	Hectômetro quadrado	Decâmetro quadrado	Metro quadrado	Decímetro quadrado	Centímetro quadrado	Milímetro quadrado
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
$1 \times 10^6 \text{ m}^2$	$1 \times 10^4 \text{ m}^2$	$1 \times 10^2 \text{ m}^2$	1 m^2	$1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$	$1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	$1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

Fonte: Elaborada pela autora.

Unidades de Medida de Volume

Quilômetro cúbico	Hectômetro cúbico	Decâmetro cúbico	Metro cúbico	Decímetro cúbico	Centímetro cúbico	Milímetro cúbico
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
$1 \times 10^9 \text{ m}^3$	$1 \times 10^6 \text{ m}^3$	$1 \times 10^3 \text{ m}^3$	1 m^3	$1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$	$1 \times 10^{-6} \text{ m}^3$	$1 \times 10^{-9} \text{ m}^3$

Fonte: Elaborada pela autora.

Atividade³⁹ 3

Devido à curvatura da Terra, a distância máxima D , que você pode ver do último piso de um edifício cuja altura é h , pode ser estimada pela fórmula:

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

Onde $r = 3960$ milhas é o raio da terra e D e h também são medidos em milhas. Qual a distância que se pode ver do mirante da Torre CN em Toronto, a 1135 pés acima do solo?



³⁸Figura retirada do site < <http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/unidades-medida-comprimento.htm> > Acesso: 10 de outubro de 2012.

³⁹Problema retirado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 23).

Conteúdos Específicos:

Medidas. Radiciação. Propriedades da Radiciação. Regra de três.

Objetivos Específicos:

Discutir a necessidade de um sistema universal de medidas. Estudar as propriedades de radiciação. Fazer uso de calculadora. Utilizar a regra de três para obter grandezas lineares de medida.

Estratégias de resolução pensadas pela professora:1) Algebricamente:

Primeiramente devemos conhecer as unidades de medida do problema:

$$1 \text{ pé} \cong 30,48 \text{ cm} \quad e \quad 1 \text{ milha} = 5280 \text{ pés} = 160.934,4 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad 1.609,34 \text{ m}$$

Transformando 1135 pés em milhas, como dado no problema:

milhas	pés
1	5280
x	1135

Como é proporcional, temos que:

$$\frac{1}{x} = \frac{5280}{1135}$$

De onde temos que:

$$x = \frac{1135 \text{ pés} \cdot 1 \text{ mi}}{5280 \text{ pés}}$$

$$x \cong 0,2149 \text{ milhas}$$

Fazendo a substituição de valores e as operações necessárias para chegar à solução.

$$D = \sqrt{2(3960) \cdot 0,2149 + (0,2149)^2} = \sqrt{(7.920)(0,2149) + 0,04618}$$

$$D = \sqrt{1.702,008 + 0,04618} = \sqrt{1.702,05418}$$

$$D \cong 41,2555 \text{ milhas}$$

2) Utilizando a calculadora:

Nesse caso o aluno pode, utilizando a memória de uma calculadora científica, obter uma aproximação para o valor dessa distância.

Formalização:

Tabela de medidas inglesas:

1 polegada	2,54 centímetros
1 pé=12 polegadas	30,4799 centímetros
1 milha=5280 pés	1,609344 quilômetros

Fonte: Elaborada pela autora.

Regra de três:

Utilizada em situações de proporcionalidade onde são conhecidos três valores e deseja-se obter o quarto valor. A regra de três é muito útil para o cálculo de conversão de grandezas: velocidade, massa, volume, comprimento, área. A regra de três pode ser considerada diretamente proporcional ou inversamente proporcional.

Atividade Extraclasse⁴⁰

1) Veja se você consegue ler em voz alta o texto abaixo em menos de 30 segundos:

"...como, por exemplo, o nosso Sistema Solar que tem um diâmetro aproximado de 100000000000 metros. E isso é muito pequeno se comparado com o tamanho da Galáxia onde vivemos com seus incríveis 100.000.000.000.000.000.000 metros de diâmetro. No entanto, ao lembrarmos que o Universo visível deve ter cerca de 100.000.000.000.000.000.000.000 metros de diâmetro, vemos que tamanhos assombrosos estão incluídos no estudo da Astronomia. Daí pensamos, é melhor estudar biologia pois a molécula do DNA tem apenas 0,0000001 metro, muito mais fácil de lidar. O problema é que a astronomia não é uma profissão perigosa enquanto que a biologia... Imagine que os biólogos têm a coragem de lidar com vírus que medem apenas 0,000000001 metro e são terrivelmente mortais. E se, por distração, um biólogo deixar um desses vírus cair no chão do laboratório? Nunca mais irá encontrá-lo!....".

Veja agora, o mesmo texto, desta vez escrito com a notação científica:

"...como, por exemplo, o nosso Sistema Solar que tem um diâmetro aproximado de 10^{11} metros. E isto é muito pequeno se comparado com o tamanho da Galáxia onde vivemos com seus incríveis 10^{20} metros de diâmetro. No entanto, ao lembrarmos que o Universo visível deve ter cerca de 10^{26} metros de diâmetro, vemos que tamanhos assombrosos estão incluídos no estudo da Astronomia. Daí pensamos, é melhor estudar biologia pois a molécula do DNA tem apenas 10^{-7} metros, muito mais fácil de lidar. O problema é que a astronomia não é uma profissão perigosa enquanto que a biologia... Imagine que os biólogos têm a coragem de lidar com vírus que medem apenas 10^{-9} metros e são terrivelmente mortais. E se, por uma distração, um biólogo deixa um destes vírus cair no chão do laboratório? Nunca mais irá encontrá-lo!....".

⁴⁰ Problema 1) retirado de Marcon e Noguti (2009, p.14). Problema 2) retirado de Iezzi e Murakami (1977, p.49A).

Atividade:

Os números que assustam (1998):

- I. 5,68 bilhões de pessoas vivem hoje no planeta.
- II. 5,7 bilhões de pessoas eram estimadas para viver no planeta hoje.
- III. 90 milhões nascem a cada ano.
- IV. 800 milhões passam fome.
- V. 8,5 é a média de filhos por mulher na Ruanda.
- VI. 1,4% da renda mundial está nas mãos dos 20% mais pobres.
- VII. 35 milhões de pessoas migraram do hemisfério Sul para o Norte nas últimas três décadas.

De acordo com o texto os números representam a quantidade de pessoas que vivem no planeta, nascem a cada ano e passam fome são, respectivamente:

- a) 568.10^8 ; 9.10^6 ; 8.10^6
- b) $5,68.10^8$; 9.10^6 ; 8.10^6
- c) 568.10^7 ; 9.10^7 ; 80.10^7
- d) $56,8.10^9$; 90.10^6 ; 8.10^9
- e) 568.10^9 ; 90.10^6 ; 80.10^6

2) Utilize as propriedades de radiciação para:

- a) Mostrar que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$
- b) Mostrar que existem a e b racionais tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$

3) Tereza e Júlia correm numa pista à mesma velocidade. Tereza começa primeiro. Quando ela tinha acabado a 9ª volta, Júlia acabara a 3ª. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas tinha dado Tereza?

4) Se com £3,00 posso comprar U\$2,00, quantos dólares posso comprar com £14,00?

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Deve-se escrever as grandezas e utilizar da notação científica para obter a resposta:

$$5,68 \text{ bilhões} \rightarrow 5.680.000.000 = 568 \times 10^7$$

$$90 \text{ milhões} \rightarrow 90.000.000 = 9 \times 10^7$$

$$800 \text{ milhões} \rightarrow 800.000.000 = 80 \times 10^7$$

Letra c)

2) a) Mostrar que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$

Elevando ao quadrado ambos os lados, temos:

$$\left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}\right)^2 = (1 + \sqrt{3})^2 \rightarrow 4 + 2\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow$$

$$4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$$

b) Mostrar que existem a e b racionais tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$

Elevando ao quadrado ambos os lados, temos:

$$\left(\sqrt{18 - 8\sqrt{2}}\right)^2 = (a + b\sqrt{2})^2 \rightarrow 18 - 8\sqrt{2} = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2, \text{ de onde temos que: } 18 = a^2 + 2b^2$$

e $-8\sqrt{2} = +2ab\sqrt{2}$. Temos, portanto, um sistema de suas equações a duas incógnitas,

$$\begin{cases} 18 = a^2 + 2b^2 \\ -8\sqrt{2} = +2ab\sqrt{2} \end{cases}$$

Trabalhando com a segunda equação, temos:

$$-8\sqrt{2} = +2ab\sqrt{2} \quad (\div \text{ os lados por } \sqrt{2}) \rightarrow -8 = 2ab \rightarrow -4 = ab \rightarrow a = \frac{-4}{b}$$

Voltando à primeira equação, por substituição, teremos:

$$18 = a^2 + 2b^2 \rightarrow 18 = \left(\frac{-4}{b}\right)^2 + 2b^2 \rightarrow 18 = \frac{16}{b^2} + 2b^2$$

$$18 = \frac{16}{b^2} + 2b^2 \rightarrow 18 = \frac{16 + 2b^4}{b^2}$$

Ou ainda,

$$18b^2 = 16 + 2b^4 \rightarrow 2b^4 - 18b^2 + 16 = 0$$

É uma equação biquadrada e, fazendo uma substituição de variáveis $y = b^2$, teremos:

$$2y^2 - 18y + 16 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, teremos:

$$y = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16}}{2 \cdot 2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 128}}{4} = \frac{18 \pm \sqrt{196}}{4} = \frac{18 \pm 14}{4}$$

Levando a:

$$y' = \frac{18+14}{4} = 8 \text{ e } y'' = \frac{18-14}{4} = 1$$

Após determinar as raízes da equação de segundo grau, devemos voltar à mudança de variável realizada para resolver a equação biquadrada, a fim de obter as soluções do problema:

$$\text{Para } y' = 8, \text{ temos: } 8 = b^2 \rightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{Para } y'' = 1, \text{ temos: } 1 = b^2 \rightarrow b = \pm 1$$

Conhecendo as soluções da equação biquadrada, voltamos ao sistema de equações para determinar o valor de a . Sabendo que devemos encontrar a e b racionais, a primeira solução $y' = 8$ não será solução do sistema, restando avaliar a solução $y'' = 1$:

Para $b = \pm 1$:

$$a = \frac{-4}{-1} = 4 \text{ e } a = \frac{-4}{1} = -4$$

Sendo assim, obtemos como solução desse problema, os racionais, $a = \pm 4$ e $b = \pm 1$.

3) Teresa estava na 9ª volta quando Júlia estava na 3ª volta. Quando Júlia completou 15 voltas, Teresa terá completado 21 voltas já que as duas corriam à mesma velocidade e a diferença entre elas se mantém constante em 6 voltas.

4) Para esse problema utilizamos uma regra de três simples:

$$\begin{array}{ccc} \pounds & & \text{US\$} \\ 3 & \text{————} & 2 \\ 14 & \text{————} & x \end{array}$$

Desta forma, $3x = 14.2 \rightarrow 3x = 28 \rightarrow x = \frac{28}{3}$

x corresponde à quantia em dólares que posso comprar, ou seja, US\$9,33.

OBS: Nesse problema a professora não levou em consideração a cotação das moedas envolvidas.

4º Encontro:

Objetivos do Encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, ampliar os conceitos matemáticos através da Álgebra, e introduzir a ideia de variável. Estudar as expressões algébricas, monômios e polinômios. Operar com monômios e polinômios. Fatoração e Produtos notáveis.

Atividade⁴¹ 1

Observe a sequência de retângulos formados por palitos como a que está abaixo:



- Quantos palitos são necessários para formar uma fileira de 10 quadrados?
- E para formar uma fileira de 100 quadrados?
- É possível escrever uma forma geral para as fileiras de palitos?

⁴¹ Problema adaptado de Bigode, (2000, p. 113).

Conteúdos Específicos:

Expressões Algébricas. Monômios e polinômios.

Objetivos Específicos:

Discutir o conceito de variável e sua necessidade na matemática. Identificar os monômios como expressões algébricas em que há multiplicações entre letras e números. Identificar polinômios como soma de monômios.

Possíveis formas de Resolução do Problema:

Tabela de dados:

Número de quadrados	Número de palitos
1	4
2	7
3	10
...	...
10	?
100	?

Fonte: Elaborada pela autora.

Olhando a tabela, vemos que existe uma regularidade:

1º Termo: $P_1 = 4$

2º Termo: $P_2 = 7 = 4 + 3$ ($P_2 = P_1 + 3$)

3º Termo: $P_3 = 10 = 7 + 3$ ($P_3 = P_2 + 3$)

...

9º Termo: $P_9 = P_8 + 3$

10º Termo: $P_{10} = P_9 + 3$

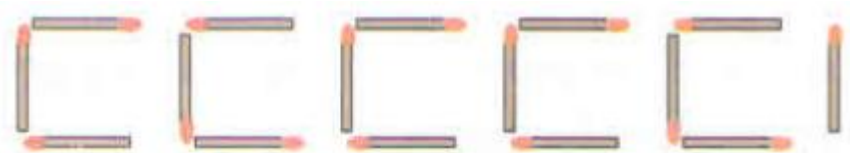
...

99º Termo: $P_{99} = P_{98} + 3$

100º Termo: $P_{100} = P_{99} + 3$

Nesta regularidade os termos são escritos a partir de seu antecessor, o que não ajuda na hora de obter o valor de P_{10} e P_{100} . É necessário que se escreva de outra forma a sequência de quadrados de palito.

Figura 91 - Sequência de palitos.



Fonte: Bigode (2000, p. 117)

Se considerarmos que cada quadrado é composto por 3 palitos e o último quadrado possui 3 palitos mais 1, como na figura, podemos escrever:

$$P_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4 \text{ palitos}$$

$$P_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7 \text{ palitos}$$

$$P_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10 \text{ palitos}$$

$$P_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 15 + 1 = 16 \text{ palitos (figura 3)}$$

...

a) Para 10 quadrados temos:

$$P_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 30 + 1 = 31 \text{ palitos.}$$

b) Para 100 quadrados temos:

$$P_{100} = 3 \cdot 100 + 1 = 300 + 1 = 301 \text{ palitos.}$$

c) De forma geral, temos:

$$P_n = 3n + 1$$

Formalização:

As **expressões algébricas** são formadas por números e letras ou somente letras. As letras que compõem as expressões algébricas são denominadas variáveis. Ao escrevermos as expressões algébricas apenas com as letras, estamos admitindo que ela esteja sendo multiplicada pelo número *um*.

As **variáveis** são expressas por letras que podem representar qualquer elemento de um conjunto de números.

Atividade⁴² 2

Nas estantes que faz, além dos R\$30,00 pelo carro de entrega, Luciano cobra R\$8,00 por metro quadrado da madeira que efetivamente usa. Quanto cobrará por uma estante que tem duas tábuas verticais laterais de x metros de comprimento e quatro prateleiras de y metros de comprimento, todas com largura de 40 cm?

Conteúdos Específicos:

Expressões Algébricas. Monômios. Polinômios. Medidas.

Objetivos Específicos:

Trabalhar monômios como expressões algébricas. Escrever um polinômio como soma de monômios.

⁴² Problema adaptado de Barroso (2007, p. 64).

Estratégia de resolução pensada pela professora:

Para resolver o problema, iniciamos escrevendo, na forma de monômios, as partes que compõem a estante: duas laterais e quatro prateleiras retangulares.

Altura da estante: x metros

Largura da estante: y metros

Profundidade da estante: $0,40$ metros.

Laterais retangulares:

As laterais têm x metros por $0,40$ metros.

$$2. x m. 0,40 m = 0,8xm^2$$

Prateleiras:

A estante possui 4 prateleiras de y metros por $0,40$ metros.

$$4. y m. 0,40 m = 1,6ym^2$$

Para finalizar o problema, devemos responder quanto será cobrado pela estante. Como a estante é composta por laterais e prateleiras e, além disso, é cobrado o carrinho, a expressão que define o preço da estante é um polinômio dado por:

$$V = (0,8x + 1,6y). 8 + 30$$

Formalização:

Os monômios são expressões algébricas em que há apenas multiplicação entre números e letras, e as letras possuem apenas expoentes naturais. Identificamos nos monômios duas partes: o coeficiente (parte numérica) e a parte literal (variáveis). Monômios que possuem a mesma parte literal são chamados de monômios semelhantes.

Os polinômios são uma soma finita de monômios. Definimos um polinômio como uma expressão da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são números reais e n é um inteiro não negativo. Se $a_n \neq 0$, então o polinômio é de grau n .

Operações com monômios:

Para efetuar a adição algébrica de monômios semelhantes, adicionam-se os coeficientes e mantém-se a parte literal.

$$5xy + 6xy = (5 + 6)xy = 11xy$$

Para a multiplicação de monômios, multiplica-se coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

$$2x. 7xy = (2.7)(x. xy) = 14x^2y$$

Para a divisão de monômios, com divisor diferente de zero, divide-se coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

$$\frac{10xz}{2x} = \frac{10}{2} \frac{xz}{x} = 5z$$

Para a potência de monômios, elevam-se o coeficiente e cada fator da parte literal à potência dada.

$$(3xyz)^2 = 3^2 x^2 y^2 z^2 = 9x^2 y^2 z^2$$

Operações com polinômios:

Para a adição ou subtração de polinômios devemos reduzir os termos semelhantes.

$$(3x + 5x^2) - (12y + 2x) = 5x^2 - 12y + x$$

Para multiplicar dois polinômios, multiplicamos cada termo de um dos polinômios por todos os termos do outro, adicionando os novos termos obtidos. Utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$(3x + 5x^2) \cdot (12y + 2x) = (3x)(12y + 2x) + (5x^2)(12y + 2x) = 36xy + 6x^2 + 60x^2y + 10x^3$$

Para dividir polinômios usamos o algoritmo da divisão de Euclides:

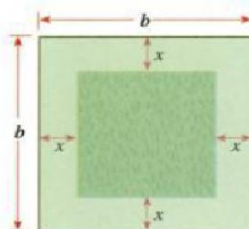
Figura 92 – Algoritmo da Divisão de Euclides

$$\begin{array}{r}
 12x^3 + 4x^2 - 8x \quad \bigg| \quad 4x \\
 -12x^3 \\
 \hline
 0 + 4x^2 - 8x \\
 -4x^2 \\
 \hline
 0 - 8x \\
 +8x \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Fonte: Elaborada pela autora.

Atividade⁴³ 3

A cada semana corta-se o pasto das margens de um terreno quadrado de um estacionamento. O resto do terreno permanece intacto para que sirva de *habitat* de pássaros e outros pequenos animais. O terreno mede b metros por b metros e a margem podada é de x metros de largura, como mostra a figura:



- Explique porque a área da parte podada é dada por $b^2 - (b - 2x)^2$
- Trabalhe a expressão encontrada na letra a) e mostre que a área da parte podada também pode ser escrita como $4x(b - x)$.

⁴³ Problema retirado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 33).

Conteúdos Específicos:

Expressões Algébricas. Fatoração de polinômios. Produtos Notáveis. Área de figura plana.

Objetivo Específico:

Relacionar as áreas interna e externa do problema, identificando os polinômios e suas fatorações.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

a) Relacionando as áreas:

b^2 = área do quadrado todo

$(b - 2x)^2$ = área do quadrado interno

Para obtermos a área total que deve ser podada temos:

$$b^2 - (b - 2x)^2$$

b)

$$\begin{aligned} b^2 - (b - 2x)^2 &= b^2 - [(b - 2x) \cdot (b - 2x)] = b^2 - [b^2 - 2bx - 2bx + 4x^2] \\ &= b^2 - b^2 + 4bx - 4x^2 = 4bx - 4x^2 = 4x(b - x) \end{aligned}$$

Formalização:**Produtos notáveis:**

Alguns produtos apresentam regularidades em seus resultados. São eles:

O quadrado da soma de dois termos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O quadrado da diferença de dois termos:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

O produto da soma pela diferença de dois termos:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

O cubo da soma de dois termos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

O cubo da diferença de dois termos:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Fatorar um polinômio é escrevê-lo na forma de um produto de dois ou mais polinômios.

Formas de fatorar um polinômio:

➤ Colocar um fator comum em evidência:

$$3a^2 + 3ab = 3a(a + b)$$

➤ Agrupamento:

$$x^2 + xy + x + y = x(x + y) + (x + y) = (x + y)(x + 1)$$

➤ Trinômio quadrado perfeito:

Para $x^2 + 10x + 25$, temos que x^2 é o quadrado de x ; $10x$ é igual ao dobro do produto de x e 5; e que 25 é o quadrado de 5; ou seja, $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

➤ Diferença de dois quadrados:

$$(x - 4)(x + 4) = x^2 - 16$$

➤ Soma ou diferença de dois cubos:

$$(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 - xy + y^2)$$

Atividade Extraclasse⁴⁴

1. Fatore as expressões abaixo:

- a) $12x^3 + 18x$
- b) $5ab - 8abc$
- c) $4x^2 - 25$
- d) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$
- e) $y^2 - 8y + 15$

2. Simplifique as expressões:

a) $\frac{x^7 + x^5 + x^3}{x^4 + x^2 + 1}$

b) $\frac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 3}$

c) $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$

3. Escreva uma forma geral para obter números pares e ímpares.

4. Prove que a soma de números pares é um número par. E que a soma de números ímpares também é um número par.

5. Prove que o produto de números pares é um número par.

6. Prove que o produto de números ímpares é um número ímpar.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

- 1) a) $12x^3 + 18x = 6x(2x^2 + 3)$
- b) $5ab - 8abc = ab(5 - 8c)$
- c) $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$
- d) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 = 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)$
- e) $y^2 - 8y + 15 = (y - 5)(y - 3)$

⁴⁴ Problema adaptado de Bigode (2000, p. 194).

2)

$$\frac{x^7 + x^5 + x^3}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^3(x^4 + x^2 + 1)}{x^4 + x^2 + 1} = x^3$$

$$\frac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 3} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = x^2$$

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)} = x - 2$$

3) Pares: $2n$, $n > 0$.Ímpares: $2n + 1$, $n > 0$ ou $2n - 1$, $n > 1$ 4) Sejam $2n_1$ e $2n_2$ números pares, então: $2n_1 + 2n_2 = 2(n_1 + n_2)$ que é um número par.Sejam $2n_1 + 1$ e $2n_2 + 1$ números ímpares, então: $(2n_1 + 1) + (2n_2 + 1) = 2(n_1 + n_2) + 1 + 1 = 2(n_1 + n_2) + 2 = 2[(n_1 + n_2) + 1]$ que é um número par.5) Sejam $2n_1$ e $2n_2$ números pares, então: $(2n_1)(2n_2) = 2(2n_1n_2)$ que é um número par.6) Sejam $2n_1 + 1$ e $2n_2 + 1$ números ímpares, então: $(2n_1 + 1)(2n_2 + 1) = 4(n_1n_2) + 2n_1 + 2n_2 + 1 = 2(2n_1n_2) + 2n_1 + 2n_2 + 1 = 2(2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1)$ que é um número ímpar.**5º Encontro:****Objetivos do Encontro:**

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência estudar equações lineares e quadráticas. A obtenção da solução de uma equação e a resolução de sistemas de equações também serão trabalhadas neste encontro.

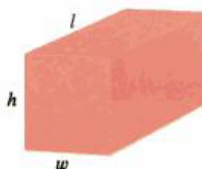
Atividade⁴⁵ 1

1) Noemi tem certa quantia em um banco. Sua irmã Alice tem R\$ 500,00 a mais. Juntas, elas têm R\$ 3.000,00. Quanto tem Noemi? Quanto tem Alice?

⁴⁵ Problema 1) retirado de Dante (2005, p. 216), e Problema 2) traduzido de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 46)

2) A área de superfície total A da caixa abaixo pode ser obtida através da soma das superfícies determinadas pela altura h , da largura w e da profundidade l como

$$A = 2lw + 2lh + 2wh$$



Escreva w em termos das outras variáveis da equação.

Conteúdos Específicos:

Equação linear. Solução de uma equação linear. Determinação de uma variável em termos de outras.

Objetivos Específicos:

Introduzir e discutir as equações lineares. Determinação de solução de uma equação. Determinar uma variável em termos de outras.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Seja x a quantia de Noemi, então Alice possui $x + R\$500,00$.

Para resolver o problema devemos considerar que as duas juntas possuem R\$ 3.000,00:

$$x + (x + R\$500,00) = R\$3.000,00$$

$$R\$(2 \cdot x + 500) = R\$(3.000)$$

$$2 \cdot x = 3.000 - 500$$

$$2x = 2.500$$

$$x = \frac{2.500}{2} = R\$1.250,00$$

Alice possui $R\$1.250,00 + R\$500,00 = R\$1.750,00$. Noemi possui R\$1.250,00 reais e Alice possui R\$1.750,00.

2) Dada a equação $A = 2lw + 2lh + 2wh$, devemos isolar a variável w em função das demais variáveis:

$$A = 2lw + 2lh + 2wh = 2(lw + wh) + 2lh = 2w(l + h) + 2lh$$

$$A = 2w(l + h) + 2lh$$

$$A - 2lh = 2w(l + h)$$

$$\frac{A - 2lh}{2(l + h)} = w$$

$$w = \frac{A - 2lh}{2l + 2h}, \text{ sendo que } 2l + 2h \neq 0 \rightarrow l \neq -h.$$

Formalização:

Uma equação é uma igualdade entre duas expressões matemáticas que possui pelo menos um valor desconhecido. Quando trabalhamos com equações, a variável é chamada de *incógnita*, que significa um *valor desconhecido*.

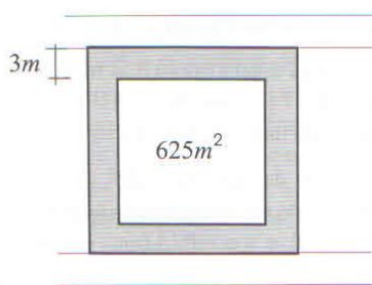
Uma equação linear de uma variável é uma equação da forma $y = ax + b$, onde a e b são números reais e x é a variável (STEWART, REDLIN E WATSON, 2007, p.45).

A solução de uma equação linear, quando possível, é obtida através do isolamento da variável.

Atividade⁴⁶ 2

1) A diferença entre dois números é 3. Aumentando cada um desses números 5 unidades, o seu produto aumentará 270 unidades. Determine a soma desses números.

2) Um terreno de forma quadrada foi reduzido, como na figura abaixo, para dar lugar a uma calçada com 3 m de largura. No final, sua área passou a ser de 625 m^2 . Qual era a medida do lado do quadrado original?

**Conteúdos Específicos:**

Sistema de equações lineares. Equações quadráticas. Geometria. Área de figura plana.

Objetivos Específicos:

Resolver sistema de equações lineares. Estudar as equações quadráticas. Solução da equação quadrática.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Sejam x e y os números dados e a diferença entre eles é escrita como: $x - y = 3$.

Aumentando em 5 unidades cada número e efetuando o seu produto teremos:

$$(x + 5). (y + 5) = 270 + xy$$

Agora temos um sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ (x + 5). (y + 5) = 270 + xy \end{cases}$$

Primeiramente vamos efetuar a multiplicação dos termos da segunda equação:

$$xy + 5x + 5y + 25 = 270 + xy$$

⁴⁶ Problema 1) retirado de Marcon e Noguti (2009, p. 16). Problema 2) retirado de Lima et al (2006, p. 33).

Cancelando e adicionando termos semelhantes temos:

$$5x + 5y = 245$$

Por substituição de $x = y + 3$ temos:

$$5(y + 3) + 5y = 245$$

$$5y + 15 + 5y = 245$$

$$10y + 15 = 245$$

$$10y = 230 \rightarrow y = 23$$

Devemos obter o valor de x que satisfaz as equações. Se $x = y + 3$, substituindo o valor já determinado de y , temos:

$$x = 23 + 3 = 26$$

O problema pede a soma dos dois números, sendo assim:

$$x + y = 23 + 26 = 49$$

A soma dos dois números é 49.

2) Consideremos que x represente a medida do lado original do quadrado. Após a redução de 3 m em cada lado, chega-se ao lado do quadrado menor que é $(x - 6)$ e podemos escrever sua área como:

$(x - 6)^2 m^2 = 625 m^2$. Sendo assim, podemos resolver de duas maneiras:

a) Mantendo a equação na forma:

$$(x - 6)^2 m^2 = 625 m^2 \rightarrow \sqrt{(x - 6)^2} = \sqrt{625}$$

$$x - 6 = \pm 25$$

$$x_1 = 25 + 6 = 31 m$$

$$x_2 = -25 + 6 = -19 m$$

Como $x_2 = -19 m$ não pode ser a medida do lado do quadrado inicial, a solução que satisfaz o problema é $x_1 = 31 m$, ou seja, inicialmente o quadrado possuía 31 m de lado.

b) Expandindo a equação $(x - 6)^2 m^2 = 625 m^2$ em:

$$x^2 - 12x + 36 = 625$$

$$x^2 - 12x - 589 = 0$$

Para essa segunda forma, podemos fazer uso da fórmula geral para obtenção de raízes da equação quadrática, (conhecida no Brasil como Fórmula de Báskara):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.(-589)}}{2.1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 2356}}{2}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{2500}}{2} = \frac{12 \pm 50}{2}$$

$$x_1 = \frac{12 + 50}{2} = \frac{62}{2} = 31 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{12 - 50}{2} = \frac{-38}{2} = -19 \text{ m}$$

Da mesma forma, a resposta que satisfaz as equações é $x_1 = 31 \text{ m}$.

Formalização:

Quando resolvemos sistemas de equações queremos determinar soluções simultâneas de equações. Para isso, podemos utilizar alguns métodos para obter essas soluções: método da comparação, método da substituição e método da adição ou eliminação.

- a) Método da comparação: nesse método, isolamos a mesma variável nas equações e depois fazemos a igualdade entre elas, obtendo, por fim, uma das variáveis e, por substituição em qualquer equação, a outra variável.
- b) Método da substituição: determinamos em uma das equações, o valor de uma das variáveis e depois a substituímos na outra equação.
- c) Método da adição ou eliminação: multiplicamos as equações por números tais que, quando somadas, uma das variáveis desapareça. Posteriormente é feita a substituição da variável encontrada em qualquer equação do sistema.

Uma equação polinomial quadrática (ou de 2º grau) é uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

A solução geral de uma equação polinomial quadrática é dada pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$$

Em um sistema de equações a(s) solução (ões) encontrada (s) deve (m) satisfazer todas as equações do sistema.

Atividade Extraclasse⁴⁷

1) Resolva as equações :

- a) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = 1$
- b) $2x - (x - 1) = x + 1$
- c) $3x + 5 = x + 17$
- d) $x - 1 = \sqrt{3x + 15}$
- e) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

2) Contração de Vigas de Concreto - Como são conjuntos de concreto, encolhem quanto maior o teor de água e mais baixa será a contração. Se uma viga de concreto tem um conteúdo $w \text{ kg/m}^3$, então sofrerá contração de acordo com um fator

⁴⁷ Problema 1) retirado de Lima et al (2006, p. 29 , 48 e 49). Problema 2) retirado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 56)

$$S = \frac{0,032w - 2,5}{10.000}$$

Onde S é a fração de longitude da viga original que desaparece devido à contração.

a) Uma viga de $12,025m$ de comprimento é produzida com concreto que contém $\frac{250kg}{m^3 \text{ de água}}$. Qual é o fator de contração S? Quanto medirá o comprimento da viga quando secar?

b) Uma viga mede $10,014m$ de comprimento quando produzida. Queremos que se contraia a $10,009m$, por isso o fator de contração deve ser $S = 0,00050$. Que quantidade de água proporcionará esta contração?

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1)

$$a) \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = 1 \rightarrow 2x - 4 + 3x + 3 = x^2 - x - 2 \rightarrow x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{40}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{10}}{2} = 3 + \sqrt{10}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{40}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{10}}{2} = 3 - \sqrt{10}$$

$$b) 2x - (x - 1) = x + 1 \rightarrow 2x - x + 1 = x + 1 \rightarrow$$

$$x + 1 = x + 1$$

Como a igualdade é verdadeira, qualquer valor de x é solução para a equação.

$$c) 3x + 5 = x + 17 \rightarrow 3x - x = 17 - 5 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$$

$$d) x - 1 = \sqrt{3x + 15}$$

Elevando ao quadrado os dois lados da igualdade temos:

$$(x - 1)^2 = 3x + 15 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3x + 15 \rightarrow x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ e } x_2 = \frac{5-9}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

e) Como trata-se de uma equação biquadrada, faremos uma mudança de variável na equação $x^4 + x^2 - 6 = 0$, chamando $y = x^2$, e teremos:

$$y^2 + y - 6 = 0 \rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow y' = 2 \text{ e } y'' = -3$$

Para determinar as raízes da equação original, voltamos à substituição:

$$y = x^2 \rightarrow 2 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$y = x^2 \rightarrow -3 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

Sendo assim, as soluções possíveis $\mathbb{R}$ em são $x = \pm\sqrt{2}$.

2) Substituindo o valor de w na equação dada, obteremos o valor de S :

a)

$$S = \frac{0,032w - 2,5}{10.000} \rightarrow \frac{0,032.250 - 2,5}{10.000} \rightarrow \frac{8 - 2,5}{10.000} \rightarrow \frac{5,5}{10.000} \rightarrow 0,00055m$$

Ou seja, a contração da viga será de 0,00055 m. Quando a viga secar, seu tamanho será de $12,025m - 0,00055m = 12,02445m$

b) Dado o tamanho da contração, pede-se a quantidade de água necessária para que a viga tenha esse comportamento:

$$S = \frac{0,032w - 2,5}{10.000} \rightarrow 0,00050 = \frac{0,032w - 2,5}{10.000} \rightarrow 5 = 0,032w - 2,5$$

$$5 + 2,5 = 0,032w \rightarrow 7,5 = 0,032w \rightarrow w = 234,375 \text{ kg/m}^3$$

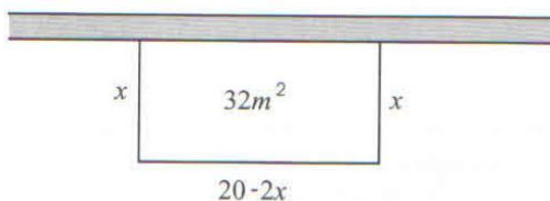
6º Encontro:

Objetivos do Encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, discutir o discriminante nas equações quadráticas e estudar e resolver sistemas de equações.

Atividade⁴⁸ 1

1) Meu vizinho, com 20 m de cerca construiu um cercado retangular de 32 m^2 de área, utilizando seu muro como um dos lados. Quanto medem os lados desse retângulo?



2) É possível que, o vizinho da atividade anterior, use o muro como um dos lados, fazendo um cercado retangular de 32 m^2 de área, porém usando uma cerca menor?

⁴⁸ Problema adaptado de Lima et al (2006, p. 38).

Conteúdos Específicos:

Equações quadráticas. Sistema de equações. Geometria. Área e perímetro de figura plana. Discriminante da equação quadrática.

Objetivos Específicos:

Estudar as equações quadráticas. Resolver sistemas de equações. Analisar as soluções para a equação quadrática. Analisar o discriminante das equações quadráticas.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Primeiramente vamos escrever a área e o comprimento da cerca, considerando que x e y são dados em metros:

$$A_r = \text{base} \times \text{altura} = x \cdot y = 32 \text{ m}^2$$

$$C_c = 2x + y = 20 \text{ metros}$$

Temos duas equações para determinar a solução. A solução de uma das equações deve ser também solução da outra. Temos um sistema de equações:

$$\begin{cases} x \cdot y = 32 \text{ m}^2 \\ 2x + y = 20 \text{ m} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pela substituição de $y = 20m - 2x$ em $x \cdot y = 32m^2$, temos:

$$x \cdot m(20m - 2x \text{ m}) = 32m^2$$

$$20x \text{ m}^2 - 2x^2 \text{ m}^2 = 32m^2 \rightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0$$

Utilizando a fórmula para a equação quadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, determinamos os zeros da equação:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(2)(32)}}{2 \cdot 2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 256}}{4} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{4} = \frac{20 \pm 12}{4}$$

Que resulta em duas respostas:

$$x_1 = 8 \text{ m} \text{ e } x_2 = 2 \text{ m}$$

Como o problema pede que determinemos os lados do retângulo, precisamos determinar o valor de y para cada valor de x encontrado:

Se $x_1 = 8 \text{ m}$, então $y = 20m - 2x = 20m - 2(8m) = 20m - 16m = 4m$. Assim,

$$x_1 = 8 \text{ m e } y = 4 \text{ m}$$

Se $x_2 = 2 \text{ m}$, então $y = 20m - 2x = 20m - 2(2) = 20m - 4m = 16m$. Assim,

$$x_2 = 2 \text{ m e } y = 16 \text{ m}$$

2) Para esse problema, pede-se que a cerca tenha um tamanho menor. Temos o mesmo sistema, porém a equação do comprimento da cerca será alterada para $2x + y = c$, onde c é o tamanho da cerca.

$$\begin{cases} x \cdot y = 32 \, m^2 \\ 2x + y = c \, m \end{cases}$$

Resolvendo pela substituição de $y = c \, m - 2x \, m$ em $x \cdot y = 32 \, m^2$, temos:

$$x \, m (c \, m - 2x \, m) = 32m^2$$

$$xc \, m^2 - 2x^2 m^2 = 32m^2 \rightarrow (xc - 2x^2) \, m^2 = 32m^2 \rightarrow$$

$$2x^2 - cx + 32 = 0$$

Utilizando a fórmula para a equação quadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, determinamos os zeros da equação:

$$x = \frac{c \pm \sqrt{(-c)^2 - 4(2)(32)}}{2 \cdot 2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 256}}{4}$$

Para que exista solução para o problema, devemos ter o discriminante da equação maior ou igual a zero, $\Delta \geq 0$, ou seja:

$$c^2 - 256 \geq 0$$

$$c^2 - 256 = 0$$

$$c = \pm 16$$

Nesse ponto o aluno deve perceber que existe apenas uma solução possível: $c = 16$.

Voltando à fórmula da equação quadrática, devemos determinar o valor de x :

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{(16)^2 - 4(2)(32)}}{2 \cdot 2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{4} = \frac{16}{4} = 4m$$

E agora devemos determinar o valor de y :

Se $x = 4 \, m$, então $y = 16m - 2 \cdot 4 \, m = 16m - 8m = 8 \, m$. Assim,

$$x = 4 \, m \, e \, y = 8 \, m$$

Desta forma o menor comprimento de cerca que fecha uma área de $32 \, m^2$ é de $16 \, m$.

Formalização:

Uma equação quadrática é dada pela forma $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$). O discriminante de uma equação quadrática é dado por $\Delta = b^2 - 4ac$. O discriminante da equação ‘discrimina’ o número de zeros que a equação possui:

- a) Se $\Delta > 0$, então a equação tem duas soluções reais distintas;
- b) Se $\Delta = 0$, então a equação tem uma única solução real.
- c) Se $\Delta < 0$, então a equação não tem solução real.

Atividade⁴⁹ 2

1) Utilize o discriminante para determinar quantas soluções reais cada equação dada possui:

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

c) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

2) Uma bala é lançada para cima, com uma velocidade inicial $v_0 = 240m/s$ e alcançará uma altura h em metros depois de passados t segundos, onde h e t estão relacionados pela fórmula $h = -16t^2 + v_0t$.

a) Quando a bala atingirá o solo?

b) Quando atingirá uma altura de 500m?

c) Qual o ponto mais alto que a bala alcança?

Conteúdos Específicos:

Equações quadráticas. Discriminante da equação quadrática.

Objetivos Específicos:

Estudar as equações quadráticas. Analisar o discriminante das equações quadráticas.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Devemos analisar o discriminante das equações para determinar quantas soluções reais possuem:

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$

O discriminante é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1) = 16 + 4 = 20 > 0$$

Como $\Delta = 20 > 0$, a equação possui duas soluções reais e distintas.

b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (9) = 144 - 144 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação possui uma única solução real.

c) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot (4) = 4 - \frac{16}{3} = \frac{-4}{3} < 0$$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui solução real.

2) Dada a equação $h = -16t^2 + v_0t$, sabendo que $v_0 = 240m/s$, temos:

⁴⁹ Problema adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 51)

$$h = -16t^2 + 240t.$$

Quando a bala atingirá o solo?

Para isso ocorrer devemos ter $h=0m$, ou seja,

$$0 = -16t^2 + 240t \rightarrow t(-16t + 240) = 0 \rightarrow t = 0 \text{ ou } -16t + 240 = 0 \rightarrow t = \frac{240}{16} = 15 \text{ s}$$

Quando atingirá a altura de 500m?

Temos $h = 500m$, então:

$$500 = -16t^2 + 240t \rightarrow -16t^2 + 240t - 500 = 0$$

$$t = \frac{-240 \pm \sqrt{(240)^2 - 4(-16)(-500)}}{2 \cdot (-16)} = \frac{-240 \pm \sqrt{57600 - 32000}}{-32} = \frac{-240 \pm \sqrt{25600}}{-32}$$

$$t_1 = \frac{-240+160}{-32} = \frac{-80}{-32} = 2,5s \text{ e } t_2 = \frac{-240-160}{-32} = \frac{-400}{-32} = 12,5s$$

A bala atingirá a altura de 500m duas vezes, uma na subida em, $t_1 = 2,5 \text{ s}$ e outra na descida, em $t_2 = 12,5 \text{ s}$.

c) Qual o ponto mais alto que a bala alcança?

Obter o ponto mais alto que a bala alcança é determinar o ponto onde a equação possui apenas uma solução, sendo assim, teremos $\Delta = 0$:

$$h = -16t^2 + 240t \rightarrow -16t^2 + 240t - h = 0$$

$$\Delta = (240)^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-h) = 0$$

$$57.600 - 64 \cdot h = 0$$

$$h = \frac{57.600}{64} = 900 \text{ metros.}$$

Formalização:

Uma equação quadrática é dada pela forma $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$. O discriminante de uma equação quadrática geral é dado por $\Delta = b^2 - 4ac$.

As raízes de uma equação quadrática simples, $x^2 = c$, são dadas por $x = \sqrt{c}$ e $x = -\sqrt{c}$.

Atividade⁵⁰ Extraclasse

1) Encontre uma solução para a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

2) Um barco a motor, em águas sem correnteza, tem sempre a mesma velocidade: $v \text{ km/h}$. Esse barco foi colocado em um rio com forte correnteza (velocidade das águas era de 5 km/h), subiu 1 km do rio acima e voltou ao ponto de partida. Na ida, por navegar contra a correnteza, o barco foi à velocidade de $(v - 5) \text{ km/h}$; na volta, com a ajuda da correnteza, veio a $(v + 5) \text{ km/h}$. A viagem de ida e volta levou 35 minutos. Qual a velocidade v desse barco?

⁵⁰ Problemas adaptados de Centurión, Jakubo e Lellis (2007, p. 66 e 70)

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Equação biquadrada.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow (x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

Fazendo a mudança de variável $x^2 = y$, temos:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{(13)^2 - 4(1)(36)}}{2(1)} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$y_1 = \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ e } y_2 = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Voltando à variável inicial, temos: $x^2 = y$

$$\text{Para } y_1 = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Para } y_2 = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

As soluções para a equação biquadrada são $\{-3, -2, 2, 3\}$

2) Para a viagem rio acima, temos:

$$(v - 5) \cdot t_1 = 1 \rightarrow t_1 = \frac{1}{v - 5}$$

Para a viagem rio abaixo, temos:

$$(v + 5) \cdot t_2 = 1 \rightarrow t_2 = \frac{1}{v + 5}$$

A viagem de ida e de volta levou 35 minutos, ou seja, $\frac{35}{60}$ de hora. Assim, $t_1 + t_2 = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$.

Então podemos escrever que: $\frac{1}{v-5} + \frac{1}{v+5} = \frac{7}{12} \rightarrow \frac{(v+5)+(v-5)}{(v-5)(v+5)} = \frac{7}{12}$

$$\frac{2v}{(v-5)(v+5)} = \frac{7}{12} \rightarrow 24v = 7(v^2 - 25) \rightarrow 24v = 7v^2 - 175 \rightarrow 7v^2 - 24v - 175 = 0$$

$$v = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(7)(-175)}}{2(7)} = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 4900}}{14} = \frac{24 \pm \sqrt{5476}}{14} = \frac{24 \pm 74}{14}$$

$$v_1 = \frac{24+74}{14} = \frac{98}{14} = 7 \text{ e } v_2 = \frac{24-74}{14} = \frac{-50}{14}$$

Como o valor de v_2 é negativo, ele não serve e portanto, a velocidade do barco é de 7km/h.

Formalização:**Solução de equação biquadrada:**

Dada a equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$, fazemos uma substituição de variáveis do tipo $x^4 = y^2$ e $x^2 = y$, obteremos como solução $x = \pm\sqrt{y'}$ e $x = \pm\sqrt{y''}$. Cada raiz positiva da equação $ay^2 + by + c = 0$ dará origem a duas raízes simétricas para a equação biquadrada. A raiz negativa não dará origem a nenhuma raiz real para a equação.

7º Encontro:**Objetivos do encontro:**

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Estudar a linguagem e a notação utilizada na Teoria dos conjuntos. Noção de conjunto e suas relações. Estudar as operações com conjuntos.

Atividade⁵¹ 1

1) Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, e, v\}$, $C = \{\}$ a afirmativa correta é:

- a) $\{a\} \in A$
- b) $C \in B$
- c) $B \subset A$
- d) $B \not\subset C$
- e) $C = \{x/x \neq x\}$

2) Se A é um conjunto com 5 elementos, determine o número de subconjuntos que podem ser formados contendo pelo menos 1 elemento.

3) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d\}$; $C = \{a, c, d, e\}$, encontre o conjunto $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$.

Conteúdos Específicos:

Linguagem e notação da Teoria de conjuntos. Operações com conjuntos.

Objetivos Específicos:

Discutir a linguagem da teoria dos conjuntos que é precisa, concisa e universal, necessária ao Cálculo. As atividades são aqui apresentadas como problemas, já que ‘problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas se tem interesse em resolver’. Estudar as operações com os conjuntos e seus elementos.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Neste problema o aluno deve conhecer a linguagem da Teoria dos Conjuntos para analisar as respostas dadas e verificar a correta. Vejamos:

- a) $\{a\} \in A$. Errada. Um conjunto não pertence a outro conjunto. A relação de pertinência só ocorre entre elemento e conjunto e relação entre conjuntos é de a continência.
- b) $C \in B$. Errada. Mesma justificativa da letra (a).
- c) $B \subset A$. Errada. É possível que um conjunto esteja contido em outro. Porém conjunto $B \not\subset A$ já que o elemento $v \notin A$.

⁵¹ Problema retirado de Marcon e Noguti (2009, p. 26).

- d) $B \not\supset C$. Errada. A relação de inclusão está correta, mas a afirmação está errada, pois o conjunto vazio sempre é subconjunto de qualquer conjunto.
- e) $C = \{x/x \neq x\}$. Correta. Uma forma de escrever o conjunto vazio é dizer que é o conjunto de todos os elementos x tais que x é diferente de si mesmo.

2) Consideremos que o conjunto com 5 elementos seja escrito como: $\{a, b, c, d, e\}$.

Quais são todos os subconjuntos formados ?

$\{ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\},$
 $\{c, e\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{c, d, e\}, \{a, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}$
 $\{b, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}$

Outra forma de determinar o número de subconjuntos é através da fórmula geral: 2^n , definida pela soma das combinações dos n elementos do conjunto, tomados zero a zero, um a um, dois a dois, três a três, quatro a quatro e cinco a cinco, sendo assim: $2^5 = 32$ subconjuntos.

3) Dados $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d\}$; $C = \{a, c, d, e\}$, encontre o conjunto $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$:

$$(A - C) = \{b\}$$

$$(C - B) = \{a, e\}$$

$$(A \cap B \cap C) = \{c\}$$

$$(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C) = \{a, b, c, e\}$$

Formalização:

“Toda a matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjuntos é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas.” (LIMA, 2006, p. 01)

Um conjunto é formado por elementos. Seja A um conjunto e a um elemento de A , então $a \in A$.

Um conjunto vazio é um conjunto que não possui elementos. Denota-se por: $\{ \}$ ou por $\emptyset$.

Quando todos os elementos de um conjunto A qualquer pertencem a outro conjunto B , diz-se então que A é subconjunto de B , ou seja: $A \subset B$ (Lê-se: A contido em B)

Seja A um subconjunto de um conjunto B , ($A \subset B$). O conjunto complementar de A em relação a B ou complemento de A em relação a B é o conjunto dos elementos de B que não pertencem a A .

Indica-se C_B^A (Lê-se: complementar de A em relação a B desde que $A \subset B$):

$$C_B^A = \{x/x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

Operações com conjuntos:**União de conjuntos:**

Dados dois conjuntos A e B, define-se o conjunto união de A com B, ao conjunto $A \cup B$ formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Intersecção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, define-se o conjunto intersecção de A com B, como o conjunto $A \cap B$ formado por todos os elementos que pertencem a A e a B simultaneamente.

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Diferença de Conjuntos

Dados os conjuntos A e B, define-se o conjunto diferença entre A e B, como o conjunto $A - B$ formado por todos os elementos que pertencem a A, mas que não pertencem a B.

$$A - B = \{x/x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Atividade⁵² 2

1) Liste os elementos dos conjuntos dados que são:

- a) Números naturais ($\mathbb{N}$)
- b) Números inteiros ($\mathbb{Z}$)
- c) Números racionais ($\mathbb{Q}$)
- d) Números irracionais ($\mathbb{I}$)

$$\{0; -10; 50; \frac{22}{7}; 0,538; \sqrt{7}; -\frac{1}{3}; \sqrt[3]{2}\}$$

$$\{1,001; 0,333 \dots; -\pi; -11; 11; \frac{13}{15}; \sqrt{16}; 3,14; \frac{15}{3}\}$$

2) A respeito dos conjuntos numéricos, comente as afirmativas abaixo:

- a) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$
- b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$
- c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- d) $\mathbb{N}^* \not\subset \mathbb{R}$
- e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- f) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$

Conteúdos Específicos:

Conjuntos Numéricos. Operações com conjuntos. Uma representação dos conjuntos numéricos.

⁵² Problema 1) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 10). Problema 2) retirado de Barreto Filho (2000, p. 37).

Objetivos Específicos:

Estudar os conjuntos numéricos, suas operações e representações. Definir as operações fundamentais nos conjuntos numéricos. Desenvolver o raciocínio sobre conjuntos e suas operações.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) O aluno deve identificar e saber exemplificar a que conjuntos a que conjuntos pertencem os elementos dados.

Para o primeiro conjunto dado $\{0; -10; 50; \frac{22}{7}; 0,538; \sqrt{7}; -\frac{1}{3}; \sqrt[3]{2}\}$, temos:

- a) 0, 50
- b) 0, -10, 50
- c) $0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0,538, -\frac{1}{3}$
- d) $\sqrt{7}, \sqrt[3]{2}$

Para o segundo conjunto dado $\{1,001; 0,333 \dots; -\pi; -11; 11; \frac{13}{15}; \sqrt{16}; 3,14; \frac{15}{3}\}$, temos:

- a) $11, \sqrt{16}, \frac{15}{3}$
- b) $-11, 11, \sqrt{16}, \frac{15}{3}$
- c) $-11, 11, \sqrt{16}, \frac{15}{3}, \frac{13}{15}, 1,001; 0,333 \dots, 3,14$
- d) $-\pi$

2) Nesse problema o aluno deve ter conhecimento da estrutura dos conjuntos numéricos e entender suas relações e sua estrutura.

- a) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$

A afirmativa está errada. O conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros.

- b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$

A afirmativa está correta. O conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros não negativos.

- c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

A afirmativa está correta. O conjunto dos números racionais está contido no conjunto dos números reais.

- d) $\mathbb{N}^* \not\subset \mathbb{R}$

A afirmativa está errada. O conjunto dos números naturais sem o zero está contido no conjunto dos números reais.

- e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

A afirmativa está correta. O conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais.

$$f) \quad \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$$

A afirmativa está correta. O conjunto dos números racionais não negativos está contido no conjunto dos números reais não negativos.

Formalização:

Chamamos de **conjunto dos números naturais** $\mathbb{N}$ o conjunto formado pelos números

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$$

Em $\mathbb{N}$ estão definidas duas operações fundamentais a adição e a multiplicação que satisfazem as seguintes propriedades:

(A_1) *fechamento*: a soma de dois números naturais é um número natural.

(A_2) *comutativa da adição*

$$a + b = b + a, \text{ para todos } a, b \in \mathbb{N};$$

(A_3) *associativa da adição*

$$(a + b) + c = a + (b + c), \text{ para todos } a, b, c \in \mathbb{N};$$

(A_4) *elemento neutro da adição*

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ para todo } a \in \mathbb{N};$$

(M_1) *fechamento*: o produto de dois números naturais é um número natural.

(M_2) *comutativa da multiplicação*

$$a \times b = b \times a, \text{ para todos } a, b \in \mathbb{N};$$

(M_3) *associativa da multiplicação*

$$(ab)c = a(bc), \text{ para todos } a, b, c \in \mathbb{N};$$

(M_4) *elemento neutro da multiplicação*

$$a \times 1 = 1 \times a = a, \text{ para todo } a \in \mathbb{N};$$

(D) *Distributiva da multiplicação relativamente à adição*

$$a(b + c) = ab + ac, \text{ para todos } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Chamamos de **conjunto dos números inteiros** $\mathbb{Z}$, ao seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$$

Em $\mathbb{Z}$, podemos destacar três subconjuntos:

- 1) Conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$
- 2) Conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$
- 3) Conjuntos dos números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\dots - 3, -2, -1, 1, 2, 3 \dots\}$

No conjunto $\mathbb{Z}$ são definidas as operações de adição, subtração e multiplicação que apresentam, além das propriedades (A_1) , (A_2) , (A_3) , (A_4) , (M_1) , (M_2) , (M_3) , (M_4) e (D) , a propriedade

(A_5) *simétrico ou oposto para a adição ou inverso aditivo*

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que, $a + (-a) = 0$.

A propriedade (A_5) permite definir a operação subtração em $\mathbb{Z}$, onde $a - b = a + (-b)$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.

Chamamos de **conjunto dos números racionais** $\mathbb{Q}$ ao conjunto dos números que podem ser expressos por

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

No conjunto dos números racionais, a divisão entre quaisquer dois racionais sempre resulta em resto zero, ou seja, a divisão de racionais é exata.

São válidas em $\mathbb{Q}$ as mesmas propriedades formais vistas para os números inteiros. Além dessas, temos também a seguinte propriedade (não válida em $\mathbb{Z}$):

(M_5) *simétrico ou inverso para a multiplicação ou inverso multiplicativo*

Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $b \neq 0$, existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

A propriedade M_5 nos diz que em $\mathbb{Q}$ todo elemento não nulo possui inverso pela operação multiplicação. O conjunto $\mathbb{Q}$ é dito denso⁵³.

Chamamos de **números irracionais** $\mathbb{I}$ aos números que não podem ser expressos como $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Quando escrito na forma decimal, um número irracional apresenta infinitas casas decimais não periódicas. De forma geral,

$\sqrt{p}$, p primo, $p > 1$, representa um número irracional.

Exemplos:

$$e, \sqrt{7}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5} \dots$$

O **conjunto dos números reais**, simbolizado pela letra $\mathbb{R}$, é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$), isto é:

$$\mathbb{R} = \{x / x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Em $\mathbb{R}$ estão definidas as quatro operações fundamentais, a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, satisfazendo as propriedades (A_1) , (A_2) , (A_3) , (A_4) , (A_5) e (M_1) , (M_2) , (M_3) , (M_4) , (M_5) e (D) que são postulados. Além dessas operações, são definidas em $\mathbb{R}$ as operações de potenciação, radiciação e logaritmação em que todas suas propriedades são demonstráveis.

⁵³ De acordo com Caraça (2003, p. 56): Todo o conjunto em que, entre dois *quaisquer* de seus elementos haja uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, é dito um *conjunto denso*.

Além das propriedades acima citadas, que são as mesmas válidas para o conjunto dos números racionais, o conjunto dos números reais solicita um novo axioma para que seja completo, ou seja, ($\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$):

Axioma do Sup:

Todo conjunto linear infinito e limitado tem extremo superior (sup) que pertence ao conjunto, tornando a reta completa. O axioma foi citado aos alunos, e foi apresentado a eles apenas exemplos numéricos.

Atividade⁵⁴ Extraclasse

1) A interseção do conjunto de todos os inteiros múltiplos de 6 com o conjunto de todos os inteiros múltiplos de 15 é o conjunto de todos os inteiros múltiplos de: (justifique sua resposta)

- a) 3
- b) 18
- c) 30
- d) 45
- e) 90

2) Relacione os elementos e os conjuntos dados, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$.

a) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$	b) $0,333 \in \mathbb{R}$
c) $\sqrt{-3} \in \mathbb{R}$	d) $\frac{3}{7} \in \mathbb{R}$
e) $(0,2 \times 0,1) \in \mathbb{Z}^*$	f) $-234 \in \mathbb{Z}_-$
g) $0,777 \dots \in \mathbb{R}_+$	h) $-\frac{1}{100} \in \mathbb{Q}_-$

Estratégia de resolução pensada pela professora:

Devemos calcular o mínimo múltiplo comum entre os dois números:

$$\begin{array}{r|l}
 6, 15 & 2 \\
 3, 15 & 3 \\
 1, 5 & 5 \\
 1, 1 & \\
 \hline
 & 2 \times 3 \times 5 = 30
 \end{array}$$

$\text{mmc}(6, 15) = 30$, ou seja, o conjunto solução será formado pelos múltiplos de 30.

2)

a) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} : \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

⁵⁴ Problemas retirados de Barreto Filho (2000, p. 30 e 37)

- b) $0,333 \in \mathbb{R}$: $0,333 \in \mathbb{R}$
 c) $\sqrt{-3} \in \mathbb{R}$: $\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$
 d) $\frac{3}{7} \in \mathbb{R}$: $\frac{3}{7} \in \mathbb{R}$
 e) $(0,2 \times 0,1) \in \mathbb{Z}^*$: $(0,2 \times 0,1) \notin \mathbb{Z}^*$
 f) $-234 \in \mathbb{Z}_-$: $-234 \in \mathbb{Z}_-$
 g) $0,777 \dots \in \mathbb{R}_+$: $0,777 \dots \in \mathbb{R}_+$
 h) $-\frac{1}{100} \in \mathbb{Q}_-$: $-\frac{1}{100} \in \mathbb{Q}_-$

8º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, compreender a correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta real. Estudar os intervalos reais como subconjuntos da reta. Estudar inequações lineares e quadráticas. Analisar as soluções das inequações.

Atividade⁵⁵ 1

1) A relação entre temperatura em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$) e temperatura em graus Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) é dada pela fórmula

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

- a) Se durante o mês de janeiro as temperaturas em Montreal variam entre $-15^{\circ} < ^{\circ}\text{C} < -5^{\circ}$, encontre a variação em graus Fahrenheit para o mesmo período. Esboce sua solução em um intervalo.
 b) Se durante o mês de junho as temperaturas na cidade de Nova York variam entre $63^{\circ} < ^{\circ}\text{F} < 80^{\circ}$, encontre a variação em graus Celsius para o mesmo período. Esboce sua solução em um intervalo.

2) Expresse o intervalo dado na forma de desigualdades e esboce-o como um subconjunto de $\mathbb{R}$:

- a) $(-3, 0)$
 b) $[2, 8)$
 c) $[2, \infty)$
 d) $[-6, -\frac{1}{2}]$
 e) $(-\infty, 1)$

⁵⁵ Problema retirados de Tan (2007, p. 09).

Conteúdos Específicos:

A reta real. Intervalos reais.

Objetivos Específicos:

Estudar os intervalos numéricos e fazer seu esboço como um subconjunto da reta real.
Determinar a solução de um problema com intervalos numéricos. Análise de solução.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) A fórmula geral $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ possibilita a mudança de unidade de medida para temperatura.

- a) Se durante o mês de janeiro as temperaturas em Montreal variam entre $-15 < ^\circ C < -5$, encontre a variação em graus Fahrenheit para o mesmo período. Esboce sua solução em um intervalo.

$$-15^\circ < \frac{5}{9}(^\circ F - 32^\circ) < -5^\circ$$

$$(-15)^\circ \cdot 9 < 5(^\circ F - 32^\circ) < (-5)^\circ \cdot 9$$

$$\frac{(-15)^\circ \cdot 9}{5} < ^\circ F - 32^\circ < \frac{(-5)^\circ \cdot 9}{5}$$

$$-27^\circ < ^\circ F - 32^\circ < -9^\circ$$

$$-27^\circ + 32^\circ < ^\circ F < -9^\circ + 32^\circ$$

$$5^\circ < ^\circ F < 23^\circ$$

Assim, a temperatura em Montreal para o mês de janeiro varia entre $5^\circ < ^\circ F < 23^\circ$.



- b) Se durante o mês de junho as temperaturas na cidade de Nova York variam entre $63 < F < 80$, encontre a variação em graus Celsius para o mesmo período. Esboce sua solução em um intervalo.

Para encontrarmos a temperatura em graus Celsius, dada em Fahrenheit, devemos isolar a variável correspondente a Fahrenheit na fórmula dada:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) \rightarrow 9 \cdot C = 5(F - 32) \rightarrow \frac{9C}{5} = F - 32 \rightarrow \frac{9C}{5} + 32 = F$$

Agora utilizamos os dados do problema para a temperatura dada: $63^\circ < F < 80^\circ$

$$63^\circ < \frac{9^\circ C}{5} + 32^\circ < 80^\circ$$

$$63^\circ < \frac{9^\circ C + 160^\circ}{5} < 80^\circ$$

$$63^\circ \cdot 5 < 9^\circ C + 160^\circ < 80^\circ \cdot 5$$

$$315^{\circ} < 9^{\circ}C + 160 < 400^{\circ}$$

$$315^{\circ} - 160^{\circ} < 9^{\circ}C < 400^{\circ} - 160^{\circ}$$

$$155^{\circ} < 9^{\circ}C < 240^{\circ}$$

$$\frac{155^{\circ}}{9} < C < \frac{240^{\circ}}{9}$$

$$17,2^{\circ} < ^{\circ}C < 26,6^{\circ}$$

Assim, a temperatura em Nova York para o mês de junho varia entre

$$17,2^{\circ} < ^{\circ}C < 26,6^{\circ}.$$



2)

a) $(-3, 0)$



$$\{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 0\}$$

b) $[2, 8)$



$$\{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 8\}$$

c) $[2, \infty)$



$$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$$

d) $[-6, -\frac{1}{2}]$



$$\{x \in \mathbb{R} / -6 \leq x \leq -\frac{1}{2}\}$$

e) $(-\infty, 1)$



$$\{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$$

Formalização:

Chamamos de intervalo real qualquer subconjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Podemos representá-los de três maneiras diferentes: por conjuntos, graficamente e por notação de intervalo.

Sejam a e b dois números, onde $a < b$.

I. Intervalo aberto: exclui os extremos a e b .

Conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

Notação: $]a, b[$ ou (a, b)

Representação Geométrica:



II. Intervalo fechado: inclui os extremos a e b .

Conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Notação: $[a, b]$

Representação Geométrica:



III. Intervalo aberto à direita: inclui o extremo a e exclui o extremo b .

Conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

Notação: $[a, b[$ ou $[a, b)$

Representação Geométrica:



IV. Intervalo fechado à direita: exclui o extremo a e inclui o extremo b .

Conjuntos: $\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

Notação: $]a, b]$ ou $(a, b]$

Representação Geométrica:

**Atividade⁵⁶ 2**

1) Uma companhia telefônica oferece dois planos para ligações de longa distância:

Plano A: 25 reais por mês e 5 centavos por minuto

Plano B: 5 reais por mês e 12 centavos por minuto

Para quantos minutos de chamadas de longa distância o plano B é mais vantajoso financeiramente?

⁵⁶ Problemas retirados de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 85).

2) Um grupo de estudantes resolveu assistir a um concerto. O custo de contratar um ônibus para levá-los ao concerto é de R\$ 450,00 que deve ser dividido entre todos os estudantes. Os organizadores do concerto dão desconto a grupos que chegarem de ônibus. Os bilhetes custam, em geral, R\$ 50,00 para cada um, porém reduz-se R\$0,10 do preço do bilhete para cada pessoa que chegar em grupo (até a capacidade máxima do ônibus).

Quantos estudantes deve ter o grupo para que o custo total por estudante seja menor do que R\$54,00?

Conteúdos Específicos:

Inequações lineares e quadráticas. Solução de inequações lineares e quadráticas.

Objetivos Específicos:

Discutir as inequações lineares e quadráticas. Analisar e determinar soluções de inequações.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Seja x o tempo em minutos

Plano A: $R\$25,00 + 0,05 \cdot x$

Plano B: $R\$5,00 + 0,12 \cdot x$

Queremos determinar para quantos minutos B é mais vantajoso do que A, ou seja, $B < A$:

$$R\$(5 + 0,12 \cdot x) < R\$(25 + 0,05 \cdot x)$$

$$0,12 \cdot x - 0,05 \cdot x < 25 - 5$$

$$0,07 \cdot x < 20,00$$

$$x < \frac{20}{0,07}$$

$$x < 285 \text{ minutos}$$

O plano B é mais vantajoso se a quantidade de minutos utilizados for menor que 285.

2) Seja x o número de estudantes. O custo do ônibus deve ser dividido por todos os estudantes, então: $\frac{R\$450,00}{x}$. O valor dos bilhetes pode ser calculado como: $R\$50,00 - R\$0,10 \cdot x$

Vamos escrever o custo do ônibus + custo do ingresso:

$$\frac{R\$450,00}{x} + (R\$50,00 - R\$0,10x) < R\$ 54,00$$

$$R\$ \left(\frac{450}{x} + 50 - 0,10 \cdot x \right) < R\$ 54,00$$

$$\frac{450}{x} + 50 - 0,10x - 54 < 0$$

$$\frac{450}{x} - 4 - 0,10x < 0$$

$$\frac{450 - 4x - 0,10x^2}{x} < 0$$

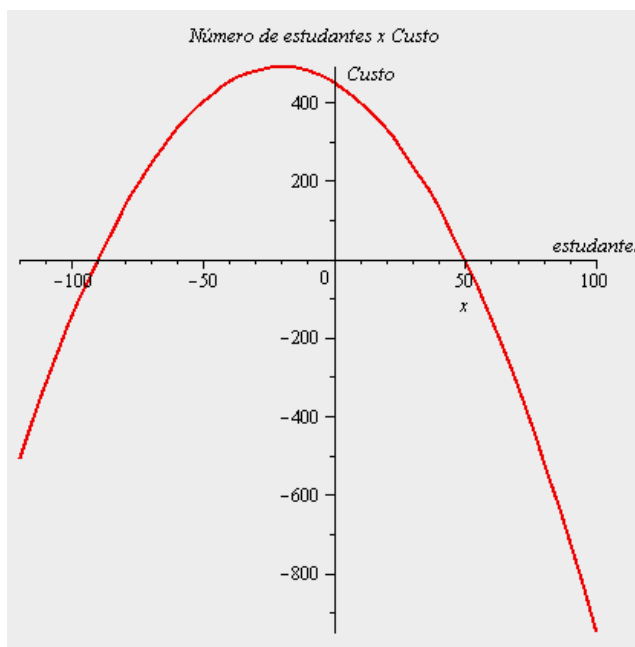
Devemos determinar as raízes do polinômio $450 - 4x - 0,10x^2$ para fatorar o numerador. Sabendo que $x = 0$ é uma raiz que não necessita ser analisada, visto que x é o número de estudantes:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(450)(-0,10)}}{2 \cdot (-0,10)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{-0,20} = \frac{4 \pm 14}{-0,20}$$

$$x_1 = \frac{18,00}{-0,20} = -R\$90,00$$

$$x_2 = \frac{-10,00}{-0,20} = R\$50,00$$

Duas raízes reais e distintas $(x + 90) \cdot (x - 50) = 0$. Fazendo a análise do sinal através do gráfico de $450 - 4x - 0,10x^2$, temos:



Solução que satisfaz o problema: $(-\infty, -90) \cup (50, +\infty)$.

Análise da solução:

Como o grupo de pessoas não pode ser negativo, a solução possível para o problema é: $(50, +\infty)$, ou seja é necessário que mais de 50 estudantes compareçam ao concerto para que o custo seja menor do que R\$ 54,00.

Formalização:

Regras para as desigualdades:

1. $A \leq B \leftrightarrow A + C \leq B + C$
2. $A \leq B \leftrightarrow A - C \leq B - C$
3. Se $C > 0$, então $A \leq B \leftrightarrow CA \leq CB$

4. Se $C < 0$, então $A \leq B \leftrightarrow CA \geq CB$
5. Se $A > 0$ e $B > 0$, então $A \leq B \leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$
6. Se $A \leq B$ e $C \leq D$, então $A + C \leq B + D$

Atividade⁵⁷ Extraclasse

1) Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determine $A \cap B$ e $A \cup B$ sendo $A = [0,3]$ e $B = [1,4]$.

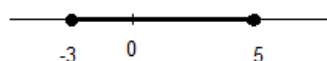
2) Descreva os seguintes conjuntos e esboce –os:

a) $[0,2] \cap [1,3]$

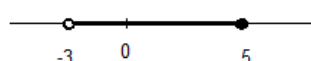
b) $] -\infty, 2] \cap [0, \infty[$

3) Expresse cada conjunto na notação de intervalos:

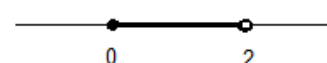
a)



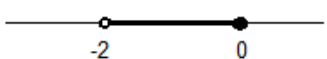
b)



c)



d)



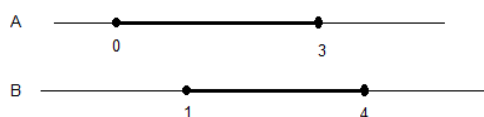
4) Estima-se que o custo anual para manter um certo automóvel novo possa ser obtido pela fórmula

$$C = 0,35m + 2200$$

Onde m representa a quantidade de milhas percorridas ao ano e C é o custo em dólares. Jane comprou um desses veículos e decidiu separar para o próximo ano um valor entre 6400 e 7100 dólares para os custos de manutenção. Qual é o intervalo correspondente de milhas que pode percorrer com o seu automóvel?

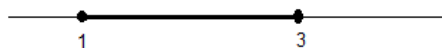
Estratégia de resolução pensada pela professora:

a)



⁵⁷ Problemas 1) e 2) adaptados de Iezzi e Murakami (1977, p. 49-A) e Problemas 3) e 4) adaptados de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 85)

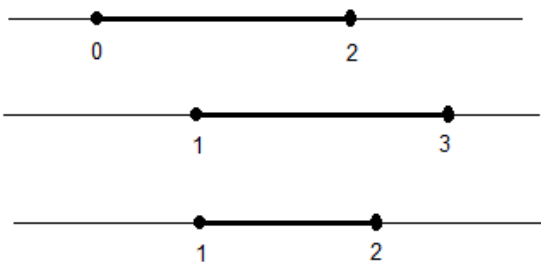
$A \cap B$:



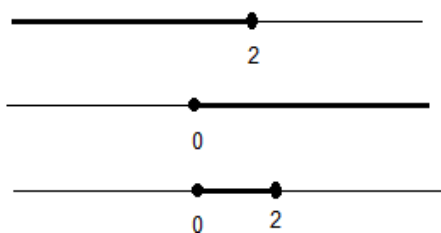
$A \cup B$:



2) a)



b)



3)

a) $[-3, 5]$

b) $] -3, 5]$

c) $[0, 2[$

d) $] -2, 0]$

4)

$$6400 < C < 7100 \text{ e } C = 0,35m + 2200$$

Então,

$$6400 < 0,35m + 2200 < 7100$$

$$6400 - 2200 < 0,35m < 7100 - 2200$$

$$4200 < 0,35m < 4900$$

$$12000 < m < 14000$$

Jane poderá percorrer entre 12000 e 14000 milhas com o valor que separou.

9º Encontro:**Objetivos do encontro:**

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, estudar o valor absoluto de um número real e suas propriedades. Discutir o valor absoluto como a distância entre dois pontos. Equações e inequações com valor absoluto. Teorema de Pitágoras.

Atividade⁵⁸ 1

1) Avalie as expressões:

a) $|100|$

b) $|-73|$

c) $|\sqrt{5} - 5|$

d) $|10 - \pi|$

e) $||-6| - |-4||$

f) $-1 - |1 - |-1||$

g) $\left| \frac{7-12}{12-7} \right|$

2) Resolva as equações e inequações em $\mathbb{R}$:

a) $|5x - 3| = 12$

b) $|2x - 3| = |7x - 5|$

c) $\left| \frac{x+2}{x-2} \right| = 5$

d) $|x + 1| < 2$

e) $|3x + 2| \geq 4$

3) Qual a distância entre os números -8 e 2? E qual a distância entre 2 e -8?

Conteúdos Específicos:

Valor absoluto. Equações e inequações com valor absoluto. Distância entre dois números.

Objetivos Específicos:

Discutir valor absoluto de um número. Estudar o valor absoluto como uma distância entre números.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

a) $|100| = 100$

b) $|-73| = 73$

c) $|\sqrt{5} - 5| = -(\sqrt{5} - 5)$

d) $|10 - \pi| = 10 - \pi$

⁵⁸ Problemas 1) e 3) adaptados de Stewart, Redlin e Watson (2007, p.10 e p.11). Problema 2) retirado de Marcon e Noguti (2009, p. 55).

$$\text{e) } ||-6| - |-4|| = |6 - 4| = |2| = 2$$

$$\text{f) } -1 - |1 - |-1|| = -1 - |1 - 1| = -1 - 0 = -1$$

$$\text{g) } \left| \frac{7-12}{12-7} \right| = \left| \frac{-5}{5} \right| = |-1| = 1$$

2)

$$\text{a) } |5x - 3| = 12$$

$$5x - 3 = 12 \quad -(5x - 3) = 12$$

$$5x = 12 + 3 \quad -5x = 12 - 3$$

$$5x = 15 \quad -5x = 9$$

$$x = 3 \quad x = -\frac{9}{5} \quad S = \left\{-\frac{9}{5}, 3\right\}$$

$$\text{b) } |2x - 3| = |7x - 5|$$

$$2x - 3 = 7x - 5 \quad 2x - 3 = -(7x - 5)$$

$$2x - 7x = -5 + 3 \quad 2x + 7x = 5 + 3$$

$$-5x = -2 \quad 9x = 8$$

$$x = \frac{2}{5} \quad x = \frac{8}{9} \quad S = \left\{\frac{2}{5}, \frac{8}{9}\right\}$$

$$\text{c) } \left| \frac{x+2}{x-2} \right| = 5$$

$$\left(\frac{x+2}{x-2} \right) = 5 \quad -\left(\frac{x+2}{x-2} \right) = 5$$

$$x + 2 = 5(x - 2) \quad -(x + 2) = 5(x - 2)$$

$$x + 2 = 5x - 10 \quad -x - 2 = 5x - 10$$

$$x - 5x = -10 - 2 \quad -x - 5x = -10 + 2$$

$$-4x = -12 \quad -6x = -8$$

$$x = 3 \quad x = \frac{4}{3} \quad S = \left\{\frac{4}{3}, 3\right\}$$

$$\text{d) } |x + 1| < 2$$

$$-2 < x + 1 < 2$$

$$-2 - 1 < x < 2 - 1$$

$$-3 < x < 1$$

$$S = (-3, 1)$$

$$\text{e) } |3x + 2| \geq 4$$

$$3x + 2 \geq 4 \quad 3x + 2 \leq -4$$

$$3x \geq 2 \quad 3x \leq -6$$

$$x \geq \frac{2}{3} \quad x \leq -2 \quad S = (-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

3) Pede-se a distância entre os números 8 e -2:

$$d(8, -2) = |-2 - 8| = |-10| = 10$$

Da mesma forma, calculemos a distância entre -2 e 8:

$$d(-2, 8) = |8 - (-2)| = |10| = 10$$

Formalização:

O valor absoluto ou ‘módulo’ de um número real x , indicado pela notação $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Sejam a e b números reais, então a distância entre os pontos a e b na reta numérica é dada por:

$$d(a, b) = |b - a| = |a - b|$$

Propriedades do Valor Absoluto:

- 1) $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- 3) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$
- 4) $|x| = |-x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- 5) $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- 6) $|x + y| \leq |x| + |y|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$
- 7) $x^n = |x|^n \leftrightarrow n$ é par, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Atividade⁵⁹2

1) Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 3|x| - 4 = 0$

2) Um diretor está filmando um filme de ação e aventura sobre o que acontece quando a Terra fica fora de sua órbita e muito perto do sol. As temperaturas sobem e os efeitos são dramáticos. Em uma cena, o diretor quer mostrar como uma ponte se expande a partir do calor, fazendo uma protuberância no centro. Ele quer que seus efeitos especiais sejam matematicamente corretos. Qual a altura final da ponte se inicialmente ela possuía 1 quilômetro de comprimento e ampliou 50 centímetros?

Conteúdos Específicos:

Equação modular. Mudança de variável. Teorema de Pitágoras. Triângulo retângulo. Medidas.

⁵⁹ Problema 1) adaptado de Paiva (2004, p. 154). Problema 2) adaptado de de Krulick e Rudnick (2005, p. 31).

Objetivos Específicos:

Resolver equação modular e analisar sua solução utilizando uma mudança de variável. Introduzir e discutir o Teorema de Pitágoras. Fazer uso de calculadora. Discutir a necessidade de visualização do problema para facilitar a sua resolução.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Devemos resolver em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 3|x| - 4 = 0$

Pelas propriedades estudadas de valor absoluto, sabemos que $x^2 = |x|^2$. Sendo assim, faremos uma mudança de variável, $|x| = t$:

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

Devemos obter as soluções para a equação de segundo grau:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Que resulta nas raízes:

$$t_1 = \frac{8}{2} = 4 \text{ e } t_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

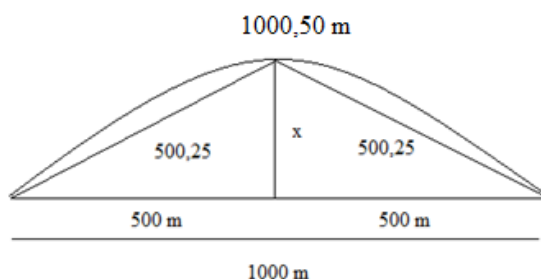
Devemos voltar à variável inicial, ou seja, $|x| = t$:

Para $t_1 = 4$, temos $|x| = 4 \rightarrow x = \pm 4$.

Para $t_2 = -1$, temos $|x| = -1 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$.

Assim, $S = \{-4, 4\}$.

2) Fazendo o esboço para interpretar o problema, temos:



onde x é a altura final da ponte após a expansão sofrida pela mesma.

Como o triângulo a ser analisado é retângulo, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de x (altura final da ponte).

Assim:

$$(500m)^2 + x^2 = (500,25m)^2 \rightarrow x^2 = 250.250,0625m^2 - 250.000m^2 \rightarrow$$

$$x^2 = 250,0625m^2$$

$$x = \sqrt[2]{250,0625m^2} \rightarrow x \cong 15,81m$$

Formalização:

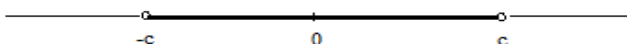
Teorema de Pitágoras: Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2$

Mudança de variável: um dos artifícios matemáticos que possibilitam facilitar a resolução do problema proposto e, após resolvê-lo, voltar à variável inicial dando resposta ao problema.

Propriedades das desigualdades com valores absolutos:

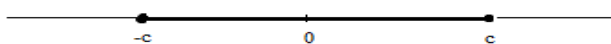
1. $|x| < c$

$$-c < x < c$$



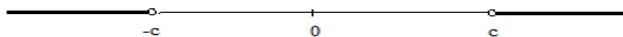
2. $|x| \leq c$

$$-c \leq x \leq c$$



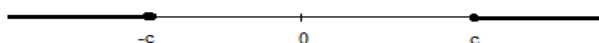
3. $|x| > c$

$$x < -c \text{ ou } x > c$$



4. $|x| \geq c$

$$x \leq -c \text{ ou } x \geq c$$

**Atividade⁶⁰ Extraclasse**

1) Resolva as equações modulares:

a) $|3x - 1| = -4$

b) $x^2 - 3|x| = 0$

c) $|x| \cdot |x - 2| = 1$

2) Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $|2x - 5| > 3$

b) $|3x + 5| \leq 11$

c) $\left|2x + \frac{3}{2}\right| > 6$

⁶⁰ Problemas 1) e 2) adaptados de Paiva (2004, p. 154). Problema 3) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 74)

3) Uma vara de bambu de 3m de comprimento partiu-se de tal maneira que sua ponta toca o chão a 90cm da base da vara, com mostra a figura. A que altura o bambu quebrou? (Este problema está posto no livro *Chui-chang suanshu* - Nove capítulos sobre a arte matemática- que foi escrito por volta do ano 250 antes da nossa era).



Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) a) $|3x - 1| = -4$

$3x - 1 = -4$ ou $3x - 1 = 4$, ou seja:

$$3x - 1 = -4 \rightarrow 3x = -4 + 1 \rightarrow 3x = -3 \rightarrow x = -1$$

$$3x - 1 = 4 \rightarrow 3x = 4 + 1 \rightarrow 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$S = \{-1, \frac{5}{3}\}$$

b) $x^2 - 3|x| = 0$

Como $x^2 = |x|^2$ podemos escrever a equação como:

$|x|^2 - 3|x| = 0$ e fazendo uma mudança de variável para $|x| = t$, temos:

$$t^2 - 3t = 0 \rightarrow t(t - 3) = 0$$

$t = 0$ ou $t = 3$

Voltando à variável inicial, temos:

$|x| = 0$ ou $|x| = 3$

E, portanto, $x = \pm 3$ ou $x = 0$. $S = \{-3, 0, 3\}$

c) $|x| \cdot |x - 2| = 1$

Utilizando as propriedades de módulo, temos:

$$|x| \cdot |x - 2| = 1 \rightarrow |x(x - 2)| = 1 \rightarrow |x^2 - 2x| = 1$$

$x^2 - 2x = 1$ ou $x^2 - 2x = -1$

$$x^2 - 2x = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x^2 - 2x = -1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$S = \{1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}\}$$

2) a) $|2x - 5| > 3$

$$2x - 5 < -3 \text{ ou } 2x - 5 > 3$$

$$2x - 5 < -3 \rightarrow 2x < -3 + 5 \rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$$

$$2x - 5 > 3 \rightarrow 2x > 3 + 5 \rightarrow 2x > 8 \rightarrow x > 4$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } x > 4\}$$

b) $|3x + 5| \leq 11$

$$-11 \leq 3x + 5 \leq 11$$

$$-11 - 5 \leq 3x \leq 11 - 5$$

$$-16 \leq 3x \leq 6$$

$$\frac{-16}{3} \leq x \leq 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{-16}{3} \leq x \leq 2\}$$

c) $\left|2x + \frac{3}{2}\right| > 6$

$$2x + \frac{3}{2} < -6 \text{ ou } 2x + \frac{3}{2} > 6$$

$$2x + \frac{3}{2} < -6 \rightarrow 2x < -6 - \frac{3}{2} \rightarrow 2x < \frac{-15}{2} \rightarrow x < \frac{-15}{4}$$

$$2x + \frac{3}{2} > 6 \rightarrow 2x > 6 - \frac{3}{2} \rightarrow 2x > \frac{9}{2} \rightarrow x > \frac{9}{4}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{-15}{4} \text{ ou } x > \frac{9}{4}\}$$

3) Como a vara media $3m$, podemos escrever os lados do triângulo formado como x e $3 - x$ e aplicar o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (0,9)^2 + (3 - x)^2$$

$$x^2 = 0,81 + 9 - 6x + x^2$$

$$6x = 9,81 \rightarrow x = \frac{9,81}{6} = 1,635 \text{ m}$$

O bambu quebrou na altura de 1,365 metros.

10º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Definir o produto cartesiano entre dois conjuntos. Compreender o produto cartesiano definido através de pares ordenados. Estudar o plano cartesiano e a correspondência biunívoca entre pontos do plano.

Atividade⁶¹ 1

1) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 4\}$ representar graficamente os conjuntos:

a) $A \times B$

b) $B \times A$

c) $(A \times B) \cup (B \times A)$

2) Marque no plano cartesiano os pontos:

$A(2, -3), B(0, -4), C(-4, -5), D(-1, 0), E(0, 5), F(5, 4), G(3, 0), H(-3, 2), I(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

3) Os pares ordenados $(x + 2y, 2x - y)$ e $(5, -3)$ são iguais. Determine x e y .

4) O ponto M de coordenadas $(2, m^2 - 6m + 5)$ pertence ao eixo das abscissas. Quais são os possíveis valores de m ?

Conteúdos Específicos:

Produto cartesiano. O plano cartesiano. Localização de pontos no plano cartesiano. Igualdade de pontos no plano cartesiano.

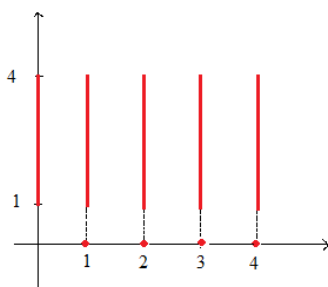
Objetivos Específicos:

Estudar o produto cartesiano e o plano cartesiano. Compreender a correspondência biunívoca de ponto e plano. Verificar a igualdade entre pontos no plano a partir da correspondência biunívoca.

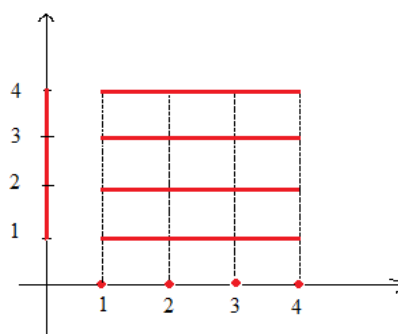
Estratégia de resolução pensada pela professora:

Devemos representar os conjuntos no plano cartesiano:

a)

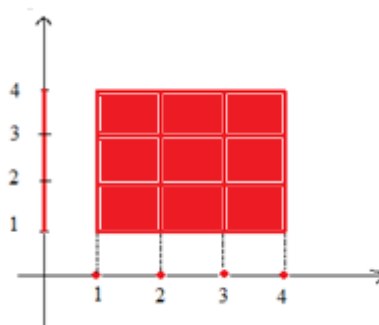


b)

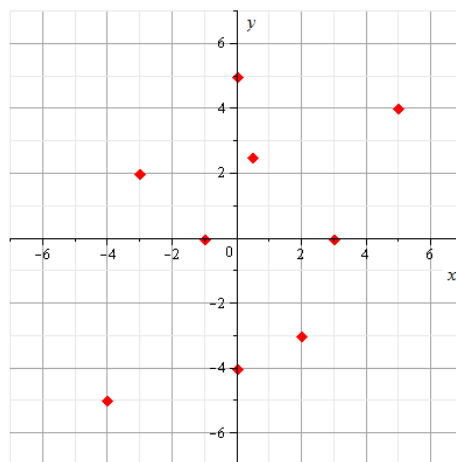


⁶¹ Problema 1) retirado de Iezzi e Murakami (1977, p. 65-A). Problemas 2), 3) e 4) retirados de Iezzi et al (2001, p. 47)

c)



2) Devemos marcar os pontos em um plano cartesiano:



3) Para sabermos os valores de x e y devemos igualar os pares ordenados $(5, -3)$ e $(x + 2y, 2x - y)$:

$$(x + 2y, 2x - y) = (5, -3)$$

De onde temos que

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, por substituição, isolamos a variável y na segunda equação $y = 2x + 3$ e, substituímos na primeira, temos:

$$x + 2(2x + 3) = 5$$

$$x + 4x + 6 = 5$$

$$5x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

Voltando à segunda equação, obtemos o valor de y :

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2\left(-\frac{1}{5}\right) + 3 \rightarrow y = \frac{-2 + 15}{5}$$

$$y = \frac{13}{5}. \quad \text{Assim, } x = -\frac{1}{5} \text{ e } y = \frac{13}{5}.$$

4) Como sabemos que o ponto pertence ao eixo das abscissas $(x, 0)$, precisamos descobrir os valores de m que satisfazem a equação $m^2 - 6m + 5 = 0$:

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$m_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ e } m_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Sendo assim, os valores que satisfazem a equação cujo par ordenado está no eixo das abscissas são $m_1 = 5$ e $m_2 = 1$.

Formalização:

A todo par ordenado (x, y) , existe associado um único ponto no plano e reciprocamente, a todo ponto do plano existe associado um único par ordenado.

$$P \leftrightarrow (x, y)$$

Onde:

$x \rightarrow$ abscissa do ponto P.

$y \rightarrow$ ordenada do ponto P

Um ponto que pertence ao eixo das abscissas possui *ordenada nula*. Um ponto que pertence ao eixo das ordenadas possui *abscissa nula*.

Dois pares ordenados (x, y) e (a, b) são iguais se, e somente se $x = a$ e $y = b$.

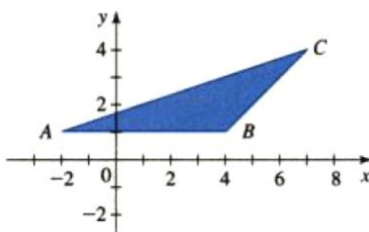
Propriedades:

O produto Cartesiano não é comutativo, isto é: $\exists A, B$ tal que: $A \times B \neq B \times A$.

Se o conjunto A possuir m elementos e B possuir n elementos, então $A \times B$ possui $m \cdot n$ elementos.

Atividade⁶² 2

1) Determine a área do triângulo ilustrado na figura:



2) Demonstre que os pontos A(-2,9), B(4,6), C(1,0) e D(-5,3) são os vértices de um quadrado.

3) Um quadrado de perímetro 20 é inscrito em um quadrado de perímetro 28. Qual é a maior distância entre um vértice do quadrado e um vértice do quadrado externo

⁶² Problemas 1) e 2) adaptados de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 98). Problema 3) adaptado de NCTM (2007, p.04)

Conteúdos Específicos:

O plano cartesiano. Área de figuras planas. Perímetro. Distância entre pontos. Teorema de Pitágoras.

Objetivos Específicos:

Marcar pontos no plano cartesiano e determinar áreas de figuras planas formadas por tais pontos. Determinar a distância entre dois pontos de um plano. Relacionar a fórmula de determinação de distâncias com o Teorema de Pitágoras.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Sabendo que a área do triângulo é dada por: $A_t = \frac{Base \times Altura}{2}$, devemos, a partir dos vértices do triângulo, efetuar tal cálculo. Os vértices são: $A(-2,1)$, $B(4,1)$ e $C(7,4)$.

Base: distância entre as coordenadas x dos pontos $A(-2,1)$ e $B(4,1)$.

Altura: distância entre as coordenadas y dos pontos $C(7,4)$ e $B(4,1)$, calculadas externas ao triângulo pela reta suporte AB:

$$A_t = \frac{Base \times Altura}{2} = \frac{(4 - (-2)) \times (4 - 1)}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ unidades de área.}$$

2) Para demonstrar que os pontos são vértices de um quadrado, devemos mostrar que as distâncias entre os pontos A e B ; B e C ; C e D e D e A são iguais e que os ângulos formados são retos:

Distância entre A e B :

$$d_{AB} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (6 - 9)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \text{ u. c}$$

Distância entre B e C :

$$d_{BC} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 0)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \text{ u. c}$$

Distância entre C e D :

$$d_{CD} = \sqrt{(1 - (-5))^2 + (0 - 3)^2}$$

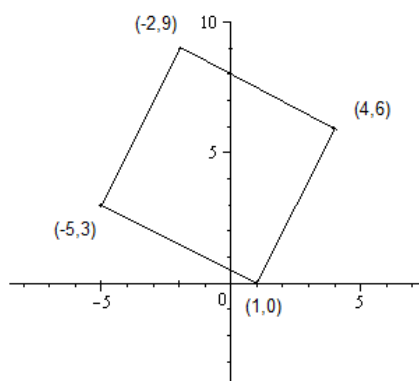
$$d_{CD} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \text{ u. c}$$

Distância entre D e A :

$$d_{DA} = \sqrt{(1 - (-5))^2 + (0 - 3)^2}$$

$$d_{DA} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \text{ u. c}$$

Calculadas as distâncias faremos o cálculo dos ângulos através dos coeficientes angulares das retas que foram os lados do suposto quadrado.



Para o lado que contém os pontos $(-5, 3)$ e $(-2, 9)$ temos o coeficiente:

$$m_1 = \frac{9 - 3}{-2 - (-5)} = \frac{6}{3} = 2$$

Para o lado que contém os pontos $(-2, 9)$ e $(4, 6)$ temos o coeficiente:

$$m_2 = \frac{9 - 6}{-2 - 4} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

Para o lado que contém os pontos $(4, 6)$ e $(1, 0)$ temos o coeficiente:

$$m_3 = \frac{6 - 0}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Para o lado que contém os pontos $(-5, 3)$ e $(1, 0)$ temos o coeficiente:

$$m_4 = \frac{3 - 0}{-5 - 1} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

Duas retas são perpendiculares se $m_r = -\frac{1}{m_s}$. Sendo assim, temos que m_1 e m_2 são retas perpendiculares; m_2 e m_3 são retas perpendiculares; m_3 e m_4 são retas perpendiculares e m_4 e m_1 são retas perpendiculares e, portanto definem ângulos retos.

Como $d_{AB} = d_{BC} = d_{CD} = d_{DA}$, e possuem ângulos retos, os vértices formam um quadrado.

3) O quadrado maior tem perímetro 28 u.c. e o quadrado menor 20 u.c.

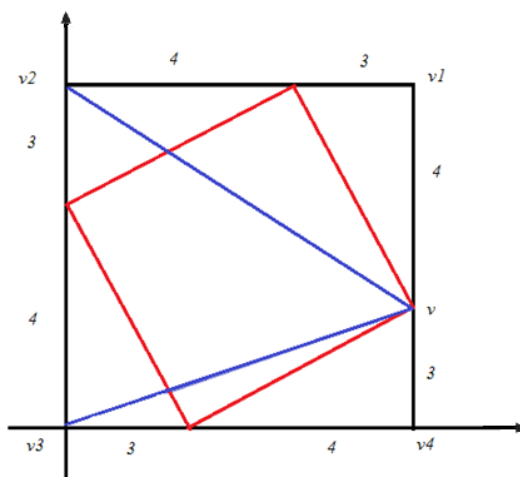
Perímetro do quadrado maior: $L + L + L + L = 28 \rightarrow 4L = 28 \text{ u.c.} \rightarrow L = \frac{28 \text{ u.c.}}{4} = 7 \text{ u.c.}$

Perímetro do quadrado menor: $l + l + l + l = 20 \rightarrow 4l = 20 \text{ u.c.} \rightarrow l = \frac{20 \text{ u.c.}}{4} = 5 \text{ u.c.}$

O quadrado maior possui lado 7 u.c., e o quadrado interno possui lado 5 u.c. Dessa forma, o lado do quadrado maior será dividido em duas partes medindo 3 u.c. e 4 u.c. para que, juntamente com o lado do quadrado menor, 5 u.c. (hipotenusa) satisfaça o Teorema de Pitágoras:

$$5^2 = 4^2 + 3^2 \text{ ou } (25 = 16 + 9)$$

Queremos saber qual é a maior distância entre um vértice do quadrado interno (v) e os vértices do quadrado externo (v_1, v_2, v_3, v_4). Segue esboço:



Calculando as distâncias temos:

Distância de $v(7,3)$ a $v_1(7,7)$:

$$d(v, v_1) = \sqrt{(7-3)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ u. c.}$$

Distância de $v(7,3)$ a $v_2(0,7)$:

$$d(v, v_2) = \sqrt{(7-0)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \text{ u. c.}$$

Distância de $v(7,3)$ a $v_3(0,0)$:

$$d(v, v_3) = \sqrt{(7-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} \text{ u. c.}$$

Distância de $v(7,3)$ a $v_4(7,0)$:

$$d(v, v_4) = \sqrt{(7-7)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ u. c.}$$

Formalização:

A maior distância entre um vértice do quadrado interno e um vértice do quadrado externo é de $\sqrt{65} \text{ u. c.}$

A distância entre dois pontos quaisquer $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ de um plano coordenado é dada por $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Duas retas r e s não verticais são perpendiculares se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja,

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

Atividade⁶³ Extraclasse

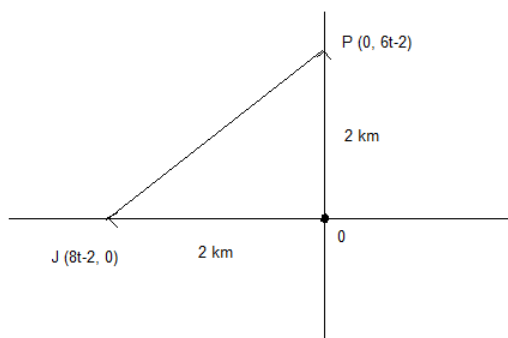
Dois atletas, João e Pedro, correm com velocidades constantes, iguais a 8km/h (João) e 6km/h (Pedro), ao longo de duas pistas perpendiculares. Às 7 horas, ambos estão a 2km do ponto de encontro das pistas, indo em direção a ele; João está a oeste do ponto de interseção e Pedro, ao norte. Pergunta-se:

⁶³ Problema retirado de Lima et al (2006, p. 59)

- a) A que horas a distância (em linha reta) entre os corredores é mínima?
 b) Quanto vale essa distância mínima?
 c) Nesse instante, a que distância cada um está do ponto de encontro das pistas?

Estratégia de resolução pensada pela professora:

Fazendo um esboço temos:



$$d_{P,J} = \sqrt{(0 - (8t - 2))^2 + (0 - (6t - 2))^2} = \sqrt{64t^2 - 32t + 4 + 36t^2 - 24t + 4}$$

$d_{P,J} = \sqrt{100t^2 - 56t + 8} \leq 0$ (para que a distância seja mínima), assim:

$$d^2 = 100t^2 - 56t + 8$$

Fazendo $100t^2 - 56t + 8 = 0$, obtemos as raízes da equação:

$$t = \frac{56 \pm \sqrt{(56)^2 - 4(100) \cdot 8}}{2 \cdot 100} = \frac{56 \pm \sqrt{3136 - 3200}}{200} = \frac{56 \pm \sqrt{-64}}{200}$$

A equação não possui raiz real. Vamos calcular o ponto do vértice da parábola:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{56}{200} = 0,28$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{64}{400} = 0,16$$

$V(0,28, 0,16)$. Analisando o vértice temos:

Para $t = 0,28$ horas, distância será $d^2 = 0,16 \rightarrow d = 0,4\text{km}$

a) A que horas a distância é mínima?

$t = 0,28$ horas $\rightarrow 0,28 \times 60 \text{ min} = 16 \text{ min e } 48 \text{ seg.}$

b) Quanto vale essa distância mínima? $d = 0,4\text{km}$

c) Nesse instante, a que distância cada um está do ponto de encontro das pistas?

$$P(0, 6t - 2) \rightarrow (0, 6(0,28) - 2) \rightarrow (0, 32)$$

$$J(8t - 2, 0) \rightarrow (8(0,28) - 2, 0) \rightarrow (24, 0)$$

Pedro está a 32 km e João está a 24 km.

11º Encontro:**Objetivos do encontro:**

Inicialmente iremos trabalhar a atividade extraclasse deixada no encontro anterior. Na sequência, estudar a teoria de funções. Determinar o valor de uma função em um dado ponto e determinar a raiz da função. Estudar domínio e imagem de funções. Esboçar gráficos de funções.

Atividade⁶⁴ 1

- 1) A velocidade média de um automóvel em uma estrada é de 90km/h.
- Qual é a distância percorrida pelo automóvel em 1 hora? E em 2 horas?
 - Em quanto tempo o automóvel percorre a distância de 360km?
 - Escreva uma expressão matemática que relacione a distância percorrida (d) em função do tempo (t).
 - Determine em quanto tempo o carro percorre 495 km.
 - A partir da expressão encontrada, esboce os pontos em um plano cartesiano.
- 2) Suponha que o número de carteiros necessários para distribuir, em cada dia, as correspondências entre as residências de um bairro seja dado pela função $f(x) = \frac{22x}{500+2x}$, em que x é o número de residências e $f(x)$ é o número de carteiros. a) Se forem necessários 6 carteiros para distribuir, em um dia, estas correspondências, qual o número de residências desse bairro? b) É possível que esse bairro não necessite de carteiros? Justifique sua resposta e faça o esboço do gráfico.

Conteúdos Específicos:

Conceito de função. Construção da função. Esboço de gráfico. Valor da função no ponto.

Objetivos Específicos:

Encontrar a expressão geral de uma função a partir de dados de um problema. Fazer o esboço da função encontrada no plano cartesiano. Determinar o valor da função no ponto.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

- 1) a) e b) Para responder, podemos construir uma tabela de valores:

Tempo (horas)	Distância (km)
1	90
2	180
3	270
4	360
...	...

⁶⁴ Problemas adaptados de Iezzi et al (2001, p. 31)

Dessa forma, para $t = 1$ hora, o carro terá andando 90km.

Para $t = 2$ horas, o carro terá andado 180km.

Para $t = 4$ horas, o carro terá andando 360km.

c) Como para cada valor de t , temos associado um único valor d , podemos dizer que a distância d é função do tempo t , e assim:

$$d = 90t$$

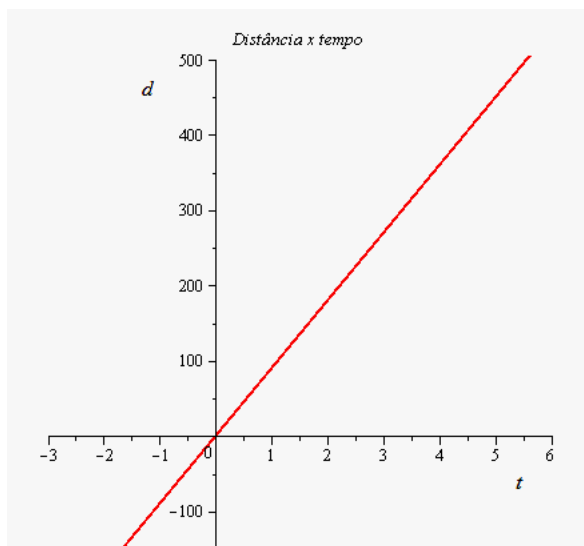
d) Como $d = 90t$, então

$$495 \text{ km} = (90 \text{ km/h})t$$

$$t = \frac{495 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = 5,5 \text{ h}$$

Ou seja, 5 horas e 30 minutos.

e)



2) a) $f(x) = \frac{22x}{500+2x}$. Sabendo que x é o número de residência e $f(x)$ o número de careiros.

Quando $f(x) = 6$ tem-se:

$$6 = \frac{22x}{500 + 2x} \rightarrow 6(500 + 2x) = 22x \rightarrow 3.000 + 12x = 22x \rightarrow -10x = -3.000 \rightarrow$$

$$x = \frac{3.000}{10} = 300$$

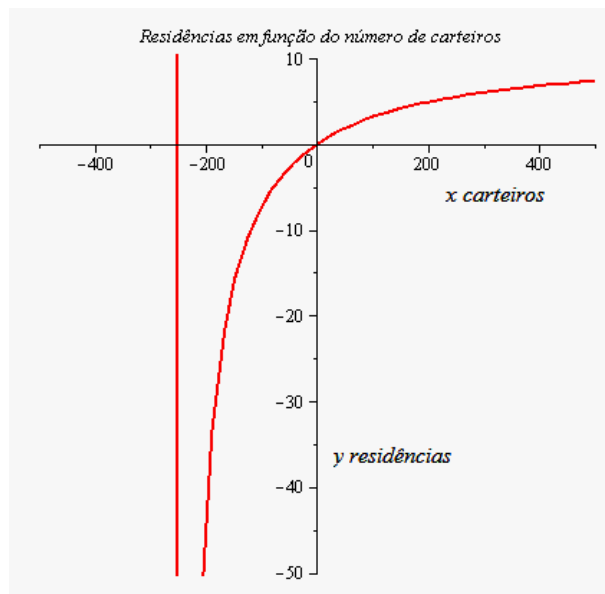
Ou seja, 6 careiros podem atender a 300 residências.

b) Para que o bairro não necessite de careiros, $f(x)=0$, qual seria o número de residências?

$$f(x) = \frac{22x}{500 + 2x} \rightarrow 0 = \frac{22x}{500 + 2x} \rightarrow 0(500 + 2x) = 22x \rightarrow 0 = 22x \rightarrow x = 0$$

Para que não seja necessário o trabalho dos carteiros, não deve haver nenhuma casa no bairro, o que pode ser concluído diretamente da leitura e interpretação do problema.

c) Gráfico da função $f(x) = \frac{22x}{500+2x}$:



Formalização:

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função f é uma correspondência que associa a cada elemento x do conjunto A exatamente um elemento, chamado $f(x)$, do conjunto B .

O conjunto A é chamado de domínio ou campo de definição da função e o conjunto B é a imagem ou o campo de variação da função; x é a variável independente e y a variável dependente.

Atividade⁶⁵ 2

1) Determine o domínio e a imagem das funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x-8}$

b) $g(x) = \sqrt{x-5}$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2-49}$

2) Esboce os gráficos das funções e determine suas raízes:

a) $f(x) = 5x + 3$ c) $h(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = x^2 + 9$

⁶⁵ Problema adaptado de Iezzi et al (2001, p. 60)

Conteúdos Específicos:

Domínio ou campo de definição da função e imagem ou campo de variação. Esboço de gráfico. Raízes ou zero de funções.

Objetivos Específicos:

Compreender a necessidade de análise dos pontos do domínio e da imagem de uma função. Estudo da existência ou não de raízes.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) O campo de definição (domínio) da função é o conjunto de números reais tais que a função também seja real:

$$a) f(x) = \frac{1}{x-8}$$

$$\frac{1}{x-8} \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } x-8 \neq 0$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 8\} \text{ e } Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 0\} \text{ ou } Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$b) g(x) = \sqrt{x-5}$$

$$\sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } x-5 \geq 0$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\} \text{ e } Im(f) = \mathbb{R}_+$$

$$c) h(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2-49}$$

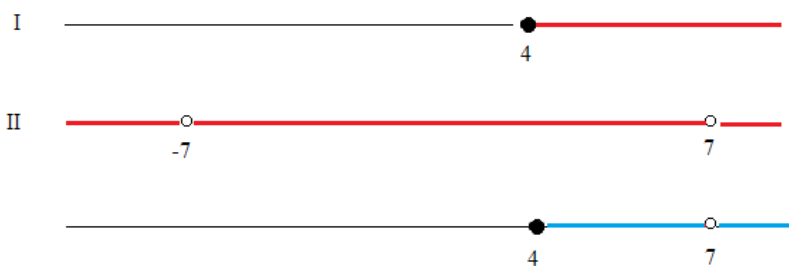
$$\frac{\sqrt{x-4}}{x^2-49} \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \in \mathbb{R}, x-4 \geq 0 \text{ e } x^2-49 \neq 0$$

Ou seja,

$$x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \text{ (I)}$$

$$x^2-49 \neq 0 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x \neq \pm 7 \text{ (II)}$$

Analisando o sinal, encontramos:



A solução da terceira reta representa a solução para o problema que vem da intersecção entre I e

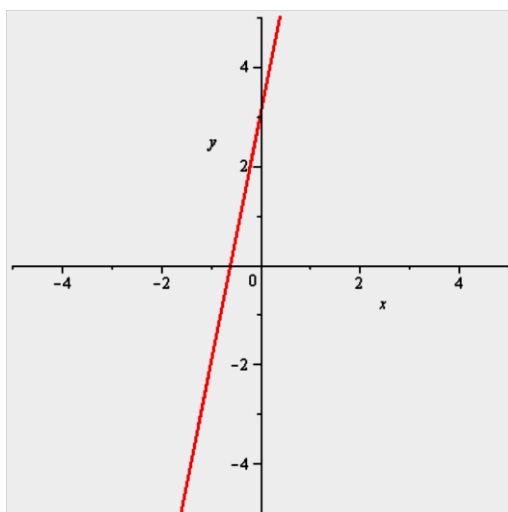
II:

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4 \text{ e } x \neq 7\} \text{ e } Im(h) = \mathbb{R}$$

2) Para fazer o esboço das funções, vamos construir tabelas:

a) $f(x) = 5x + 3$

x	$f(x)$
-2	7
0	3
3	18
...	...

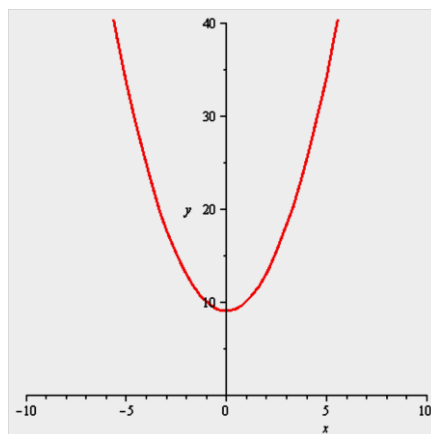


Pelo gráfico podemos ver que $f(x)$ possui uma raiz real. Para determiná-la basta fazer $f(x) = 0 \rightarrow 5x + 3 = 0 \rightarrow 5x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{5}$.

A imagem de $f(x)$ são todos os números reais.

b) $g(x) = x^2 + 9$

x	$g(x)$
-2	13
-1	10
0	9
2	13
3	18
...	...



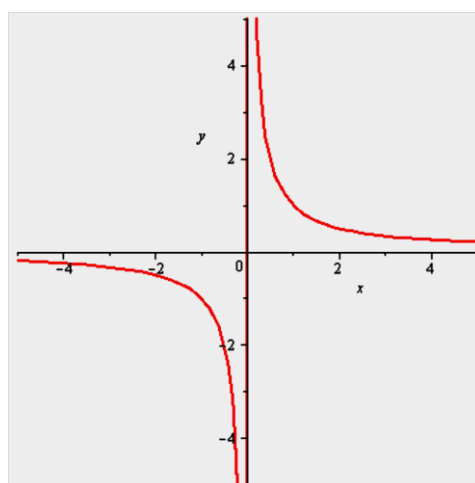
Pela tabela e gráfico podemos ver que $g(x)$ não possui nenhuma raiz real.

A imagem de $g(x)$ é dada por todos os pontos de y que variam para os valores de x :

$$Im(g) = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 9\}$$

c) $h(x) = \frac{1}{x}$

x	$h(x)$
-2	-1/2
-1	-1
0	$\nexists$
2	1/2
3	1/3
...	...



Pela tabela e gráfico podemos ver que $h(x)$ não possui nenhuma raiz real.

$$Im(g) = \{y \in \mathbb{R}/y \neq 0\}$$

Formalização:

Seja $f: A \rightarrow B$. Chamamos de *Campo de definição ou domínio* o conjunto de elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $\{x, y\} \in f$.

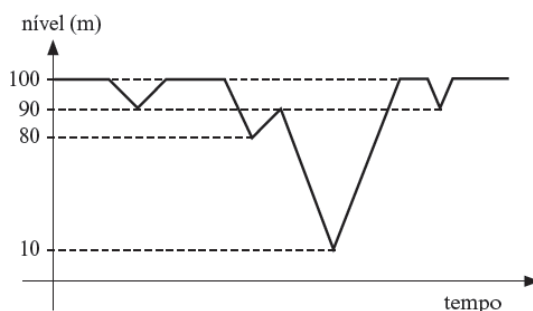
Seja $f: A \rightarrow B$. Chamamos de *Campo de variação ou imagem* o conjunto de elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $\{x, y\} \in f$.

Chama-se raiz ou zero de uma função real, $y = f(x)$, todo número r do campo de definição de f , tal que $f(r) = 0$.

Atividade⁶⁶ Extraclasse

1) O gráfico a seguir mostra o nível de água armazenada em uma barragem, ao longo de um ano. Analise atentamente o gráfico e responda:

- Qual foi o menor nível de água armazenada na barragem? E o maior?
- Quantas vezes no ano a barragem atingiu o nível de 40 m? E o nível de 95 m?



2) De modo geral, a lei que rege as transações comerciais é dada por $V = C + L$, onde: V é o preço de venda do produto; C é o preço de custo do produto e L é o lucro obtido na transação.

Para produzir um objeto, uma firma gasta R\$ 1,20 por unidade. Além disso, há uma despesa fixa de R\$ 4.000,00, independente da quantidade produzida. O preço de venda é de R\$ 2,00 por unidade.

- Define-se *receita* R como o produto do número de elementos vendidos pelo preço de venda. Qual é a receita gerada pela venda de 1000 objetos? E de 2500 objetos?
- Obtenha a lei que define o lucro L em função da produção de x unidades. Admita que todas as unidades sejam vendidas.
- Qual é o número de unidades a partir do qual a firma começa a ter lucros?

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) a) Devemos observar no gráfico a que valor de x (tempo), a barragem encontra-se com menor e maior nível (y).

Menor nível: 10 metros

Maior nível: 100 metros

⁶⁶ Problema 1) adaptado de São Paulo (2009, p. 18). Problema 2) adaptado de Iezzi et al (2001, p. 94).

b) Observando o gráfico vemos que o nível de 40 metros foi atingido duas vezes no período. O nível de 95 metros foi atingido 6 vezes no período.

2) $V = C + L$

a) $R(x) = 2 \cdot x$

$$R(1000) = 2 \cdot 1000 = 2000$$

Para a venda de 1000 objetos, a receita gerada será de R\$ 2.000,00.

$$R(2500) = 2 \cdot 2500 = 5000$$

Para a venda de 2500 objetos, a receita gerada será de R\$ 5.000,00.

b) $L(x) = R(x) - C(x)$

c) $L(x) = 2 \cdot x - (1,2 \cdot x + 4000) = 2 \cdot x - 1,2 \cdot x - 4000 = 0,8 \cdot x - 4000$

Queremos saber com que número de unidades a empresa começa a ter lucros, ou seja, $L(x) = 0$:

$$0,8 \cdot x - 4000 = 0$$

$$0,8 \cdot x = 4000$$

$$x = \frac{4000}{0,8} = 5000$$

A empresa começa a ter lucro quando vende mais de 5000 unidades.

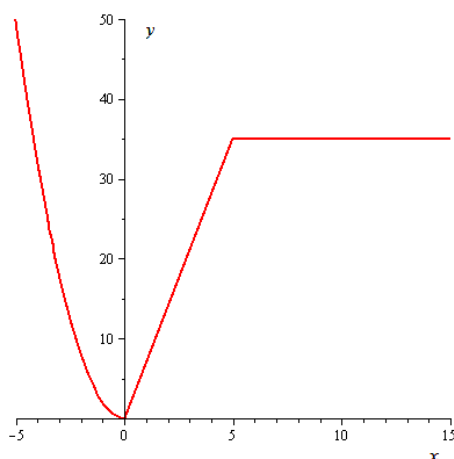
12º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos estudar o crescimento e o decrescimento de funções. Além disso, também estudaremos a composição de funções e as funções inversas.

Atividade⁶⁷ 1

1) Considere o gráfico da função f representado a seguir:



⁶⁷ Problema 1) elaborado pela pesquisadora. Problema 2) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 219)

- a) Em qual (ais) intervalo(s) a função é crescente?
- b) Em qual (ais) intervalo(s) a função é decrescente?
- c) Em qual (ais) intervalo(s) a função é constante?

2) Um barco está viajando a 20 milhas/h paralelo à costa. O barco está a 5 milhas da borda. Passou por um farol ao meio-dia.

- a) Expresse a distância s entre o farol e o barco como uma função de d , a distância que foi percorrida pelo barco desde o meio-dia, ou seja, encontre f de modo que $s = f(d)$.
- b) Expresse d como uma função de t , o tempo transcorrido desde o meio-dia, ou seja, encontre g tal que $d = g(t)$.
- c) Encontre $f \circ g$. O que representa essa função?

Conteúdos Específicos:

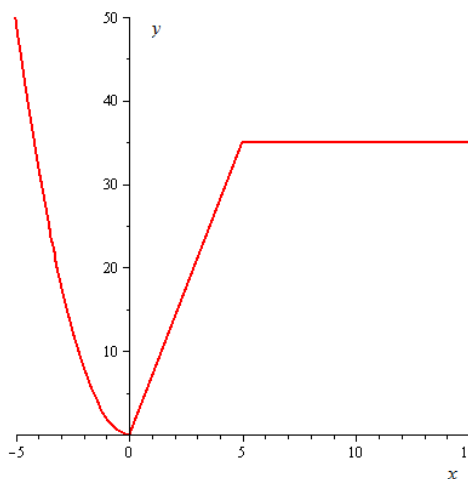
Comportamento ou variação da função. Esboço de gráfico. Função composta.

Objetivos Específicos:

Estudar o comportamento de uma função através de seu gráfico. Composição de funções.

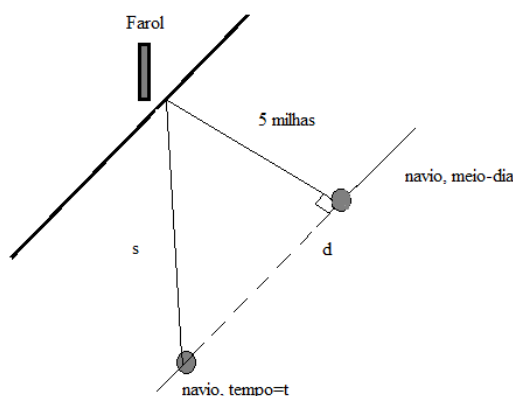
Estratégia de resolução pensada pela professora:

1)



- a) A função é crescente no intervalo de $[0, 5]$.
- b) A função é decrescente no intervalo de $(-\infty, 0)$.
- c) A função é constante no intervalo $[5, \infty)$.

2) Fazendo um esboço do problema:



a) Podem-se relacionar as distâncias s e d pelo teorema de Pitágoras. Assim, s pode ser expressa por uma função de d dada por $s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$

b) Como o navio está viajando a 20 milhas/h, a distância d que já percorreu é uma função de t como $d = g(t) = 20t$.

c) Fazendo

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(20t) = \sqrt{25 + (20t)^2}$$

A função $f \circ g$ é a distância do barco até o farol como uma função do tempo.

Formalização:

Uma função real f é crescente se e somente se, para quaisquer números x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Uma função real f é decrescente se e somente se, para quaisquer números x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

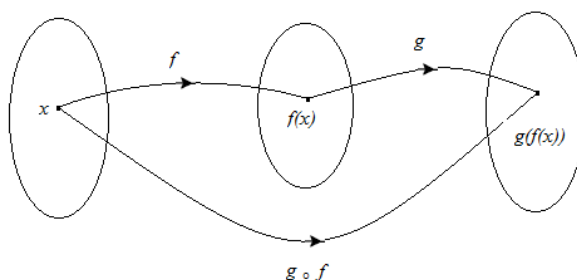
Uma função real f é constante se e somente se, para quaisquer números x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = k$, onde k é uma constante real.

Sejam A , B e C conjuntos e sejam as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$. A função $h: A \rightarrow C$, tal que $h(x) = g(f(x))$, é chamada de função composta de g e f . Indicamos por $g \circ f$ (g composta com f).

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto formado por todos x do domínio de g tal que $g(x)$ está no domínio de f .

Figura 93 – Função composta.

Fonte: Elaborada pela autora.

É possível realizar a composição de três ou mais funções. Encontramos, por exemplo, $(f \circ g \circ h)$ ao aplicar $h(x)$ em g e depois $g(h(x))$ em f :

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Atividade⁶⁸ 2

1) No interior de uma caverna existe uma estalagmite cuja altura aumenta de modo constante à razão de 1 cm a cada 10 anos. Nessas condições, a função h , definida por $h(t) = \frac{t}{10}$ com $t \geq 0$, relaciona a altura da estalagmite (em centímetros) com o tempo (em anos) decorrido desde o início de sua formação. Justifique as seguintes afirmações:

- a) A função inversa de h é definida por $h^{-1}(t) = \frac{10}{t}$.
- b) Serão necessários 200 anos para que haja um aumento de 20 cm na altura da estalagmite.
- c) $h(h^{-1}(50)) = 50$.

Conteúdos Específicos:

Função inversa. Condições para que uma função possua inversa. Função composta.

Objetivos Específicos:

Estudar a função inversa e a função composta. Compreender os tipos de função: sobrejetora, injetora e bijetora.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) $h(t) = \frac{t}{10}$ com $t \geq 0$

a) determinar a função inversa:

$$y = h(t) = \frac{t}{10} \rightarrow y = \frac{t}{10} \rightarrow 10y = t$$

Ou seja, a função inversa é dada por: $h^{-1}(t) = 10t$

⁶⁸ Problema retirado de Iezzi et al (2001, p. 226)

A afirmativa da letra a) está incorreta. A inversa de $h(t) = \frac{t}{10}$ com $t \geq 0$ é dada por $h^{-1}(t) = 10t$.

b) $t = 200$ anos para que aumente $h = 20$ cm?

Como a estalagmite cresce $1\text{ cm} \rightarrow 10\text{ anos}$, basta substituir $t = 200\text{ anos}$ na função dada:

$$h(200) = \frac{200}{10} = 20\text{ cm}$$

A letra b) está correta, em $t = 200$ anos a estalagmite aumentará $h = 20$ cm.

c) $h(h^{-1}(50)) = 50$

Sejam:

$h(t) = \frac{t}{10}$ e $h^{-1}(t) = 10t$, temos:

$$h(h^{-1}(t)) = \frac{10t}{10} = t$$

$$h(h^{-1}(50)) = 50$$

Afirmativa correta.

Formalização:

Função sobrejetora:

$f: A \rightarrow B$ é uma função sobrejetora quando seu conjunto imagem (campo de variação) é o próprio conjunto B.

$$Im(f) = B.$$

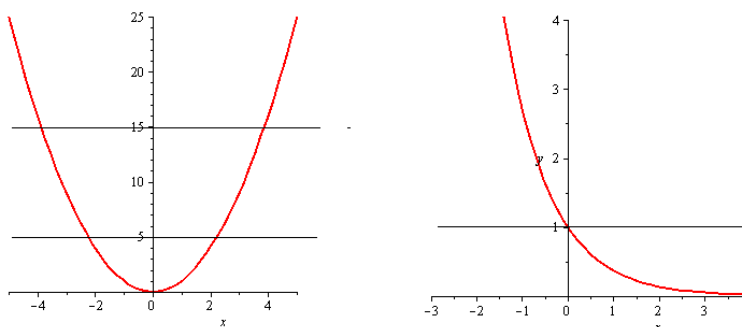
Função injetora:

$f: A \rightarrow B$ é uma função injetora quando a dois elementos distintos quaisquer de A correspondem dois elementos distintos de B.

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Uma forma de verificar se a função é injetora é traçar uma reta horizontal em seu gráfico. Se a reta cortar o gráfico da função em mais de um ponto, ela não será injetora.

Figura 94 - Reta horizontal para verificação da função injetora.



Fonte: Elaborada pela autora.

Função bijetora:

Uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetora, quando for sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.

Função inversa:

Dada uma função bijetora $f: A \rightarrow B$, chama-se de função inversa de f a função $f^{-1}: B \rightarrow A$, tal que $(x, y) \in f \leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$.

Para determinar a inversa de uma função, fazemos:

1. Escreva $y = f(x)$;
2. Resolva a equação para x em termos de y (se possível);
3. Troque x e y . A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

Observações:

- 1) A inversa de f somente existe se f for bijetora;
- 2) $D(f) = Im(f^{-1})$
- 3) $Im(f) = D(f^{-1})$
- 4) $(f^{-1})^{-1} = f$
- 5) os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz do 1° e 3° quadrantes.

Atividade Extra

- 1) Determine a composição de funções:

Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, encontre as seguintes funções e seus domínios:

- e) $(f \circ g)$
- f) $(g \circ f)$
- g) $(f \circ f)$
- h) $(g \circ g)$

- 2) Encontre a inversa de $f(x) = \frac{x^5-3}{2}$

Estratégia de resolução pensada pela professora:

- 1) Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, então:

- a) $(f \circ g) = f(g(x)) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$, sendo assim temos que analisar $2-x \geq 0 \rightarrow -x \geq -2 \rightarrow x \leq 2$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$$

- b) $(g \circ f) = g(f(x)) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$, sendo assim temos que analisar $2-\sqrt{x} \geq 0 \rightarrow -\sqrt{x} \geq -2 \rightarrow \sqrt{x} \leq 2 \rightarrow x \leq 4$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$$

- c) $(f \circ f) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$, sendo assim temos $x \geq 0$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$$

d) $(g \circ g) = g(g(x)) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$, sendo assim temos que analisar

$$2 - \sqrt{2 - x} \geq 0 \rightarrow -\sqrt{2 - x} \geq -2 \rightarrow \sqrt{2 - x} \leq 2 \rightarrow 2 - x \leq 4 \rightarrow$$

$$-x \leq 4 - 2 \rightarrow -x \leq 2 \rightarrow x \geq -2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$$

2) Seja $f(x) = \frac{x^5 - 3}{2}$, devemos determinar sua inversa:

$$f(x) = y = \frac{x^5 - 3}{2}$$

Fazendo a troca de x por y temos:

$$x = \frac{y^5 - 3}{2} \rightarrow 2x = y^5 - 3 \rightarrow 2x + 3 = y^5 \rightarrow y = \sqrt[5]{2x + 3}$$

Ou seja, $f(x)^{-1} = \sqrt[5]{2x + 3}$

Atividade⁶⁹ Extraclasse

1) Obtenha a inversa das funções, se possível:

a) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 2x + 1$

2) Considere a função $f:]0, \infty[$, definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Obtenha a $f^{-1}(x)$ e calcule $f^{-1}(4)$.

3) Um estudo das condições ambientais de um município indica que a taxa média de monóxido de carbono no ar será de $C(p) = 0,5p - 1$ p.p.m (partes por milhão) quando a população for de p milhares de habitantes. Daqui a t anos, a população será de :

$$p(t) = 10 + 0,1t^2$$

a) Atualmente, qual é a taxa de monóxido no ar?

b) Qual será a taxa de monóxido de carbono daqui a 4 anos?

c) Daqui a quanto tempo a concentração de monóxido será de 9 p.p.m?

d) Determine o nível de monóxido em função do tempo.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) a) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

⁶⁹ Problema 1) adaptado de Iezzi et al (2001, p. 225). Problema 2) Adaptado de Marcon e Noguti (2009, p. 41). Problema 3) adaptado de Iezzi et al (2001, p. 150).

Isolando x na função, temos:

$$y = \frac{x}{2} + 1 \rightarrow y = \frac{x+2}{2} \rightarrow 2y = x+2 \rightarrow 2y-2 = x$$

Reescrevendo a função permutando as variáveis x e y :

$$f^{-1}(x) = y = 2x - 2$$

b) $f(x) = x^2$

A função não é inversível se for definida como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para que seja inversível é necessário que $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

c) $f(x) = 2x + 1$

Isolando x na função, temos:

$$y = 2x + 1 \rightarrow y - 1 = 2x \rightarrow \frac{y-1}{2} = x$$

Reescrevendo a função permutando as variáveis x e y :

$$f^{-1}(x) = y = \frac{x-1}{2}$$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}, f:]0, \infty[$

Isolando x na função, temos:

$$y = \frac{1}{x^2} \rightarrow y \cdot x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{y} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y}}$$

A inversa é possível devido à definição da função. Reescrevendo a função permutando as variáveis x e

$y: f^{-1}(x) = y = \sqrt{\frac{1}{x}}$

b) $f^{-1}(4) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

3) $C(p) = 0,5p - 1$

$$p(t) = 10 + 0,1t^2$$

a) Atualmente, qual é a taxa de monóxido no ar?

$$p(0) = 10 + 0,1(0)^2 \rightarrow 10$$

$$C(10) = 0,5 \cdot (10) - 1 \rightarrow 4 \text{ p.p.m.}$$

b) Qual será a taxa de monóxido de carbono daqui a 4 anos?

$$p(4) = 10 + 0,1(4)^2 \rightarrow 10 + 1,6 \rightarrow 11,6$$

$$C(11,6) = 0,5 \cdot (11,6) - 1 \rightarrow 4,8 \text{ p.p.m.}$$

c) Daqui a quanto tempo a concentração de monóxido será de 9 p.p.m?

$$9 = 0,5p - 1 \rightarrow 9 + 1 = 0,5p \rightarrow p = \frac{10}{0,5} = 20 \rightarrow 20 = 10 + 0,1t^2 \rightarrow 20 - 10 = 0,1t^2 \rightarrow$$

$$10 = 0,1t^2 \rightarrow t^2 = \frac{10}{0,1} \rightarrow t^2 = 100 \rightarrow t = 10$$

Daqui a 10 anos.

d) Determine o nível de monóxido em função do tempo.

Para $C(p) = 0,5p - 1$ e $p(t) = 10 + 0,1t^2$, temos que $C(p(t)) = 0,5(10 + 0,1t^2) - 1$

$$C(t) = 5 + 0,05t^2 - 1$$

$$C(t) = 0,05t^2 + 4$$

13º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos estudar a função polinomial de primeiro grau, seu crescimento e decrescimento, o sinal da função e as funções linear e constante.

Atividade⁷⁰ 1

1) Em certo país, as pessoas maiores de 21 anos pagam um imposto progressivo sobre os rendimentos. Esse imposto corresponde a 10% sobre as primeiras 1.000 unidades monetárias recebidas e 20% sobre os ganhos que ultrapassam esse valor.

a) Nessas condições, indicando i para o valor do imposto e por r uma renda superior a 1.000, escreva uma forma geral para o cálculo do imposto.

b) Esboce o gráfico.

2) Uma função é definida por $f(x) = kx + 3$. Sabendo que $f(1) + f(-2) = 8$, determine o valor de $f(-1)$.

Conteúdos Específicos:

Função polinomial de 1º grau. Construção de uma expressão matemática para a função. O valor da função no ponto.

Objetivos Específicos:

Compreender a função polinomial de primeiro grau e suas variações (função constante e função linear). Construir uma expressão que representa a função a partir de dados de um problema.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Seja $i = 10\% = 0,10$ do imposto a ser pago e r a renda. Para renda até 1.000 unidades de moeda, temos: $i = 0,10 \times 1.000 = 100$.

⁷⁰ Problema 1) adaptado de Paiva (2004, p. 131). Problema 2) adaptado de Marcon e Noguti (2009, p. 40).

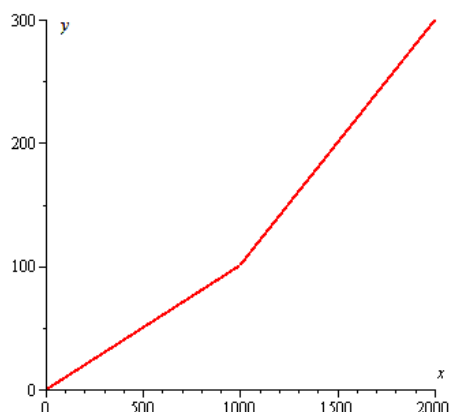
Para renda superior a 1.000 unidades recebidas o imposto que incide é de 20%, sendo assim, se $r > 1.000 \rightarrow i = 0,20$.

Para o problema, o indivíduo recebe mais de 1.000 unidades monetárias. Vamos construir a expressão matemática que descreve o problema:

$$i = 0,1 \times 1000 + 0,2(r - 1.000)$$

$$i = 100 + 0,2r - 200 \rightarrow i = 0,2r - 100$$

que é a forma geral para cálculo de imposto para rendas superiores a 1.000 unidades monetárias.



2) $f(x) = kx + 3$, sabendo que $f(1) + f(-2) = 8$, calcule $f(-1)$.

Devemos inicialmente calcular os valores $f(1)$ e $f(-2)$ para então obtermos $f(-1)$:

$$f(x) = kx + 3$$

$$f(1) = k \cdot 1 + 3 \rightarrow f(1) = k + 3$$

$$f(-2) = k(-2) + 3 \rightarrow f(-2) = -2k + 3$$

Sabendo que $f(1) + f(-2) = 8$, temos:

$$f(1) + f(-2) = 8$$

$$k + 3 + (-2k + 3) = 8$$

$$k - 2k + 3 + 3 = 8$$

$$-k + 6 = 8 \rightarrow -k = 8 - 6$$

$$-k = 2 \rightarrow k = -2$$

Agora conseguimos definir a função dada no problema como $f(x) = -2x + 3$, e a partir dela podemos calcular quanto vale $f(-1)$:

$$f(x) = -2x + 3$$

$$f(-1) = -2(-1) + 3$$

$$f(-1) = 5$$

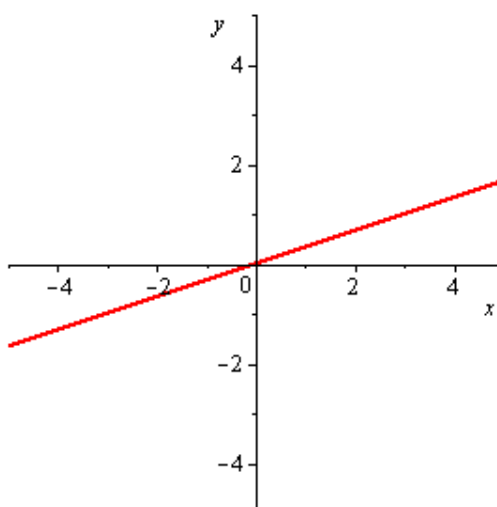
Formalização:

Toda função definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma função polinomial de primeiro grau.

Toda função do tipo $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma função linear.

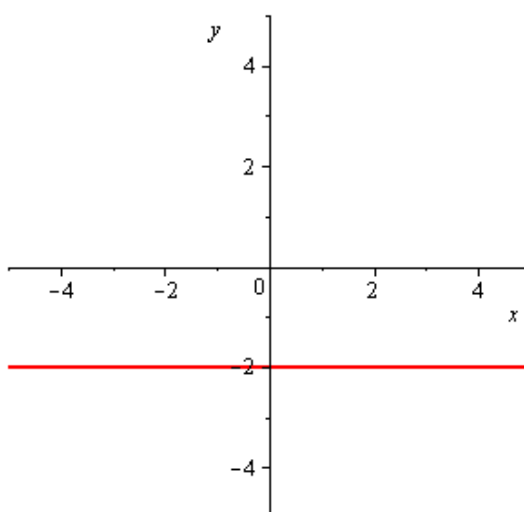
Toda função do tipo $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$ é uma função constante.

Figura 95 – Exemplo de função linear: $g(x) = \frac{1}{3}x$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 96 – Exemplo de função constante: $h(x) = -2$

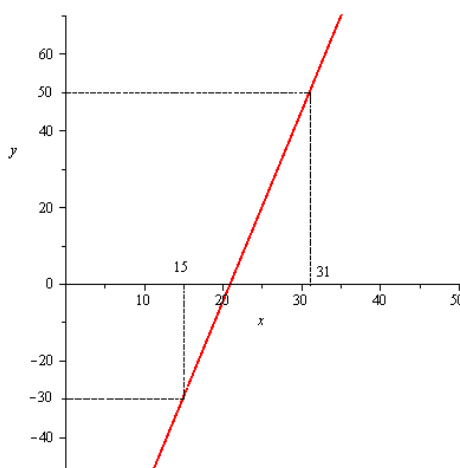


Fonte: Elaborada pela autora.

Atividade⁷¹ 2

1) No período de 15 a 31 de março, o saldo y , em milhares de dólares, da balança comercial de um país (a diferença entre o valor das exportações e o das importações, nessa ordem), em função do tempo x , em dias, pôde ser descrito por 17 pontos (um para cada dia) da reta representada abaixo:

⁷¹ Problema 1) retirado de Paiva (2004, p. 134). Problema 2) daptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 157).



Com base nessas informações, determine:

- a lei correspondente a esse gráfico;
- o dia nesse período em que o saldo da balança comercial foi nulo;
- os dias nesse período em que o saldo da balança comercial foi positivo;
- os dias nesse período em que o saldo da balança comercial foi negativo.

2) Uma livraria, hospedada na web, cobra R\$ 15,00 pelo envio de pedidos menores do que R\$100,00, porém o envio torna-se gratuito para pedidos iguais ou acima de R\$100,00. O custo C de um pedido é uma função do preço total x dos livros comprados, dada por:

$$C(x) = \begin{cases} x + 15, & \text{se } x < 100 \\ x, & \text{se } x \geq 100 \end{cases}$$

- Encontre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ e $C(105)$
- O que representam as respostas da letra a).

Objetivos Específicos:

Analisar o gráfico de uma função e dele tirar informações. Construir uma expressão que representa a função a partir de dados gráficos de um problema.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) a) Pelo gráfico conhecemos dois pontos: $(15, -30)$ e $(31, 50)$. Com estes pontos podemos escrever a expressão da função representada no gráfico:

$$f(x) = ax + b$$

Para o ponto $(15, -30)$:

$$-30 = 15x + b$$

Para o ponto $(31, 50)$:

$$50 = 31x + b$$

$$\begin{cases} -30 = 15x + b \\ 50 = 31x + b \end{cases}$$

Por adição, temos:

$$\begin{cases} 30 = -15x - b \\ 50 = 31x + b \end{cases} \rightarrow 80 = 16x \rightarrow x = \frac{80}{16} = 5$$

Voltando em uma das equações iniciais, encontramos o valor de b :

$$-30 = 15x + b \rightarrow -30 = 15(5) + b \rightarrow -30 = 75 + b \rightarrow b = -105$$

Desta forma, a lei que corresponde ao gráfico dado é: $f(x) = 5x - 105$.

b) queremos o dia em que o saldo da balança comercial foi nulo:

$$f(x) = 5x - 105 \rightarrow 0 = 5x - 105 \rightarrow x = 21$$

No dia 21 de março o saldo da balança comercial foi nulo.

c) Pela análise gráfica, verificamos que o saldo da balança é positivo entre os dias 22 e 31 de março que é o intervalo proposto pelo problema.

d) Pela análise gráfica, verificamos que o saldo da balança é negativo entre os dias 15 e 20 de março que é o intervalo proposto pelo problema.

2) a) $C(75)$

$$C(x) = x + 15, \quad x < 100$$

$$C(75) = 75 + 15 = 90$$

$C(90)$

$$C(x) = x + 15, \quad x < 100$$

$$C(90) = 90 + 15 = 105$$

$C(100)$

$$C(x) = x, \quad x \geq 100$$

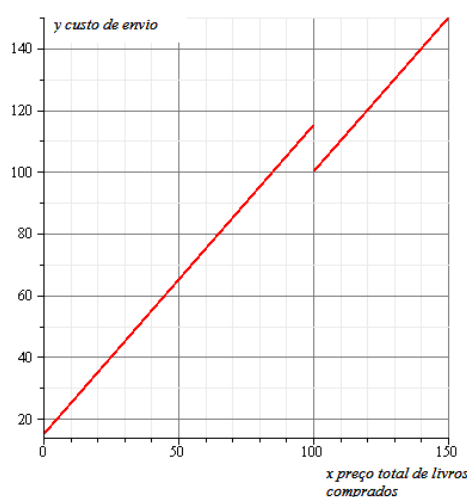
$$C(100) = 100$$

$C(105)$

$$C(x) = x, \quad x \geq 100$$

$$C(105) = 105$$

Graficamente temos:



b) Representam os custos de envio dos livros comprados.

Formalização:

Toda função definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma função polinomial de primeiro grau.

Toda função do tipo $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma função linear.

Toda função do tipo $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$ é uma função constante.

Seja $f(x) = ax + b$, chamamos o termo a de coeficiente angular da reta e o termo b de termo constante ou linear da reta.

O coeficiente angular a determina a inclinação da reta.

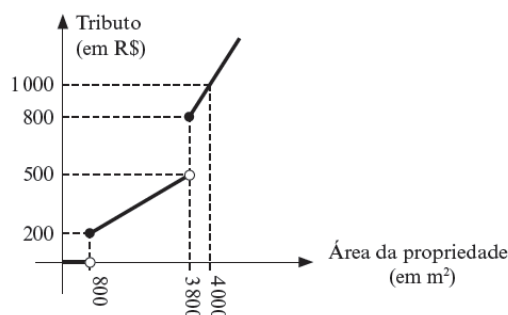
O coeficiente linear b determina a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy .

Chamamos de zero ou raiz da função polinomial de primeiro grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ o número real x tal que $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Atividade⁷² Extraclasse

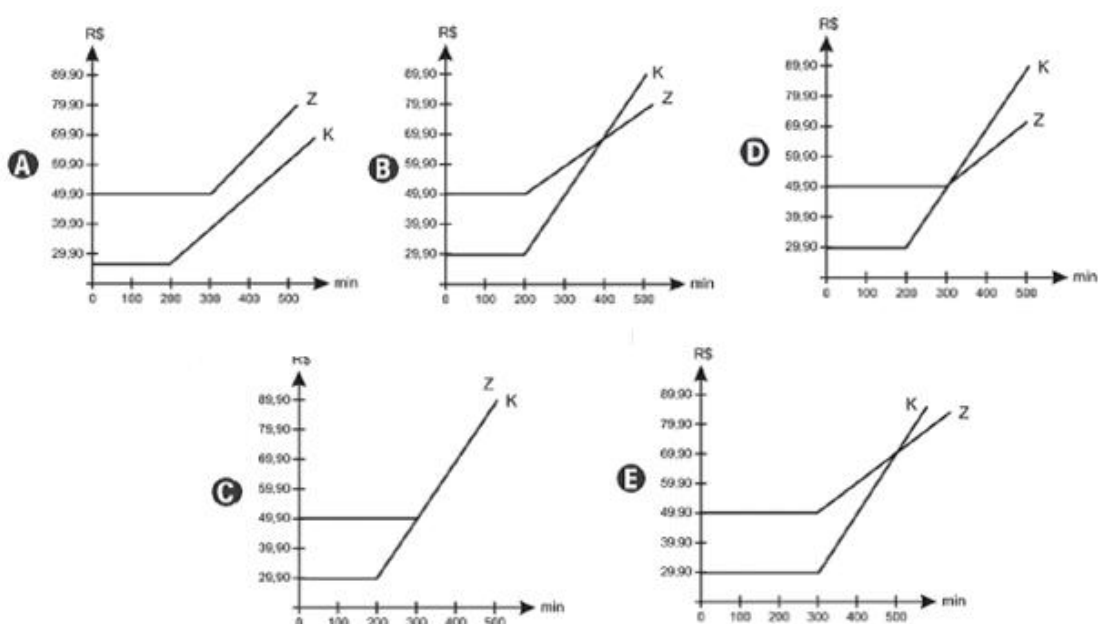
1) O gráfico a seguir indica o valor de um determinado tributo territorial em função da área de uma propriedade:



⁷² Problema 1) adaptado de São Paulo (2009, p. 26). Problema 2) retirado de Brasil (2010, p.23).

- a) Qual é o valor do imposto a pagar de uma propriedade de $800m^2$?
- b) Existe algum tamanho de propriedade (em m^2) cujo imposto cobrado seja exatamente R\$ 500,00?
- c) Determine uma função do tipo $f(x) = mx + n$, onde y é o tributo em reais e x área em m^2 , que seja válida para o intervalo $800 \leq x \leq 3800$.

2) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente para R\$ 29,90 por 200 minutos mensais e R\$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R\$ 49,90 por 300 minutos mensais e R\$ 0,10 por cada minuto excedente. O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:



3) Avalie as funções abaixo em: crescente, decrescente ou constante:

- a) $f(x) = 3x + 2$
 b) $f(x) = -2x - 3$

4) Estude o sinal das funções:

- a) $f(x) = 5x$
 b) $f(x) = 3 - \frac{x}{2}$

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Pela análise do gráfico, temos:

- a) Qual é o valor do imposto a pagar de uma propriedade de $800m^2$? R\$ 200,00
- b) Existe algum tamanho de propriedade (em m^2) cujo imposto cobrado seja exatamente R\$ 500,00? Não. Não há valor em m^2 para um imposto de R\$ 500,00.

c) Determine uma função do tipo $f(x) = mx + n$, onde y é o tributo em reais e x área em m^2 , que seja válida para o intervalo $800 \leq x \leq 3800$.

Para o intervalo, podemos ver no gráfico que:

$f(800) = 200$ e $f(3800) = 800$, então:

$$\begin{cases} 200 = 800m + n \\ 800 = 3800m + n \end{cases}$$

Multiplicando por (-1) a primeira equação do sistema, temos:

$$\begin{cases} -200 = -800m - n \\ 800 = 3800m + n \end{cases}$$

Que por adição resulta em: $600 = 3000m \rightarrow m = \frac{600}{3000} = 0,2$

Voltando ao sistema obtemos o valor de n :

$$200 = 800 \cdot (0,2) + n \rightarrow 200 = 160 + n \rightarrow 200 - 160 = n$$

$$n = 40$$

$$f(x) = 0,2x + 40$$

2) Analisando o gráfico e as informações dadas temos :

Plano Z: R\$ 49,90/ 300min mais R\$0,10 /min excedente

Plano K: R\$ 29,90/ 200min mais R\$0,20/min excedente

Calculando os dois planos para 300 minutos, temos:

Plano Z: $49,90 = 49,90$

Plano K: $29,90 + 100(0,20) = 29,90 + 20,00 = 49,90$

Os dois planos custam o mesmo valor para o uso de 300 minutos.

Calculando os dois planos para 500 minutos, temos:

Plano Z: $49,90 + 200(0,10) = 49,90 + 20 = 69,90$

Plano K: $29,90 + 300(0,20) = 29,90 + 60,00 = 89,90$

O gráfico que apresenta o esboço correto é o de letra (d).

3) a) $f(x) = 3x + 2$

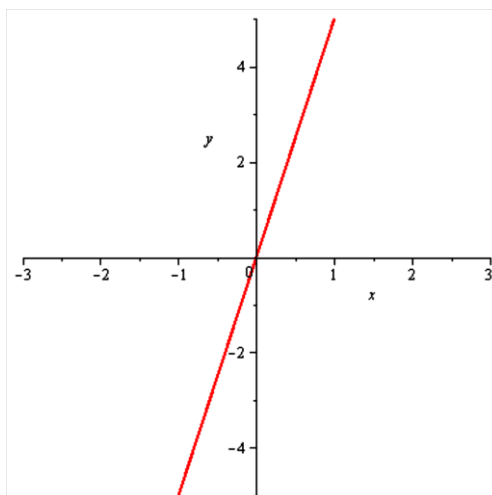
$a = 3 > 0$ Função Crescente

b) $f(x) = -2x - 3$

$a = -2 < 0$ Função Decrescente

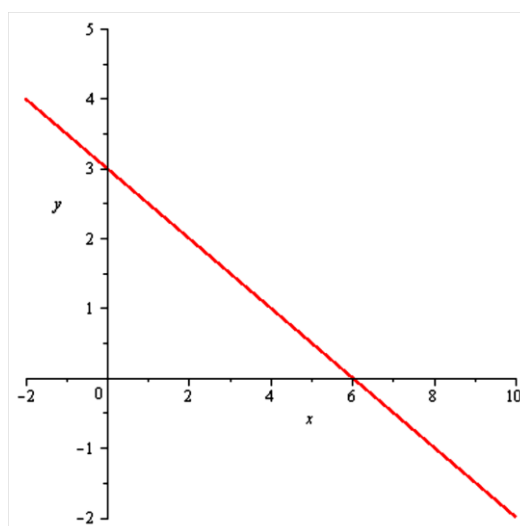
4) Faremos o estudo do sinal pelo gráfico da função:

a) $f(x) = 5x$



$$f(x) < 0, \forall x < 0; f(x) = 0, x = 0; f(x) > 0, \forall x > 0$$

b) $f(x) = 3 - \frac{x}{2}$



$$f(x) < 0, \forall x > 6; f(x) = 0, x = 6; f(x) > 0, \forall x < 6$$

14º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos estudar as funções polinomiais de 2º grau, a análise de seu crescimento e decrescimento, sinal, vértice e concavidade.

Atividade⁷³1

1) Estima-se que, daqui a x anos, o número de pessoas que visitarão um determinado museu será dado por $N(x) = 30x^2 - 120x + 3000$.

- a) Atualmente, qual é o número de pessoas que visitam o museu?
- b) Quantas pessoas visitarão o museu no 10º ano?
- c) Daqui a quantos anos será registrado o menor número de visitantes? Esboce o gráfico.

2) Quando certo remédio é tomado oralmente, sua concentração na corrente sanguínea do paciente depois de t minutos está dada por:

$$C(t) = 0,06t - 0,0002t^2 \quad \text{onde } 0 \leq t \leq 240$$

e a concentração é medida em mg/l . Quando é alcançada a concentração máxima, e qual é essa concentração? Esboce o gráfico de $C(t)$.

Conteúdos Específicos:

Função no ponto. Análise da função polinomial de segundo grau. Construção de gráfico. Raízes. Crescimento e decrescimento da função polinomial de segundo grau. Vértice e concavidade.

Objetivos Específicos:

Calcular o valor da função no ponto. Analisar o comportamento da função polinomial de segundo grau através da construção do gráfico, obtenção de raízes e vértice da função. Verificar as variações da função polinomial de segundo grau em relação a sua concavidade: ponto de máximo e ponto de mínimo.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) A função $N(x) = 30x^2 - 120x + 3000$ relaciona o número de pessoas $N(x)$ que visitam o museu em função do tempo x em anos.

- a) Atualmente, qual é o número de pessoas que visitam o museu?

$x = 0$ corresponde ao tempo atual, então:

$$N(0) = 30(0)^2 - 120(0) + 3000 = 3000$$

Ou seja, atualmente o número de visitantes do museu é de 3000 pessoas.

- b) Quantas pessoas visitarão o museu no 10º ano?

$$N(10) = 30(10)^2 - 120(10) + 3000 = 3000 - 1200 + 3000 = 6000 - 1200 = 4800$$

Ou seja, para $x = 10$ anos, o número de visitantes do museu será de 4800 pessoas.

- c) Daqui a quantos anos será registrado o menor número de visitantes?

$$N(x) = 30x^2 - 120x + 3000$$

⁷³ Problema retirado de Iezzi et al (2001, p. 109). Problema 2) daptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 157).

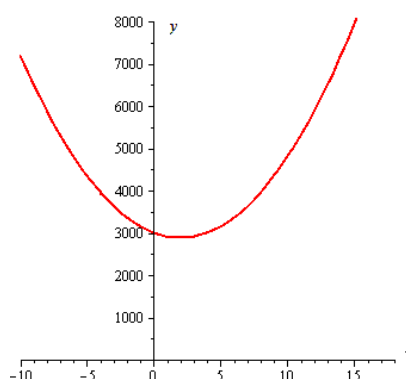
Como a função possui concavidade voltada para cima, $a > 0$, a parábola determina um ponto de mínimo. O ponto de mínimo fornece o menor número de visitantes, sendo assim, calculamos o ponto de vértice da parábola $V(x_v, y_v)$, onde $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-120)}{2(30)} = \frac{120}{60} = 2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-120)^2 - 4(30)(3000)}{4(30)} = -\frac{14400 - 360000}{120} = \frac{345600}{120} = 2880$$

$$V(x_v, y_v) = (2, 2880)$$

Esboço do gráfico:



Ou seja, o menor número de visitantes será registrado daqui a 2 anos.

2) Dada a função:

$$C(t) = 0,06t - 0,0002t^2 \quad \text{onde } 0 \leq t \leq 240$$

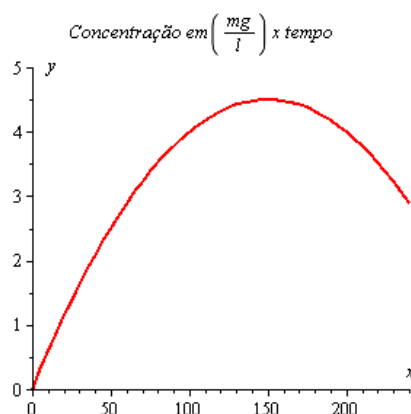
Quando é alcançada a concentração máxima, e qual é essa concentração?

Para determinar a concentração máxima, devemos encontrar o ponto de vértice da parábola já que a função polinomial de segundo grau possui $a < 0$, ou seja, concavidade voltada para cima.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(0,06)}{2(-0,0002)} = -\frac{0,06}{-0,0004} = 150$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(0,06)^2 - 4(-0,0002)(0)}{4(-0,0002)} = -\frac{0,0036}{-0,0008} = 4,5$$

$$V(x_v, y_v) = (150, 4,5)$$



Ou seja, a concentração máxima é dada por 150mg/l e é encontrada para $t = 4,5$ minutos.

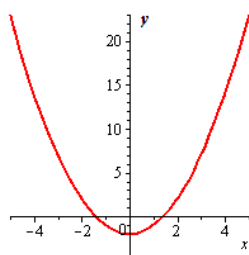
Formalização:

Chama-se função polinomial de segundo grau, qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

O gráfico da função polinomial de segundo grau ou função quadrática é chamado de uma parábola. Graficamente, devemos considerar duas situações:

- I. Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;

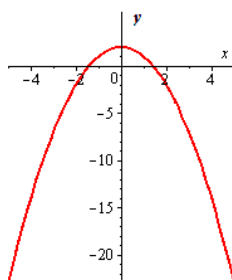
Figura 97 – $a > 0$



Fonte: Elaborada pela autora.

- II. Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Figura 98 – $a < 0$



Fonte: Elaborada pela autora.

O vértice V formado pelas coordenadas x_v e y_v é dado por $V(x_v, y_v) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ e determina o ponto extremo da parábola.

Se $a > 0$, o vértice será um ponto de mínimo da parábola. Se $a < 0$, o vértice será um ponto de máximo da parábola.

Atividade⁷⁴ Extraclasse

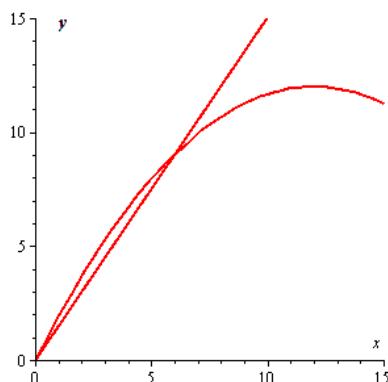
1) Agricultura: O número de maçãs que cada árvore produz depende da densidade de árvores plantadas. Se são plantadas n árvores em um acre de terra, então cada árvore produz $900 - 9n$ maçãs. Sendo assim, o número de maçãs produzidas por acre é dada por:

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

⁷⁴ Problema 1) retirado de Iezzi et al (2001, p.114). Problema 2) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 202).

Quantas árvores devem ser plantadas por acre a fim de obter a maior produção de maçãs?

2) Duas plantas de mesma espécie, A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2,3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pela lei matemática $y = \frac{24x - x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está apresentado na figura abaixo.



Determine:

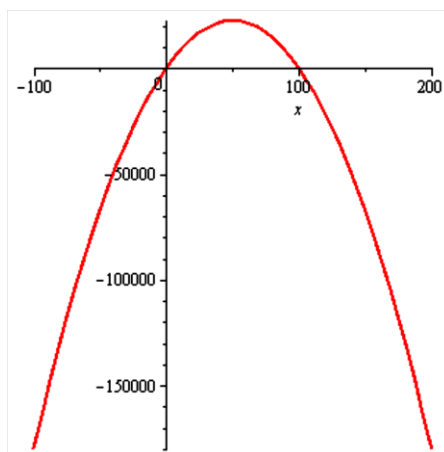
- a equação da reta;
- o dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Queremos o número de árvores que darão o maior número de maçãs. Como a função é quadrática, e possui concavidade voltada para baixo já que $a = -9 < 0$, podemos obter o ponto de máximo graficamente ou através do vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{900}{-18} = 50$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8.100.000}{-36} = 22500$$



Desta forma, para 50 árvores plantadas por acre se obtém a maior produção que é de 22500 maçãs.

2) a) Como a reta passa pela origem (0,0) e também pelo ponto (2,3), podemos obter sua equação através da forma geral $f(x) = ax + b$:

$$0 = 0 \cdot x + b \rightarrow b = 0$$

$$3 = 2 \cdot a + 0 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Sendo assim, a função é dada por: $f(x) = \frac{3}{2}x$

b) Para obter o dia em que as plantas possuem o mesmo tamanho, igualamos as duas funções:

$$y = \frac{24x - x^2}{12} \text{ e } f(x) = \frac{3}{2}x:$$

$$\frac{24x - x^2}{12} = \frac{3}{2}x \rightarrow 36x = 48x - 2x^2 \rightarrow -2x^2 + 12x = 0 \rightarrow x(-2x + 12) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } -2x + 12 = 0 \rightarrow x = 6$$

Para $x = 6$, temos:

$$f(6) = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9 \text{ cm}$$

As plantas terão o mesmo tamanho, 9 cm, no 6º dia.

15º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos estudar as funções polinomiais e a função modular. Analisar os gráficos, o comportamento das funções e suas condições de existência.

Atividade⁷⁵1

1) População de Peixes – Um tanque tem peixes de grande porte. A população de peixes P é descrita pela fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, onde t é o número de dias a partir do momento que os peixes são colocados no tanque. Em quantos dias a população de peixes será de 500 indivíduos?

2) Determine m e n no polinômio $P(x) = mx^3 - 2x^2 + nx - 1$, sabendo-se que 1 é a raiz do polinômio e que $P(-2) = -21$.

3) Quais das expressões abaixo representam um polinômio na variável x? Explique.

a) $x^5 + x^3 + 2$

b) $0x^4 + 0x^2$

c) 3

d) $x^2 + 2x + 3$

e) $x^{\frac{5}{2}} + 2x^2$

f) $(\sqrt{x})^4 + x + 2$

g) x^{15}

h) $x + 2$

i) $\frac{1}{x^4} + x$

j) $x^3 + x^6 + x + x^4$

k) $x\sqrt{x} + x^2$

l) $(3x^2 - 5x + 3)(7x^3 + 2)$

⁷⁵ Problema 1) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 56)

Conteúdos Específicos:

Função polinomial. Definição geral de função polinomial de ordem n . Análise do comportamento da função polinomial. Raízes da função polinomial.

Objetivos Específicos:

Calcular o valor da função polinomial no ponto. Estudar o zero de uma função polinomial. Utilizar mudança de variável para solução de problemas. Definir a função polinomial.

Estratégias de resolução pensadas pela professora:

I) Mudança de variável

Igualando a equação a 500 e fazendo uma mudança de variável para $\sqrt{t} = u$ e $t = u^2$, temos:

$$500 = 3t + 10\sqrt{t} + 140$$

$$500 = 3u^2 + 10u + 140$$

$$3u^2 + 10u - 360 = 0$$

$$u = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-360)}}{2 \cdot 3} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4320}}{6}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4420}}{6} = \frac{-10 \pm 66,48}{6}$$

$$u_1 = 9,413$$

$$u_2 = -12,746$$

Voltando à variável inicial: $\sqrt{t} = u$ e $t = u^2$

$$u = 9,413 \rightarrow u^2 = 88,66 \rightarrow t_1 = 88,66 \text{ dias}$$

$$u = -12,746 \rightarrow u^2 = 162,46 \rightarrow t_2 = 162,46 \text{ dias}$$

Para finalizar, devemos substituir os valores encontrados na equação inicial para verificar se as soluções são válidas:

Para $t_1 = 88,66$:

$$500 = 3(88,66) + 10\sqrt{88,66} + 140$$

$$500 = 265,98 + 10(9,415) + 140$$

$$500 = 265,98 + 94,15 + 140$$

$$500 \cong 500$$

Para $t_2 = 162,46$:

$$500 = 3(162,46) + 10\sqrt{162,46} + 140$$

$$500 = 487,38 + 10(12,745) + 140$$

$$500 = 487,38 + 127,45 + 140$$

$$500 \neq 754,83$$

A verificação é necessária, pois a equação quadrática pode ser verdadeira para valores nos

quais a equação original não é. Sendo assim, obtemos como solução para a equação original $t = 88,66$ dias.

II) Trabalhando a equação original:

$$500 = 3t + 10\sqrt{t} + 140$$

Escrevendo de outra forma, temos:

$$360 - 3t = 10\sqrt{t} \rightarrow (360 - 3t)^2 = (10\sqrt{t})^2 \rightarrow 129600 - 2160t + 9t^2 = 100t$$

$$9t^2 - 2260t + 129600 = 0$$

$$t = \frac{2260 \pm \sqrt{(2260)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 129600}}{2 \cdot 9} = \frac{2260 \pm \sqrt{5107600 - 4665600}}{2 \cdot 9} =$$

$$= \frac{2260 \pm \sqrt{442000}}{18} = \frac{2260 \pm 664,8}{18} =$$

$$t_1 = 162,48 \text{ e } t_2 = 88,66$$

Dadas as soluções potenciais, devemos verificar se elas são compatíveis com a equação, de onde temos que $t_2 = 88,66$ dias é a solução procurada.

2) Para o polinômio $P(x) = mx^3 - 2x^2 + nx - 1$, pede-se para encontrar m e n conhecendo $P(1) = 0$ e $P(-2) = -21$:

$$P(1) = m \cdot 1^3 - 2(1)^2 + n \cdot 1 - 1 = 0 \rightarrow m + n - 3 = 0$$

$$P(-2) = m(-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) \cdot n - 1 = 0 \rightarrow -8m - 2n + 12 = 0$$

Dos dois resultados temos um sistema:

$$\begin{cases} m + n = 3 \\ -8m - 2n = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m + n = 3(-2) \\ 8m + 2n = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2m - 2n = -6 \\ 8m + 2n = 12 \end{cases} \rightarrow 6m = 6 \rightarrow m = 1$$

Voltando a uma das equações do sistema determinamos n :

$$m + n = 3 \rightarrow 1 + n = 3 \rightarrow n = 2$$

Sendo assim, temos o polinômio $P(x) = 1x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

3) O problema pede que sejam identificados os polinômios na variável x . Pede ainda que sejam justificadas as respostas:

São polinômios as letras a), b), c), d), f), g), h), j) e l). Não são polinômios as letras e), i), e k) pois decorre da definição de polinômios que o grau n deve ser um número inteiro positivo.

Formalização:

Uma função polinomial de grau n é uma função da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Onde n é um número inteiro não negativo e $a_n \neq 0$.

Os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são os coeficientes do polinômio. O termo a_0 é o coeficiente constante do polinômio. O termo a_n é o coeficiente de maior potência, dito coeficiente principal, e $a_n x^n$ é o termo principal.

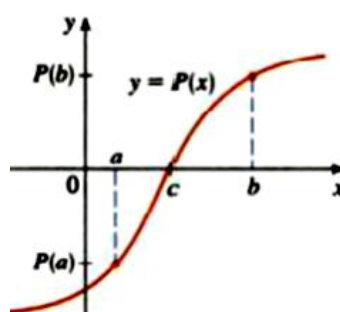
Se P é uma função polinomial, então c é dito um zero de P se $P(c) = 0$. Em outras palavras, os zeros de P são soluções da equação polinomial $P(x) = 0$.

Teorema do Valor Intermediário:

Se P é uma função polinomial e $P(a)$ e $P(b)$ possuem sinais opostos, então existe pelo menos um valor c entre a e b para o qual $P(c) = 0$.

Graficamente:

Figura 99 - Interpretação gráfica do Teorema do valor intermediário.



Fonte: Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 255)

Atividade⁷⁶ 2

- 1) Construa o gráfico da função $f(x) = 2|x| - |x - 1|$ e determine suas raízes.
- 2) Seja $f(x) = |2x + 6| + 3$:
 - a) construa o gráfico;
 - b) Determine os pontos do gráfico de f que têm ordenada 5.
 - c) Determine as abscissas dos pontos do gráfico de f que têm ordenada menor que 5.

Conteúdos Específicos:

Definição da função modular. Zeros da função modular. Esboço do gráfico da função modular.

Objetivos Específicos:

Estudar a função modular. Obter os zeros da função modular e esboçar o seu gráfico.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

- 1) Para $f(x) = 2|x| - |x - 1|$, determinamos as raízes da função e depois elaboramos uma

⁷⁶ Problema 1) retirado de Iezzi et al (2001, p. 155). Problema 2) retirado de Paiva (2004, p. 157).

tabela de valores para a construção do gráfico.

$$2|x| - |x - 1| = 0 \rightarrow 2|x| = |x - 1| \rightarrow$$

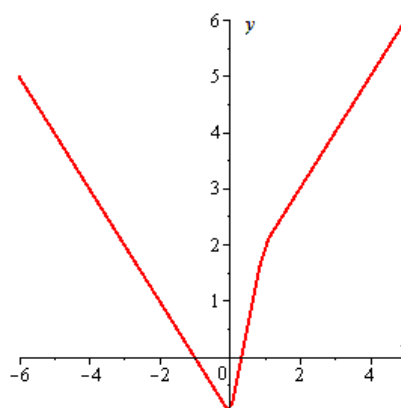
$$2x = x - 1 \rightarrow x = -1$$

$$2x = -(x - 1) \rightarrow 2x + x = 1 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

São raízes de $f(x)$: $x = -1$ e $x = \frac{1}{3}$. Construindo uma tabela:

x	$2 x - x - 1 $	y
-2	$2 -2 - -2 - 1 $	1
-1	$2 -1 - -1 - 1 $	0
0	$2 0 - 0 - 1 $	-1
1	$2 1 - 1 - 1 $	2
2	$2 2 - 2 - 1 $	3
3	$2 3 - 3 - 1 $	4

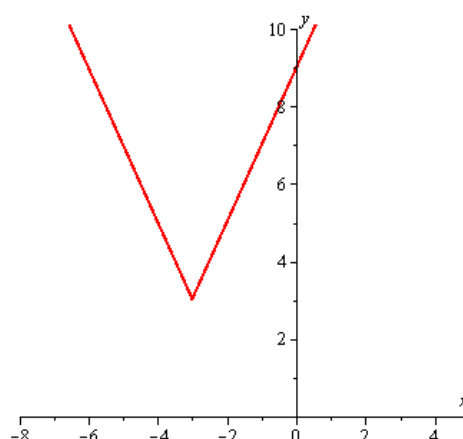
Gráfico:



2) Esboçar o gráfico de $f(x) = |2x + 6| + 3$:

a) Tabela de valores e gráfico:

x	$ 2x + 6 + 3$	y
-5	$ 2(-5) + 6 + 3$	7
-4	$ 2(-4) + 6 + 3$	5
-3	$ 2(-3) + 6 + 3$	3
-2	$ 2(-2) + 6 + 3$	5
-1	$ 2(-1) + 6 + 3$	7
0	$ 2 \cdot 0 + 6 + 3$	9
1	$ 2 \cdot 1 + 6 + 3$	11
2	$ 2 \cdot 2 + 6 + 3$	13



b) Determine os pontos do gráfico de f que têm ordenada 5.

$$5 = |2x + 6| + 3 \rightarrow 2 = |2x + 6|$$

$$2 = 2x + 6 \rightarrow -4 = 2x \rightarrow x = -2$$

$$-2 = 2x + 6 \rightarrow -8 = 2x \rightarrow x = -4$$

Os pontos em que a ordenada é 5 são: $(-4, 5)$ e $(-2, 5)$

c) Determine as abscissas dos pontos do gráfico de f que têm ordenada menor que 5.

$$|2x + 6| + 3 < 5 \rightarrow |2x + 6| < 2$$

$$-2 < 2x + 6 < 2$$

$$-4 < x < -2$$

Os valores que tem ordenada menor que 5 estão no intervalo $] -4, -2[$.

Após essa atividade, foi realizada a plenária em que os alunos foram à lousa colocar suas resoluções e a formalização foi realizada pela professora.

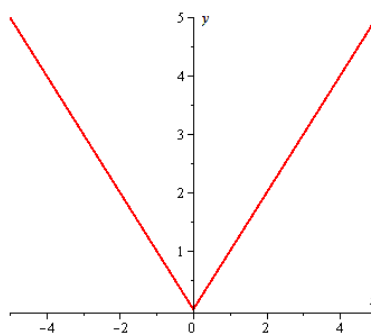
Formalização:

Chama-se função modular a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. A função modular pode ser caracterizada pela definição de módulo:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

O domínio ou campo de definição de $f(x) = |x|$ são os números reais ($\mathbb{R}$). A imagem ou campo de variação de $f(x) = |x|$ são os números reais positivos ($\mathbb{R}_+$).

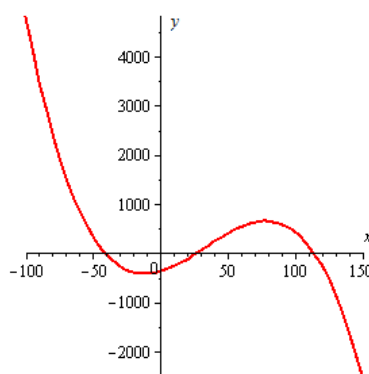
Graficamente:



Atividade⁷⁷ Extraclasse

Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Estratégia de resolução pensada pela professora:

a) Gráficamente vemos que a função possui três raízes. Pelos intervalos em que se encontram as raízes, podemos obter o intervalo em que a empresa deve produzir para não ter perdas. É importante lembrar que os valores de y representam o rendimento e, portanto, não podem ser negativos. O que se espera obter é uma aproximação para os valores, já que esse problema pede o auxílio de uma calculadora.

Construindo uma tabela temos:

⁷⁷ Problema adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 264).

x	$P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$
20	$P(20) = 8.20 + 0,3(20)^2 - 0,0031(20)^3 - 372 = -116,8$
25	$P(25) = 8.25 + 0,3(25)^2 - 0,0031(25)^3 - 372 = -32,9$
30	$P(30) = 8.30 + 0,3(30)^2 - 0,0031(30)^3 - 372 = +54,3$
110	$P(110) = 8.110 + 0,3(110)^2 - 0,0031(110)^3 - 372 = +11,9$
120	$P(120) = 8.120 + 0,3(120)^2 - 0,0031(120)^3 - 372 = -448,8$

Um intervalo em que a empresa não terá perdas será:

$$30 < x < 110$$

b) Vamos aumentar a tabela e procurar valores que deem o maior ganho para a empresa. Esperamos que os alunos observem o gráfico e tirem dele os valores:

x	$P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$
75	$P(75) = 8.75 + 0,3(75)^2 - 0,0031(75)^3 - 372 = 607,69$
76	$P(76) = 8.76 + 0,3(76)^2 - 0,0031(76)^3 - 372 = 607,98$
77	$P(77) = 8.77 + 0,3(77)^2 - 0,0031(77)^3 - 372 = 607,45$
78	$P(78) = 8.78 + 0,3(78)^2 - 0,0031(78)^3 - 372 = 606,09$

Quando são produzidos 75 liquidificadores a empresa possui o maior ganho.

16º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos estudar as equações exponenciais e logarítmicas, como base para o estudo das funções logarítmicas e exponenciais.

Atividade⁷⁸ 1

1) Sejam I_0 e I a intensidade de luz antes e depois de passar por um material e x a distância (em pés) que viaja a luz em um material, então de acordo com a Lei de Beer-Lambert:

$$-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

Onde k é uma constante que depende do tipo de materiais.

a) Isole I na equação.

b) Quando $k = 0,025$ e a intensidade luminosa é $I_0 = 14$ lumens (lm). Encontre a intensidade de luz para uma profundidade de 20 pés.

⁷⁸ Problema 1) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 383). Problema 2) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 387).

2) Suponha que um automóvel está funcionando em um dia frio de inverno (20°F no exterior) e a máquina se aquece (cerca de 220°F). Quando se estaciona o carro, a máquina começa a esfriar. A temperatura T da máquina t minutos depois de que se estaciona é dada por:

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0,11t$$

a) Isole T na equação.

b) use a letra a) para determinar a temperatura do motor depois de 20 minutos ($t = 20$).

Conteúdos Específicos:

Equações exponenciais e logarítmicas. Propriedade das exponenciais e logaritmos. Manipulação de variáveis observando as propriedades. Substituição de valores nas equações. Análise das soluções.

Objetivos Específicos:

Aplicar as propriedades de exponenciais e logaritmos para resolver as equações. Identificar o $\ln$ como o logaritmo natural. Discutir a utilização do número e como base para a equação e função exponencial dita natural.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Para

$$-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

a) Isole I :

$$-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x \rightarrow \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -kx \rightarrow e^{\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)} = e^{-kx} \rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-kx}$$

$$I = I_0 \cdot e^{-kx}$$

b) para $k = 0,025$, $I_0 = 14$ lumens e $x = 20$ pés, calcule I :

$$I = I_0 \cdot e^{-kx} \rightarrow 14 \cdot e^{(-20)(0,025)} \rightarrow 14 \cdot e^{-0,5} \rightarrow 14 \cdot (2,7182)^{-0,5}$$

$$I = 8,49 \text{ lumens / pé}$$

2) Para

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0,11t$$

a) Isole T na equação:

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0,11t \rightarrow e^{\ln\left(\frac{T-20}{200}\right)} = e^{-0,11t} \rightarrow \frac{T - 20}{200} = e^{-0,11t} \rightarrow T - 20 = 200e^{-0,11t}$$

$$T = 200e^{-0,11t} + 20$$

b) $t = 20$ minutos

$$T(t) = 200e^{-0,11t} + 20 \rightarrow T(20) = 200e^{-0,11(20)} + 20$$

$$T(20) = 42,16^{\circ}F$$

Formalização:

Equação Exponencial:

Chama-se equação exponencial toda equação que contém incógnita no expoente.

$$a^n = y, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Método de redução à base comum:

Este método, como o próprio nome já diz, será aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base a ($0 < a \neq 1$). O método da redução a uma base comum é baseado no seguinte resultado:

Teorema: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$. Então $a^x = a^y \leftrightarrow x = y$.

Logaritmos:

Quando desejamos obter o expoente de uma equação exponencial, conhecidas a base e a potência, utilizamos o logaritmo:

$$b = a^n \rightarrow n = \log_a b$$

Onde: b é o logaritmando, a a base do logaritmo e n o logaritmo.

Qualquer número positivo pode ser utilizado como base para uma equação exponencial. O cálculo é realizado através de limites e nos dá a aproximação:

$$e \cong 2,7182818284590 \dots$$

O logaritmo natural $\ln$ utiliza como base e .

Notação:

- $\log_{10} x$ é denotado simplesmente por $\log x$ (logaritmo decimal).
- $\log_e x$ é denotado por $\ln x$ (logaritmo neperiano ou logaritmo natural).

Atividade⁷⁹2

1) Calcule : $\log_{100} 27$ se $\log_{10} 3 = 0,48$

2) Resolva as equações exponenciais:

a) $(2^x)^x = 16$

b) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$

c) $\sqrt[x]{3^{x-2}} = 27$

⁷⁹ Problemas 1) e 2) retirados de Marcon e Noguti (2009, p. 57). Problema 3) adaptado de NCTM (2012, p.21).

3) Resolva as equações logarítmicas:

a) $\log_2 [\log_3 (\log_4 (x^{3x}))] = 0$

b) $\log_2 (x^2 + 2x) = 3$

Conteúdos Específicos:

Trabalhar com as técnicas e propriedades válidas para equações exponenciais e logarítmicas.
Mudança de base de logaritmos.

Objetivos Específicos:

Resolver equações exponenciais e logarítmicas utilizando a definição e as propriedades.
Estudar a mudança de base para os logaritmos.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Calcule : $\log_{100} 27$ se $\log_{10} 3 = 0,48$

Para resolver este problema devemos utilizar as propriedades de logaritmos:

Mudança de base: $\log_{100} 27$ para base 10:

$$\log_{100} 27 = \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 10^2} = \frac{\log_{10} 27}{2 \cdot \log_{10} 10} = \frac{\log_{10} 27}{2 \cdot 1} = \frac{\log_{10} 27}{2}$$

Assim,

$$\log_{100} 27 = \frac{\log_{10} 27}{2}$$

mas,

$$\log_{10} 27 = \log_{10} 3^3 = 3 \cdot \log_{10} 3$$

como $\log_{10} 3 = 0,48$, temos:

$$\log_{100} 27 = \frac{\log_{10} 27}{2} = \frac{3 \cdot \log_{10} 3}{2} = \frac{3(0,48)}{2} = \frac{1,44}{2} = 0,72$$

Ou seja, $\log_{100} 27 = 0,72$.

2) a) $(2^x)^x = 16$

Devemos igualar as bases:

$$(2^x)^x = 16 \rightarrow 2^{x^2} = 2^4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$$

Solução: $x = \pm 2$.

b) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$

Devemos utilizar as propriedades de potência para resolver a equação exponencial:

$$5^{x+1} + 5^{x+2} = 30 \rightarrow 5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^2 = 30$$

$$5^x (5^1 + 5^2) = 30 \rightarrow 5^x (5 + 25) = 30$$

$$5^x = \frac{30}{30} \rightarrow 5^x = 1 \rightarrow 5^x = 5^0 \rightarrow x = 0$$

$$c) \sqrt[x]{3^{x-2}} = 27$$

Devemos utilizar as propriedades de potência para resolver a equação exponencial:

$$\sqrt[x]{3^{x-2}} = 27 \rightarrow (3^{x-2})^{\frac{1}{x}} = 3^3 \rightarrow 3^{\frac{x-2}{x}} = 3^3 \rightarrow \frac{x-2}{x} = 3$$

$$x - 2 = 3x \rightarrow -2 = 2x \rightarrow x = -1$$

O problema está mal posto, pois a solução de x não pode ser um número negativo, já que x é o índice de uma raiz. Logo, esse problema não possui solução válida da forma que foi apresentado.

$$3) a) \log_2[\log_3(\log_4(x^{3x}))] = 0$$

Pela definição de logaritmos, $a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b$, temos:

$$\log_2[\log_3(\log_4(x^{3x}))] = 0 \rightarrow 2^0 = \log_3(\log_4(x^{3x})) \rightarrow$$

$$1 = \log_3(\log_4(x^{3x})) \rightarrow 3^1 = \log_4(x^{3x}) \rightarrow$$

$$4^3 = x^{3x} \rightarrow 4^3 = (x^x)^3 \rightarrow 4 = x^x \rightarrow 2^2 = x^x$$

$$x = 2$$

$$b) \log_2(x^2 + 2x) = 3$$

Pela definição de logaritmos, $a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b$, temos:

$$\log_2(x^2 + 2x) = 3 \rightarrow 2^3 = x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Devemos encontrar as raízes da equação de segundo grau:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2(1)} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{2} \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Devemos voltar à equação e analisar as soluções obtidas através da equação quadrática:

Para $x_1 = 2$:

$$\log_2(x^2 + 2x) = 3$$

$$\log_2(2^2 + 2 \cdot 2) = 3 \rightarrow 2^3 = (2^2 + 2 \cdot 2) \rightarrow$$

$$2^3 = 4 + 4 \rightarrow 8 = 8$$

Para $x_2 = -4$:

$$\log_2(x^2 + 2x) = 3$$

$$\log_2((-4)^2 + 2(-4)) = 3 \rightarrow 2^3 = ((-4)^2 + 2(-4)) \rightarrow$$

$$2^3 = 16 - 8 \rightarrow 8 = 8$$

As duas soluções, $x_1 = 2$ e $x_2 = -4$ são soluções para a equação logarítmica.

Formalização:**Propriedades dos logaritmos:**

- 1) Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- 2) Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $c > 0$, então $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- 3) Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\log_a(b^\alpha) = \alpha(\log_a b)$
- 4)) Se $0 < a \neq 1, b > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$

Mudança de base:

Sejam a, b e c números reais positivos com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Atividade⁸⁰ Extraclasse

1) Resolva as equações:

a) $e^{3-2x} = 4$

b) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

2) Nas equações encontre o valor de x :

a) $\ln x = 8$

b) $\log_2(25 - x) = 3$

3) Resolva a equação

$$4 + 3 \log(2x) = 16$$

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) a) $e^{3-2x} = 4$

$$\ln(e^{3-2x}) = \ln 4 \rightarrow 3 - 2x = \ln 4 \rightarrow 2x = 3 - \ln 4 \rightarrow x = \frac{1}{2}(3 - \ln 4)$$

b) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \rightarrow (e^x - 3)(e^x + 2) = 0$$

$$e^x - 3 = 0 \rightarrow e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$$

$$e^x + 2 = 0 \rightarrow e^x = -2 \text{ Não possui solução, pois } e^x > 0 \forall x.$$

2) a) $\ln x = 8$

$$e^{\ln x} = e^8 \rightarrow x = e^8$$

b) $\log_2(25 - x) = 3$

$$25 - x = 2^3 \rightarrow 25 - x = 8 \rightarrow x = 25 - 8 \rightarrow x = 17$$

3)

⁸⁰ Problema adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 360, 361 e 362).

$$4 + 3 \log(2x) = 16 \rightarrow 3 \log(2x) = 16 - 4$$

$$3 \log(2x) = 12 \rightarrow \log(2x) = 4 \rightarrow 2x = 10^4 \rightarrow x = 5000$$

17º Encontro:

Objetivos do encontro:

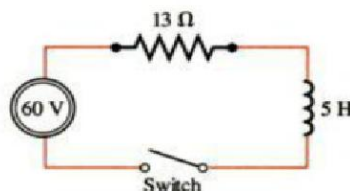
Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos estudar a função exponencial, sua definição e gráfico.

Atividade⁸¹

1) Um circuito eletrônico contém uma bateria que produz uma voltagem de 60 volts (V), um resistor com uma resistência de 13 ohms (Ω), e um indutor com uma indutância de 5 henrys (H), como mostra a figura. Por meio de cálculos, pode-se demonstrar que a corrente $I=I(t)$ (em ampères, A) t segundos depois de que se fecha o interruptor é dado por:

$$I = \frac{60}{13} \left(1 - e^{-\frac{13t}{5}}\right)$$

- Use esta equação para expressar o tempo t como uma função da corrente I .
- Depois de quantos segundos a corrente é de 2 A?



2) Em uma festa é servido um prato de sopa quente. Ela esfria segundo a lei de resfriamento de Newton, de modo que sua temperatura no instante t se determina por:

$$T(t) = 65 + 145e^{-0,05t}$$

Onde t é medido em minutos e T em $^{\circ}\text{F}$.

- Qual a temperatura inicial da sopa?
- Qual a temperatura depois de 10 minutos?
- Depois de quanto tempo a temperatura será de 100°F ?
- Esboce o gráfico de $T(t)$.

Conteúdos Específicos:

Definição da função exponencial. Gráfico da função exponencial. Avaliar a função no ponto.

⁸¹ Problema 1) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 368). Problema 2) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 400).

Objetivos Específicos:

Discutir a manipulação de variáveis utilizando as propriedades de potenciação e logaritmos.
Avaliar a função exponencial no ponto. Esboçar o gráfico da função exponencial.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) a) Escrever como $t(I)$:

$$I = \frac{60}{13} \left(1 - e^{\frac{-13t}{5}} \right) \rightarrow \frac{13}{60} \cdot I = 1 - e^{\frac{-13t}{5}} \rightarrow \frac{13}{60} \cdot I - 1 = -e^{\frac{-13t}{5}}$$

$$1 - \frac{13}{60} \cdot I = e^{\frac{-13t}{5}} \rightarrow \ln \left(1 - \frac{13}{60} \cdot I \right) = \ln \left(e^{\frac{-13t}{5}} \right) \rightarrow \frac{-13}{5} t = \ln \left(1 - \frac{13}{60} \cdot I \right)$$

$$t = \frac{-5}{13} \ln \left(1 - \frac{13}{60} \cdot I \right)$$

b) $I = 2A$

$$t(I) = \frac{-5}{13} \ln \left(1 - \frac{13}{60} \cdot I \right) \rightarrow t(2) = \frac{-5}{13} \ln \left(1 - \frac{13}{60} \cdot 2 \right)$$

$$t(2) = \frac{-5}{13} \ln \left(1 - \frac{13}{30} \right) \rightarrow \frac{-5}{13} \ln \left(\frac{30-13}{30} \right) \rightarrow \frac{-5}{13} \ln \left(\frac{17}{30} \right) \cong 0,2184$$

$$t(2) \cong 0,2184 \text{ segundos}$$

2)

a) $t = 0$

$$T(0) = 65 + 145e^{-0,05 \cdot 0} \rightarrow 65 + 145 \cdot 1 \rightarrow 65 + 145 = 210^\circ F$$

$$T(0) = 210^\circ F$$

b) $t = 10$

$$T(10) = 65 + 145e^{-0,05 \cdot 10} \rightarrow 65 + 145 \cdot e^{-0,5} \rightarrow 65 + 145 \cdot 0,606530 = 65 + 87,94 \cong 152,94^\circ F$$

$$T(10) \cong 152,94^\circ F$$

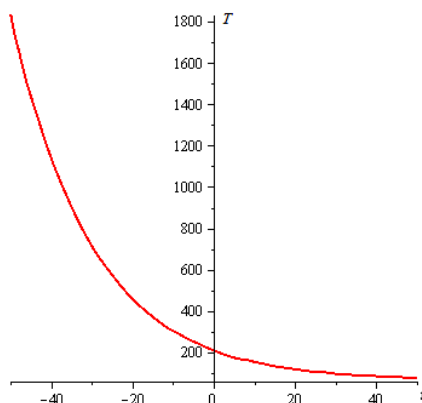
c) $T(t) = 100^\circ F$

$$100 = 65 + 145e^{-0,05t} \rightarrow 100 - 65 = 145e^{-0,05t} \rightarrow 35 = 145e^{-0,05t}$$

$$\frac{35}{145} = e^{-0,05t} \rightarrow \ln \left(\frac{35}{145} \right) = \ln(e^{-0,05t}) \rightarrow -0,05 \cdot t = \ln \left(\frac{35}{145} \right) \rightarrow t = \frac{-1}{0,05} \ln \left(\frac{35}{145} \right)$$

$$t \cong 28,4277 \text{ minutos}$$

d)



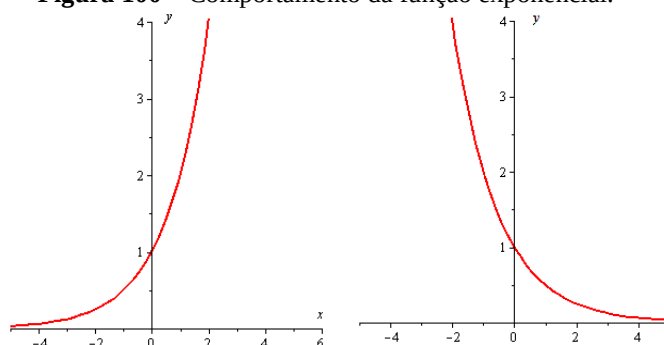
Formalização:

Função Exponencial:

A função exponencial de base a é definida para todos os números reais x por $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

A função exponencial $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, possui domínio em todos os reais ($\mathbb{R}$) e imagem no intervalo $(0, \infty)$. A reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal de $f(x)$.

Figura 100 – Comportamento da função exponencial.



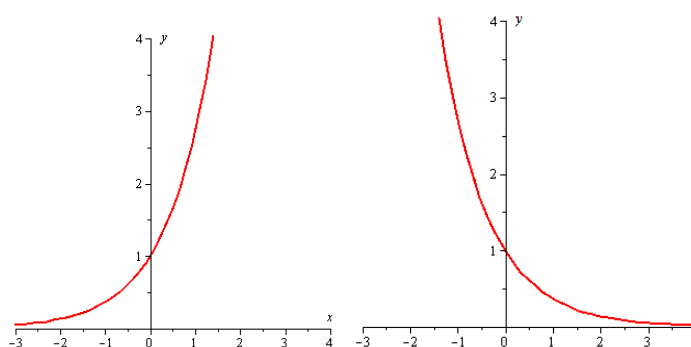
$$f(x) = a^x, \text{ onde } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$f(x) = a^x, \text{ onde } a < 0 \text{ e } a \neq 1$$

Fonte: Elaborada pela autora.

A função exponencial natural é definida para todos os números reais x por $f(x) = e^x$.

Figura 101 – Comportamento da função exponencial natural.



$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = e^{-x}$$

Fonte: Elaborada pela autora.

Toda a função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ é injetora e portanto admite uma inversa. A função inversa da exponencial é a função logarítmica.

Atividade⁸² Extraclasse

1) Esboce o gráfico das funções abaixo no mesmo plano cartesiano:

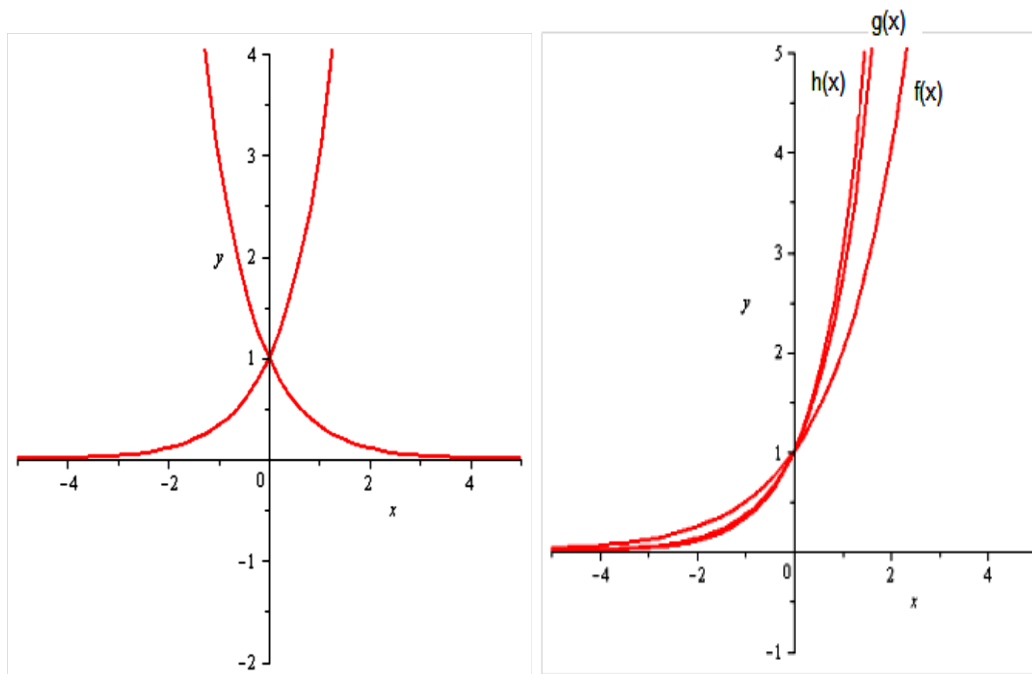
a) $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = 3^x$

O que é possível observar no esboço de tais funções? Quais são as regularidades encontradas?

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Após escrever uma tabela de dados, esboçar as duas funções no mesmo plano cartesiano:



18º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos estudar a função logarítmica e o esboço de seu gráfico.

⁸² Problema elaborado pela autora.

Atividade⁸³1

1) A taxa a que se carrega uma bateria é mais lenta se a bateria está mais próxima de sua carga máxima C_0 . O tempo (em horas) para carregar uma bateria descarregada por completo de uma carga C é dado por:

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

Onde k é uma constante positiva que depende da bateria. Para certa bateria, $k = 0,25$. Se esta bateria está totalmente sem carga, quanto tempo demora para que sua carga seja 90% de sua carga máxima C_0 .

Considerando que a carga esteja completa, esboce o gráfico de $t = -k \ln(C_0)$.

2) Colônia de Bactérias: Certa cepa de bactérias se divide a cada três horas. Se uma colônia inicia com 50 bactérias, então o tempo t (em horas) necessário para que a colônia cresça a N bactérias é dado por

$$t = 3 \cdot \frac{\log\left(\frac{N}{50}\right)}{\log 2}$$

Calcule o tempo necessário para que a colônia cresça a um milhão de bactérias. Esboce o gráfico de $t(N)$.

Conteúdos Específicos:

Função Logarítmica. Definição, propriedades e gráfico.

Objetivos Específicos:

Estudar a função logarítmica. Calcular o valor da função logarítmica no ponto. Esboço do gráfico de uma função logarítmica.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Para $k = 0,25$ e $C = 0,90C_0$:

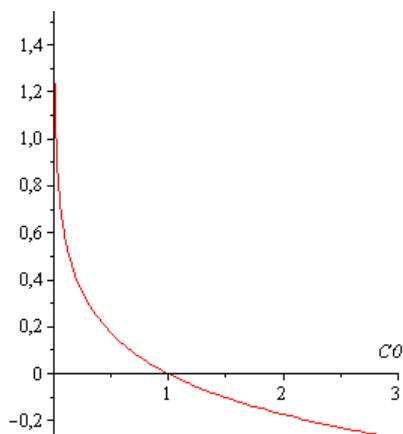
$$t = -(0,25) \ln\left(1 - \frac{0,90C_0}{C_0}\right) \Rightarrow -(0,25) \ln\left(\frac{C_0 - 0,90C_0}{C_0}\right) \rightarrow$$

$$t = -(0,25) \ln\left(\frac{0,10 C_0}{C_0}\right) \rightarrow -(0,25) \ln(0,10) \rightarrow t \cong 0,5756 \text{ horas}$$

$$t \cong 34 \text{ minutos e } 53 \text{ segundos}$$

Graficamente:

⁸³ Problema 1) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 370). Problema 2) adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 351).



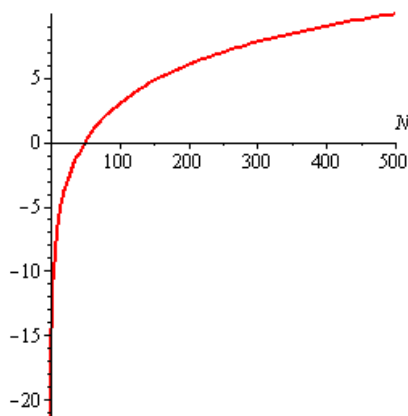
$$t = -0,25 \ln(C_0)$$

$$2) N = 1.000.000$$

$$t = 3 \cdot \frac{\log(\frac{N}{50})}{\log 2} = 3 \cdot \frac{\log(\frac{1.000.000}{50})}{\log 2} = 3 \cdot \frac{\log 20.000}{\log 2} \cong 42,86$$

$t \cong 42,86$ horas.

Graficamente:



$$t = 3 \cdot \frac{\log(\frac{N}{50})}{\log 2}$$

Formalização:

Toda a função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ é injetora e portanto admite uma inversa. A função inversa da exponencial é a função logarítmica.

Função Logarítmica:

Seja a um número positivo e $a \neq 1$. A função logarítmica de base a , denotada por $\log_a$ é definida por $\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$.

Propriedades dos logaritmos:

a) $\log_a 1 = 0$ b) $\log_a a = 1$

c) $\log_a a^x = x$ d) $a^{\log_a x} = x$

O logaritmo de base 10 é dito logaritmo comum e escreve-se omitindo a base:

$$\log_{10} x = \log x$$

O logaritmo de base e é dito logaritmo natural e denota-se por $\ln$.

$$\ln x = \log_e x$$

$$\ln x = y \leftrightarrow e^y = x$$

Propriedades dos logaritmos naturais:

a) $\ln 1 = 0$ b) $\ln e = 1$

c) $\ln e^x = x$ d) $e^{\ln x} = x$

Atividade⁸⁴ Extraclasse

1) Construa os gráficos das funções:

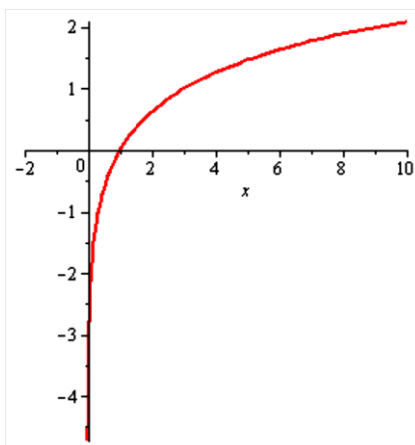
a) $f(x) = \log_3 x$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $h(x) = 2 + \log_2 x$

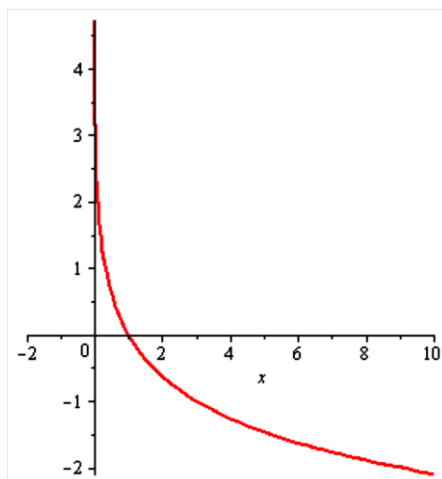
Estratégia de resolução pensada pela professora:

a) $f(x) = \log_3 x$

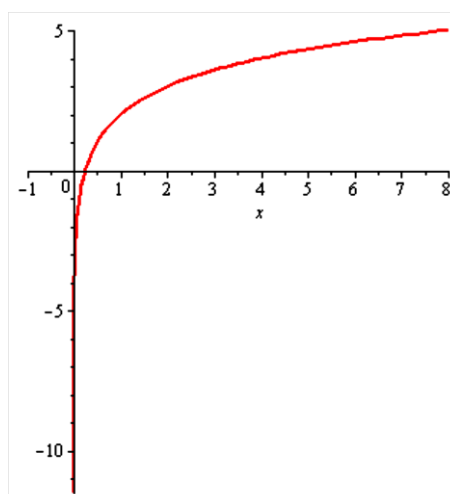


b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

⁸⁴ Problema retirado de Iezzi et al (2001, p.231)



c) $h(x) = 2 + \log_2 x$



19º Encontro:

Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos fazer uma introdução à trigonometria e estudar as relações trigonométricas elementares.

Atividade⁸⁵ 1

1) Uma escada de pedreiro de 10m está apoiada numa parede e forma com o solo um ângulo de 40° . Qual a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? E qual a distância do pé da escada à parede?

⁸⁵ Problema adaptado de Iezzi e Murakami (1977, p. 149-C)

2) Sejam a, b e c os lados de um triângulo ABC. Determine o lado c sabendo que $a = 6\text{ m}$, $b = 3\text{ m}$ e $\hat{A} = 38^\circ$.

3) Classifique o triângulo retângulo que tem hipotenusa medindo 6 cm e um cateto com $3\sqrt{2}$ cm. A seguir, obtenha as razões trigonométricas dos ângulos agudos desse triângulo.

Conteúdos Específicos:

Trigonometria no triângulo retângulo. Ângulos. Razões trigonométricas. Lei dos senos.

Objetivos Específicos:

Estudar a trigonometria no triângulo retângulo. Utilizar as razões trigonométricas para obter lado, altura e ângulos de triângulos. Classificação de triângulos. Discutir a lei dos senos para obter os lados de um triângulo não retângulo.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

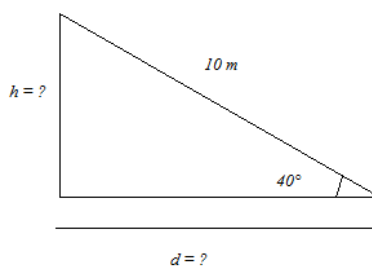
1)

$$\sin 40^\circ = \frac{h}{10} \rightarrow 10 \cdot \sin 40^\circ = h$$

$$h \cong 0,6428 \cdot 10 \cong 6,42\text{ m}$$

$$\cos 40^\circ = \frac{d}{10} \rightarrow 10 \cdot \cos 40^\circ = d$$

$$d \cong 0,7660 \cdot 10 \cong 7,66\text{ m}$$



2) Dados $a = 6\text{ m}$, $b = 3\text{ m}$, $\hat{A} = 38^\circ$, calcule $c = ?$

Utilizamos a lei dos senos, já que não sabemos se o triângulo é retângulo:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

$$\frac{6}{\sin 38^\circ} = \frac{3}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

E assim:

$$\frac{6}{\sin 38^\circ} = \frac{3}{\sin B} \rightarrow \sin B = \frac{3 \cdot \sin 38^\circ}{6} \cong \frac{3 \cdot (0,6156)}{6}$$

$$\sin B = 0,3078 \rightarrow B = \arcsin 0,3078 \rightarrow B \cong 17,93^\circ$$

3) Hipotenusa: $h = 6 \text{ cm}$

Cateto: $a = 3\sqrt{2}$

$$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 6^2 = (3\sqrt{2})^2 + b^2 \rightarrow 36 - 18 = b^2$$

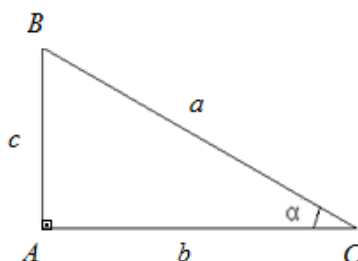
$$b = \sqrt{18} \rightarrow b = 3\sqrt{2}$$

Como o triângulo é retângulo e possui dois catetos iguais a $3\sqrt{2}$, trata-se de um triângulo isósceles.

Formalização:

Relações Trigonométricas:

Sendo α um dos ângulos agudos do triângulo retângulo, definem-se as seguintes relações trigonométricas:



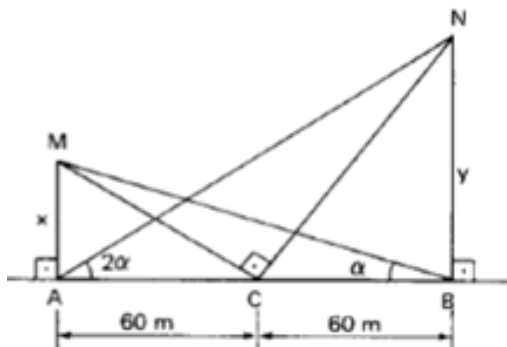
Lei dos Senos:

Em qualquer triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Atividade⁸⁶ 2

1) Tendo em vista as relações descritas na figura abaixo calcular as distâncias x e y .



2) Sabendo que $\sec x = 3$, calcular o valor da expressão $y = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{tg}^2 x$.

3) Provar que $(1 - \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{cotg} x)^2 = (\sec x - \operatorname{cosec} x)^2$ para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

⁸⁶ Problema retirado de Iezzi e Murakami (1977, p. 46- C e 151-C)

Conteúdos Específicos:

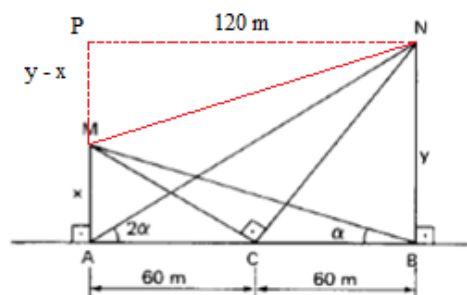
Trigonometria no triângulo retângulo. Ângulos. Razões trigonométricas. Lei dos senos. Identidades trigonométricas.

Objetivos Específicos:

Estudar a trigonometria no triângulo retângulo. Utilizar as razões trigonométricas para obter lado, altura e ângulos de triângulos. Classificação de triângulos. Discutir a lei dos senos para obter os lados de um triângulo não retângulo.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) Para calcularmos os valores de x e y , vamos escrever algumas relações dos triângulos da figura:



$$\tan \alpha = \frac{x}{120} \text{ e } \tan 2\alpha = \frac{y}{120}$$

E ainda podemos tirar as seguintes relações:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{NC}^2 \text{ (I)}$$

$$\overline{MN}^2 = 120^2 + (y - x)^2$$

$$\overline{MC}^2 = 60^2 + x^2$$

$$\overline{NC}^2 = 60^2 + y^2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{y}{120} = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} \text{ (II)}$$

De (I) temos:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{NC}^2 \rightarrow 120^2 + (y - x)^2 = 60^2 + x^2 + 60^2 + y^2$$

$$120^2 + y^2 - 2xy + x^2 = 60^2 + x^2 + 60^2 + y^2$$

$$120^2 - 2xy = 60^2 + 60^2$$

$$14400 - 2xy = 3600 + 3600$$

$$2xy = 14400 - 7200$$

$$2xy = 7200$$

$$xy = 3600 \text{ (I*)}$$

De (II) temos:

$$\frac{y}{120} = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} \rightarrow \frac{y}{120} = \frac{2 \cdot \left(\frac{x}{120}\right)}{1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2}$$

$$\frac{y}{120} = \frac{\left(\frac{x}{60}\right)}{1 - \left(\frac{x}{120}\right)^2} \rightarrow \frac{y}{120} = \frac{x}{60} \cdot \frac{120^2}{120^2 - x^2}$$

$$\frac{240x}{120^2 - x^2} = \frac{y}{120} \rightarrow y = \frac{28800x}{120^2 - x^2}$$

$$28800x = y(120^2 - x^2)$$

Multiplicando por x ambos os lados, temos:

$$28800x^2 = xy(120^2 - x^2)$$

Como sabemos por (I^*) que $xy = 3600$:

$$28800x^2 = 3600(120^2 - x^2)$$

$$\frac{28800}{3600} x^2 = 120^2 - x^2$$

$$8x^2 = 120^2 - x^2 \rightarrow 9x^2 = 120^2$$

$$x^2 = \frac{120^2}{9} \rightarrow x = \frac{120}{3} \rightarrow x = 40 \text{ m}$$

Voltando a (I^*): $xy = 3600 \rightarrow y = \frac{3600}{40} = 90 \text{ m}$

2) Sabendo que $\sec x = 3$, calcular o valor da expressão $y = \sin^2 x + 2tg^2 x$.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 3 \text{ ou seja, } \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 x = \frac{8}{9}$$

$$y = \sin^2 x + 2tg^2 x \rightarrow \sin^2 x + 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$y = \frac{8}{9} + 2 \cdot \left(\frac{8/9}{1/9}\right) \rightarrow \frac{8}{9} + 2 \cdot \frac{8}{1} \cdot \frac{9}{1}$$

$$y = \frac{8}{9} + 16 \rightarrow \frac{152}{9}$$

$$y = \frac{152}{9}$$

3) Provar que $(1 - tg x)^2 + (1 - cotg x)^2 = (\sec x - cossec x)^2$ para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Trabalhando os dois lados da igualdade:

$$(1 - tg x)^2 + (1 - cotg x)^2 = (\sec x - cossec x)^2$$

$$\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x \sin x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x}\right)^2 = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x \sin x}\right)^2$$

$$\frac{\cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x - 2 \cos x \sin x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x \sin x}\right)^2$$

Como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, então:

$$\frac{-2 \cos x \sin x + 1}{\cos^2 x} + \frac{-2 \cos x \sin x + 1}{\sin^2 x} = \left(\frac{\sin^2 x - 2 \cos x \sin x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\right)$$

$$\frac{\sin^2 x (-2 \cos x \sin x + 1) + \cos^2 x (-2 \cos x \sin x + 1)}{\cos^2 x \sin^2 x} = \left(\frac{-2 \cos x \sin x + 1}{\cos^2 x \sin^2 x}\right)$$

$$\frac{(-2 \cos x \sin x + 1)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x \sin^2 x} = \left(\frac{-2 \cos x \sin x + 1}{\cos^2 x \sin^2 x}\right)$$

$$\frac{-2 \cos x \sin x + 1}{\cos^2 x \sin^2 x} = \left(\frac{-2 \cos x \sin x + 1}{\cos^2 x \sin^2 x}\right)$$

Formalização:

Definição: um triângulo que tem um dos ângulos medindo 90° é chamado triângulo retângulo.

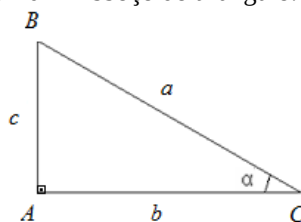
Teorema de Pitágoras: Em qualquer triângulo retângulo, a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Relações Trigonômétricas:

Sendo α um dos ângulos agudos do triângulo retângulo, definem-se as seguintes relações trigonométricas:

Figura 102 - Esboço do triângulo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Seno: é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e da hipotenusa do triângulo.

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Cosseno: é a razão entre as medidas do cateto adjacente a α e da hipotenusa do triângulo.

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Relações Fundamentais:

Tangente: é a razão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente a α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$

I)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

II)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

III)

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

IV)

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

V)

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Lei dos Senos:

Em qualquer triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Arcos Duplos:

I)

$$\tan x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - (\tan x)^2}$$

II)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

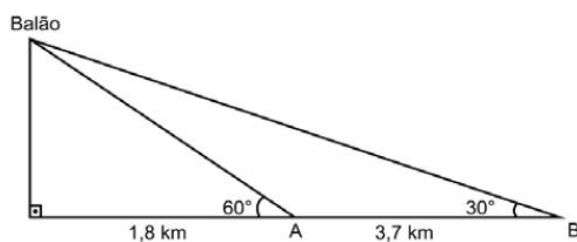
III)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Atividade Extraclasse⁸⁷

1) Um balão atmosférico, lançado em Bauru, (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

⁸⁷ Problema 1) Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>. Acesso em: 02 maio 2010. Problema 2) adaptado de Iezzi e Murakami (1977, p. 148-C).



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60° ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30° . Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

2) Calcule os lados de um triângulo retângulo, sabendo que a altura relativa à hipotenusa é $h = 4\text{ cm}$ e um ângulo agudo é $\hat{B} = 30^\circ$.

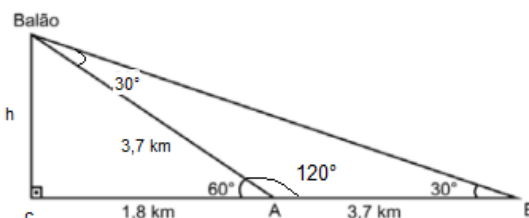
Estratégias de resolução pensadas pela professora:

1) Primeira forma:

Considere que o ângulo suplementar a 60° é 120° , temos que o triângulo $AB\text{Balão}$ é isósceles e portanto, o lado $AB = A\text{Balão}$. Por Pitágoras encontra-se o valor de h sabendo os dois catetos:

$$h^2 + 1,8^2 = 3,7^2 \rightarrow h^2 = 3,24 - 13,69 \rightarrow h^2 = 10,45$$

$$h \cong 3,2 \text{ km.}$$

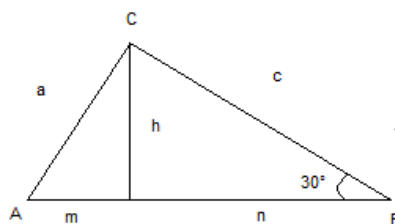


Segunda forma:

Considere o triângulo retângulo $AC\text{Balão}$. Como é conhecido um dos catetos e o ângulo de 60° , calculamos através da tangente:

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{1,8} \rightarrow \sqrt{3} \cdot 1,8 = h \rightarrow h \cong 3,2 \text{ km}$$

2) Dada a figura:



$$\sin 30^\circ = \frac{h}{c} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{c} \rightarrow c = 8$$

$$\cos 30^\circ = \frac{n}{c} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{n}{8} \rightarrow n = 4\sqrt{3}$$

$$c^2 = a \cdot n \rightarrow a = \frac{c^2}{n} \rightarrow a = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Por Pitágoras, temos:

$$b^2 = \left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 64 \rightarrow b = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

20º Encontro:

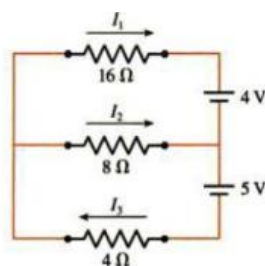
Objetivos do encontro:

Inicialmente iremos trabalhar as atividades extraclasse deixadas no encontro anterior. Na sequência, iremos estudar as matrizes e os sistemas lineares.

Atividade⁸⁸

1) Através da Lei de Kirchhoff pode-se demonstrar que as correntes I_1 , I_2 e I_3 que passam pelas três partes do circuito da figura atendem o sistema linear dado. Resolva o sistema para determinar I_1 , I_2 e I_3 .

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 16I_1 - 8I_2 = 4 \\ 8I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}$$



2) Um par de tênis, duas bermudas e três camisetas custam juntos R\$ 100,00. Dois pares de tênis, cinco bermudas e 8 camisetas custam juntos R\$ 235,00.

Quanto custam juntos um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta?

⁸⁸ Problema adaptado de Stewart, Redlin e Watson (2007, p. 659) e Lima et al (2006, p. 126)

Conteúdos Específicos:

Definição e operações com Matrizes. Sistemas lineares. Resolução de sistemas lineares. Análise de solução. Escalonamento.

Objetivos Específicos:

Definir matrizes. Estudar as matrizes e suas operações. Discutir sistemas lineares, suas soluções e classificação de soluções: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível. Estudar a solução de sistemas via escalonamento.

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1)

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 16I_1 - 8I_2 = 4 \\ 8I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema linear na forma de uma matriz ampliada, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Para resolvermos a matriz ampliada fazemos um escalonamento:

$$L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 5 \\ 16 & -8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_3 - 16L_1$$

$$L_2 \leftrightarrow \frac{1}{8}L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & -24 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_3 + 24L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 28 & 19 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow \frac{1}{28}L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{28} \end{bmatrix}$$

Sendo assim, temos que $I_3 = \frac{19}{28}A$. Voltando à equação anterior, encontramos $I_2 = \frac{2}{7}A$ e

$$I_1 = \frac{11}{28}A.$$

2)

$$\begin{cases} T + 2B + 3C = R\$100,00 \\ 2T + 5B + 8C = R\$235,00 \\ 1T + 1B + 1C = X \end{cases}$$

Escrevendo o sistema linear na forma de uma matriz ampliada, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 100 \\ 2 & 5 & 8 & 235 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 35 \\ 0 & -1 & -2 & X - 100 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & X - 100 + 35 \end{bmatrix}$$

Da terceira linha, temos:

$$X - 100 + 35 = 0$$

$$X = 65$$

São necessários R\$ 65,00.

Formalização:

Matrizes:

Chama-se matriz do tipo $m \times n$ toda tabela de números disposta em m linhas e n colunas. Para representar tal tabela utilizam-se parênteses (), colchetes [] ou barras duplas || ||.

Genericamente, podemos representar uma matriz A do tipo $m \times n$ da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Operações com matrizes:

Adição: A soma de duas matrizes de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, que se indica por $A + B$, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Multipliação de um número por uma matriz: O produto de um número k por uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, que se indica por kA , é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tal que:

$$b_{ij} = ka_{ij}, \forall i, j, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Subtração de matrizes: A diferença entre duas matrizes do mesmo tipo, A e B , nessa ordem, que se indica por $A - B$, é a matriz $A + (-B)$:

$$A - B = A + (-B)$$

Multipliação de matrizes: O produto da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ pela matriz $B = (b_{rs})_{n \times p}$, que se indica por AB ou $A.B$, é a matriz $C = (c_{uv})_{m \times p}$.

$$\text{Onde } c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + \dots + a_{un} b_{nv}$$

Observações:

1) Se A e B são matrizes, existe o produto AB se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B .

2) A matriz C , tal que $C = AB$, possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B , isto é:

$$A_{m \times k} . B_{k \times n} = C_{m \times n}$$

Sistemas Lineares:

Um sistema linear de m equações e n incógnitas (com $m \geq 1$ e $n \geq 1$) é um conjunto de equações simultâneas da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas; a_{ij} são os coeficientes; b_i são os termos independentes.

Solução:

Chama-se solução de um sistema linear qualquer solução comum a todas as equações do sistema.

Classificação de um sistema linear:

- Sistema possível e determinado (SPD) é todo o sistema linear que admite solução única.
- Sistema possível e indeterminado (SPI) é todo o sistema linear que admite infinitas soluções.
- Sistema impossível (SI) é todo o sistema linear que não admite nenhuma solução.

Resolução de um sistema linear:

Para resolver um sistema linear, procuramos um conjunto S , chamado de **Conjunto solução do sistema**, cujos elementos são todas as soluções do sistema.

Sistema linear escalonado:

Um sistema linear é dito escalonado se, e somente se:

- Todas as equações apresentarem as incógnitas numa mesma ordem;
- Em cada equação existir pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não nulo;
- Existir uma ordem para as equações tal que o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não nulo de cada equação aumente de uma equação para outra.

Dois sistemas lineares A e A' são equivalentes ($A \sim A'$) se, e somente se, tiverem mesmo conjunto solução.

Teorema 1: Permutando-se entre si duas ou mais equações de um sistema linear A , obtém-se um novo sistema A' , equivalente a A .

Teorema 2: Multiplicando-se (ou dividindo-se) ambos os membros de uma equação de um sistema linear B por uma constante k , com $k \neq 0$, obtém-se um novo sistema B' , equivalente a B .

Teorema 3: Substituindo-se uma equação de um sistema linear C pela soma, membro a membro, dela com outra equação desse sistema, obtém-se um novo sistema C' , equivalente a C .

Atividade⁸⁹ Extraclasse

1) Uma empresa é formada pelas lojas A e B, concessionárias de automóveis. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos de veículos nos quatro primeiros dias de fevereiro, foram obtidos os seguintes resultados:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sendo que:

- A matriz A descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i do dia j ;
- A matriz B descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i do dia j .

- Quantas unidades do modelo 2 foram vendidas no dia 3 de fevereiro pela loja A?
- Quantas unidades do modelo 1 foram vendidas no dia 2 de fevereiro pela loja B?
- No período considerado, construa uma matriz que descreva, dia a dia, as vendas de cada modelo nas duas lojas juntas.
- No período considerado, construa uma matriz que compare o desempenho da loja A em relação à loja B, nas vendas diárias de cada modelo.

⁸⁹ Atividades retiradas de Paiva (2004, p. 86 e 100)

2) Um comerciante pretende embalar 20 kg de arroz em sacos de 1 kg, 4 kg e 5 kg.

a) Indicando por x , y e z as quantidades de sacos de 1 kg, 4 kg e 5 kg, respectivamente, monte uma equação que represente a distribuição do arroz nesses sacos.

b) Uma maneira possível de distribuir o arroz nessas embalagens é 7 sacos de 1 kg, 2 sacos de 4 kg e 1 saco de 5 kg. De quantas maneiras diferentes o comerciante pode distribuir o arroz, usando pelo menos um saco de cada tipo?

Estratégia de resolução pensada pela professora:

1) a) Quantas unidades do modelo 2 foram vendidas no dia 3 de fevereiro pela loja A? $a_{23} = 5$

Foram vendidas 5 unidades do modelo 2 no dia 3 de fevereiro.

b) Quantas unidades do modelo 1 foram vendidas no dia 2 de fevereiro pela loja B? $b_{12} = 0$

Não foi vendida nenhuma unidade desse modelo no dia 2 de fevereiro.

c) No período considerado, construa uma matriz que descreva, dia a dia, as vendas de cada modelo nas duas lojas juntas.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

d) No período considerado, construa uma matriz que compare o desempenho da loja A em relação à loja B, nas vendas diárias de cada modelo.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2) a) Sejam x , y e z os números de sacos de arroz com 1kg, 4kg e 5kg, respectivamente. Podemos escrever a equação como

$$x + 4y + 5z = 20$$

b) Como deve ter um saco de cada tipo, temos:

$$1 \leq x \leq 11, 1 \leq y \leq 3 \text{ e } 1 \leq z \leq 3$$

Atribuindo valores à variável z , temos:

z	y	x
1	1	11
1	2	7
1	3	3
2	1	6
2	2	2
3	1	1

Existem 6 maneiras de embalar o arroz com pelo menos um saco de cada tipo.

APÊNDICE E - Avaliações dos grupos (18º Encontro)**Avaliação de Grupo****Nomes:**

1) O número de bactérias em um cultivo modela-se mediante a função:

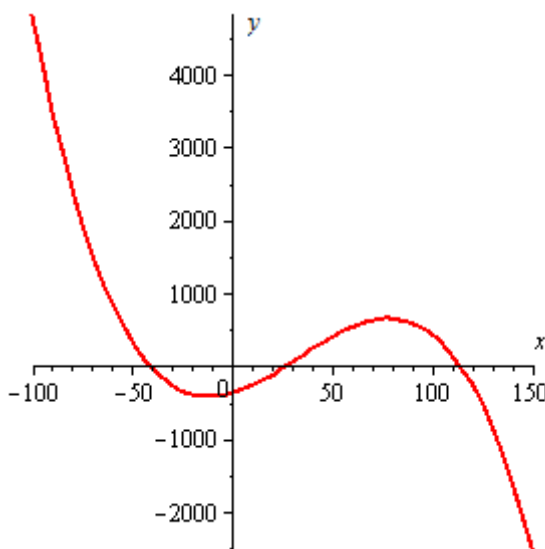
$$n(t) = 500e^{0,45t}$$

Onde t se mede em horas.

- a) Qual é o número inicial de bactérias?
- b) Qual a taxa relativa de crescimento desta população de bactérias? Expresse sua resposta em um percentual.
- c) Quantas bactérias estão no cultivo depois de três horas?
- d) Depois de quantas horas a quantidade de bactérias chega a 10.000?
- e) Esboce o gráfico.

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- a) Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- b) Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Avaliação de Grupo

Nomes:

Uma curva de aprendizagem é um gráfico de uma função $P(t)$ que mede o desempenho de alguém que aprende uma habilidade como uma função do tempo de desempenho t . No começo, a taxa de aprendizagem é mais rápida. Logo, conforme aumenta o desempenho e se aproxima a um valor máximo M , diminui a taxa de aprendizagem. Foi dada a função:

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

Onde k e C são constantes positivas e $C < M$ é um modelo razoável para a aprendizagem.

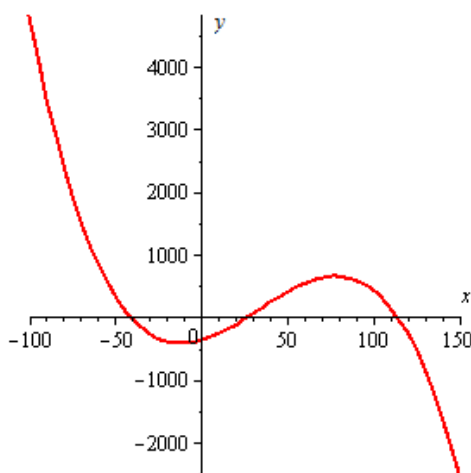
- Expresse o tempo de aprendizagem t como uma função do nível de desempenho P .
- Para alguém em treinamento de aprendizagem a curva é dada por:

$$P(t) = 20 - 14e^{-0,024t}$$

Onde $P(t)$ é o salto de aprendizagem que pode dar após t meses. Depois de quantos meses pode dar um salto no gráfico de 12 pés?

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Avaliação de Grupo

Nomes:

1) Um lago pequeno contém certa espécie de peixe. A população de peixes modela-se mediante a função:

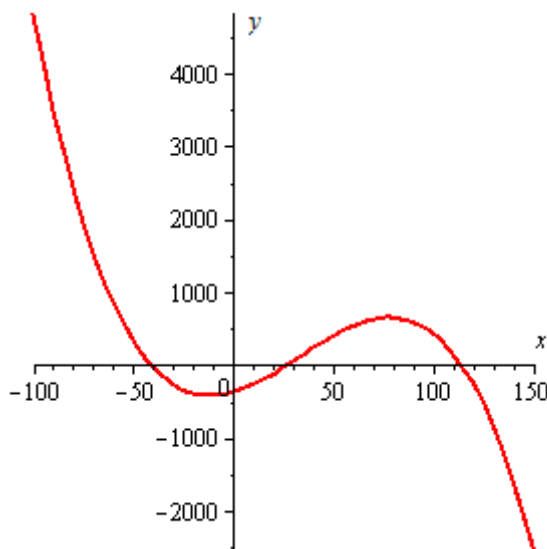
$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0,8t}}$$

Onde P é o número de peixes em milhares e t mede-se em anos desde que se repesou o lago.

- Encontre a população de peixes após três anos.
- Depois de quantos anos a população de peixes chega a 5000?
- Esboce o gráfico.

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Avaliação de Grupo

Nomes:

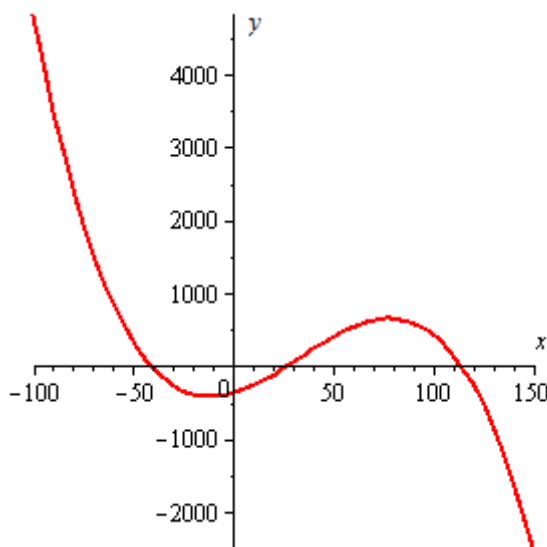
1) A idade de um objeto antigo pode ser determinada pela quantidade de carbono 14 que permanece nele. Se D_0 é a quantidade original de carbono 14 e D a quantidade restante, então a idade A do objeto (em anos) é dada por:

$$A = -8267 \ln \left(\frac{D}{D_0} \right)$$

Encontre a idade de um objeto se a quantidade D de carbono 14 que permanece no objeto é 73% da original D_0 . Esboce o gráfico.

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Avaliação de Grupo

Nomes:

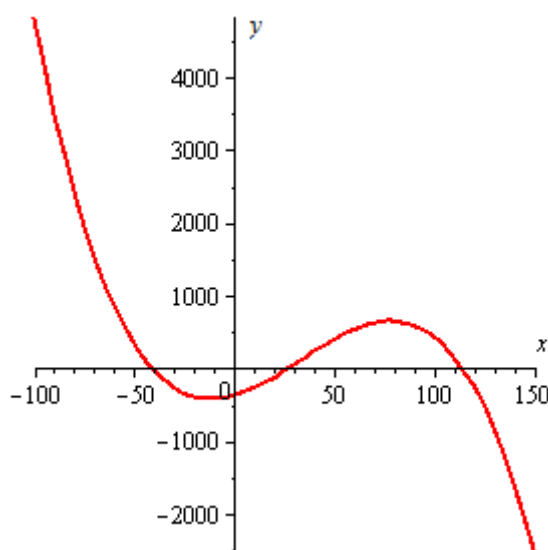
1) Uma doença infecciosa começa a se disseminar em uma cidade pequena com 10.000 habitantes. Depois de t dias, o número de pessoas que tinha sido infectada é modelada pela função:

$$v(t) = \frac{10.000}{5 + 1245e^{-0,97t}}$$

- Quantas pessoas infectadas havia inicialmente ($t=0$)?
- Calcule o número de pessoas infectadas depois de um dia, dois dias e cinco dias.
- Esboce o gráfico da função v e descreva o seu comportamento.

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Avaliação de Grupo

Nomes:

1) Uma substância radioativa se desintegra de tal maneira que a quantidade de massa que permanece depois de t dias é descrita por:

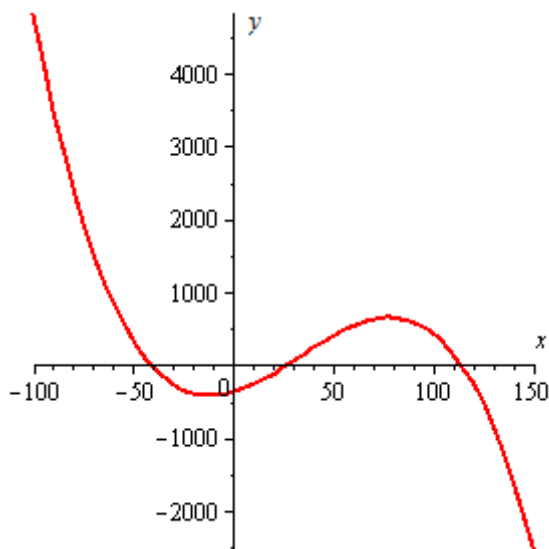
$$m(t) = 13e^{-0,015t}$$

Onde $m(t)$ é medido em quilogramas.

- Encontre a massa no tempo $t=0$.
- Quanta massa permanece depois de 45 dias?
- Esboce o gráfico.

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Avaliação de Grupo

Nomes:

1) Seja m_0 a massa inicial de uma substância radioativa com vida média h , então, a massa restante em função do tempo t é modelado pela função:

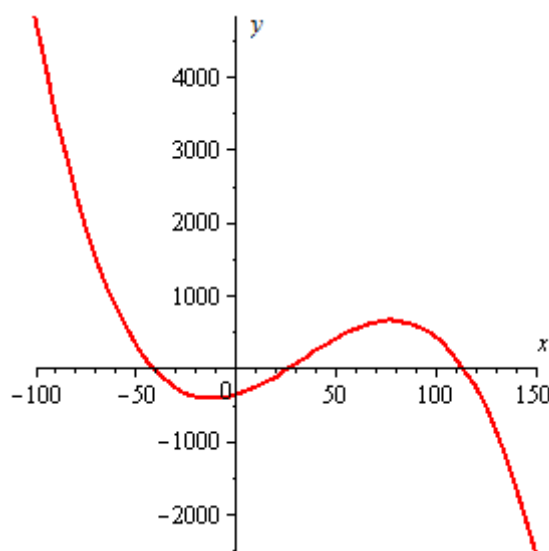
$$m(t) = m_0 e^{-rt} \text{ onde } r = \frac{\ln 2}{h}.$$

O polônio (Po 210) tem uma vida média de 140 dias. Suponha que uma amostra desta substância tem uma massa de 300mg.

- a) Escreva a função que modela a quantidade de amostra em função de t ;
- b) Calcule a massa de perda depois de um ano;
- c) Quanto tempo passa para que a amostra se desintegre a uma massa de 200 mg?
- d) Esboce um gráfico da massa da amostra como uma função do tempo.

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- a) Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- b) Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Avaliação de Grupo

Nomes:

1) O número de certa espécie de peixes se modela mediante a função:

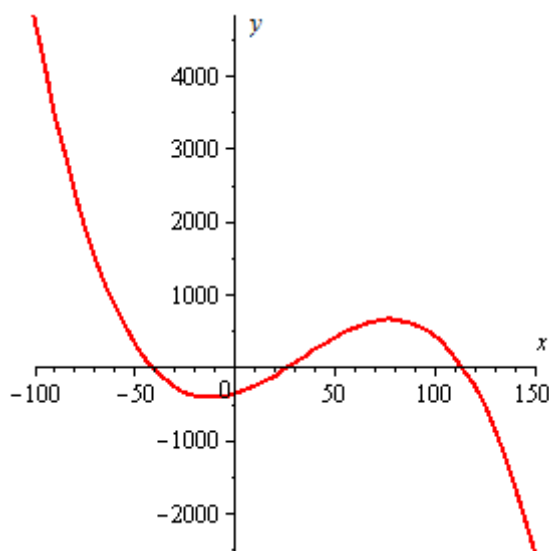
$$n(t) = 12e^{0,012t}$$

Onde t se mede em anos e $n(t)$ em milhões.

- Qual a taxa relativa de crescimento populacional de peixes? Expresse sua resposta como uma porcentagem.
- Qual a população de peixes depois de 5 anos?
- Depois de quantos anos a quantidade de peixes chega a 30 milhões?
- esboce um gráfico da função $n(t)$

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

Avaliação de Grupo

Nomes:

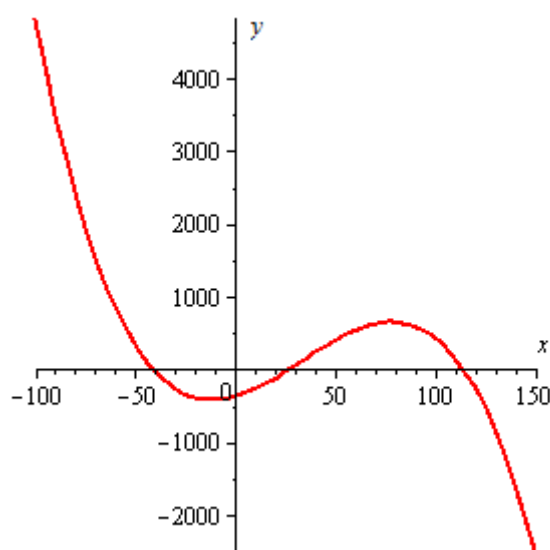
1) A idade de um objeto antigo pode ser determinada pela quantidade de carbono 14 que permanece nele. Se D_0 é a quantidade original de carbono 14 e D a quantidade restante, então a idade A do objeto (em anos) é dada por:

$$A = -8267 \ln \left(\frac{D}{D_0} \right)$$

Encontre a idade de um objeto se a quantidade D de carbono 14 que permanece no objeto é 80% da original D_0 . Esboce o gráfico.

2) Investigação de Mercado (uso de calculadora): Um analista de mercado que trabalha para um fabricante de pequenos aparelhos verifica que se a empresa produz y e vende x liquidificadores anualmente, seu rendimento em dólares é dado por $P(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0031x^3 - 372$.

De acordo com o esboço de $P(x)$, responda as seguintes perguntas:



- Quando se fabricam apenas alguns liquidificadores, a empresa perde dinheiro (ganhos negativos). Quantos liquidificadores a empresa deve produzir para que não tenha perdas?
- Os ganhos se incrementam de maneira indefinida quando se produz e vende mais liquidificadores? Se não, qual é o maior ganho possível que a empresa poderia ter?

APÊNDICE F – Planilha de nota dos alunos de Matemática Básica- Turma A

Noções de Matemática Básica ⁹⁰							
Nomes	A. I. (2,0)	Auto. (2,0)	A. G. (2,0)	A. Prof.	Freq.(2,0)	M. Final	Situação
Aluno 1	1,4	1,0	1,7	1,5	2,0	7,6	A
Aluno 2	1,0	1,2	1,7	0,5	1,7	6,1	A
Aluno 3	1,2	1,4	1,5	1,0	2,0	7,1	A
Aluno 4	1,7	1,6	1,9	1,8	2,0	9,0	A
Aluno 5	1,6	1,4	1,9	1,8	2,0	8,7	A
Aluno 6	1,4	1,6	1,9	1,6	1,9	8,4	A
Aluno 7	1,1	0,8	1,7	1,4	1,9	6,9	A
Aluno 8	1,7	1,6	1,7	1,6	1,7	8,3	A
Aluno 9	1,6	1,4	1,6	1,5	1,1	7,2	A
Aluno 10	1,7	1,4	1,4	1,0	1,0	6,5	A
Aluno 11	1,1	1,4	1,6	1,3	2,0	7,4	A
Aluno 12	1,1	1,4	1,7	1,5	2,0	7,7	A
Aluno 13	1,7	1,6	1,7	1,9	2,0	8,9	A
Aluno 14	0,8	1,0	1,6	1,0	1,9	6,3	A
Aluno 15	1,6	1,8	1,6	1,3	1,7	8,0	A
Aluno 16	1,7	1,6	1,4	1,6	2,0	8,3	A
Aluno 17	1,1	1,3	1,5	1,6	0,5	6,0	A
Aluno 18	1,3	1,4	1,6	1,6	0,5	6,4	A
Aluno 19	0,8	1,8	1,9	1,3	1,6	7,4	A
Aluno 20	0,7	1,2	1,7	1,3	1,1	6,0	A
Aluno 21	1,6	1,6	1,7	1,8	2,0	8,7	A
Aluno 22	1,0	2,0	1,5	1,3	2,0	7,8	A
Aluno 23	1,1	1,8	1,9	1,0	1,9	7,7	A
Aluno 24	NC	NC	NC	NC	RF	RF	RF
Aluno 25	1,5	1,4	1,9	1,3	1,7	7,8	A
Aluno 26	1,6	1,8	1,7	1,8	1,9	8,8	A
Aluno 27	1,0	1,4	1,7	1,0	2,0	7,1	A
Aluno 28	1,2	1,8	1,7	1,3	1,6	7,6	A
Aluno 29	1,3	1,2	1,9	1,3	1,7	7,4	A
Aluno 30	1,6	1,2	1,9	1,5	1,6	7,8	A
Aluno 31	1,4	1,6	1,8	1,5	2,0	8,3	A
Aluno 32	1,2	1,4	1,7	1,5	2,0	7,8	A
Aluno 33	1,8	1,4	1,8	1,8	2,0	8,8	A
Aluno 34	NC	NC	RF	NC	RF	RF	RF
Aluno 35	0,3	NC	1,7	0,8	RF	RF	RF
Aluno 36	1,4	1,6	1,9	1,5	2,0	8,4	A
Aluno 37	1,3	1,8	1,6	1,3	2,0	8,0	A
Aluno 38	1,1	NC	1,7	1,0	RF	RF	RF
Aluno 39	1,0	1,2	1,7	1,0	1,0	5,9	A
Aluno 40	1,5	1,8	1,7	1,3	1,6	7,9	A

⁹⁰ Legenda: A. I. : Avaliação Individual; Auto.: Autoavaliação; A. G.: Avaliação em Grupo; A. Prof.: Avaliação do Professor; Freq.: Frequência; M. Final: Média Final; NC: Não compareceu; RF: Reprovado por frequência; A: Aprovado.

ANEXO A – Ementa e programa das disciplinas de Cálculo I e Geometria Analítica



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CAMPUS ALEGRETE
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

PROGRAMA DE DISCIPLINA

IDENTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA

Nome da disciplina	Carga Horária	Créditos	Código
Cálculo I	60 horas	(4T – 0P)	AL0001

OBJETIVOS

Compreender e aplicar as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral para funções reais de uma variável real, dando ênfase às suas aplicações.

EMENTA

Noções básicas de conjuntos. A reta real. Intervalos e desigualdades. Funções de uma variável. Limites. Continuidade. Derivadas. Regras de derivação. Regra da cadeia. Derivação implícita. Diferencial. Regra de L'Hôpital, máximos e mínimos e outras aplicações.

PROGRAMA

UNIDADE 1 – CONJUNTOS E INTERVALOS

- 1.1 – Conjuntos Numéricos.
- 1.2 – A reta real.
- 1.3 - Desigualdades.
- 1.4 – Valor Absoluto.
- 1.5 - Intervalos.

UNIDADE 2 – FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

- 2.1 – Definição, gráficos e operações.
- 2.2 – Funções polinomiais e função racional.
- 2.3 – Funções pares e ímpares.
- 2.4 – Funções exponencial e logarítmica.
- 2.5 – Funções trigonométricas.
- 2.6 – Funções inversas.

UNIDADE 3 - LIMITE E CONTINUIDADE

- 3.1 - Definição e propriedades de limite.
- 3.2 - Teorema do confronto.
- 3.3 - Limites fundamentais.
- 3.4 - Limites envolvendo infinito, assíntotas.
- 3.5 - Continuidade de funções reais.



3.6 - Teorema do valor intermediário.

UNIDADE 4 - DERIVADA

- 4.1 - Reta tangente.
- 4.2 - Definição da derivada.
- 4.3 - Regras básicas de derivação.
- 4.4 - Derivada das funções elementares.
- 4.5 - Regra da cadeia.
- 4.6 - Derivada das funções implícitas.
- 4.7 - Derivada da função inversa.
- 4.8 - Derivadas de ordem superior.
- 4.9 - Taxas de variação.
- 4.10- Diferencial e aplicações.
- 4.11- Teorema do valor intermediário, de Rolle e do valor médio.
- 4.12- Crescimento e decrescimento de uma função.
- 4.13- Concavidade e pontos de inflexão.
- 4.14- Problemas de maximização e minimização.
- 4.15- Formas indeterminadas - Regras de L'Hospital.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

- H. ANTON, “Cálculo – um novo horizonte, v. 1”, São Paulo: *Bookman*, 2007.
- M.B. GONÇALVES E D.M. FLEMMING, “Cálculo A”, São Paulo: *Makron Books*, 2006.
- L. LEITHOLD, “O cálculo com geometria analítica, v. 1”, São Paulo: *Makron Books*, 1994.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- H.L. GUIDORIZZI, “Um curso de cálculo, v. 1”, Rio de Janeiro: *LTC*, 1998.
- J. STEWART, “Cálculo, v. 1”, São Paulo: *Thomson & Learning*, 5ª Ed., 2006.
- R. COURANT, “Introduction to calculus and analysis v. 1”, New York: *Springer-Verlag*, 1989.
- P. BOULOS, “Cálculo diferencial e integral v. 1”, São Paulo: *Pearson Makron Books*, 2006.
- H. LOPES, I. MALTA, S. PESCO, “Cálculo a uma variável: uma introdução ao cálculo v. 1”, *Editora Loyola*, 2002.



PROGRAMA DE DISCIPLINA

IDENTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA

Nome da disciplina	Carga Horária	Créditos	Código
Geometria Analítica	60 horas	(4T – 0P)	AL0002

OBJETIVOS

Operar com vetores, distâncias, cônicas e quádricas, volumes, equações de retas, planos, áreas.

EMENTA

Vetores no plano e no espaço. Retas no plano e no espaço. Estudo do plano. Distância, área e volume. Cônicas, Quádricas.

PROGRAMA

UNIDADE 1 - VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

- 1.1 - Conceito, operações e propriedades.
- 1.2 - Noções de combinação linear, dependência e independência linear e base de um vetor.
- 1.3 - Produto interno canônico ou usual.
- 1.4 - Conceito de norma e versor de um vetor.
- 1.5 - Base ortogonal e base ortonormal.
- 1.6 - Produto vetorial.
- 1.7 - Produto misto.
- 1.8 - Ângulo de dois vetores.

UNIDADE 2 - RETAS NO PLANO E NO ESPAÇO

- 2.1 - Conceito e direção.
- 2.2 - Equações: paramétricas, normal, cartesiana e segmentária da reta.
- 2.3 - Reta dada por dois pontos, condição de alinhamento de pontos e ponto que divide um segmento na razão dada.
- 2.4 - Condição de paralelismo e perpendicularismo.
- 2.5 - Equação reduzida.
- 2.6 - Ângulo entre duas retas.
- 2.7 - Condição de alinhamento de três pontos e posição relativa de duas retas.

UNIDADE 3 - ESTUDO DO PLANO

- 3.1 - Conceito, direção e equação do plano.
- 3.2 - Plano definido por um ponto e um vetor normal.
- 3.3 - Paralelismo e perpendicularismo entre planos e entre reta e plano.
- 3.4 - Ângulos entre reta e plano e entre dois planos.
- 3.5 - Posições relativas de dois planos, de duas retas e de uma reta e um plano.
- 3.6 - Feixe linear de planos.

UNIDADE 4 - DISTÂNCIA, ÁREAS E VOLUMES

- 4.1 - Distância de um ponto a um plano.
- 4.2 - Distância de um ponto a uma reta.
- 4.3 - Distância entre duas retas.
- 4.4 - Área do paralelogramo e do triângulo.
- 4.5 - Volume do paralelepípedo, prisma triangular e do tetraedro.

UNIDADE 5 - CÔNICAS, QUÁDRICAS E SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

- 5.1 - Conceituações.
- 5.2 - Equações reduzidas.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

- P. BOULOS, I. CAMARGO, “Geometria analítica: um tratamento vetorial”, 3ª Ed., São Paulo: Pearson Education, 2005.
- P. WINTERLE, “Vetores e geometria analítica”, São Paulo: Makron Books, 2006.
- A. STEINBRUCH, “Geometria analítica”, 2ª Ed., São Paulo: Mc Graw Hill, 1987.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- P.S.Q. CORREA, “Álgebra linear e geometria analítica”, Editora Interciência, 2006.
- G.L. DOS CREIS, V.V. DA SILVA, “Geometria analítica”, Editora LTC, 1996.
- C.H. LEHMANN, “Geometria analítica”, Editora Globo, 1998.
- A.C.C. LORETO, A.P. LORETO JR, “Vetores e geometria analítica: teoria e exercícios”, Editora LCTE, 2005.
- J.R. JULIANELLI, “Cálculo vetorial e geometria analítica”, Editora Ciência Moderna, 2008.

ANEXO B – Ementa e programa da disciplina de Matemática Básica



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CAMPUS ALEGRETE
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

PROGRAMA DE DISCIPLINA

IDENTIFICAÇÃO DA DISCIPLINA

Nome da disciplina	Carga Horária	Créditos	Código
Matemática Básica	30 horas	(1T – 1P)	AL2001

OBJETIVOS

Aplicar conhecimentos matemáticos básicos para aprendizagem de demais disciplinas que necessitam de tais conteúdos

EMENTA

Conjuntos, funções, trigonometria, sistemas lineares e geometria analítica.

PROGRAMA

UNIDADE 1 - REVISÃO DO ENSINO FUNDAMENTAL

- 1.1 Potenciação
- 1.2 Produtos Notáveis
 - 1.2.1 Quadrado da soma de dois termos
 - 1.2.2 Quadrado de diferença de dois termos
 - 1.2.3 Produto da soma de dois termos pela diferença
 - 1.2.4 Cubo da soma (diferença) de dois termos
- 1.3 Fatoração
 - 1.3.1 Fator comum ou evidência
 - 1.3.2 Fator comum a grupos de termos ou agrupamentos
 - 1.3.3 Trinômio quadrado perfeito
 - 1.3.4 Diferença de dois quadrados
 - 1.3.5 Trinômio do 2º Grau (com $a \neq 0$, x' e x'' raízes)
 - 1.3.6 Soma ou diferença dos cubos
 - 1.3.7 Mínimo múltiplo comum
- 1.4 Radiciação
 - 1.4.1 Propriedades
 - 1.4.2 Racionalização de denominadores
- 1.5 Notação Científica
 - 1.5.1 Números Muito Pequenos

UNIDADE 2 - REVISÃO DO ENSINO MÉDIO

- 2.1 Teoria dos Conjuntos
 - 2.1.1 Conjunto Vazio
 - 2.1.2 Subconjuntos
 - 2.1.3 Conjunto Complementar
- 2.2 Operações com Conjuntos
 - 2.2.1 União de conjuntos
 - 2.2.2 Intersecção de Conjuntos
 - 2.2.3 Diferença de Conjuntos

2.3 Conjuntos Numéricos

- 2.3.1 Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)
- 2.3.2 Operações no conjunto dos números Naturais
- 2.3.3 Relação de ordem em $\mathbb{N}$
- 2.3.4 Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)
- 2.3.5 Operações em $\mathbb{Z}$
- 2.3.6 Valor absoluto
- 2.3.7 Principais propriedades do valor absoluto ou módulo
- 2.3.8 Divisibilidade
- 2.3.9 Números primos em $\mathbb{Z}$
- 2.3.10 Conjunto dos Números Racionais
- 2.3.11 Operações em $\mathbb{Q}$
- 2.3.12 Representação decimal
- 2.3.13 Conjunto dos Números Irracionais
- 2.3.14 Conjunto dos Números Reais
- 2.3.15 Números Periódicos

2.4 Intervalos

UNIDADE - 3 PRODUTO CARTESIANO, RELAÇÕES E FUNÇÕES

3.1 Produto cartesiano

- 3.1.1 Igualdade
- 3.1.2 Produtos cartesianos entre intervalos de $\mathbb{R}$

3.2 Relações

- 3.2.1 Diagrama de Flechas ou Diagrama de Venn
- 3.2.2 Domínio e conjunto-imagem
- 3.2.3 Relação inversa

3.3 Polinômios

- 3.3.1 Operações
- 3.3.2 Grau de polinômio
- 3.3.3 Divisão

3.4 Funções

- 3.4.1 Domínio
- 3.4.2 Imagem
- 3.4.3 Contradomínio
- 3.4.4 Valor numérico de uma função
- 3.4.5 Gráfico de uma função
- 3.4.6 Identificação de funções através de gráficos
- 3.4.7 Domínio de funções
- 3.4.8 Tipos de funções
- 3.4.9 Função inversa

UNIDADE 4 - EXPONENCIAL, LOGARITMO, TRIGONOMETRIA.

4.1 Equações e inequações exponenciais

- 4.1.1 Equações exponenciais
- 4.1.2 Inequações exponenciais

4.2 Logaritmos

- 4.2.1 Propriedades dos logaritmos

4.3 Introdução à trigonometria

- 4.3.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo



- 4.3.2 Uma tabela de valores muito importante
- 4.3.3 Arco de circunferência
- 4.3.4 Ângulo central
- 4.3.5 Comprimento de uma circunferência
- 4.3.6 Unidades para medir arcos
- 4.3.7 Relação entre grau e radiano
- 4.3.8 Ciclo trigonométrico
- 4.3.9 Identidades trigonométricas importantes

UNIDADE 5 - SISTEMAS LINEARES

- 5.1 Equação linear
- 5.2 Sistema Linear
 - 5.2.1 Solução de um sistema linear
 - 5.2.2 Sistema linear homogêneo
- 5.3 Regra de Cramer
- 5.4 Classificação de um sistema linear
- 5.5 Escalonamento de sistemas

UNIDADE 6 - Geometria Analítica

- 6.1 Equação Geral e Reduzida da Reta
- 6.2 Inclinação da Reta e equação da reta na forma ponto declividade
- 6.3 Interseção entre Retas
 - 6.3.1 Condições de Paralelismo e Perpendicularismo entre Retas

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

- BOULOS, PAULO. *Pré-cálculo*. São Paulo: Makron Books, 2001.
- AVILA, GERALDO. *Introdução ao cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- HEFEZ, ABRAMO. *Elementos de aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

- MARCON, D.; NOGUTI, F. C. H. *Caderno Didático para o Curso de Matemática Básica*. Disponível no MOODLE (<http://www.cta.unipampa.edu.br/moodle/>).
- FAVARO, SILVIO. *Noções de lógica e matemática básica*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.
- CAMARGO, IVAN DE; BOULOS, P. *Geometria analítica : um tratamento vetorial*. São Paulo: Pearson, 2005.
- SOUZA, JÚLIO CÉSAR DE MELLO. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2001.
- BARRETO FILHO, BENIGNO. *Matemática aula por aula: volume único: ensino médio*. São Paulo: FTD, 2000.

ANEXO C – Horário do Projeto Integrado de Iniciação ao Ensino Superior 2013



Universidade Federal do Pampa
Campus Alegrete
Horários Nivelamento 2013
 Período: 08 de abril de 2013 a 03 de maio de 2013

Horários da Turma A: Todas as aulas na sala 304

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
08:30 – 09:30		Noções Básicas de Português (Profa. Lucélia)		Noções Básicas de Português (Profa. Lucélia)	
09:30 – 10:30					
10:30 – 11:30	Noções Básicas de Física (Prof. Vicente)	Noções Básicas de Física (Prof. Vicente)	Noções Básicas de Física (Prof. Vicente)	Noções Básicas de Física (Prof. Vicente)	
11:30 – 12:30					
14:00 – 15:00	Noções Básicas de Matemática (Prof. Fabiane)	Noções Básicas de Matemática (Prof. Fabiane)	Noções Básicas de Matemática (Prof. Fabiane)	Noções Básicas de Matemática (Prof. Fabiane)	Noções Básicas de Matemática (Prof. Fabiane)
15:00 – 16:00					
16:00 – 17:00					
18:30 – 19:30	Noções Básicas de Algoritmos (Prof. Claudio)	Noções Básicas de Algoritmos (Prof. Claudio)	Noções Básicas de Algoritmos (Prof. Claudio)	Noções Básicas de Algoritmos (Prof. Claudio)	
19:30 – 20:30					



Universidade Federal do Pampa
Campus Alegrete
Horários Nivelamento 2013
 Período: 08 de abril de 2013 a 03 de maio de 2013

Horários da Turma B: Todas as aulas na sala 305

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
08:30 – 09:30	Noções Básicas de Matemática (Profa. Lucas)	Noções Básicas de Matemática (Profa. Lucas)	Noções Básicas de Matemática (Profa. Lucas)	Noções Básicas de Matemática (Profa. Lucas)	
09:30 – 10:30					
10:30 – 11:30	Noções Básicas de Física (Prof. Fabiano)	Noções Básicas de Física (Prof. Fabiano)	Noções Básicas de Física (Prof. Fabiano)	Noções Básicas de Física (Prof. Fabiano)	
11:30 – 12:30					
14:00 – 15:00		Noções Básicas de Português (Profa. Lucélia)		Noções Básicas de Português (Profa. Lucélia)	
15:00 – 16:00					
18:30 – 19:30	Noções Básicas de Algoritmos (Prof. Douglas)	Noções Básicas de Algoritmos (Prof. Douglas)	Noções Básicas de Algoritmos (Prof. Douglas)	Noções Básicas de Algoritmos (Prof. Douglas)	
19:30 – 20:30					