unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Introdução aos Espaços Vetoriais Topológicos

Diego Galvão Lins

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Uma Introdução aos Espaços Vetoriais Topológicos

Diego Galvão Lins

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

Rio Claro
2021

L759i

Lins, Diego Galvão
Uma introdução aos espaços vetoriais topológicos / Diego Galvão Lins. -- Rio Claro, 2021
79 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: João Peres Vieira

1. Topologia. 2. Espaço Vetorial. 3. Espaço Vetorial Topológico. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Diego Galvão Lins

Uma Introdução aos Espaços Vetoriais Topológicos

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Departamento de Matemática - Unesp

Profa. Dra. Karen Regina Panzarin
Departamento de Matemática - UFScar

Rio Claro, 21 de janeiro de 2021

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à Unesp de Rio Claro por proporcionar um excelente ambiente e estrutura.

Aos funcionários do Restaurante Universitário pelas conversas durante o almoço.

Ao corpo docente do departamento de matemática do IGCE pelas excelentes aulas, em particular, aos professores Renata, Suzi, João e Thiago. Nunca esquecerei da simplicidade de um plano tridimensional explicado com canetas (G.A.), ou uma explicação de integral com analogias incríveis (Cálculo I), ou a importância de entender a definição de um termo matemático (Álgebra Linear), ou problemas desafiadores de geometria (Geometria I), conteúdos das disciplinas do meu primeiro ano de matemática.

Àqueles que me inspiraram: professor Fabrício, na época, um estudante de filosofia, que, durante nossas discussões, me fazia refletir sobre tudo; e minha professora de matemática, Adriana, do ensino médio, que durante suas aulas, resolvendo exercícios sobre Binômio de Newton e através de discussões, apresentado termos como "Análise Real" e muitos outros, me fez decidir por fazer matemática.

Ao professor André, de matemática, por me motivar a fazer a Olimpíada Brasileira de Matemática no ensino fundamental.

Ao professor responsável pela biblioteca que mostrou diversos livros interessantes durante o intervalo, à minha professora de geografia pelos estímulos para passar no vestibular, em geral, ao corpo docente da escola Ascendino Reis.

À minha orientadora de iniciação científica da USP, professora Daniela, pela oportunidade de estudar um tema que queria muito sobre análise matemática.

Às professoras Elíris e Karen, pelas revisões e sugestões valiosas.

Quero agradecer novamente ao meu orientador João, pela paciência e dedicação durante este projeto. Sem os diálogos e perguntas não teria conseguido elaborar esta dissertação. Nesses diálogos que percebo a importância de entender uma definição.

Por último, quero agradecer ao papel do professor na minha trajetória escolar e acadêmica.

Necessity is the mother of invention
Provérbio da língua inglesa

Resumo

Neste trabalho estudamos os espaços vetoriais topológicos e suas propriedades. Para isso utilizamos como referências principais [1] e [2]. A primeira mais voltada ao estudo da Topologia Geral e a segunda ao estudo dos Espaços Vetoriais Topológicos, isto é, espaços vetoriais munidos de uma topologia de modo que a adição e multiplicação por escalar sejam contínuas. Observamos que nesta topologia todo espaço vetorial topológico pode ser visto como um espaço uniforme, toda translação é um homeomorfismo e possui uma base de vizinhanças de 0.

Palavras-chave: Topologia, Espaço Vetorial, Espaço Vetorial Topológico.

Abstract

In this work we studied topological vector spaces and their properties. For this we use as main references [1] and [2]. The first one is more focused on the study of General Topology and the second on the study of Topological Vector Spaces, that is, vector spaces equipped with a topology so that the addition and scalar multiplication are continuous. We observed that in this topology, every topological vector space can be seen as a uniform space, every translation is a homeomorphism and has a neighborhood base of 0.

Keywords: Topology, Vector Space, Topological Vector Space.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos espaços vetoriais topológicos e suas propriedades. De acordo com [2], um espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$, é chamado de um espaço vetorial topológico se é definida sobre E uma topologia τ que é compatível com a estrutura de um espaço vetorial.

Um pré-requisito formal para uma leitura deste trabalho é a familiaridade com fatos básicos da teoria dos conjuntos, topologia geral e álgebra linear. O objetivo deste primeiro capítulo de preliminares não é estabelecer esses resultados, mas esclarecer a terminologia e notação. Aqui usamos as referências [1], [3], [4] e [5].

No segundo capítulo, apresentamos os resultados fundamentais sobre espaços vetoriais topológicos, onde o corpo escalar $\mathbb{K}$, sobre o qual os espaços vetoriais estão definidos, pode ser um corpo arbitrário, não discreto, dotado com a uniformidade decorrente de seu valor absoluto. O objetivo desta generalidade é identificar claramente aquelas propriedades do corpo dos números reais e complexos comumente usadas que são essenciais para esses resultados básicos. Aqui tomamos como base a referência [2] e também consultamos as referências [6] e [7].

1 Pré-requisito

Este capítulo apresenta definições e propriedades fundamentais para uma boa compreensão de um espaço vetorial topológico, divididas em três seções: conjuntos e ordens, topologia geral e álgebra linear.

1.1 Conjuntos e Ordens

1.1.1 Relação de equivalência e Conjunto Quociente

Definição 1.1. Seja X um conjunto e seja $\mathcal{R}$ um subconjunto de $X \times X$. $\mathcal{R}$ é uma **relação de equivalência** em X se as seguintes propriedades são satisfeitas para todos $x, y, z \in X$:

1. $x\mathcal{R}x$ (reflexiva);
2. Se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$ (simétrica);
3. Se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$ (transitiva).

Definição 1.2. Para cada $x \in X$ o conjunto $[x] = \{y \in X | y\mathcal{R}x\}$ é chamado de **classe de equivalência** de $x \in X$.

Definição 1.3. O conjunto $X/\mathcal{R} = \{[x] | x \in X\}$ é chamado de **conjunto quociente** de X por $\mathcal{R}$.

1.1.2 Famílias

Definição 1.4. Se A é um conjunto não vazio e X é um conjunto, uma função

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \alpha & \longmapsto & x(\alpha) \end{array}$$

é chamada uma **família** de X. Escreve-se neste caso x_α para $x(\alpha)$ e denota-se a família por $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$.

Exemplo 1.5. Sejam $A = \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{R}$. Então a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & x(n) = \dfrac{1}{n} \end{array}$$

é uma família de $\mathbb{R}$ denotada por $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.1.3 Ordens

Definição 1.6. Uma **estrutura de ordem** sobre um conjunto X é uma relação binária $\mathcal{R}$ sobre X, usualmente denotada por $\leqslant$, a qual é:

Reflexiva: $\forall x \in X$, $x \leqslant x$;

Antissimétrica: Se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, então $x = y$;

Transitiva: Se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$, então $x \leqslant z$.

Exemplo 1.7. A relação x menor do que ou igual a y, denotada por $x \leq y$, sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ dá uma estrutura de ordem sobre $\mathbb{R}$, pois é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Definição 1.8. Um conjunto X dotado com uma estrutura de ordem $\leqslant$, usualmente denotado por $(X, \leqslant)$, é denominado um **conjunto ordenado**.

Exemplo 1.9. $(\mathbb{R}, \leq)$ é um conjunto ordenado.

Definição 1.10. Seja $(X, \leqslant)$ um conjunto ordenado. Um subconjunto A de X é **limitado superiormente** em X se existe $a_0 \in X$ tal que $a \leqslant a_0$ para qualquer $a \in A$; $a_0 \in A$ é dito **limitante superior** de A em X.

Exemplo 1.11. O subconjunto $[0, 1)$ do conjunto ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ por $1 \in \mathbb{R}$, pois $a \leq 1$ para todo $a \in [0, 1)$. Assim, 1 é um limitante superior de $[0, 1)$ em $\mathbb{R}$. Note que qualquer número real $a_0 \geq 1$ também será um limitante superior de $[0, 1)$ em $\mathbb{R}$.

Definição 1.12. Um elemento $x \in X$ é dito **máximo** de X se $y \leq x$ para todo $y \in X$.

Exemplo 1.13. Como $([0, 1], \leq)$ é um conjunto ordenado e $a \leq 1$ para todo $a \in [0, 1]$, então $1 \in [0, 1]$ é um elemento máximo de $[0, 1]$.

Observação 1.14. Se x é máximo de X, então $x \leqslant y$ em X implica $x = y$. De fato, como $x \leq y$ em X e $y \leq x$ e $(X, \leq)$ é um conjunto ordenado segue pela propriedade antissimétrica que $y = x$.

Definição 1.15. Seja $(X, \leqslant)$ um conjunto ordenado, não vazio. X é dito **dirigido** sob $\leqslant$ se todo subconjunto $\{x, y\}$ possui um limitante superior. Se $x_0 \in X$, o subconjunto $\{x \in X : x_0 \leqslant x\}$ é chamado uma **seção** de X (mais precisamente, uma seção de X **gerada** por x_0). Uma família $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ é dita **dirigida** se A é um conjunto dirigido. As **seções** de uma família dirigida, são as subfamílias $\{y_\alpha : \alpha_0 \leqslant \alpha\}$, para qualquer $\alpha_0 \in A$.

Exemplo 1.16. O conjunto ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ é dirigido sob a relação $\leq$, pois todo subconjunto $\{x, y\}$ possui um limitante superior. O subconjunto $[1, \infty)$ de $\mathbb{R}$ é uma seção de $\mathbb{R}$. A família $\{\alpha^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é dirigida desde que $\mathbb{R}$ é um conjunto dirigido. As subfamílias $\{\alpha^2 : b \leq \alpha\}$, para todo $b \in \mathbb{R}$ são as seções da família dirigida $\{\alpha^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

1.1.4 Filtros

Definição 1.17. Seja X um conjunto. Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é chamada um **filtro** sobre X se satisfaz os seguintes axiomas:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

2. $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset G \subset X \Rightarrow G \in \mathcal{F}$;

3. $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$.

Exemplo 1.18. Seja X um conjunto não vazio. A coleção $\mathcal{F}$ de todos os subconjuntos de X que contêm um subconjunto não vazio A de X fixado é um filtro sobre X.
De fato,

1. $X \in \mathcal{F}$, pois $A \subset X$, logo $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois $\emptyset$ não contém nenhum subconjunto não vazio de X. Em particular $\emptyset$ não contém A, do contrário $A = \emptyset$ o que é um absurdo.

2. Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset G \subset X$, então $\emptyset \neq A \subset F$. Logo, $\emptyset \neq A \subset F \subset G \subset X$, portanto $G \in \mathcal{F}$.

3. Se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$, então $\emptyset \neq A \subset F$ e $\emptyset \neq A \subset G$. Logo, $\emptyset \neq A \subset F \cap G$, portanto $F \cap G \in \mathcal{F}$.

Definição 1.19. Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é uma **base de filtro** se satisfaz:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$;

2. $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Observação 1.20. Note que toda base de filtro $\mathcal{B}$ gera um único filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $F \in \mathcal{F}$ se, e somente se, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$.

Com efeito,

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

2. $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset G \subset X \Rightarrow G \in \mathcal{F}$, pois existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F \subset G$.

3. $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}$, pois existem $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \in \mathcal{B}$ tais que $B_1 \subset F$ e $B_2 \subset G$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de filtro, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset F \cap G$.

Definição 1.21. $\mathcal{B}$ é chamada uma base do filtro $\mathcal{F}$.

Exemplo 1.22. Seja A é um subconjunto não vazio de X fixado, então $\mathcal{B} = \{A\}$ é uma base de filtro. Pela Observação 1.20, $\mathcal{B}$ gera um único filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $F \in \mathcal{F}$ se, e somente se, $A \subset F$. Em outras palavras, $\mathcal{B}$ é uma base do filtro $\mathcal{F}$ do Exemplo 1.18.

Definição 1.23. Se $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ são filtros sobre X, dizemos que $\mathcal{F}_1$ é mais **grosso** do que $\mathcal{F}_2$ ou que $\mathcal{F}_2$ é mais **fino** que $\mathcal{F}_1$.

Exemplo 1.24. Sejam $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F}_1 = \{X\}$,$\mathcal{F}_2 = \{\{a, b\}, X\}$, $\mathcal{F}_3 = \{\{a, c\}, X\}$ e $\mathcal{F}_4 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$. Assim, $\mathcal{F}_4$ é mais fino do que $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, ou equivalentemente, os filtros $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_3$ são mais grossos do que $\mathcal{F}_4$.

Definição 1.25. Seja X um conjunto. Se $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma família dirigida em X, as imagens das seções dessa família formam uma base de filtro sobre X chamado o **filtro seção** da família.

Exemplo 1.26. O conjunto ordenado $([0,+\infty\,[,\leq\,)$, onde $\leq$ é a ordem induzida da ordem usual de $\mathbb{R}$ é um conjunto dirigido, pois todo subconjunto $\{x,y\}$ de $[0,+\infty\,[$ possui um limitante superior. Assim, a família $\{\alpha^2 : \alpha \in [0,+\infty\,[\,\}$ é uma família dirigida desde que $[0,+\infty\,[$ é um conjunto dirigido. As subfamílias $\{\alpha^2 : b \leq \alpha\}$, para todo $b \in [0,+\infty\,[$ são as seções da família dirigida $\{\alpha^2 : \alpha \in [0,+\infty\,[\,\}$. Então

$$\mathcal{B} = \{\{\alpha^2 : b \leq \alpha\} : b \in [0,+\infty\,[\,\} = \{[b^2,+\infty[: b \in [0,+\infty\,[\,\}.$$

é um filtro seção da família dirigida $\{\alpha^2 : \alpha \in [0,+\infty\,[\,\}$, ou seja, $\mathcal{B}$ é uma base de filtro sobre $[0,+\infty\,[$. De fato,

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pois $[0,+\infty\,[\; \in \mathcal{B}$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$, pois cada $\{\alpha^2 : b \leq \alpha\} = [b^2,+\infty\,[\; \neq \emptyset$ para todo $b \in [0,+\infty\,[$.

2. Se $B_1 = [b^2,+\infty] \in \mathcal{B}$ e $B_2 = [c^2,+\infty] \in \mathcal{B}$, então como $[0,+\infty\,[$ é um conjunto dirigido, o subconjunto $\{b^2,c^2\}$ de $[0,+\infty\,[$ tem um limitante superior, digamos c^2. Então $b^2 \leq c^2$ e tomando $B_3 = [c^2,+\infty[\in \mathcal{B}$, temos $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, pois $B_1 \cap B_2 = [b^2,+\infty[\cap[c^2,+\infty[= [c^2,+\infty[$.

1.2 Topologia Geral

1.2.1 Topologias

Definição 1.27. Uma **topologia** num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, satisfazendo:

1. $\emptyset, X \in \tau$;

2. Se $U_1,\ldots,U_n \in \tau$, então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$;

3. Dada uma família arbitrária $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ com $U_\lambda \in \tau$, $\forall\ \lambda \in L$, tem-se $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in L} U_\lambda \in \tau$.

Definição 1.28. Um **espaço topológico** é um conjunto X dotado de uma topologia τ. Escrevemos (X,τ) para denotar que X é um espaço topológico dotado de uma topologia τ.

Exemplo 1.29. Se (X,τ_1) e (Y,τ_2) são espaços topológicos. Então $(X\times Y,\tau_1\times\tau_2)$, onde $\tau_1\times\tau_2 = \{U\times V : U\in\tau_1 \text{ e } V\in\tau_2\}$ é um espaço topológico.

Demonstração. De fato, $\tau_1\times\tau_2$ é uma coleção de subconjuntos de $X\times Y$, satisfazendo:

1. Como $\emptyset\in\tau_1$ e $\emptyset\in\tau_2$, então $\emptyset=\emptyset\times\emptyset\in\tau_1\times\tau_2$ e como $X\in\tau_1$ e $Y\in\tau_2$, então $X\times Y\in\tau_1\times\tau_2$.

2. Se $U_1\times V_1,\ldots,U_n\times V_n\in\tau_1\times\tau_2$, então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}(U_i\times V_i) = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \times \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau_1\times\tau_2$.

3. Dada uma família arbitrária $(U_\lambda\times V_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L_1\times L_2}$ com $U_\lambda\times V_\mu\in\tau_1\times\tau_2$, $\forall\ (\lambda,\mu)\in L_1\times L_2$, tem-se $\displaystyle\bigcup_{(\lambda,\mu)\in L_1\times L_2}(U_\lambda\times V_\mu) = \bigcup_{\lambda\in L_1} U_\lambda \times \bigcup_{\mu\in L_2} V_\mu \in \tau_1\times\tau_2$.

Logo, $\tau_1 \times \tau_2$ é uma topologia sobre $X \times Y$. $\square$

Definição 1.30. Dizemos que um conjunto τ de subconjuntos de X é **invariante** por interseções finitas e uniões arbitrárias se toda união de conjuntos de τ é um conjunto de τ e toda interseção finita de conjuntos de τ é um conjunto de τ.

Proposição 1.31. *Se X é um conjunto e τ é um conjunto de subconjuntos de X **invariante** por interseções finitas e uniões arbitrárias, então τ define uma topologia sobre X.*

Demonstração. Como a união de conjuntos de τ é um conjunto de τ, em particular a união do subconjunto vazio de τ, isto é, o conjunto vazio, pertence a τ, pois se $I = \emptyset$, temos $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$, porque a relação $(\exists i)(i \in I \text{ e } x \in A_i)$ é falsa. Também, como toda interseção finita de conjuntos de τ é um conjunto de τ, em particular a interseção do subconjunto vazio de τ, isto é, o conjunto X pertence a τ, pois se $I = \emptyset$, temos $\bigcap_{i\in I} A_i = X$, porque a relação $(x \in X)$ e $(\forall i)((i \in I) \Rightarrow (x \in A_i))$ é equivalente a $x \in X$.

Logo, sendo τ invariante por interseções finitas e uniões arbitrárias, segue que τ define uma topologia em X. $\square$

Definição 1.32. Um conjunto $F \in \tau$ é chamado de **aberto** de X segundo a topologia τ de X e o complemento desse conjunto, $G = X \setminus F$, é chamado de **fechado** de X segundo a topologia τ de X.

Definição 1.33. Dado $A \subset X$, o conjunto aberto $intA$ que é a união de todos os subconjuntos abertos de X contidos em A, é chamado de **interior** de A. O conjunto fechado $\overline{A}$, formado pela intersecção de todos os conjuntos fechados de X que contêm A, é chamado de **fecho** de A.

Definição 1.34. Um elemento $x \in intA$ é chamado **ponto interior** de A e um elemento $x \in \overline{A}$ é chamado **ponto aderente** de A.

Definição 1.35. Sejam X um conjunto e A um subconjunto de X. Um ponto $x \in X$ é chamado **ponto de acumulação** de A se toda vizinhança V de x contém algum ponto de A diferente de x.

Definição 1.36. Se A e B são subconjuntos de X, B é **denso** em relação A se $A \subset \overline{B}$.

Definição 1.37. Diz-se que um subconjunto A de um espaço topológico X é **localmente fechado** em um ponto $x \in A$ se existir uma vizinhança V de x em X tal que $A \cap V$ é um subconjunto fechado do subespaço V. A é dito ser localmente fechado se é localmente fechado em cada $x \in A$.

Definição 1.38. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $U \subset X$ é uma **vizinhança** de x ou x-vizinhança se $x \in intU$, e é uma vizinhança de $\emptyset \neq A \subset X$ se $x \in A$ implica que $x \in intU$ $(A \subset intU)$.

Proposição 1.39. *Seja X um espaço topológico. Se A e B são subconjuntos de X, então $int(A \cap B) = intA \cap intB$.*

Demonstração. Sabemos que $intA \subset A$ e $intB \subset B$, logo $intA \cap intB \subset A \cap B$. Como $intA \cap intB$ é um aberto de X e $int(A \cap B)$ é o maior aberto de X contido em $A \cap B$, segue que $intA \cap intB \subset int(A \cap B)$. Reciprocamente, como $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$, então $int(A \cap B) \subset intA$ e $int(A \cap B) \subset intB$, respectivamente. Portanto, temos que $int(A \cap B) \subset intA \cap intB$. Logo, $int(A \cap B) = intA \cap intB$. $\square$

Proposição 1.40. *Seja X um espaço topológico. A coleção $\mathcal{F}$ de todas as vizinhanças de um ponto $x \in X$ (de $\emptyset \neq A \subset X$) é um filtro sobre X.*

Demonstração. De fato,

1. $X \in \mathcal{F}$, pois $x \in X = int(X)(A \subset X = int(X))$, logo $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois $x \notin \emptyset = int(\emptyset)(\emptyset \neq A \not\subset \emptyset = int(\emptyset))$.

2. Se $V \in \mathcal{F}$ e $V \subset W \subset X$, então $x \in int(V) \subset int(W) \subset X(A \subset int(V) \subset int(W))$, portanto $W \in \mathcal{F}$.

3. Se $V \in \mathcal{F}$ e $W \in \mathcal{F}$, então $x \in int(V)(A \subset int(V))$ e $x \in int(W)(A \subset int(W))$, assim $x \in int(V) \cap int(W) = int(V \cap W)$ $(A \subset int(V) \cap int(W) = int(V \cap W))$, portanto $V \cap W \in \mathcal{F}$.

□

Definição 1.41. A coleção de todas as vizinhanças de x (respectivamente, de A) é um filtro sobre X denominado **filtro de vizinhança** de x (respectivamente, de A). Cada base deste filtro é denominada uma **base de vizinhança** de x (respectivamente, de A).

1.2.2 Continuidade e convergência

Definição 1.42. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longmapsto Y$. Dizemos que f é **contínua** em $x \in X$ se para cada vizinhança V de $f(x)$ em Y, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x em X. Dizemos que $f : X \longmapsto Y$ é **contínua** se f é contínua em cada $x \in X$, equivalentemente, se $f^{-1}(G)$ é aberto em X para cada aberto $G \subset Y$.

Proposição 1.43. *Se X, Y e Z são espaços topológicos e $f : X \longmapsto Y$ e $g : Y \longmapsto Z$ são funções contínuas, então $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é contínua.*

Demonstração. Seja $x \in X$ qualquer e seja V uma vizinhança de $g \circ f(x) = g(f(x))$ em Z. Como g é contínua em $f(x)$ segue que $g^{-1}(V)$ é uma uma vizinhança de $f(x)$ em Y. Mas f é contínua em x, logo $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ é uma vizinhança de x em X. Portanto, $g \circ f$ é contínua em cada $x \in X$. Logo, $g \circ f$ é contínua. □

Definição 1.44. Sejam X, Y espaços topológicos, f uma aplicação de X em Y. Dizemos que f é **aberta** (ou uma **aplicação aberta**) se para cada conjunto aberto $G \subset X$, $f(G)$ é aberto no subespaço topológico $f(X)$ de Y.

Definição 1.45. Uma bijeção f de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y tal que $f(A)$ é aberto em Y se, e somente se, A é aberto em X, é chamada de **homeomorfismo**.

Dizemos que dois espaços topológicos X e Y são **homeomorfos** se existe um homeomorfismo de X sobre Y.

Proposição 1.46. *Para uma bijeção f de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y ser um homeomorfismo é necessário e suficiente que f seja contínua e aberta.*

Demonstração. Suponha que f é um homeomorfismo. Se O é um aberto em X, então, pela Definição 1.45, $f(O)$ é aberto em Y. Logo, f é uma aplicação aberta. Além disso, se O é um aberto em Y, então como f é bijetora, $O = f(f^{-1}(O))$ é aberto em Y e, portanto, pela Definição 1.45, $f^{-1}(O)$ é aberto em X, portanto f é contínua. Por outro lado, se f é uma bijeção, contínua e aberta, então para todo aberto O de X, temos que $f(O)$ é aberto em Y e se $f(O)$ é aberto em Y, então $f^{-1}(f(O))$ é aberto em X desde que f é contínua. Mas como f é bijetora, $f^{-1}(f(O)) = O$, portanto O é aberto em X. Logo, da Definição 1.45, segue que f é um homeomorfismo. □

Proposição 1.47. *Se (X, τ_1), (Y, τ_2) e $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ são os espaços topológicos do Exemplo 1.29 e $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ são as projeções definidas como $p_1(x, y) = x$ e $p_2(x, y) = y$, respectivamente, então p_1 e p_2 são contínuas.*

Demonstração. Se $U \in \tau_1$, então $p_1^{-1}(U) = U \times Y \in \tau_1 \times \tau_2$, pois $Y \in \tau_2$. Logo, p_1 é contínua. Agora, se $V \in \tau_2$, então $p_2^{-1}(V) = X \times V \in \tau_1 \times \tau_2$, pois $X \in \tau_1$. Logo, p_2 é contínua. □

Proposição 1.48. *As aplicações $f_1 : L \longrightarrow M$ e $f_2 : E \longrightarrow U$ são contínuas se, e somente se, a aplicação $\phi = f_1 \times f_2 : L \times E \longrightarrow M \times U$ definida por $\phi(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ é contínua .*

Demonstração. Como $f_1 = p_1 \circ \phi$ e $f_2 = p_2 \circ \phi$, onde $p_1 : M \times U \longrightarrow M$ definida por $p_1(x, y) = x$ e $p_2 : M \times U \longrightarrow U$ definida por $p_2(x, y) = y$ são as projeções no primeiro e segundo fator, respectivamente, segue que f_1 e f_2 são contínuas como composta das funções contínuas p_1, p_2 e ϕ. Para provar que ϕ é contínua tomemos $A \times B$ um aberto básico qualquer de $M \times U$ com a topologia produto. Então $\phi^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \times f_2^{-1}(B)$ que é um aberto básico de $L \times E$, pois como f_1 e f_2 são contínuas segue que $f_1^{-1}(A)$ é um aberto de L e $f_2^{-1}(B)$ é um aberto de E. □

Definição 1.49. Um filtro $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico X é dito convergir a $x \in X$ se $\mathcal{F}$ é mais fina do que o filtro de vizinhança de x.

Definição 1.50. Uma sequência (mais geralmente uma família dirigida) em X converge para $x \in X$ se seu filtro de seção converge para x.

1.2.3 Comparação entre topologias

Definição 1.51. Se X é um conjunto e τ_1, τ_2 são topologias sobre X, dizemos que τ_2 é mais **fino** do que τ_1 (ou τ_1 é mais **grossa** do que τ_2), se cada conjunto aberto de X segundo a topologia τ_1 é um conjunto aberto de X segundo a topologia τ_2 (equivalentemente, se cada conjunto fechado de X segundo a topologia τ_1 é um conjunto fechado de X segundo a topologia τ_2).

Definição 1.52. Seja X um conjunto, $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de espaços topológicos. Se $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma família de funções, respectivamente de X em X_α, a **topologia projetiva (topologia núcleo)** sobre X com relação à família $\{(X_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in A\}$ é definida como sendo a topologia mais grossa para qual cada f_α é contínua.

Definição 1.53. Seja X um conjunto, $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de espaços topológicos. Se $\{g_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma família de funções, respectivamente de X_α em X, a **topologia indutiva** sobre X com relação à família $\{(X_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ é definida como sendo a topologia mais fina, para qual cada g_α é contínua.

Definição 1.54. Se $A = \{1\}$ e τ_1 é a topologia de X_1, a topologia projetiva sobre X com relação à (X_1, f_1) é chamada a **imagem inversa** de τ_1 sob f_1.

Definição 1.55. Se $A = \{1\}$ e τ_1 é a topologia de X_1, a topologia indutiva sobre X com relação à (X_1, g_1) é chamada a **imagem direta** de τ_1 sob g_1.

1.2.4 Subespaços, Produtos, Quocientes

Definição 1.56. Se (X, τ) é um espaço topológico, A é um subconjunto de X e f é a inclusão canônica $A \longrightarrow X$, então a topologia **induzida** sobre A é a imagem inversa de τ sob f. (Os subconjuntos abertos desta topologia são as interseções de A com os subconjuntos abertos de X.)

Definição 1.57. Se (X, τ) é um espaço topológico, $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre X e g é a aplicação canônica $X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ dada por $x \in X \longmapsto [x] \in X/\mathcal{R}$, então a imagem direta de τ sob g é chamada o **quociente** de τ.

Proposição 1.58. *Se g é a aplicação canônica $X \longrightarrow X/\mathcal{R}$, então o quociente de τ denotado por $\widehat{\tau}$ é uma topologia sobre $X/\mathcal{R}$.*

Demonstração. De fato,

1. Como $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$ segue que $\emptyset \in \widehat{\tau}$ e desde que g é sobrejetora, obtemos $g^{-1}(X/\mathcal{R}) = X \in \tau$, portanto $X/\mathcal{R} \in \widehat{\tau}$.

2. Se $V_1, \ldots, V_n \in \widehat{\tau}$, então $g^{-1}(V_i) \in \tau, i = 1, \ldots, n$. Assim, temos que $g^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} g^{-1}(V_i) \in \tau$. Logo, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \widehat{\tau}$.

3. Dada uma família arbitrária $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $U_\lambda \in \widehat{\tau}$, $\forall\ \lambda \in L$, tem-se que $g^{-1}(U_\lambda) \in \tau$, $\forall\ \lambda \in L$. Então $g^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} g^{-1}(U_\lambda) \in \tau$. Logo, $\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \in \widehat{\tau}$.

□

Definição 1.59. $(X/\mathcal{R}, \widehat{\tau})$ é o **quociente topológico** de X por $\mathcal{R}$.

Definição 1.60. Sejam $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de espaços topológicos, X o produto cartesiano deles e f_α a projeção de X sobre X_α dada por $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X \mapsto x_\alpha \in X_\alpha$. A topologia projetiva sobre X com relação a família $\{(X_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in A\}$ é chamada a **topologia produto** sobre X. X é chamado o **produto topológico** da família $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Observação 1.61. A topologia produto sobre X é a topologia mais grossa para qual cada projeção f_α é contínua. A coleção β de todos os conjuntos $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, onde U_α são abertos em X_α formam uma base para a topologia produto.

Proposição 1.62. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Se f é contínua em x e $x \in \overline{A}$, onde A é um subconjunto de X, então $f(x) \in \overline{f(A)}$.*

Demonstração. Dado V uma vizinhança de $f(x)$ em Y, como f é contínua em x, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x em X. Logo, como $x \in \overline{A}$, segue que $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Logo, existe $a \in A$ tal que $f(a) \in V$. Portanto, $V \cap f(A) \neq \emptyset$, assim $f(x) \in \overline{f(A)}$. □

Proposição 1.63. *Em um espaço produto $\prod_{i \in I} X_i$, o fecho de um produto de conjuntos $\prod_{i \in I} A_i$ é o mesmo que o produto $\prod_{i \in I} \overline{A_i}$ de seus fechos.*

Demonstração. Suponha que $a = (a_i)$ pertence ao fecho de $\prod_{i \in I} A_i$. Então para cada $x \in I$, $a_x = p_x(a)$, onde p_x é a projeção de $\prod_{i \in I} A_i$ em A_x, está no fecho de A_x, desde que a projeção p_x é contínua (Proposição 1.62). Assim, $a \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$. Reciprocamente, sejam $b = (b_i) \in \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ e $\prod_{i \in I} O_i$ um aberto básico contendo b. Para cada $i \in I$, O_i contém um ponto $x_i \in A_i$ desde que $b_i \in \overline{A_i}$. Logo, $\prod_{i \in I} O_i$ contém o ponto $(x_i) \in \prod_{i \in I} A_i$, portanto b pertence ao fecho de $\prod_{i \in I} A_i$. □

Corolário 1.64. *Um produto $\prod_{i \in I} A_i$ de conjuntos não vazios é fechado no espaço produto $\prod_{i \in I} X_i$ se, e somente se, A_i é fechado em X_i para cada $i \in I$.*

Definição 1.65. Sejam X, Y espaços topológicos e f uma aplicação de X em Y. Dizemos que f é **fechada** (uma **aplicação fechada**) se o gráfico de f é um subconjunto fechado do produto topológico $X \times Y$.

Proposição 1.66. *Sejam X, Y espaços topológicos e f uma aplicação de X em Y. Então f é **fechada** se, e somente se, $A \subset X$ fechado implica $f(A) \subset Y$ fechado.*

Demonstração. Seja f fechada e suponha que $A \subset X$ é fechado. Então $A \times f(A) = G(f_A) = G(f) \cap A \times Y$. Como A é fechado em X segue que $A \times Y$ é fechado em $X \times Y$, portanto $A \times f(A)$ é fechado em $G(f)$. Mas como f é fechada, então $G(f) \subset X \times Y$ é fechado, portanto $A \times f(A) \subset X \times Y$ é fechado. Assim, pelo Corolário 1.64 temos que $f(A) \subset Y$ é fechado. Reciprocamente, como X é um subconjunto fechado de X, então, por hipótese, $f(X)$ é um subconjunto fechado de Y. Logo, $G(f) = X \times f(X)$ é um subconjunto fechado de $X \times Y$ e, portanto, pela Definição 1.65, segue que f é fechada. □

1.2.5 Axiomas de separação

Definição 1.67. Seja X um espaço topológico. X é dito um **espaço Hausdorff (ou separado)** se, para cada par de pontos distintos $x, y \in X$, existem vizinhanças U_x e U_y, de x e y, respectivamente, tais que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Observação 1.68. Se X é um espaço topológico de Hausdorff, então cada filtro $\mathcal{F}$ que converge em X, converge para um único ponto $x \in X$ que é denominado **limite de** $\mathcal{F}$.

Demonstração. Suponha que um filtro $\mathcal{F}$ converge para dois pontos distintos x e y. Então, pela Definição 1.49, $\mathcal{F}$ é mais fina do que os filtros de vizinhanças de x e de y. Sejam U uma vizinhança de x e V uma vizinhança de y tal que $U \cap V = \emptyset$. Logo, $U, V \in \mathcal{F}$ e, portanto, por definição de filtro, $U \cap V \in \mathcal{F}$, donde segue que $\emptyset \in \mathcal{F}$, o que é um absurdo. □

Definição 1.69. Seja X um espaço topológico. X é dito um **espaço regular** se é Hausdorff e cada ponto possui uma base de vizinhanças fechadas.

Definição 1.70. Um espaço de Hausdorff X é chamado **completamente regular** se, para cada subconjunto fechado A e cada $b \notin A$, existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ para os quais $f(b) = 1$ e $f(x) = 0$ sempre que $x \in A$.

1.2.6 Espaços Uniformes

Definição 1.71. Seja X um conjunto. Para subconjuntos arbitrários W, V de $X \times X$, escrevemos:

- $W^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in W\}$;
- $V \circ W = \{(x, z) : (\exists y \in X : (x, y) \in W \text{ e } \ (y, z) \in V)\}$.

Definição 1.72. O conjunto $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ é chamado de diagonal de $X \times X$.

Definição 1.73. Seja $\mathcal{B}$ um filtro sobre $X \times X$ satisfazendo os seguintes axiomas:

1. Cada $W \in \mathcal{B}$ contém a diagonal Δ;
2. $W \in \mathcal{B} \Rightarrow W^{-1} \in \mathcal{B}$;
3. Para cada $W \in \mathcal{B}, \exists\ V \in \mathcal{B}$ tal que $V \circ V \subset W$.

Nestas condições dizemos que este filtro $\mathcal{B}$ define uma uniformidade sobre X, cada $W \in \mathcal{B}$ sendo chamado de vizinhança da uniformidade.

Proposição 1.74. *Se $\mathcal{B}$ é um fitro sobre $X \times X$ que define uma uniformidade sobre X e η é a família de todos os subconjuntos G de X tal que $x \in G$ implica na existência de $W \in \mathcal{B}$, satisfazendo $\{y : (x, y) \in W\} \subset G$, então η é invariante por interseções finitas e uniões arbitrárias.*

Demonstração. De fato,

1. Sejam $G_1, \ldots, G_n \in \eta$. Então se $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, segue que existem $W_1, \ldots, W_n \in \mathcal{B}$ satisfazendo $\{y : (x, y) \in W_i\} \subset G_i$, para $i = 1, \ldots n$, por definição de η.

   Logo, $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i \in \mathcal{B}$, pois $\mathcal{B}$ é um filtro sobre $X \times X$ e temos que se $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, então $\{y : (x, y) \in W\} \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, portanto $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \eta$.

2. Sejam $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $G_\lambda \in \eta$, $\forall\ \lambda \in L$. Então se $x \in \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$ segue que $x \in G_\lambda$ para algum $\lambda \in L$. Assim, existe $W_\lambda \in \mathcal{B}$, satisfazendo $\{y : (x, y) \in W_\lambda\} \subset G_\lambda$.

   Logo, $W = \bigcup_{\lambda \in L} \in \mathcal{B}$, pois $W_\lambda \in \mathcal{B}$ e $W_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} W_\lambda \subset X \times X$ implica $\bigcup_{\lambda \in L} W_\lambda \in \mathcal{B}$ conforme item 2. da definição de filtro.

$\square$

Agora, surge uma pergunta natural: diante do resultado da Proposição 1.74, η é uma topologia para X?

Com efeito, para verificar que η é uma topologia sobre X, basta mostrar que $\emptyset, X$ pertencem à η. Como a sentença $x \in \emptyset$ é uma sentença falsa e também; existe $W \in \mathcal{B}$ satisfazendo $\{y : (x, y) \in W\} \subset \emptyset$ é uma sentença falsa, pois se $\exists W \in \mathcal{B}$ satisfazendo $\{y : (x, y) \in W\} \subset \emptyset$, então $\{y : (x, y) \in W\} = \emptyset$, portanto $W = \emptyset$ o que contradiz a definição de $\mathcal{B}$ ser um filtro de $X \times X$. Portanto, da lógica, segue que a sentença $(x \in \emptyset \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B} | \ \{y : (x, y) \in W\} \subset \emptyset)$ é uma sentença verdadeira e portanto $\emptyset \in \eta$.

Se $x \in X$, como $\mathcal{B}$ é um filtro sobre $X \times X$, temos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Logo, existe $\emptyset \neq W \in \mathcal{B}$. Assim, o conjunto $\{y : (x, y) \in W \subset X \times X\} \subset X$ e portanto $X \in \eta$.

Segue que η é uma topologia sobre X, tal que para todo $x \in X$, a família $W(x) = \{y : (x, y) \in W\}$, onde $W \in \mathcal{B}$ é uma base de vizinhança de x.

Observação 1.75. A resposta à pergunta natural acima também poderia ser dada usando-se a Proposição 1.31.

Definição 1.76. O espaço $(X, \mathcal{B})$, dotado da topologia η decorrente da uniformidade de $\mathcal{B}$, definida na Proposição 1.74 é chamado um **espaço uniforme**.

O exemplo a seguir mostra como um corpo escalar $\mathbb{K}$, arbitrário, não discreto, pode ser dotado com a uniformidade decorrente de seu valor absoluto.

Exemplo 1.77. Seja $(\mathbb{K}, d)$ um espaço métrico [1], onde $d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é dada por $d(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$. Se $r > 0$ e $W_r = \{(\lambda, \mu) : |\lambda - \mu| < r\} \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, então $\mathcal{B} = \{W_r : r > 0\}$ é uma uniformidade sobre $\mathbb{K}$.

Demonstração. Para $\mathcal{B} = \{W_r : r > 0\}$ definir uma uniformidade sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ deve satisfazer a Definição 1.17 e a Definição 1.73. De fato:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pois $W_1 \in \mathcal{B}$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$, pois $W_r \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, uma vez que, a diagonal $\Delta \subset W_r$ para todo $r > 0$ (vide item 4. a seguir).

2. Se $W_{r_1} \in \mathcal{B}$ e $W_{r_1} \subset G \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, então devemos mostrar que $G \in \mathcal{B}$; Considere $r_0 = \sup\{|\lambda - \mu|; (\lambda, \mu) \in G\}$. Por hipótese, $W_{r_1} \subset G$. Logo,
$$\{|\lambda - \mu|; (\lambda, \mu) \in W_{r_1}\} \subset \{|\lambda - \mu|; (\lambda, \mu) \in G\}.$$
Assim, $\sup\{|\lambda - \mu|; (\lambda, \mu) \in W_{r_1}\} \leq \sup\{|\lambda - \mu|; (\lambda, \mu) \in G\}$, portanto $r_1 \leq r_0$. Por outro lado, como $W_{r_1} \subset G$, se $(\lambda, \mu) \in W_{r_1}$, r_1 é um limitante superior para $|\lambda - \mu|$, portanto $r_0 \leq r_1$. Logo, $r_0 = r_1$ e daí se $(\lambda, \mu) \in G$, então $|\lambda - \mu| \leq r_0 = r_1$, portanto $G \subset W_{r_1}$ ou $G \subset G - W_{r_1}$. Mas, $G \subset G - W_{r_1} \Rightarrow W_{r_1} \subset G - W_{r_1}$ o que é um absurdo. Portanto, $G \subset W_{r_1}$ e como $W_{r_1} \subset G$ segue que $G = W_{r_1} \in \mathcal{B}$.

3. $W_{r_1} \in \mathcal{B}$ e $W_{r_2} \in \mathcal{B} \Rightarrow W_{r_1} \cap W_{r_2} \in \mathcal{B}$. Com efeito, se $(\lambda, \mu) \in W_{r_1} \cap W_{r_2}$, então $|\lambda - \mu| < r_1$ e $|\lambda - \mu| < r_2$. Assim, considerando $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$, mostremos que $W_{r_1} \cap W_{r_2} = W_r \in \mathcal{B}$. De fato, se $(\lambda, \mu) \in W_r$, $|\lambda - \mu| < r$ e como $r = \min\{r_1, r_2\}$ segue que $|\lambda - \mu| < r_1$ e $|\lambda - \mu| < r_2$, logo $(\lambda, \mu) \in W_{r_1} \cap W_{r_2}$. Logo, $W_r \subset W_{r_1} \cap W_{r_2}$. Para a recíproca, temos três casos a considerar:

   a) $r_1 < r_2$: neste caso, $r = r_1$ e $W_{r_1} \cap W_{r_2} \subset W_{r_1} = W_r$.

   b) $r_2 < r_1$: neste caso, $r = r_2$ e $W_{r_1} \cap W_{r_2} \subset W_{r_2} = W_r$ e

   c) $r_1 = r_2$: neste caso $r = r_1 = r_2$ e $W_{r_1} \cap W_{r_2} = W_r \cap W_r \subset W_r$.

   Portanto, $W_{r_1} \cap W_{r_2} = W_r$,, onde $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$.

4. Cada $W_r \in \mathcal{B}, r > 0$, contém a diagonal Δ.
   Se $(\lambda, \lambda) \in \Delta$, então $|\lambda - \lambda| = 0 < r$, portanto $(\lambda, \lambda) \in W_r$. Assim, $\Delta \subset W_r, r > 0$.

[1] Veja Definição 1.98 na Seção 1.2.7

5. $W_r \in \mathcal{B} \Rightarrow W_r^{-1} \in \mathcal{B}$. De fato, $W_r^{-1} = \{(\mu, \lambda) : (\lambda, \mu) \in W_r\} = \{(\mu, \lambda) : |\lambda - \mu| < r\}$ $= \{(\mu, \lambda) : |\mu - \lambda| < r\} = W_r \in \mathcal{B}$.

6. Para cada $W_r \in \mathcal{B}, \exists\ V \in \mathcal{B}$ tal que $V \circ V \subset W_r$.
   Com efeito, para cada W_r, considere $V = W_{\frac{r}{2}} \in \mathcal{B}$. Assim, $V \circ V \subset W_r$, pois, se $(\lambda, \delta) \in V \circ V$, então existe $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $(\lambda, \mu) \in V$ e $(\mu, \delta) \in V$. Logo, $|\lambda - \mu| < \frac{r}{2}$ e $|\mu - \delta| < \frac{r}{2}$. Pela desigualdade triangular, $|\lambda - \delta| \leq |\lambda - \mu| + |\mu - \delta| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Portanto, $(\lambda, \delta) \in W_r$.

Logo, $\mathcal{B}$ é uniformidade sobre $\mathbb{K}$. □

Observação 1.78. Pelo Exemplo 1.77 e demonstração da Proposição 1.74 podemos concluir que $(\mathbb{K}, \mathcal{B})$ é uma espaço uniforme, dotado da topologia η decorrente da uniformidade de $\mathcal{B}$, onde η é uma topologia sobre $\mathbb{K}$ tal que para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, a família $B_d(\lambda, r), r > 0$, onde $d(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$, é uma base de vizinhanças de λ.

Definição 1.79. Um espaço topológico X é uniformizável se sua topologia decorre de uma uniformidade sobre X.

Definição 1.80. Uma uniformidade é Hausdorff se seu filtro de vizinhança satisfaz o axioma adicional

4. $\cap\{W : W \in \mathcal{B}\} = \Delta$.

Assim, *4.* é uma condição necessária e suficiente para a topologia decorrente da uniformidade ser de Hausdorff.

Definição 1.81. Dizemos que um espaço topógico X é um espaço Hausdorff uniforme se sua topologia decorre de uma uniformidade sobre X que é Hausdorff.

Definição 1.82. Sejam X e Y espaços uniformes. Uma função $f : X \longmapsto Y$ é **uniformemente contínua** se para cada vizinhança V de Y, existe uma vizinhança U de X tal que $(x, y) \in U$, implica $(f(x), f(y)) \in V$, ou equivalentemente, se para cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $y \in U$ implica $f(y) \in V$, ou ainda, se para cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $U \subset f^{-1}(V)$.

Proposição 1.83. *Toda aplicação uniformemente contínua é contínua.*

Demonstração. Devemos mostrar que para qualquer $x \in X$, f é contínua em x. De fato, para cada vizinhança V de $f(x)$, como f é uniformemente contínua, existe uma vizinhança U de x tal que $U \subset f^{-1}(V)$. Logo, existe uma vizinhança U de x tal que $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Portanto, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x e f é contínua. □

Definição 1.84. Seja X um espaço uniforme. Um filtro $\mathcal{F}$ sobre X é um **Filtro de Cauchy** se, para cada vizinhança da uniformidade V, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset V$.

Definição 1.85. Seja X um espaço uniforme. Se cada filtro de Cauchy converge para um elemento de X, então X é chamado **completo**.

Definição 1.86. Uma **sequência de Cauchy** em X é uma sequência do qual o filtro de seção é um filtro de Cauchy.

Definição 1.87. Seja X um espaço uniforme. Se toda sequência de Cauchy em X converge, então X é dito **semi-completo** (sequencialmente completo).

Definição 1.88. Os espaços uniformes X, Y são **isomorfos** se existe uma bijeção f de X sobre Y tal que ambas as aplicações f e f^{-1} são uniformemente contínuas; f é chamada **isomorfismo uniforme**.

Observação 1.89. Se X é um espaço uniforme de Hausdorff e A é um subespaço completo, então A é fechado em X, pois todo ponto aderente de A é limite de cada filtro de Cauchy que converge em A, assim todo ponto aderente de A deve pertencer a A, dado que A é completo. Logo, A é fechado.

Observação 1.90. Um produto de espaços uniformes é completo se, e somente se, cada fator é completo.

Observação 1.91. Se X é um espaço uniforme completo e A é um subespaço fechado, então o subespaço uniforme A é completo.

Proposição 1.92. *Seja f uma função definida sobre um subespaço denso X_0 de um espaço uniforme X, tomando seus valores em um espaço uniforme Hausdorff completo Y, e suponha que f é uniformemente contínua sobre X_0. Então f pode ser estendida para todo X por continuidade, e a função estendida $\overline{f}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Veja [[1], Theorem 2, p. 190]. □

Teorema 1.93. *Seja X um espaço uniforme. Então existe um espaço uniforme Hausdorff completo $\tilde{X}$ e uma aplicação uniformemente contínua $\iota : X \longrightarrow \tilde{X}$ com a seguinte propriedade:*

(P) Dada qualquer aplicação uniformemente contínua f de X sobre um espaço uniforme Hausdorff completo Y, existe uma única aplicação uniformemente contínua $g : \tilde{X} \longrightarrow Y$ tal que $f = g \circ \iota$.

Se (i_1, X_1) é um outro par consistindo de um espaço uniforme Hausdorff completo X_1 e uma aplicação uniformemente contínua $i_1 : X \longrightarrow X_1$ tendo a propriedade (P), então existe um único isomorfismo $\phi : \tilde{X} \longrightarrow X_1$ tal que $i_1 = \phi \circ \iota$.

Demonstração. Veja [[1], Theorem 3, p. 191-194]. □

Definição 1.94. O espaço uniforme Hausdorff completo $\tilde{X}$ definido no Teorema 1.93 é chamado o completamento Hausdorff de X e a aplicação $\iota : X \longrightarrow \tilde{X}$ é chamada a aplicação canônica de X em seu completamento Hausdorff.

Notamos também os fatos abaixo que podem ser encontrados em [[1], Proposition 12 and Corollary, p. 194]

Proposição 1.95. *O subespaço $\iota(X)$ é denso em $\tilde{X}$.*

Proposição 1.96. *Se X é um espaço uniforme Hausdorff, então a aplicação canônica $\iota : X \longrightarrow \tilde{X}$ é um isomorfismo de X sobre um subespaço denso de $\tilde{X}$.*

1.2.7 Métrica e Espaços Metrizáveis

Definição 1.97. Se X é um conjunto, uma função real não negativa d sobre $X \times X$ é chamada de **métrica** se os seguintes axiomas estão satisfeitos:

1. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

Definição 1.98. Se X é um espaço uniforme dotado com a métrica d, então o par (X, d) é chamado de **espaço métrico**.

Definição 1.99. Um espaço topológico X é **metrizável** se sua topologia é induzida de uma métrica d. Em outras palavras, os abertos básicos segundo essa topologia são os conjuntos $U(a; r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$, onde $a \in X$ e $r > 0$.

Observação 1.100. Os conjuntos $W_n = \{(x, y) : d(x, y) < n^{-1}\}$, onde $n \in \mathbb{N}$, formam um filtro base sobre $X \times X$ definindo uma uniformidade Hausdorff sobre X.

Definição 1.101. Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Dizemos que f é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Definição 1.102. Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in M$ quaisquer, $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Proposição 1.103. *Um espaço uniforme é metrizável se, e somente se, é Hausdorff e seu filtro de vizinhanças da uniformidade possui uma base enumerável.*

Demonstração. Veja [[1], Theorem I, p. 152]. □

1.2.8 Espaços Compactos

Definição 1.104. Uma família $A = \{A_i\}\,(i \in I)$ é uma **cobertura aberta** de X se cada $A_i (i \in I)$ é aberto em X e $X \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Definição 1.105. Dada uma cobertura aberta $A = \{A_i\}\,(i \in I)$ de X, dizemos que a família $S = \{A_j\}\,(j \in J)$, onde J é um subconjunto finito de I é uma **subcobertura aberta finita** de X se $X \subseteq \bigcup\limits_{j \in J} A_j$.

Definição 1.106. Seja X um espaço topológico de Hausdorff. X é chamado **compacto** se toda cobertura aberta de X tem uma subcobertura finita.

Proposição 1.107. *Um espaço topológico Hausdorff X é compacto se toda família de conjuntos fechados cuja interseção é vazia contém uma subfamília finita cuja interseção é vazia.*

Demonstração. Veja [[1], p. 83]. □

Definição 1.108. Um espaço topológico Hausdorff é chamado **localmente compacto** se cada ponto possui uma vizinhança compacta.

Proposição 1.109. *Todo subespaço fechado de um espaço topológico Hausdorff compacto é compacto.*

Demonstração. Veja [[1], Proposition 3, p. 86]. □

Proposição 1.110. *Todo espaço topológico Hausdorff compacto é um espaço localmente compacto.*

Demonstração. Se X é compacto, então todo ponto x de X tem como vizinhança o próprio X. □

Proposição 1.111. *Todo subespaço localmente fechado de um espaço localmente compacto X é localmente compacto.*

Demonstração. Veja [[1], Proposition 13, p. 91]. □

Definição 1.112. Um espaço uniforme Hausdorff X é chamado **pré-compacto** se seu completamento $\tilde{X}$ é compacto.

Proposição 1.113. *Um espaço uniforme Hausdorff X é pré-compacto se, e somente se, para cada vizinhança de uniformidade W, existe um conjunto finito $X_0 \subset X$ tal que $X \subset \bigcup\{W(x) : x \in X_0\}$.*

Demonstração. Veja [[1], Theorem 3, p. 201]. □

Observação 1.114. Seja X um espaço uniforme. Todo subconjunto de um conjunto pré-compacto é pré-compacto.

Demonstração. Veja [[1], Proposition 1, p. 202]. □

Definição 1.115. Um espaço uniforme Hausdorff X é denominado **localmente pré-compacto** se seu completamento $\tilde{X}$ é localmente compacto.

Definição 1.116. Um subconjunto A de um espaço topológico X é chamado **relativamente compacto** em X se A está contido em um subconjunto compacto de X.

Proposição 1.117. *Se f é uma aplicação contínua de um espaço compacto X sobre um espaço topológico Y, então o conjunto $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. Veja [[1], Theorem 2, p. 87]. □

1.2.9 Grupo topológico

Definição 1.118. Um **grupo** G é um conjunto com uma operação $*$ que associa um par $(x, y) \in G \times G$ a um elemento $x * y \in G$ satisfazendo os seguintes axiomas (x, y, z denotando elementos arbitrários de G):

1. $(x * y) * z = x * (y * z)$;
2. Existe um elemento $e \in G$ tal que $x * e = e * x = x, \forall x \in G$;
3. Para cada $x \in G$, existe $z \in G$ tal que $x * z = z * x = e$.

Se $x * y = y * x$, então G é chamado de grupo **comutativo** ou **abeliano**.

Definição 1.119. Um grupo topológico é um conjunto G que carrega uma estrutura de grupo e uma topologia que satisfaz os axiomas a seguir:

1. A aplicação $(x, y) \longmapsto x * y$ de $G \times G$ sobre G é contínua;

2. A aplicação $x \longmapsto y$ de G sobre G é contínua, onde y é o elemento oposto de x com relação a operação $*$.

1.3 Álgebra Linear

1.3.1 Espaços Vetoriais

Definição 1.120. Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio. Suponha que existam definidas uma aplicação $(\lambda, \mu) \longmapsto \lambda+\mu$ de $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$, chamada **adição**, e uma aplicação $(\lambda, \mu) \longmapsto \lambda\mu$ de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$; chamada **multiplicação**, tal que os axiomas a seguir estão satisfeitos (λ, μ, β denotando elementos arbitrários de $\mathbb{K}$):

(1) $(\lambda + \mu) + \beta = \lambda + (\mu + \beta)$;

(2) Existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda + 0 = 0 + \lambda = \lambda, \forall\lambda \in \mathbb{K}$;

(3) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda + \beta = \beta + \lambda = 0$;

(4) $\lambda + \mu = \mu + \lambda$;

(5) $(\lambda + \mu)\beta = \lambda\beta + \mu\beta$ e $\lambda(\mu + \beta) = \lambda\mu + \lambda\beta$;

(6) $\lambda(\mu\beta) = (\lambda\mu)\beta$;

(7) Existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1\lambda = \lambda = \lambda 1, \forall\lambda \in \mathbb{K}$;

(8) Se $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\lambda\mu = 0$, então $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$;

(9) Para cada $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{K}$, existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda\gamma = 1 = \gamma\lambda$.

$\mathbb{K}$, satisfazendo os axiomas de (1) à (9), é chamado de **corpo** . O elemento $0 \in \mathbb{K}$ no axioma (2) é único e é chamado o elemento neutro de $\mathbb{K}$. Também para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$ o elemento $\beta \in \mathbb{K}$ do axioma (3) é único e é chamado o elemento oposto de λ e será denotado por $-\lambda$. O elemento $\gamma \in \mathbb{K}$ no axioma (9) é único, será chamado de elemento inverso de λ e será denotado por λ^{-1}. Se, além dos axiomas de (1) à (9), for satisfeito o axioma (10) $\lambda\mu = \mu\lambda$ dizemos que o corpo $\mathbb{K}$ é um corpo comutativo.

Definição 1.121. Sejam L um conjunto e $\mathbb{K}$ um corpo (não necessariamente comutativo). Suponha que existam definidas uma aplicação $(x, y) \longmapsto x + y$ de $L \times L$ em L, chamada **adição**, e uma aplicação $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times L$ em L; chamada **multiplicação escalar**, tal que os axiomas a seguir estão satisfeitos (x, y, z denotando elementos arbitrários de L, e λ, μ elementos arbitrários de $\mathbb{K}$):

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(2) $x + y = y + x$;

(3) Existe um elemento $0 \in L$ tal que $x + 0 = x, \forall x \in L$;

(4) Para cada $x \in L$, existe $z \in L$ tal que $x + z = 0$;

(5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

(6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

(7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

(8) $1x = x$, onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{K}$.

L, satisfazendo os axiomas de (1) à (8), é chamado de **espaço vetorial à esquerda** sobre $\mathbb{K}$. O elemento $0 \in L$ no axioma (3) é único e é chamado o elemento neutro de L. Também para qualquer $x \in L$ o elemento $z \in L$ do axioma (4) é único e será denotado por $-x$; além disso, tem-se $-x = (-1)x$ e escrevemos $x - y = x + (-y)$. Se existe uma aplicação $(\lambda, x) \longmapsto x\lambda$ de $\mathbb{K} \times L$ em L, satisfazendo os axiomas de (1) à (4) e os axiomas

(9) $(x + y)\lambda = x\lambda + y\lambda$;

(10) $x(\lambda + \mu) = x\lambda + x\mu$;

(11) $(x\lambda)\mu = x(\lambda\mu)$;

(12) $x1 = x$, onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{K}$.

Então L é chamado de **espaço vetorial à direita** sobre $\mathbb{K}$. Por um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{K}$ sempre entenderemos um espaço vetorial à esquerda sobre $\mathbb{K}$. Quando $x\lambda = \lambda x, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in L$ não há distinção entre espaços vetoriais à esquerda e à direita sobre $\mathbb{K}$.

1.3.2 Subespaços e Quocientes

Definição 1.122. Seja L um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um **subespaço vetorial** (ou simplesmente, **subespaço**) de L é um subconjunto $\emptyset \neq M$ de L, invariante sob adição e multiplicação por escalar, isto é, tal que $M + M \subset M$ e $\mathbb{K}M \subset M$.

Definição 1.123. Se A é um subconjunto de L, o **espaço gerado** de A é a interseção M de todos os subespaços de L que contêm A.

Se M é um subespaço de L, a relação "$x\mathcal{R}y$ se, e somente se, $x - y \in M$" é uma relação de equivalência em L. De fato,

1. $x\mathcal{R}x$, pois como M é subespaço, temos que $x - x = 0 \in M$.
2. Se $x\mathcal{R}y$, então $x - y \in M$ e como M é subespaço, temos que $-(x - y) \in M$. Logo, $y - x = -(x - y) \in M$, portanto $y\mathcal{R}x$.
3. Se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x - y \in M$ e $y - z \in M$. Como M é subespaço, temos que $(x - y) + (y - z) \in M$. Logo, $x - z \in M$, portanto $x\mathcal{R}z$.

O conjunto quociente $L/\mathcal{R}$ torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ definindo-se $\widehat{x} \oplus \widehat{y} = \widehat{x + y} = x + y + M$, $\lambda \odot \widehat{x} = \widehat{\lambda x} = \lambda x + M$, onde $\widehat{x} = x + M = \{w \in L | w - x \in M\}$, $\widehat{y} = y + M = \{z \in L | z - y \in M\}$, e é denotado por L/M. Para isso, basta verificarmos que os axiomas da Definição 1.121 estão satisfeitos. De fato,

(1) $(\widehat{x} \oplus \widehat{y}) \oplus \widehat{z} = \widehat{x+y} \oplus \widehat{z} = (x+y)+z+M = x+(y+z)+M = \widehat{x} \oplus \widehat{y+z} = \widehat{x} \oplus (\widehat{y} \oplus \widehat{z})$.

(2) $\widehat{x} \oplus \widehat{y} = x + y + M = y + x + M = \widehat{y} \oplus \widehat{x}$.

(3) $\widehat{0} = 0 + M \in L/M$ é o elemento neutro, pois $\widehat{x} \oplus \widehat{0} = (x + 0) + M = x + M = \widehat{x}$, para todo $\widehat{x} \in L/M$.

(4) Para cada $\widehat{x} \in L/M$, $z = \widehat{-x} = -x + M \in L/M$ é o elemento oposto, pois $\widehat{x} \oplus z = x + (-x) + M = 0 + M = \widehat{0}$.

(5) $\lambda \odot (\widehat{x} \oplus \widehat{y}) = \lambda \odot (\widehat{x+y}) = \widehat{\lambda(x+y)} = \widehat{\lambda x + \lambda y} = \widehat{\lambda x} \oplus \widehat{\lambda y} = \lambda \odot \widehat{x} \oplus \lambda \odot \widehat{y}$.

(6) $(\lambda + \mu) \odot \widehat{x} = (\lambda + \mu)x + M = \lambda x + \mu x + M = \widehat{\lambda x + \mu x} = \widehat{\lambda x} \oplus \widehat{\mu x} = \lambda \odot \widehat{x} \oplus \mu \odot \widehat{x}$.

(7) $\lambda \odot (\mu \odot \widehat{x}) = \lambda \odot (\widehat{\mu x}) = \widehat{\lambda(\mu x)} = \widehat{(\lambda\mu)x} = (\lambda\mu) \odot \widehat{x}$.

(8) $1 \odot \widehat{x} = \widehat{1x} = \widehat{x}$, onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{K}$.

Logo, $(L/M, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

1.3.3 Transformações Lineares

Definição 1.124. Sejam L_1, L_2 espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. $f : L_1 \longrightarrow L_2$ é chamada uma **transformação linear** se $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ e $x_1, x_2 \in L_1$.

Definição 1.125. Definindo $f(\lambda x) = f(x)\lambda$ se L_2 na Definição 1.124 é o espaço vetorial unidimensional $\mathbb{K}_0$ (sobre $\mathbb{K}$) associado a $\mathbb{K}$, então f é **funcional linear à direita** e o conjunto de todos os funcionais lineares à direita é chamado de **dual algébrico** L_1^* de L_1.

Observação 1.126. Toda transformação linear leva o elemento neutro 0_{L_1} de L_1 no elemento neutro 0_{L_2} de L_2, pois de $f(0_{L_1}) = f(0_{L_1} + 0_{L_1}) = f(0_{L_1}) + f(0_{L_1})$ segue que $0_{L_2} = -f(0_{L_1}) + f(0_{L_1}) = -f(0_{L_1}) + (f(0_{L_1}) + f(0_{L_1})) = (-f(0_{L_1}) + f(0_{L_1})) + f(0_{L_1}) = 0_{L_2} + f(0_{L_1}) = f(0_{L_1})$.

Observação 1.127. $N = f^{-1}(0_{L_2})$ é um subespaço de L_1. De fato, temos:

1. $0_{L_1} \in N$, pois $f(0_{L_1}) = 0_{L_2}$ (vide Observação 1.126);

2. Se $x, y \in N$, então $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0_{L_2} + 0_{L_2} = 0_{L_2}$, portanto $x + y \in N$;

3. Se $z \in N$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $f(\lambda z) = \lambda f(z) = \lambda 0_{L_2} = 0_{L_2}$, portanto $\lambda z \in N$.

Definição 1.128. Se $f : L_1 \longrightarrow L_2$ é linear, o subespaço $N = f^{-1}(0_{L_2})$ de L_1 é chamado de **espaço nulo** ou **núcleo** de f.

Definição 1.129. L_1 e L_2 são **isomorfos** se existe uma transformação linear bijetora $f : L_1 \longrightarrow L_2$; tal transformação é chamada de **isomorfismo** de L_1 sobre L_2.

1.3.4 Espaços vetoriais sobre corpos valorados

Definição 1.130. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e considere o corpo real $\mathbb{R}$ com seu valor absoluto usual. Uma função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \lambda & \longmapsto & |\lambda| \end{array}$$

é chamada um **valor absoluto** sobre $\mathbb{K}$ se satisfaz os seguintes axiomas:

1. $|\lambda| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$;

2. $|\lambda + \mu| \leqslant |\lambda| + |\mu|$;

3. $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$.

A função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (\lambda, \mu) & \longmapsto & |\lambda - \mu| \end{array}$$

é uma métrica sobre $\mathbb{K}$.

O corpo $\mathbb{K}$ dotado com essa métrica e correspondente uniformidade (veja Exemplo 1.77 e Observação 1.78) é chamado um **corpo valorado**. O corpo valorado $\mathbb{K}$ é chamado não discreto se sua topologia não é discreta (equivalentemente, se a imagem de $\lambda \longmapsto |\lambda|$ é distinta de $\{0, 1\}$). Um corpo valorado não discreto é necessariamente infinito.

Seja L um espaço vetorial sobre um corpo valorado $\mathbb{K}$ não discreto.

Definição 1.131. Um subconjunto U de L é dito **radial** se U **absorve** todo subconjunto finito de L, isto é, se existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que todo subconjunto finito de L está contido em λU sempre que $|\lambda| \geq |\lambda_0|$.

Definição 1.132. Um subconjunto U de L é dito **circulado** se $\lambda U \subset U$ sempre que $|\lambda| \leqslant 1$.

Exemplo 1.133. Se F é um subconjunto de L, então $\bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda F$ é um conjunto circulado que contém F. Como $F = 1F$, temos que $F \subset \bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda F$ e se $|\mu| \leqslant 1$, então $\mu \bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda F = \bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \mu\lambda F \subset \bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda F$ desde que $|\mu\lambda| = |\mu||\lambda| \leqslant 1$ sempre que $|\mu| \leq 1$ e $|\lambda| \leqslant 1$.

Definição 1.134. O corpo valorado não comutativo dos quatérnios, consiste dos elementos da forma $a + bi + cj + dk$ com a, b, c e d números reais com adição $+$ definida por $(a1 + bi + cj + dk) + (a'1 + b'i + c'j + d'k) = (a + a')1 + (b + b')j + (c + c')j + (d + d')k$, multiplicação $\cdot$ definida por $(a1 + bi + cj + dk) \cdot (a'1 + b'i + c'j + d'k) = (aa' - bb' - cc' - dd')1 + (ab' + ba' + cd' - c'd)i + (ac' + a'c + db' - d'b)j + (ad' + da' + bc' - b'c)k$ e norma definida por $\|a1 + bi + cj + dk\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

2 Espaços Vetoriais Topológicos

Neste capítulo apresentaremos os resultados iniciais para o estudo de espaços vetoriais topológicos. Na primeira seção, discutiremos a descrição de topologias de espaços vetoriais em termos de base de vizinhanças de 0, e a uniformidade associada a tal topologia. Na segunda seção, forneceremos alguns meios para a construção de novos espaços vetoriais topológicos. Na terceira seção, estudaremos ferramentas essenciais para trabalhar com espaços de dimensão finita. Na quarta seção, discutiremos espaços afins e hiperplanos. Na quinta seção, estudaremos a noção extremamente importante de limitação e na sexta seção, verificaremos condições para os espaços vetoriais topológicos serem metrizáveis. A sétima seção discute a transição de corpos reais em complexos, reciprocamente.

2.1 Topologias de Espaço Vetorial

Definição 2.1. Dado um espaço vetorial $(L, +, \cdot)$ sobre um corpo valorado não discreto $\mathbb{K}$ (não necessariamente comutativo) e uma topologia τ sobre L, dizemos que o par (L,τ) é um **espaço vetorial topológico** (evt) sobre $\mathbb{K}$, se satisfaz:

E_1) A função

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & L \times L & \longrightarrow & L \\ & (x,y) & \longmapsto & \oplus(x,y) = x + y \end{array}$$

é contínua.

E_2) A função

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{K} \times L & \longrightarrow & L \\ & (\lambda,x) & \longmapsto & \odot(\lambda,x) = \lambda \cdot x \end{array}$$

é contínua.

Aqui L é dotado com uma topologia τ e $\mathbb{K}$ é dotado com a uniformidade decorrente do seu valor absoluto e $L \times L$, $\mathbb{K} \times L$ denotam os respectivos produtos topológicos. É comum omitirmos o ponto na definição de $\odot$ e escrevermos apenas $\odot(\lambda, x) = \lambda x$.

Além disso, por E_1 e E_2, segue que a função

$$\begin{array}{rccc} \ominus: & L \times L & \longrightarrow & L \\ & (x,y) & \longmapsto & \ominus(x,y) = x - y \end{array}$$

é contínua, desde que $\ominus(x, y) = x - y = x + (-1) \cdot y = \oplus(x, (-1) \cdot y) = \oplus(x, \odot(-1, y)) = \oplus \circ (Id_L \times \odot) \circ \iota(x, y)$, $\forall (x, y) \in L \times L$, onde

$$\begin{array}{rccc} \iota: & L \times L & \longrightarrow & L \times (\mathbb{K} \times L) \\ & (x,y) & \longmapsto & \iota(x,y) = (x,(-1,y)) \end{array}$$

Assim, $\ominus = \oplus \circ (id_L \times \odot) \circ i$ conforme o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} L \times L \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\ominus"'] & L \times (\mathbb{K} \times L) \arrow[d, "id_L \times \odot"] \\ L & L \times L \arrow[l, "\oplus"] \end{tikzcd}$$

onde $id_L : L \longrightarrow L$ é a função identidade de L e

$$\begin{array}{rccc} id_L \times \odot : & L \times (\mathbb{K} \times L) & \longrightarrow & L \times L \\ & (x, (\lambda, y)) & \longmapsto & (x, \odot(\lambda, y)) \end{array}$$

Como $id_L \times \odot$ é contínua, pois id_L e $\odot$ são contínuas e ι e $\oplus$ também o são, segue que $\ominus$ é contínua.

Assim, temos a

Proposição 2.2. *Todo evt L é um grupo topológico comutativo com relação a operação adição.*

Demonstração. Vamos primeiro provar que um evt é um grupo topológico comutativo. Para isso deve satisfazer as seguintes condições:

1. $(\mathbf{L}, +)$ é um grupo comutativo;

2. $(\mathbf{L}, \tau)$ é um espaço topológico com a topologia τ;

3. As funções a seguir:

$$\begin{array}{rccc} s : & L \times L & \longrightarrow & L \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} o : & L & \longrightarrow & L \\ & x & \longmapsto & -x \end{array}$$

são contínuas.

1. Como $(L, +, \cdot)$ é um espaço vetorial, então $+$ satisfaz as propriedades: associativa, comutativa, a existência do elemento neutro e do elemento oposto. Então $(L, +)$ é um grupo comutativo.

2. Como L é um evt segue que (L, τ) é um espaço topológico com a topologia τ.

3. Como $s : (x, y) \longmapsto x + y$, para todo $(x, y) \in L \times L$ temos que $s = \oplus$ que é contínua e $o = \odot \circ (\phi, id_L)$, onde $\phi : L \longrightarrow \mathbb{K}$ é dada por $x \longmapsto -1$ e id_L é a função identidade de L e $(\phi, id_L) : L \longrightarrow \mathbb{K} \times L$ é dada por $x \longmapsto (\phi(x), id_L(x)) = (-1, x)$. Assim, $o = \odot \circ (\phi, id_L)$ é contínua, como composta de funções contínuas.

Logo, todo evt L é um grupo topológico comutativo com relação à operação adição. $\square$

Observação 2.3. Um evt (L, τ) geralmente será denotado por $L(\tau)$, ou simplesmente por L se a topologia de L não precisar de notação especial.

Definição 2.4. Dois espaços vetoriais topológicos, L_1 e L_2 sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, são chamados de **topologicamente isomorfos** se existe uma aplicação linear injetora $h : L_1 \longrightarrow L_2$ que é um homeomorfismo. A aplicação $h : L_1 \longrightarrow L_2$ é chamada de **isomorfismo**.

Lema 2.5. *Seja L um evt sobre $\mathbb{K}$. Se A e B são subconjuntos de L, para cada 0-vizinhança U, temos que $(x_0 - U) \cap (A + B) = \emptyset$ se, e somente se, $(B + U) \cap (x_0 - A) = \emptyset$.*

Demonstração. De fato, se existe $x \in (x_0 - U) \cap (A+B)$, então $x = x_0 - u$ para algum $u \in U$ e $x = a + b$ para algum $a \in A$ e algum $b \in B$. Logo, $b + u \in B + U$ e de $a + b = x = x_0 - u$ segue que $b + u = x_0 - a \in x_0 - A$. Portanto, $b + u \in (B + U) \cap (x_0 - A)$. Reciprocamente, se existe $y \in (B + U) \cap (x_0 - A)$, então $y = b + u$ para algum $b \in B$ e algum $u \in U$ e $y = x_0 - a$ para algum $a \in A$. Logo, $x_0 - u \in x_0 - U$ e de $b + u = y = x_0 - a$ segue que $x_0 - u = a + b \in A + B$. Portanto, $x_0 - u \in (x_0 - U) \cap (A + B)$. □

Proposição 2.6. *Seja L um evt sobre $\mathbb{K}$.*

i) Para cada $x_0 \in L$ e cada $\lambda_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ a aplicação $h : x \longmapsto \lambda_0 x + x_0$ é um homeomorfismo de L para L.

Demonstração. Para mostrar que a aplicação h é um homeomorfismo precisamos garantir que h seja contínua, invertível e com inversa também contínua. Assim, mostremos inicialmente que h é contínua e uma função bijetora:

Como $h(x) = \lambda_0 x + x_0 = \odot(\lambda_0, x) + x_0 = \oplus(\odot(\lambda_0, x), x_0)$, h é contínua.

h é injetora, pois para quaisquer $x, y \in L$, temos que $h(x) = h(y) \Rightarrow \lambda_0 x + x_0 = \lambda_0 y + x_0 \Rightarrow \lambda_0(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$.

h é sobrejetora, pois $\forall y \in L, x = \frac{y - x_0}{\lambda_0} \in L$ e $h(x) = h(\frac{y-x_0}{\lambda_0}) = \lambda_0 \frac{y-x_0}{\lambda_0} + x_0 = y$.

Logo, h é bijetora.

Além disso, possui inversa h^{-1} dada por $h^{-1}(y) = \lambda_0^{-1}(y - x_0) = \odot(\lambda_0^{-1}, y - x_0) = \odot(\lambda_0^{-1}, \ominus(y, x_0))$ que é contínua como composta de funções contínuas. Portanto, h é um homeomorfismo de L para L.

□

ii) Para qualquer subconjunto $A \subset L$ e qualquer base $\mathcal{U}$ do filtro de vizinhanças de $0 \in L$, o fecho $\overline{A}$ é dado por $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} A + U$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $B = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} A + U$. Por *i*), $\{x - U : U \in \mathcal{U}\}$ é uma base de vizinhança de x para cada $x \in L$, pois $h : L \longrightarrow L, y \longmapsto -y + x$ é um homeomorfismo, portanto é uma aplicação contínua e aberta de L sobre L. Assim, qualquer base $\mathcal{U}$ do filtro de vizinhanças de $0 \in L$ é transformada por h numa base $h(\mathcal{U}) = \{h(U) = x - U : U \in \mathcal{U}\}$ do filtro de vizinhanças de $x \in L$. Portanto, se $x \in B$, sempre existe $u \in U$ tal que $x = a + u$ e isso implica que sempre existe $u \in U$ tal que $x - u = a \in A$, ou seja, cada vizinhança de x intersecta A, portanto $x \in \overline{A}$. Logo, $B \subset \overline{A}$.

($\Leftarrow$) Lembrando que $\overline{A} = A \cup A'$, onde A' é o conjunto dos pontos de acumulação de A, se $x \in \overline{A}$, então $x \in A$ ou $x \in A'$. Se $x \in A$, então $x = x + 0 \in A + U$

para cada 0-vizinhança U. Se $x \in A'$, para cada vizinhança $x - U$ de $x \in L$, existe $a \in A$ tal que $a \in x - U$ para cada 0-vizinhança U, portanto $x \in A + U$ para cada 0-vizinhança U. Logo, $x \in B = \cap\{A + U : U \in \mathcal{U}\}$. Portanto, $\overline{A} \subset B$. □

iii) Se A é um subconjunto aberto de L e B é um subconjunto qualquer de L, então $A + B$ é aberto em L.

Demonstração. Por i) a aplicação $h : x \longmapsto x + b; \forall b \in B$ é um homeomorfismo de L para L. Como A é aberto em L, e todo homeomorfismo é uma aplicação aberta segue que $h(A) = A+b$ é aberto em L para todo $b \in B$. Desde que $A+B = \bigcup\limits_{b \in B} A+b$, então $A + B$ é uma união de subconjuntos abertos de L. Logo, $A + B$ é aberto em L. □

iv) Se A, B são subconjuntos fechados de L, tal que, todo filtro de A tem um ponto aderente (em particular, tal que A é compacto), então $A + B$ é fechado em L.

Demonstração. Mostremos que para cada $x_0 \notin A+B$, existe uma 0-vizinhança U tal que $(x_0 - U) \cap (A+B) = \emptyset$, ou equivalentemente, pelo Lema 2.5, $(B+U) \cap (x_0 - A) = \emptyset$. Se isso não fosse verdade, então a interseção $(B+U) \cap (x_0 - A)$ formaria uma base filtro de $x_0 - A$ (conforme U percorre uma 0-vizinhança base em L). Pela hipótese de A, essa base filtro teria um ponto aderente $z_0 \in x_0 - A$, com $x_0 - A$ contida em $\overline{B+U} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} B + U + U$, portanto contida em $B + U + U$, $\forall U$. Desde que, por E_1, $U + U$ percorre toda vizinhança base de 0, quando U também percorre, então ii) implica que $z_0 \in \overline{B} = B$, o que é uma contradição. □

v) Se A é um subconjunto circulado de L, então seu fecho $\overline{A}$ é circulado, e $intA$ é circulado quando $0 \in intA$.

Demonstração. Seja A um subconjunto circulado de L e suponha que $|\lambda| \leqslant 1$. Por E_2, $\lambda A \subset A$ implica que $\lambda\overline{A} \subset \overline{A}$, pois

$$\lambda\overline{A} = \lambda \bigcap_{U \in \mathcal{U}} A + U = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \lambda A + \lambda U \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} A + \lambda U.$$

Por E_2, λU percorre toda vizinhança base de 0, quando U também percorre, assim $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} A + \lambda U = \overline{A}$ e daí $\lambda\overline{A} \subset \overline{A}$, portanto $\overline{A}$ é circulado. Também, se $0 < |\lambda| \leqslant 1$, então por i) temos que $h : x \longmapsto \lambda \cdot x$ é um homeomorfismo, portanto $h(A) = \lambda intA$ é um aberto em L contido em A, pois $\lambda intA \subset \lambda A \subset A$. Como $intA$ é o maior subconjunto aberto de L contido em A segue $\lambda intA \subset intA$. A hipótese $0 \in intA$ mostra que $\lambda(intA) \subset intA$ sempre que $|\lambda| \leq 1$, pois, por E_2, $h(A) = \lambda intA$ é uma 0- vizinhança contida em A sempre que $|\lambda| \leq 1$, portanto como $intA$ é a maior 0-vizinhança contida em A, segue $\lambda(intA) \subset intA$ sempre que $|\lambda| \leq 1$. □

Note que na demonstração acima usamos repetidamente o fato que em um evt, cada translação $x \longmapsto x + x_0$ é um homeomorfismo (que é um caso especial de i)).

Definição 2.7. Uma topologia τ sobre um espaço vetorial L é denominada **translação-invariante** se todas as translações são homeomorfismos.

Tal topologia é completamente determinada pelo filtro de vizinhança de qualquer $x \in L$, em particular pelo filtro de vizinhança de 0.

Proposição 2.8. *Uma topologia τ sobre um espaço vetorial L sobre $\mathbb{K}$ satisfaz os axiomas E_1 e E_2 da Definição 2.1 se, e somente se, τ é translação-invariante e possui uma base de vizinhança de* 0*, $\mathcal{B}$, com as seguintes propriedades:*

1) Para cada $V \in \mathcal{B}$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$;

2) Todo $V \in \mathcal{B}$ é radial e circulado;

3) Existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $0 < |\lambda| < 1$, tal que $V \in \mathcal{B}$ implica $\lambda V \in \mathcal{B}$.

Se $\mathbb{K}$ é um corpo valorado Arquimediano, a condição 3) é dispensável (que é, em particular, o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Demonstração. ($\Rightarrow$) Provemos primeiramente a existência, em todo evt, de uma base de vizinhança de 0 satisfazendo as propriedades listadas. Dada uma 0-vizinhança $W \subset L$, existe uma 0-vizinhança U e um número real $\epsilon > 0$ tal que $\lambda U \subset W$ sempre que $|\lambda| \leqslant \epsilon$, devido à E_2; logo, como $\mathbb{K}$ é não discreto, $V = \cup_{|\lambda| \leqslant \epsilon} \lambda U$ é uma 0-vizinhança que está contida em W e é circulada, pois se $|\mu| \leq 1$ temos que para $|\lambda| \leq \epsilon$, $|\mu\lambda| \leq \epsilon$, portanto $\mu V = \cup_{|\lambda| \leqslant \epsilon} (\mu\lambda) U \subset \cup_{|\eta| \leqslant \epsilon} \eta U = V$. Assim, a família $\mathcal{B}$ de todas as 0-vizinhanças circuladas de L é uma base de vizinhança de 0. Se $B = \{b_1, \dots b_n\}$ é um subconjunto finito qualquer de L, a continuidade em $\lambda = 0$ de $(\lambda, x_0) \longmapsto \lambda x_0$ para cada $x_0 \in L$ implica que para todo $V \in \mathcal{B}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\eta U_{b_i} \subset V$ sempre que $|\eta| \leq \epsilon$ para $i = 1, \dots, n$ e U_{b_i} uma vizinhança de b_i. Assim, se tomarmos$\lambda_0 = \frac{1}{\epsilon} > 0$, temos que para todo $|\lambda| \geq \lambda_0 = \frac{1}{\epsilon}$, $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \leq \epsilon$, portanto segue que $\frac{1}{\lambda} U_{b_i} \subset V$ para todo $i = 1, \dots, n$, ou equivalentemente, segue que $U_{b_i} \subset \lambda V$ para todo $i = 1, \dots, n$ sempre que $|\lambda| \geq \frac{1}{\epsilon}$. Assim, $B \subset \cup_{i=1}^n U_{b_i} \subset \lambda V$ sempre que $|\lambda| \geq \frac{1}{\epsilon}$. Portanto, V é radial. Como a topologia τ satisfaz E_1 segue que $\mathcal{B}$ satisfaz a condição 1); Para 3), é suficiente observar que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\lambda| < 1$, visto que $\mathbb{K}$ é não discreto e λV ($V \in \mathcal{B}$), a qual é uma 0-vizinhança, pela Proposição 2.6 i), é circulada, pois se $|\mu| \leqslant 1$, então $\mu = \lambda\nu\lambda^{-1}$, onde $|\nu| \leqslant 1$, portanto $\mu(\lambda V) = (\mu\lambda)V = (\lambda\nu)V = \lambda(\nu V) \subset \lambda V$. Finalmente, a topologia de L é uma translação-invariante pela Proposição 2.6, item i).

($\Leftarrow$) Seja τ uma topologia que é um translação-invariante de L com uma base de vizinhanças de 0, $\mathcal{B}$, satisfazendo as propriedades $1), 2)$ e 3). Temos que mostrar que τ satisfaz E_1 e E_2. Sabemos que $\{x_0 + V : V \in \mathcal{B}\}$ é uma base de vizinhança de $x_0 \in L$, logo, se $V \in \mathcal{B}$ é dado e $U \in \mathcal{B}$ é escolhido de modo que $U + U \subset V$, então $x - x_0 \in U$, $y - y_0 \in U$ implica que $x + y \in x_0 + y_0 + V$, assim E_1 é satisfeita. De fato, devemos mostrar que para cada $(x_0, y_0) \in L \times L$ temos que $\oplus : (x, y) \longmapsto x + y$ é contínua em (x_0, y_0). Para isto devemos mostrar que para cada $(x_0 + y_0) + V$ ($V \in \mathcal{B}$) vizinhança de $x_0 + y_0$, a pré-imagem $\oplus^{-1}(x_0 + y_0 + V)$ é uma (x_0, y_0)-vizinhança em $L \times L$. Como observamos, para cada $V \in \mathcal{B}$, devido à 1), existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$. Assim, $(x_0 + U) \times (y_0 + U)$ é uma (x_0, y_0)-vizinhança em $L \times L$ tal que $(x_0 + U) \times (y_0 + U) \subset \oplus^{-1}(x_0 + y_0 + V)$, pois se $(x, y) \in (x_0 + U) \times (y_0 + U)$, então $x - x_0 \in U$ e $y - y_0 \in U$, donde segue que $\oplus(x, y) = x + y \in (x_0 + y_0) + V$.

Para provar E_2, isto é, a continuidade da aplicação $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$, sejam λ_0, x_0 pontos fixados de $\mathbb{K}$, L, respectivamente. Se $V \in \mathcal{B}$ é dado, então, por 1), existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$. Desde que por 2), U é radial, existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in U$ sempre que $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \epsilon$.

De fato, como U é radial, existe $\nu_0 \in \mathbb{K}$ tal que todo subconjunto finito A de L está contido em νU sempre que $|\nu| \geq |\mu_0|$. Assim, tomando $\epsilon = \frac{1}{|\nu_0|+1} > 0$, temos que se $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$, então $\left|\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\right| \geq |\nu_0| + 1 > |\nu_0|$. Então para $A = \{x_0\} \subset L$ segue que $\{x_0\} \subset \frac{1}{\lambda-\lambda_0}U$ e daí $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in U$.

Seja $\mu \in \mathbb{K}$, $0 < |\mu| < 1$, satisfazendo 3), isto é, se $V \in \mathcal{B}$, então $\mu V \in \mathcal{B}$. Como $|\mu|^{-1} > 1$, então existe um inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu^{-n}| = |\mu|^{-n} \geqslant |\lambda_0| + \epsilon$. Seja $W \in \mathcal{B}$ definida por $W = \mu^n U$. Desde que U é circulado, a relação $x - x_0 \in W$ e $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \epsilon$ implica que $\lambda(x - x_0) \in U$. De fato, temos $\lambda(x - x_0) \in \lambda W = (\lambda\mu^n)U$ e como

$$|\lambda\mu^n| = |(\lambda - \lambda_0)\mu^n + \lambda_0\mu^n| \leq |\lambda - \lambda_0||\mu|^n + |\lambda_0||\mu|^n \leq \frac{\epsilon}{|\lambda_0|+\epsilon} + \frac{|\lambda_0|}{|\lambda_0|+\epsilon} = 1$$

e U é circulado, então $(\lambda\mu^n)U \subset U$, portanto $\lambda(x - x_0) \in U$. Por 2), $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in U$ sempre que $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$. Assim, a identidade $\lambda x = \lambda_0 x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda(x - x_0)$, implica que $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U + U \subset \lambda_0 x_0 + V$. Para provar E_2, devemos mostrar que para cada $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times L$ temos que $\odot : (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ é contínua em (λ_0, x_0). Para isto, devemos mostrar que para cada $\lambda_0 x_0 + V$ ($V \in \mathcal{B}$) vizinhança de $\lambda_0 x_0$, a pré-imagem $\odot^{-1}(\lambda_0 x_0 + V)$ é uma (λ_0, x_0)-vizinhança em $\mathbb{K} \times L$. Como observamos, para cada $V \in \mathcal{B}$, devido à 1), existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$. Desde que por 3) existe $\mu \in \mathbb{K}$, $0 < |\mu| < 1$ tal que $U \in \mathcal{B}$ implica $\mu U \in \mathcal{B}$, então existe um inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu|^{-n} \geq |\lambda_0| + \epsilon$ e $W = \mu^n U \in \mathcal{B}$. Assim, $]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[\times(x_0 + W)$ é uma (λ_0, x_0)-vizinhança em $\mathbb{K} \times L$ tal que $]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[\times(x_0 + W) \subset \odot^{-1}(\lambda_0 x_0 + V)$, pois se $(\lambda, x) \in]\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 - \epsilon[\times(x_0 + W)$, então $x - x_0 \in W$ e $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$, donde segue que $\odot(\lambda, x) = \lambda x \in \lambda_0 x_0 + V$, desde que, conforme vimos acima, $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U + U \subset \lambda_0 x_0 + V$.

Finalmente, se $\mathbb{K}$ é um corpo valorado Arquimediano, então $0 < |2^{-1}| < 1$ para $2^{-1} \in \mathbb{K}$. Como $|2^{-1}|^{-1} > 1$, então $|(2^{-1})^{-n}| = |2^{-1}|^{-n} > |\lambda_0| + \epsilon$ para um adequado $n \in \mathbb{N}$. Logo, tomando $W = 2^{-n}U$ na demonstração anterior, W é circulado, pois $\lambda W = \lambda 2^{-n}U = 2^{-n}\lambda U \subset 2^{-n}U = W$, segue o axioma E_2, assim 3) é dispensável neste caso. □

Corolário 2.9. *Se L é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}$ é uma base filtro de L satisfazendo as propriedades de* 1) *a* 3) *da Proposição 2.8, então $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhança de* 0 *para uma única topologia τ tal que (L, τ) é um evt sobre $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Definimos a topologia τ especificando que um subconjunto $G \subset L$ seja aberto sempre que $x \in G$ implica $x + V \subset G$ para algum $V \in \mathcal{B}$. Note que τ é a única topologia translação-invariante sobre L para o qual $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhança de 0, portanto a única topologia com esta propriedade e de tal forma que (L, τ) é um evt sobre $\mathbb{K}$. □

Exemplo 2.10. Nos exemplos a seguir, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ pode ser qualquer corpo valorado não discreto, por exemplo, o corpo dos quatérnios com seus valores absolutos usuais, ou qualquer subcorpo deste tais como o corpo dos números racionais, reais ou complexos (induzido com o respectivo valor absoluto).

1. Seja A um conjunto qualquer não vazio, $\mathbb{K}^A$ o conjunto de todas funções $\alpha \longmapsto \xi_\alpha$ de A em $\mathbb{K}$; escrevamos $x = (\xi_\alpha)$, $y = (\eta_\alpha)$ para denotar elementos $x, y \in \mathbb{K}^A$. Definindo a adição por $x \oplus y = (\xi_\alpha + \eta_\alpha)$ e multiplicação por escalar por $\lambda \odot x = (\lambda \cdot \xi_\alpha)$, $\mathbb{K}^A$ torna-se um espaço vetorial. De fato,

   (a) $(x \oplus y) \oplus z = (\xi_\alpha + \eta_\alpha) \oplus (\chi_\alpha) = ((\xi_\alpha + \eta_\alpha) + \chi_\alpha)) = (\xi_\alpha + (\eta_\alpha + \chi_\alpha)) = (\xi_\alpha) \oplus (\eta_\alpha + \chi_\alpha) = x \oplus (y \oplus z)$.

(b) $x \oplus y = (\xi_\alpha + \eta_\alpha) = (\eta_\alpha + \xi_\alpha) = y \oplus x$.

(c) A função $\mathbf{0} = (0)$ é o elemento neutro de $\mathbb{K}^A$, pois $\forall x \in \mathbb{K}^A$, temos $x + \mathbf{0} = (\xi_\alpha + 0) = (\xi_\alpha) = x$.

(d) Para cada $x = (\xi_\alpha) \in \mathbb{K}^A$, tome $y = (-\xi_\alpha) \in \mathbb{K}^A$. Então temos $x \oplus y = (\xi_\alpha + (-\xi_\alpha)) = (0) = \mathbf{0}$.

(e) $\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot (\xi_\alpha + \eta_\alpha) = (\lambda \cdot (\xi_\alpha + \eta_\alpha)) = (\lambda \cdot \xi_\alpha + \lambda \cdot \eta_\alpha) = (\lambda \cdot \xi_\alpha) \oplus (\lambda \cdot \eta_\alpha) = \lambda \odot x \oplus \lambda \odot y$.

(f) $(\lambda + \mu) \odot x = ((\lambda + \mu) \cdot \xi_\alpha) = (\lambda \cdot \xi_\alpha + \mu \cdot \xi_\alpha) = (\lambda \cdot \xi_\alpha) \oplus (\mu \cdot \xi_\alpha) = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x$.

(g) $\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot (\mu \cdot \xi_\alpha) = (\lambda \cdot (\mu \cdot \xi_\alpha)) = ((\lambda \cdot \mu) \cdot \xi_\alpha) = (\lambda \cdot \mu) \odot (\xi_\alpha) = (\lambda \cdot \mu) \odot x$.

(h) Como $\mathbb{K}$ é um corpo, existe o elemento neutro 1 da multiplicação $\cdot$ tal que $1 \odot x = (1 \cdot \xi_\alpha) = (\xi_\alpha) = x$.

Assim, $\mathbb{K}^A$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Para qualquer subconjunto finito $H \subset A$ e qualquer número real $\epsilon > 0$, seja $V_{H,\epsilon} = \{x = (\xi_\alpha) : |\xi_\alpha| \leqslant \epsilon \text{ se } \alpha \in H\} \subset \mathbb{K}^A$. Note que, a família $\mathcal{F}$ de todos estes conjuntos $V_{H,\epsilon}$ é uma base de vizinhança de $\mathbf{0}$ para uma única topologia sob a qual $\mathbb{K}^A$ é um evt.

2. Seja X um espaço topológico qualquer não vazio; o conjunto de todas as funções contínuas f de X em K tal que $\sup_{t \in X} |f(t)|$ é finito, é um subconjunto de $\mathbb{K}^X$, o qual é um espaço vetorial $\mathcal{C}_K(X)$ via as operações de adição e multiplicação escalar induzidas de $\mathbb{K}^X$(Exemplo 1.); os conjuntos $U_n = \left\{ f : \sup_{t \in X} |f(t)| \leqslant n^{-1} \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ formam uma base de vizinhança de $\mathbf{0}$ para uma única topologia sob a qual $\mathcal{C}_K(X)$ é um evt.

3. Seja $\mathbb{K}[t]$ o anel de polinômios $f[t] = \sum_n \alpha_n t^n$ sobre $\mathbb{K}$ em uma indeterminada t. Com a multiplicação restrita à multiplicação pela esquerda de polinômios de grau 0, $K[t]$ torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Seja r um número real fixado tal que $0 < r \leqslant 1$ e denotemos por V_ϵ o conjunto de polinômios para os quais $\sum_n |\alpha_n|^r \leqslant \epsilon$. A família $\{V_\epsilon : \epsilon > 0\}$ é uma base de vizinhança de 0 para uma única topologia sob a qual $\mathbb{K}[t]$ é um evt.

Proposição 2.11. *Se L é um evt e $x \in L$, cada vizinhança de x contém uma vizinhança fechada de x. Em particular, a família de todas as vizinhanças fechadas de* 0 *forma uma base de* 0.

Demonstração. Para qualquer vizinhança U de 0 existe uma outra, V, tal que $V + V \subset U$. Como $y \in \overline{V}$ se, e somente se, $(y - V) \cap V$ é não vazio, segue que $\overline{V} \subset V + V \subset U$. De fato, se $y \in \overline{V}$, $\exists x \in (y - V) \cap V$, assim $y = y - x + x$ com $y - x, x \in V$, portanto $\overline{V} \subset V + V$. Logo, $x + U$ contém a vizinhança fechada $x + \overline{V}$ de x. □

Pela Proposição 2.8, qualquer vizinhança de 0 contém uma vizinhança circulada de 0 e, portanto, pela Proposição 2.6 (v) e 2.11, uma vizinhança de 0 fechada e circulada; assim obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.12. *Se L é um evt e $\mathcal{U}$ é qualquer base de vizinhança de* 0*, então os menores conjuntos circulados e fechados dos conjuntos $U \in \mathcal{U}$ formam novamente uma base de* 0.

Note que a Proposição 2.11 mostra que todo espaço vetorial topológico de Hausdorff é um espaço topológico regular.

Além disso, veremos na próxima proposição que todo evt é uniformizável, portanto, todo evt de Hausdorff é completamente regular.

Definição 2.13. Uma uniformidade sobre um espaço vetorial L é chamada **translação-invariante** se possui uma base $\mathcal{R}$ tal que $(x,y) \in N$ é equivalente a $(x+z, y+z) \in N$ para cada $z \in L$ e cada $N \in \mathcal{R}$.

Proposição 2.14. *A topologia de um evt qualquer L pode ser obtida de uma única uniformidade translação-invariante $\mathcal{R}$. Se $\mathcal{B}$ é uma base qualquer de vizinhanças de 0, a família $N_V = \{(x,y) \in L \times L : x - y \in V\}, V \in \mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Seja (L, τ) um evt com um base $\mathcal{B}$ de vizinhanças de 0. Os conjuntos $N_V, V \in \mathcal{B}$ formam uma base de filtro sobre $L \times L$ (basta notar que para N_{V_1}, N_{V_2}, com $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ temos $N_{V_1 \cap V_2} \subset N_{V_1} \cap N_{V_2}$) que é uma base para a uniformidade translação-invariante $\mathcal{R}$ (basta notar que se $(x,y) \in N_V, V \in \mathcal{B}$, então $(x+z, y+z) \in N_V$ para cada $z \in L$ e para cada $N_V \in \mathcal{R}$, pois $x + z - y - z = x - y \in V$) produzindo a topologia τ de L. Se $\mathcal{R}_1$ é uma outra uniformidade com essas propriedades, existe uma base $\mathcal{M}$ de $\mathcal{R}_1$, consistido de conjuntos translação-invariantes, e tal que os conjuntos $U_M = \{x - y : (x,y) \in M\}$ com $M \in \mathcal{M}$ formam uma base de vizinhança de 0 para τ. Desde que $U_M \subset V$ implica $M \subset N_V$ e vale a recíproca, segue que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$. $\square$

O fato de existir uma única uniformidade translação-invariante do qual a topologia de um evt pode ser obtida, é de importância considerável na teoria de tais espaços (como é para grupos topológicos), desde que conceitos de uniformidade podem ser aplicados sem ambiguidade para subconjuntos arbitrários A de um evt L. A uniformidade pretendida é, sem exceção, aquela induzida sobre $A \subset L$ pela uniformidade $\mathcal{R}$ da Proposição 2.14. Por exemplo:

Exemplo 2.15. Um subconjunto A de um evt L é completo se, e somente se, todo filtro de Cauchy em A converge para um elemento de A.

Exemplo 2.16. A é semi-completo (ou sequencialmente completo) se, e somente se, toda sequência de Cauchy em A converge para um elemento de A.

Proposição 2.17. *Um filtro $\mathcal{F}$ em A é um filtro de Cauchy se, e somente se, para cada 0-vizinhança $V \subset L$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset V$.*

Demonstração. Um filtro $\mathcal{F}$ em A é um filtro de Cauchy se, para cada vizinhança de uniformidade W, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset W$. Assim, para $W = N_V$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset N_V$, onde $V \in \mathcal{B}$ com $\mathcal{B}$ sendo uma base de vizinhanças de 0 em L. Como $F \times F \subset N_V$, então para todo par $(x,y) \in F \times F$, temos $(x,y) \in N_V$. Logo, $x - y \in F - F \Rightarrow x - y \in V$, então $F - F \subset V$.

Para a recíproca, basta mostrar que para cada vizinhança da uniformidade N_V existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset N_V$. De fato, para cada par $(x,y) \in F \times F$ temos, por hipótese, que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset V$, portanto $x - y \in V$. Logo, $(x,y) \in N_V$ e $F \times F \subset N_V$. $\square$

Exemplo 2.18. Uma sequência $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ é uma sequência de Cauchy se, e somente se, para cada 0-vizinhança $V \subset L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_m - x_n \in V$ sempre que $m \geq n_0$ e $n \geq n_0$.

Proposição 2.19. *Um evt L é um espaço topológico de Hausdorff (ou separado) se, e somente se, L é um espaço de Hausdorff uniforme.*

Demonstração. O resultado segue da Proposição 2.14 e da Definição 1.79. □

Proposição 2.20. *L é Hausdorff se, e somente se, $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\} = \{0\}$, onde $\mathcal{U}$ é uma base qualquer de vizinhanças de 0 em L. Uma condição equivalente é que para cada $x \in L, x \neq 0$, existe uma 0-vizinhança U tal que $x \in U$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam L de Hausdorff e $\mathcal{U}$ uma base qualquer de vizinhanças de 0 em L. Suponha que exista $x \neq 0$ tal que $x \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Logo, por hipótese, existem U_x e U_0, onde $U_x \cap U_0 = \emptyset$, o que dá um absurdo, pois como $x \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$, segue que $x \in U_0$. Logo, $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\} = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Da Proposição 2.14, a topologia de L pode ser obtida de uma única uniformidade translação-invariante $\mathcal{R}$ e se $\mathcal{B}$ é uma base qualquer de vizinhanças de 0, a família $N_V = \{(x,y) \in L \times L : x - y \in V\}, V \in \mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{R}$. Assim, $\bigcap\limits_{N_V \in \mathcal{R}} N_V = \Delta$, pois, por definição de N_V, temos que $\Delta \subset N_V, V \in \mathcal{B}$ e daí $\Delta \subset \bigcap\limits_{N_V \in \mathcal{R}} N_V$. Por outro lado, se $(x,y) \in \bigcap\limits_{N_V \in \mathcal{R}} N_V$, então $x - y \in V, V \in \mathcal{B}$. Logo, $x - y \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{B}} V = \{0\}$ por hipótese, assim $x = y$, donde segue que $(x,y) \in \Delta$ e então $\bigcap\limits_{N_V \in \mathcal{R}} N_V \subset \Delta$. Logo, pela Definição 1.80, a uniformidade translação-invariante $\mathcal{R}$ é de Hausdorff, portanto L é um espaço de Hausdorff uniforme. Da Proposição 2.19 segue que L é um espaço topológico de Hausdorff. □

Lembramos que um subespaço (subespaço vetorial, subespaço linear) de um espaço vetorial L sobre $\mathbb{K}$ é definido como um subconjunto $M \neq \emptyset$ de L tal que $M + M \subset M$ e $\mathbb{K}M \subset M$. Se L é um evt, por um subespaço de L entenderemos (a menos que expresso o contrário) um subespaço vetorial de M dotado com a topologia induzida de L. Note que M é um evt de Hausdorff se L o for. Se L é um evt de Hausdorff, a presença de uma uniformidade translação-invariante de Hausdorff torna possível mergulhar L como um subespaço denso de um evt de Hausdorff completo $\tilde{L}$ que é essencialmente único, e é chamado o **completamento** de L .

Proposição 2.21. *Seja L um evt de Hausdorff sobre $\mathbb{K}$. Existe um evt de Hausdorff completo $\tilde{L}$ sobre $\mathbb{K}$ contendo L como um subespaço denso; $\tilde{L}$ é único a menos de um isomorfismo. Além disso, para qualquer 0-vizinhança base $\mathcal{B}$ de L, a família $\mathcal{M} = \left\{\overline{V} : V \in \mathcal{B}\right\}$ de fechos de $\tilde{L}$ é uma 0-vizinhança base de $\tilde{L}$.*

Demonstração. Pelos Teorema 1.93, Proposição 1.95 e Proposição 1.96, existe um espaço uniforme Hausdorff completo $\tilde{L}$ que contém L como um subespaço denso e é único a menos de um isomorfismo uniforme $\iota : L \longrightarrow \tilde{L}$. Note que $(x,y) \longmapsto x + y$ é uniformemente contínua de $L \times L$ em $\tilde{L}$, e para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ fixado, $x \longmapsto \lambda \cdot x$ é uniformemente contínua de L em $\tilde{L}$; Logo, essas aplicações possuem únicas extensões contínuas $\tilde{\oplus}$ e $\tilde{\odot}$ (de fato uniformemente contínuas) de $\tilde{L} \times \tilde{L}$ e $\tilde{L}$, respectivamente, com valores em $\tilde{L}$. Note que essas extensões tornam $\tilde{L}$ num espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Antes de mostrar que o espaço uniforme $\tilde{L}$ é um evt sobre $\mathbb{K}$, vamos provar a segunda afirmação. Como $\{N_V : V \in \mathcal{B}\}$ é uma base da uniformidade $\mathcal{R}$ de L (notação como na Proposição 2.14), os fechos $\overline{N_V}$ desses conjuntos em $\tilde{L} \times \tilde{L}$ formam uma base da uniformidade $\tilde{\mathcal{R}}$ de L; afirmamos que $N_{\overline{V}} = \overline{N_V}$ para todo $V \in \mathcal{B}$. De fato, se $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{N_V}$, então $\tilde{x} - \tilde{y} \in \overline{V}$, desde que

$f : (\tilde{x}, \tilde{y}) \longmapsto \tilde{x} - \tilde{y}$ é contínua de $\tilde{L} \times \tilde{L}$ em $\tilde{L}$. Com efeito, se A é um aberto de $\tilde{L}$ contendo $\tilde{x} - \tilde{y}$, então $f^{-1}(A)$ é um aberto de $\tilde{L} \times \tilde{L}$ contendo $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Como $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{N_V}$ existe $(x, y) \in f^{-1}(A) \cap N_V$. Logo, $x - y \in A \cap V$, assim $\tilde{x} - \tilde{y} \in \overline{V}$. Portanto, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in N_{\overline{V}}$. Reciprocamente, se $\tilde{x} - \tilde{y} \in \overline{V}$, então temos $\tilde{x} \in \tilde{y} + \overline{V}$. Logo, $\tilde{x}$ está no fecho (tomado em $\tilde{L}$) de $\tilde{y} + V$, dado que as translações em $\tilde{L}$ são homeomorfismos, pois se A é um aberto de $\tilde{L}$ contendo $\tilde{x}$, $(-\tilde{y}) + A$ é um aberto de $\tilde{L}$ contendo $\tilde{x} - \tilde{y}$, portanto $((-\tilde{y}) + A) \cap V \neq \emptyset$. Logo, $A \cap (\tilde{y} + V) \neq \emptyset$, assim $\tilde{x} \in \overline{\tilde{y} + V}$ (tomado em $\tilde{L}$); isso implica que $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{N_V}$, pois, para qualquer $O = O_1 \times O_2$ aberto de $\tilde{L} \times \tilde{L}$ contendo $(\tilde{x}, \tilde{y})$, temos $O_1 \cap (\tilde{y} + V) \neq \emptyset$. Logo, existe $x \in O_1$ tal que $x - \tilde{y} \in V$. Assim, $(x, \tilde{y}) \in O = O_1 \times O_2$ e $(x, \tilde{y}) \in N_V$, donde segue que $O \cap N_V \neq \emptyset$, portanto $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{N_V}$.

Segue que $\mathcal{M}$ é uma base de vizinhanças de 0 em $\tilde{L}$.

Agora, usaremos a Proposição 2.8 para mostrar que via a topologia $\tilde{\tau}$ definida por $\tilde{\mathcal{R}}$, $\tilde{L}$ é um evt. Note que, $\tilde{\tau}$ é translação-invariante e satisfaz as condições 1) e 3) da Proposição 2.8, pois se $(x, y) \in N_{\overline{V}}$ segue que $x - y \in \overline{V}$, assim para qualquer $z \in \tilde{L}$, $x + z - y - z = x - y \in \overline{V}$, portanto $(x + z, y + z) \in N_{\overline{V}}$, donde segue que $\tilde{\tau}$ é translação-invariante. Ainda, para cada $\overline{V} \in \mathcal{M}$ temos que $V \in \mathcal{B}$ e como L é um evt, então existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$ e usando a continuidade de $\tilde{\oplus}$ segue que existe $\overline{U} \in \mathcal{M}$ tal que $\overline{U} + \overline{U} \subset \overline{V}$. De fato, se $a + b \in \overline{U} + \overline{U}$ e $\mathcal{O}$ é uma vizinhança de $a + b$, então $\tilde{\oplus}^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ é uma vizinhança de (a, b). Como $a, b \in \overline{U}$ temos $\mathcal{O}_1 \cap U \neq \emptyset$ e $\mathcal{O}_2 \cap U \neq \emptyset$. Assim, existem $x \in \mathcal{O}_1 \cap U$ e $y \in \mathcal{O}_2 \cap U$. Portanto, $x + y \in U + U \subset V$ e $x + y = \tilde{\oplus}(x, y) \in \tilde{\oplus}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) = \tilde{\oplus}(\tilde{\oplus}^{-1}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}$, portanto $\mathcal{O} \cap V \neq \emptyset$ e daí $a + b \in \overline{V}$. Logo, para cada $\overline{V} \in \mathcal{M}$, existe $\overline{U} \in \mathcal{M}$ tal que $\overline{U} + \overline{U} \subset \overline{V}$.

Também existe $\lambda \in K$, $0 < |\lambda| < 1$ tal que $V \in \mathcal{B}$ implica $\lambda V \in \mathcal{B}$, portanto $\overline{\lambda V} \in \mathcal{M}$. Da continuidade de $\tilde{\odot}$ se $\overline{V} \in \mathcal{M}$ implica $\lambda\overline{V} \in \mathcal{M}$. De fato, se $\lambda \cdot a \in \lambda\overline{V}$ e $\mathcal{O}$ é uma vizinhança de $\lambda \cdot a$, então $\tilde{\odot}^{-1}(\mathcal{O})$ é uma vizinhança de a. Como $a \in \overline{V}$, segue que $\tilde{\odot}^{-1}(\mathcal{O}) \cap V \neq \emptyset$. Assim, existe $x \in \tilde{\odot}^{-1}(\mathcal{O}) \cap V$. Portanto, $\lambda \cdot x = \tilde{\odot}(x) \in \mathcal{O}$ e $x \in V$, donde segue que $\lambda \cdot x \in \mathcal{O} \cap \lambda V$. Portanto, $\lambda \cdot a \in \overline{\lambda V}$ e $\lambda\overline{V} \subset \overline{\lambda V}$. Como $\overline{\lambda V}$ é o menor fechado que contém λV e $\lambda V \subset \lambda\overline{V}$ temos $\overline{\lambda V} \subset \lambda\overline{V}$. Portanto, $\lambda\overline{V} = \overline{\lambda V} \in \mathcal{M}$. Assim, existe $\lambda \in K$, $0 < |\lambda| < 1$ tal que $\overline{V} \in \mathcal{M}$ implica $\lambda\overline{V} \in \mathcal{M}$.

Assim, $\tilde{\tau}$ satisfaz as condições 1) e 3); logo, é suficiente mostrar que cada $\overline{V} \in \mathcal{M}$ contém uma $\tilde{\tau}$-vizinhança de 0 que é radial e circulada. Dado $V \in \mathcal{B}$, existe uma 0-vizinhança circulada U em L tal que $U + U \subset V$. O fecho $\overline{U + U}$ em $\tilde{L}$ é uma 0-vizinhança, é circulado (pois $U + U$ é circulado, desde que U é circulado) e contido em $\overline{V}$. Mostremos que é radial. Dado $\tilde{x} \in \tilde{L}$, existe um filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ em L convergindo para $\tilde{x}$, e um $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset U$. Seja x_0 um elemento de F tal que $x_0 \notin U$; como U é radial, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $x_0 \in \lambda U$ e como U é circulado e $x_0 \in \lambda U$, mas $x_0 \notin U$, podemos assumir que $|\lambda| \geq 1$. Agora $\overline{F - x_0} \subset U$; logo, $F \subset x_0 + U$ e, $\tilde{x} \in \overline{F} \subset \lambda\overline{U + U}$, pois $\overline{F} \subset \overline{x_0 + U} \subset \overline{\lambda U + U} = \overline{\lambda(U + \frac{1}{\lambda}U)} \subset \overline{\lambda(U + U)} = \lambda\overline{U + U}$ desde que $|\frac{1}{\lambda}| \leq 1$ e U é circulado. Logo, $\tilde{x} \in \overline{F} \subset \lambda\overline{U + U} \subset \lambda\overline{V}$, o que prova a afirmação. Finalmente, a unicidade de $(\tilde{L}, \tilde{\tau})$ segue por virtude da Proposição 2.14 e da unicidade do completamento $\tilde{L}$ do espaço uniforme L. □

Observação 2.22. A completude do corpo valorado $\mathbb{K}$ não é necessária para a construção anterior. Por outro lado, se L é um evt de Hausdorff completo, a multiplicação escalar tem uma única extensão contínua para $\tilde{\mathbb{K}} \times L$, onde $\tilde{\mathbb{K}}$ é o completamento de $\mathbb{K}$. Desse modo, segue da Proposição 2.21 que para todo evt de Hausdorff sobre $\mathbb{K}$, existe um (essencialmente único) evt de Hausdorff completo L_1 sobre $\tilde{\mathbb{K}}$ tal que o grupo topológico L é isomorfo a um subgrupo denso do grupo topológico L_1.

Proposição 2.23. *Seja L um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam τ_1, τ_2 topologias de Hausdorff sob cada uma das quais L é um evt, e tal que τ_1 é mais fina do que τ_2. Se (L, τ_1) tem uma base de vizinhança de 0 consistindo de conjuntos completos em (L, τ_2), então (L, τ_1) é completo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_1$ uma τ_1-vizinhança base de 0 em L consistindo de conjuntos completos em (L, τ_2). Dado um filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ em (L, τ_1) e $V_1 \in \mathcal{B}_1$, pela Proposição 2.17, existe um conjunto $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $F_0 - F_0 \subset V_1$.

Se y é um elemento qualquer fixado de F_0, a família $\mathcal{C} = \{y - F : F \in \mathcal{F}\}$ é um filtro base de Cauchy para a uniformidade associada a τ_2.

De fato, é um filtro base, pois:

1. $\mathcal{C} \neq \emptyset$, desde que $y - F_0 \in \mathcal{C}$, uma vez que $F_0 \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \notin \mathcal{C}$, pois se $\emptyset \in \mathcal{C}$, então existe $F \in \mathcal{F}$, tal que $y - F = \emptyset$. Mas como $\mathcal{F}$ é filtro, $\emptyset \notin \mathcal{F}$, logo concluímos que existe $\emptyset \neq F \in \mathcal{F}$ tal que $y - F = \emptyset$, o que é um absurdo, pois sendo $F \neq \emptyset$ existe $w \in F$, portanto $y - w \in y - F = \emptyset$. Logo, $\emptyset \notin \mathcal{C}$;

2. Se $y - F_1 \in \mathcal{C}$ e $y - F_2 \in \mathcal{C}$, então $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ e como $\mathcal{F}$ é filtro $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Logo, $y - F_1 \cap F_2 \in \mathcal{C}$ e $y - F_1 \cap F_2 \subset y - F_1 \cap y - F_2$.

Ainda, pela Proposição 2.14, como $\mathcal{B}_1$ é uma τ_1-vizinhança base de 0 em L consistindo de conjuntos completos em (L, τ_2), a família $N_V = \{(x, y) \in L \times L : x - y \in V\}, V \in \mathcal{B}_1$ é uma base para a uniformidade associada a τ_2.

Como, para cada 0-vizinhança $V \in \mathcal{B}_1$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset V$, pois $\mathcal{F}$ é filtro de Cauchy, então existe $y - F \in \mathcal{C}$ tal que $(y - F) - (y - F) = F - F \subset V$, assim, pela Proposição 2.17, $\mathcal{C}$ é um filtro de Cauchy, portanto para cada vizinhança W da uniformidade associada a τ_2 existe $y - F \in \mathcal{C}$ tal que $y - F \times y - F \subset W$.

Agora, pela Observação 1.20 a família $N_V, V \in \mathcal{B}_1$ gera um único filtro τ tal que $W \in \tau$ se, e somente se, existe $y - F \in \mathcal{C}$ tal que $y - F \times y - F \subset W$. Logo, $\tau = \{W : \exists\, y - F \in \mathcal{C} | y - F \times y - F \subset W\}$. Portanto, $\mathcal{C}$ é um filtro base para a uniformidade associada a τ_2.

Como V_1 é completo, τ_2 é Hausdorff e $y - F_0 \subset V_1$, segue da Definição 1.85 e Observação 1.68, que o filtro base $\mathcal{C}$ tem um único limite $y - x_0 \in V_1$ com $x_0 \in F_0$.

Assim, $x_0 \in L$ é o limite de $\mathcal{F}$ segundo a topologia τ_2.

Desde que V_1 é fechado em τ_2, pois, pela Observação 1.89, (X, τ_2) é um espaço uniforme Hausdorff e V_1 é um subespaço completo, temos $F_0 - x_0 \subset V_1$ ou $F_0 \subset x_0 + V_1$; sendo V_1 arbitrário.

Considere $x_0 + U$, onde U é uma vizinhança de 0 em τ_2. Como τ_1 é mais fina do que τ_2, então $x_0 + U$ é uma vizinhança de x_0 em τ_1. Pela Proposição 2.11, existe $x_0 + A \in \mathcal{F}$ com A vizinhança fechada de 0 em τ_1 tal que $x_0 + A \subset x_0 + U \subset L$. Logo, $x_0 + U \in \mathcal{F}$, pois $\mathcal{F}$ é um filtro.

Assim, $\mathcal{F}$ é mais fina do que o filtro de vizinhança de x_0 segundo τ_1.

Logo, pela Definição 1.49, $\mathcal{F}$ converge para $x_0 \in L$. Portanto, (L, τ_1) é completo. □

2.2 Espaços Produtos, Subespaços, Somas Diretas, Espaços Quocientes

Denotemos $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de espaços vetoriais sobre o mesmo corpo escalar $\mathbb{K}$; o produto cartesiano $L = \prod_\alpha L_\alpha$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ se para $x = (x_\alpha)$,

$y = (y_\alpha) \in L$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, adição e multiplicação por escalar são definidas por

$$\oplus(x,y) = x + y = (x_\alpha + y_\alpha) \text{ e } \odot(\lambda, x) = \lambda x = (\lambda x_\alpha).$$

Proposição 2.24. *Se $(L_\alpha, \tau_\alpha)(\alpha \in A)$ são evt sobre $\mathbb{K}$, então $L = \prod_\alpha L_\alpha$ é um evt com a topologia produto $\tau = \prod_\alpha \tau_\alpha$.*

Demonstração. Se $(L_\alpha, \tau_\alpha)(\alpha \in A)$ são evt sobre $\mathbb{K}$, então a função

$$\begin{array}{rrcl} \oplus_\alpha : & L_\alpha \times L_\alpha & \longrightarrow & L_\alpha \\ & (x_\alpha, y_\alpha) & \longmapsto & x_\alpha + y_\alpha \end{array}$$

é contínua, para cada α. Se $p_\alpha : L \longrightarrow L_\alpha$ é a projeção de L em L_α temos

$$\begin{aligned} \oplus_\alpha \circ (p_\alpha \times p_\alpha)(x,y) &= \oplus_\alpha(p_\alpha(x), p_\alpha(y)) \\ &= \oplus_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \\ &= x_\alpha + y_\alpha \\ &= p_\alpha(x+y) \\ &= p_\alpha(\oplus(x,y)) \\ &= p_\alpha \circ \oplus(x,y). \end{aligned}$$

Portanto, como p_α é contínua segue que $p_\alpha \circ \oplus$ é contínua como composta das funções contínuas $\oplus_\alpha$ e $p_\alpha \times p_\alpha$.

Assim, se $\prod_\alpha O_\alpha$ é um aberto básico da topologia produto τ de L, então como $\oplus^{-1}(\prod_\alpha O_\alpha) = (p_\alpha \circ \oplus)^{-1}(O_\alpha)$ e $p_\alpha \circ \oplus$ é contínua, segue que $\oplus^{-1}(\prod_\alpha O_\alpha)$ é aberto em $L \times L$, portanto $\oplus$ é contínua.

Também temos que a função

$$\begin{array}{rrcl} \odot_\alpha : & \mathbb{K} \times L_\alpha & \longrightarrow & L_\alpha \\ & (\lambda, x_\alpha) & \longmapsto & \lambda x_\alpha \end{array}$$

é contínua, para cada α. Como, $\odot_\alpha \circ (id_\mathbb{K} \times p_\alpha) = p_\alpha \circ \odot$, então $p_\alpha \circ \odot$ é contínua como composta das funções contínuas $\odot_\alpha$ e $id_\mathbb{K} \times p_\alpha$.

Assim, se $\prod_\alpha O_\alpha$ é um aberto básico da topologia produto τ de L, então, como $\odot^{-1}(\prod_\alpha O_\alpha) = (id_\mathbb{K} \times p_\alpha)^{-1}(\odot_\alpha^{-1}(O_\alpha))$, $id_\mathbb{K} \times p_\alpha$ é contínua e $\odot_\alpha$ é contínua, segue que $\odot^{-1}(\prod_\alpha O_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{K} \times L$, portanto $\odot$ é contínua. $\square$

Além disso, é conhecido da topologia geral que $L(\tau)$ é um espaço de Hausdorff e um espaço uniforme completo, respectivamente, se, e somente se, cada fator é.

Definição 2.25. (L, τ) será chamada de **produto** da família $\{L_\alpha(\tau_\alpha) : \alpha \in A\}$.

Como já foi apontado anteriormente, por um subespaço M de um espaço vetorial L sobre $\mathbb{K}$ entendemos um subconjunto $M \neq \emptyset$ invariante via adição e multiplicação por escalar. Recordamos as consequências mais simples dos axiomas E_1 e E_2:

Proposição 2.26. *Se (L, τ) é evt e M um subespaço de L, o fecho $\overline{M}$ em (L, τ) é um subespaço de L.*

Demonstração. De fato, como M é um subespaço de L, então $M \neq \emptyset, M + M \subset M$ e $\mathbb{K}M \subset M$. Logo, $\emptyset \neq M \subset \overline{M}$, portanto $\overline{M} \neq \emptyset$.

Segue de E_1 que $\overline{M} + \overline{M} \subset \overline{M}$, pois, de $M + M \subset M$, temos que $\overline{M + M} \subset \overline{M}$. Como $\overline{M + M}$ é o menor fechado que contém $M + M$ e $\overline{M} + \overline{M}$ é um fechado que contém $M + M$

segue que $\overline{M+M} \subset \overline{M}+\overline{M}$. Por outro lado, de E_1 segue que $\overline{M}+\overline{M} \subset \overline{M+M}$, pois se $x+y \in \overline{M}+\overline{M}$, então existem sequências de pontos $x_n, y_n \in M$ tais que x_n converge para x e y_n converge para y. Assim, de E_1, segue que $x_n+y_n \in M+M$ converge para $x+y$, portanto $x+y \in \overline{M+M}$. Logo, $\overline{M}+\overline{M} = \overline{M+M} \subset \overline{M}$.

Segue de E_2 que $\mathbb{K}\cdot\overline{M} \subset \overline{M}$, pois de $\mathbb{K}M \subset M$ temos que $\overline{\mathbb{K}M} \subset \overline{M}$. Como $\overline{\mathbb{K}M}$ é o menor fechado que contém KM e $K\overline{M}$ é um fechado que contém KM, então $\overline{\mathbb{K}M} \subset K\overline{M}$. Agora, de E_2 segue que $K\overline{M} \subset \overline{\mathbb{K}M}$, pois se $\lambda x \in K\overline{M}$ segue que $x \in \overline{M}$ e então existe uma sequência de pontos $x_n \in M$ tais que x_n converge para x. De E_2 segue que $\lambda x_n \in KM$ converge para λx, portanto $\lambda x \in \overline{\mathbb{K}M}$. Logo, $\mathbb{K}\overline{M} = \overline{\mathbb{K}M} \subset \overline{M}$.

Assim, o fecho $\overline{M}$ em (L,τ) é um subespaço de L. □

Recordemos da álgebra linear que se L é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, M_i $(i=1,\dots,n)$ são subespaços de L cujo espaço gerado é L, ou seja, os elementos de L são combinações lineares finitas de elementos desses subespaços, e tais que $M_i \cap (\sum_{j\neq i} M_j) = \{0\}$ para cada i, então L é chamado de **soma direta algébrica** dos subespaços M_i $(i=1,\dots,n)$. Segue-se que para cada $x \in L$, x possui uma única representação $x = \sum_i x_i$, onde $x_i \in M_i$, e a função $\Psi : (x_1,\dots,x_n) \longmapsto \sum_i x_i$ é um isomorfismo algébrico de $\prod_i M_i$ sobre L. De fato, a função é linear e uma bijeção, pois

1) Se $x, y \in \prod_i M_i$, então $\Psi(x+y) = \sum_i (x_i+y_i) = \sum_i x_i + \sum_i y_i = \Psi(x)+\Psi(y)$.
2) Se $x \in \prod_i M_i$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então $\Psi(\alpha x) = \sum_i(\alpha x_i) = \alpha \sum_i x_i = \alpha\Psi(x)$.
3) Como, para cada $x \in L$, x possui uma única representação $x = \sum_i x_i$, então Ψ é injetora.
4) Como L é o espaço gerado pelos subespaços M_i $(i=1,\dots,n)$, então Ψ é sobrejetora.

A função $u_i : x \longmapsto x_i$ é chamada a **projeção** de L em M_i associada com esta decomposição. Se cada u_i é visto como um endomorfismo de L, isto é,

$$u_i : x = \sum_i x_i \longmapsto x_i = 0 + \cdots + 0 + x_i + 0 + \cdots + 0$$

com x_i na i-ésima posição, tem-se as relações $u_i u_j = \delta_{ij} u_i \big(i, j = 1,\dots,n\big)$ e $\sum_i u_i = e$, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ e "e" é a aplicação identidade, pois $e = \sum_i u_i : x \mapsto \sum_i x_i = x$.

Observação 2.27. Se (L,τ) é um evt e L é decomposto algebricamente como acima, cada uma das projeções u_i é uma aplicação aberta de L sobre o evt M_i.

Demonstração. De fato, se G é um subconjunto aberto de L e N_i é o núcleo da função u_i, então, pela Proposição 2.6, item *iii)*, $G+N_i$ é um aberto de L e $u_i(G) = u_i(G+N_i) = (G+N_i)\cap M_i$, desde que $u_i(G) = \{u_i(g) : g \in G\} = \{g_i\} = \{g_i + 0\} = \{u_i(g)+u_i(n_i) : g \in G \text{ e } n_i \in N_i\} = \{u_i(g+n_i) : g \in G \text{ e } n_i \in N_i\} = u_i(G+N_i)$ e se $x \in u_i(G+N_i) \subset M_i$, então $x \in M_i$ e $x = u_i(g+n_i) = u_i(g)+u_i(n_i) = u_i(g) = g_i = g + (g_i - g) \in G+N_i$, pois $u_i(g_i-g) = u_i(g_i) - u_i(g) = g_i - g_i = 0$ e portanto $g_i - g \in N_i$. Assim, $x \in (G+N_i)\cap M_i$ e $u_i(G+N_i) \subset (G+N_i)\cap M_i$.

Por outro lado, se $y \in (G+N_i)\cap M_i$, então $y \in (G+N_i)$ e $y \in M_i$. Logo, $y = g+n_i$ com $g \in G$ e $n_i \in N_i$ e como $y \in M_i$, então $u_i(y) = y$. Assim, temos que $y = u_i(y) = u_i(g+n_i)$ com $g \in G$ e $n_i \in N_i$. Portanto, $y \in u_i(G+N_i)$. Logo, $(G+N_i)\cap M_i \subset u_i(G+N_i)$, portanto $u_i(G+N_i) = (G+N_i)\cap M_i$.

Logo, $u_i(G) = (G+N_i)\cap M_i$ com $G+N_i$ aberto em L, ou seja $u_i(G)$ é aberto em M_i, pois a topologia induzida sobre M_i é a imagem inversa da topologia τ pela inclusão $M_i \longrightarrow L$. Portanto, u_i é uma aplicação aberta. □

De E_1 segue que a função $\Psi : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_i x_i$ de $\prod_i M_i$ em L é contínua. De fato, $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \oplus(x_1, \oplus(x_2, \dots, \oplus(x_{n-1}, x_n)))$.

Se Ψ é um isomorfismo, L é chamado a **soma direta** (ou soma direta topológica se essa distinção é desejável) dos subespaços $M_i\big(i = 1, \dots, n)$; escrevemos $L = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

Proposição 2.28. *Considere o evt L como sendo a soma direta algébrica de n subespaços $M_i\big(i = 1, \dots, n\big)$. Então $L = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ se, e somente se, as projeções associadas u_i são contínuas $\Big(i = 1, \dots, n\Big)$.*

Demonstração. Da definição de topologia produto, a aplicação

$$\Psi^{-1} : x \longmapsto \Big(u_1(x), \dots, u_n(x)\big)$$

de L em $\prod_i M_i$ é contínua se, e somente se, cada u_i for contínua (prova análoga à da Proposição 1.48). □

Observação 2.29. Desde que a função identidade e é contínua em L, a continuidade de $n-1$ destas projeções implicam a continuidade da remanescente.

Definição 2.30. Um subespaço N de um evt L, tal que $L = M \oplus N$, é chamado um subespaço **complementar** ou **suplementar** para M; tais subespaços complementares não necessariamente existem, mesmo se M for de dimensão finita.

Seja (L, τ) um evt sobre $\mathbb{K}$, seja M um subespaço de L, e seja ϕ a **aplicação natural (canônica, quociente)** de L sobre L/M - isto é, a aplicação que associa a cada $x \in L$ sua classe de equivalência $\widehat{x} = x + M$. A **topologia quociente** $\widehat{\tau}$ é definida como sendo a topologia mais fina sobre L/M para o qual ϕ é contínua. Portanto, os conjuntos abertos em L/M são os conjuntos $\phi(H) = \bigcup\limits_{h \in H} \left\{\widehat{h}\right\}$ tais que $H + M$ é aberto em L, pois

$$\phi^{-1}(\phi(H)) = \phi^{-1}\left(\bigcup_{h \in H} \left\{\widehat{h}\right\}\right) = \bigcup_{h \in H} \phi^{-1}(\left\{\widehat{h}\right\}) = \bigcup_{h \in H} \bigcup_{m \in M} \{h + m\} = H + M \text{ é aberto em }$$

L.

Desde que $G + M$ é aberto em L sempre que G o é (Proposição 2.6, item *iii*)), $\phi(G)$ é aberto em L/M para todo aberto $G \subset L$. Logo, ϕ é uma aplicação aberta. Segue que $\phi(\mathcal{B})$ é uma 0-vizinhança base de L/M para toda 0-vizinhança base $\mathcal{B}$ de L.

Como, pela Proposição 2.6 item *i*)), todas as translações em L/M são homeomorfismos, então $\widehat{\tau}$ é translação-invariante.

Desde que ϕ é linear, $\widehat{\tau}$ é translação-invariante e $\phi(\mathcal{B})$ satisfaz as condições 1), 2) e 3) da Proposição 2.8 se estas condições são satisfeitas por $\mathcal{B}$, segue que $(L/M, \widehat{\tau})$ é um evt sobre $\mathbb{K}$ denominado o **espaço quociente** de (L, τ) sobre M.

Lema 2.31. *Para um espaço vetorial topológico L ser Hausdorff, é necessário e suficiente que o conjunto $\{0\}$ seja fechado em L.*

Demonstração. Suponha que L seja Hausdorff e que $\{0\} \neq \overline{\{0\}}$, isto é, existe $x \neq 0$ pertencendo ao $\overline{\{0\}} \subset L$. Como L é Hausdorff, existem U_x e U_0 vizinhanças de x e 0, respectivamente, tais que $U_x \cap U_0 = \emptyset$. Mas como $x, 0 \in \overline{\{0\}}$, $U_x \cap \{0\} \neq \emptyset$ e $U_0 \cap \{0\} \neq \emptyset$, donde segue que $0 \in U_x \cap U_0$, o que é um absurdo, portanto $\{0\} = \overline{\{0\}}$ e $\{0\}$ é fechado em L.

Para a recíproca, pela Proposição 2.20, basta mostrarmos que a interseção de todas as vizinhanças de zero em L é o fecho de $\{0\}$. De fato, se $x \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$, então toda vizinhança U de 0 em L contém x, ou seja, $0 \in x - U, \forall U \in \mathcal{U}$. Mas $x - U$ é uma vizinhança arbitrária de x, pois a multiplicação por -1 é um homeomorfismo. Logo, toda vizinhança de x contém a origem, ou seja, $x \in \overline{\{0\}}$. Por outro lado, suponha que toda vizinhança V de x contém 0. Como tal vizinhança pode ser escrita como $x - U$, onde U é uma vizinhança arbitrária de 0 (basta tomar $U = x - V$) e $0 \in x - U$, segue que U contém x, pois $0 = x - u$, para algum $u \in U$, assim $x = u \in U$. Portanto, como U é uma vizinhança arbitrária de 0, $x \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Logo, $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\} = \overline{\{0\}}$. □

Proposição 2.32. *Se L é um evt e se M é um subespaço de L, então L/M é um espaço de Hausdorff se, e somente se, M é fechado em L.*

Demonstração. Se L/M é Hausdorff, o conjunto $\{0 + M\} \subset L/M$ é fechado, pelo Lema 2.31. Pela continuidade de ϕ, $M = \phi^{-1}(\{0 + M\})$ é fechado em L. Por outro lado, se M é fechado em L, então $L \setminus M$ é aberto em L e como ϕ é uma aplicação aberta, $\phi(L \setminus M) = L/M - \{0 + M\}$ é aberto em L/M. Logo, $\{0 + M\} \subset L/M$ é fechado em L/M e então, pelo Lema 2.31, L é Hausdorff. □

Observação 2.33. Pela Proposição 2.32 e o Lema 2.31, todo evt Hausdorff L pode ser associado ao evt de Hausdorff L/M tomando por M o fecho do subespaço $\{0\}$ em L. Temos que M é um subespaço de L pela Proposição 2.26. Este espaço L/M é denominado de evt de Hausdorff associado ao evt Hausdorff L.

Existe a seguinte relação, digna de nota, entre quocientes e somas diretas:

Proposição 2.34. *Seja L o evt dado pela soma direta algébrica dos subespaços M, N. Então L é a soma direta topológica de M e N: $L = M \oplus N$ se, e somente se, a aplicação v que associa a cada classe de equivalência mod M sua única representação em N é um isomorfismo do evt L/M sobre o evt N.*

Demonstração. Denote por u a projeção de L sobre N, $m + n \longmapsto n$, e por ϕ a aplicação natural de L sobre L/M, $m+n \longmapsto n+M$. Então $u = v \circ \phi$. Seja $L = M \oplus N$. Desde que ϕ é aberta e u é contínua (Proposição 2.28), então v é contínua, pois, para todo aberto V de N, $u^{-1}(V) = \phi^{-1}(v^{-1}(V))$ é aberto de L, ou equivalentemente, $v^{-1}(V)$ é aberto em L/M.

Desde que ϕ é contínua e u é aberta, v é aberta, pois se $V \subset L/M$ é aberto em L/M, então $\phi^{-1}(V)$ é aberto em L, e como u é aberta e ϕ é sobrejetora, $v(V) = v(\phi(\phi^{-1}(V))) = v \circ \phi(\phi^{-1}(V)) = u(\phi^{-1}(V))$ é aberto em N.

Ainda v é bijetora, pois dado $n \in N$ temos $v(0 + n + M) = n$ e se $v(m_1 + n_1 + M) = v(m_2+n_2+M)$, então $n_1 = n_2$, portanto $m_1+n_1+M = n_1+M = n_2+M = m_2+n_2+M$, pois $m_1, m_2 \in M$.

Logo, v é um isomorfismo pela Proposição 1.46.

Por outro lado, se v é um isomorfismo, então v é contínua; portanto u é contínua o que implica, pela Proposição 2.28, $L = M \oplus N$. □

2.3 Espaços Vetoriais Topológicos de Dimensão Finita

Definição 2.35. Por **dimensão** de um espaço vetorial topológico L sobre $\mathbb{K}$, entendemos a dimensão algébrica de L sobre $\mathbb{K}$, isto é, a cardinalidade maximal de qualquer subconjunto de L linearmente independente; tal conjunto é chamado uma **base** de L.

Denotemos $\mathbb{K}_0$ o evt unidimensional obtido considerando-se $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre si mesmo.

Lema 2.36. *Sejam E, F dois espaços vetoriais topológicos, u uma transformação linear de E em F. A aplicação u é contínua se, e somente se, u é contínua em 0.*

Demonstração. De fato, uma vizinhança arbitrária de $u(x) \in F$, para $x \in E$, é da forma $u(x) + V$, onde V é uma vizinhança de 0_F em F. Como u é uma aplicação linear, temos que $u^{-1}(u(x) + V) \supset x + u^{-1}(V)$. Se u é contínua em 0_F, $u^{-1}(V)$ é uma vizinhança de 0_E em E. Logo, $u^{-1}(u(x)+V)$ é uma vizinhança de x em E, portanto u é contínua. Se u é contínua, então u é contínua em todos os pontos de seu domínio, logo u é contínua em 0_E. □

Proposição 2.37. *Todo evt L sobre $\mathbb{K}$, Hausdorff e unidimensional é isomorfo a $\mathbb{K}_0$; mais precisamente, $\lambda \longmapsto \lambda x_0$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}_0$ sobre L para cada $x_0 \in L$, $x_0 \neq 0$, e todo isomorfismo de $\mathbb{K}_0$ sobre L é desta forma.*

Demonstração. Segue de E_2 que $\lambda \longmapsto \lambda x_0$ é contínua para cada $x_0 \in L$; além disso, essa aplicação é um isomorfismo algébrico de $\mathbb{K}_0$ sobre L. Pelo Lema 2.36, para ver que $\lambda x_0 \longmapsto \lambda$ é contínua, é suficiente mostrar a continuidade desta aplicação em $0_L \in L$. Seja $0 < \epsilon < 1$. Como $\mathbb{K}$ não é discreto, existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\lambda_0| < \epsilon$ e, desde que L é assumido ser Hausdorff, existe uma 0-vizinhança circulada $V \subset L$ tal que $\lambda_0 x_0 \notin V$. Portanto, $\lambda x_0 \in V$ implica $|\lambda| < \epsilon$; pois se $|\lambda| \geq \epsilon > |\lambda_0|$, então $\frac{|\lambda_0|}{|\lambda|} < 1$, o que implicaria $\lambda_0 x_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda}(\lambda x_0) \in V$, visto que V é circulado, o que é uma contradição.

Portanto, para todo $\lambda x_0 \in V$, temos $|\lambda| < \epsilon$, assim $\lambda x_0 \longrightarrow \lambda$ é contínua.

Finalmente, se u é um isomorfismo de $\mathbb{K}_0$ sobre L tal que $u(1) = x_0$, então u é da forma $\lambda \longmapsto \lambda x_0$. □

Teorema 2.38. *Todo evt Hausdorff L de dimensão finita n sobre um corpo valorado completo $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{K}_0^n$. Mais precisamente, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ é um isomorfismo de $\mathbb{K}_0^n$ sobre L para cada base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de L, e todo isomorfismo de $\mathbb{K}_0^n$ sobre L é desta forma.*

Demonstração. A prova será feita por indução. A Proposição 2.37 implica que afirmação é válida para $n = 1$. Assumamos ser válida para $k = n - 1$. Se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base qualquer de L, L é a soma direta algébrica dos subespaços M e N com bases $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ e $\{x_n\}$, respectivamente. Pela hipótese de indução,

$$\varphi : \mathbb{K}_0^{n-1} \longrightarrow M, (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \longmapsto \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

é um isomorfismo. Desde que $\mathbb{K}_0$ é completo, segue pela Observaçao 1.90, que $\mathbb{K}_0^{n-1}$ é completo, portanto M é completo e desde que L é Hausdorff, segue, pela Observação 1.89, que M é fechado em L. Pela Proposição 2.32, L/M é Hausdorff e de dimensão 1, pois a transformação $L/M \longrightarrow N$, $m + n + M = n + M \longmapsto n$ é um isomorfismo algébrico.

Logo, pela Proposição 2.37, temos que L/M e N são isomorfos a $\mathbb{K}_0$ via as transformações $t : \lambda\,(x_n + M) \longmapsto \lambda$ e $u : \lambda \longmapsto \lambda x_n$, respectivamente, portanto L/M é isomorfo a N via $v =: u \circ t : \lambda\,(x_n + M) \longmapsto \lambda x_n$. Segue, da Proposição 2.34, que L é a soma direta topológica de M e N: $L = M \oplus N$, ou seja,

$$w : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n$$

é um isomorfismo de $\mathbb{K}_0^n$ sobre L, pois $w = \Psi \circ p$, onde

$$p : \mathbb{K}_0^n \longrightarrow M \times N, (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \longmapsto (\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), u(\lambda_n))$$
e
$$\Psi : M \times N \longrightarrow L, (m, n) \longmapsto m + n,$$

são isomorfismos. Finalmente, se h é um isomorfismo de $\mathbb{K}_0^n$ sobre L, então o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, onde $x_j = h(e_j), j = 1, \ldots, n$ é uma base de L (aqui $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota a base canônica de $\mathbb{K}_0^n$), portanto h é da forma $h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) = h(\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_n e_n) = \lambda_1 h(e_1) + \cdots + \lambda_n h(e_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. □

Observação 2.39. O Teorema 2.38 pode ser reafirmado dizendo que se $\mathbb{K}$ é um corpo valorado completo, então a topologia produto sobre $\mathbb{K}_0^n$ é a única topologia de Hausdorff que satisfaz E_1 e E_2. Isso tem várias consequências importantes.

Proposição 2.40. *Seja L um evt sobre um corpo completo $\mathbb{K}$. Se M é um subespaço fechado de L e N é um subespaço de dimensão finita de L, então $M + N$ é fechado em L.*

Demonstração. Denotemos ϕ a aplicação natural de L sobre L/M; das Proposições 1.74, 2.14 e Definição 1.76 temos que L/M é um espaço uniforme e da Proposição 2.32 temos que L/M é Hausdorff. Desde que $\phi(N)$ é um subespaço de dimensão finita de L/M, pois N é um subespaço de dimensão finita de L; $\phi(N)$ é completo pelo Teorema 2.38, pois $\phi(N)$ é isomorfo a $\mathbb{K}_0^n$, portanto $\phi(N)$ é fechado em L/M, conforme Observação 1.89. Isso implica que $M + N = \phi^{-1}(\phi(N))$ é fechado, dado que ϕ é contínua. □

Proposição 2.41. *Seja $\mathbb{K}$ completo, seja N um evt, Hausdorff e de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e seja L qualquer evt sobre $\mathbb{K}$. Toda transformação linear de N em L é contínua.*

Demonstração. O resultado é trivial se N tem dimensão 0, pois neste caso a transformação linear de $N = \{0_N\}$ em L é a transformação nula $O : 0_N \longmapsto 0_L$ que é contínua em 0_N, pois para cada vizinhança V de 0_L, $O^{-1}(V)$ é uma vizinhança de 0_N. Se N tem dimensão positiva n, N é isomorfo a $\mathbb{K}_0^n$ pelo Teorema 2.38. Mas toda transformação linear de $\mathbb{K}_0^n$ em L é necessariamente da forma $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$, onde $y_i \in L$, portanto é continua por E_1 e E_2. □

Observação 2.42. Lembramos que a **codimensão** de um subespaço M de um espaço vetorial L é a dimensão de L/M; N é um **algébrico complementar** de M se $L = M + N$ é uma soma direta algébrica.

Proposição 2.43. *Sejam L um evt sobre um corpo completo $\mathbb{K}$ e M um subespaço fechado de codimensão finita. Então $L = M \oplus N$ para todo subespaço algébrico complementar N de M.*

Demonstração. L/M é um evt de dimensão finita, o qual é Hausdorff pela Proposição 2.32. Logo, pelo Teorema 2.38, a aplicação v de L/M sobre N, que associa a cada elemento de L/M seu único representante em N, é contínua. Pela Proposição 2.28, isto implica que $L = M \oplus N$, desde que a projeção $u = v \circ \phi$ (onde ϕ é a aplicação natural) é contínua. □

Observação 2.44. Segue-se da Proposição 2.34 que nas condições da Proposição 2.43, N é necessariamente um subespaço de Hausdorff de L.

Definição 2.45. Um ponto x de um evt L é chamado um **ponto de acumulação** de um filtro $\mathcal{F}$ se x pertence ao fecho de todo conjunto que pertence ao filtro $\mathcal{F}$.

Proposição 2.46. *Se um filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ sobre o evt L tem um ponto de acumulação x, então ele converge para x, isto é, $x + U \in \mathcal{F}$ para qualquer U vizinhança de 0.*

Demonstração. Sejam U uma vizinhança arbitrária de 0 e V uma outra vizinhança de 0 tal que $V+V \subset U$ conforme Proposição 2.8, item 1). Pela Proposição 2.17 existe um conjunto $M \in \mathcal{F}$ tal que $M - M \subset V$. Por outro lado, como x é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$, então $x \in \overline{M}$ e desde que $x+V$ é uma vizinhança de x, segue que $M \cap (x+V) \neq \emptyset$. Logo, $M - [M \cap (x+V)] \subset M - M \subset V$, ou

$$M \subset V + M \cap (x+V) \subset V + (x+V) \subset x + V + V \subset x + U.$$

Assim, $M \subset x + U \subset L$ e, portanto, pela Definição 1.17, segue que $x + U \in \mathcal{F}$. Logo, $\mathcal{F}$ converge para x. $\square$

Observação 2.47. Observamos que a Definição 1.49 é equivalente a dizer que $x+U \in \mathcal{F}$ para qualquer U vizinhança de 0.

Proposição 2.48. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Se X é compacto, então todo filtro sobre X tem pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ um filtro qualquer sobre X, e considere a família de conjuntos fechados $\overline{M}$ quando M varia sobre $\mathcal{F}$. Note que nenhuma interseção finita de conjuntos $\overline{M}$ pode ser vazia devido à Definição 1.17, itens 1) e 3) do filtro $\mathcal{F}$. Como X Hausdorff é compacto segue, da Proposição 1.107, que $\bigcap\limits_{M \in \mathcal{F}} \overline{M} \neq \emptyset$, uma vez que mostramos que nenhuma interseção finita de $\overline{M}$ pode ser vazia. Portanto, $\mathcal{F}$ tem pelo menos um ponto de acumulação. $\square$

Corolário 2.49. *Um subconjunto compacto de um evt Hausdorff é completo.*

Demonstração. Seja M um subconjunto compacto de um evt Hausdorff L. Pela Proposição 2.48 todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ sobre M tem pelo menos um ponto de acumulação. Logo, pela Proposição 2.46, todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ sobre M converge para um elemento de M e, portanto, de acordo com a Definição 1.85, M é completo. $\square$

Passamos agora ao segundo teorema importante referente aos espaços vetoriais topológicos de dimensão finita. Pelo Teorema 2.38, se $\mathbb{K}$ é localmente compacto (portanto completo), então todo espaço vetorial topológico, Hausdorff de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ é localmente compacto. Reciprocamente, temos o

Teorema 2.50. *Seja $\mathbb{K}$ completo. Se $L \neq \{0\}$ é um evt localmente compacto Hausdorff sobre $\mathbb{K}$, então $\mathbb{K}$ é localmente compacto e L é de dimensão finita.*

Demonstração. Pela Proposição 2.37 todo subespaço unidimensional de L é completo, pois esse espaço é isomorfo a $\mathbb{K}_0$, logo fechado em L (Observação 1.89), portanto localmente compacto pela Proposição 1.111. Segue-se que $\mathbb{K}$ é localmente compacto. Agora, seja V uma 0-vizinhança circulada compacta em L, e seja $\{\lambda_n\}$ uma sequência quase nula em $\mathbb{K}$, isto é, $\lambda_n = 0$ exceto um número finito de termos. Mostraremos primeiro que $\{\lambda_n V : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de vizinhança de 0 em L. Dado uma 0-vizinhança U, escolha uma 0-vizinhança circulada W tal que $W + W \subset U$. Desde que V é compacto, existem elementos $x_i \in V (i = 1, \ldots, k)$ satisfazendo $V \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} (x_i + W)$, e existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, tal que $\lambda x_i \in W$ para todo i e $|\lambda| \leq 1$. Existe $n \in \mathbb{N}$ para o qual $|\lambda_n| \leq |\lambda|$, e

$$\lambda_n V \subset \lambda V \subset \bigcup_{i=1}^{k} (\lambda x_i + \lambda W) \subset W + W \subset U$$

mostra que $\mathcal{B} = \{\lambda_n V : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de vizinhança de 0, pois $\emptyset \notin \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e dados $\lambda_{n_1}V, \lambda_{n_2}V \in \mathcal{B}$ temos que $\lambda_{n_1}V \cap \lambda_{n_2}V \in \mathcal{B}$, assim existe $\lambda_{n_3}V \in \mathcal{B}$ tal que $\lambda_{n_3}V = \lambda_{n_1}V \cap \lambda_{n_2}V$, portanto $\lambda_{n_3}V \subset \lambda_{n_1}V \cap \lambda_{n_2}V$.

Suponha que $\rho \in \mathbb{K}$ satisfaz $0 < |\rho| \leq \frac{1}{2}$. Desde que V é compacto e ρV é um 0-vizinhança, existem elementos $y_l (l = 1, \ldots, m)$ em V para qual $V \subset \bigcup_{l=1}^{m}(y_l + \rho V)$. Denotemos por M o menor subespaço de L contendo todos $y_l (l = 1, \ldots, m)$ e mostremos que $M = L$, o que completará a prova. Assumindo que $M \neq L$, existe $w \in L \setminus M$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(w + \lambda_{n_0}V) \cap M = \emptyset$, pois M é fechado em L, desde que M é de dimensão finita, Hausdorff como subespaço de L e, portanto, pelo Teorema 2.38, M é isomorfo a $\mathbb{K}_0^p$, assim completo; e, pela Observação 1.89, M é fechado em L enquanto $\{w + \lambda_n V : n \in N\}$ é uma vizinhança base de w e $w \notin M = \overline{M}$. Seja μ qualquer número em $\mathbb{K}$ tal que $w + \mu V$ intersecta M. Tais números existem, pois, como V é radial, existe $\mu \in \mathbb{K}$ tal que o subconjunto $\{y_1 - w, \ldots, y_m - w\}$ de L está contido em λV sempre que $|\lambda| \geq |\mu|$. Assim, $\{y_1 - w, \ldots, y_m - w\} \subset \mu V$. Logo, para todo $y_i, i = 1, \ldots, m$, temos que $y_i \in M$ e como $y_i = w + (y_i - w)$ e $y_i - w \in \mu V, i = 1, \ldots m$, então $y_i \in w + \mu V$, ou seja, $(w + \mu V) \cap M \neq \emptyset$. Defina $\delta = inf|\mu|$, então $\delta \geq |\lambda_{n_0}| > 0$, pois $|\lambda_{n_0}| \leq |\mu|, \forall |\mu|$ tal que $(w + \mu V) \cap M \neq \emptyset$, uma vez que se existir μ_0 tal que $w + \mu_0 V \cap M \neq \emptyset$ e $|\mu_0| < |\lambda_{n_0}|$, então $|\lambda_{n_0}^{-1}\mu_0| < 1$ e como V é 0-vizinhança circulada $\lambda_{n_0}^{-1}\mu_0 V \subset V$, portanto $\mu_0 V \subset \lambda_{n_0}V$. Assim, $w + \mu_0 V \subset w + \lambda_{n_0}V$ e portanto $(w + \mu_0 V) \cap M \subset (w + \lambda_{n_0}V) \cap M = \emptyset$, o que dá uma contradição.

Escolha $v_0 \in V$ tal que $y = w + \mu_0 v_0 \in M$, onde $\delta \leq |\mu_0| \leq \frac{3\delta}{2}$. Pela definição de $\{y_l\}$ existe l_0, $1 \leq l_0 \leq m$, tal que $v_0 = y_{l_0} + \rho v_1$, onde $v_1 \in V$ e portanto

$$w = y - \mu_0 v_0 = (y - \mu_0 y_{l_0}) - \mu_0 \rho v_1 \in M + \mu_0 \rho V,$$

desde que V é circulado, portanto $-V \subset V$. Isto contradiz a definição de δ, desde que $-V \subset V$ e $|\mu_0 \rho| \leq \frac{3\delta}{4}$, pois $w = m + \mu_0 \rho v$, $m \in M$,
$v \in V$ implica $w - \mu_0 \rho v \in (w + \mu_0 \rho V) \cap M$ e portanto $|\mu_0 \rho| \in \{\ |\mu| : (w + \mu V) \cap M \neq \emptyset\}$ donde segue que $\delta \leq |\mu_0 \rho|$, o que dá uma contradição, pois $|\mu_0 \rho| = |\mu_0||\rho| \leq \frac{3\delta}{2}\frac{1}{2} = \frac{3\delta}{4} < \delta$. Portanto, a hipótese $M \neq L$ é um absurdo. □

2.4 Variedades Lineares e Hiperplanos

Definição 2.51. Se L é um espaço vetorial, uma **variedade linear** (ou **subespaço afim**) em L é um subconjunto que é uma translação de um subespaço $M \subset L$, isto é, um conjunto F da forma $x_0 + M$ para algum $x_0 \in L$.

Proposição 2.52. *F determina M unicamente enquanto determina x_0 apenas mod M: $x_0 + M = x_1 + N$ se, e somente se, $M = N$ e $x_1 - x_0 \in M$.*

Demonstração. Se $x_0 + M = x_1 + N, \forall x_0, x_1 \in L$, então para $x_0 = x_1 = 0$ temos que $0 + M = 0 + N$, o que implica $M = N$. Assim, $x_0 + M = x_1 + M$, portanto $x_0 + m = x_1 + n$ para alguns $m, n \in M$. Logo, $x_1 - x_0 = m - n \in M$, pois M é um subespaço de L. Por outro lado, se $M = N$ e $x_1 - x_0 \in M$, temos que se $x \in x_0 + M$, então $x = x_0 + m$, para algum $m \in M = N$. Desde que $x_1 - x_0 \in M = N$ segue que $x_1 - x_0 = n \in N$, portanto $x_0 = x_1 - n, n \in N$. Logo, $x = x_0 + m = x_1 - n + m \in x_1 + N$ desde que $m, n \in N$ e N é um subespaço de L. Portanto, $x_0 + M \subset x_1 + N$. Agora, se $x \in x_1 + N$, então $x = x_1 + n$, para algum $n \in N = M$. Desde que $x_1 - x_0 \in M$ segue que $x_1 - x_0 = m \in M$, portanto

$x_1 = x_0 + m, m \in M$. Logo, $x = x_1 + n = x_0 + m + n \in x_0 + M$ desde que $m, n \in M$ e M é um subespaço de L. Portanto, $x_1 + N \subset x_0 + M$. Logo, $x_0 + M = x_1 + N$. □

Definição 2.53. Duas variedades lineares x_0+M e x_1+N são ditas **paralelas** se $M \subset N$ ou $N \subset M$.

Definição 2.54. A **dimensão** de uma variedade linear é a dimensão do subespaço da qual ela é uma translação.

Definição 2.55. Um **hiperplano** em L é um subespaço afim, próprio e maximal de L.

Assim, o subespaço correspondente de um hiperplano é de codimensão 1.

Observação 2.56. Dois hiperplanos em L são paralelos se, e somente se, seus subespaços correspondentes M e N são idênticos.

Demonstração. Se x_0+M e x_1+N são paralelos, então $M \subset N$ ou $N \subset M$. Supondo que $M \subset N$ devemos provar que $N = M$, pois se $M \subset N$, $x_0 + M \subset x_0 + N$ e como $x_0 + M$ é um subespaço afim, próprio e maximal de L, então $x_0 + M = x_0 + N$ e, portanto, pela Proposição 2.52, segue que $M = N$. Reciprocamente, se $M = N$, então $M \subset N$, logo $x_0 + M$ e $x_1 + N$ são paralelos. □

Definição 2.57. Um hiperplano que é um subespaço (isto é, um hiperplano contendo o 0) é algumas vezes chamado de **hiperplano homogêneo**.

Definição 2.58. Para qualquer espaço vetorial L sobre $\mathbb{K}$, denotamos por L^* o **dual algébrico** de L, isto é, o espaço vetorial (à direita) (sobre $\mathbb{K}$) de todas as formas lineares sobre L.

Proposição 2.59. *Um subconjunto $H \subset L$ é um hiperplano se, e somente se, $H = \{x : f(x) = \alpha\}$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$ e alguma $f \in L^*, f \neq 0$. f e α são determinados por H a partir de um fator comum $\beta, 0 \neq \beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Se $f \in L^*$ é diferente de 0, então $M = f^{-1}(0)$ é um subespaço (Observação 1.127) próprio maximal de L; como $f \in L^*$ é diferente de 0, então existe $x_0 \in L$ tal que $f(x_0) \neq 0$, logo $x_0 \notin M$ e M é um subespaço próprio de L; agora, suponha que N é um subespaço próprio de L tal que $M \subset N$ e $M \neq N$. Então existe $n \in N$ tal que $f(n) \neq 0$. Note que para qualquer $x \in L$, $y = x - (f(x)f(n)^{-1})\, n \in M$, pois $f(y) = f(x - (f(x)f(n)^{-1})\, n) = f(x) - f(x) = 0$ e como $M \subset N$, $y \in N$. Logo, $x = y + (f(x)f(n)^{-1})\, n \in N$ e $L = N$ o que é um absurdo, portanto $M = N$; se, além disso, $x_0 \in L$ é tal que $f(x_0) = \alpha$, então $H = \{x : f(x) = \alpha\} = x_0 + M$, pois $x_0 + M \subset H$ desde que se $x \in x_0 + M$, então $f(x) = f(x_0)$ e se $f(x) = f(x_0)$, então $x - x_0 \in M$ donde segue que $H \subset x_0 + M$. Note que H é um subespaco afim próprio de L, pois $0 \notin H$ desde que $f(x_0) \neq 0$ e ainda se $x_0 + M \subset x_1 + R \subset L$, como M é subespaço de L, $x_0 = x_0 + 0 \in x_1 + R$, portanto $x_0 - x_1 \in R$. Note que $M \subset R$, pois se $y \in M$, então $x_0 + y \in x_1 + R$, assim existe $r \in R$ tal que $x_0 + y = x_1 + r$, portanto $y = -(x_0 - x_1) + r \in R$. Mas M é maximal e daí $M = R$ e como $x_0 - x_1 \in R = M$ segue, pela Proposição 2.52, que $x_0 + M = x_1 + R$, portanto $x_0 + M$ é maximal. Logo, H é um hiperplano. Reciprocamente, se H é um hiperplano, então $H = x_0 + M$, onde M é um subespaço de L tal que $\dim L/M = 1$, de modo que L/M é algebricamente isomorfo a $\mathbb{K}_0$. Denotando por ϕ a aplicação natural de L sobre L/M e por g um isomorfismo de L/M sobre $\mathbb{K}_0$, então $f = g \circ \phi$ é uma forma linear não nula sobre L tal que $H = \{x : f(x) = \alpha\}$, quando $\alpha = f(x_0)$. Se $\{x : f_1(x) = \alpha_1\}$ é uma outra representação de H, então por causa que $f_1^{-1}(0) = M$, devemos ter $f_1 = g_1 \circ \phi$, onde g_1 é um isomorfismo de L/M sobre $\mathbb{K}_0$; se ξ é um elemento de L/M para o qual $g(\xi) = 1$ e se $g_1(\xi) = \beta$, então, sendo g injetor, de $g(\phi(x)) = f(x) = f(x)1 = f(x)g(\xi) = g(f(x)\xi)$ segue $\phi(x) = f(x)\xi$. Logo, $f_1(x) = g_1(\phi(x)) = g_1(f(x)\xi) = f(x)g_1(\xi) = f(x)\beta$ para todo $x \in L$, completando assim a prova. $\square$

Proposição 2.60. *Um hiperplano H em um evt L é fechado ou denso em L;*
$H = \{x : f(x) = \alpha\}$ é fechado se, e somente se, f é contínua.

Demonstração. Se um hiperplano $H \subset L$ não é fechado, deve ser denso em L, caso contrário, seu fecho seria um subespaço próprio afim de L, contradizendo a maximilidade de H. Para provar a segunda afirmação, é suficiente mostrar que $f^{-1}(0)$ é fechado se, e somente se, f é contínua. Se f é contínua, $f^{-1}(0)$ é fechado, desde que $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{K}$. Se $f^{-1}(0)$ é fechado em L, então $L/f^{-1}(0)$ é evt Hausdorff pela Proposição 2.32, de dimensão 1; escrevendo $f = g \circ \phi$ como na prova anterior, a Proposição 2.37 implica que g é contínua, portanto f, é contínua. $\square$

2.5 Conjuntos Limitados

Definição 2.61. Um subconjunto A de um evt L é chamado **limitado** se para cada 0-vizinhança U em L, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A \subset \lambda U$.

Proposição 2.62. *$A \subset L$ é limitado se, e somente se, cada 0-vizinhança absorve A.*

Demonstração. De fato, desde que, pela Proposição 2.8, τ é translação-invariante e pelo item 2), as 0-vizinhanças circuladas em L formam uma base em 0, se $A \subset L$ é limitado e $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças de 0, então, pelo item 1), para cada vizinhança U da origem em L, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset V+V \subset U$. Como A é limitado, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A \subset \lambda V$. Então, tomando $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ com $|\mu| \geq |\lambda|$, segue que para $\rho = \mu^{-1}\lambda$, temos $|\rho| \leq 1$. Como V é circulado, $\rho V \subset V$ e como $A \subset \lambda V$, segue que $\mu^{-1}A \subset \mu^{-1}\lambda V = \rho V \subset V$, portanto $A \subset \mu V \subset \mu U$. Portanto, U absorve A, pois existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que $A \subset \mu U$, sempre que $|\mu| \geq |\lambda|$. Reciprocamente, se cada 0-vizinhança U em L absorve A, então existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que $A \subset \lambda U$ sempre que $|\lambda| \geq |\lambda_0|$. Em particular $A \subset \lambda_0 U$ e portanto $A \subset L$ é limitado. $\square$

Definição 2.63. Um **sistema fundamental** ou uma **família fundamental** de conjuntos limitados de L é uma família $\mathcal{B}$ de conjuntos limitados tal que todo subconjunto limitado de L está contido em um membro adequado de $\mathcal{B}$.

Definição 2.64. Um subconjunto B de um evt Hausdorff L é chamado **totalmente limitado** se para cada 0-vizinhança U em L existe um subconjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $B \subset B_0 + U$.

Observação 2.65. Segue diretamente da Proposição 2.14 e Proposição 1.113 (tomando $X = L, W = N_U = \{(x,y) \in X \times X : x - y \in U\}$, $W(x) = \{y : (x,y) \in W\} = x + U$ e sendo U circulada $-U \subset U$) que um subconjunto B de um evt Hausdorff é pré-compacto se, e somente se, é totalmente limitado, desde que, existir um subconjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $B \subset \bigcup\{x + U : x \in B_0\}$, para cada 0-vizinhança U da origem é equivalente a dizer que existe um subconjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $B \subset B_0 + U$, para cada 0-vizinhança U da origem.

Usaremos o termo pré-compacto exclusivamente ao lidar com espaços de Hausdorff. Dos passos anteriores obtemos uma caracterização alternativa de conjuntos pré-compactos: *Um subconjunto B de um evt de Hausdorff L é pré-compacto se, e somente se, o fecho de B no completamento $\tilde{L}$ de L é compacto.* De fato, temos que um subconjunto B de um evt de Hausdorff L é pré-compacto se, e somente se, é totalmente limitado, isto é, existe um subconjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $B \subset B_0 + U$, para cada 0-vizinhança U em L, portanto existe um subconjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $\overline{B} \subset \overline{B_0 + U} = \bigcap B_0 + U + W$, para cada 0-vizinhanças U e W em L. Pela Proposição 2.8, para cada $\overline{U}$, existe $\overline{V}$ tal que $\overline{V} + \overline{V} \subset \overline{U}$. Assim, $\overline{B} \subset B_0 + V + V \subset B_0 + \overline{V} + \overline{V} \subset B_0 + \overline{U} = \bigcup \left\{ x + \overline{U} : x \in B_0 \right\}$. Logo, $\overline{B}$ é compacto. Reciprocamente, se $\overline{B}$ é compacto em $\tilde{L}$, existe um subconjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $\overline{B} \subset \bigcup \left\{ x + \overline{U} : x \in B_0 \right\}$ para cada 0-vizinhança $\overline{U}$ em $\tilde{L}$. Assim, $B \subset \bigcup \left\{ x + \iota^{-1}(\overline{U}) : x \in B_0 \right\}$, onde $\iota : L \longrightarrow \tilde{L}$ é um isomorfismo. Portanto, $B \subset B_0 + \iota^{-1}(\overline{U})$ para cada 0-vizinhança $\overline{U}$ em $\tilde{L}$. Logo, B é totalmente limitado e, pela Observação 2.65, segue que B é pré-compacto.

Definição 2.66. O **conjunto gerado circulado** de um subconjunto B do evt L, denotado por circ B, é o menor subconjunto circulado de L contendo B.

Para a prova da Proposição 2.69 abaixo, necessitaremos dos dois Lemas a seguir:

Lema 2.67. *O conjunto gerado circulado de todo conjunto totalmente limitado em um evt Hausdorff L é totalmente limitado se, e somente se, o conjunto gerado circulado de todo conjunto finito em um evt Hausdorff L é totalmente limitado.*

Demonstração. Suponha que o conjunto gerado circulado de todo conjunto totalmente limitado em L é totalmente limitado. Assim, se D_0 é um subconjunto finito de L, então D_0 é totalmente limitado. Logo, por hipótese, circ D_0 é totalmente limitado. Reciprocamente, suponha que o conjunto gerado circulado de um conjunto finito de L é totalmente limitado. Assim, se V é uma 0-vizinhança qualquer, então, pela Proposição 2.8, existe uma 0-vizinhança circulada U, tal que $U + U \subset V$. Seja F um conjunto qualquer totalmente limitado de L. Então, por definição, para a 0-vizinhança circulada U acima, existe $D_0 \subset F$ finito tal que $F \subset D_0 + U$. Por hipótese, circ D_0 é totalmente limitado, portanto existe $C_0 \subset$ circ D_0 finito tal que circ $D_0 \subset C_0 + U$. Assim, $F \subset D_0 + U \subset$ circ $D_0 + U$ e note que circ $D_0 + U$ é um conjunto circulado, pois se $|\lambda| \leq 1$, então λcirc $D_0 \subset$ circ D_0 e $\lambda U \subset U$ desde que circ D_0 e U são circulados. Logo, se $|\lambda| \leq 1$, então $\lambda(\text{circ } D_0 + U) = \lambda\text{circ } D_0 + \lambda U \subset \text{circ } D_0 + U$. Portanto, circ $F \subset$ circ $D_0 + U$ desde que circ F é o menor conjunto circulado que contém F. Mas circ $D_0 + U$ é totalmente limitado, pois para toda 0-vizinhança V, temos $C_0 \subset$ circ $D_0 + U$ finito tal que circ $D_0 + U \subset C_0 + U + U \subset C_0 + V$. Portanto, circ F é totalmente limitado, visto como subconjunto de circ $D_0 + U$, que é totalmente limitado. □

e

Lema 2.68. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo (não-necessariamente comutativo) localmente compacto, então $S = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ é compacto.*

Demonstração. Veja [[6], Lemma 7]. □

Proposição 2.69. *Sejam L um evt de Hausdorff sobre um corpo $\mathbb{K}$ e A, B subconjuntos limitados (respectivamente, totalmente limitados) de L. Então são subconjuntos limitados (respectivamente, totalmente limitados) de L:*

1. *Todo subconjunto de A;*

2. *O fecho $\overline{A}$ de A;*

3. *$A \cup B$, $A + B$, e λA para cada $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Além disso, todo conjunto totalmente limitado é limitado. O conjunto gerado circulado de um conjunto limitado em L é limitado. Se $\mathbb{K}$ é localmente pré-compacto, o conjunto gerado circulado de todo conjunto totalmente limitado em L é totalmente limitado.

Demonstração. 1. Se A é um subconjunto limitado de L, então todo subconjunto $A_0 \subset A$ é limitado, pois para cada vizinhança U de 0, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A_0 \subset A \subset \lambda U$, desde que A é limitado. Logo, A_0 é limitado.

2. Para cada 0-vizinhança U, temos, pela Proposição 2.11, que U contém uma vizinhança fechada V de 0. Logo, como A é limitado existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A \subset \lambda V$, implicando que $\overline{A} \subset \overline{\lambda V} = \lambda \overline{V}$. Como V é uma 0- vizinhança fechada segue que $\overline{A} \subset \lambda V \subset \lambda U$, portanto $\overline{A}$ é limitado.

3. Para cada 0-vizinhança circulada V, temos, pela Proposição 2.8, que existe uma 0-vizinhança circulada U, tal que $U + U \subset V$. Como A e B são subconjuntos limitados de L, existem λ_1 e λ_2 elementos de $\mathbb{K}$ tais que $A \subset \lambda_1 U$ e $B \subset \lambda_2 U$. Como $\mathbb{K}$ não é discreto, existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda_0| > sup(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$. Logo, $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right| < 1$ e $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right| < 1$ e como U é circulada segue que $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} U \subset U$ e $\frac{\lambda_2}{\lambda_0} U \subset U$, ou equivalentemente, $\lambda_1 U \subset \lambda_0 U$ e $\lambda_2 U \subset \lambda_0 U$. Obtemos, $A + B \subset \lambda_1 U + \lambda_2 U \subset \lambda_0 (U + U) \subset \lambda_0 V$ para cada 0-vizinhança circulada V, portanto $A + B$ é um subconjunto limitado de L e $A \cup B \subset \lambda_0 V$, pois $A \cup B \subset \lambda_1 U \cup \lambda_2 U \subset \lambda_0 U \subset \lambda_0 (U + U) \subset \lambda_0 V$ para cada 0-vizinhança circulada V, portanto $A \cup B$ é um subconjunto limitado de L. Também, λA é um subconjunto limitado de L, pois como A é limitado, então existe $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $A \subset \mu V$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo, então $\rho = \lambda \mu \in \mathbb{K}$ e temos $\lambda A \subset \lambda \mu V = \rho V$, portanto λA é um subconjunto limitado de L.

Façamos agora a demonstração para conjuntos A, B totalmente limitados.

1. Se A é um subconjunto totalmente limitado de um evt de Hausdorff L, então, pela Observação 2.65, temos que A é um subconjunto pré-compacto, mas pela Observação 1.114, todo subespaço A_0 de A é pré-compacto, e pela Observação 2.65, temos que A_0 é totalmente limitado.

2. Para cada 0-vizinhança U, temos pela Proposição 2.8, que existe uma 0-vizinhança V tal que $V + V \subset U$. Como A é totalmente limitado existe um subconjunto finito $B_0 \subset A$ tal que $A \subset B_0 + U$, para cada 0-vizinhança U. Assim, $\overline{A} \subset \overline{B_0 + U} = \bigcap B_0 + U + W$, para cada 0-vizinhanças U e W em L. Logo, $\overline{A} \subset B_0 + V + V \subset B_0 + U$, portanto $\overline{A}$ é um subconjunto totalmente limitado de L.

3. Para cada 0-vizinhança V, temos pela Proposição 2.8, que existe uma 0-vizinhança U, tal que $U + U \subset V$. Como A e B são subconjuntos totalmente limitados de L, existem subconjuntos finitos B_1 e B_2 de A e B respectivamente, tais que $A \subset B_1 + U$ e $B \subset B_2 + U$. Obtemos, $A + B \subset B_1 + U + B_2 + U = B_1 + B_2 + U + U \subset B_1 + B_2 + V$ para cada 0-vizinhança V, portanto $A + B$ é um subconjunto totalmente limitado de L e $A \cup B \subset B_1 + U \cup B_2 + U = B_1 \cup B_2 + U$, portanto $A \cup B$ é um subconjunto totalmente limitado de L. Também, observemos que se $\lambda = 0$, $\lambda A = \{0\}$ é totalmente limitado desde que para toda 0-vizinhança U temos $\{0\} \subset \{0\} + U = U$ e para $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, λA é um subconjunto totalmente limitado de L, pois como A é totalmente limitado, então existe um subconjunto finito $B_0 \subset A$ tal que $A \subset B_0 + U$ para cada 0- vizinhança U. Logo, $\lambda A \subset \lambda(B_0 + U) = \lambda B_0 + \lambda U$, portanto λA é um subconjunto totalmente limitado de L

desde que λU percorre todas as vizinhanças de 0 quando U percorre, porque, para todo $\lambda \neq 0$ a aplicação $h : L \longrightarrow L, x \longmapsto \lambda x$ é um homeomorfismo.

Note que todo subconjunto finito A de L é limitado, pois, pela Proposição 2.8, para toda vizinhança U de 0 existe uma vizinhança V de 0 radial tal que $V \subset U$. Logo, existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que $A \subset \lambda V \subset \lambda U$ sempre que $|\lambda| \geq |\lambda_0|$.

Dada V uma 0-vizinhança circulada, pela Proposição 2.8 existe uma 0- vizinhança circulada U tal que $U + U \subset V$ e se B é totalmente limitado, existe um conjunto finito $B_0 \subset B$ tal que $B \subset B_0 + U$. Agora, desde que $B_0 \subset B$ é finito, $B_0 \subset \lambda_0 U$, onde podemos assumir que $|\lambda_0| \geq 1$ desde que U é circulado, então obtemos

$$B \subset \lambda_0 U + U \subset \lambda_0 U + \lambda_0 U = \lambda_0(U + U) \subset \lambda_0 V,$$

assim B é limitado.

O fato de que o conjunto gerado circulado de um conjunto limitado é limitado segue de Proposição 2.11. De fato, se A é um conjunto limitado e circ$A$ é o conjunto gerado circulado de A, pela Proposição 2.11, a família de todas as vizinhanças fechadas de 0 forma uma base $\mathcal{B}$ de 0, e, pela Proposição 2.8, qualquer vizinhança $V \in \mathcal{B}$ contém uma vizinhança circulada U de 0. Então, sendo A limitado, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A \subset \lambda U$. Mas λU é circulado, pois para todo $\mu \in \mathbb{K}$, tal que, $|\mu| \leq 1$, temos que $\mu(\lambda U) \subset \lambda U$. De fato, se $\lambda = 0, 0U = \{0\}$ e para $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $|\mu| \leq 1$ temos $\mu\{0\} = \{0\} \subset \{0\}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, desde que $|\mu| \leq 1$, $|\mu\lambda| = |\mu||\lambda| \leq |\lambda|$. Assim, $\left|\frac{\mu\lambda}{\lambda}\right| \leq 1$, portanto $\frac{\mu\lambda}{\lambda} U \subset U$, desde que U é circulado. Logo, $\mu(\lambda U) = (\mu\lambda)U \subset \lambda U$ para $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Assim, de $A \subset \lambda U$ e λU circulado, segue que circ $A \subset \lambda U \subset \lambda V$, portanto circ A é limitado. Para provar a afirmação final é suficiente mostrar (vide Lema 2.67) que o conjunto gerado circulado de todo subconjunto finito de L é totalmente limitado, desde que $\mathbb{K}$ é localmente pré-compacto. Em vista de 3., é suficiente observar que cada conjunto Sa é totalmente limitado, onde $a \in L$ e $S = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$; mas isto segue de E_2 e do fato de S ser pré-compacto (note que o completamento $\widetilde{S} = S$, pois $S \subset \widetilde{S} \subset \overline{S} = S$ e S é compacto desde que $\widetilde{\mathbb{K}}$ é localmente compacto (Lema 2.68)). De fato, por E_2 a aplicação $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$ é contínua. Mas $S \times \{a\} \subset \mathbb{K} \times L$ é pré-compacto, pois, a menos de um isomorfismo, o completamento $\widetilde{S \times \{a\}} = \widetilde{S} \times \{a\}$ (note que $\{a\} \subset \widetilde{\{a\}} \subset \overline{\{a\}} = \{a\}$ desde que L é Hausdorff), portanto $\widetilde{S \times \{a\}}$ é compacto, desde que, $\widetilde{S}$ é compacto. Pela Observação 2.65 segue que $S \times \{a\}$ é totalmente limitado e, assim, pela Proposição 2.79 abaixo, segue que $Sa \subset L$ é totalmente limitado. Também, para cada $a \in L$, Sa é circulado, pois se $|\rho| \leq 1$, então $\rho Sa \subset Sa$ desde que para todo $\lambda \in S$, temos que $|\rho\lambda| \leq 1$, portanto $\rho\lambda \in S$. Assim, se $A \subset L$ finito, digamos, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, então $A \subset Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$. Mas $Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$ é circulado, pois se $|\mu| \leq 1$, então $\mu\,(Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n) \subset Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$ desde que $\mu\lambda \in S$ para todo $\lambda \in S$. Logo, $Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$ é um conjunto circulado que contém $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Portanto, circ $A \subset Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$ e como por 3., $Sa_1 \cup \cdots \cup Sa_n$ é um conjunto totalmente limitado segue que circ A é totalmente limitado como um subconjunto de um conjunto totalmente limitado. $\square$

Corolário 2.70. *As propriedades de ser limitado e totalmente limitado são preservadas via a formação de somas e uniões finitas e via dilatações* $x \longmapsto \lambda_0 x + x_0$.

Demonstração. A prova será feita por indução finita. De fato, primeiro temos que se A e B são limitados (totalmente limitados), então $A + B$ é um conjunto limitado (totalmente limitado) conforme item 3. da Proposição 2.69. Suponhamos, por hipótese de indução, que se $A_1, \ldots, A_{n-1}$ são conjuntos limitados (totalmente limitados), então a soma

$A_1 + \ldots + A_{n-1}$ é um conjunto limitado (totalmente limitado). Então se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos limitados (totalmente limitados), segue que $A_1 + \cdots + A_n = (A_1 + \ldots + A_{n-1}) + A_n$ é um conjunto limitado (totalmente limitado) pelo primeiro passo e a hipótese de indução. Analogamente, temos que $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ é um conjunto limitado (totalmente limitado). Por outro lado, sendo $h : x \longmapsto \lambda_0 x + x_0$ um homeomorfismo, se A é conjunto limitado, então $h(A) = \lambda_0 A + \{x_0\}$ é um conjunto limitado (totalmente limitado), pois $\lambda_0 A$ e $\{x_0\}$ são conjuntos limitados (totalmente limitados). □

Corolário 2.71. *A imagem de toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ é uma sequência de Cauchy, então, pelo Exemplo 2.18, para cada 0-vizinhança $V \subset L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_m - x_n \in V$ sempre que $m \geq n_0$ e $n \geq n_0$. Portanto, $x_m - x_{n_0} \in V$, para todo $m \geq n_0$. Logo, $x_m \in x_{n_0} + V$, para todo $m \geq n_0$, implicando que $\{x_m : m \geq n_0\} \subset \{x_{n_0}\} + V$. Assim, $\{x_m : m \geq n_0\}$ é totalmente limitado, portanto limitado conforme Proposição 2.69. Como $\{x_m : m \leq n_0\}$ é um conjunto finito, temos que $\{x_m : m \leq n_0\}$ também é um conjunto limitado. Logo, se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ é uma sequência de Cauchy, então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado. □

Corolário 2.72. *A família de todos os subconjuntos fechados, circulados e limitados de um evt L é um sistema fundamental de conjuntos limitados de L.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ a família de todos os subconjuntos fechados, circulados e limitados de um evt L. Se A é um subconjunto limitado de L, então o conjunto gerado circulado circ A é limitado. Logo, $\overline{\text{circ } A}$ é limitado e pertence a $\mathcal{B}$, pois $\overline{\text{circ } A}$ é circulado conforme Proposição 2.6 item v). Portanto, $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de conjuntos limitados de L. □

Observação 2.73. Se A é um subconjunto pré-compacto de um evt de Hausdorff L, então A é limitado.

Demonstração. Como todo subconjunto pré-compacto de um evt de Hausdorff L é totalmente limitado, conforme Observação 2.65, e todo conjunto totalmente limitado é limitado conforme Proposição 2.69, segue o resultado. □

Observação 2.74. Segue da definição de pré-compacto que um subconjunto de um evt de Hausdorff é compacto se, e somente se, é pré-compacto e completo.

Exemplo 2.75. circ $A = SA$, onde $S = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. De fato, circ A é o menor subconjunto circulado de L que contém A. Como SA é um subconjunto circulado de L que contém A ($A \subset SA$), pois para todo $a \in A$ temos $a = 1a, 1 \in S$ e se $|\lambda| \leq 1$, então $\lambda(SA) \subset SA$ desde que para todo $\mu \in S$, tem-se que $\lambda\mu \in S$, porque $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu| \leq 1$, então circ $A \subset SA$. Por outro lado, para todo subconjunto circulado C de L contendo A, temos que $SA \subset SC \subset C$. Em particular, para $C =$ circ A, temos que $SA \subset$ circ A. Portanto, circ $A = SA$.

Recordemos os seguintes fatos simples sobre conjuntos compactos.

Proposição 2.76. *Sejam L um evt de Hausdorff sobre $\mathbb{K}$ e A, B subconjuntos compactos de L. Então $A \cup B$, $A + B$, e λA ($\lambda \in \mathbb{K}$) são compactos; se $\mathbb{K}$ é localmente compacto, então o conjunto gerado circulado de A é compacto.*

Demonstração. A compacidade de $A \cup B$ segue da definição de espaços compactos (cada cobertura aberta tem uma subcobertura finita); $A + B$ é compacto como a imagem do espaço compacto $A \times B$ via a aplicação $(x, y) \longmapsto x + y$ que é contínua por E_1.; o mesmo argumento vale para λA visto como imagem de A pela aplicação $x \longmapsto \lambda x$ que é contínua por E_2. (Um outra prova consiste em observar que $A \cup B$, $A + B$, e λA são pré-compactos e completos.) Finalmente, o conjunto gerado circulado de A é a imagem contínua de $S \times A$ (via $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$), portanto compacto, desde que S é compacto (Proposição 2.68), conforme Proposição 1.117. □

Corolário 2.77. *A compacidade de subconjuntos de um evt de Hausdorff é preservada via a formação de somas e uniões finitas e via dilatações.*

Demonstração. Prova análoga à do Corolário 2.70 trocando limitado e totalmente limitado por compacto e usando a Proposição 2.76 . □

A proposição a seguir é um critério sequencial para a delimitação de um subconjunto de um evt. Por uma sequência nula em um evt L, entendemos uma sequência convergindo para $0 \in L$.

Proposição 2.78. *Um subconjunto A de um evt L é limitado se, e somente se, para toda sequência nula $\{\lambda_n\}$ em $\mathbb{K}$ e toda sequência $\{x_n\}$ em A, $\{\lambda_n x_n\}$ é uma sequência nula em L.*

Demonstração. Se A é um conjunto limitado e V é uma 0-vizinhança circulada em L, então existe $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$ tal que $\mu A \subset V$, (vide demonstração da Proposição 2.62). Se $\{\lambda_n\}$ é uma sequência nula em $\mathbb{K}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então $|\lambda_n| \leq |\mu|$. Como $\mu A \subset V$ segue que $A \subset \mu^{-1}V$, portanto $\lambda_n A \subset \lambda_n \mu^{-1} V$. Como para todo $n \geq n_0$ temos que $|\lambda_n \mu^{-1}| \leq 1$ e V é uma 0-vizinhança circulada em L, segue que $\lambda_n \mu^{-1} V \subset V$ para todo $n \geq n_0$. Assim, $\lambda_n A \subset V$ para todo $n \geq n_0$, portanto $\lambda_n x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$ e qualquer sequência $\{x_n\}$ em A. Reciprocamente, suponha que A é um subconjunto de L tal que para toda sequência nula $\{\lambda_n\}$ em $\mathbb{K}$ e toda sequência $\{x_n\}$ em A, $\{\lambda_n x_n\}$ é uma sequência nula em L. Se A não é limitado, então existirá uma 0-vizinhança U tal que $A \not\subset \rho_n U$ para qualquer sequência $\{\rho_n\}$ em $\mathbb{K}$. Desde que $\mathbb{K}$ é não discreto, podemos escolher ρ_n tal que $|\rho_n| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \in A \setminus \rho_n U (n \in \mathbb{N})$. Portanto, $\rho_n^{-1} x_n \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição, desde que $\{\rho_n^{-1}\}$ é uma sequência nula em $\mathbb{K}$. □

Proposição 2.79. *Sejam L, M evt sobre $\mathbb{K}$ e u uma aplicação linear contínua de L sobre M. Se B é um subconjunto limitado (respectivamente, totalmente limitado) de L, então $u(B)$ é limitado (respectivamente, totalmente limitado) em M.*

Demonstração. Se V é uma 0-vizinhança qualquer em M, então $u^{-1}(V)$ é uma 0-vizinhança em L (Observação 1.126). Logo, se B é limitado em L, então $B \subset \lambda u^{-1}(V)$ para um adequado $\lambda \in \mathbb{K}$, o que implica $u(B) \subset u(\lambda u^{-1}(V)) = \lambda u(u^{-1}(V)) \subset \lambda V$. Se B é totalmente limitado, então $B \subset B_0 + u^{-1}(V)$ para algum $B_0 \subset B$ finito, portanto $u(B) \subset u(B_0 + u^{-1}(V)) = u(B_0) + u(u^{-1}(V)) \subset u(B_0) + V$, com $u(B_0) \subset u(B)$ finito desde que $B_0 \subset B$ é finito. □

A Proposição 2.79 nos permite determinar um conjunto limitado (respectivamente, totalmente limitado) no espaço produto $L = \prod_\alpha L_\alpha$.

Proposição 2.80. *Se $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma família de evt e $L = \prod_\alpha L_\alpha$, um subconjunto B de L é limitado (respectivamente, totalmente limitado se A é finito) se, e somente se, $B \subset \prod_\alpha B_\alpha$, onde cada $B_\alpha(\alpha \in A)$ é limitado (respectivamente, totalmente limitado se A é finito) em L_α.*

Demonstração. Pela definição de topologia produto, seja $V = \prod_\alpha U_\alpha$ uma 0-vizinhança em L, onde cada U_α é uma 0-vizinhança circulada de L_α. Se B_α é limitado em $L_\alpha(\alpha \in A)$, então existem $\lambda_\alpha \in K$, $\lambda_\alpha \neq 0$ tal que $B_\alpha \subset \lambda_\alpha U_\alpha$. Desde que $\mathbb{K}$ é não discreto, existe $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda_0| > \sup\ \{|\lambda_\alpha| : \alpha \in A\}$, portanto $|\lambda_0^{-1}\lambda_\alpha| < 1$ para todo $\alpha \in A$. Como U_α é uma 0-vizinhança circulada de L_α segue que $\lambda_0^{-1}\lambda_\alpha U_\alpha \subset U_\alpha$, portanto $\lambda_\alpha U_\alpha \subset \lambda_0 U_\alpha$. Logo, $B_\alpha \subset \lambda_0 U_\alpha$, portanto $\prod_\alpha B_\alpha \subset \lambda_0 \prod_\alpha U_\alpha = \lambda_0 V$, provando que $\prod_\alpha B_\alpha$ é limitado em L. Logo, $B \subset \prod_\alpha B_\alpha$ é limitado como um subconjunto de um conjunto limitado. Por outro lado, se B é limitado em L, então $p_\alpha(B)$ é limitado em L_α, desde que a aplicação projeção p_α de L sobre L_α é contínua $(\alpha \in A)$ e $B \subset \prod_\alpha p_\alpha(B)$. Se A é finito e B_α é totalmente limitado em $L_\alpha(\alpha \in A)$ existe $B_0^\alpha \subset B_\alpha$ finito tal que $B_\alpha \subset B_0^\alpha + U_\alpha$. Portanto, $\prod_\alpha B_\alpha \subset \prod_\alpha(B_0^\alpha + U_\alpha) = \prod_\alpha B_0^\alpha + \prod_\alpha U_\alpha = \prod_\alpha B_0^\alpha + V$, onde $\prod_\alpha B_0^\alpha \subset \prod_\alpha B_\alpha$ é finito, pois A e $B_0^\alpha \subset B_\alpha(\alpha \in A)$ são finitos, provando que $\prod_\alpha B_\alpha$ é totalmente limitado. Logo, $B \subset \prod_\alpha B_\alpha$ é totalmente limitado como um subconjunto de um conjunto totalmente limitado. Por outro lado, se B é totalmente limitado em L, então $p_\alpha(B)$ é totalmente limitado em L_α, desde que a aplicação projeção p_α de L sobre L_α é contínua $(\alpha \in A)$ e $B \subset \prod_\alpha p_\alpha(B)$. □

Portanto, um sistema fundamental de conjuntos limitados em $L = \prod_\alpha L_\alpha$ é obtido através da formação de todos os produtos $\prod_\alpha B_\alpha$, onde B_α é qualquer membro de um sistema fundamental de conjuntos limitados $L_\alpha(\alpha \in A)$. Além disso, se L é um evt e M um subespaço de L, um conjunto é limitado em M se, e somente se, ele é limitado em L. De fato, se B é um subconjunto limitado de M, então para cada 0-vizinhança U de L existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $B \subset \lambda(U \cap M)$ desde que $U \cap M$ é uma 0-vizinhança de M. Logo, para cada 0-vizinhança U de L, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $B \subset \lambda U$, pois $U \cap M \subset U$. Portanto, B é um subconjunto limitado de L. Reciprocamente, se B é um subconjunto limitado de L e M é um subespaço de L que contém B, então para cada 0-vizinhança V de M, temos que $V = U \cap M$, onde U é uma 0-vizinhança de L. Assim, pela Proposição 2.8, para U, 0-vizinhança de L, existe uma 0-vizinhança circulada W de L tal que $W \subset W + W \subset U$, logo $W \cap M \subset U \cap M$. Como B é um subconjunto limitado de L, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $B \subset \lambda W$, portanto $B \subset \lambda W \cap M$. Tomando $\mu \in \mathbb{K}$ com $|\mu| \geq |\lambda|$, segue que para $\rho = \mu^{-1}\lambda$, $|\rho| \leq 1$ e como W é circulado, $\rho W \subset W$. Mas $B \subset \lambda W$, portanto como M é subespaço de L que contém B, segue que $\mu^{-1}B \subset \mu^{-1}(\lambda W \cap M) = \rho W \cap \mu^{-1}M \subset (W \cap M) \subset (U \cap M)$, assim $B \subset \mu(U \cap M) = \mu V$. Portanto, B é limitado em M.

Definição 2.81. Um evt L é **quase-completo** se todo subconjunto limitado e fechado de L é completo.

A noção de um evt quase-completo é consideravelmente importante para evt não-metrizáveis.

Proposição 2.82. *Todo evt L quase-completo é semi-completo*

Demonstração. Precisamos mostrar que toda sequência de Cauchy em L converge. De fato, se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy, então é limitada (Corolário 2.71), assim $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é limitado (Proposição 2.69) e como L é quase-completo, $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é completo. Como uma sequência de Cauchy em L é uma sequência do qual o filtro de seção é um filtro de Cauchy e todo filtro de Cauchy converge para $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset L$, pois $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é completo, segue que o filtro de seção converge para $x \in L$, portanto a sequência de Cauchy $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em L converge para $x \in L$. $\square$

Proposição 2.83. *Em um evt Hausdorff quase-completo, todo subconjunto pré-compacto é relativamente compacto.*

Demonstração. Se A é um subconjunto pré-compacto de um evt Hausdorff quase-completo, então, pela Observação 2.65, A é totalmente limitado. Logo, pela Proposição 2.69, $\overline{A}$ é totalmente limitado, portanto $\overline{A}$ é pré-compacto (Observação 2.65), limitado (Proposição 2.69) e fechado. Logo, $\overline{A}$ é pré-compacto e completo (Definição 2.81) e, assim, pela Observação 2.74, $\overline{A}$ é compacto. Portanto, A é relativamente compacto (Definição 1.116). $\square$

Proposição 2.84. *O produto L de quaisquer números de evt quase-completos é quase-completo.*

Demonstração. A prova é imediata do fato de que o produto de qualquer número de espaços uniformes completos é completo (Observação 1.90), da Proposição 2.80, e do fato de que o produto de conjuntos fechados é fechado (Corolário 1.64) De fato, se B é um subconjunto de L limitado e fechado, então, pela Proposição 2.80, $B \subset \prod_\alpha p_\alpha(B)$, onde cada $p_\alpha(B)(\alpha \in A)$ é limitado. Logo, $B \subset \overline{\prod_\alpha p_\alpha(B)} = \prod_\alpha \overline{p_\alpha(B)}$ (Proposição 1.63). Como cada L_α é quase-completo, segue que $\overline{p_\alpha(B)}(\alpha \in A)$ é completo. Assim, pela Observação 1.90, $\prod_\alpha \overline{p_\alpha(B)}$ é completo. Portanto, como $B \subset \prod_\alpha \overline{p_\alpha(B)}$ é fechado, pela Observação 1.91, temos que B é completo. $\square$

2.6 Metrizabilidade

Definição 2.85. Um evt (L, τ) é metrizável se sua topologia τ é metrizável, isto é, se existe uma métrica em L na qual as bolas abertas formam uma base para τ.

Observação 2.86. A uniformidade gerada por tal métrica não precisa ser translação-invariante, logo pode ser distinta da uniformidade associada com τ pela Proposição 2.14. (vide [[2], Exercises 13, p.35])

Observação 2.87. Quaisquer noções de uniformidade a serem empregadas em conexão com qualquer evt L (metrizável ou não) referem-se à uniformidade $\mathcal{R}$ da Proposição 2.14.

É conhecido (Proposição 1.103) da teoria de espaços uniformes que um espaço uniforme de Hausdorff é metrizável se, e somente se, seu filtro de vizinhanças da uniformidade possui uma base enumerável.

Definição 2.88. Uma função real $x \longmapsto |x|$, definida em um espaço vetorial L sobre $\mathbb{K}$ é chamada uma **pseudo-norma** sobre L se satisfaz:

(i) Se $|\lambda| \leq 1$, então $|\lambda x| \leq |x|$, para todo $x \in L$;

(ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in L$;

(iii) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Observação 2.89. Note que (i) implica $|x| = |-x|$, pois se $\lambda = -1$, temos $|-x| = |(-1)x| \leq |x|$ e para $-x \in L$ e $\lambda = -1$, temos $|x| = |(-1)(-x)| \leq |-x|$. Logo, $|-x| = |x|$. Além disso, por (i), se $\lambda = 0$, então $|0| = |0x| \leq |x|$, para todo $x \in L$ e por (iii), $|0| = 0$. Assim, $0 \leq |x|$, para todo $x \in L$. Ainda (i) e (ii) implicam que $||x| - |y|| \leq |x - y|$, pois de $y = x + [-(x-y)]$ e $x = y + (x-y)$, segue que $|y| = |x + [-(x-y)]| \leq |x| + |-(x-y)| = |x| + |x-y|$ e $|x| = |y + (x-y)| \leq |y| + |x-y|$, portanto $-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$.

Além disso, desde que a métrica $d(x,y) = |x-y|$, é translação-invariante, ela gera também a uniformidade do evt. L. De fato, uma pseudo-norma define uma métrica $(x,y) \longmapsto |x-y|$, pois:

- $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $|x-y| = 0$ se, e somente se, $x - y = 0$, por (iii). Assim, $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.
- $d(x,y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y,x)$, pois $|x| = |-x|$ conforme Observação 2.89.
- $d(x,z) = |x - y + y - z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$ por (ii).

Agora, como a métrica $(x,y) \longmapsto |x-y|$ é uma uniformidade (prova análoga à do Exemplo 1.77 trocando $\mathbb{K}$ por L e λ, μ por x, y, respectivamente) e translação-invariante, pois $(x,y) \in W_r = \{(x,y) : |x-y| < r\}$ é equivalente a $(x+z, y+z) \in W_r$ para cada $z \in L$ e cada $W_r \in \mathcal{B}$, desde que $|(x+z) - (y+z)| = |x-y|$ para cada $z \in L$. Ela gera também a uniformidade do evt L (Proposição 2.14).

Observação 2.90. Uma pseudo-norma em L define, via a métrica $(x,y) \longmapsto |x-y|$, uma topologia τ em L satisfazendo E_1. De fato, para cada $U(a+b,r)$ vizinhança de $\oplus(a,b) = a + b$ tome $U(a,r/2) \times U(b,r/2)$ vizinhança de (a,b) em $L \times L$. Então $\oplus(U(a,r/2) \times U(b,r/2)) = U(a,\frac{r}{2}) + U(b,\frac{r}{2}) \subset U(a+b,r)$, dado que

$$\begin{array}{rcl} |(x+y) - (a+b)| & = & |(x-a) + (y-b)| \\ & \leq & |x-a| + |y-b| \\ & < & \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2} \\ & = & r. \end{array}$$

Assim, $(a,b) \in U(a,\frac{r}{2}) \times U(b,\frac{r}{2}) \subset \oplus^{-1}(U(a+b,r))$. Logo, $\oplus^{-1}(U(a+b,r))$ é uma vizinhança de (a,b) em $L \times L$. Por outro lado, E_2 não é necessariamente satisfeita (vide [[2], Exercises 12b), p.35]). Entretanto, se $x \longmapsto |x|$ é uma pseudo-norma em L tal que $\lambda_n \longrightarrow 0$ implica que $|\lambda_n x| \longrightarrow 0$ para cada $x \in L$ e $|x_n| \longrightarrow 0$ implica $|\lambda_n x| \longrightarrow 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, então segue de (ii) e da indentidade $\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$ que a topologia τ definida por $x \longmapsto |x|$ satisfaz E_2. De fato,

$$\begin{array}{rcl} |\lambda x - \lambda_0 x_0| & = & |\lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)| \\ & \leq & |\lambda_0(x - x_0)| + |(\lambda - \lambda_0)x_0| + |(\lambda - \lambda_0)(x - x_0)| \end{array}$$

o que nos mostra que $|\lambda x - \lambda_0 x_0|$ pode ser feito tão pequeno quanto quisermos, tomando $|\lambda - \lambda_0|$ e $|x - x_0|$ suficientemente pequenos, pois neste caso $|(\lambda - \lambda_0)x_0|, |(\lambda - \lambda_0)(x - x_0)|$ e $|\lambda_0(x - x_0)|$ são também suficientemente pequenos. Portanto, (L, τ) é um evt sobre $\mathbb{K}$.

Para espaços vetoriais topológicos, o seguinte resultado mais detalhado é válido.

Teorema 2.91. *Um evt de Hausdorff L é metrizável se, e somente se, possui uma base enumerável de vizinhanças de 0. Neste caso, existe uma função $f : x \longmapsto |x|$ de L sobre $\mathbb{R}$ tal que f é uma pseudo-norma e a métrica $(x, y) \longmapsto |x - y|$ gera a topologia de L.*

Demonstração. Seja $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base de vizinhanças circuladas de 0 satisfazendo

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.1}$$

Para cada subconjunto finito não vazio $H \subset \mathbb{N}$, defina a 0-vizinhança circulada V_H por $V_H = \sum\limits_{n\in H} V_n$ (note que V_H é circulada, pois para $|\lambda| \leq 1$, temos que $\lambda V_H = \lambda(\sum\limits_{n\in H} V_n) = \sum\limits_{n\in H} \lambda V_n \subset \sum\limits_{n\in H} V_n = V_H$, desde que $V_n, n \in H$ é circulada) e o número real p_H por $p_H = \sum\limits_{n\in H} 2^{-n}$. Segue de (2.1) por indução sobre o número de elementos de $H \subset \mathbb{N}$ que:

$$p_H < 2^{-n} \Longrightarrow n < H \Longrightarrow V_H \subset V_n, \tag{2.2}$$

onde $n < H$ significa que $n < k$ para todo $k \in H$. De fato, suponha que $H = \{n_0\} \subset \mathbb{N}$. Logo, $2^{-n_0} = p_{\{n_0\}} < 2^{-n} \Longrightarrow \log_2(2^{-n_0}) < \log_2(2^{-n}) \Longrightarrow -n_0 < -n \Longrightarrow n < n_0 \Longrightarrow n < \{n_0\}$ e $n < \{n_0\} \Longrightarrow n < n_0 \Longrightarrow n_0 = n + r \Longrightarrow V_{n_0} = V_{n+r} \subset V_{n+r} + V_{n+r} \subset V_{n+r-1} \subset \cdots \subset V_{n+2} + V_{n+2} \subset V_{n+1} \subset V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \Longrightarrow V_{n_0} = V_{\{n_0\}} \subset V_n$. Logo, as implicações $p_{\{n_0\}} < 2^{-n} \Longrightarrow n < \{n_0\} \Longrightarrow V_{\{n_0\}} \subset V_n$, onde $n < \{n_0\}$ significa que $n < n_0$ valem para o primeiro passo da indução. Suponha que as implicações $p_G < 2^{-n} \Longrightarrow n < G \Longrightarrow V_G \subset V_n$, onde $n < G$ significa que $n < k$ para todo $k \in G$ valham para todo $G \subset \mathbb{N}$ como $k - 1$ elementos. Verifiquemos que as implicações valem para H um conjunto com k elementos. De fato, escreva $H = G \cup \{n_0\}$, onde $G \subset \mathbb{N}$ tem $k - 1$ elementos. Logo, $p_H < 2^{-n} \Longrightarrow p_G + 2^{-n_0} < 2^{-n} \Longrightarrow p_G < 2^{-n}$ e $2^{-n_0} < 2^{-n} \Longrightarrow n < G$ e $n < \{n_0\} \Longrightarrow n < G \cup \{n_0\} = H$. Logo, $p_H < 2^{-n} \Longrightarrow n < H$. Agora, suponha que $n < H = G \cup \{n_0\}$. Então $n < k$ para todo $k \in G$ e $n < n_0$. Assim, $V_G = \sum_{k\in G} V_k \subset \sum_{k\in G} V_{\min G}$, pois $\min G \leq k, \forall k \in G$. Como $n < \min G$, então $\min G = n + r$. Logo, $V_G \subset V_{n+r-1} \subset V_{n+r-1} + V_{n+r-1} \subset V_{n+r-2} \subset \cdots \subset V_{n+2} + V_{n+2} \subset V_{n+1}$ e $V_{\{n_0\}} \subset V_{n+s} \subset V_{n+s} + V_{n+s} \subset V_{n+s-1} \subset \cdots \subset V_{n+2} + V_{n+2} \subset V_{n+1}$. Logo, se $n < H$, então $V_H = V_G + V_{\{n_0\}} \subset V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. Definimos a função real valorada $f : x \longmapsto |x|$ de L por $|x| = 1$ se x não está contido em nenhum V_H, e por

$$|x| = \inf\nolimits_{\mathrm{H}} \{p_H : x \in V_H\},$$

caso contrário. A imagem de f está contida no intervalo $[0, 1]$.

Desde que V_H é circulada, (i) é satisfeita, pois $\lambda V_H \subset V_H$ sempre que $|\lambda| \leq 1$. Logo, se $|\lambda| \leq 1$, então $\{p_H : x \in V_H\} \subset \{p_H : \lambda x \in V_H\}$, portanto se $|\lambda| \leq 1$, então $|\lambda x| = \inf_{\mathrm{H}} \{p_H : \lambda x \in V_H\} \leq \inf_{\mathrm{H}} \{p_H : x \in V_H\} = |x|$. Vamos mostrar a seguir que a desigualdade triangular (ii) é valida. Isso é evidente para cada (x, y) tal que $|x| + |y| \geq 1$, pois $|x + y| \leq 1$, desde que a imagem de f está contida no intervalo $[0, 1]$. Então, suponha que $|x| + |y| < 1$. Seja $\epsilon > 0$ qualquer número real tal que $|x| + |y| + 2\epsilon < 1$. Assim, existem conjuntos finitos H, K de $\mathbb{N}$ tal que $x \in V_H, y \in V_K$ e $p_H < |x| + \epsilon, p_K < |y| + \epsilon$. Desde que $p_H + p_K < 1$, existe um único subconjunto finito M de $\mathbb{N}$ para qual $p_M = p_H + p_K$ ($M = H \setminus K \cup K \setminus H \cup J$, onde $J = \{n - 1 : n \in H \cap K\}$. Note que para todo $n \in H \cap K$, $n \geq 2$ porque $p_H + p_K < 1$ [Exemplo 2.92,1.]). Devido à (2.1), M tem a propriedade $V_H + V_K \subset V_M$ [Exemplo 2.92,2.]. Segue-se que $x + y \in V_M$ e portanto

$$|x + y| = \inf\nolimits_{\mathrm{M}} \{p_M : x + y \in V_M\} \leq p_M = p_H + p_K < |x| + |y| + 2\epsilon, \forall \epsilon > 0,$$

o que prova (ii).

Para qualquer $\epsilon > 0$, seja $S_\epsilon = \{x \in L : |x| \leq \epsilon\}$; afirmamos que

$$S_{2^{-n-1}} \subset V_n \subset S_{2^{-n}}, (n \in \mathbb{N}). \tag{2.3}$$

A inclusão $V_n \subset S_{2^{-n}}$ segue do fato de que $x \in V_n$ implica

$$|x| = \inf_{\{\mathrm{n}\}} \left\{p_{\{n\}} = 2^{-n} : x \in V_{\{n\}}\right\} \leq 2^{-n}.$$

Agora, se $x \in S_{2^{-n-1}} = \{x \in L : |x| \leq 2^{-n-1}\}$, então existe um subconjunto finito H de $\mathbb{N}$ tal que $x \in V_H$ e $p_H < |x| + 2^{-n-1} \leq 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{1+(-n-1)} = 2^{-n}$. Logo, (2.2) implica que $x \in V_n$.

Segue de (2.3) que (iii) é válida, pois $|x| = 0$ se, e somente se, $|x| \leq 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$ se, e somente se, $x \in \cap\{S_{2^{-n}} : n \in \mathbb{N}\}$ se, e somente se, $x \in \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, pois de

$$S_{2^{-1}} \supset V_1 \supset S_{2^{-2}} \supset V_2 \supset S_{2^{-3}} \supset \ldots \supset S_{2^{-n}} \supset V_n \supset S_{2^{-n-1}} \supset \ldots,$$

segue que $\cap\{S_{2^{-n}} : n \in \mathbb{N}\} = \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Logo,

$$|x| = 0 \text{ se, e somente se, } x \in \bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0\},$$

desde que L é Hausdorff (Proposição 2.20) e, portanto, $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Além disso, 2.3 mostra que a família $\{S_\epsilon : \epsilon > 0\}$ é uma base de vizinhanças de 0 em L (Observação 1.20). Desde que a topologia gerada pela métrica $(x, y) \longmapsto |x - y|$ é translação-invariante, ela gera a topologia de L, portanto L é metrizável. Reciprocamente, se o evt de Hausdorff L é metrizável, então possui uma base enumerável de vizinhanças de 0. De fato, seja $V_n = U(0, n^{-1}) = \{x \in L : d(x, 0) < n^{-1}\}$ $(n \in \mathbb{N})$ uma vizinhança de 0, logo $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base enumerável de vizinhanças de 0 em L, pois:

1. $0 \in V_n$ para cada $V_n \in \mathcal{B}$, assim $\emptyset \notin \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \neq \emptyset$, porque $V_1 \in \mathcal{B}$.

2. Se $V_{n_1}, V_{n_2} \in \mathcal{B}$, então tomando $n = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $V_n \subset V_{n_1} \cap V_{n_2}$,

conforme Definição 1.19. Isso completa a prova. □

Exemplo 2.92. Sejam $H = \{n_0, n_1, n_2\}$ e $K = \{n_2, n_3, n_4\}$ subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ tais que $p_H + p_K < 1$. Então $H \setminus K = \{n_0, n_1\}$, $K \setminus H = \{n_3, n_4\}$ e $J = \{n - 1 : n \in H \cap K\} = \{n_2 - 1\}$, desde que $H \cap K = \{n_2\}$. Tome $M = H \setminus K \cup K \setminus H \cup J = \{n_0, n_1, n_3, n_4, n_2 - 1\}$, então $p_M = p_H + p_K$ e $V_H + V_K \subset V_M$. De fato,

1. Primeiro observemos que se $p_H + p_K < 1$, então $n_2 \geq 2$ e

$$\begin{aligned}
p_H + p_K &= \sum_{n \in H} 2^{-n} + \sum_{n \in K} 2^{-n} \\
&= 2^{-n_0} + 2^{-n_1} + 2^{-n_2} + 2^{-n_2} + 2^{-n_3} + 2^{-n_4} \\
&= 2^{-n_0} + 2^{-n_1} + 2.2^{-n_2} + 2^{-n_3} + 2^{-n_4} \\
&= 2^{-n_0} + 2^{-n_1} + 2^{(1-n_2)} + 2^{-n_3} + 2^{-n_4} \\
&= 2^{-n_0} + 2^{-n_1} + 2^{-(n_2-1)} + 2^{-n_3} + 2^{-n_4} \\
&= 2^{-n_0} + 2^{-n_1} + 2^{-n_3} + 2^{-n_4} + 2^{-(n_2-1)} \\
&= \sum_{n \in H \setminus K} 2^{-n} + \sum_{n \in K \setminus H} 2^{-n} + \sum_{n \in J} 2^{-n} \\
&= p_{H \setminus K} + p_{K \setminus H} + p_J \\
&= p_M
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} V_H + V_K &= \sum_{n\in H} V_n + \sum_{n\in K} V_n \\ &= V_{n_0} + V_{n_1} + V_{n_2} + V_{n_2} + V_{n_3} + V_{n_4} \\ &= V_{n_0} + V_{n_1} + V_{n_3} + V_{n_4} + V_{n_2} + V_{n_2} \\ &\subset V_{n_0} + V_{n_1} + V_{n_3} + V_{n_4} + V_{(n_2-1)} \\ &= \sum_{n\in H\setminus K} V_n + \sum_{n\in K\setminus H} V_n + \sum_{n\in J} V_n \\ &= V_M \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observação 2.93. Segue da prova do Teorema 2.91 que sobre todo evt não Hausdorff L sobre $\mathbb{K}$ possuindo uma base enumerável de vizinhanças de 0, existe uma função real satisfazendo as propriedades (i), (ii) da Definição 2.88.

Observação 2.94. Se L é um evt metrizável sobre $\mathbb{K}$ e se $f : x \longmapsto |x|$ é uma pseudo-norma gerando a topologia de L, então f é uniformemente contínua. De fato, como pela Observação 2.89, $||x| - |y|| \leq |x - y|$, então tomando $\epsilon = \delta$, temos que $|x - y| < \delta$ implica $||x|-|y|| \leq |x-y| < \delta = \epsilon$. Assim, possui uma única extensão contínua, $\tilde{f} : \tilde{x} \longmapsto |\tilde{x}|$, para o completamento $\tilde{L}$ de L (Teorema 1.93). Devido à Proposição 2.21, podemos concluir que essa extensão, que é uma pseudo-norma em $\tilde{L}$, gera a topologia de $\tilde{L}$.

Definição 2.95. Um evt L é chamado **localmente limitado** se L possui uma vizinhança limitada de 0.

Observação 2.96. Se L é evt **localmente limitado**, então L possui uma base de vizinhanças limitadas de 0. Com efeito, seja $\mathcal{B}$ uma coleção de todas as vizinhanças limitadas de 0 em L. Como L é localmente limitado então L possui uma vizinhança limitada V de 0, portanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Como para cada $V \in \mathcal{B}$, $0 \in V$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Além disso, se $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, então $V_1 \cap V_2$ é uma 0-vizinhança limitada de L, pois, para cada 0-vizinhança circulada U existem $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tais que $V_1 \subset \lambda U$ e $V_2 \subset \mu U$ desde que V_1 e V_2 são limitadas. Logo, $V_1 \cap V_2 \subset \lambda U \cap \mu U \subset \sup\{\lambda, \mu\} U$, pois sendo U uma 0-vizinhança circulada, como $\left|\frac{\lambda}{\sup\{\lambda,\mu\}}\right| \leq 1$ e $\left|\frac{\mu}{\sup\{\lambda,\mu\}}\right| \leq 1$ segue que $\frac{\lambda}{\sup\{\lambda,\mu\}} U \subset U$ e $\frac{\mu}{\sup\{\lambda,\mu\}} U \subset U$, ou equivalentemente, $\lambda U \subset \sup\{\lambda, \mu\} U$ e $\mu U \subset \sup\{\lambda, \mu\} U$.

Assim, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}$, e como $V_1 \cap V_2 \subset V_1 \cap V_2$ segue que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro.

Proposição 2.97. *Todo evt Hausdorff localmente limitado L é metrizável.*

Demonstração. Seja V uma 0-vizinhança limitada em L e $\{\lambda_n\}$ uma sequência de elementos não nulos de $\mathbb{K}$ tal que $lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$. Se U é uma 0-vizinhança circulada qualquer, existe $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $V \subset \mu U$, dado que V é limitada. Se n é tal que $|\lambda_n \mu| \leq 1$, então $\lambda_n V \subset \lambda_n(\mu U) = (\lambda_n \mu) U \subset U$, desde que U é circulada. Segue que $\{\lambda_n V : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base enumerável de vizinhanças de 0 (Observação 1.20), logo L é metrizável devido ao Teorema 2.91. □

Proposição 2.98. *Um evt quase-completo, localmente limitado é completo.*

Demonstração. Segue do fato de L possuir uma vizinhança completa de 0, pois como L é localmente limitado, então L possui uma 0-vizinhança limitada V. Pela Proposição 2.11, V contém uma 0-vizinhança fechada U. Sendo L quase-completo e U um subconjunto limitado (como subconjunto de um conjunto limitado) e fechado de L, segue que U é completo. Assim, pela Proposição 2.11, L possui uma base de vizinhanças completas de

0. Agora, se $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy sobre L, então, pela Definição 1.84, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset N_U$. Pela Proposição 2.17, se $x \in F$ então $F - x \subset U$ e assim $F \subset x + U$. Logo, a coleção $\mathcal{F}_{x+U} = \mathcal{F} \cap \{x + U\} = \{F \cap (x + U) : F \in \mathcal{F}\}$ sobre o subespaço $x + U$ é um filtro de Cauchy (basta notar que $[F \cap (x + U)] \times [F \cap (x + U)] \subset F \times F \subset N_U$, com F variando em $\mathcal{F}$ para cada N_U dado). Como $x + U$ é completo e $\mathcal{F}_{x+U}$ é um filtro de Cauchy sobre $x + U$, então $\mathcal{F}_{x+U}$ converge para um ponto $x + u_0 \in x + U$. Logo, $x + u_0 \in F, \forall F \in \mathcal{F}$, assim $x + u_0$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. Portanto, pela Proposição 2.46, o filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ em L converge. Portanto, L é completo. □

Observação 2.99. Todo subespaço M de um evt metrizável L é metrizável. Se $f : x \mapsto |x|$ é uma pseudo-norma sobre L gerando sua topologia, a restrição de $f : x \longmapsto |x|$ a M gera a topologia de M. Com efeito, se L é metrizável, pelo Teorema 2.91, existe uma pseudo-norma que gera a topologia de L, onde os abertos da topologia são as bolas abertas $U_L(x, r) = \{y \in L : |x - y| < r\}$, com $r > 0$, assim os abertos da topologia de M são os elementos $U_M(x, r) = U_L(x, r) \cap M$. Além disso, L tem uma base enumerável de vizinhanças de 0, $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, onde $V_n = U(0, n^{-1}) = \{x \in L : |x| < n^{-1}\}$. Assim, $W_n = V_n \cap M = U(0, n^{-1}) \cap M = \{x \in L : |x| < n^{-1}\} \cap M)$ $(n \in \mathbb{N})$ é uma vizinhança de 0 em M, $\mathcal{B}_M = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base enumerável de vizinhanças de 0 em M e a restrição de f a M, $f_M : x \longmapsto |x|$ gera a topologia de M, pois satisfaz os itens $(i), (ii)$ e (iii) da Definição 2.88 uma vez que M é subespaço.

Observação 2.100. A recíproca da Proposição 2.97 é falsa. Um exemplo é fornecido pelo produto de um número infinito enumerável de evt unidimensionais metrizáveis (ver abaixo), mas não localmente limitado.

Seja $L = \prod_n L_n$ o produto enumerável de etv metrizáveis. Desde que a topologia produto é metrizável, o Teorema 2.91 implica que pode ser gerada por uma pseudo-norma. Tal pseudo-norma pode ser construída explicitamente se, sobre cada fator $L_n (n \in \mathbb{N})$, uma pseudo-norma $f_n : x \longmapsto |x|_n$ é dada: Escrevendo $x = (x_n)$,

$$f : x \longmapsto |x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|_n}{1 + |x_n|_n}$$

é uma pseudo-norma geradora sobre L. Para isso devemos mostrar que f satisfaz os itens de (i) a (iii) da Definição 2.88 e que a métrica $(x, y) \longmapsto |x - y|$ gera a topologia de L. Para os itens (i) e (ii), devemos observar que $u \longmapsto u/(1 + u)$ é crescente para $u \geq 0$ e que

$$\frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}$$

para dois números reais quaisquer $a, b \geq 0$.

De fato, como cada $L_n (n \in \mathbb{N})$ satisfaz os itens de (i) a (iii), temos que:

(i) Se $|\lambda| \leq 1$, então $|\lambda x_n|_n \leq |x_n|_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\dfrac{|\lambda x_n|_n}{1 + |\lambda x_n|_n} \leq \dfrac{|x_n|_n}{1 + |x_n|_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, desde que $u \longmapsto u/(1 + u)$ é crescente para $u \geq 0$. Portanto,

$$|\lambda x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\lambda x_n|_n}{1 + |\lambda x_n|_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|_n}{1 + |x_n|_n} = |x|.$$

(ii) Como $|x_n + y_n|_n \leq |x_n|_n + |y_n|_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $u \longmapsto u/(1 + u)$ é crescente para $u \geq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} |x+y| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n+y_n|_n}{1+|x_n+y_n|_n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|_n+|y_n|_n}{1+|x_n|_n+|y_n|_n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|_n}{1+|x_n|_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|y_n|_n}{1+|y_n|_n} \\ &= |x|+|y|. \end{aligned}$$

(iii) Como $|x_n|_n = 0$ se, e somente se, $x_n = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$|x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|_n}{1+|x_n|_n} = 0 \Longleftrightarrow |x_n|_n = 0 \Longleftrightarrow x_n = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Portanto, $f : x \longmapsto |x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|_n}{1+|x_n|_n}$ é uma pseudo-norma e, pela Observação 2.89, a métrica proveniente de f gera a topologia de $L = \prod_n L_n$.

Logo, se $L = \prod_n L_n$, onde L_n são evt unidimensionais metrizáveis, então L é metrizável, porém $L = \prod_n L_n$ não é localmente limitado desde que $\mathbb{N}$ é infinito. De fato, se $L = \prod_{\alpha \in A} L_\alpha$ fosse localmente limitado, L possuiria uma 0-vizinhança limitada. Porém, pela Proposição 2.80, uma 0-vizinhança pode ser limitada se, e somente se, o número de fatores $L_\alpha \neq \{0\}$ é finito (note que toda 0-vizinhança limitada é totalmente limitada desde que para $\lambda \neq 0$, λU percorre todas as vizinhanças de 0 quando U percorre).

Proposição 2.101. *Um subconjunto A de um evt metrizável L é completo se, e somente se, cada sequência de Cauchy em A converge para um ponto de A.*

Demonstração. Se A é completo, então todo filtro de Cauchy converge para um ponto de A, logo toda sequência de Cauchy em A converge para um ponto de A, pois cada filtro de seção é um filtro de Cauchy. Reciprocamente, se cada sequência de Cauchy em A converge para um ponto de A, então A é completo. De fato, sejam $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base enumerável de vizinhanças do 0 tal que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ e $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy em A. Para todo $n = 1, 2, \ldots$, existe um subconjunto F_n de A que pertence ao filtro $\mathcal{F}$ tal que $F_n - F_n \subset V_n$ (Proposição 2.17). Agora, desde que nenhuma interseção de conjuntos $F_n, (n \in \mathbb{N})$, pertencendo ao filtro $\mathcal{F}$, pode ser vazia, podemos escolher para cada n um ponto x_n no conjunto $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$. A sequência de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma sequência de Cauchy, pois para cada $V_m \in \mathcal{B}$, se $k \geq l \geq m$, então $x_l \in F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m \cap \cdots \cap F_l \subset F_m$ e $x_k \in F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m \cap \cdots \cap F_l \cap \cdots \cap F_k \subset F_m$ e como $F_m - F_m \subset V_m$ segue que para $k \geq l \geq m$, $x_k - x_l \in V_m$ e, assim, pelo Exemplo 2.18, a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, portanto converge para algum ponto $x \in A$. Mostraremos que o filtro $\mathcal{F}$ converge para esse mesmo ponto $x \in A$. Com efeito, se $n \geq 1$ é um inteiro, escolha $k > n$ tal que $V_k + V_k \subset V_n$ e escolha $h \geq k$ tal que $x_h \in F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \cap \cdots \cap F_h$ e $x_h - x \in V_k$, dado que a sequência converge para x, portanto $x_h \in x + V_k$ para $h \geq k$ escolhido. Como temos $x_h \in F_k$ e, pela Proposição 2.17, $F_k - F_k \subset V_k$, então $F_k - x_h \subset V_k$, portanto $F_k \subset x_h + V_k \subset x + V_k + V_k \subset x + V_n$. Logo, pela Observação 2.47, $\mathcal{F}$ converge para x. □

Proposição 2.102. *Sejam L evt metrizável e S uma sequência de Cauchy em L. Se S contém uma subsequência que converge para algum ponto $x \in L$, então x é um ponto de acumulação de S.*

Demonstração. Como todo filtro de seção é um filtro de Cauchy, temos que x é um ponto de acumulação para cada filtro, assim, pela Proposição 2.46, S converge para x. Note que, como L é Hausdorff, então, pela Observação 1.68, x é o limite desses filtros. □

Para um espaço quociente L/M de um evt metrizável L ser metrizável, M precisa necessariamente ser fechado pela Proposição 2.32; essa condição é também suficiente. Em termos de uma pseudo-norma geradora em L, provaremos o seguinte resultado mais detalhado.

Proposição 2.103. *O espaço quociente L/M de um evt metrizável L sobre um subespaço fechado M é metrizável. E, se L é completo, então L/M é completo. Se $f : x \longmapsto |x|_L$ é uma pseudo-norma gerando a topologia de L, então (com $\widehat{x} = x + M$)*

$$\widehat{f} : \widehat{x} \longmapsto |\widehat{x}| = \inf\{|y|_L : y \in \widehat{x}\}$$

é uma pseudo-norma gerando a topologia de L/M.

Demonstração. Notemos primeiro que $\widehat{f} : \widehat{x} \longmapsto |\widehat{x}| = \inf\{|y|_L : y \in \widehat{x}\}$ satisfaz os itens de (i) a (iii) da Definição 2.88.
Com efeito, se $\widehat{x} = \widehat{0}$, então $|\widehat{0}| = \inf\left\{|y|_L : y \in \widehat{0} = 0 + M\right\} = \inf\{|y|_L : y \in M\} = 0$, pois $0 \leq |y|_L, \forall y \in M$ e $\forall \epsilon > 0$ existe $|0|_L = 0 \in \{|y|_L : y \in M\}$ tal que $0 \leq |0|_l = 0 < \epsilon$. Por outro lado, se $0 = |\widehat{x}| = \inf\{|y|_L : y \in \widehat{x}\}$, então $0 \leq |y|_L, \forall y \in \widehat{x}$ e para todo $\epsilon > 0$, existe $|y_0|_L \in \{|y|_L : y \in \widehat{x}\}$ tal que $0 \leq |y_0|_L < \epsilon$. Logo, $|y_0|_L = 0$, portanto $y_0 = 0$ e $-x \in M$. Assim, como M é um subespaço de L, $x \in M$ e $\widehat{x} = \widehat{0}$. Logo, (iii) está satisfeita. Para (ii), se $\epsilon > 0$, então $|x|_L < |\widehat{x}| + \epsilon$, $|y|_L < |\widehat{y}| + \epsilon$ para $x \in \widehat{x}, y \in \widehat{y}$ adequados. Assim,

$$|\widehat{x} + \widehat{y}| = |\widehat{x + y}| = \inf\left\{|z|_L : z \in \widehat{x + y}\right\} \leq |x + y|_L \leq |x|_L + |y|_L < |\widehat{x}| + |\widehat{y}| + 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer segue que $|\widehat{x} + \widehat{y}| \leq |\widehat{x}| + |\widehat{y}|$ para todos $\widehat{x}, \widehat{y} \in L/M$. O item (i) segue da correspondente propriedade de $f : x \longmapsto |x|_L$ sobre L, desde que a aplicação quociente $\phi : x \longmapsto \widehat{x}$ é linear, pois se $|\lambda| \leq 1$, então

$$|\lambda\widehat{x}| = |\widehat{\lambda x}| = \inf\left\{|z|_L : z \in \widehat{\lambda x}\right\} \leq \inf\{|y|_L : y \in \widehat{x}\} = |\widehat{x}|,$$

pois se $y \in \widehat{x}$, então $\lambda y \in \lambda\widehat{x} = \widehat{\lambda x}$. Logo, $|\lambda y|_L \in \left\{|z|_L : z \in \widehat{\lambda x}\right\}$, assim, se $|\lambda| \leq 1$, então $|\lambda\widehat{x}| \leq |\lambda y|_L \leq |y|_L$, para todo $y \in \widehat{x}$. Assim, $|\lambda\widehat{x}|$ é um limitante inferior para o conjunto $\{|y|_L : y \in \widehat{x}\}$, portanto $|\lambda\widehat{x}| \leq |\widehat{x}|$ se $|\lambda| \leq 1$. Agora, sejam $V_n = \{x : |x|_L < n^{-1}\}$ $(n \in \mathbb{N})$ e $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base enumerável de vizinhanças de 0 em L. Assim, $\mathcal{C} = \{\phi(V_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base enumerável de vizinhanças de $\widehat{0}$ em L/M, desde que a aplicação natural $\phi : x \longmapsto \widehat{x}$ é linear, aberta e contínua. De fato, como $0 \in V_n (n \in \mathbb{N})$ e ϕ é linear e aberta, pela Observação 1.126, temos que $\widehat{0} = \phi(0) \in \phi(V_n)(n \in \mathbb{N})$, assim $\emptyset \notin \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pois $\phi(V_1) \in \mathcal{C}$. Ainda, se $\phi(V_1), \phi(V_2) \in \mathcal{C}$, como para $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, existe V_3 tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$, e então existe $\phi(V_3) \in \mathcal{C}$ tal que $\phi(V_3) \subset \phi(V_1) \cap \phi(V_2)$, desde que ϕ é contínua e linear. Logo, $\mathcal{C}$ é uma base de filtro. Agora, definamos $\widehat{V_n} = \{\widehat{x} : |\widehat{x}| < n^{-1}\}$ e afirmamos que $\widehat{V_n} = \phi(V_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, se $x \in V_n$, então $|x|_L < n^{-1}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $|\widehat{x}| = \inf\{|y|_L : y \in \widehat{x}\} \leq |x|_L < n^{-1}$ e $\phi(x) = \widehat{x} \in \widehat{V_n}$. Logo, $\phi(V_n) \subset \widehat{V_n}$. Reciprocamente, se $\widehat{x} \in \widehat{V_n}$, existe $y_0 \in \widehat{x}$ tal que $y_0 \in V_n$. De fato, se $\widehat{x} \in \widehat{V_n}$, então $|\widehat{x}| < n^{-1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $|y_0|_L$, $y_0 \in \widehat{x}$ tal que $|y_0|_L < |\widehat{x}| + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é qualquer, segue que existe $y_0 \in \widehat{x}$ tal que $|y_0|_L \leq |\widehat{x}| < n^{-1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe $y_0 \in \widehat{x}$ tal que $y_0 \in V_n$. Logo, $\widehat{x} = \widehat{y_0} = \phi(y_0) \in \phi(V_n)$, portanto $\widehat{V_n} \subset \phi(V_n)$. Portanto, $\widehat{f} : \widehat{x} \longmapsto |\widehat{x}|$ gera a topologia de L/M, dado que L/M é

Hausdorff, possui uma base enumerável de vizinhanças de $\widehat{0}$ e $\widehat{f}$ é uma pseudo-norma (vide Teorema 2.91). Ainda nos resta mostrar que L/M é completo quando L for completo. Para isso, basta mostrar, pela Propopsição 2.101, que toda sequência de Cauchy em L/M converge para algum ponto de L/M. Assim, dada uma sequência $\{\widehat{x}_v\}$ de Cauchy em L/M selecione uma subsequência de termos $\widehat{x}_{v_k}$ tais que $|\widehat{x}_{v_k} - \widehat{x}_{v_{k-1}}| < 2^{-k-1}(k \in \mathbb{N})$. Note que temos um subsequência $\{x_{v_k} : v_k < v_{k+1}\}$ tal que $\widehat{x}_{v_k} - \widehat{x}_{v_{k-1}} \in \widehat{V}_{k+1}$. Logo, existem representantes $y_{v_k} \in \widehat{x}_{v_k} - \widehat{x}_{v_{k-1}}$ $(k \in \mathbb{N})$ tal que $|y_{v_k}|_L < 2^{-k}$, pois para $\epsilon = 2^{-k-1}$, existe $|y_{v_k}|_L \leq |\widehat{x}_{v_k} - \widehat{x}_{v_{k-1}}| + 2^{-k-1} < 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k}$. Se $x_{v_1} \in \widehat{x}_{v_1}$ é escolhido arbitrariamente, então $x_{v_k} = x_{v_1} + \sum\limits_{u=v_2}^{v_k} y_u \in \widehat{x}_{v_k}$ para todo $k \geq 2$. Com efeito:

Se $k = 2$, então $x_{v_2} = x_{v_1} + y_{v_2}$. Logo, $x_{v_2} \in \widehat{x}_{v_1} + \widehat{x}_{v_2} - \widehat{x}_{v_1} = \widehat{x}_{v_2}$.

Suponha que vale para $k = n-1$, isto é, $x_{v_{n-1}} = x_{v_1} + y_{v_2} + \ldots + y_{v_{n-1}} \in \widehat{x}_{v_{n-1}}$.

Se $k = n$, então $x_{v_n} = x_{v_1} + y_{v_2} + \ldots + y_{v_{n-1}} + y_{v_n} = x_{v_{n-1}} + y_{v_n} \in \widehat{x}_{v_{n-1}} + \widehat{x}_{v_n} - \widehat{x}_{v_{n-1}} = \widehat{x}_{v_n}$.

Usando a condição (ii) da Definição 2.88, $\{x_{v_k}\}$ é uma sequência de Cauchy em L. De fato, como

$$x_{v_m} - x_{v_n} = (x_{v_1} + \sum_{u=v_2}^{v_m} y_u) - (x_{v_1} + \sum_{u=v_2}^{v_n} y_u) = \sum_{u=vn+1}^{v_m} y_u,$$

temos $|\sum\limits_{u=v_{n+1}}^{v_m} y_u|_L \leq |y_{v_{n+1}}| + \cdots + |y_{v_m}| < \sum\limits_{u=n+1}^{m} 2^{-u}$, para $m > n$. Assim, para uma 0-vizinhança $U_r = \{x : |x|_L < r^{-1}\}$ em L, existe n_0 tal que $|x_{v_m} - x_{v_n}|_L < \sum\limits_{u=n+1}^{m} 2^{-u} < r^{-1}$, dado que podemos tomar $\sum\limits_{u=n+1}^{m} 2^{-u}$ tão pequeno quanto se queira, logo convergindo para algum $x \in L$. Desde que ϕ é contínua, $\{\widehat{x}_{v_k} = \phi(x_{v_k})\}$ converge para $\phi(x) = \widehat{x}$ em L/M. Portanto, pela Proposição 2.102, a sequência de Cauchy dada inicialmente converge, mostrando que o evt L/M é completo. $\square$

2.7 Complexificação

Nesta seção vamos considerar espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ tal que $\mathbb{K}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$ ou um subcorpo de $\mathbb{C}$ contendo a unidade imaginária i e invariante sob conjugação. Em ambos os casos, entende-se que $\mathbb{K}$ carrega o valor absoluto induzido.

Se $\mathbb{K}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$ contendo a unidade imaginária i, então $\mathbb{K} = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$, onde $\mathbb{H} = \mathbb{K} \cap \mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$. Por outro lado, se $\mathbb{H}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$, denotaremos por $\mathbb{H}(i) = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$ a extensão complexa de $\mathbb{H}$.

Proposição 2.104. *Se L é um espaço vetorial sobre $\mathbb{H}$ a multiplicação por escalar em L pode ser estendida para $\mathbb{K} = \mathbb{H}(i)$ se, e somente se, existe um automorfismo algébrico u sobre L tal que $u^2 = u \circ u = -e$, onde e é a aplicação identidade.*

Demonstração. Se a multiplicação por escalar em L pode ser estendida para $\mathbb{K} = \mathbb{H}(i)$, basta tomar a aplicação $u : x \longmapsto ix$. De fato, u é linear, pois se $x, y \in L$, então $u(x+y) = i(x+y) = ix + iy = u(x) + u(y)$ e se $\lambda \in \mathbb{H}, x \in L$, então $u(\lambda x) = i(\lambda x) =$

$(i\lambda)x = (\lambda i)x = \lambda(ix) = \lambda u(x)$. Além disso, u é bijetora, pois $u(x) = u(y) \Longrightarrow ix = iy \Longrightarrow i(ix) = i(iy) \Longrightarrow (i^2)x = (i^2)y \Longrightarrow (-1)x = (-1)y \Longrightarrow x = y$ e $\forall y \in L$ tome $x = (-i)y \in L$. Então $u(x) = ix = i((-i)y) = (-i^2)y = [-(-1)]y = 1y = y$. Note ainda que para todo $x \in L$ temos $u^2(x) = u \circ u(x) = u(ix) = i(ix) = (i^2)x = (-1)x = -x = -e(x)$. Por outro lado, se u é um automorfismo de L (sobre $\mathbb{H}$) satisfazendo $u^2 = -e$, então para $\beta \in \mathbb{H}$ e $y \in L$, a multiplicação por escalar em L dada por $\mathbb{H} \times L \longrightarrow L$, $(\beta, y) \longmapsto \beta y$, pode ser estendida para $\mathbb{K} = \mathbb{H}(i)$ tomando, para $\lambda, \mu \in \mathbb{H}$ e $x \in L$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H}(i) \times L & \longrightarrow & L \\ (\lambda + i\mu, x) & \longmapsto & (\lambda + i\mu)x := \lambda x + \mu u(x), \end{array} \tag{2.4}$$

pois $(\lambda + i0)x = \lambda x + 0u(x) := \lambda x$ e valem as propriedades:

(1)
$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + i\mu_1)(x + y) &= \lambda_1(x + y) + \mu_1 u(x + y) \\
&= \lambda_1 x + \lambda_1 y + \mu_1(u(x) + u(y)) \\
&= \lambda_1 x + \lambda_1 y + \mu_1 u(x) + \mu_1 u(y) \\
&= \lambda_1 x + \mu_1 u(x) + \lambda_1 y + \mu_1 u(y) \\
&= (\lambda_1 + i\mu_1)x + (\lambda_1 + i\mu_1)y;
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
[(\lambda_1 + i\mu_1) + (\lambda_2 + i\mu_2)]x &= [(\lambda_1 + \lambda_2) + i(\mu_1 + \mu_2)]x \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\mu_1 + \mu_2)u(x) \\
&= \lambda_1 x + \lambda_2 x + \mu_1 u(x) + \mu_2 u(x) \\
&= (\lambda_1 x + \mu_1 u(x)) + (\lambda_2 x + \mu_2 u(x)) \\
&= (\lambda_1 + i\mu_1)x + (\lambda_2 + i\mu_2)x;
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + i\mu_1)((\lambda_2 + i\mu_2)x) &= (\lambda_1 + i\mu_1)(\lambda_2 x + \mu_2 u(x)) \\
&= \lambda_1(\lambda_2 x + \mu_2 u(x)) + \mu_1 u[\lambda_2 x + \mu_2 u(x)] \\
&= \lambda_1(\lambda_2 x) + \lambda_1(\mu_2 u(x)) + \mu_1[u(\lambda_2 x) + u[\mu_2 u(x)]] \\
&= (\lambda_1\lambda_2)x + (\lambda_1\mu_2)u(x) + \mu_1(\lambda_2 u(x) + \mu_2 u^2(x)) \\
&= (\lambda_1\lambda_2)x + (\lambda_1\mu_2)u(x) + (\mu_1\lambda_2)u(x) + \mu_1\mu_2(-x) \\
&= (\lambda_1\lambda_2)x + (\lambda_1\mu_2)u(x) + (\mu_1\lambda_2)u(x) - (\mu_1\mu_2)x \\
&= (\lambda_1\lambda_2)x - (\mu_1\mu_2)x + (\mu_1\lambda_2)u(x) + (\lambda_1\mu_2)u(x) \\
&= (\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2)x + (\mu_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2)u(x) \\
&= [(\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2) + i(\mu_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2)]x \\
&= [(\lambda_1 + i\mu_1)(\lambda_2 + i\mu_2)]x;
\end{aligned}$$

(4) $(1 + i0)x = 1x + 0u(x) = 1x = x$, onde $1 + i0$ é o elemento identidade de $\mathbb{K} = \mathbb{H}(i)$.

□

Proposição 2.105. *Se L é um evt sobre $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$, a multiplicação por escalar em L, $\mathbb{H} \times L \longrightarrow L$ tem uma extensão contínua para $\mathbb{H}(i) \times L \longrightarrow L$ se, e somente se, existe um automorfismo topológico u sobre L satisfazendo $u^2 = -e$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.104 basta mostrar que $\mathbb{H}(i) \times L \longrightarrow L$ é contínua se, e somente se, u é contínua. De fato, se $\mathbb{H}(i) \times L \longrightarrow L$ é contínua, então a restrição dela a $\{i\} \times L \longrightarrow L$ é contínua, donde segue que u é contínua. Reciprocamente, se u é contínua, então por (2.4), temos que $\mathbb{H}(i) \times L \longrightarrow L$ é contínua como soma de funções contínuas, desde que a multiplicação por escalar $\mathbb{H} \times L \longrightarrow L$ é contínua. □

Observação 2.106. Se L é um evt sobre $\mathbb{H}$ e u é um automorfismo topológico de L tal que $u^2 = -e$, então, pela Proposição 2.105, L se torna um evt sobre $\mathbb{K}$. Por outro lado, se L é um espaço vetorial (evt) sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{H}(i)$ contendo i, então a restrição da multiplicação por escalar a $\mathbb{H} \times L$ torna L em um espaço vetorial (evt) L_0 sobre $\mathbb{H}$.

Definição 2.107. L_0 será chamado de **espaço subjacente real** de (ou associado com) L. Uma **forma linear real** sobre L é uma forma linear sobre L_0, e um **hiperplano real** em L é um hiperplano em L_0. Consequentemente, um **subespaço real (subespaço afim real)** de L é um subespaço (subespaço afim) de L_0.

Proposição 2.108. *Se L é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$ e $f \in L^*$ é uma forma linear sobre L, então $f = g + ih$, onde g, h são funções reais unicamente determinadas sobre L (mais precisamente, $g, h : L \longrightarrow \mathbb{H}$, onde $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ é um subcorpo).*

Demonstração. Se L é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$ e $f \in L^*$ é uma forma linear sobre L, então como $f(x) \in \mathbb{K}, \forall x \in L$, temos que $f(x) = g(x) + ih(x), \forall x \in L$, onde $g(x), h(x) \in \mathbb{H} \subset \mathbb{R}$. Assim, temos que $f(x) = g(x) + ih(x) = (g + ih)(x), \forall x \in L$. Logo, $f = g + ih$, onde g, h são funções reais sobre L. Agora, suponha que existam funções $d, e : L \longrightarrow \mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ tais que $d + ie = f$, então $d(x) = g(x), \forall x \in L$ e $e(x) = h(x), \forall x \in L$, desde que $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ é um subcorpo, o que mostra que g, h são únicamente determinadas. □

Proposição 2.109. *g e h são formas lineares reais sobre L, chamadas de **parte real** e **parte imaginária** de f, respectivamente.*

Demonstração. Como $f \in L^*$, para $\lambda \in \mathbb{H} \subset \mathbb{K}$ e $x, y \in L$ temos $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Logo,

$$g(\lambda x+y)+ih(\lambda x+y) = \lambda(g(x)+ih(x))+(g(y)+ih(y)) = (\lambda g(x)+g(y))+i(\lambda h(x)+h(y)),$$

portanto para $\lambda \in \mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ e $x, y \in L$ temos que

$$g(\lambda x + y) = \lambda g(x) + g(y) \text{ e } h(\lambda x + y) = \lambda h(x) + h(y),$$

ou seja, g, h são formas lineares reais sobre L. □

Desde que $g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = ig(x) - h(x)$ para todo $x \in L$, temos que $-h(x) = g(ix)$ para todo $x \in L$ desde que $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ é um subcorpo, ou equivalentemente, $ih(x) = -ig(ix)$ para todo $x \in L$. Logo,

$$f(x) = g(x) - ig(ix) \qquad (x \in L) \tag{2.5}$$

Por outro lado, se g é uma forma linear real qualquer sobre L, então f, definida por 2.5, é um membro de L^* e a única com g como parte real. Com efeito, se $x, y \in L$, temos

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= g(x+y) - ig(i(x+y)) \\
&= g(x) + g(y) - ig(ix+iy) \\
&= g(x) + g(y) - i(g(ix) + g(iy)) \\
&= g(x) + g(y) - ig(ix) - ig(iy) \\
&= g(x) - ig(ix) + g(y) - ig(iy) \\
&= f(x) + f(y);
\end{aligned}$$

para $\lambda = \mu + i\delta \in \mathbb{K} = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$ e $x \in L$, temos

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= g(\lambda x) - ig(i(\lambda x)) \\ &= g((\mu + i\delta)x) - ig(i((\mu + i\delta)x)) \\ &= g(\mu x + \delta u(x)) - ig(i(\mu x + \delta u(x)), \end{aligned}$$

onde u é o automorfismo dado por $u(x) = ix$. Logo,

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \mu g(x) + \delta g(u(x)) - ig(u(\mu x + \delta u(x)) \\ &= \mu g(x) + \delta g(u(x)) - ig(\mu u(x) + \delta u(u(x))) \\ &= \mu g(x) + \delta g(u(x)) - ig(\mu u(x) - \delta x) \\ &= \mu g(x) + \delta g(u(x)) - i\mu g(u(x)) + i\delta g(x) \\ &= \mu g(x) + i\delta g(x) - i\mu g(u(x)) + \delta g(u(x)) \\ &= \mu g(x) + i\delta g(x) - i\mu g(u(x)) - i^2\delta g(u(x)) \\ &= (\mu + i\delta)g(x) - ig(u(x))(\mu + i\delta) \\ &= \lambda g(x) - ig(u(x))\lambda = \lambda(g(x) - ig(ix)) \\ &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Portanto, f é uma forma linear em L, logo é um membro de L^*. Ainda f é única com parte real g porque se $f(x) = g(x) + ih(x)$ e $l(x) = g(x) + it(x)$, então $h(x) = -g(ix) = t(x)$, portanto $f(x) = l(x)$.

Assim, $f \in L^*, f = g+ih$, onde g, h são formas lineares reais unicamente determinadas sobre L e nesse caso $h(x) = -g(ix)$, ou seja $f(x) = g(x) - ig(ix), \forall x \in L$ com g forma linear real unicamente determinada e f é a única com parte real g.

Defina a aplicação $\Gamma : (L^*)_0 \longrightarrow (L_0)^*$, $f \longmapsto g$. Logo, Γ é um isomorfismo algébrico, pois dada $g \in (L_0)^*$ tome $f \in (L^*)_0$ definido por $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Então $\Gamma(f) = g$ e Γ é sobrejetora. Também, se $\Gamma(f) = \Gamma(l)$, com $f, l \in (L^*)_0$, tais que $f(x) = g(x) - ig(ix)$ e $l(x) = k(x) - ik(ix)$ temos que $g = k$, portanto $f(x) = l(x), \forall x \in L$, o que mostra que Γ é injetora. Ainda, Γ é linear, pois para $\alpha \in \mathbb{H}$ e $f, l \in (L^*)_0$ tais que $f(x) = g(x) - ig(ix)$ e $l(x) = k(x) - ik(ix)$ temos que

$$\begin{aligned} (\alpha f + l)(x) &= \alpha f(x) + l(x) \\ &= \alpha(g(x) - ig(ix)) + k(x) - ik(ix) \\ &= (\alpha g(x) + k(x)) - i(\alpha g(ix) + k(ix)) \\ &= M(x) - iM(ix), \end{aligned}$$

onde $M(x) = \alpha g(x) + k(x)$. Logo, $\Gamma(\alpha f + l) = M(x) = \alpha g(x) + k(x) = \alpha\Gamma(f) + \Gamma(l)$.

Além disso, se L é um evt sobre $\mathbb{K}$, então 2.5 mostra que f é contínua se, e somente se, g é contínua.

Assim, temos a

Proposição 2.110. *Sejam L um evt sobre $\mathbb{K}$ e L_0 seu espaço subjacente real. A aplicação $f \longmapsto g$ definida por 2.5 é um isomorfismo algébrico de $(L^*)_0$ sobre $(L_0)^*$, levando o espaço de formas lineares contínuas de L sobre o espaço de formas lineares contínuas de L_0.*

Para hiperplanos em L, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.111. *Seja L um evt sobre $\mathbb{K}$. Todo hiperplano (fechado) em L é a interseção de um conjunto de hiperplanos reais (fechados) unicamente determinados.*

Demonstração. Pela Proposição 2.59, temos que um hiperplano G em L é da forma $G = \{x : f(x) = \gamma\}$, onde $f \in L^*$ e $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{K} = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$. Se g é a parte real de f, então $G = G_1 \cap G_2$, onde $G_1 = \{x : g(x) = \alpha\}$ e $G_2 = \{x : g(ix) = -\beta\}$. De fato, $x \in G$ se, e somente se, $f(x) = \gamma$ se, e somente se, $g(x) - ig(ix) = \alpha + i\beta$ se, e somente se, $g(x) = \alpha$ e $\beta = -g(ix)$ se, e somente se, $x \in G_1$ e $x \in G_2$ se, e somente se, $x \in G_1 \cap G_2$. Desde que f é única com g como parte real unicamente determinada sobre L, G_1 e G_2 determinam um único conjunto de hiperplanos reais cuja interseção é G. Além disso, pela Proposição 2.60 e pela Proposição 2.110, G_1 e G_2 são fechados se, e somente se, G é fechado em L. Com efeito, pela Proposição 2.110, f é contínua se, e somente se, g é contínua, logo, pela Proposição 2.60, G é fechado se, e somente se, G_1 e G_2 são fechados. $\square$

Observação 2.112. Se L é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$, nem sempre existe um automorfismo u de L satisfazendo $u^2 = -e$. Nesses casos é desejável inserir L isomorficamente em um espaço vetorial M sobre $\mathbb{K} = \mathbb{H}(i) = \mathbb{H} + i\mathbb{H}$.

Exemplo 2.113. Para espaços vetoriais de dimensão finita par sobre um corpo $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ sempre existe automorfismo u de L satisfazendo $u^2 = -e$. De fato, se a dimensão de L é $2n$, então defina o automorfismo $u : L \longrightarrow L$ tal que a matriz B de u é formada por n blocos diagonais de ordem 2 da forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ com $b \neq 0$ e os demais elementos iguais a zero. Assim, a matriz B do automorfismo u satisfaz $B^2 = -I_{2n}$, portanto $u^2 = -e$.

Exemplo 2.114. Para espaços vetoriais de dimensão finita ímpar sobre um corpo $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ não existe automorfismo u de L satisfazendo $u^2 = -e$. De fato, se a dimensão de L sobre $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ é $2n+1$, então $L = L_{2n} \oplus L_1$, onde L_{2n} é um subespaço vetorial de L de dimensão $2n$ e L_1 é um subespaço vetorial de L de dimensão 1. Assim, se existe um automorfismo $u : L \longrightarrow L$ tal que $u^2 = -e$, então o automorfismo $u_{|L_1}$ satisfaz $u^2_{|L_1} = -e$. Logo, existe uma matriz $B = (a), a \in \mathbb{H} \subset \mathbb{R}$ tal que $B^2 = -I_1$. Logo, $a^2 = -1$, o que é um absurdo. Portanto, se L é um espaço vetorial de dimensão ímpar sobre um corpo $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$, então não existe automorfismo u de L tal que $u^2 = -e$.

Exemplo 2.115. Seja L um espaço vetorial sobre $\mathbb{H}$. Considere o produto $L \times L$. A aplicação $u : (x, y) \longmapsto (-y, x)$ é um automorfismo algébrico de $L \times L$ (o qual é topológico se L for um evt sobre $\mathbb{H}$) satisfazendo $u^2 = -e$. Com efeito, se $w = (x, y), v = (s, t) \in L \times L$, então $u(w + v) = u(x + s, y + t) = (-(y + t), x + s) = (-y - t, x + s) = (-y, x) + (-t, s) = u(x, y) + u(s, t) = u(w) + u(v)$; se $\lambda \in \mathbb{H}$ e $w = (x, y) \in L \times L$, então $u(\lambda w) = u(\lambda x, \lambda y) = (-\lambda y, \lambda x) = \lambda(-y, x) = \lambda u(x, y) = \lambda u(w)$; se $w = (x, y), v = (s, t) \in L \times L$, então $u(w) = u(v) \Longrightarrow (-y, x) = (-t, s) \Longrightarrow x = s$ e $y = t \Longrightarrow (x, y) = (s, t) \Longrightarrow w = v$; para todo $p = (q, r) \in L \times L$, tome $w = (r, -q) \in L \times L$. Então $u(w) = u(r, -q) = (q, r) = p$; se $w = (x, y) \in L \times L$, então $u(u(w)) = u(-y, x) = (-x, -y) = -(x, y) = -w = -e(w)$. Assim, pela Proposição 2.104, a multiplicação por escalar pode ser estendida para $\mathbb{K} \times L \times L \longrightarrow L \times L$. Logo, por (2.4), temos que $i(y, 0) = u(y, 0) = (0, y)$, e se escrevermos $(x, 0) = x$ para todo $x \in L$, então cada $z \in L \times L$ tem uma única representação $z = x + iy$, com $x \in L$, $y \in L$, pois se $z = (x, y)$, então $z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + i(y, 0) = x + iy$, dado que $(x, 0) = x$ e $(y, 0) = y$. Além disso, se L for um evt sobre $\mathbb{H}$, então $L \times L$ é um evt sobre $\mathbb{H}$ cuja aplicação $u : (x, y) \longmapsto (-y, x)$ é um automorfismo topológico. Logo, pela Observação 2.106, $L \times L$ é um evt sobre $\mathbb{K}$, tal que $(L \times L)_0 = L \oplus iL$. Esse tipo de inserção é chamado de **complexificação** de um espaço vetorial (ou evt) definido sobre um subcorpo de $\mathbb{R}$.

3 Conclusão

Neste trabalho estudamos espaços vetoriais topológicos que carregam a estrutura de espaços vetoriais e espaços topológicos, bem como suas principais propriedades, abordando os seguintes tópicos: topologias em espaços vetoriais, espaços produtos, subespaços, soma direta, espaços quocientes, espaços vetoriais topológicos de dimensão finita, variedades topológicas, hiperplanos, conjuntos limitados, metrizabilidade e complexidade.

Observamos, na primeira seção do Capítulo 2, que quando se define uma topologia compatível com a estrutura de um espaço vetorial, ou seja, as funções soma e multiplicação por escalar são contínuas, temos que toda translação é um homeomorfismo. Além disso, foi construído, a partir de uma base de vizinhanças de 0, um filtro de uniformidade de modo que todo evt é um espaço uniforme e dessa forma, vimos que se o espaço uniforme for Hausdorff, então é possível mergulhar ele como um subespaço denso de um evt de Hausdorff completo, chamado de completamento desse espaço.

Ainda, na segunda seção, construimos novos espaços vetoriais topológicos a partir da continuidade das funções soma e multiplicação por escalar, além das topologias produto e quociente. Também vimos que a função soma direta algébrica em um evt é contínua e se for um isomorfismo topológico, então será uma soma direta topológica. Na terceira seção, vimos que para um evt de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ existe um isomorfismo topológico entre o evt e $\mathbb{K}_0^n$, onde $\mathbb{K}_0$ é o evt unidimensional obtido considerando-se $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre si mesmo. Na quarta seção, discutimos espaços afins e hiperplanos, onde um espaço afim é uma translação de um subconjunto de um evt e um hiperplano pode ser visto como a pré-imagem, por uma forma linear não nula, de algum escalar do corpo $\mathbb{K}$. Na quinta seção, referente aos conjuntos limitados, vimos que esses conjuntos são aqueles que são absorvidos por toda vizinhança de zero; e na sexta seção, vimos que uma condição necessária e suficiente para espaços vetoriais topológicos de Hausdorff serem metrizáveis é que eles possuam bases enumeráveis de vizinhanças de 0 e, neste caso, existe uma pseudo-norma cuja métrica definida por ela gera uma topologia. Na sétima seção, apresentamos o processo de complexificação que permite inserir um espaço vetorial topológico sobre um subcorpo dos reais em um espaço vetorial topológico sobre os complexos.

No que diz respeito à referência [2] tomada como base, ela contém a maior parte do que escrevemos sobre espaços vetoriais topológicos. O maior problema encontrado estava relacionado à sua notação e terminologia, muitas vezes ambíguas, como no caso do termo "isomorfismo" que tínhamos que ver se era um isomorfismo topológico ou algébrico. Entretanto, ainda assim, recomendamos consultar esta referência devido à mesma estar mais organizada de acordo com a sequência do nosso trabalho.

Por fim, esperamos que este trabalho possa contribuir para uma melhor compreensão daqueles interessados em estudar este assunto. Ressaltamos que as referências estão organizadas de acordo com a ordem na qual foram citadas no texto.

Referências

[1] BOURBAKI, N. *General Topology*. 1. ed. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.

[2] SCHAEFER, H. H. *Topological Vector Spaces*. 3. ed. New York: Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1971.

[3] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[4] LANG, S. *Undergraduate Algebra*. 3. ed. New York: Springer, 2005.

[5] BOURBAKI, N. *Theory of Sets*. 1. ed. California: Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

[6] ENDO, M. A note on locally compact division rings. *Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli, Rikkyo Daigaku sugaku zasshi*, v. 14, p. 57–64, 1966.

[7] TRÈVES, F. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. 1. ed. New York: Dover Publications, Inc, 2006.