

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)

Curso de Graduação em Física

Colheita de energia usando dispositivos baseados em materiais piezoelétrico

Rodrigo Tumolin Rocha

Prof(a). Dr(a). Maria Cecília V. S. Carneiro

Rio Claro (SP)

2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

RODRIGO TUMOLIN ROCHA

“COLHEITA DE ENERGIA USANDO DISPOSITIVOS
BASEADOS EM MATERIAIS PIEZOELÉTRICO”

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel ou Licenciado em Física, sobre o tema “Colheita de energia usando dispositivos baseados em materiais piezoelétrico”.

Rio Claro – SP

2012

RODRIGO TUMOLIN ROCHA

“COLHEITA DE ENERGIA USANDO DISPOSITIVOS
BASEADOS EM MATERIAIS PIEZOELÉTRICO”

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel ou Licenciado em Física, sobre o tema “Colheita de energia usando dispositivos baseados em materiais piezoelétrico”.

Comissão Examinadora

Prof(a). Dr(a). Maria Cecília V. S. Carneiro (orientador)

Prof. Dr. Ricardo Paupitz B. dos Santos

Prof. Dr. Roberto E. Lagos Monaco

Rio Claro, ____ de _____ de _____.

Assinatura do(a) aluno(a)

Assinatura do(a) orientador(a)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais Carlos e Silvia que são meus maiores amigos nessa vida. Sempre foram as pessoas mais importantes da minha vida. Sempre acreditaram em mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de chegar aonde eu cheguei e por ter me dado tudo que tenho de bom, minha família e todas as pessoas que acredito que sejam meus amigos.

Aos meus pais Carlos e Silvia, que sempre acreditaram em mim e pelo grande incentivo que me deram para com os estudos e principalmente na minha carreira acadêmica. Pelo esforço que sempre fizeram para que tudo que eu fizesse fosse possível. Pelo tempo que dedicaram a mim e deixaram os seus de lado. São as pessoas mais importantes da minha vida. São o motivo de eu estar onde estou hoje.

Ao meu irmão Felipe por sempre me incentivar e tentar me ajudar no meu futuro. Sempre que pôde estar ao meu lado esteve me apoiando, e ajudando em minha vida.

Agradeço ao professor Titular José Manoel Balthazar por confiar em mim e em meu trabalho, pelo apoio que me deu para o desenvolvimento de meu trabalho, que soube também sempre me deixar motivado com o meu trabalho e me mostrar um caminho para um futuro em que nunca enxerguei.

Agradeço muito à Prof(a) Dra. Maria Cecília V. S. Carneiro pelo apoio em que me deu para o desenvolvimento de meu trabalho.

Aos professores da Banca de apresentação do meu trabalho por fazerem parte da minha graduação.

E aos meus amigos de graduação que sempre estiveram comigo por quatro anos. Sempre trabalhando juntos para que fosse possível esta vitória. Meus amigos de república que marcaram a minha vida, em especial Carlos Eduardo, William Nicholas e Aline Porto sempre tentando me ajudar crescer pessoalmente.

E em especial aos meus amigos Paulo Menegasso e Tércius Ramos que foram as pessoas que mais me incentivaram na minha graduação e nunca deixaram de acreditar em mim. Sempre me ajudando o máximo possível.

RESUMO

Recentemente o interesse e a pesquisa sobre a captura de energia (Energy Harvesting) têm aumentado substancialmente. Muitos pesquisadores têm concentrado seus esforços em encontrar a melhor configuração para estes sistemas e para otimizar sua potência de saída. No processo de captura de energia, a energia elétrica é obtida através da conversão de energia mecânica criada por uma fonte de vibração do ambiente através de um transdutor, por exemplo, um fino filme piezo-cerâmico. Essa fonte de vibração é, por exemplo, uma barra sofrendo alguma força mecânica capaz de gerar uma vibração nessa barra, uma barra oscilando é o exemplo mais convenientemente usado. Diferentes mecanismos de acoplamento eletromecânico têm sido desenvolvidos para dispositivos de captura, e um interesse particular tem sido dado ao uso de modelos que transformam essas vibrações mecânicas em corrente elétrica utilizando um elemento piezoelétrico. Neste trabalho, foi proposto um modelo de captura de energia de vibrações, a partir da oscilação de uma barra, incluindo não linearidade no acoplamento piezoelétrico e uma excitação não-ideal do material. A partir desse modelo, desenvolveu-se um sistema para que se obtivesse alguns resultados sobre a potência capturada pelo material. Demonstrou-se que a potência capturada foi influenciada pelo efeito das não-linearidades do acoplamento piezoelétrico, alterando o comportamento dinâmico do sistema.

Palavras-chave: Captura de Energia, Sistemas eletromecânicos, Sistemas Piezoelétrico.

ABSTRACT

Recently, research on energy harvesting has increased substantially. Many researchers have concentrated their efforts to find the best configuration for these systems and to optimize their output power. In the process of energy harvesting, the electric energy is obtained by converting mechanics energy created by an environment vibration source by a transducer, for example, a thin piezoceramic film. That vibration source is, for example, a beam suffering some mechanic force able to generate a vibration in it, an oscillating beam is the best properly used example. Different mechanisms of electromechanical coupling have been developed to harvesting devices, and a particular interest has been given to the use of models that transform the mechanical vibration into electrical current using a piezoelectric element. In this paper we propose a model to energy harvesting from vibrations, from an oscillating beam, including non-linearities in the piezoelectric coupling and a non-ideal excitation in the material. From this model, it was developed a system to obtain some results about the harvested power by the material. It was demonstrated that the power captured was influenced by the effect of the nonlinearities of the piezoelectric coupling, modifying the system dynamic behavior.

Keywords: Energy Harvesting, Electromechanical systems, Piezoelectric systems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Motivação.....	10
1.2	Objetivos do Trabalho.....	11
1.3	Organização do Trabalho	12
2	REDES ELÉTRICAS.....	14
2.1	Introdução.....	14
2.2	Equações constitutivas para elementos de circuito	14
2.2.1	Capacitor	14
2.2.2	Indutor	16
2.3	Leis de Kirchhoff	18
2.4	Princípio de Hamilton para redes elétricas.....	19
2.4.1	Para cargas elétricas	19
2.4.2	Para fluxos.....	20
2.5	Equações de Lagrange.....	21
2.5.1	Para cargas elétricas	21
2.5.2	Para fluxo	21
3	DISPOSITIVOS ELETROMECAÑNICOS	23
3.1	Introdução.....	23
3.2	Relações constitutivas para transdutores.....	23
3.2.1	Capacitor de placas móveis	24
3.2.2	Indutor de núcleo móvel.....	26
3.3	Princípio de Hamilton	28
3.3.1	Formulação de deslocamento e carga.....	28
3.3.2	Formulação de deslocamento e fluxo.....	29
3.4	Equação de Lagrange	29
3.4.1	Formulação de deslocamento e carga.....	29
3.4.2	Formulação de deslocamento e fluxo.....	30
3.4.3	Função dissipação	30
4	SISTEMAS PIEZOELÉTRICOS.....	32
4.1	Introdução.....	32
4.2	Transdutor piezo-elétrico	34
4.3	Relações constitutivas de um transdutor discreto	36
4.3.1	Interpretação de k^2	40

4.4	Estrutura com um transdutor piezo-elétrico discreto	42
4.4.1	Fonte de tensão.....	44
4.4.2	Fonte de corrente.....	45
4.4.3	Admitância de um transdutor piezo-elétrico	45
5	SISTEMAS DE COLHEITA DE ENERGIA DO MEIO AMBIENTE (ENERGY HARVESTER)	48
5.1	Introdução.....	48
5.2	Dispositivo de Captura de Energia Piezoelétrico	48
5.3	Modos de Operação do Transdutor Piezoelétrico	49
5.4	Não-Linearidade Piezoelétrico	51
5.5	Modelo Proposto por Triplett e Quinn (2009)	54
5.6	Modelagem Matemática.....	55
5.6.1	Considerações Gerais	55
5.6.2	Modelagem Matemática do Sistema de Captura de Energia.....	55
5.6.3	Obtenção das equações de movimento.....	56
5.6.4	Adimensionalização do sistema	58
5.7	Simulações numéricas	59
5.7.1	Análise do Sistema de Captação de Energia	60
5.7.2	Caso Linear – Coeficiente de Acoplamento Piezoelétrico Não Linear $\Theta = 0.00$	60
5.7.3	Caso Não Linear – Coeficiente de Acoplamento Piezoelétrico não linear $\Theta = 1.00$	62
5.7.4	Caso Linear com coeficiente de amortecimento “ $\alpha = 0.25$ ”	65
5.7.5	Caso Não Linear com coeficiente de amortecimento “ $\alpha = 0.25$ ”	67
6	CONCLUSÕES.....	70
	REFERÊNCIAS	72
	APENDICE	74
A	Revisão mecânica analítica	74
A.1	Transformação de coordenadas.....	74
A.2	Sistemas de coordenadas em rotação	78
B	Rotinas Computacionais.....	84
C	TEORIA DE VIBRAÇÕES	87
C.1	Introdução.....	87
C.2	Conceitos Básicos de Vibração	88
C.3	Graus de liberdade.....	90

C.4	Movimento Harmônico	91
C.5	Método da Energia de Rayleigh	93

1 INTRODUÇÃO

Inicialmente apresentam-se neste capítulo, a motivação do trabalho e os objetivos deste TCC, na sequência descreve-se como o trabalho está organizado e o que será apresentado em seus **capítulos**.

1.1 Motivação

Os avanços da tecnologia estão produzindo dispositivos eletrônicos portáteis cada vez menores e capazes de trabalhar com níveis de consumo de energia muito baixos. Esses dispositivos são, na maioria das vezes, alimentados por baterias que são fontes de energia finita. Desta forma, há a necessidade de trocá-las ou recarregá-las periodicamente. Esse fato pode se tornar um problema em algumas situações. Um exemplo que ilustra a situação descrita anteriormente é o uso de baterias eletroquímicas convencionais para alimentar sensores instalados em lugares pouco acessíveis. Quando a energia da bateria acaba os sensores devem ser recuperados a fim de recarregar a bateria ou mesmo trocá-las. Além disso, o tamanho e o peso das baterias são desproporcionais quando comparados aos sistemas eletrônicos que elas alimentam. Sendo assim, o uso dos dispositivos de captura de energia, “Energy Harvesting Devices”, permite que as baterias sejam automaticamente recarregadas ou mesmo substituídas em algumas aplicações. Um exemplo detalhado destas teorias pode-se citar o trabalho de Priya e Inman (2009).

A captura de energia é descrita como o processo de captura de energia do ambiente e sua conversão em eletricidade, e o interesse como fonte de energia para futuras concepções de dispositivos eletrônicos e tem crescido substancialmente segundo Priya e Inman (2009). Tomando por convenção que a eletricidade é fornecida através de uma usina ou uma bateria, é exigida uma fiação elétrica e uma consequente substituição das baterias. Segundo Fujitsu (2010), nos últimos anos a ideia de utilizar energia ambiente nas formas de luz, calor, vibrações, ondas de rádio, etc, tornou-se cada vez mais atraente, e muitos métodos para produzir eletricidade a partir destes diferentes tipos de fontes de energia têm sido desenvolvidos. Com isso, a substituição das baterias e cabos de alimentação poderia ser eliminada com o uso de dispositivos de captura de energia do ambiente. Um exemplo do processo de captura de energia e suas possíveis fontes e aplicações pode ser visto na figura (1.1).



Figura 1.1 – Processo de Captura de Energia do Ambiente (Fujitsu, 2010).

Entre as possíveis fontes de energia disponíveis no ambiente, a energia cinética é uma das fontes de energia que se encontra mais prontamente disponível. O princípio da captura da energia cinética é o movimento ou a deformação de uma estrutura contida dentro do dispositivo de captura de energia. Esse deslocamento ou deformação pode ser convertido em energia elétrica através de três métodos: piezoelectricidade, eletrostática ou indução magnética conforme Cottone (2007). Sendo que a piezoelectricidade é entre os três métodos aquele que alcança o maior nível de eficiência.

1.2 Objetivos do Trabalho

Este trabalho teve como principal objetivo propor e analisar um modelo de sistema de captura de energia de vibração piezoeletrico linear e não-linear, sendo excitado externamente por uma função harmônica.

Assim, os principais objetivos destes TCC, resumem-se aos seguintes tópicos:

- Revisão de Conceitos Básicos de Mecânica Geral e Analítica (L. Meirovitch, 1970) e de Redes Elétricas (PREUMONT, 2006), para compreensão do modelo matemático adotado;
- Compreensão de Comportamento Dinâmico de Sistemas Eletromecânicos de Sistemas Piezoelétricos (PREUMONT, 2006);
- Elaboração de um modelo matemático, baseado no modelo matemático de Triplett e Quinn (2009), de um sistema de captura de energia, o qual consiste de um sistema formado por uma viga onde são aplicados duas camadas de finos filmes piezocerâmicos (película), tendo uma carga resistiva na sua extremidade fixa (Triplett e Quinn, 2009);
- Realização de simulações numéricas e apresentar os resultados com o modelo linear.
- Verificação do efeito das não-linearidades provenientes do acoplamento piezoelétrico sobre a captura de energia .

1.3 Organização do Trabalho

Para se atingir os objetivos, citados, logo acima, o presente trabalho foi dividido em 6 capítulos, referências bibliográficas e um apêndice, cujos títulos são: Teoria de Vibrações (Rao, 1990), Rede elétricas (PREUMONT, 2006), Dispositivos Eletromecânicos (PREUMONT, 2006), Sistemas Piezoelétrico (PREUMONT, 2006), Sistema de colheita de energia do meio ambiente (Energy Harvester) (Priya and Inman (2009), Du Toit e Wardle (2007), Cottone (2007), Erturk (2009), Triplett e Quinn (2009), Jalili (2010)).

Em “Redes Elétricas” estudou-se o comportamento da tensão e corrente elétrica em um circuito, além do desenvolvimento das equações a partir das leis de Kirchhoff, pelo método de Hamilton e também Lagrange (PREUMONT, 2006).

Em “Dispositivos Eletromecânicos” estudou-se o acoplamento entre a parte elétrica e a parte mecânica de um sistema com um capacitor e um sistema com um indutor, e o desenvolvimento de equações a partir das relações de Hamilton e da Lagrangeana (PREUMONT, 2006).

“Sistemas Piezoelétrico” é o capítulo que trata do desenvolvimento do projeto. A partir de um material piezoelétrico pode-se montar um sistema onde, a partir da vibração do material, onde este material piezoelétrico está acoplado, pode-se gerar uma corrente elétrica para alimentar o sistema ou até mesmo para gerar energia para uma fonte. Também tem-se possíveis sistemas onde pode-se acoplar um circuito resistivo em shunt para se reduzir a vibração do material (PREUMONT, 2006).

O capítulo 5 “Sistemas de colheita de energia do meio ambiente (Energy Harvester)” é onde foi proposto um modelo de vibração de uma viga, desenvolveram-se as equações do sistema e então definiu-se qual é o melhor modelo para a colheita de energia daquele sistema comparado com o valor experimental (Priya and Inman (2009), Du Toit e Wardle (2007), Cottone (2007), Erturk (2009), Triplett e Quinn (2009), Jalili (2010)).

No capítulo da conclusão, tem-se os resultados finais comentados, como eles foram obtidos e o desenvolvimento do trabalho em si de uma forma mais resumida.

No apêndice é apresentada uma revisão de mecânica analítica (L. Meirovitch, 1970) onde foi possível desenvolver os tópicos relacionados nos primeiros 3 capítulos deste trabalho, e as rotinas explícitas explicando em detalhes o desenvolvimento desses algoritmos, e as formas mais eficazes de se obter bons resultados.

Ainda no apêndice no capítulo “Teoria de Vibrações” fez-se um resumo sobre as possíveis vibrações de um material e as definições sobre as vibrações. Estudaram-se graus de liberdade para que pudesse ser possível observar a quantidade de movimentos do modelo estudado. Além disso, outro estudo muito importante foi o estudo das soluções de um oscilador harmônico, já que o presente trabalho é relacionado com o movimento harmônico de uma viga (RAO, 1990).

2 REDES ELÉTRICAS

2.1 Introdução

Redes elétricas são constituídas de elementos passivos tais como resistores, capacitores e indutores, e elementos ativos como as fontes de corrente e tensão. As restrições de interconexões em redes elétricas são representadas pelas leis de Kirchoff, que será definida mais adiante.

Neste capítulo será apresentada a abordagem variacional para analisar redes elétricas. Essa introdução indireta pode ser usada como uma alternativa para a abordagem direta baseada nas leis de Kirchhoff, mas mais importante, é poder combiná-la com sistemas mecânicos para analisar a dinâmica de sistemas eletromecânicos.

2.2 Equações constitutivas para elementos de circuito

2.2.1 Capacitor

Um capacitor é formado por duas superfícies separadas por um material dielétrico, como mostrado na figura 2.1.

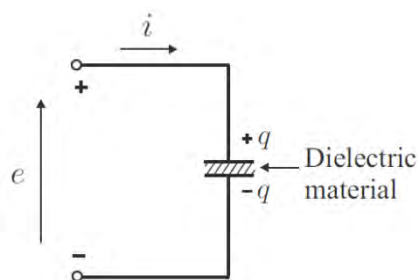


Figura 2.1 - Circuito com capacitor (PREUMONT, 2006).

Quando carregado, a carga elétrica “ q ” é adicionada na sua superfície, e tirado de outra superfície. A corrente fluindo do capacitor é a taxa de mudança de carga no capacitor pelo tempo, ou seja:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.1)$$

No processo de carregamento do capacitor, uma diferença de potencial “ e ” é estabelecida entre as superfícies condutoras. A relação entre “ e ” e “ q ” pode ser mensurável estaticamente. Esta é a relação constitutiva do capacitor, $e(q)$.

A energia elétrica armazenada então no capacitor é o trabalho feito no carregamento do capacitor, sendo a potência $P = ei$, tem-se:

$$W_e(q) = \int_0^t e i dt = \int_0^q e dq \quad (2.2)$$

Onde $W_e(q)$ é a energia elétrica armazenada no capacitor. E $e = \frac{dW_e}{dq}$. Por exemplo, usando capacitores lineares, sendo $e = \frac{q}{C}$ a energia desse capacitor é:

$$W_e(q) = \frac{q^2}{2C} \quad (2.3)$$

Pela transformação de Legendre, podemos definir a energia do sistema como:

$$W_e^*(e) = eq - W(q) \quad (2.4)$$

Onde $W_e^*(e)$ é a função co-energia elétrica do capacitor. Onde pode ser calculada pela integral:

$$W_e^*(e) = \int_0^e q de \quad (2.5)$$

Calculando-se para o mesmo capacitor linear com carga $q = Ce$:

$$W_e^*(e) = \frac{Ce^2}{2} \quad (2.6)$$

Representado na figura 2.2. A área de cima da figura representa a co-energia do sistema, e a área abaixo da curva representa a energia do sistema.

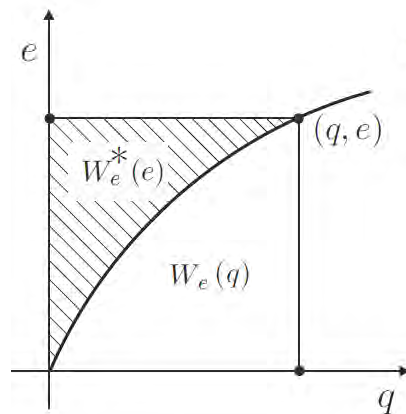


Figura 2.2 - Curva que representa as energias do sistema (PREUMONT, 2006).

2.2.2 Indutor

Quando a corrente flui num condutor, um campo magnético é produzido em volta do condutor; a intensidade do campo é proporcional à corrente. Observe a figura 2.3:

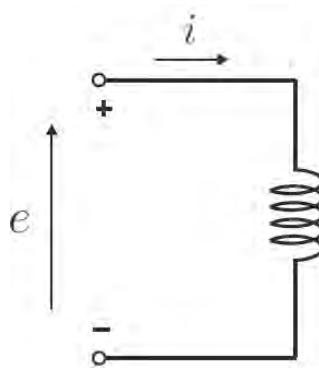


Figura 2.3 - Circuito com indutor, (PREUMONT, 2006).

Do mesmo modo, quando um condutor inclui uma região contendo um campo magnético, uma tensão é induzida no condutor quando o campo magnético muda. Esses

efeitos de indução são apresentados em todos os condutores, mas eles se tornam muito importantes se o condutor consistir de bobinas empacotadas muito próximas de suas voltas. No ar, o comportamento magnético da bobina é linear (fluxo $\lambda \propto i$ corrente), mas um núcleo ferromagnético é frequentemente adicionado à bobina para aumentar a densidade do fluxo magnético por muitas ordens de magnitude.

O comportamento dessas bobinas ferromagnéticas é não linear e frequentemente histeréticas, ou seja, é a tendência desse material conservar suas propriedades na ausência de um estímulo que gerou essas propriedades.

A lei de Faraday diz que a tensão desenvolvida através de um indutor é igual ao negativo da taxa de variação do fluxo λ . Se o condutor é linear:

$$\lambda = Li \quad (2.7)$$

Onde L é a indutância dada em [H/A] ou [W/A], “i” é a corrente [A] e λ é o fluxo [Henry] ou [Weber]. A energia magnética armazenada num indutor ideal é o trabalho realizado no indutor quando varia seu estado magnético:

$$W_m(\lambda) = \int_0^\lambda id\lambda \quad (2.8)$$

E sendo linear $i = \frac{\lambda}{L}$:

$$W_m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2L} \quad (2.9)$$

Para o indutor também temos uma função de co-energia magnética que é definida pela transformação de Legendre:

$$W_m^*(i) = \lambda i - W_m(\lambda) \quad (2.10)$$

Que pode ser calculada pela integral:

$$W_m^*(i) = \int_0^i \lambda di \quad (2.11)$$

Para um indutor linear $\lambda = Li$:

$$W_m^*(i) = \frac{Li^2}{2} \quad (2.12)$$

Representado pela figura 2.4, a área de cima da figura representa a co-energia do sistema, e a área abaixo da curva representa a energia do sistema.

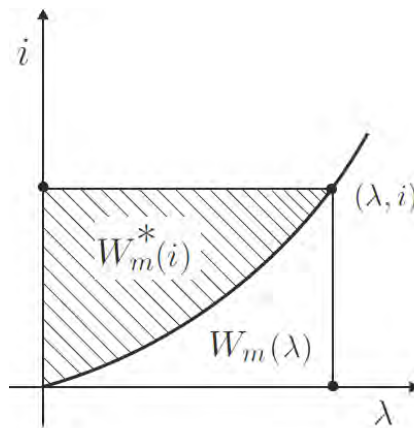


Figura 2.4 - Curva que representa as energias do sistema. (PREUMONT, 2006).

2.3 Leis de Kirchhoff

Redes elétricas são construídas por interconexões de elementos passivos e fontes. As interconexões entre os elementos produzem restrições entre as variáveis descrevendo elementos individuais. Essas leis de interconexões são conhecidas como Leis de Kirchhoff. Aqui vamos definir duas leis de Kirchhoff que são a lei de corrente (LCK) e de tensão (LVK) (PREUMONT, 2006).

A lei de corrente de Kirchhoff (LCK) define que a soma do fluxo de corrente em qualquer nó deve ser zero. É um estado de conservação de carga elétrica e reflete o fato de as cargas elétricas não poderem acumular nos nós da rede (PREUMONT, 2006)..

A lei de tensão de Kirchhoff (LVK) define que a soma das tensões através de qualquer elemento ao longo do circuito fechado deve ser zero. Isso reflete no fato que o potencial elétrico em qualquer ponto é independente do caminho seguido para chegar nesse mesmo ponto (PREUMONT, 2006)..

2.4 Princípio de Hamilton para redes elétricas

No princípio de Hamilton, o indicador variacional é definido das equações constitutivas dos elementos da rede elétrica. Admitindo variações que satisfazem um conjunto das leis de Kirchhoff, e um estado estacionário de indicadores variacionais tem que satisfazer outro conjunto de leis de Kirchhoff. Há duas formas duplas do princípio de Hamilton, dependendo da escolha das variáveis independentes. De uma forma, as variáveis independentes são as cargas que satisfazem LCK e de fluxo que satisfazem LVK (PREUMONT, 2006).

2.4.1 Para cargas elétricas

Nessa formulação as variáveis generalizadas são cargas e correntes. Variações admissíveis δq_i devem satisfazer as leis de corrente de Kirchhoff, e as variáveis de carga e corrente devem satisfazer $i_k = dq_k/dt$. Usando a equação (3.13) do trabalho virtual (Princípio de D'Alembert), (PREUMONT, 2006):

$$\sum_{i=1}^M \left(e_i - \frac{d\lambda_i}{dt} \right) \delta q_i = 0 \quad (2.13)$$

Fazendo algumas considerações e usando a equação (3.13) chegamos à expressão do indicador variacional que é definido então como:

$$V.I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta (W_m^* - W_e) + \sum_{i=1}^{n_e} E_k \delta q_k \right] dt \quad (2.14)$$

Onde W_m^* é a co-energia magnética da rede, que é a soma de todas as energias dos indutores individuais da rede, expressados em termos da corrente i_j . W_e é a energia elétrica da rede, que é a soma de todas as energias elétricas dos capacitores individuais da rede, expressada em termos de q_j .

Esse sistema tem que satisfazer LCK e satisfazer que $i_j = \frac{dq_j}{dt}$. A Lagrangeana do sistema é dada por $W_m^* - W_e$. E $\sum_{k=1}^{n_e} E_k \delta q_k$ que corresponde ao trabalho virtual realizado pelos elementos não conservativos, normalmente denotados como δW_{nc} (PREUMONT, 2006).

2.4.2 Para fluxos

Já nessa formulação, as variáveis generalizadas são fluxos λ_k e tensões e_k . As variáveis admissíveis devem satisfazer as leis de tensão de Kirchhoff, e as variáveis de fluxo e tensão devem satisfazer $e_k = d\lambda_k/dt$. Usando novamente o princípio de D'Alembert (PREUMONT, 2006):

$$\sum_{k=1}^N \left(i_k - \frac{dq_k}{dt} \right) \delta \lambda_k = 0 \quad (2.15)$$

Onde N é o número de elementos do circuito. Fazendo também algumas considerações e usando o princípio de D'Alembert (PREUMONT, 2006) chegamos ao indicador variacional para o fluxo que é dado por:

$$V.I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta (W_e^* - W_m) + \sum_{k=1}^{n_e} I_k \delta \lambda_k \right] dt \quad (2.16)$$

Onde W_e^* é a co-energia elétrica da rede, é a soma de todas as energias elétricas dos capacitores da rede, expressado em termos da tensão e_k . A energia magnética da rede é W_m , soma de todas as energias magnéticas dos indutores na rede, expressos em termos dos fluxos λ_k .

Para essa relação ser admissível, deve-se satisfazer a lei de tensão de Kirchhoff e satisfazer $e_k = d\lambda_k/dt$. E a Lagrangeana do sistema é dada por $W_e^* - W_m$.

2.5 Equações de Lagrange

Pode-se também usar a formulação de Lagrange para definir uma fórmula para carga e fluxo de um circuito.

2.5.1 Para cargas elétricas

A equação de Lagrange na formulação de carga, como mostrado anteriormente é:

$$L(\dot{q}_k, q_k) = W_m^*(\dot{q}_k) - W_e(q_k) \quad (2.17)$$

Onde $W_m^*(\dot{q}_k)$ é a co-energia magnética da rede, expressa em termos das malhas das correntes, que é igual à soma de todas as energias magnéticas dos indutores da rede. A energia elétrica da rede é $W_e(q_k)$, expressada em termos das variáveis de carga, é igual a soma de todas as energias elétricas dos capacitores da rede.

E na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = E_k \quad k=1,2,\dots,n \quad (2.18)$$

Onde E_k é a tensão associada com as coordenadas de carga q_k .

2.5.2 Para fluxo

A equação de Lagrange na formulação de fluxo é:

$$L(\dot{\lambda}_k, \lambda_k) = W_e^*(\dot{\lambda}_k) - W_m(\lambda_k) \quad (2.19)$$

Onde $W_e^*(\dot{\lambda}_k)$ é a co-energia elétrica da rede expressa em termos das tensões independentes $\dot{\lambda}_k$, e é igual a soma das energias elétricas de todos os capacitores da rede, expressos em termos das variáveis de tensão. $W_m(\lambda_k)$ é a energia magnética da rede, expresso em termos das variáveis de fluxo, é igual a soma das energia magnéticas dos indutores da rede.

Na equação de Euler- Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = I_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

Onde I_k é a corrente associada ao fluxo λ_k .

3 DISPOSITIVOS ELETROMECAÂNICOS

3.1 Introdução

Este capítulo começa com a revisão das equações constitutivas dos parâmetros mais frequentes aglomerados de transdutores eletromecânicos sem perda. Em seguida, um desenvolvimento das equações de estado a partir do princípio de Hamilton para sistemas eletromecânicos e a equação de Lagrange.

3.2 Relações constitutivas para transdutores

Um transdutor conservativo é um transdutor que conserva energia, também chamado de “lossless”. Há dois tipos de transdutores, aqueles que armazenam energia e aqueles que transferem energia de uma forma para outra sem ser capaz de armazenar.

No transdutor que pode armazenar energia, essa energia pode ser armazenada em uma forma (Mecanicamente ou Eletricamente) e recuperada mais tarde em outra forma. Já no transdutor que transfere, é de uma forma para outra. A potência instantânea que entra é sempre igual à potência instantânea de saída. Assume-se também que o campo que produz forças no transdutor é elétrico ou magnético, mas nunca ambos. Pode-se assumir isso porque a dimensão física do dispositivo, l , é muito menor que o comprimento de onda eletromagnético, $\frac{l}{\lambda} \ll 1$.

As forças eletrostáticas são da ordem de l^{-2} . A energia eletrostática é l^{-3} . Enquanto as forças eletromagnéticas são da ordem de l^{-4} e as energias eletromagnéticas são da ordem de l^{-5} .

3.2.1 Capacitor de placas móveis

Um capacitor de placas móveis é um transdutor de armazenamento de energia conservativa que permite a energia elétrica ser transformada em energia mecânica e vice-versa. Como na figura 3.1, vê-se um capacitor de placas móveis:

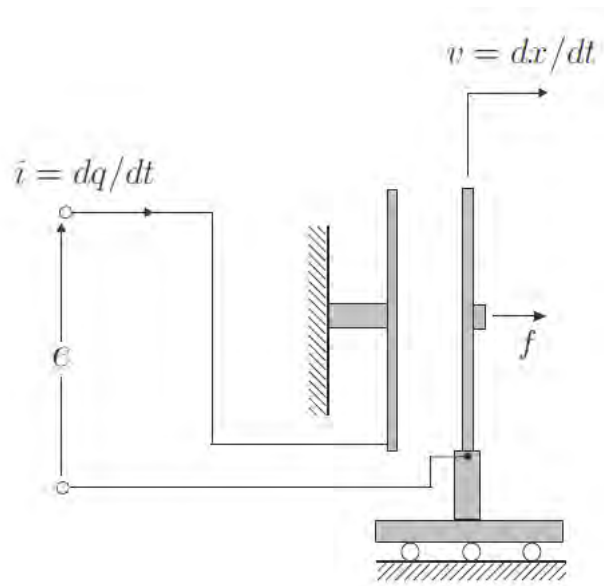


Figura 3.1- Capacitor de placas-móveis, (PREUMONT, 2006).

Onde “ q ” é a carga no capacitor, “ e ” é a tensão através das placas, “ x ” é o deslocamento das placas móveis e “ f ” é a força externa requerida para segurar a placa móvel em equilíbrio contra a força de atração eletrostática.

Sendo “ q ” e “ x ” variáveis independentes, as relações constitutivas de um capacitor de placas móveis podem ser dadas na forma de equações de tensão e força em termos de “ x ” e “ q ”:

$$e = e(x, q)$$

$$f = f(x, q)$$

Quando $q = 0$, não há campo elétrico e a força f deve ser zero para todo x , ou seja, $f(x, 0) = 0$. Para descobrir essas variáveis dependentes “ e ” e “ f ” pela transformação de Legendre tem-se:

$$W_e^*(x, e) = eq - W_e(x, q) \quad (3.1)$$

Sendo um capacitor linear, a forma explícita das funções estados da energia e da co-energia, nesse caso é:

$$e = \frac{q}{C(x)} \quad C(x) = \frac{\varepsilon A}{x}$$

Onde “ ε ” constante dielétrica do material entre as placas e “ A ” é a área de placa. Agora se calcula a energia elétrica pela integral:

$$W_e(x, q) = \int_0^q edq = \frac{q^2}{2C(x)} \quad (3.2)$$

E pela transformação de Legendre obtemos a função co-energia energia dada por:

$$W_e^*(x, q) = \frac{1}{2} C(x) e^2 \quad (3.3)$$

E então as equações de força, tensão e carga são definidas para o capacitor de placas móveis:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial W_e}{\partial x} = -\frac{q^2}{2C^2} C'(x) \\ e &= \frac{\partial W_e}{\partial q} = \frac{q}{C(x)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

E

$$f = -\frac{\partial W_e^*}{\partial q} = -\frac{e^2}{2} C'(x) \quad (3.5)$$

$$q = \frac{\partial W_e^*}{\partial e} = Ce$$

Onde $C'(x) = \frac{dC(x)}{dx}$.

3.2.2 Indutor de núcleo móvel

Um indutor de núcleo móvel é outro transdutor de armazenamento de energia conservativo. Esse indutor é representado pela figura 3.2.

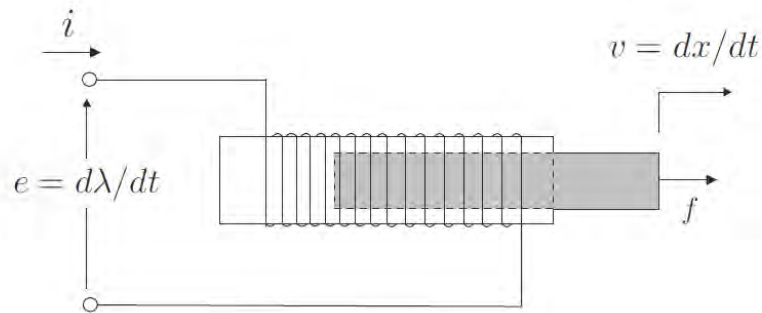


Figura 3.2 - Indutor de núcleo móvel (PREUMONT, 2006).

Similarmente como o capacitor de placas móveis o indutor de núcleo móvel depende da corrente e da força do sistema, dependentes do deslocamento “x” e do fluxo “λ”. Que são dados por:

$$i = i(x, \lambda)$$

$$f = f(x, \lambda)$$

Quando $\lambda = 0$, a força f , equilibrando a atração magnética, deve ser zero para todo o deslocamento x, ou seja:

$$f(x, 0) = 0$$

Pela transformação de Legendre a função co-energia magnética é dada por:

$$W_m^*(x, i) = i\lambda - W_m(x, \lambda) \quad (3.6)$$

Onde “i” é a corrente, λ é o fluxo e $W_m(x, \lambda)$ é a energia magnética do sistema. Como o sistema é linear, ou seja, $\lambda = L(x)i$, onde $L(x)$ é a indutância da bobina, e usando o fato que $f = 0$ se $\lambda = 0$, então se pode calcular a energia magnética a partir da seguinte integral:

$$W_m(x, \lambda) = \int_0^\lambda i d\lambda \quad (3.7)$$

E tiramos dessa integral que o valor para a energia magnética é:

$$W_m(x, \lambda) = \frac{\lambda^2}{2L(x)} \quad (3.8)$$

Logo, sabendo da função co-energia definida pela transformação de Legendre obtemos o seu valor dado por:

$$W_m^*(x, i) = \frac{1}{2}L(x)i^2 \quad (3.9)$$

Tendo então os valores da energia e co-energia magnética podemos tirar os valores de força, fluxo e corrente que são:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{\lambda^2}{2L^2}L'(x) & i &= \frac{\partial W_m}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{L(x)} \\ f &= -\frac{\partial W_m^*}{\partial x} = \frac{i^2}{2}L'(x) & \lambda &= \frac{\partial W_m^*}{\partial i} = L(x)i \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.3 Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton foi usado para redes elétricas no capítulo anterior onde foram consideradas duas aproximações. A formulação de carga é baseada na variação de carga compatível com a lei de corrente de Kirchhoff. A formulação de fluxo é baseada em variações de fluxo compatível com a lei de tensão de Kirchhoff.

Em todos os casos, a Lagrangeana foi definida como a diferença entre a função co-energia (que depende da derivada no tempo das coordenadas generalizadas) e a função energia (a qual depende das coordenadas generalizadas, mas não das respectivas derivadas no tempo).

Para sistemas eletromecânicos, o indicador variacional é agora definido como a soma dos indicadores mecânicos e dos indicadores elétricos e depende da formulação.

3.3.1 Formulação de deslocamento e carga

Nesse caso é necessária a inclusão das restrições cinemáticas num deslocamento virtual δx_i e nas velocidades, e a lei de corrente de Kirchhoff numa variação virtual de cargas δq_i e correntes. O indicador variacional é dado por:

$$V.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta (T^* + W_m^* - V - W_e) + \sum f_i \delta x_i + \sum e_j \delta q_j \right] dt \quad (3.11)$$

Para sistemas eletromecânicos, as variações virtuais do deslocamento e das cargas é zero. Com isso a co-energia cinética T^* e a co-energia magnética W_m^* se agrupam, pois dependem do tempo e das coordenadas generalizadas, respectivamente \dot{x}_i e \dot{q}_k . Mas pelo contrário, a energia potencial V e a energia elétrica W_e não dependem da derivada no tempo das variáveis generalizadas, mas apenas de x_i e q_k . A partir dessas considerações a Lagrangeana é igual ao total de co-energia menos o total de energia, ou seja:

$$L(\dot{z}_i, z_i, \dot{q}_k, q_k) = T^* + W_m^* - (V + W_e) \quad (3.12)$$

3.3.2 Formulação de deslocamento e fluxo

Nesse caso, também admite-se que as variáveis mecânicas não mudam. O deslocamento virtual δx_i deve ser compatível com a cinética e a variação do fluxo $\delta \lambda_i$ deve ser compatível com a lei de tensão de Kirchhoff. Então o indicador variacional é dado por:

$$V.I. = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta(T^* + W_e^* - V - W_m) + \sum f_i \delta x_i + \sum i_j \delta \lambda_j \right] dt \quad (3.13)$$

Da mesma forma que na seção (3.3.1), as variações virtuais do deslocamento e do fluxo deve ser zero. A equação de Lagrange agora é dada por:

$$L(\dot{z}_i, z_i, \dot{\lambda}_k, \lambda_k) = T^* + W_e^* - (V + W_m) \quad (3.14)$$

A co-energia cinética T^* e a co-energia elétrica W_e^* dependem da derivada no tempo das coordenadas generalizadas, \dot{x}_i e $\dot{\lambda}_k = e_k$, enquanto a energia potencial V e a energia magnética W_m não dependem explicitamente de \dot{x}_i e $\dot{\lambda}_k$, mas apenas de x_i e λ_k .

3.4 Equação de Lagrange

Se o sistema puder ser descrito por um conjunto completo de coordenadas independentes descritas como mecânicas (z_i) e partes elétricas (q_k ou λ_k) do sistema, pode-se usar a equação de Lagrange derivada do princípio de Hamilton.

3.4.1 Formulação de deslocamento e carga

A Lagrangeana do sistema é:

$$L(\dot{z}_i, z_i, \dot{q}_k, q_k) = T^* + W_m^* - V - W_e \quad (3.15)$$

E o trabalho virtual (Energia não conservativa):

$$\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^m Q_i \delta z_i + \sum_{k=1}^n E_k \delta q_k \quad (3.16)$$

Então do princípio de Hamilton tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} &= Q_i & i = 1, \dots, m \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= E_k & k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.4.2 Formulação de deslocamento e fluxo

Sendo a Lagrangeana:

$$L(\dot{z}_i, z_i, \dot{\lambda}_k, \lambda_k) = T^* + W_e^* - V - W_m \quad (3.18)$$

O trabalho virtual (energia não conservativa) também:

$$\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^m Q_i \delta z_i + \sum_{k=1}^n I_k \delta \lambda_k \quad (3.19)$$

E do princípio de Hamilton tira-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} &= Q_i & i = 1, \dots, m \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} &= I_k & k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.4.3 Função dissipação

Se tiver uma contribuição de dissipação de energia, adiciona-se essa contribuição na Lagrangeana do sistema. Também chamadas de funções de dissipação de Rayleigh, onde são funções de dissipação de elementos resistivos e capacitivos. Essa função de dissipação de energia é, na formulação de carga, dada por:

$$E_k = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \quad (3.21)$$

E na formulação de fluxo tem-se:

$$I_k = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\lambda}_k} \quad (3.22)$$

A função de dissipação de um resistor, por exemplo, é dada por:

$$D(\dot{q}) = \frac{1}{2} E \dot{q}^2 \quad (\text{carga}) \quad (3.23)$$

$$D(\dot{\lambda}) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\lambda}^2}{R} \quad (\text{fluxo}) \quad (3.24)$$

Pela equação de Euler - Lagrange tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = E_k \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{\lambda}_k} - \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = I_k \quad (3.26)$$

4 SISTEMAS PIEZOELÉTRICOS

4.1 Introdução

Os materiais piezo-elétrico pertencem aos chamados materiais inteligentes, ou materiais multifuncionais, os quais tem a habilidade de responder significativamente ao estímulo de diferentes naturezas físicas.

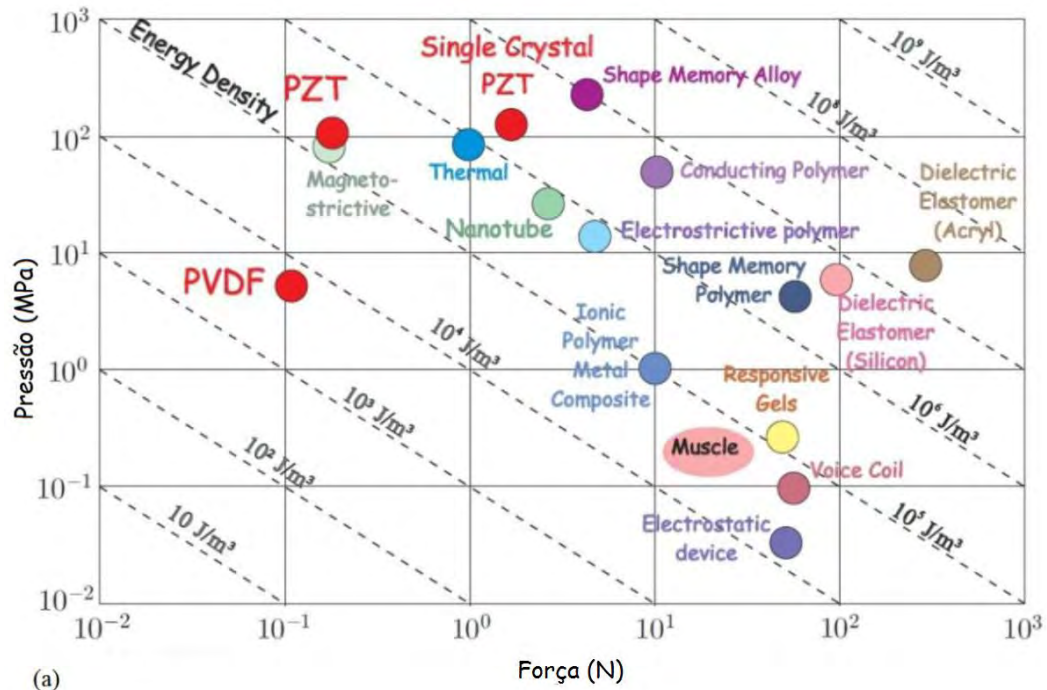
A figura 4.1 lista vários efeitos que são observados em materiais que respondem a várias entradas, como podemos citar entradas mecânicas, elétricas, magnéticas, térmicas e luz.

Saida Entrada	Força	Carga Elétrica	Fluxo Magnético	Temperatura	Luz
Pressão	Elasticidade	Piezo- Eletricidade	Magnetostricção		Foto- elasticidade
Campo Elétrico	Piezo- Eletricidade	Permissivi- dade			Efeito optico elétrico
Campo Magnético	Magneto- stricção	Efeito eletro- magnético	Permeabili- dade		magneto- optico
Calor	Expansão Térmica	Piro- eletricidade		Calor Específico	
Luz	Foto- estricção	Efeito Fotovoltaico			Índice de Refração

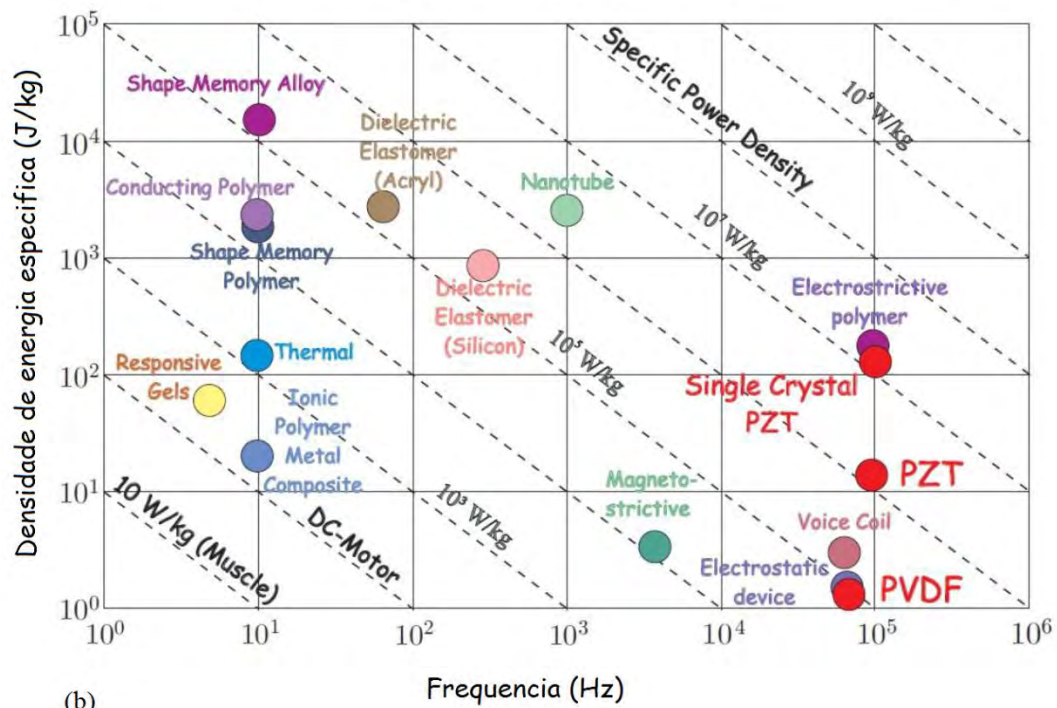
Figura 4.1 - Estimulo-Resposta em relação a vários efeitos indicados no material. Os materiais inteligentes correspondem às células não diagonais (PREUMONT, 2006).

Se a magnitude do material é adequada, o acoplamento pode ser usado para construir transdutores discretos ou distribuídos de vários tipos, os quais podem ser usados como sensores, atuadores, ou mesmo estruturas integradas com vários graus de adaptação e complexidade (como fibras). Para fazê-los controláveis ou responsáveis pelo seu ambiente

(para mudanças na forma, controle de precisão de modelagem, detecção de dano, alívio de resposta dinâmica, etc.).



(a)



(b)

Figura 4.2 - (a) Diagrama de Força contra tensão. (b) Diagrama frequência contra Densidade de energia específica. (PREUMONT, 2006).

As figuras (4.2 (a) e 4.2 (b)) resumem as propriedades mecânicas de alguns materiais inteligentes que são considerados atuadores para aplicações em controle estrutural.

A figura 4.2(a) mostra a pressão máxima (bloqueada) versus a tensão máxima livre. A linha diagonal no diagrama indica a densidade de energia constante. A figura 4.2(b) mostra a densidade de energia específica, isto é, densidade de energia por unidade de massa, versus a frequência máxima.

As linhas diagonais indicam a densidade de poder específica constante. Note que todas as características do material variam por muitos graus de magnitude. Entre todos eles, os materiais piezo-elétrico são aqueles com mais aplicações.

4.2 Transdutor piezo-elétrico

O efeito piezo-elétrico direto consiste na habilidade de certos materiais cristalinos para gerar uma carga elétrica em proporção a uma força externa aplicada. O efeito direto é usado para transdutores de força. De acordo com o efeito piezo-elétrico inverso, um campo elétrico paralelo à direção de polarização induz uma expansão do material. O efeito piezo-elétrico é anisotrópico. Isso pode ser exibido apenas por matérias cuja estrutura de cristal não tem centro de simetria. É o caso de algumas cerâmicas sobre certas temperaturas chamadas temperatura de Curie. Nesta fase, o cristal tem dipolos elétricos embutidos, mas os dipolos são randomicamente orientados e os dipolos elétricos em uma escala macroscópica é zero. Durante o processo de polarização, quando o cristal é resfriado na presença de um forte campo elétrico, o dipolo tende a se alinhar, levando a um dipolo elétrico em uma escala macroscópica. Após do resfriamento e removido do campo de polarização, os dipolos não podem retornar às suas posições originais. Eles permanecem alinhados ao longo da direção dos polos e o corpo do material torna-se permanentemente piezo-elétrico, com a habilidade para converter energia mecânica em energia elétrica e vice-versa. Essa propriedade irá ser perdida se a temperatura exceder a temperatura de Curie ou se o transdutor está sujeito a um campo elétrico excessivo na direção oposta do campo de polarização.

Os materiais piezo-elétrico mais populares são Lead-Zirconate-Titanate (PZT) que é cerâmico, e Polyvinilidene fluoride (PVDF) que é um polímero. Além do efeito piezo-elétrico, os materiais piezo-elétrico exibem um efeito piroelétrico, de acordo com o qual

cargas elétricas são geradas quando o material está sujeito a uma determinada temperatura. Esse efeito é usado para produzir detectores de calor.

Neste capítulo, considerando um transdutor feito por um material piezo-elétrico unidimensional de equações constitutivas:

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon^T E + d_{33} T \\ S &= d_{33} E + s^E T \end{aligned} \quad (4.1)$$

São as relações de Onsager, onde “D” é o deslocamento elétrico (carga por unidade de área, expresso em Coulomb/m²). “E” é o Campo elétrico expresso em [V/m]. “T” é a pressão dada em [N/m²]. “S” é a tensão. “ ε^T ” é a constante dielétrica do material (permissividade). “ s^E ” é a tendência quando o campo elétrico é constante (inverso do módulo de Young). E “ d_{33} ” é a constante piezo-elétrico dada em [m/V] ou [Coulomb/Newton].

O subscrito “33” é que, por conveniência, o índice 3 é sempre alinhado para a direção do polo do material, assume-se que o campo elétrico é paralelo à direção do polo.

Na ausência de forças externas, o transdutor sujeito a uma tensão com a mesma polaridade como durante a polarização produz um alongamento, e uma tensão oposta durante a polarização o faz contrair, isso é o chamado efeito piezo-elétrico inverso.

Na equação da tensão “S” isso equivale a “ d_{33} ” positivo. Reciprocamente (efeito piezo-elétrico direto), se considerarmos um transdutor com eletrodos abertos ($D = 0$), de acordo com a equação do deslocamento “D”, $E = -\left(\frac{d_{33}}{\varepsilon^T}\right)T$, a qual significa que a pressão da tração irá produzir uma tensão com polaridade oposta à duração de polarização, e uma tração comprimida irá produzir uma tensão com a mesma polaridade durante a polarização.

4.3 Relações constitutivas de um transdutor discreto

As equações do deslocamento “D” e da tensão “S” podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^T & d_{33} \\ d_{33} & s^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \\ T \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Onde (E; T) são variáveis independentes e (D; S) são variáveis dependentes. Ficando:

$$\begin{Bmatrix} D \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^T (1-k^2) & e_{33} \\ -e_{33} & c^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \\ S \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Onde $\left(c^E = \frac{1}{s^E} \right)$ é o módulo de Young sob $E = 0$ (eletrodos em curto-circuito), dado em $[\text{N/m}^2]$ ou $[\text{Pascal}]$. O produto de d_{33} pelo módulo de Young é $\left(e_{33} = \frac{d_{33}}{s^E} \right)$. É também a constante em relação ao deslocamento elétrico da tensão para eletrodos em curto-circuito $[\text{C/m}^2]$, e também, em relação à compressão da pressão para o campo elétrico quando o transdutor está bloqueado ($S = 0$). Por convenção definimos:

$$k^2 = \frac{d_{33}^2}{s^E \varepsilon^T} = \frac{e_{33}^2}{c^E \varepsilon^T} \quad (4.4)$$

Onde k é o fator de acoplamento do material. Esse fator mostra a eficiência da conversão da energia mecânica em energia elétrica, e vice-versa. Da equação (4.3) nota-se que $\varepsilon^T (1-k^2)$ é a constante dielétrica abaixo da tensão zero.

Assumindo que todas as quantidades mecânicas e elétricas são distribuídas uniformemente num transdutor linear formado por uma pilha de “n” discos de espessura t e uma seção cruzada A , como mostrado na figura 4.3:

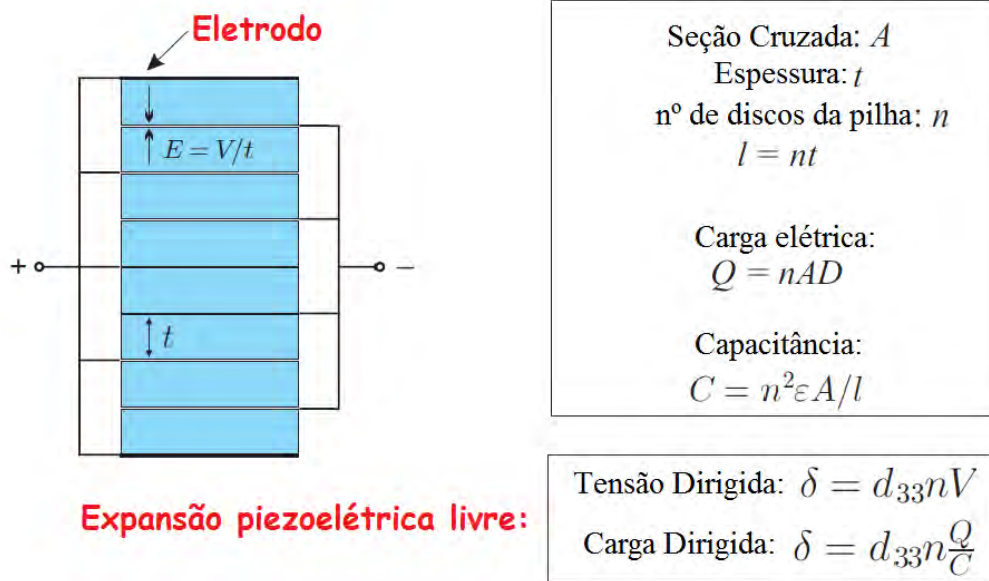


Figura 4.3 - Transdutor piezoelétrico linear (PREUMONT, 2006).

As equações globais constituídas de um transdutor são obtidas integrando as equações (4.2) e (4.3) pelo volume do transdutor, obtendo então:

$$\begin{Bmatrix} Q \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & nd_{33} \\ nd_{33} & 1/K_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ f \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} Q \\ f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C(1-k^2) & nd_{33}K_a \\ -nd_{33}K_a & K_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \Delta \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Onde, $Q = nAD$ é a carga elétrica total em um eletrodo do transdutor. $\Delta = Sl$ é a extensão total onde $l = nt$ é o comprimento do transdutor. A força total aplicada no sistema é $f = AT$. A tensão aplicada entre os eletrodos do transdutor é dada por “V”, resultando num campo elétrico $E = V/t = nV/l$. A capacitância de um transdutor com um carregamento externo ($f = 0$) é $C = \epsilon^T An^2/l$. E a rigidez com eletrodos em curto-circuito ($V = 0$) é $K_a = A/s^E l$.

A partir dessas equações o fator de acoplamento eletromecânico pode ser escrito alternativamente como:

$$k^2 = \frac{d_{33}^2}{s^E \epsilon^T} = \frac{n^2 d_{33}^2 K_a}{C} \quad (4.7)$$

A equação (4.5) pode ser invertida para:

$$\begin{Bmatrix} V \\ f \end{Bmatrix} = \frac{K_a}{C(1-k^2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{K_a} & -nd_{33} \\ -nd_{33} & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ \Delta \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Onde a rigidez com os eletrodos abertos ($Q = 0$) é $K_a/(1-k^2)$ e a capacitância para uma geometria fixa $\Delta = 0$ é $C(1-k^2)$. Os valores típicos de “k” são na faixa de 0.3 e 0.7. Para um grande “k” a rigidez muda significativamente com as condições de limite elétrico, e similarmente a capacitância depende das condições de limite mecânico.

Escrevendo a energia eletromecânica total armazenada e funções co-energia, considerando um transdutor piezo-elétrico discreto (Figura 4.4). A potência total entregue ao transdutor é a soma da potência elétrica, Vi com a potência mecânica, $f\dot{\Delta}$. O trabalho da eletricidade no transdutor é:

$$dW = Vidt + f\dot{\Delta}dt = VdQ + fd\Delta \quad (4.9)$$

Utilizando o mesmo procedimento feito no capítulo (3), com o princípio de Hamilton e as equações de Lagrange, e para um elemento conservativo, esse trabalho é convertido em energia armazenada, dW_e , e energia total armazenada $W_e(\Delta, Q)$.

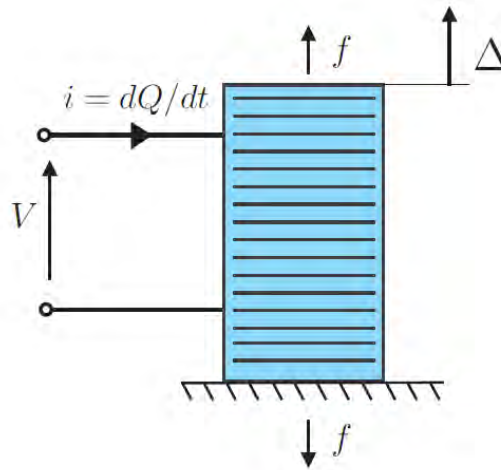


Figura 4.4 - Transdutor Piezoelétrico discreto (PREUMONT, 2006).

Integrando a equação (4.8) e utilizando os procedimentos como foi desenvolvido, a equação da energia é:

$$W_e(\Delta, Q) = \frac{Q^2}{2C(1-k^2)} - \frac{2nd_{33}K_a}{C(1-k^2)} Q\Delta + \frac{K_a}{(1-k^2)} \frac{\Delta^2}{2} \quad (4.10)$$

Essa é a expressão analítica da energia eletromecânica armazenada para um transdutor piezo-elétrico discreto. O primeiro termo do lado direito da equação (4.10) é a energia elétrica armazenada na capacitância $C(1-k^2)$ (correspondente a uma geometria fixa, $\Delta=0$). O terceiro termo é a energia de tensão elástica armazenada numa mola de rigidez $K_a/(1-k^2)$ (correspondente a eletrodos abertos, $Q=0$). O segundo termo é a energia piezo-elétrico.

A co-energia é definida pela transformação de Legendre:

$$W_e^*(\Delta, V) = VQ - W_e(\Delta, Q) \quad (4.11)$$

Fazendo todo o mesmo procedimento feito no capítulo (3) obtém-se então:

$$W_e^*(\Delta, V) = C(1-k^2) \frac{V^2}{2} + nd_{33}K_a V\Delta - K_a \frac{\Delta^2}{2} \quad (4.12)$$

Essa é a forma analítica da função co-energia para um transdutor piezo-elétrico discreto. O primeiro termo do lado direito da equação (4.12) é reconhecido pela co-energia elétrica na capacitância $C(1-k^2)$ (correspondente a uma geometria fixa, $\Delta=0$). O terceiro termo é a energia de tensão armazenada em uma mola de rigidez K_a (correspondente aos eletrodos em curto circuito, $V=0$). O segundo termo dessa equação é a co-energia piezo-elétrico.

4.3.1 Interpretação de k^2

Considerando um transdutor piezo-elétrico que, primeiro, é carregado com uma força F com eletrodos em curto-circuito, tem-se então:

$$\Delta_1 = \frac{F}{K_a} \quad (4.13)$$

Onde $K_a = A/(s^E l)$ é a rigidez com eletrodos em curto-circuito. A energia armazenada no sistema é dada por:

$$W_1 = \int_0^{\Delta_1} f dx = \frac{F^2}{2K_a} \quad (4.14)$$

Aberto os eletrodos e o transdutor descarregado de acordo com o caminho da inclinação $K_a/(1-k^2)$, o novo limite então passa a ser:

$$\Delta_2 = \frac{F(1-k^2)}{K_a} \quad (4.15)$$

A energia do novo limite é:

$$W_2 = \int_0^{\Delta_2} f dx = \frac{F\Delta_2}{2} = \frac{F^2(1-k^2)}{2K_a} \quad (4.16)$$

Deixando $W_1 - W_2$ armazenada num transdutor, a taxa entre a energia restante armazenada e a energia inicial armazenada é:

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = k^2 \quad (4.17)$$

Do mesmo modo, considere o seguinte ciclo elétrico. Primeiro a tensão V é aplicada no transdutor que é mecanicamente livre ($f = 0$). As cargas elétricas que aparecem nos eletrodos são:

$$Q_1 = CV \quad (4.18)$$

Onde $C = \frac{\varepsilon^T A n^2}{l}$ é a capacitância livre. E a energia armazenada no transdutor é:

$$W_1 = \frac{CV^2}{2} \quad (4.19)$$

Bloqueado mecanicamente o transdutor e descarregado de uma tensão “ V ” para zero, tem-se as cargas elétricas como:

$$Q_2 = C(1 - k^2)V \quad (4.20)$$

A energia para essa carga é

$$W_2 = \frac{C(1 - k^2)V^2}{2} \quad (4.21)$$

Armazenando novamente as energias tem-se então que:

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = k^2 \quad (4.22)$$

Os valores de k^2 são obtidos experimentalmente e muitas vezes baseado na impedância, como discutido na seção (4.4.3).

4.4 Estrutura com um transdutor piezo-elétrico discreto

A figura 4.5 mostra uma estrutura linear, não amortecida para simplicidade do problema, e equipada com um transdutor piezo-elétrico discreto, conectado a uma fonte de corrente $I(t)$ e desviada para um resistor R (circuito em shunt para reduzir a vibração do sistema).

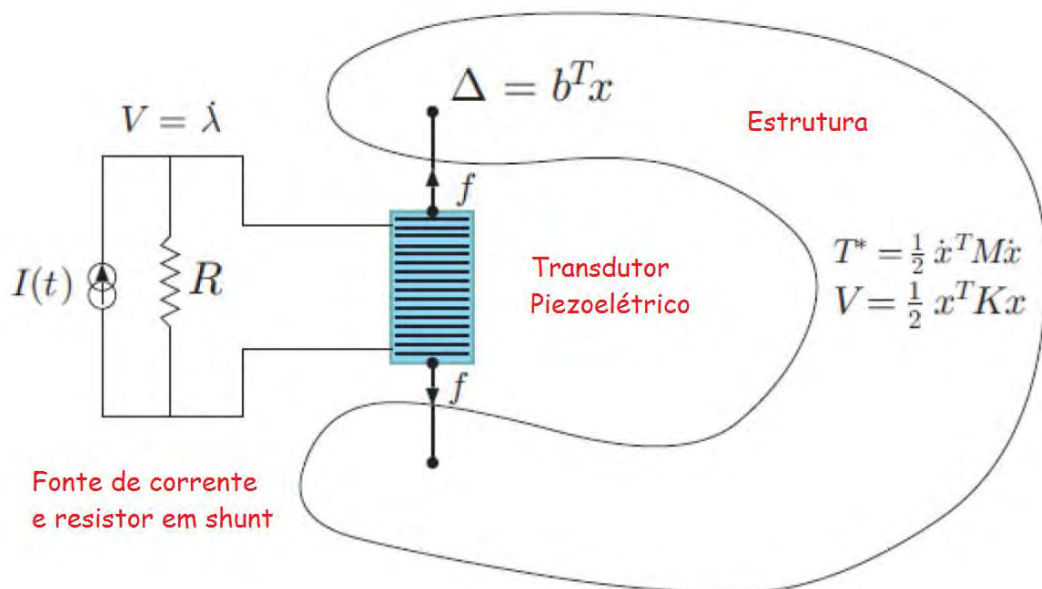


Figura 4.5 - Estrutura linear equipada com um transdutor piezoelétrico, uma fonte de corrente de e um circuito shunt (PREUMONT, 2006).

Usando a formulação de fluxo acoplada, a Lagrangeana do sistema é:

$$L = T^* + W_e^* - V \quad (4.23)$$

Onde a energia cinética da estrutura é:

$$T^* = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} \quad (4.24)$$

A energia potencial da estrutura (energia de deformação) é:

$$V = \frac{1}{2} x^T K x \quad (4.25)$$

Excluindo o transdutor piezo-elétrico, tem-se:

$$W_e^*(\dot{\lambda}) = \frac{1}{2} C(1-k^2) \dot{\lambda}^2 + nd_{33} K_a \dot{\lambda} \Delta - \frac{1}{2} K_a \Delta^2 \quad (4.26)$$

Que é a função co-energia do transdutor piezo-elétrico dada pela equação (4.12), onde $\dot{\lambda} = V$ é a tensão do sistema. Combinando essas equações e se $\Delta = b^T x$, onde b é o vetor projeção em relação ao fim do deslocamento do transdutor, tem-se a Lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} - \frac{1}{2} x^T (K + K_a b b^T) x + C(1-k^2) \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + nd_{33} K_a \dot{\lambda} b^T x \quad (4.27)$$

O trabalho virtual das forças não conservativas é dado por:

$$\delta W_{nc} = I \delta \lambda - \frac{\dot{\lambda}}{R} \delta \lambda + F \delta x \quad (4.28)$$

Onde I é a intensidade da fonte e F é o vetor força externa aplicado na estrutura. O resistor pode ser manipulado alternativamente por funções dissipadoras como:

$$D = \frac{\dot{\lambda}^2}{2R} \quad (4.29)$$

Se o amortecimento viscoso de uma estrutura está incluído na análise, a contribuição é:

$$D = \frac{1}{2} \dot{x}^T C \dot{x} \quad (4.30)$$

Essa contribuição aparece na função de dissipação. Essas equações são o ponto inicial da Lagrangeana de um sistema dinâmico. As equações de Lagrange relativas às coordenadas generalizadas x e λ são:

$$M\ddot{x} + (K + K_a bb^T)x = bK_a nd_{33}V + F \quad (4.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left[C(1-k^2)V + nd_{33}K_a b^T x \right] + \frac{V}{R} = I \quad (4.32)$$

Onde $V = \dot{\lambda}$. Essas duas equações gerenciam o sistema dinâmico quando a fonte de corrente é usada.

4.4.1 Fonte de tensão

Se a fonte de tensão é usada ao invés da corrente, λ deixa de ser a variável generalizada e o resistor em shunt torna-se desprezível. Nesse caso, a equação (4.31) é aplicada sozinha. Na ausência de forças externas, se a equação (4.31) definir uma expansão livre $\delta = nd_{33}V$ na tensão V (equação 4.5), pode-se dizer que:

$$M\ddot{x} + (K + K_a bb^T)x = bK_a \delta \quad (4.33)$$

Então, o efeito do transdutor piezo-elétrico numa estrutura pode ser representado por um par de forças auto-equilibradas aplicadas axialmente nos fins do transdutor. Como para cargas térmicas, a magnitude dessas forças aplicadas é igual ao produto da rigidez do transdutor, sob as condições de limite em curto-circuito (K_a), e a expansão piezo-elétrico livre, δ^{-1} (analogia térmica).

Da equação (4.31), se os eletrodos de um transdutor estão em curto-circuito, então $\delta = 0$. E o problema de autovalor é então:

$$M\ddot{x} + (K + K_a bb^T)x = 0 \quad (4.34)$$

Da equação (4.34) tira-se que $(K + K_a bb^T)$ é a matriz de rigidez global quando o transdutor está em curto-circuito.

4.4.2 Fonte de corrente

Para o caso de fonte de corrente pura, $R \rightarrow \infty$ na equação (4.32), usa-se transformada de Laplace e eliminando V entre as equações (4.31) e (4.32), e depois de algumas álgebras, e usando a equação (4.7) tem-se:

$$\left[Ms^2 + \left(K + \frac{K_a}{1-k^2} bb^T \right) \right] x = b \frac{K_a}{1-k^2} nd_{33} \frac{I}{sC} \quad (4.35)$$

Onde $I/s = Q$. Se $f = 0$ na equação (4.7), tem-se $\delta = nd_{33} \frac{Q}{C}$ que é a expansão livre de um transdutor sobre Q . O efeito de um transdutor piezo-elétrico em uma estrutura é um par de forças piezo-elétrico auto-equilibradas. A magnitude é igual ao produto da expansão livre δ e a rigidez do transdutor. Essa rigidez é quando os eletrodos são abertos, definida por $\frac{K_a}{(1-k^2)}$, (equação 4.8, com $Q = 0$).

Se os eletrodos do transdutor forem abertos, $I = 0$ na equação (4.35), tem-se:

$$\left[Ms^2 + \left(K + \frac{K_a}{1-k^2} bb^T \right) \right] x = 0 \quad (4.36)$$

E então como anteriormente a matriz de rigidez global quando o transdutor está com eletrodos abertos é $K + \frac{K_a}{1-k^2} bb^T$.

4.4.3 Admitância de um transdutor piezo-elétrico

Considere o sistema da figura (4.6), que é o mais simples modelo dinâmico possível de transdutores piezo-elétrico.

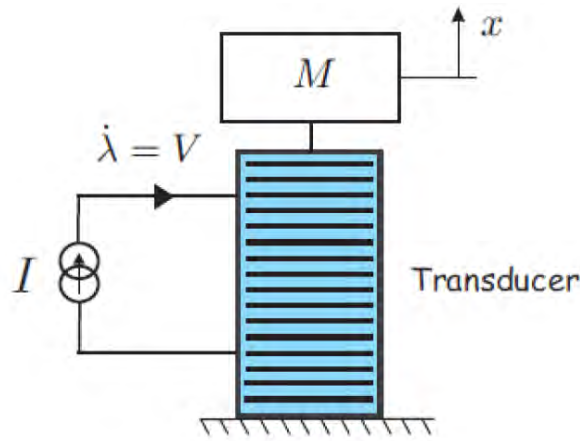


Figura 4.6 - Modelo dinâmico linear de um transdutor piezoelétrico (PREUMONT, 2006).

Das equações (4.31) e (4.32) (com $b=1$), as equações governantes são (no domínio de Laplace):

$$(Ms^2 + K_a)x = K_a nd_{33}V \quad (4.37)$$

$$s[C(1-k^2)V + nd_{33}K_a x] = I \quad (4.38)$$

Substituindo a (4.37) em (4.38) e usando a equação (4.7), tem-se:

$$\frac{I}{V} = sC(1-k^2) \left[\frac{Ms^2 + K_a/(1-k^2)}{Ms^2 + K_a} \right] \quad (4.39)$$

Que é a admitância (inverso da impedância). O numerador desaparece quando a transmissão vai à zero ($\pm jz$), e é tal que:

$$z^2 = \frac{K_a/(1-k^2)}{M} \quad (4.40)$$

Onde “z” é a frequência natural de um eletrodo aberto. Igualmente, o denominador desaparece nos polos ($\pm jp$) de tal forma que:

$$p^2 = \frac{K_a}{M} \quad (4.41)$$

Onde “p” é a frequência natural com eletrodos em curto-circuito. Isso era esperado, pois $I = 0$ com eletrodos abertos e $V = 0$ com eletrodos em curto-circuito. Combinando as equações (4.40) e (4.41), tem-se:

$$\frac{z^2 - p^2}{z^2} = k^2 \quad (4.42)$$

A qual constitui um caminho prático para determinar o fator de acoplamento eletromecânico de admitância (ou impedância), medida FRF (figura 4.7).

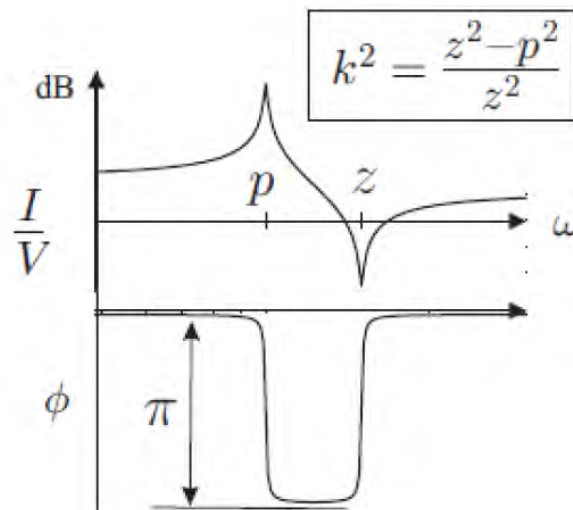


Figura 4.7 - Admitância FRF típica de um transdutor, na vizinhança de sua frequência natural (PREUMONT, 2006).

5 SISTEMAS DE COLHEITA DE ENERGIA DO MEIO AMBIENTE (ENERGY HARVESTER)

5.1 Introdução

Colheita de energia (Energy harvesting) é o processo pelo qual a energia é derivada de uma fonte externa, como por exemplo, energia solar, energia térmica, gradientes de salinidade e energia cinética. Essa energia é capturada e armazenada para pequenos dispositivos sem fio autônomos, como aqueles usados em redes de sensor sem fio.

A colheita de energia (energy harvester) fornece uma quantidade muito pequena de potência para eletrônicos de baixa energia. Enquanto o combustível de entrada para alguma geração em larga escala custa dinheiro (custo de óleo, carvão, etc), a fonte de energia para energy harvesters é presente como fundo do ambiente e não tem custo nenhum. Por exemplo, gradientes de temperatura existem a partir de operações de motores de combustão e em áreas urbanas, há uma grande quantidade de energia eletromagnética no ambiente por causa da transmissão de rádio e de televisão.

Dispositivos de colheita de energia convertendo energia ambiente em energia elétrica tem atraído muito interesse nos setores comercial e militar. Alguns sistemas convertem movimento, tal como as ondas do oceano, em eletricidade para ser usada por sensores de monitoramento oceanográfico para operações autônomas. Futuras aplicações podem incluir alta potência de saída (ou matrizes de tais dispositivos) implantada em locais remotos para servir como estações de energia confiável para grandes sistemas.

5.2 Dispositivo de Captura de Energia Piezoelétrico

A viga em balanço é uma das estruturas mais usadas para a conversão de energia cinética em energia elétrica. Na conversão da piezoelectricidade, a viga tem uma ou as duas superfícies cobertas por uma película de material piezoelétrico. Na figura 5.1(a) pode ser observado o esquema de um gerador piezoelétrico. A estrutura é planejada de forma a ser

flexionada como a vibração do ambiente, a película de material piezoelétrico será comprimida e ocorrerá a geração de energia.

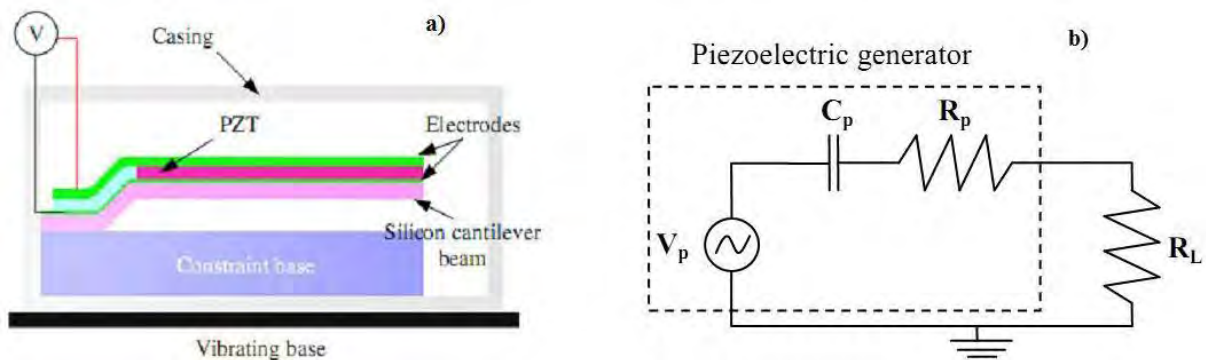


Figura 5.1 – (a) Modelo conceitual gerador piezoelétrico. (b) Circuito equivalente de um gerador piezoelétrico (Cottone, 2007).

A maior potência de saída ocorrerá quando a estrutura vibrar na sua frequência de ressonância o que explica a escolha pela viga, pois ela possui menores frequências de ressonância e podem ser reduzidas ainda mais pela adição de uma massa na sua extremidade livre. Na representação apresentada por Cottone (2007), como visto na Figura 5.1(b), a fonte de tensão representa a tensão que se desenvolve devido ao excesso de carga na superfície sobre o cristal. O Capacitor “ C_p ” em série representa a capacitância da camada piezoelétrica que é proporcional à permissividade do filme e área que é inversamente proporcional à espessura do filme. “ R_p ” representa a resistência do elemento piezoelétrico interno e “ R_L ” uma carga puramente resistiva. Essa configuração do tipo bimorph é uma das mais estudadas na literatura atual. Para uma análise detalhada sobre dispositivos de captura piezoelétrico podemos citar as obras de Priya e Inman (2009), Jalili (2010), (Heywang, Lubitz, e Wersing, 2008), Erturk (2009), Erturk e Inman (2011), sem desmerecer outros.

5.3 Modos de Operação do Transdutor Piezoelétrico

Conforme descrito por Priya e Inman (2009), existem dois modos mais comuns que são utilizados para captura de energia piezoelétrica. São eles o modo d_{33} para o uso em atuadores do tipo pilha de elementos piezoelétricos e o modo d_{31} que são comumente utilizados na concepção de dispositivos baseados em vigas em balanço. Quando o elemento piezoelétrico é aplicado em ambos os lados da viga temos uma configuração conhecida como bimorph. No

modo d_{33} , a direção da tensão mecânica aplicada (força) e da tensão elétrica gerada é a mesma. Já no modo de operação d_{31} a tensão mecânica é aplicada na direção axial, mas a tensão elétrica é obtida a partir da direção perpendicular, como é demonstrado na figura 5.2.

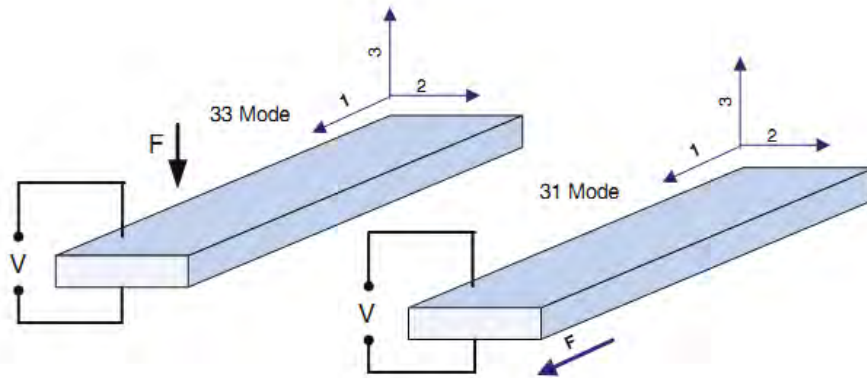


Figura 5.2 - Modos de Operação do Transdutor Piezoelétrico (Priya e Inman, 2009).

Na figura 5.3(a) é apresentado um modelo de dispositivo de captura de energia que utiliza o modo d_{31} , enquanto na figura 5.3(b) tem-se um modelo de sistema de captura de energia que usa múltiplas camadas de elementos piezoelétrico, essa é uma configuração que utiliza o modo d_{33} . Pode – se ver na figura 5.3(c) uma representação de um sistema massa mola de parâmetros concentrados que é o modelo matemático mais comum utilizado para representação de dispositivos de captura de energia

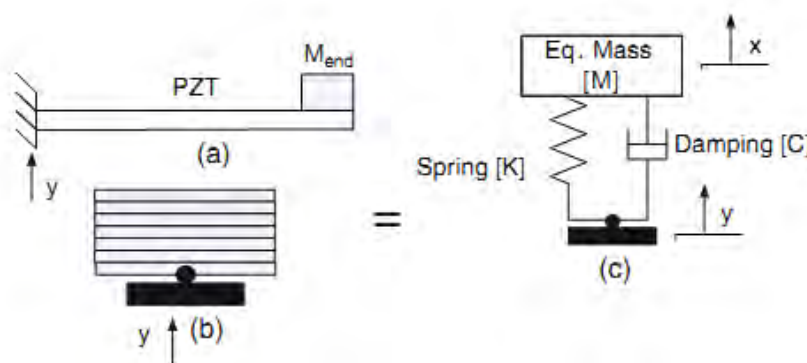


Figura 5.3 - (a) Viga em balanço com massa na extremidade livre, (b) PZT multicamadas submetido a vibração transversal excitando a base, e (c) Sistema massa mola de parâmetros concentrados equivalente de um corpo rígido em vibração (Priya e Inman, 2009).

5.4 Não-Linearidade Piezoelétrico

Segundo Jalili (2010) pode-se identificar na prática que os materiais piezoelétricos exibem característica não linear, incluindo a mais importante ainda, não linearidade pela histerese. Em diferentes áreas da ciência se encontra o fenômeno de histerese não apenas em materiais piezoelétricos. A histerese encontra-se em materiais e sistemas que incluem ligas com memória de forma, materiais viscoelásticos e polímeros eletroativos, materiais magnetostritivos, fluídos eletro/magneto-reológico, entre outros. A figura 5.4 mostra exemplos típicos de não linearidade pela histerese em três diferentes materiais.

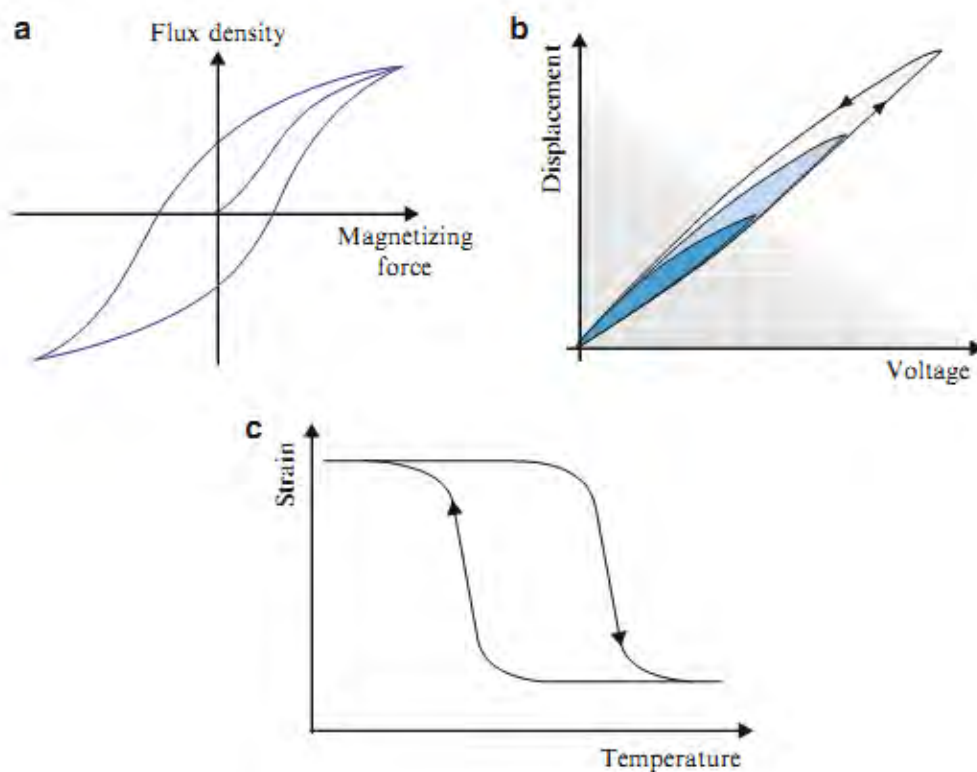


Figura 5.4 - Não linearidade histerese em (a). Os materiais, (b) Os materiais piezoelétricos, e (c) ligas com memória de forma (Jalili, 2010).

Segundo Jalili (2010), a histerese, ainda é objeto de muitas pesquisas e investigações em diferentes campos. Devido principalmente à sua estrutura oblíqua e complexa. Pode-se adotar uma representação matemática como demonstrada aqui para esse fenômeno. Descreve-se o operador histerese para ser referido como um multi-ramo (multi-branch) na relação de entrada / saída não linear, onde o valor futuro de saída depende não só os valores instantâneos da entrada, mas também sobre o história (passado ou memória) do seu funcionamento,

especialmente os valores de extremo, como pode ser visto na figura 5.4. Assim, o operador de histerese pertence a uma família mais geral dos operadores de valores múltiplos não lineares (Jalili, 2010).

Von Wagner e Hagedorn (2001), em seu trabalho identificaram os efeitos da histerese piezoelétrica através do seu modelo de viga piezoelétrica excitada por uma tensão alternada em modo d_{31} . Os autores analisaram a relação entre o módulo de Young e o fator piezoelétrico d_{31} . Suas observações de efeitos não lineares no sistema viga piezoelétrica submetido a fracos campos elétricos pode ser contrastado com o comportamento não linear de cerâmicas na presença de campos elétricos fortes. Histerese dielétrica e histerese borboleta são exemplos típicos encontrados também sendo observados usando atuadores piezoelétricos de pilha em modo d_{33} . O comportamento não linear de cerâmicas submetidas a campo um elétrico fraco até então não havia sido descrito em detalhes, sendo mencionado por Crawley e Luiz (1987) que atribuíram o efeito a não linearidade de amortecimento. O trabalho de Von Wagnerr e Hagedorn (2001) é uma referência sobre os efeitos das não linearidades piezoelétricas sobre a captura de energia. Triplett e Quinn (2009) estudaram em seu artigo analiticamente os efeitos de não linearidade no acoplamento eletromecânico bem como sua influência sobre a captura de energia, em contraste com o sistema de captura linear de energia. Essa não linearidade foi atribuída às leis constitutivas dos materiais piezoelétricos, especificamente sobre a relação não linear entre a tensão (força) e o campo elétrico no material piezocerâmico (du Toit e Wardle, 2007, Twiefel et al, 2008). O campo elétrico aplicado na direção “i” pode estar relacionado com a tensão na direção “j” pela constante d_{ij} . A figura 5.5, demonstra graficamente os valores experimentais obtidos pode Crawley e Anderson (1990), representando a constante piezoelétrica no sentido “3”, contra a tensão aplicada na direção “1”.

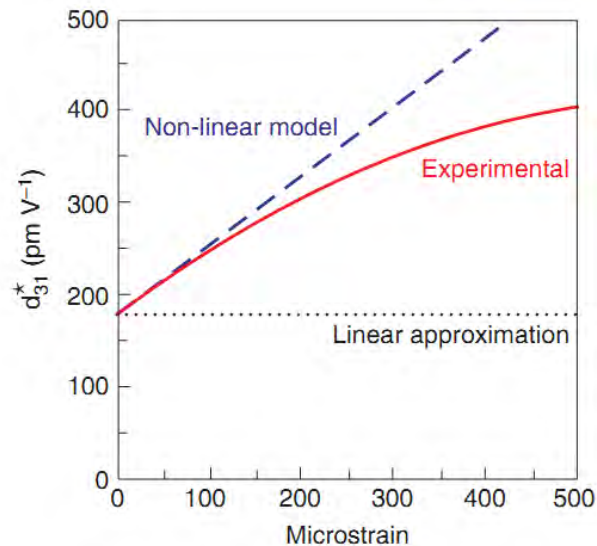


Figura 5.5 - Dependência de d_{31}^* sobre a tensão induzida. A curva experimental conforme representação de Crawley e Anderson (1990).

Pode-se identificar que a constante piezoelétrica d_{31} exibiu uma dependência significativa sobre a tensão induzida no material. Esta dependência da tensão apresenta um comportamento não linear no acoplamento eletromecânico. Devido a grande influência do papel das não linearidades no acoplamento piezoelétrico sobre a resposta do sistema de captura de energia, com a finalidade de analisar o efeito da não linearidade no acoplamento piezoelétrico, Triplett e Quinn (2009) aproximaram os coeficientes de acoplamento piezoelétricos linear e não linear através da função representada na figura 5.6, com base nos resultados de Crawley e Anderson (1990) (Veja figura 5.5). Foram aproximados o coeficiente de acoplamento dimensional piezoelétrico $d(x)$ como: $d(x) = d_{lin}(1 + d_{nlin}|x|)$ tendo a contraparte adimensional definida como: $\hat{d}(x) = \theta(1 + \Theta|x|)$ onde θ representa a parte linear e a parte não linear é representada por Θ , detalhes do processo de Adimensionalização são demonstrados na seção (5.6.4). Essa função impõe uma não linearidade fraca no componente mecânico, mas uma não linearidade forte no circuito elétrico. Utilizou-se essa função no presente trabalho para concepção do modelo de captura de energia não linear excitado por uma fonte não ideal de energia

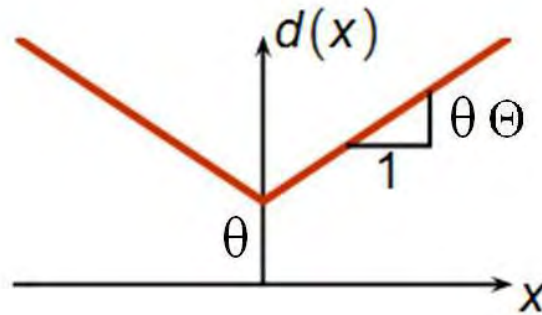


Figura 5.6 - Função de Aproximação da não linearidade piezoelétrica definida por Triplett e Quinn (2009).

5.5 Modelo Proposto por Triplett e Quinn (2009)

O modelo proposto por Triplett e Quinn (2009) foi o modelo base para a modelagem do sistema, objeto de estudo desta dissertação. Na figura 5.7 é demonstrado o esquema do modelo ideal de captura de energia.

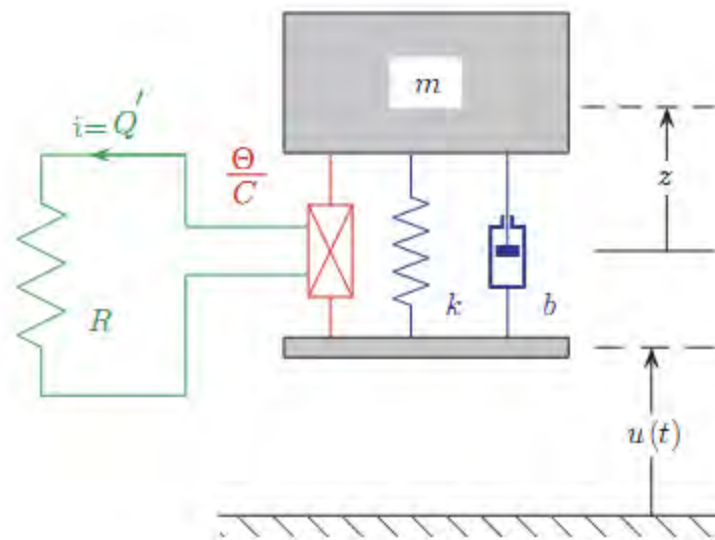


Figura 5.7 - Modelo proposto por Triplett e Quinn (2009).

5.6 Modelagem Matemática

5.6.1 Considerações Gerais

O modelo neste trabalho foi baseado no modelo proposto por Triplett and Quinn (2009). Neste modelo, usou-se o método das equações de Lagrange para se obter as equações do movimento do sistema mecânico. O termo do acoplamento piezo-elétrico foi o mesmo definido por Triplett and Quinn (2009), com a finalidade de se efetuar uma comparação entre um modelo ideal com o modelo não ideal proposto no presente trabalho. Em seguida adimensionaliza-se as equações para que se possa trabalhar com números puros. Reescritas na forma de estados as equações podem ser simuladas numericamente e seus resultados avaliados.

5.6.2 Modelagem Matemática do Sistema de Captura de Energia

O modelo proposto de um sistema de captura de energia no presente trabalho consiste em uma viga em balanço com camadas de elementos piezoelétricos (piezocerâmicas) aplicadas em ambos os lados da viga e na extremidade engastada os elementos piezoelétricos são conectados através de um circuito em shunt para reduzir a vibração do material.

O sistema descrito na figura 5.8 representa um sistema de captura de energia onde “M” é a massa do sistema, X é o deslocamento vertical do sistema, “c” é o coeficiente de amortecimento linear, $K = -k_1X - k_2X^3$ onde k_1 é o coeficiente da mola linear, e k_2 é o coeficiente da mola não linear (mola cúbica), P1 e P2 são as camadas de filme piezoelétrico aplicadas no dispositivo, “Y” é a amplitude de excitação, “ φ ” é o deslocamento angular na viga.

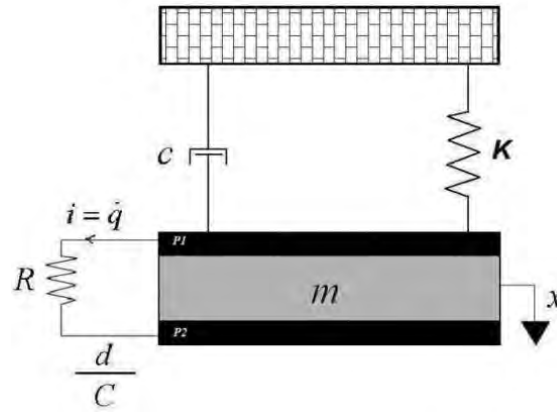


Figura 5.8 - Sistema de Captura de Energia.

De acordo com Triplett e Quinn (2009), o termo $\frac{d(X)}{C}q$ representa o acoplamento piezoelétrico para o componente mecânico, onde “q” é a carga elétrica desenvolvida através do circuito acoplado, $d(X)$ é um coeficiente de acoplamento dependente da tensão (esforço mecânico) aplicada. A tensão elétrica “V” através do material piezoelétrico tem a forma:

$$V = -\frac{d(X)}{C}X + \frac{q}{C} \quad (5.1)$$

Onde “C” representa a capacitância piezoelétrica. Pode-se assim reescrever a tensão como $V = -R\dot{q}$, onde R é a resistência elétrica e $i = \dot{q}$ é a corrente elétrica.

5.6.3 Obtenção das equações de movimento

Por várias vezes se faz necessário à utilização da representação dos sistemas dinâmicos na forma de modelos matemáticos de equações diferenciais. Com isso busca-se facilitar o equacionamento sem perder, desta forma, as características dinâmicas principais do sistema estudado. Para a obtenção dessas equações pode-se considerar as energias do sistema e aplicar as equações de Lagrange. Desta forma, temos:

A energia cinética é dada por:

$$K = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \Upsilon \cos \varphi \quad (5.2)$$

A energia potencial:

$$T = \frac{1}{2}k_1X^2 + \frac{1}{4}k_2X^4 \quad (5.3)$$

A equação de Lagrange para esse sistema é:

$$L(\dot{X}, X) = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - \frac{1}{2}k_1X^2 - \frac{1}{4}k_2X^4 \quad (5.4)$$

Sendo a relação de força a partir da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = N_i, \quad (i=1,2) \quad (5.5)$$

Assim, para força causada no material:

$$N_1 = M\ddot{X} + k_1X + k_2X^3 + \Upsilon \text{sen}\varphi \quad (5.6)$$

Outra contribuição no material é a contribuição piezoelétrica:

$$N_1 = -c\dot{X} + \frac{d(X)}{C}q \quad (5.7)$$

Há também as relações das tensões que tem contribuição piezoelétrica e do resistor, que são respectivamente:

$$V_1 = -\frac{d(X)}{C}X + \frac{q}{C} \quad (5.8)$$

$$V_2 = -R\dot{q} \quad (5.9)$$

Juntando todas as relações, $N_1 = N_2$ e $V_1 = V_2$, tem-se então as relações movimento do sistema, que são:

$$M\ddot{X} + c\dot{X} + k_1X + k_2X^3 + Y\text{sen}\varphi = \frac{d(X)}{C}q \quad (5.10)$$

$$R\dot{q} - \frac{d(X)}{C}X + \frac{q}{C} = 0 \quad (5.11)$$

5.6.4 Adimensionalização do sistema

Utilizando um sistema com variáveis adimensionais pode-se trabalhar nele com números puros, sem considerar a dimensão de suas variáveis. É possível tornar as equações (5.10) e (5.11) em uma forma adimensional introduzindo os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k_1}{M}} & \tau &= \omega_0 t & \rho &= RC\omega_0 & \alpha &= \frac{c}{M\omega_0} \\ b &= \frac{k_2 r^2}{M\omega_0^2} & x &= \frac{X}{r} & v &= \frac{q}{q_0} & \varepsilon &= \frac{(q_0/r)^2}{(Ck)} \\ \hat{d}(x) &= \left(\frac{r}{q_0}\right)d(r) & \theta &= \left(\frac{r}{q_0}\right)d_{lin} & \Theta &= rd_{nlin} \end{aligned}$$

A partir de uma excitação $Y \cos \omega t$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega & \varphi &= \omega t & \ddot{\varphi} &= 0 \\ \varphi &= \Omega \tau & \varphi' &= \frac{\omega}{\omega_0} = \Omega & \varphi'' &= 0 \end{aligned}$$

O coeficiente de acoplamento piezoelétrico adimensional utilizado no presente trabalho foi aproximado por Triplett e Quinn (2009) como sendo $\hat{d}(x) = \theta(1 + \Theta|x|)$, onde θ representa a parte linear do acoplamento piezoelétrico, Θ representa a parte não linear do acoplamento piezoelétrico.

Desta maneira as equações que governam o movimento do sistema de captura de energia se reduzem à:

$$\begin{aligned}x'' + x &= \varepsilon \left(-\alpha x' - bx^3 + \theta(1 + \Theta|x|)v + Ysen(\Omega\tau) \right) \\v' &= \left(\theta(1 + \Theta|x|)x - v \right) / \rho\end{aligned}\tag{5.12}$$

Onde Y é a amplitude da excitação. Assim reescrevendo as equações em uma representação do sistema em espaço de estados de ordem três obtém-se:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= \varepsilon \left(-\alpha x_2 - bx_1^3 + \theta(1 + \Theta|x_1|)x_3 + Ysen(\Omega\tau) \right) - x_1 \\x_3' &= \left(\theta(1 + \Theta|x_1|)x_1 - x_3 \right) / \rho\end{aligned}\tag{5.13}$$

5.7 Simulações numéricas

Foram realizadas simulações numéricas através do software Matlab®, utilizando como algoritmo de integração o método de Runge Kutta 4ª ordem (integração ODE45), com o passo de integração variável.

As maiores dificuldades foram encontradas em rotinas que exigiram um intervalo de calculo maior, para serem analisados, pois dispendiam muito tempo para obtenção dos resultados. Objetivando a diminuição do tempo de resposta, foi realizada a paralelização da rotina trabalhada. A “paralelização” faz com que os núcleos do processador dividam as tarefas dos calculos cada núcleo irá calcular um ponto, e então diminuindo o tempo de resposta.

Esses calculos foram possíveis pelo uso do programa Matlab em um computador com um processador de 8 núcleos. Primeiramente o ambiente do Matlab foi configurado para que se possa usar os 8 núcleos do processador. A parte da programação em si é a mais complicada, pois é necessário seguir uma linha de raciocínio diferente da programação comum (sem paralelização), pois há linhas de comando diferentes. Essa mudança é a utilização do comando “parfor” nos lugares do “for”.

Por meio destas simulações foi possível efetuar uma análise de estabilidade do sistema, representado pelas equações (5.13). Com a análise dos gráficos gerados pelas simulações foram obtidas conclusões sobre o comportamento dinâmico do sistema.

No apêndice B é apresentada a rotina desenvolvida para a paralelização para que fosse possível calcular os programas, um método de cálculo mais rápido e eficaz dos resultados, onde veremos mais a fundo sobre essas rotinas.

5.7.1 Análise do Sistema de Captação de Energia

Para as simulações numéricas mantiveram-se as condições iniciais nulas, isto é, $[0,0,0]$, e para o intervalo de tempo adimensional nas simulações $0 \leq \tau \leq 100$. Os valores dos parâmetros adimensionais usados inicialmente foram os mesmos utilizados no trabalho de Triplett e Quinn (2009): $\varepsilon = 0.10$; $b = 0.25$; $\alpha = 0.50$; $\theta = \text{casos}$; $\Theta = \text{casos}$; $\omega = 1.00$; $\Upsilon = 2.00$; $\rho = 1.00$.

Foram abordados dois casos nas simulações do sistema. No caso linear o coeficiente de acoplamento piezoelétrico linear variou ao longo do tempo e o coeficiente de acoplamento piezoelétrico não linear é igual à zero. No caso não linear o valor do coeficiente de acoplamento piezoelétrico linear foi escolhido e teve seu valor fixado, já o coeficiente de acoplamento piezoelétrico não linear variou ao longo do tempo.

5.7.2 Caso Linear – Coeficiente de Acoplamento Piezoelétrico Não Linear $\Theta = 0.00$

No caso linear não é considerada a influência das não linearidades constitutivas dos materiais piezoelétricos. Sistemas modelados desta forma são considerados sistemas de captura de energia com acoplamento piezoelétrico linear. Para este caso o valor do coeficiente de acoplamento linear $\theta = 1.00$ está de acordo com o valor de θ próximo ideal encontrado no trabalho de Triplett e Quinn (2009). Na figura 5.9 apresentam-se os históricos no tempo para o deslocamento da viga e para a velocidade da viga onde se pode notar o movimento periódico do sistema.

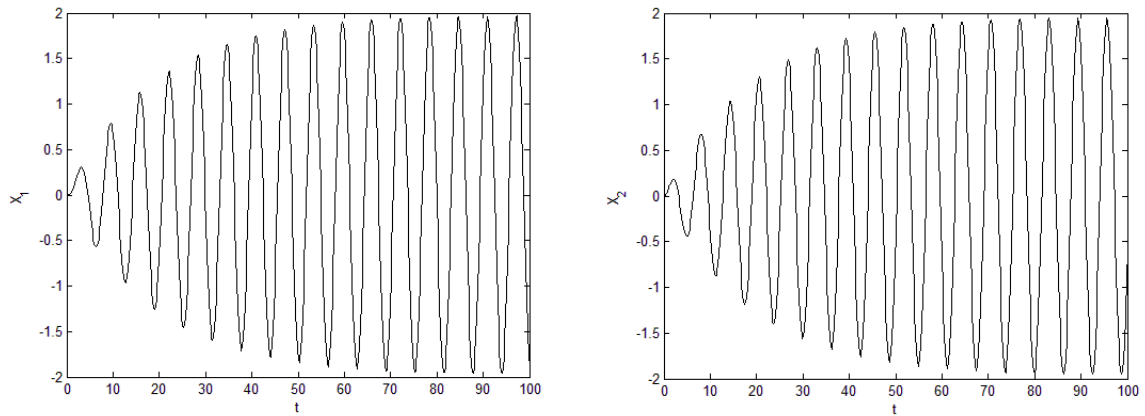


Figura 5.9 - Histórico no tempo, Deslocamento (à esquerda) e Velocidade (à direita).

Os retratos de fase em duas e três dimensões do sistema são representados na figura 5.10, verificou-se que o sistema atingiu o deslocamento com amplitude máxima e manteve-se estável nesta condição.

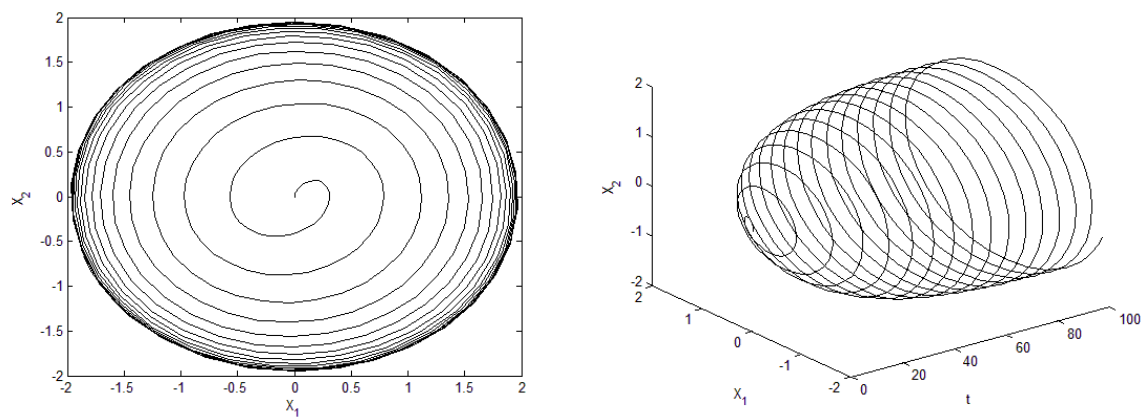


Figura 5.10 - Retrato de Fase no plano x-y (à esquerda) e Retrato de Fase em 3 dimensões superfície x-y-z (à direita).

O histórico no tempo para o deslocamento da carga e a potência máxima adimensional capturada pelo dispositivo eletromecânico são demonstrados na figura 5.11, onde a potência máxima capturada é dependente da amplitude de excitação e da frequência imposta ao sistema ideal.

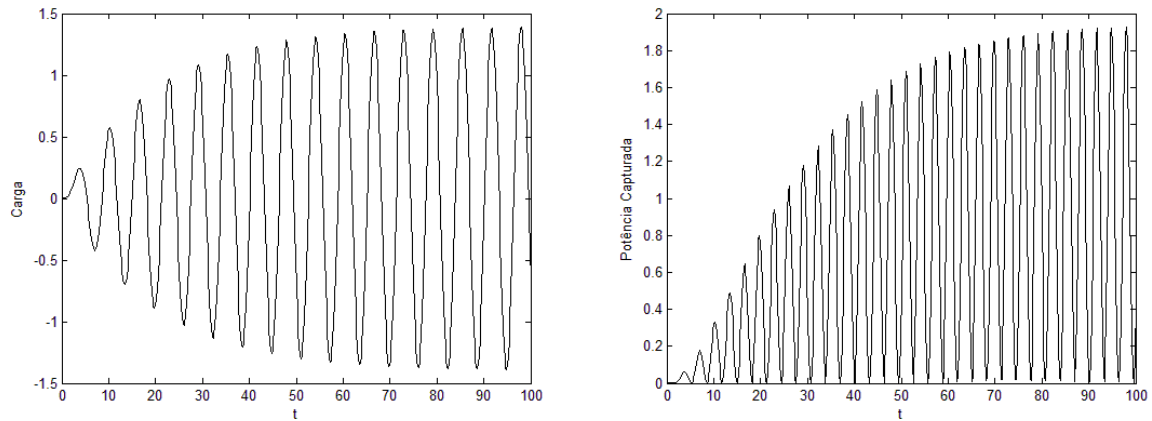


Figura 5.11 - Históricos no tempo da Carga Elétrica (à esquerda) e da Potência Máxima Capturada (à direita).

Na figura 5.12 apresentam-se as Seções de Poincaré para o sistema no caso linear, com isso pode-se comprovar a resposta periódica do sistema para a força de excitação aplicada.

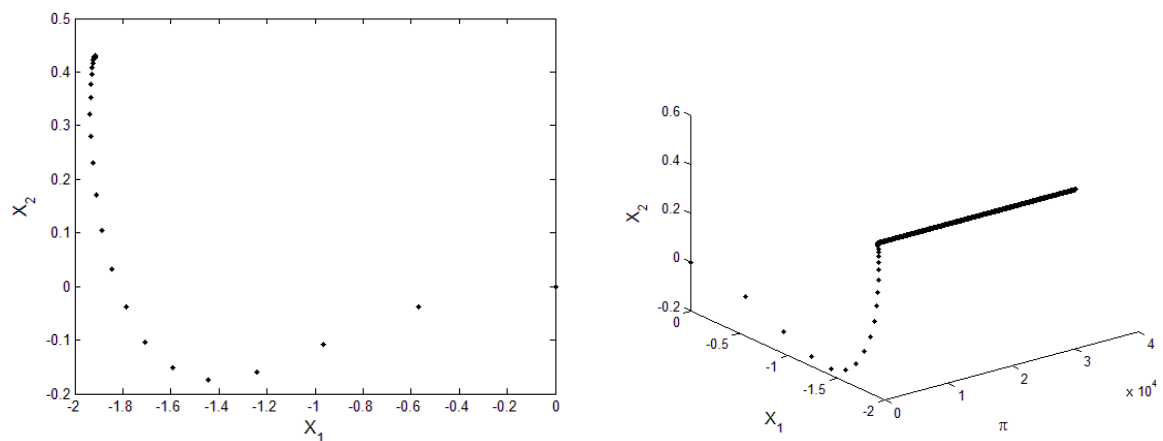


Figura 5.12 - Seção de Poincaré no plano x-y (à esquerda) e Seção de Poincaré em 3 dimensões superfície x-y-z (à direita).

5.7.3 Caso Não Linear – Coeficiente de Acoplamento Piezoelétrico não linear $\Theta = 1.00$

No caso não linear os valores dos coeficientes de acoplamento linear $\theta = 1.00$ e do coeficiente de acoplamento não linear $\Theta = 1.00$ ambos estão próximos dos melhores valores definidos no trabalho de Triplett e Quinn (2009). Este sistema é um sistema de captura de energia com acoplamento piezoelétrico não linear. Com o aumento do valor de Θ , o efeito

das não linearidades dos elementos piezoelétrico passam a influenciar no sistema. Esse efeito atua como mais um amortecimento na resposta vibratória do sistema, podendo causar redução na captura de energia.

As simulações apresentam os históricos no tempo para o deslocamento da viga, para a velocidade da viga na figura 5.13, aqui pode-se verificar que devido a inclusão da não linearidade, a amplitude e vibração foi menor que no caso linear.

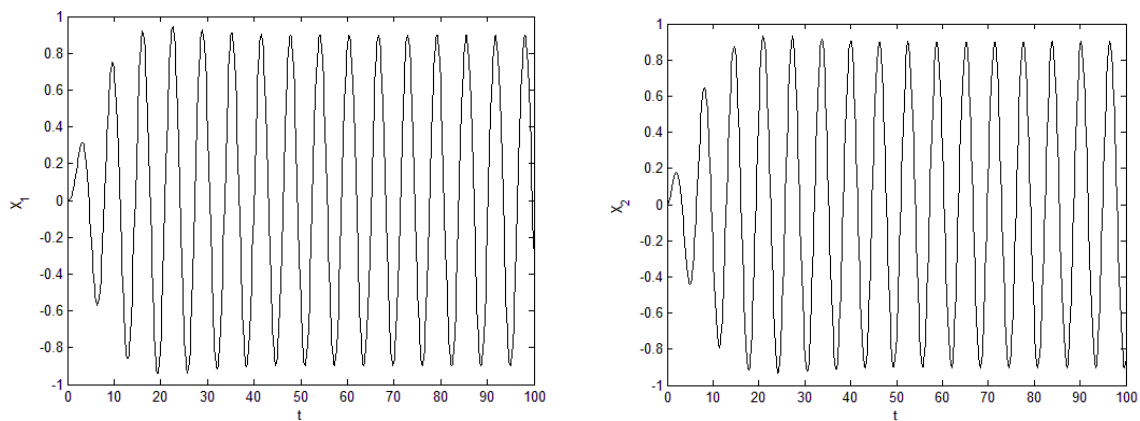


Figura 5.13 - Históricos no tempo, Deslocamento (à esquerda) e Velocidade (à direita).

Os retratos de fase em duas e três dimensões do sistema apresentado na figura 5.14 mostram que com o acoplamento não linear o sistema atingiu a amplitude máxima e deslocamento em menos tempo que no caso linear.

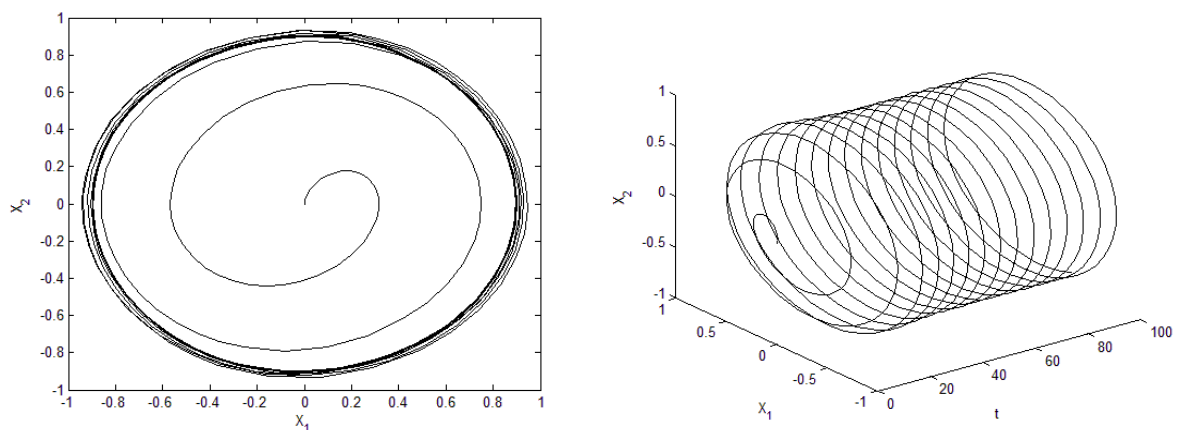


Figura 5.14 - Retrato de Fase no plano x-y (à esquerda) e Retrato de Fase em três dimensões superfície x-y-z (à direita).

O histórico no tempo para o deslocamento da carga adimensional e a potência máxima adimensional capturada pelo dispositivo eletromecânico são representados na figura 5.15 onde conclui-se que existe redução da energia capturada pelo dispositivo devido as não linearidades piezoelétrico, contudo a energia capturada atingiu o regime permanente mais rápido que no caso linear.

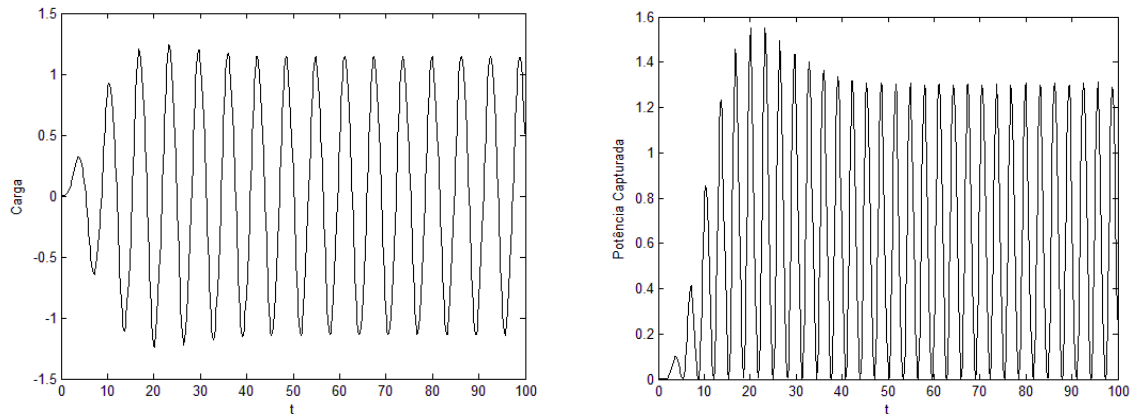


Figura 5.15 - Históricos no tempo da Carga elétrica (à esquerda) e da Potência Máxima Capturada (à direita).

Na figura 5.16, analisando as Seções de Poincaré para o sistema no caso não linear, verificou-se a mudança dos pontos onde os planos de coordenadas são perfurados, contudo a resposta do sistema para a força de excitação aplicada continua sendo periódica.

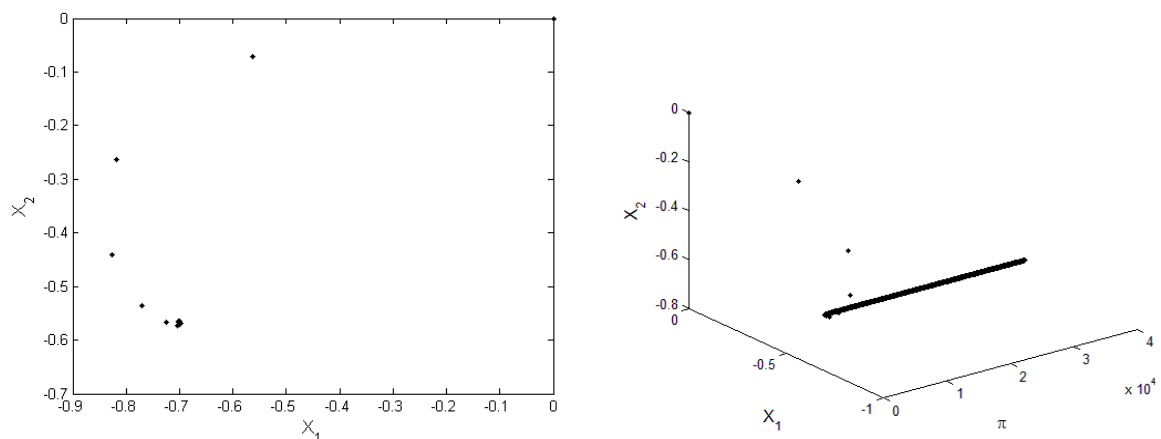


Figura 5.16 - Seção de Poincaré no plano x-y (à esquerda) e Seção de Poincaré em três dimensões superfície x-y-z (à direita).

Com a inclusão da não linearidade piezoelétrica no sistema representada aqui pelo coeficiente $\Theta = 1.00$, verificou-se que para uma determinada faixa de valores de acoplamento linear θ , houve um ganho na potência capturada pelo dispositivo. Porém com aumento do coeficiente de acoplamento não linear Θ , a interação desta não linearidade com a estrutura também se torna mais forte, causando significativas perdas de potência, pois agem como um amortecimento sobre a resposta vibratória do sistema.

5.7.4 Caso Linear com coeficiente de amortecimento “ $\alpha = 0.25$ ”

Tentando um resultando diferente e melhor dos parâmetros usado por Triplett e Quinn (2009), diminui-se o fator de amortecimento do material para que haja maior vibração do material e teoricamente um aumento de captura de potência.

Na figura 5.17 apresentam-se os históricos no tempo para o deslocamento da viga e para a velocidade da viga onde pode-se notar o movimento periódico do modelo ideal, e percebe-se que tanto quanto a velocidade e o deslocamento são maiores do que os valores da figura 5.9. Mas também observa-se que leva mais tempo para que atinja-se o deslocamento e a velocidade máxima nessas vibrações.

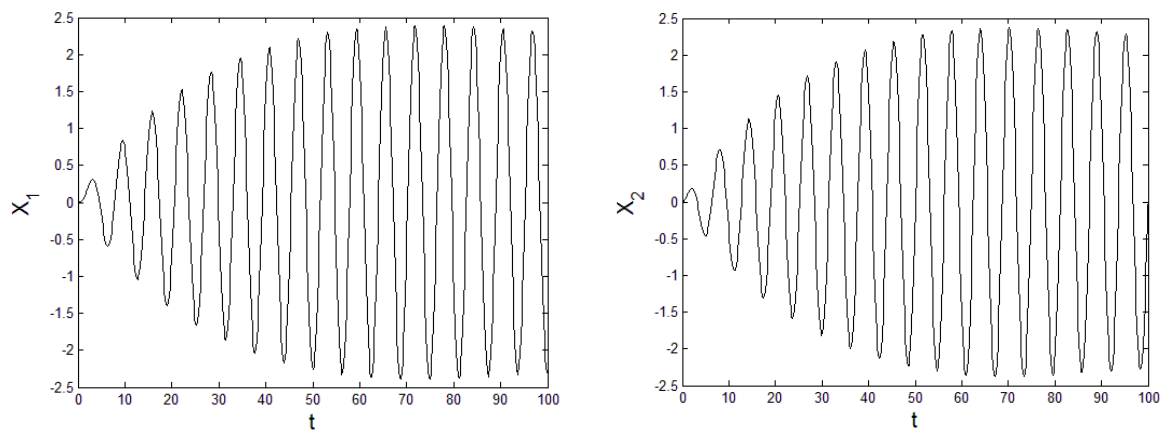


Figura 5.17 - Históricos no tempo, Deslocamento (à esquerda) e Velocidade (à direita).

Na figura 5.18, tem-se os retratos de fase em duas e três dimensões e verificou também que o sistema atingiu o deslocamento com amplitude máxima e manteve-se estável nesta condição também, porém observa-se o deslocamento e velocidades maiores que da

figura 5.10. E também pode – se observar um intervalo de tempo maior para se atingir o deslocamento e a velocidade máxima.

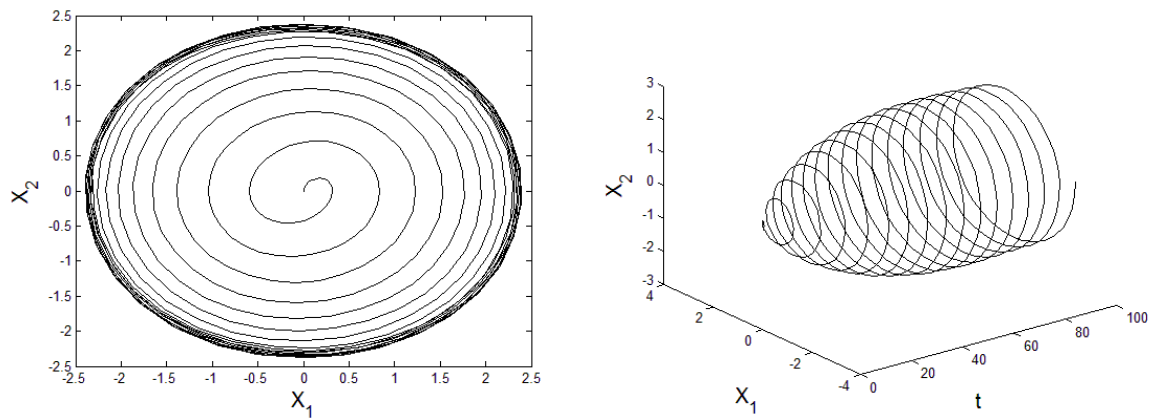


Figura 5.18 - Retrato de Fase no plano x-y (à esquerda) e Retrato de fase em 3D superfície x-y-z (à direita).

O histórico no tempo para o deslocamento da carga e a potência máxima adimensional capturada pelo dispositivo eletromecânico são demonstrados na figura 5.19.

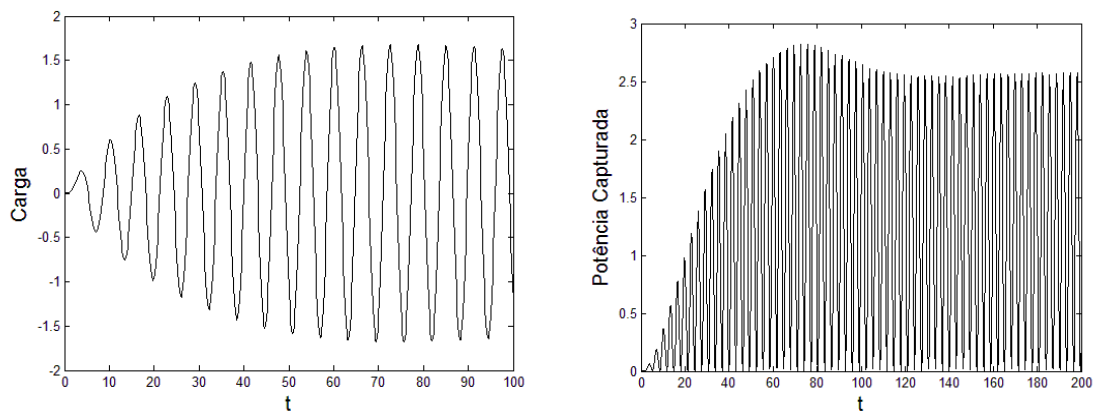


Figura 5.19 - Históricos no tempo da Carga Elétrica (à esquerda) e da Potência Máxima capturada (à direita).

E então percebe - se que, com o ajuste do amortecimento, obteve-se maior potência, porém o tempo necessário para se obter essa potência máxima foi maior que o da figura 5.11. Um resultado um pouco melhor que o anterior, exceto pelo maior tempo de obtenção do máximo desejado e pela maior oscilação do sistema. E então na figura 5.20, são dadas as

seções de Poincaré para esse sistema, e verifica-se que as oscilações periódicas do sistema são maiores que no caso de amortecimento com fator de amortecimento “ $\alpha = 0.50$ ”.

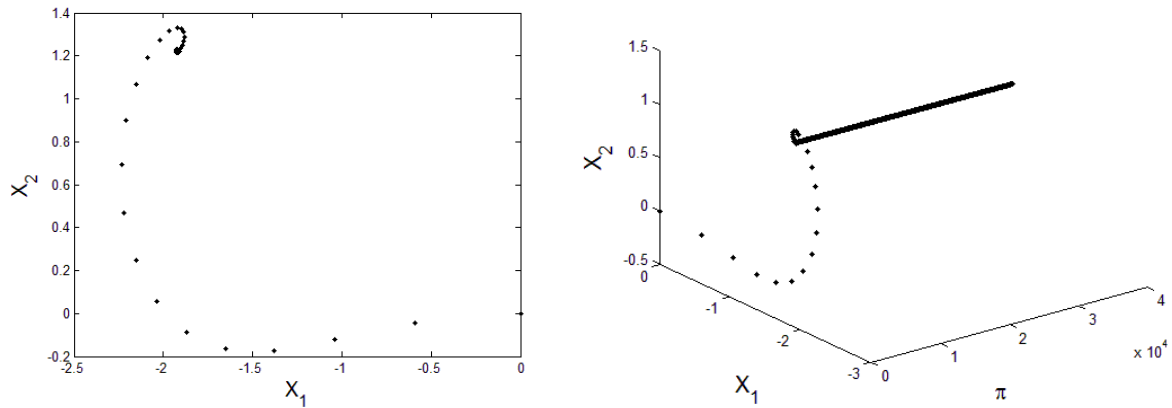


Figura 5.20 - Seções de Poincaré no plano x-y (à esquerda) e Seção de Poincaré em 3 dimensões superfície x-y-z (à direita).

5.7.5 Caso Não Linear com coeficiente de amortecimento “ $\alpha = 0.25$ ”

No caso não linear considere o mesmo caso da seção (5.7.3), porém com o novo fator de amortecimento definido “ $\alpha = 0.25$ ”.

Na figura 5.21, vê-se o deslocamento da viga e velocidade de oscilação da viga no tempo, e verifica-se também que devido à inclusão da não linearidade, a amplitude e vibração foi menor que no caso linear.

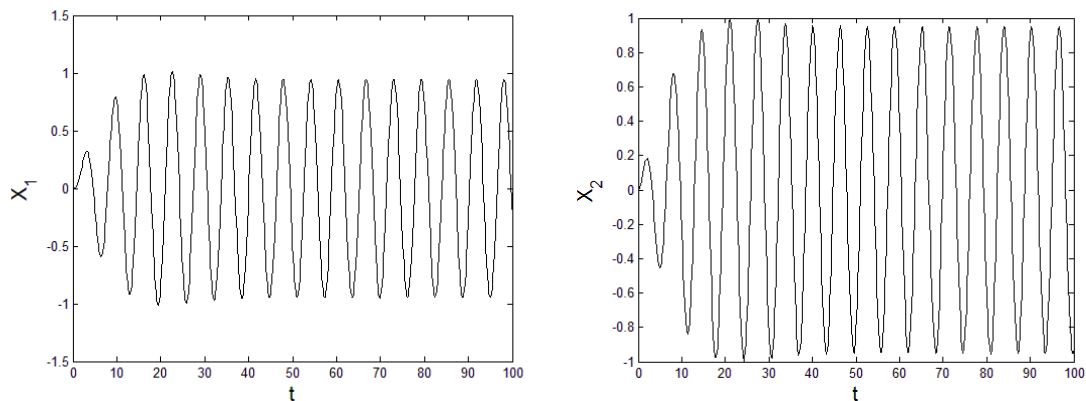


Figura 5.21 - Históricos no tempo, Deslocamento (à esquerda) e Velocidade (à direita).

Os retratos de fase em duas e três dimensões do sistema apresentados na figura 5.22 mostram que com o acoplamento não linear o sistema atingiu a amplitude máxima de deslocamento em menos tempo que no caso linear, e com o fator de amortecimento menor atingiu-se também um deslocamento e velocidade maiores que no caso não linear com fator de amortecimento “ $\alpha = 0.50$ ”.

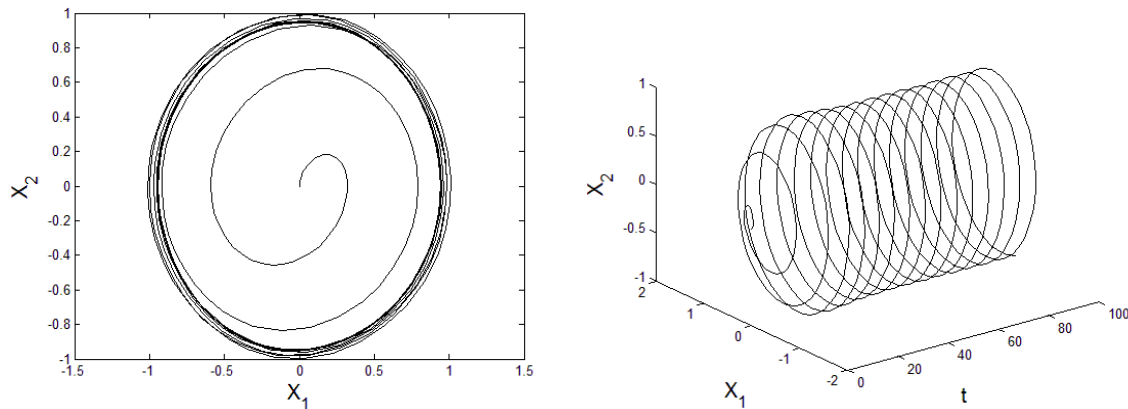


Figura 5.22 - Retrato de fase no plano x-y (à esquerda) e Retrato de Fase em 3 dimensões superfície x-y-z (à direita).

Na figura 5.23 é representado o histórico no tempo para o deslocamento da carga adimensional e a potência máxima adimensional capturada pelo dispositivo eletromecânico, onde se conclui que de fato há redução de energia capturada pelo dispositivo devido a não linearidade piezoelétrica, no entanto a energia capturada atingiu o regime permanente mais rápido que no caso linear igualmente, mas com o fator de acoplamento ajustado, houve uma maior oscilação do material para se obter quase o mesmo valor de potência capturada.

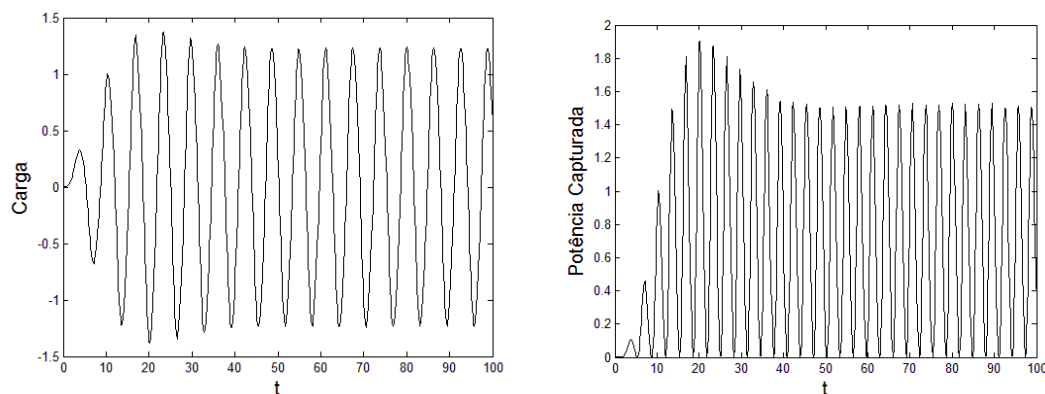


Figura 5.23 - Histórico no tempo da Carga elétrica (à esquerda) e da Potência Máxima Capturada (à direita).

Na figura 5.24 analisando as Seções de Poincaré para o sistema no caso não linear, verificou-se a mudança dos pontos também. Porém com a mudança do fator de acoplamento percebe-se uma maior oscilação do sistema.

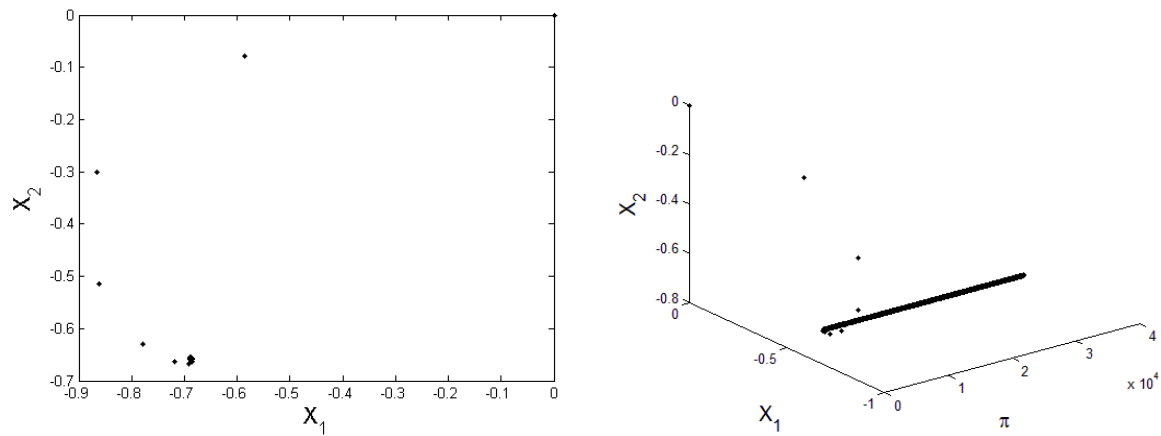


Figura 5.24 - Seção de Poincaré no plano x-y (à esquerda) e Seção de Poincaré em 3D superfície x-y-z (à direita).

Então observa-se que os melhores valores ajustados foram com o coeficiente de amortecimento “ $\alpha = 0.50$ ”, foi quando houve menor vibração, capturou-se menos potência que no caso com “ $\alpha = 0.25$ ”, porém chegou-se no estágio permanente de captura de energia mais rapidamente.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, revisaram-se conceitos básicos de Mecânica Vetorial e Analítica e Redes Elétricas, para que tivéssemos o suporte teórico para desenvolvimento deste trabalho.

A seguir, estudou-se teoria de sistemas eletro-mecânicos e de materiais piezoelétricos que formaram o conteúdo avançado deste trabalho e possibilitou gerar neste trabalho (TCC) em Física uma aplicação importante no caso de captura de energia, via uso de materiais tipo “piezo”.

A partir do modelo adotado de captura de energia, ajustaram-se os parâmetros para ser possível desenvolver as respostas do modelo matemático adotado, a partir das entradas desejadas.

A análise destas respostas forneceu os melhores valores para os coeficientes de acoplamento piezoelétrico linear e não linear que influenciaram na quantidade de energia capturada pelo dispositivo eletromecânico e se encontram presentes nos materiais com propriedades piezoelétrico utilizados.

Conclui-se que seus efeitos sobre a resposta dinâmica do sistema de captura de energia não podem então serem desprezados no momento em que se está projetando estes dispositivos. Uma vez que variou-se os acoplamentos linear e não-linear, obteve-se resultados que a potência capturada foi maior para o caso não-linear do que no caso linear.

Os valores para os coeficientes de acoplamento podem ser encontrados por experimentos físicos ou através de simulações computacionais, levando-se sempre em considerações que tais valores dependem das dimensões da viga e das propriedades de cada material piezoelétrico escolhido no modelo adotado.

A continuidade deste trabalho, a ser efetuado no mestrado, será a de utilizar controladores passivos, para se evitar gastos de energia, no caso de se ter um comportamento caótico. Os mapas De Poincaré das figuras, (5.12), (5.16), (5.20), (5.24) induzem este tipo de comportamento. Neste caso, deseja-se obter movimentos periódicos, para melhoria da captura de energia, tal como é estudado por (Illuk et al, 2012a,b,c,d). Esta proposta é diferente da

estudada por (Illuik et al, 2012), por tratar-se de excitação senoidal (figura 5.1), pois nestes trabalhos a excitação vem de um motor elétrico desbalanceado. Pretende-se explorar o modelo matemático levando-se em conta incertezas nos parâmetros, para tornar o modelo mais próximo de dados experimentais.

REFERÊNCIAS

COTTONE, F., Nonlinear Piezoelectric Generators for Vibration Energy Harvesting. Universita' Degli Studi Di Perugia, Dottorato Di Ricerca In Fisica, XX Ciclo, 2007.

COTTONE, F., Nonlinear Piezoelectric Generators for Vibration Energy Harvesting. Universita' Degli Studi Di Perugia, Dottorato Di Ricerca In Fisica, XX Ciclo, 2007.

DU TOIT, N.E. e WARDLE, B.L., Performance of Microfabricated Piezoelectric Vibration Energy Harvesters, *Intgr. Ferro.*, 83:13-32 , 2006.

DU TOIT, N.E. e WARDLE, B.L., Experimental Verification of Models for Microfabricated Piezoelectric Vibration Energy Harvesters, *AIAA Journal*, 45:1126-1137, 2007.

ERTURK, A., Electromechanical Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters, Dissertation submitted to the faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics, November 20, 2009 Blacksburg, VA, 2009.

ERTURK, A., INMAN, D. J., Piezoelectric Energy Harvesting, John Wiley & Sons, Ltd, 2011.

Geração de energia piezo. 2009-2012. Disponível em: <
<http://www.atcp.com.br/pt/produtos/ultra-som/ceramicas-piezoeletricas/geracao-de-energia-piezo.html> >.

HEYWANG, W., LUBITZ, K., WERSING, W., Piezoelectricity Evolution and Future of a Technology, Springer Series in Materials Science ISSN 0933-033x, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

JALILI, N., Piezoelectric-Based Vibration Control, From Macro to Micro/Nano Scale Systems, Springer Science Business Media, LLC 2010.

L. MEIROVITCH., *Methods of Analytical Dynamics.*, McGraw-Hill Book Company, 45-169, 1970.

PREUMONT, A. *Dynamics of electromechanical and Piezoelectric systems.* Springer. 2006.

PRIYA, S., INMAN, D.J., *Energy Harvesting Technologies.* Springer Science Business Media, LLC, 2009.

RAO, S., *Mechanical Vibrations,* Addison Wesley, 1990.

TRIPLETT, A., QUINN, D. D. , The Effect of Non-linear Piezoelectric Coupling on Vibration-based Energy Harvesting Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 20 p. 1959-1967—November 2009.

TWIEFEL, J., RICHTER, B., SATTEL, T., WALLASCHEK, J., Power Output Estimation and Experimental Validation for Piezoelectric Energy Harvesting Systems, J. Electroceram., 20:203-208, 2008.

VON WAGNER, U., HAGEDORN, P., Piezo--Beam Systems Subjected to weak Electric Field: Experiments and Modelling of Non-Linearities, Journal of Sound and Vibration, 256(5), 861–872, 2002

WALTER H., K. L., WOLFRAM W. Piezoelectricity - Evolution and future of a Technology. Springer. 2008.

WRIGHT, L. M. P. P. Micro Scale Energy Harvesting from Ambient Vibrations. California Energy Commission, 2010. Disponível em: < http://uc-ciee.org/downloads/ETDTAC_LMMILLER_April2010.pdf >.

WIKIPEDIA. Energy Harvesting. 2011. Disponível em: < http://en.wikipedia.org/wiki/Energy_harvesting >.

BIBLIOGRAFIA PARA TRABALHOS FUTUROS

Iliuk, J. M. Balthazar, A. M. Tusset, J.L.P. Felix and B. R. de Pontes Jr. Nonlinear dynamics and control strategies: On a energy harvester vibrating system with a linear form to non-ideal motor torque. MATEC Web of Conferences 1 (2012) 08003
DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/mateconf/20120108003>

Itamar Iliuk, José Manoel Balthazar, Angelo Marcelo Tusset, Jorge Luiz Palácios Felix and Bento Rodrigues de Pontes Jr. On Nonideal and Chaotic Energy Harvester Behavior, Differential equations and Dynamical Systems 2012, DOI: 10.1007/s12591-012-0127-5.

Itamar Iliuk, José Manoel Balthazar, Angelo Marcelo Tusset, Jorge Luiz Palácios Felix and Bento Rodrigues de Pontes Jr., J.R. C Piqueira. ON APPLICATION OF THE PASSIVE CONTROL TO ENERGY HARVESTER EFFICIENCY, USING A NON-IDEAL PORTAL FRAME STRUCTURAL SUPPORT SYSTEM Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Submetido, 2012.

Itamar Iliuk, José Manoel Balthazar, Angelo Marcelo Tusset, Jorge Luiz Palácios Felix and Bento Rodrigues de Pontes Jr., J.R. C Piqueira. ON PASSIVE CONTROL STRATEGY TO AN ENERGY HARVESTER EFFICIENCY, USING A NONLINEAR PORTAL FRAME STRUCTURE EXCITED BY A NON-IDEAL MOTOR . DINAME 2013 - Proceedings of the XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics M.A. Savi (Editor), ABCM, Buzios, RJ, Brazil, February 17-22, 2013, submetido

APENDICE

A Revisão mecânica analítica

Neste anexo, considera-se a transformação entre dois conjuntos de coordenadas, sendo um deles rotacionado em relação ao outro (Meirovitch, 1970). Este tópico foi usado nas derivações das equações do movimento, ao longo do texto.

A.1 Transformação de coordenadas

A seguir, considere a figura (A.1) exibida abaixo:

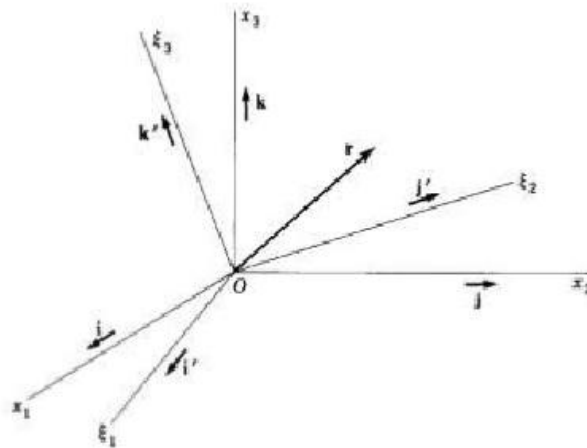


Figura A.1 - Sistema de rotação da coordenada x_i para coordenada ε_i .

Onde o vetor “r” está escrito em termos de componentes ao longo de dois conjuntos retangulares de eixos, x_i ($i=1,2,3$) e ε_i ($i=1,2,3$). As unidades dos vetores ao longo destes eixos são denotadas por \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} e \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' , respectivamente, de modo que:

$$r = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} = \varepsilon_1 \mathbf{i}' + \varepsilon_2 \mathbf{j}' + \varepsilon_3 \mathbf{k}' \quad (\text{A.1.1})$$

Desde que tem se dois caminhos de se expressar o mesmo vetor, as componentes x_i e ε_i devem ser evidentemente relativas. A relação entre ε_1 e as componentes x_i podem ser obtidas pelo produto escalar de “ r ” com \mathbf{i} obtendo:

$$\varepsilon_1 = x_1 \cos(\varepsilon_1, x_1) + x_2 \cos(\varepsilon_1, x_2) + x_3 \cos(\varepsilon_1, x_3)$$

$$\varepsilon_1 = l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + l_{13}x_3 \quad (\text{A.1.2})$$

Onde $l_{1j} = \cos(\varepsilon_1, x_j)$, ($j=1,2,3$) são as direções dos cossenos entre os eixos ε_1 e os eixos x_j . Similarmente, pode se expressar ε_2 e ε_3 em termos das componentes de x_j para que a equação (A.1.2) possa ser generalizada para:

$$\varepsilon_i = l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 = \sum_{j=1}^3 l_{ij}x_j, \quad i=1,2,3 \quad (\text{A.1.3})$$

Em seguida, definindo as matrizes $\{x\} = \{x_j\}$ e $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_j\}$ representando o vetor “ r ” em termos dos componentes correspondentes, tanto quanto a matriz quadrada 3x3 $[l] = [l_{ij}]$ das direções do cosseno, e escrevendo a equação (A.1.3) na forma matricial:

$$\{\varepsilon\} = [l]\{x\} \quad (\text{A.1.4})$$

Onde a matriz $[l]$ pode ser considerada como um operador de transformação de vetor $\{x\}$ para o vetor $\{\varepsilon\}$. A equação (A.1.4) representa uma transformação de coordenadas entre os dois conjuntos de eixos cartesianos.

De um modo mais geral, considere uma transformação de coordenadas cartesianas e generalizadas:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad i=1,2,\dots,n$$

Sendo “n” o numero de graus de liberdade dos sistemas, “t” é o tempo e “ q_k ” é um conjunto de coordenadas generalizadas. No caso particular, da transformação linear:

$$\{y\} = [a]\{x\} \quad (\text{A.1.5})$$

Onde $[a]$ é uma matriz quadrada de coeficientes a_{ij} , então pode se obter o vetor $\{x\}$ pela pré-multiplicação de ambos os lados da equação (A.1.5) pela inversa $[a]^{-1}$ da $[a]$:

$$\{x\} = [a]^{-1}\{y\} \quad (\text{A.1.6})$$

Onde a matriz $[a]$ não é singular. Em caso especial da transformação da matriz $[l]$, no entanto, os coeficientes l_{ij} , não são todos independentes. Para mostrar esta propriedade, pode se escrever o produto escalar de “r” e **i, j e k** em sequência e, obter a relação:

$$x_r = \sum_{s=1}^3 l_{sr} \varepsilon_s, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.1.7})$$

Na qual assume se a forma

$$\{x\} = [l]^T \{\varepsilon\} \quad (\text{A.1.8})$$

Onde $[l]^T$ é definido por $[l_{ij}]^T = [l_{ji}]$ ($i, j = 1, 2, 3$), denotado a matriz transposta $[l]$. Introduzindo – se a equação (A.1.4) em (A.1.8), obtém – se que:

$$[l]^T [l] = [1] = [\delta_{ij}] \quad (\text{A.1.9})$$

Onde $[1]$ é a matriz identidade (ou matriz unidade), isto é, uma matriz com todos seus elementos iguais (Delta de Kronecker), definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.1.10})$$

Da equação (A.1.9), pode se facilmente concluir que a matriz da direção cosseno l_{ij} satisfaz a relação:

$$[l]^{-1} = [l]^T \quad (\text{A.1.11})$$

Que implicará que a matriz inversa da $[l]$ é igual a transposta de $[l]$. Uma transformada que satisfaz a relação (A.1.11) é chamada de transformação ortonormal. A equação (A.1.9) pode ser escrita, na notação de índices, como sendo:

$$\sum_{k=1}^3 l_{ki} l_{kj} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.1.12})$$

e

$$r.r = \{x\}^T \{x\} = \{\varepsilon\}^T \{\varepsilon\} \quad (\text{A.1.13})$$

A qual pode se usar para derivar a equação (A.1.9). Desta forma, pode-se provar o interesse para calcular o valor do determinante de $|l|$ da matriz $[l]$. Da matriz algébrica tira-se a relação

$$|[a][b]| = |a||b| \quad (\text{A.1.14})$$

Mas o determinante da matriz identidade é igual a 1, e desde que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da matriz transposta, segue desde a equação (A.1.9) até a (A.1.14) que:

$$|l|^2 = 1 \quad (\text{A.1.15})$$

Essa equação indica que $|l|$ pode assumir o valor de +1 ou -1. Para o tipo de transformação, será usado o valor +1. A matriz $[l]$ pode ser considerada como sendo o resultado de três rotações sucessivas levando desde o sistema $\{x\}$ até o sistema $\{\varepsilon\}$, como será visto mais a frente.

A.2 Sistemas de coordenadas em rotação

Em muitos problemas dinâmicos, envolvendo corpos em movimento giratório é conveniente expressar o movimento em termos de componentes ao longo de referenciais rotativos, no qual, por definição, são estruturas não inerciais. Se o movimento é relacionado ao espaço inercial novamente, devem se produzir expressões relacionando os componentes de rotação ao sistema fixo de eixos. Ao fazê-lo, pode se reconhecer que um sistema de coordenadas da Sec. A.1.1 pode ser considerado como inercial e o outro giratório no espaço, neste caso as direções cosseno associadas são funções implícitas do tempo. Na sequência, será desenvolvido expressões explícitas para as direções cosseno por ε_i . Este será obtido a partir das iniciais três rotações sucessivas θ_1 , θ_2 e θ_3 sobre os eixos x_1 , y_2 e z_3 , resultando no sistema y_i , z_i e ε_i , respectivamente:

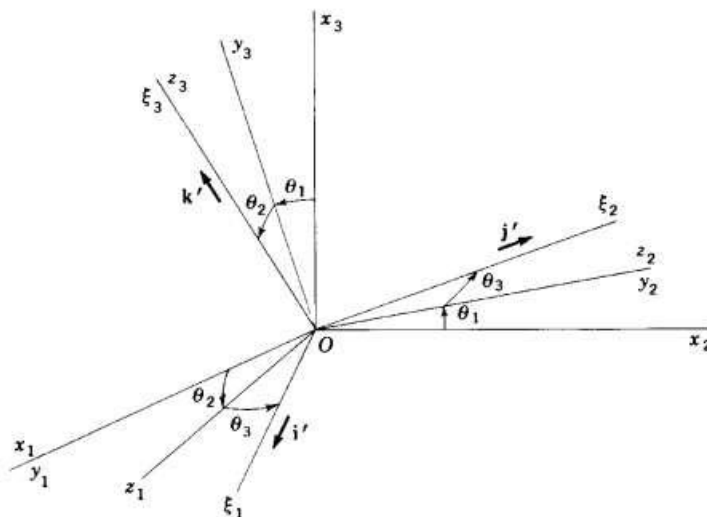


Figura A.2 - Sistema de rotação das coordenadas x_i , y_i e ε_i .

Da figura (A.2) conclui-se que a relação entre os sistemas de coordenadas x_i e y_i é seguida como:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \cos \theta_1 + x_3 \sin \theta_1 \\ y_3 = -x_2 \sin \theta_1 + x_3 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

Que na forma matricial é escrita como:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \text{sen} \theta_1 \\ 0 & -\text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

Ou numa forma mais compacta

$$\{y\} = [R_1(\theta_1)]\{x\} \quad (\text{A.2.3})$$

A matriz rotação $[R_1(\theta_1)]$, denotando a matriz quadrada dos coeficientes da equação (A.2.2), representa a rotação do sistema de eixos originalmente coincidentes com eixos x_i pelo ângulo θ_1 sobre o eixo x_1 . Da mesma forma escreve-se

$$\{z\} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\text{sen} \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \{y\} = [R_2(\theta_2)]\{y\} \quad (\text{A.2.4})$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \text{sen} \theta_3 & 0 \\ -\text{sen} \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{z\} = [R_3(\theta_3)]\{z\} \quad (\text{A.2.5})$$

Combinando (A.2.3) e (A.2.4) em (A.2.5), obtém-se:

$$\{\varepsilon\} = [R_3(\theta_3)][R_2(\theta_2)][R_1(\theta_1)]\{x\} = [I]\{x\} \quad (\text{A.2.6})$$

Onde a matriz da direção cosseno tem a forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} c\theta_2c\theta_3 & c\theta_1c\theta_3 + s\theta_1s\theta_2c\theta_3 & s\theta_1s\theta_3 - c\theta_1s\theta_2c\theta_3 \\ -c\theta_2c\theta_3 & c\theta_1c\theta_3 - s\theta_1s\theta_2s\theta_3 & s\theta_1c\theta_3 + c\theta_1s\theta_2s\theta_3 \\ s\theta_2 & s\theta_1c\theta_2 & c\theta_1c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.7})$$

Onde as abreviações $s\theta_i = \text{sen} \theta_i$ e $c\theta_i = \cos \theta_i$.

Em seguida, deseja-se explorar as possibilidades de expressar rotações finitas como quantidade dos vetores. O fato natural para se investigar é se o procedimento rotacional pode ser representado como sendo os vetores $\theta_i (i=1,2,3)$ direcionados ao longo dos eixos rotativos satisfazem a adição de regras para vetores, isto é, que a adição é um processo comutativo. Isto é equivalente para exigir que a ordem das rotações seja imaterial. A verificação pode ser feita usando uma matriz rotação desenvolvida acima e indo do sistema $\{x\}$ ao sistema $\{z\}$ em dois caminhos: (1) De acordo, com a sequência das equações (A.2.3), (A.2.4) e (A.2.5) por uma rotação θ_2 sobre o eixo x_2 seguido por uma rotação θ_1 sobre o eixo y_1 . Se os resultados obtidos em dois caminhos são iguais, pode-se concluir que rotações finitas são comutativas e satisfazem pelo menos a regra da adição para vetores.

As duas diferentes sequências formam

$$\{z\} = [R_2(\theta_2)][R_1(\theta_1)]\{x\} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & c\theta_1 & s\theta_1 \\ s\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix} \{x\} \quad (\text{A.2.8})$$

$$\{z\} = [R_1(\theta_1)][R_2(\theta_2)]\{x\} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & -s\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix} \{x\} \quad (\text{A.2.9})$$

E não é difícil ver que a regra da adição de vetores é violada, como os dois vetores resultantes $\{z\}$ não são os mesmos. Isso não é totalmente surpreendente desde que, em geral, o produto da matriz “n” seja comutativo.

$$[R_2(\theta_2)][R_1(\theta_1)] \neq [R_1(\theta_1)][R_2(\theta_2)] \quad (\text{A.2.10})$$

Portanto, ângulos de rotação finitos “n” podem representar vetores.

No entanto, o interesse permanece em representar rotações infinitesimais, ao invés de rotações finitas, por vetores. De fato, em casos particulares nos quais os ângulos de rotação são suficientemente pequenos para permitir termos de ordem superior serem ignorados nas

equações (A.2.8) e (A.2.9) ambos tem os mesmos resultados. Portanto, seguindo essa linha de pensamento, pode-se mostrar que rotações infinitesimais podem ser representadas por vetores.

Considerando um vetor “r” fixo em relação a um conjunto de movimento de eixos ε_i . Por causa do conjunto de eixos ε_i girar em relação a um espaço inercial, o conjunto x_i , o vetor r sofre algumas mudanças. Pode-se relembrar que uma mudança na direção do vetor é suficiente para trazer uma mudança no vetor, e o interesse reside em calcular a taxa de mudança de r, devido a uma velocidade angular do referencial ε_i . Tem-se de escolher como expressar r e a taxa de mudança de r em termos das componentes ao longo do sistema inercial x_i ou ao longo do sistema móvel ε_i . Este caminho parece um paradoxo visto que o fato que o vetor “r” é fixo em relação ao sistema ε_i . O fato permanece, no entanto, que, devido à rotação do sistema ε_i , o vetor “r” muda continuamente em relação ao espaço inercial e o vetor, representando a taxa correspondente de mudanças, pode ser resolvidos em componentes ao longo dos conjuntos x_i ou dos conjuntos ε_i . Se verificar que em estudos de corpos girando é frequentemente mais útil expressar o movimento em termos de componentes ao longo do sistema móvel ε_i . Para esa realização, assume-se que os ângulos de rotação $\Delta\theta_i$ são suficientemente pequenos para a aproximação $\text{sen}\Delta\theta_i \approx \Delta\theta_i$ e $\text{cos}\Delta\theta_i \approx 1 (i=1,2,3)$ para ser justificado. Então pré-multiplicando ambos os lados da equação (A.2.6) por $[l]^T$, obtem-se:

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{\varepsilon\} + \{\Delta\varepsilon\} = [l]^T \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 1 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \\ &= [1] \{\varepsilon\} + \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 0 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \end{aligned} \quad (\text{A.2.11})$$

Onde $[l]^T$ foi obtido pela transposta da equação (A.2.7) e deixando na forma $\theta_i \rightarrow \Delta\theta_i (i=1,2,3)$. Equacionando (A.2.11) leva a

$$\{\Delta\varepsilon\} = [\Delta\theta] \{\varepsilon\} \quad (\text{A.2.12})$$

$$\text{Onde} \quad [\Delta\theta] = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 0 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.13})$$

É uma matriz simetria oblíqua, ou antissimétrica. Portanto, um vetor “ r ” fixo em relação a um sistema móvel de coordenadas ε_i , irá sofrer uma mudança infinitesimal Δr em relação a um espaço inercial como um resultado de uma rotação infinitesimal com componentes $\Delta\theta_i$ ($i=1,2,3$) do sistema móvel sobre os eixos ε_i , respectivamente. Em termos das componentes ao longo do sistema inercial, o vetor $r + \Delta r$ é dado por Δx , enquanto que em termos das componentes ao longo sistema ε_i , é expresso por $\{\varepsilon\} + \{\Delta\varepsilon\}$, onde a matriz coluna $\{\Delta\varepsilon\}$, representa o infinitesimal Δr . Todas as quantidades nas equações (A.2.12) e (A.2.13) não dependem da ordem das rotações se as rotações são pequenas. Dividindo a equação (A.2.12) por (A.2.13) pela associação de um infinitesimal de tempo Δt e deixar $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se a derivada do tempo:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) \{\varepsilon\} = [\omega] \{\varepsilon\} \quad (\text{A.2.14})$$

Onde $[\omega]$ é a matriz de simetria oblíqua definida como

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.15})$$

No qual ω_i ($i=1,2,3$) são as componentes velocidade angular do sistema móvel ε_i em relação ao espaço inercial x_i quando expressado em termos das componentes ao longo do sistema ε_i .

E também se pode ver que o vetor em contrapartida com a equação (A.2.14) é

$$\dot{r} = \omega \times r \quad (\text{A.2.16})$$

Onde
$$r = \varepsilon_1 i' + \varepsilon_2 j' + \varepsilon_3 k' \quad (\text{A.2.17})$$

E
$$\omega = \omega_1 i' + \omega_2 j' + \omega_3 k' \quad (\text{A.2.18})$$

Na figura (A.3), pode se interpretar facilmente fisicamente a equação (A.2.16), na qual “r” representa a direção do vetor, ω a velocidade angular do vetor que é coincidente com o eixo de rotação instantânea, e \dot{r} um vetor normal a ambos “r” e ω nas direções mostradas.

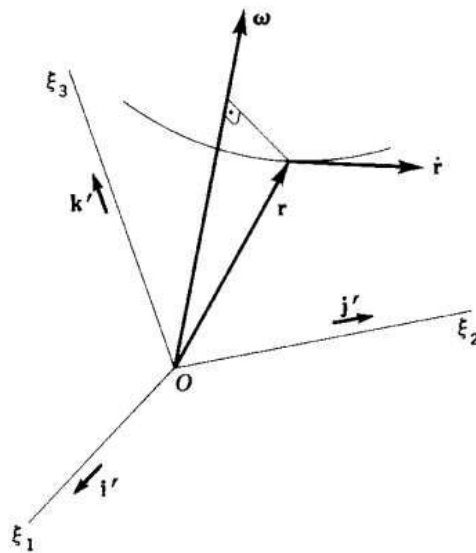


Figura A.3 - Representa a velocidade angular, e o vetor normal "r", e o vetor velocidade \dot{r} .

B Rotinas Computacionais

Para calcular os gráficos apenas usando o método de Runge Kutta, usou - se algumas rotinas simples do MATLAB. Porém as rotinas mais complicadas foram as da paralelização que precisaram ser modificadas para seu uso. O algoritmo abaixo é a rotina paralelizada para o MATLAB:

```
function bacia
clear
clc
% tic

% fidA3=fopen('A2.data','w');
% fidA4=fopen('A2.data','w');

tf=30;

global teta A alpha gamma w mu

w=1;
p=2*pi/w;
teta = 0.7;
alpha = 124;
gamma = 14500;
mu = 0.1;
A = 0.2242;

% for y01=-2.5:.008:1.5

tic

parfor i=0:640

fidA1=fopen('A1.data','w');
fidA2=fopen('A2.data','w');

y01=-0.8+(i*.0025);

% for y01=-0.3:.1:0.3

% clc
tic
y01
```

```

for y02=-0.8:.008:.8;

    y0=[y01 y02];

    [T,Y]=integrapoinc(y0,tf,p);
    Y=Y(end,:);

d=0.08;

% Valores para A = 0.2242 e teta = 0.7

    if (Y(1)>=-0.115-d&&Y(1)<=-0.115+d) && (Y(2)>=0.1048-
d&&Y(2)<=0.1048+d)
        fwrite(fidA1,y0,'single');
    elseif (Y(1)>=-0.1387-d&&Y(1)<=-0.1387+d) && (Y(2)>=0.02489-
d&&Y(2)<=0.02489+d)
        fwrite(fidA2,y0,'single');
    %
    end
end
    toc

end

toc

fclose('all');

fidA1=fopen('A1.data','r');
fidA2=fopen('A2.data','r');

A1=fread(fidA1,[2,inf],'single');
A2=fread(fidA2,[2,inf],'single');

fclose('all')

hold on
plot(A1(1,:),A1(2:,:),'.')
plot(A2(1,:),A2(2:,:),'k.')
toc

function [T,Y]=integrapoinc(y0,tf,p)

[T,Y] = ode45(@ideal,[0:p:tf],y0);

function y=ideal(t,y)

w=1;
teta = 0.7;
alpha = 124;
gamma = 14500;
mu = 0.1;
A = 0.2242;

y=[y(2); A.*sin(w.*t)+alpha.*(y(1).^3)-gamma.*(y(1).^5)-(teta-1).*y(1)-
2.*(mu).*y(2)];

```

Essa rotina cria dois arquivos de armazenamento de dados, calcula-se os dados a partir de um looping feito pelo “for” do “y01” e “y02”, em seguida tem-se uma separação dos dados e assim os dados plotados.

A paralelização foi adaptada então para melhorar o tempo de obtenção dos resultados. Sem a paralelização o programa demorava em torno de 10 horas para terminar os cálculos e o gráfico. Já com a paralelização esse tempo de 10 horas passou para 28 minutos de calculo. Um tempo muito considerável.

Porém, essa rotina, como a mais complicada para a adaptação da paralelização, não foi muito fácil. Teve-se que desconsiderar um looping (for), redefinir uma função de uma da variável “y01” e mudar alguns parâmetros para a divisão dos dados obtidos e então o gráfico plotado.

Quando tínhamos apenas 2 “for” de mesmo passo variável, o primeiro deles em “y01”, mudou para “parfor” que é o comando da paralelização do MATLAB. Porém, também teve que ser modificado o passo, como mostrado na rotina, enquanto o “for” variava de -0.8 até 0.8, num passo de 0.0025, o “parfor” mudou para um “i” que variava de 0 até numero total de pontos. O numero total de pontos foi calculado simplesmente pegando a variação de pontos entre -0.8 e 0.8 e dividindo pelo passo em que se calculava os pontos, 0.0025, que foram 640 pontos. Em seguida foi definida a função que se queria que calculasse e ajustada para esse “i” variando de 0 a 640.

C TEORIA DE VIBRAÇÕES

C.1 Introdução

A maioria das atividades humanas envolve alguma forma de vibração. A audição é possível porque o tímpano vibra. A respiração está associada à vibração dos pulmões, os batimentos cardíacos são movimentos vibratórios, a fala se fundamenta na vibração das cordas vocais e os movimentos humanos envolvem oscilações de braços e pernas. Em muitos outros campos da atividade humana, fenômenos apresentam variáveis cujo comportamento é oscilatório (química, física, etc.). No campo tecnológico, as aplicações de vibrações são de grande importância nos tempos atuais. Por exemplo, na engenharia, projetos de máquinas, fundações, estrutura, motores, turbinas, sistemas de controle, e outros, exigem que questões relacionadas a vibrações sejam levadas em conta (RAO, 1990).

A teoria de vibrações tem contribuições de muitos cientistas que foram de grande importância para o estudo dessa teoria. Galileu estabeleceu formalmente a relação entre o comprimento do pêndulo e o seu “período de oscilação” e observou a ressonância entre dois corpos, conectados por algum meio de transferência de energia e sintonizados em uma frequência natural. Quase ao mesmo tempo Hooke demonstrou as mesmas relações entre tonalidade e frequência (RAO, 1990).

Wallis e Sauveur observaram, independentemente, o fenômeno das formas modais (com pontos estacionários, chamados “nós”) ao estudarem cordas vibratórias. Bernoulli foi o primeiro a propor o princípio da superposição linear de harmônicas: qualquer configuração da vibração livre é contruída a partir das configurações das harmônicas individuais, agindo independentemente, com pesos variados (RAO, 1990).

Em 1676 veio da Lei da Elasticidade por Hooke. Em 1744 por Euler e 1751 por Bernoulli, determinaram a equação diferencial que governa a vibração lateral de barras prismáticas e investigaram a sua solução para o caso de pequenas deformações (RAO, 1990).

Coulomb (1784) realizou estudos teóricos e experimntais sobre as oscilações torsionais de um cilindro metalico suspenso por um arame. E assim outros cientistas tiveram suas contribuições como, Lord Rayleigh em 1877 com a publicação da teoria do som, Frahm em 1902 com estudos da vibração torsional. Modernamente estudos com Poincaré e Lyapunov, Duffing e Van der Pol, e entre outros (RAO, 1990).

C.2 Conceitos Básicos de Vibração

C.2.1 Vibração

Vibração é qualquer movimento que se repete, regular ou irregularmente, depois de um intervalo de tempo. O movimento de um pêndulo e da corda de um violão são exemplos de vibrações, no mundo real. Na engenharia, esses movimentos ocorrem em elementos de máquinas e nas estruturas, quando estes são submetidos às ações dinâmicas. Há diversas definições de vibração (RAO, 1990).

C.2.2 Vibração Livre e Forçada

A Vibração livre é aquela produzida por uma perturbação inicial que não persiste durante o movimento vibratório (RAO, 1990).

A Vibração forçada é a que é provocada por um efeito externo que persiste durante o tempo em que o movimento vibratório existir. O movimento de um rotor desbalanceado é exemplo típico de uma vibração forçada (RAO, 1990).

C.2.3 Vibração Amortecida e Não-Amortecida

A Vibração amortecida é aquela em que a energia vibratória se dissipa com o transcorrer do tempo, de forma que os níveis vibratórios diminuem progressivamente (RAO, 1990).

A Vibração não amortecida é aquela em que a energia vibratória não se dissipa de força que o movimento permanece imutável com o passar do tempo, ou seja, não há mudança no movimento dessa vibração (RAO, 1990).

C.2.4 Vibração Linear e Não Linear

A Vibração linear é aquela que ocorre em um sistema, cujos componentes atuam linearmente (a força de mola é proporcional ao deslocamento; a força de amortecimento é proporcional à velocidade e a força de inércia é proporcional à aceleração) (RAO, 1990).

A Vibração não linear é aquela em que um ou mais componentes do sistema não se comporta linearmente, ou seja, a força produzida não apresenta uma relação linear com a variável cinemática a que se associa (relações quadráticas, cúbicas, logarítmicas, exponenciais, senoidais, etc.) (RAO, 1990).

C.2.5 Vibração Determinística e Aleatória

A Vibração determinística é aquela em que se pode prever todas as características do movimento vibratório, em qualquer instante de tempo (RAO, 1990).

A Vibração aleatória ou não determinística é aquela em que não é possível prever o que irá acontecer no movimento vibratório (RAO, 1990).

C.2.6 Frequência natural e ressonância

A Frequência natural é o movimento harmônico de um sistema quando está livre sem amortecimento, ou seja, de um sistema em vibração livre não amortecido (RAO, 1990).

A ressonância (fenômeno) ocorre quando a frequência natural de vibração coincide com a frequência de uma força externa que atua no sistema. Um exemplo deste fato é a ponte de Tacoma Narrows, durante a vibração induzida pelo vento em 1940 (figura C.1) (RAO, 1990).

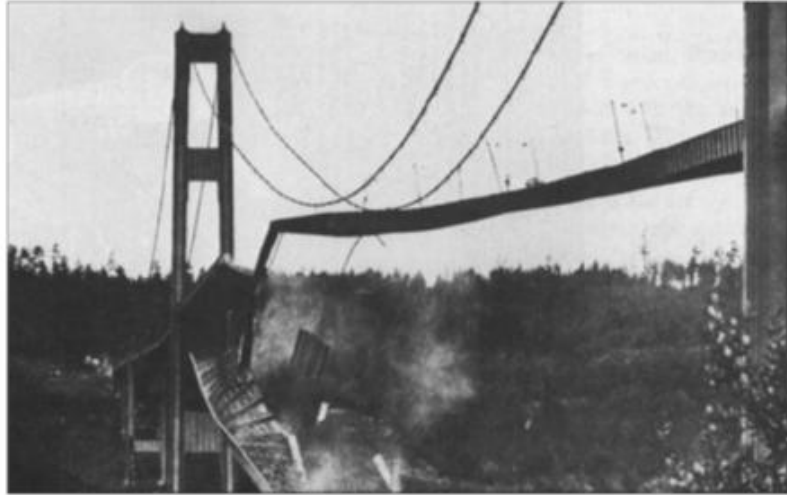


Figura C.1 - Ponte de Tacoma Narrows durante vibração induzida pelo vento (RAO, 1990).

C.3 Graus de liberdade

Grau de liberdade é o número mínimo de coordenadas independentes, necessárias para se descrever completamente o movimento de todas as partes, que compõem um sistema vibratório. Se um sistema possuir pelo menos um grau de liberdade, os valores das variáveis que descrevem o estado do sistema (posição, velocidade, aceleração) devem ser especificados.

Por exemplo, na figura C.2:

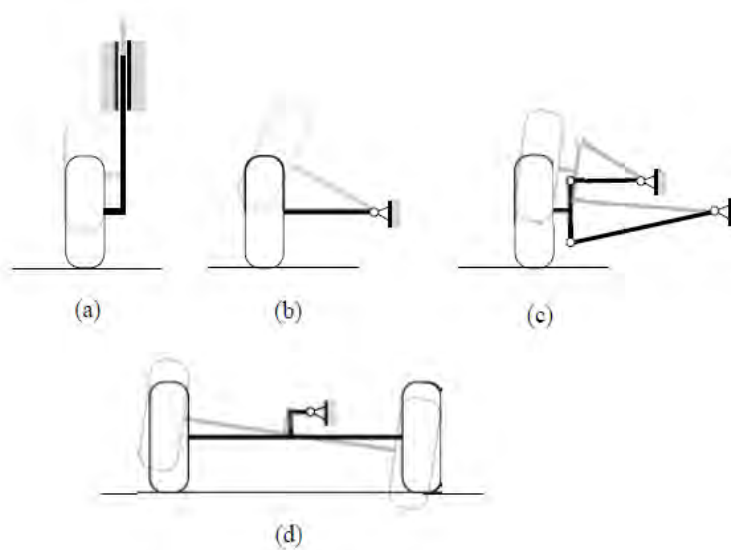


Figura C.2 - (a) e (b) um grau de liberdade, (c) e (d) dois graus de liberdade (RAO, 1990).

C.4 Movimento Harmônico

As principais características do movimento harmônico são a amplitude, “A”, que é o máximo valor atingido por x . A unidade utilizada é a mesma da variável x . O período, T, é o tempo transcorrido até que o movimento se repita (mesmos x , \dot{x} e \ddot{x}).

A frequência, f , é o número de repetições, que ocorrem em uma determinada unidade de tempo. É definida como o inverso do período $f = 1/T$. O ângulo de fase, ϕ , é o ângulo inicial do argumento da função senoidal que descreve o movimento harmônico.

A frequência angular, ω , é a velocidade angular com que um vetor de amplitude “A” gira, de forma que suas projeções horizontal e vertical são movimentos harmônicos, e está relacionada com a frequência f por $\omega = 2\pi f$. Pode-se observar bem este fato a partir da figura C.3:

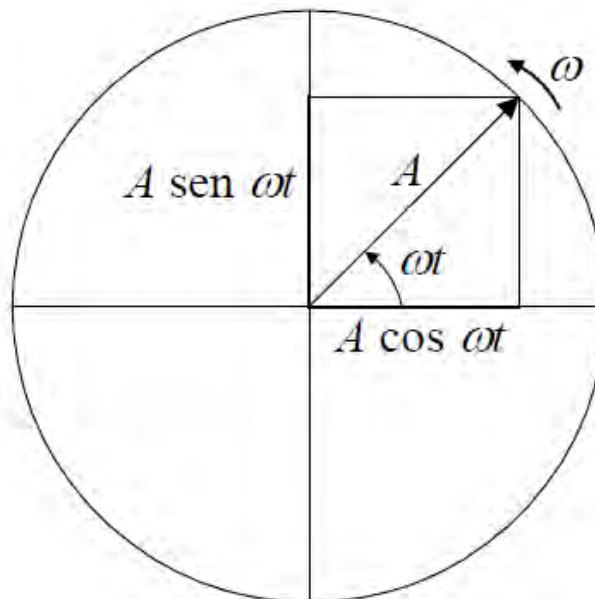


Figura C.3 - Relações para Velocidade Angular e Amplitude (RAO, 1990).

O movimento harmônico é a forma mais simples com que uma vibração se apresenta. A figura C.4 do mecanismo de Scotch Yoke ilustra a geração deste movimento. Esse sistema

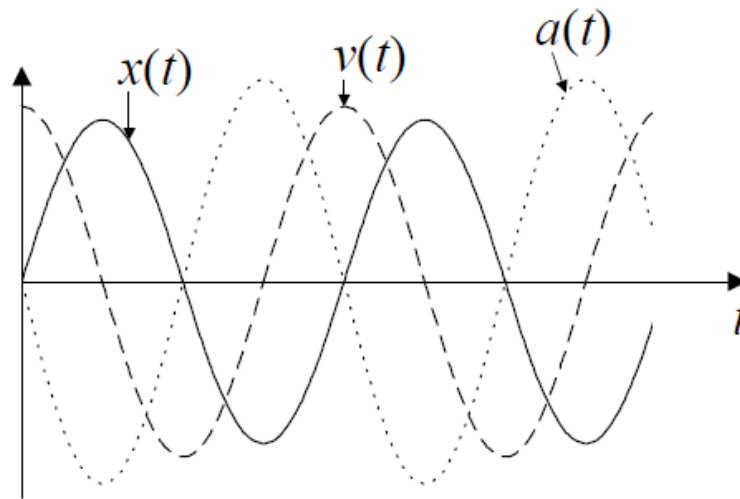


Figura C.5 - Representação do deslocamento $x(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$ (RAO, 1990).

C.5 Método da Energia de Rayleigh

Uma das mais importantes contribuições de Lord Rayleigh no campo das vibrações foi o método apresentado para determinação da frequência natural do sistema de um grau de liberdade (RAO, 1990). Mais tarde Ritz estendeu o método para determinação da primeira frequência natural de um sistema de mais de um grau de liberdade (RAO, 1990). O método de Rayleigh se fundamenta no Princípio da Conservação de Energia, se aplicando, portanto, apenas a sistemas conservativos (sem amortecimento) (RAO, 1990). Como a energia total E é constante, a soma das energias cinética e potencial em dois instantes de tempo quaisquer são iguais, ou seja:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E \quad (\text{C.4})$$

Onde T_1 e U_1 são as energia cinéticas e potencial no tempo 1, T_2 e U_2 são as energias cinéticas e potencial no tempo 2. Estabelecendo a posição de equilíbrio estático como a posição referencial de energia potencial (a energia potencial depende do referencial, que pode ser escolhido arbitrariamente) e o tempo 1 for o tempo em que o sistema passa por esta posição, então $U_1 = 0$ e, como a energia total é constante e igual à soma das energias cinética e potencial, a energia cinética neste tempo deve ser máxima, ou $T_1 = T_{máx}$. Por outro lado, ao

se escolher o tempo 2 como o tempo em que o sistema atinge seu máximo deslocamento, isto produz uma energia potencia máxima $U_2 = U_{máx}$ e, como o movimento é oscilatório, a velocidade neste tempo é nula e $T_2 = 0$. Utilizando a equação (2.4) verifica-se que:

$$T_{máx} = U_{máx} \quad (C.5)$$