

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA**

ANDRÉIA APARECIDA DA SILVA BRITO NASCIMENTO

**RELAÇÕES ENTRE OS CONHECIMENTOS, AS ATITUDES E A CONFIANÇA
DOS ALUNOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA EM
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS**

Bauru, 2008

ANDRÉIA APARECIDA DA SILVA BRITO NASCIMENTO

**RELAÇÕES ENTRE OS CONHECIMENTOS, AS ATITUDES E A CONFIANÇA
DOS ALUNOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA EM
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência – Área de Concentração Ensino de Ciências e Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista UNESP Campus de Bauru, como requisito à obtenção do título de Mestre, sob a orientação do Professor Doutor Nelson Antonio Pirola.

Bauru, 2008

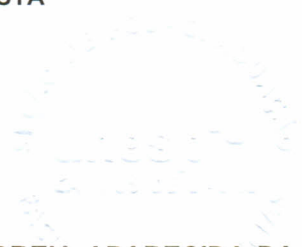
Brito-Nascimento, Andréia Aparecida da Silva.

Relações entre os conhecimentos, as atitudes e a confiança dos alunos do curso de licenciatura em matemática em resolução de problemas geométricos / Andréia Aparecida da Silva Brito Nascimento, 2008. 202 f.

Orientador: Nelson Antonio Pirola

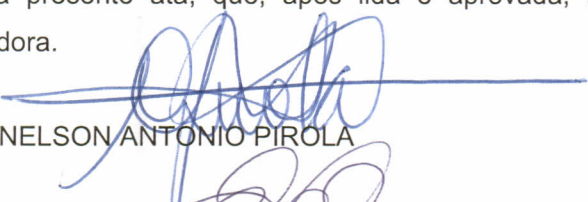
Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2008

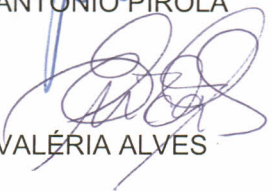
1. Conhecimentos declarativos e de procedimento. 2. Atitudes (geometria). 3. Confiança (matemática). 4. Resolução de problemas. 5. Geometria plana. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.

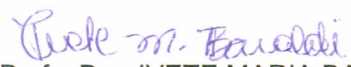


ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ANDREIA APARECIDA DA SILVA BRITO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DO(A) FACULDADE DE CIÊNCIAS DE BAURU.

Aos 19 dias do mês de dezembro do ano de 2008, às 10:30 horas, no(a) Sala nº 01 do Prédio da Pós-Graduação, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciências de Bauru, Profa. Dra. ÉRICA VALÉRIA ALVES do(a) Departamento de Ciências Exatas / Universidade Federal de Alfenas, Profa. Dra. IVETE MARIA BARALDI do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ANDREIA APARECIDA DA SILVA BRITO, intitulada "RELAÇÕES ENTRE OS CONHECIMENTOS, AS ATITUDES E A CONFIANÇA DOS ALUNOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS". Após a exposição, a discente foi argüida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA


Profa. Dra. ÉRICA VALÉRIA ALVES


Profa. Dra. IVETE MARIA BARALDI

Dedico este trabalho,

Aos meus familiares, esposo, filha, mãe e irmãos, por estarem ao meu lado nos momentos importantes, felizes ou difíceis, sempre oferecendo apoio e amor.

Agradecimentos

Quero expressar a minha gratidão e reconhecimento a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta pesquisa.

Ao meu orientador, Nelson Antonio Pirola, professor e amigo, que me despertou o interesse pela pesquisa em Educação, muito obrigada por todos os ensinamentos.

As professoras Érica, Ivete e Mara, pelas valiosas contribuições para realização dessa pesquisa. A professora Irene, pelas contribuições com análise dos dados estatísticos.

Ao professor Mauri, pela importante contribuição na análise das questões. E aos professores Emília, Luciene, Jacqueline, Fábio e Rivaldo, por viabilizar a coleta de dados.

A todos os alunos participantes, que colaboraram respondendo os instrumentos de pesquisa. Agradeço, especialmente, a cada um que contribui de forma ímpar e decisiva para a realização desse trabalho.

Ao meu esposo, Hugo, que realmente esteve ao meu lado nas horas difíceis, me apoiou com carinho, atenção e paciência, além de contribuir com seu conhecimento e experiência profissional. Obrigada meu amor!

A minha filha, Marilene, que dividiu desde a gestação com esse trabalho o seu tempo, foi perfeita, calma e solidária, como se entendesse a razão de tudo isso, meu carinho e amor incondicional.

A minha mãe, Luiza, pessoa forte, batalhadora, o meu melhor exemplo e grande amor. Com certeza a responsável pela pessoa e profissional que me tornei. Um especial obrigado!

A minha irmã, Angela, protetora, amiga, a quem sou infinitamente agradecida por todas as vezes que me socorreu. Muito obrigada por tudo!

Aos meus queridos irmãos, Hilton, William, Wesley, Wilson e Wallace, pelo carinho com que me receberam e apoiaram todos esses anos.

A todos os amigos que torceram por mais esta conquista em minha vida. Obrigada!

RESUMO

A presente pesquisa teve por objetivo investigar as relações entre os conhecimentos geométricos, as atitudes em relação à geometria e a confiança dos graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática. Nesse sentido o problema de pesquisa foi: Quais as relações entre as atitudes em relação à geometria, a confiança em solução de problemas geométricos e os conhecimentos declarativos e procedimentais referentes à geometria plana? Em decorrência desse problema foram trabalhadas na investigação quatro questões de pesquisa. São elas: 1) Existe relação entre a atitude referente à geometria e o domínio dos conhecimentos geométricos?; 2) Existe relação entre a confiança em solução de problemas geométricos e os conhecimentos em geometria?; 3) Existe relação entre a confiança em solução de problemas geométricos e a atitude referente à geometria?; e 4) Quais as principais dificuldades apresentadas por futuros professores de matemática na resolução de problemas envolvendo conceitos geométricos, tais como congruência e semelhança de triângulos; o triângulo retângulo e as relações métricas no triângulo retângulo; área e equivalência de triângulos? Foram participantes da pesquisa 71 alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Estado de São Paulo. Para a coleta de dados foram utilizados diversos instrumentos, dentre eles: escala de atitudes em relação à geometria, 3 provas de conhecimento de geometria plana com questões dissertativas, 3 testes de confiança relacionados às provas de conhecimento de geometria plana, e um questionário informativo. A análise dos dados mostrou correlação das atitudes com relação à geometria com o desempenho global nas provas de conhecimentos geométricos e com a confiança global em solução de problemas geométricos. Foram verificadas diferenças significativas para o fator gênero, sendo que tanto a atitudes, quanto a confiança e o desempenho foram mais positivos para os participantes do gênero masculino em relação as participantes do gênero feminino. Relativo aos desempenhos nas provas, os participantes tiveram melhor desempenho na prova de situações mais pragmáticas, prova de conhecimentos de procedimento, seguido da prova de conhecimento declarativo. As confianças das referidas provas corroboraram os resultados em termos de pontuação. O desempenho na prova de conhecimentos declarativos e procedimentais (demonstrações) foi o mais baixo não atingindo 50%, a confiança para essa prova também foi baixa. Como implicações educacionais o ao se optar em trabalhar com essa

forma de organização de conhecimento nos cursos de Geometria Plana, é preciso procurar despertar nos alunos confiança e atitudes positivas relativos a esse tipo de conhecimento. Uma vez que a prova formal é um processo muito importante na formação do professor, pois possibilita realizar abstrações, levantar conjecturas, validar resultados, que são atividades inerentes ao trabalho do professor de matemática.

Palavras-chave: conhecimentos declarativos e de procedimento; atitudes (geometria); confiança (matemática); resolução de problemas; geometria plana.

ABSTRACT

This study aimed to investigate the relationship between the geometric knowledge, the attitude toward the geometry and the confidence of graduating from a course in Bachelor of Mathematics. In this sense the problem of search was: What are the links between attitudes towards geometry, confidence in problem-solving geometric and knowledge reporting and procedural relating to the geometry flat? Due to this problem have been worked four issues of research on the inquiry. They are: 1) Is there a relationship between the attitude on the geometry and the thorough of geometric knowledge?; 2) Is there a relationship between confidence in problem-solving geometric and knowledge in geometry?; 3) Is there a relationship between confidence in problems-solving geometric and attitude on the geometry?, and 4) What are the main difficulties faced by prospective teachers of Mathematics to solve problems involving geometric concepts such as congruency and similarity of triangles, the rectangle and triangle and metric relations in the triangle rectangle; area and equivalence of triangles? Participants in search were 71 students of a course in Bachelor of Mathematic from a Public University of São Paulo State. For data collection were used various instruments, among them: scale of attitudes towards geometry, 3 proof of knowledge of flat geometry with descant issues, 3 trust tests related to evidence of knowledge of plane geometry and a questionnaire for information. The analyses data showed correlation of attitudes with regard to the geometry with the overall performance in tests of geometric knowledge and confidence with the overall solution of geometric problems. There were significant differences in the gender factor, and that both, the attitudes as the confidence and performance were more positive for the male participants in relation to female participants. On the performances in the tests, the participants had better performance in the test of situations most pragmatic, proof of knowledge of procedure, followed by proof of declarative knowledge. The trusts of those tests corroborate the results in terms of scoring. The performance in the test of reporting and procedural knowledge (statements) was not reaching the lowest 50%, the confidence for this test was also low. As to the educational implications if you choose to work with this form of organization of knowledge in the courses of Plane Geometry, it must seek to arouse in students confidence and positive attitudes concerning this type of knowledge. Once the formal proof is a process very important in training of teacher,

enables to carry through abstractions, raising conjecture, validate results, which are activities inherent to the work of the mathematics teacher.

Key words: knowledge reporting and of procedure; attitudes (geometry), confidence (mathematics); solving problems; flat geometry.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I – PESQUISAS NA ÁREA DA PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: APORTE PARA O ESTUDO	4
1.1 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO: APRESENTAÇÃO DAS PESQUISAS	6
1.2 SINTETIZANDO ALGUMAS IDÉIAS	13
CAPÍTULO II – PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	17
2.1 Tipos de conhecimentos: declarativo e de procedimento	22
2.2 ATITUDES.....	24
2.2.1 Atitude: Apresentação e definição do termo	24
2.2.2 Atitudes: A Escala de atitudes	28
2.3 CONFIANÇA E A MATEMÁTICA.....	30
CAPÍTULO III – GEOMETRIA PLANA: ASPECTOS GERAIS DO SEU ENSINO ...	33
3.1 O ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM OBSTÁCULO PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA	35
3.2 O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO SUPERIOR: UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA	38
3.3 CONCEITOS DA GEOMETRIA PLANA EUCLIDIANA	42
3.3.1 Congruência e Semelhança	43
3.3.2 Relações métricas.....	50
3.3.3 Área e Equivalência.....	54
CAPÍTULO IV – METODOLOGIA DA PESQUISA	57
4.1 PROBLEMA E QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO	57
4.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA	58
4.3 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS	58
4.4 PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS.....	64
4.5 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE	66
4.5.1 Método quantitativo	66
4.5.1.1 Apresentação das variáveis.....	72
4.5.2 Método Qualitativo.....	75
4.6 O ESTUDO PILOTO	76
4.6.1 Análise dos dados do Estudo Piloto.....	81
4.6.2 Alterações nos instrumentos de pesquisa: contribuições do Estudo Piloto.....	86

CAPÍTULO V – ANÁLISE DOS RESULTADOS DA PESQUISA	88
5.1 CARACTERÍSTICAS DOS PARTICIPANTES	88
5.2 ANÁLISE DESCRITIVA DAS RESPOSTAS DAS PROVAS DE CONHECIMENTOS	91
5.2.1 Respostas da prova de conhecimento declarativo	91
5.2.2 Respostas da Prova de conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)	105
5.2.3 Respostas da Prova de conhecimento procedimental	122
5.3 ANÁLISE DOS DADOS DAS ESCALAS, TESTES E PROVAS	140
CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO	152
REFERÊNCIAS.....	156
ANEXOS	160
MODELOS DE CARTAS.....	161
Anexo 01: Permissão para Aplicação dos Instrumentos de Pesquisa	161
Anexo 02: Permissão para Utilização da aula para a aplicação dos Instrumentos de Pesquisa	162
Anexo 03: Convite para professor especialista.....	163
Anexo 04: Participação alunos e termo de consentimento	164
QUESTIONÁRIO INFORMATIVO.....	165
Anexo 05: Questionário informativo sobre o aluno	165
ESCALA.....	167
Anexo 06: Escala de atitudes em relação à geometria	167
TESTES DE CONFIANÇA	169
Anexo 07: Teste de confiança I – conhecimentos declarativos.....	169
Anexo 08: Teste de confiança II – conhecimentos declarativos e procedimentais (demonstrações)	170
Anexo 09: Teste de confiança III – conhecimentos procedimentais	172
PROVAS DE CONHECIMENTO	174
Anexo 10: Prova I - Conhecimentos declarativos	174
Anexo 11: Prova II - Conhecimentos declarativos e procedimentais (demonstrações)	176
Anexo 12: Prova III - Conhecimentos procedimentais.....	178
PARECER DAS QUESTÕES	181
Anexo 13: Instruções – Parecer do Professor Especialista.....	181
Anexo 14: Modelo de Ficha – Parecer do Professor Especialista	182

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Síntese dos elementos da pesquisa nas Dissertações e Teses que compõe o levantamento bibliográfico	14
Tabela 2: x e y que satisfazem triângulo retângulo na forma (catetos: $2xy$, $x^2 - y^2$ e hipotenusa: $x^2 + y^2$).....	54
Tabela 3: Apresentação das variáveis.....	72
Tabela 4: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança e desempenho na Prova I de conhecimento declarativo.....	81
Tabela 5: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança e desempenho na Prova II de conhecimentos declarativo e procedimental (demonstrações)	82
Tabela 6: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança e desempenho na prova de conhecimentos procedimentais.....	83
Tabela 7: Distribuição dos participantes de acordo com a pontuação na Escala de Atitudes em relação à geometria e o desempenho	84
Tabela 8: Distribuição dos participantes de acordo com a pontuação nos testes de confiança e a Escala de Atitudes em relação à geometria.....	84
Tabela 9: Distribuição dos participantes de acordo com a idade	88
Tabela 10: Distribuição dos participantes de acordo com as experiências com a geometria no Ensino Fundamental	89
Tabela 11: Distribuição dos participantes de acordo com as experiências com a geometria no Ensino Médio	89
Tabela 12: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança em resolução de situação problema ou exercício que envolva geometria	90
Tabela 13: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança em resolução de demonstração	91
Tabela 14: Estatísticas nas escalas de atitude, confiança e na prova de conhecimento geométrico	140
Tabela 15: Matriz de correlação entre a pontuação nas escalas, testes e provas	145
Tabela 16: Estatísticas por turma nas escalas de atitude, confiança e na prova de conhecimento geométrico.....	147
Tabela 17: Estatísticas da pontuação nos instrumentos por gênero.	148
Tabela 18: Estatísticas da pontuação nos instrumentos por situação de lecionar ou não.	150

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Fases de solução de problemas e produção criativa	19
Quadro 2: Diferenças entre conhecimento declarativo e procedimental	22
Quadro 3: Questões das provas de conhecimento geométrico – Conteúdo: Congruência entre Triângulos.....	60
Quadro 4: Questões das provas de conhecimento geométrico – Conteúdo: Semelhança entre Triângulos.....	61
Quadro 5: Questões das provas de conhecimento geométrico – Conteúdo: Triângulos Retângulos	62
Quadro 6: Questões das provas de conhecimento geométrico – Conteúdo: Área de figuras planas.....	63
Quadro 7: Distribuição da pontuação e categorias referentes à Escala de Atitudes com relação à geometria.....	67
Quadro 8: Pontuação mínima e máxima da Escala de Atitudes com relação a geometria	67
Quadro 9: Sistema de Contagem de cinco pontos	68
Quadro 10: Distribuição da pontuação e categorias referente às provas de conhecimentos geométricos.....	70
Quadro 11: Pontuação mínima e máxima das provas de conhecimentos geométricos....	70
Quadro 12: Distribuição da pontuação e categorias referente aos testes de confiança em resolução de problemas geométricos.	71
Quadro 13: Pontuação mínima e máxima dos testes de confiança em resolução de problemas geométricos.....	71
Quadro 14: Transformação da pontuação dos instrumentos.....	140

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Distribuição da pontuação na escala de atitudes em relação à Geometria...	141
Gráfico 2: Distribuição da pontuação na escala de confiança em relação à Geometria.	142
Gráfico 3: Distribuição da pontuação na prova de conhecimentos geométricos.....	142
Gráfico 4: Pontuação média na confiança e nas provas de conhecimentos geométricos.	143
Gráfico 5: Distribuição da pontuação na prova de confiança e de conhecimentos geométricos.....	144
Gráfico 6: Relação entre o desempenho e a confiança nas três provas.	146
Gráfico 7: Pontuação média nos instrumentos por turma.	147
Gráfico 8: Distribuição da pontuação nos instrumentos por gênero.....	148
Gráfico 9: Relação entre a confiança e as atitudes, segundo gênero.	149
Gráfico 10: Relação entre o conhecimento e as atitudes, segundo gênero.	149
Gráfico 11: Relação entre o conhecimento e a confiança, segundo gênero.....	150
Gráfico 12: Distribuição da pontuação nos instrumentos por exercício da docência. ...	151

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ciclo de Resolução de Problemas.....	20
Figura 2: Componentes das atitudes.....	26
Figura 3: Atributos definidores de atitudes	27
Figura 4: Mitos típicos dos estudantes sobre a natureza da Matemática.....	31
Figura 5: Modelo da estrutura de ensino influente na formação do professor	36
Figura 6: Representação gráfica reta $m_5=\{b,f,d\}$	41
Figura 7: Exemplo I - Conteúdo - congruência de triângulos.	45
Figura 8: Exemplo II - Conteúdo - congruência de triângulos.....	46
Figura 9: Exemplo III - Conteúdo - congruência de triângulos.....	47
Figura 10: Exemplo IV - Conteúdo - congruência de triângulos.	47
Figura 11: Exemplo V - Conteúdo - congruência de triângulos.....	48
Figura 12: Exemplo I - Conteúdo - triângulo retângulo.	51
Figura 13: Exemplo I - Conteúdo – equivalência de área.....	55
Figura 14: Exemplo II - Conteúdo – equivalência de área.	55
Figura 15: Exemplo III - Conteúdo – equivalência de área.....	56
Figura 16: Esquema da pesquisa.....	74
Figura 17: Figura da Situação 05 – PROVA I	77
Figura 18: Figura da Situação 01 – PROVA III	78
Figura 19: Figura da Situação 02 – PROVA III	79
Figura 20: Figura da Situação 03 – PROVA III	79
Figura 21: Figura da Situação 08 – PROVA III (A)	80
Figura 22: Figura da Situação 08 – PROVA III (B).....	80
Figura 23: Figura da Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 (PLT-02)	87
Figura 24: Figura da Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 (PLT-01)	87
Figura 25: Figura nova - PROVA I - SITUAÇÃO 05.....	87
Figura 26: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-A12 – Turma A – Categoria: RCLM (5 pontos).....	92
Figura 27: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-C33 – Turma C – Categoria: RCLI (4 pontos).....	92
Figura 28: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-B11 – Turma B – Categoria: REPD (3 pontos).....	92
Figura 29: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-A11 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos).....	93
Figura 30: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-C33 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	93
Figura 31: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-B13 – Turma B – Categoria: RCLI (4 pontos).....	94
Figura 32: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A04 – Turma A – Categoria: REPD (3 pontos).....	94
Figura 33: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A02 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos).....	95
Figura 34: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-C36 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	95
Figura 35: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: RCLI (4 pontos).....	96

Figura 36: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-A37 – Turma A – Categoria: REPD (3 pontos).....	96
Figura 37: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B14 – Turma B – Categoria: RILM (2 pontos).....	97
Figura 38: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-C25 – Turma C – Categoria: TRE (1 pontos).....	97
Figura 39: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-C30 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	99
Figura 40: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-C20 – Turma C – Categoria: REPD (3 pontos).....	99
Figura 41: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-A19 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos).....	100
Figura 42: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-B14 – Turma B – Categoria: TRE (1 pontos).....	100
Figura 43: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA I - SITUAÇÃO 05).....	100
Figura 44: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-C01 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	101
Figura 45: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: RCLI (4 pontos).....	101
Figura 46: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A19 – Turma A – Categoria: REPD (3 pontos).....	102
Figura 47: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-B10 – Turma B – Categoria: RILM (2 pontos).....	102
Figura 48: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A29 – Turma A – Categoria: TRE (1 pontos).....	103
Figura 49: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C24 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	103
Figura 50: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-B02 – Turma B – Categoria: RCLI (4 pontos).....	104
Figura 51: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C33 – Turma C – Categoria: REPD (3 pontos).....	104
Figura 52: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-A29 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos).....	104
Figura 53: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 01)	105
Figura 54: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-C06 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	105
Figura 55: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-D02 – Turma D – Categoria: REPD (3 pontos).....	106
Figura 56: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-C10 – Turma C – Categoria: RILM (2 pontos).....	106
Figura 57: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-B01 – Turma B – Categoria: TRE (1 pontos).....	106
Figura 58: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 02)	107
Figura 59: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-C05 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	108
Figura 60: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-C02 – Turma C – Categoria: RCLI (4 pontos).....	108
Figura 61: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-D01 – Turma D – Categoria: REPD (3 pontos).....	108

Figura 62: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A21 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos).....	109
Figura 63: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-B03 – Turma B – Categoria: TRE (1 ponto)	109
Figura 64: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA II - SITUAÇÃO 03)	110
Figura 65: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-C23 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	110
Figura 66: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B14 – Turma B – Categoria: RCLI (4 pontos).....	111
Figura 67: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B06 – Turma B – Categoria: REPD (3 pontos).....	111
Figura 68: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B08 – Turma B – Categoria: RILM (2 pontos).....	112
Figura 69: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B11 – Turma B – Categoria: TRE (1 ponto)	112
Figura 70: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA II - SITUAÇÃO 04).....	113
Figura 71: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-C19 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	114
Figura 72: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-B04 – Turma B – Categoria: REPD (3 pontos).....	114
Figura 73: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-D02 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos).....	114
Figura 74: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-A – Turma A11 – Categoria: TRE (1 ponto)	115
Figura 75: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-C05 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	116
Figura 76: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A09 – Turma A – Categoria: REPD (3 pontos).....	116
Figura 77: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-C04 – Turma C – Categoria: RILM (2 pontos).....	116
Figura 78: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-D06 – Turma D – Categoria: TRE (1 ponto)	117
Figura 79: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 06)	117
Figura 80: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-B09 – Turma B – Categoria: RCLM (5 pontos).....	118
Figura 81: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C25 – Turma C – Categoria: REPD (3 pontos).....	118
Figura 82: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C04 – Turma C – Categoria: RILM (2 pontos).....	119
Figura 83: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C19 – Turma C – Categoria: TRE (1 ponto)	119
Figura 84: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 07)	119
Figura 85: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A12 – Turma A – Categoria: RCLM (5 pontos).....	120
Figura 86: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A19 – Turma A – Categoria: RCLI (4 pontos).....	120
Figura 87: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-C23 – Turma C – Categoria: REPD (3 pontos).....	121
Figura 88: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-D07 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos).....	121

Figura 89: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A11 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)	122
Figura 90: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-D01 – Turma D – Categoria: RCLM (5 pontos).....	123
Figura 91: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-D06 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos)	123
Figura 92: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-D01 – Turma D – Categoria: RCLM (5 pontos).....	125
Figura 93: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A32 – Turma A – Categoria: RCLI (4 pontos).....	125
Figura 94: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A07 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)	126
Figura 95: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A22 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)	126
Figura 96: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-C20 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos).....	127
Figura 97: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-D08 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos)	128
Figura 98: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-A15 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)	129
Figura 99: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA III - SITUAÇÃO 04)	129
Figura 100: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-D08 – Turma D – Categoria: RCLM (5 pontos).....	130
Figura 101: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-A37 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos).....	130
Figura 102: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-B04 – Turma B – Categoria: TRE (1 ponto)	130
Figura 103: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA III - SITUAÇÃO 05)	131
Figura 104: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A12 – Turma A – Categoria: RCLM (5 pontos).....	131
Figura 105: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A37 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos).....	132
Figura 106: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)	132
Figura 107: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-A12 – Turma A – Categoria: RCLM (5 pontos).....	133
Figura 108: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-D08 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos)	134
Figura 109: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-A25 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)	135
Figura 110: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 07).....	135
Figura 111: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-D06 – Turma D – Categoria: RCLM (5 pontos).....	136
Figura 112: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A14 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos).....	136
Figura 113: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)	136
Figura 114: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 08 – Participante PAR-B13 – Turma B – Categoria: RCLM (5 pontos).....	138

Figura 115: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 08 – Participante PAR-C35 – Turma C	
– Categoria: RCLI (4 pontos)	138
Figura 116: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 08 – Participante PAR-A03 – Turma A	
– Categoria: RILM (2 pontos)	139
Figura 117: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 08 – Participante PAR-B11 – Turma B	
– Categoria: TRE (1 ponto)	139

INTRODUÇÃO

A geometria ocupa um lugar importante no corpo de conhecimento da ciência matemática, pois o seu ensino permite ao estudante desenvolver um tipo de pensamento que o auxilia a compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive.

Os documentos oficiais nacionais como o RCNEI - Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil e os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais, elaborados para dar ao currículo de Matemática e das outras disciplinas uma base comum a todos os Estados, apresentam considerações que evidenciam a importância do ensino de geometria ao longo de toda a escolaridade, na qual em cada segmento de ensino apesar das especificidades possui como ponto norteador o desenvolvimento do pensamento geométrico.

No início da Educação Básica o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil apresenta as orientações relacionadas ao conteúdo de Espaço e Forma, nomenclatura utilizada, neste segmento, para o conteúdo de Geometria. Referente ao ensino dos conteúdos de Espaço e Forma, o RCNEI (Brasil, 1998b) afirma que é possível propiciar, através de atividades organizadas, situações que potencializem o desenvolvimento do pensamento geométrico das crianças de zero a seis anos. De igual forma os PCN para o ensino de primeira à quarta série de Matemática (Brasil, 1997) assinalam o ensino dos conceitos geométricos como parte importante do currículo de Matemática.

Do mesmo modo, os PCN referentes ao Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental de Matemática (Brasil, 1998a) afirmam que a geometria, possibilita o desenvolvimento das habilidades de percepção espacial; elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo; e de codificação e decodificação de desenhos. Por último, o PCN do Ensino Médio (Brasil, 2002) aponta a geometria como campo apropriado para o desenvolvimento de habilidades de visualização, desenho, de argumentação lógica e aplicação em situações de solução de problemas.

Embora atribuído esse destaque ao ensino da Geometria, em documentos oficiais, desde a Educação Infantil e em todos os segmentos da Educação Básica, alguns estudos, como os de Pavanello (1989) e Pirola (2000), dentre outros autores, mostraram que existe uma redução (de importância e de conteúdos) da Geometria no Currículo de Matemática. Observa-se que alguns conteúdos importantes para a formação do pensamento geométrico, tais como: geometria espacial, geometria de posição e o desenho geométrico estão sendo

suprimidos dos livros didáticos. Somada a redução dos conteúdos, segundo Pirola e Brito (2001), existe nas escolas, a diminuição da importância de ensinar Geometria, o que resulta no que esses autores chamaram de abandono da Geometria.

Diversamente, objetivando a aprendizagem de conceitos geométricos é possível utilizar diferentes estratégias. Segundo a Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau o ensino de geometria pode assumir as seguintes abordagens:

tendo como meta primordialmente a aprendizagem da lógica, da organização do conhecimento, partindo-se de pontos, retas e planos para somente no final do percurso tratar de objetos tridimensionais. Pode-se ainda considerar o eixo para o ensino da GEOMETRIA o estudo de certas classes de transformações e das propriedades que elas preservam, desde as mais gerais que são as topológicas até as mais específicas que são as métricas, passando pelas propriedades projetivas. Ou pode-se partir da manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais freqüentes, de sua caracterização através das propriedades, para somente ao final do percurso aproximar-se de uma sistematização. (São Paulo, 1991, p.11).

Nesse sentido, é preciso observar que a disciplina de Geometria nos cursos de Licenciatura em Matemática, de uma maneira geral, parte do princípio que os estudantes, já tiveram contato com a geometria plana e espacial durante sua formação na Educação Básica. Em decorrência desse fato, conforme apresentado na Proposta Curricular para o ensino de Matemática do 1º grau (São Paulo, 1991), nessa etapa é utilizado uma abordagem de ensino, na qual a disciplina de geometria é ministrada *“tendo como meta primordialmente a aprendizagem da lógica, da organização do conhecimento”*. Ou seja, os conteúdos são, geralmente, trabalhados com abordagem axiomática.

Muitos estudantes que ingressam em um curso superior não obtiveram um entendimento consistente sobre os conceitos básicos da Geometria tratados durante sua formação elementar. O desconhecimento de alguns conceitos básicos da Geometria ou até mesmo uma formação errônea de conceitos durante a Educação Básica pode influenciar de maneira determinante na atuação do graduando na disciplina Geometria, no que diz respeito à relação que o indivíduo desenvolve em termos de atitudes e desempenho. É importante ressaltar que essa relação tem implicações diretas na atuação desse indivíduo enquanto futuro professor no tocante a esse conteúdo, uma vez que a falta de conhecimento de uma determinada área pode provocar atitudes negativas, bem como acarretar na falta de confiança

para a resolução de problemas. Esses elementos podem interferir, futuramente, também na atuação como professor no que diz respeito à Geometria.

Nesse sentido, esse trabalho procura suscitar discussões a respeito das relações entre os conhecimentos, as atitudes, a confiança dos graduandos da licenciatura em Matemática relativo aos conteúdos de geometria, em situações de resolução de problemas. Para tanto, utilizou-se da estrutura que apresentamos a seguir:

O primeiro capítulo traz a revisão da literatura, com um aporte essencialmente realizado em pesquisas da área da Psicologia da Educação Matemática. Apresenta estudos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, ou áreas específicas da matemática, que abordaram as temáticas: atitudes, confiança, solução de problemas, e tipos de conhecimento. A parte final do capítulo traz uma síntese de idéias que canalizam elementos dos estudos mencionados, os quais contribuíram para o delineamento de partes dessa pesquisa como fundamentação teórica, metodologia, bem como, o trabalho como um todo.

A fundamentação teórica é apresentada no segundo capítulo. Com aporte teórico na área da Psicologia da Educação Matemática, nas temáticas: atitudes com relação à matemática, solução de problemas, conhecimento declarativo e procedimental e a confiança matemática.

No terceiro capítulo, objetivou-se abordar na primeira parte os aspectos gerais do ensino da Geometria a partir da influência que a formação básica exerce durante a formação do licenciando em matemática, bem como o aspecto axiomático dado ao ensino de Geometria na graduação. Ainda nesse capítulo, foram tratados alguns conceitos da geometria plana euclidiana, tais como: congruência e semelhança, relações métricas, área e equivalência.

O seguinte, quarto capítulo, descreve a metodologia da pesquisa utilizada. Apresenta o problema de pesquisa e as questões de investigação. Traz um delineamento dos participantes e dos instrumentos do estudo, com as questões de conteúdo escolhidas para compor as provas de conhecimento. São apresentados os procedimentos de análise, métodos qualitativos e quantitativos, e o estudo piloto.

O quinto capítulo apresenta a pesquisa, enfocando as características dos participantes, as respostas das provas de conhecimentos, teste de confiança, e escalas de atitudes, sendo finalizado com a análise dos dados.

O último capítulo traz as respostas às questões de pesquisa com as conclusões e implicações do estudo.

CAPÍTULO I – PESQUISAS NA ÁREA DA PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: APORTE PARA O ESTUDO

A área acadêmica de investigação que mais se preocupa com o ensino da matemática é a Educação Matemática. Possui como núcleo de investigação aclarar questões relacionadas ao ensino e aprendizagem dessa disciplina.

No entanto, o ensino dos conhecimentos matemáticos é uma atividade que esteve em sua origem intimamente vinculada à sua própria produção (Miorim 1998). Segunda essa autora:

A matemática, cujas primeiras manifestações surgiram ainda no período Paleolítico, ligadas diretamente às necessidades práticas impostas pelo contexto social, passou por muitos momentos qualitativamente diferentes durante o seu longo desenvolvimento. Em algumas etapas desse percurso, o ensino dos conhecimentos matemáticos esteve associado à sua produção.

(Miorim, 1998, p.1).

De fato, nos primórdios do ensino, em especial, da matemática não existia uma preocupação direta com a forma ou método utilizado para o ensino dessa área de conhecimento. A Educação Matemática enquanto campo de atividade mostrava uma preocupação fundamentalmente centrada no ensino. A produção inicial sobre o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos era basicamente desenvolvida de forma isolada e pragmática (Kilpatrick, 1996). Este autor aponta que:

Os educadores matemáticos, no início, eram matemáticos que se preocupavam em como sua matéria estava sendo ensinada. Ocasionalmente, eles faziam pesquisa, mas mais freqüentemente, eles ensinavam e escreviam sobre métodos de ensino da matemática.

(Kilpatrick, 1996, p.111).

O desenvolvimento da Educação Matemática, enquanto campo de pesquisa no cenário acadêmico avançou a passos lentos. Somente após a instalação dos primeiros programas de Pós-graduação, década de 1970, é que estudos na área foram realizados nas Universidades, apresentando um caráter de pesquisa científica, dando resposta aos critérios que são preponderantes da pesquisa “strictu sensu” em educação (Fiorentini, 1994).

Autores, como Fiorentini (1994) e Melo (2006), têm se debruçado sobre a produção acadêmica na área da Educação Matemática visando realizar a sistematização,

categorização e análise dos trabalhos desse campo de pesquisa no país. Esses trabalhos evidenciam, sobre tudo, o “estado da arte” da pesquisa em Educação Matemática no Brasil, além de possibilitar o entendimento da evolução dos trabalhos de pesquisa realizados nessas últimas décadas.

É importante ressaltar que os trabalhos produzidos na área da Educação Matemática, teses e dissertações, têm o envolvimento de profissionais com diferentes formações. Dessa forma, a Educação Matemática ficou caracterizada como uma área de pesquisa que admite estreitos vínculos com outras áreas de investigação, pois a mesma se formou com contribuições de pesquisadores matemáticos, psicólogos educacionais, filósofos, educadores, entre outros. As diversas vertentes atuantes na Educação Matemática, por consequência, acabam por se constituírem campos de inquérito autônomos, como é o caso da Psicologia, Filosofia e História da Educação Matemática.

Essa pesquisa integra a área de pesquisa da Psicologia da Educação Matemática. Assim, o embasamento bibliográfico está subsidiado em alguns trabalhos dentro dessa vertente.

A Psicologia da Educação Matemática é um campo amplo da Educação Matemática. Segundo Rocha Falcão (2003) ela busca oferecer subsídios psicológicos para o debate interdisciplinar referente a essa área. Quanto ao caráter interdisciplinar Brito e Garcia (2001) apontam:

Trata-se de área em que se pode efetuar uma formação de caráter interdisciplinar a partir do pressuposto de que à psicologia da educação cabe dar a conhecer os processos psicológicos em jogo na elaboração conceitual de determinado campo de conhecimento específico, em situação peculiar cultural, a escolar. (Brito e Garcia, 2001, p. 17.)

Como o conhecimento específico tratado neste campo é a Matemática, a Psicologia da Educação Matemática tem como objetivo estudar o ensino e aprendizagem da Matemática, porém preocupa-se com outros fatores cognitivos e afetivos que estão relacionados à compreensão desse conteúdo (Brito, 2001).

Os trabalhos de pesquisa produzidos, teses e dissertações, na área da Psicologia da Educação Matemática no Brasil durante a década de 90 teve um aumento expressivo. Segundo Melo (2006) ao realizar um levantamento da produção acadêmica em Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) no período de 1976 a 2003, no qual analisou dez temáticas da Educação Matemática (Psicologia da/na Educação

Matemática, Formação de professores que ensinam matemática, Materiais/ Recursos didáticos e tecnológicos, Didática/ Metodologia de ensino, Prática pedagógica em matemática, História/ Filosofia/ Epistemologia, Etnomatemática, Currículo relativo ao ensino da matemática, Crenças/ concepções/ percepções /ideário/ representações e outros estudos) constatou que das 219 pesquisas analisadas 50 eram da temática Psicologia da/na Educação Matemática, sendo que 47 dessas foram defendidas no período de 1991 a 2003.

Esse número expressivo de trabalhos na vertente da Educação Matemática é consequência da forte atuação do Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da Unicamp (PSIEM). Constituindo-se em um dos principais grupos dessa área ao lado do grupo de Psicologia da Educação Matemática da Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Psicologia (ANPEPP). Pioneiro no país, o grupo de Psicologia da ANPEPP teve como marco inicial para suas atividades a reunião do VI Simpósio de Pesquisa e Intercâmbio Científico da ANPEPP realizado no ano de 1996 em Petrópolis-RJ.

Alguns dos eixos de estudos explorados pela Psicologia da Educação Matemática conexos à questão do ensino e aprendizagem da matemática são: formação de conceitos, solução de problemas, habilidades matemáticas, desempenho e atitudes em relação à matemática, etc.

Objetivando-se contribuições efetivas para o presente estudo, foi feita a opção de incluir no Levantamento bibliográfico trabalhos da área da Psicologia da Educação Matemática que tratou específica, mas não exclusivamente, de um ou mais tópicos referentes a esse trabalho, são eles: atitudes, confiança, solução de problemas, e os tipos de conhecimento.

1.1 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO: APRESENTAÇÃO DAS PESQUISAS

O trabalho desenvolvido por Brito (1996) é o maior referencial teórico na área de atitudes com relação à matemática no Brasil. A autora realizou a adaptação, aplicação e validação da escala de atitudes em relação à matemática de AIKEN e revista por AIKEN e DREGER. Foram participantes do seu estudo alunos da 3ª a 8ª série do 1º grau, atualmente denominado Ensino Fundamental, e alunos das três séries do 2º grau, atual Ensino Médio. Ao todo foram 2007 alunos de quatro escolas públicas da região de Campinas, Estado de São Paulo. O problema de pesquisa constituiu em saber se os alunos de 1º e 2º graus apresentavam atitudes negativas com relação à matemática e se essas atitudes ocorriam por influência de fatores como idade, sexo, série, grau, hábitos de estudo, reprovação e compreensão dos

conteúdos matemáticos. Como instrumentos da pesquisa a autora utilizou um questionário e a escala de atitudes com relação à matemática. Para análise dos dados foi utilizado método estatístico. Os resultados permitiram afirmar que a escala é adequada para aferição das atitudes dos estudantes em relação à Matemática.

É relevante destacar que esse trabalho é pioneiro e possibilitou a realização de outros estudos que utilizaram a escala com relação à matemática adaptada por Brito (1996). Além de desencadear outras adaptações para conteúdos específicos da matemática, como a geometria, estatística e cálculo.

Outro trabalho que abordou as atitudes com relação à matemática foi o de Silva (2001), que em seu estudo investigou a atitude em relação à matemática e a questão do desempenho e fracasso escolar. Os alunos participantes da pesquisa pertenciam às séries finais do Ensino Fundamental, 5ª a 8ª série, de escolas municipais, estaduais e particulares da região de Campinas, Estado de São Paulo. Ao todo foram 552 alunos participantes. O problema de pesquisa investigou as relações entre algumas variáveis atitudinais e o desempenho dos alunos. Os instrumentos utilizados na pesquisa com os alunos foram: um questionário, a escala de atitudes com relação à matemática e um roteiro de entrevista. A autora apontou como resultados a relação entre o fracasso escolar associado ao desempenho dos alunos e à própria disciplina. A autora encontrou relações entre as atitudes e uma série de fatores como: autopercepção de desempenho em matemática, o entendimento dos problemas matemáticos, as explicações do professor, a nota, a atenção às explicações, a preferência por disciplina. Com relação aos resultados das entrevistas com os alunos ficou evidenciado que estes não percebem a utilidade da matemática no dia-a-dia e considera o professor como o fator mais importante do sucesso ou do fracasso escolar.

Nessa pesquisa também participaram 10 professores de matemática. Para os professores a autora utilizou como instrumentos de pesquisa um questionário, a escala de atitudes com relação à matemática e um roteiro de entrevista. Os resultados evidenciaram que os professores não se consideravam parte do sistema de ensino, bem como não se consideravam responsáveis pelo fracasso do aluno.

Outro trabalho sobre atitudes com relação à matemática foi o desenvolvido por Moron (1998). Em sua pesquisa a autora verificou as atitudes de professores da Educação Infantil com relação à matemática e suas concepções sobre o ensino da matemática. O problema de pesquisa foi investigar se os professores de Educação Infantil com atitudes positivas em relação à matemática possuem concepções sobre o ensino da matemática diferentes daqueles com atitudes negativas? Participaram do estudo 402 professores de 41

escolas do município de Bauru, Estado de São Paulo. A pesquisa foi dividida em duas fases. Na primeira os instrumentos de pesquisa utilizados foram: a escala de atitudes com relação à matemática e um questionário. A autora apontou que os resultados obtidos com o questionário e a escala de atitudes mostraram que esse grupo de professores possui atitudes mais positivas em relação à matemática.

Na outra fase da pesquisa a autora selecionou 6 professores (3 com atitudes negativas e 3 com atitudes positivas com relação à matemática) para participar da entrevista. Como resultado a autora apontou que as atitudes não foram determinantes para diferenciar as concepções que os professores entrevistados possuem sobre o ensino da matemática na Educação Infantil.

O trabalho de Alves (1999) investigou a auto-percepção, o desempenho na solução de problemas aritméticos e as habilidades matemáticas de estudantes do Ensino Médio. Ao todo foram participantes da pesquisa 53 formandos de duas escolas (pública e particular) de Campinas e Americana. O problema de pesquisa proposto no estudo foi verificar quais componentes da habilidade matemática são requeridos para que estudantes concluintes do Ensino Médio obtenham sucesso na solução de problemas aritméticos. Como resultados da pesquisa a autora ressaltou que os participantes apresentaram maior dificuldade na obtenção da informação matemática a partir do enunciado verbal em situações problemas.

Em um segundo momento da pesquisa foram selecionados 9 participantes para verificar os componentes da habilidade matemática, a saber: habilidade para perceber relações e fatos concretos no problema, formar generalizações, “encurtando” o raciocínio e a memória matemática, o raciocínio verbal e as atitudes em relação à Matemática. Nessa fase a autora concluiu que o desempenho na solução dos problemas aritméticos não era determinado pelos componentes da habilidade matemática apontados anteriormente. Contudo o desempenho na solução dos problemas aritméticos poderia ter influência do raciocínio verbal.

Utsumi (2000) em sua investigação sobre atitudes com relação à matemática verificou as atitudes dos alunos do segundo ciclo do Ensino Fundamental e sua relação com o gênero, a série e o desempenho em matemática. O problema de pesquisa proposto pela autora foi verificar quais as relações entre a atitude e a habilidade matemática e como o gênero e a série se relacionariam com as atitudes e a habilidade matemática. Os participantes da pesquisa foram 256 alunos das 6ª, 7ª e 8ª séries de uma escola pública do Estado de São Paulo. Utilizou como instrumento de pesquisa além da escala de atitudes com relação à matemática, dois testes com problemas e questões com conteúdo algébrico e um questionário.

Em um segundo momento a autora investigou os componentes da habilidade matemática: percepção; generalização; flexibilidade; reversibilidade dos processos mentais; encurtamento de raciocínio; compreensão; raciocínio e lógica; memória e tipo de habilidade matemática. Para isso utilizou o teste matemático para selecionar os alunos com melhor desempenho em cada série. Nessa segunda fase da pesquisa os alunos foram submetidos a uma bateria de testes algébricos. Como resultado a autora apontou que as variáveis: série, reprovações, gênero, compreensão dos problemas e autopercepção de desempenho, estavam relacionadas à nota. Ressaltou ainda que na análise dos protocolos dos sujeitos considerados mais capazes em matemática foi verificado que não eram capazes de solucionar os problemas propostos, os quais deveriam evidenciar a habilidade matemática desses sujeitos.

Em sua pesquisa Araújo (1999) investigou a relação das atitudes referente à matemática com a escolha profissional e as habilidades matemáticas presentes em estudantes formandos do Ensino Médio e estudantes universitários. Foram participantes da pesquisa 145 alunos de nível médio e 233 alunos de nível superior. O problema de pesquisa proposto pela autora foi verificar se existiam relações entre as habilidades e as atitudes em relação à matemática e a escolha profissional, do qual derivaram questionamentos sobre a escolha por carreira na área de exatas ou tecnológicas, que privilegiam a matemática em seu currículo e possíveis relações com a atitude em relação à matemática e com a habilidade com relação à matemática. A autora utilizou como instrumentos para a coleta de dados, a escala de atitudes em relação a matemática, um questionário, um teste com 10 questões gerais de álgebra, e uma série de problemas algébricos.

Araújo (1999) na análise dos resultados pontuou diferença entre as áreas; o desempenho foi melhor na escola particular; a atitude foi mais positiva na escola pública e mais positiva para os sujeitos da área de exatas; os participantes universitários da área de humanas obtiveram zero nas provas; evidenciou relação entre desempenho e atitude referente à matemática.

A pesquisa de Gonzalez (2000) investigou as atitudes dos alunos e dos seus pais com relação à matemática. Foram participantes da pesquisa 121 alunos e seus pais. Os alunos cursavam o Ensino Fundamental, 3ª, 4ª e 8ª séries de escolas públicas e particulares. O objetivo do trabalho foi compreender as relações entre as atitudes em relação à Matemática, o gênero, a confiança e o desempenho. As questões de investigação suscitadas pela autora foram se as atitudes dos pais, em relação à Matemática, influenciam as atitudes dos filhos; se a confiança no desempenho em Matemática e a atitude em relação a essa disciplina influenciam o desempenho do aluno, se as atitudes dos pais e dos filhos em relação à

Matemática estão relacionadas ao desempenho dos alunos nessa disciplina, se existem relações entre as atitudes e o gênero, entre o desempenho nessa disciplina e o gênero, e se os sujeitos consideram a Matemática como uma disciplina do domínio masculino.

A autora utilizou três escalas de atitudes, questionários, e atas de notas como instrumentos para coletas de dados. Na análise, os resultados apontaram que: os pais exercem pouca influência na formação das atitudes dos filhos com relação à matemática, a confiança está correlacionada com o desempenho do aluno, e não foi encontrada relação com a confiança e o gênero.

Loos (2003) em sua pesquisa também avaliou as atitudes com relação à matemática de alunos e pais. O problema proposto no estudo foi verificar como as crenças auto-referenciadas e as experiências afetivas dos alunos, bem como as atitudes e expectativas dos pais, influenciam as atitudes em relação à matemática e o desempenho nessa disciplina. Segundo a autora crenças auto-referenciadas são crenças de controle, autoconceito e auto-estima. Os 94 alunos participantes da pesquisa eram da 3ª, 5ª e 7ª séries de uma escola privada do município de Campinas, Estado de São Paulo. A autora utilizou questionários e escalas como instrumentos de pesquisa e também observações. A autora encontrou como resultado predominância em atitudes positivas e também as crenças auto-referenciadas. Também foram predominantes as percepções e expectativas dos pais em relação à vida escolar dos filhos.

Outro trabalho que investigou as crenças de auto-eficácia e autopercepção foi o estudo realizado por Neves (2002). O problema de pesquisa investigado foi se existe relação entre o desempenho dos alunos em Matemática, e suas percepções e expectativas, bem como as percepções e expectativas dos respectivos professores quanto a esse desempenho. Foram participantes da pesquisa 122 estudantes de terceira e quarta séries do Ensino Fundamental. Os instrumentos de pesquisa utilizados pela autora foram escalas (de auto-eficácia matemática, auto-conceito matemático, e de ansiedade matemática), provas e questionários. A autora apontou como resultados da pesquisa realizada relações entre auto-eficácia e desempenho, entre auto-percepção e expectativas de desempenho. Foi encontrada relação entre percepção e as expectativas dos professores com o desempenho dos alunos.

O estudo realizado por Viana (2005) também tratou de atitudes. Essa autora investigou a atitude com relação à matemática e à geometria. A escala de atitudes com relação à geometria foi criada a partir da escala de atitudes com relação à Matemática de Brito e apresenta a mesma estrutura de perguntas, porém fazendo referência ao conteúdo específico de geometria. A autora investigou a relação das atitudes referentes à matemática e à geometria com o componente espacial da habilidade matemática. As questões que nortearam o estudo

discutem como se relacionam as operações mentais referentes ao componente espacial da habilidade matemática, a relação entre o desempenho em teste psicológico (raciocínio espacial) e o desempenho na prova que avalia o componente espacial da habilidade matemática, tipos de representações externas na solução de problemas de geometria espacial, e as relações entre as atitudes com relação à geometria e à matemática, e o desempenho nos testes de raciocínio espacial, na prova de componente espacial e o desempenho escolar. Os participantes desse estudo foram 177 alunos do Ensino Médio de uma escola particular. A autora utilizou como instrumentos de pesquisa para coleta de dados além das duas escalas, um teste psicológico de raciocínio espacial e duas provas. Como resultados a autora encontrou relação nas atitudes dos alunos referente à matemática e à geometria. Também encontrou relação da atitude referente à geometria com o desempenho, raciocínio verbal e o componente espacial da habilidade matemática.

Rezi (2001) com uma abordagem de solução de problemas investigou as relações existentes entre o nível de desenvolvimento do pensamento em geometria e componentes das habilidades matemáticas. O problema de pesquisa proposto para este estudo foi verificar quais são as relações entre o desempenho em provas que avaliam o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, a percepção geométrica e a habilidade para trabalhar com conceitos espaciais. Foram participantes da pesquisa 201 alunos formandos do Ensino Médio de duas escolas (pública e particular). A autora utilizou como instrumento de pesquisa um questionário informativo, três provas (uma prova com problemas com enunciado verbal, outra com problemas que requerem processamento visual e a terceira com problemas que requerem representação e manipulação mental de objetos), e um teste de raciocínio espacial. Como resultados a autora identificou uma relação linear significativa entre esses constructos.

Outra pesquisa que tratou de solução de problemas foi a elaborada por Lima (2001). Em seu estudo a autora objetivou investigar as relações existentes na solução de problemas entre a flexibilidade de pensamento e a criatividade. O problema de pesquisa proposto foi verificar quais as relações existentes entre a flexibilidade de pensamento e a criatividade, evidenciadas durante os procedimentos de solução de problemas matemáticos. Participaram da pesquisa 307 estudantes do Ensino Fundamental das 6ª, 7ª e 8ª séries de uma escola pública de Campinas, Estado de São Paulo. Os instrumentos de pesquisa utilizados pela autora para a coleta de dados foram um questionário e um teste matemático.

Em um segundo momento da pesquisa a autora selecionou um aluno de cada série que obteve o melhor desempenho. A autora realizou então a segunda parte da pesquisa, na qual utilizou como instrumento de coleta de dados o teste de Rorschach e a uma bateria de

testes aritméticos, algébricos e geométricos. Os resultados verificados pela autora foram que os participantes da 6ª e 7ª série não eram capazes de solucionar os problemas. O participante da 8ª série conseguiu solucionar com ajuda do experimentador. O teste de Rorschach evidenciou características de criatividade nesses participantes.

Um trabalho importante na resolução de problemas, especificamente, em geometria foi a pesquisa realizada por Pirola (2000). O problema de pesquisa foi verificar se existem diferenças significativas entre o desempenho de alunos da Licenciatura em Matemática e alunos do curso de Habilitação Específica do Magistério na utilização de conceitos e princípios de área, perímetro e volume contidos em problemas com informações completas, incompletas e supérfluas. Os participantes da pesquisa foram 124 alunos do Magistério e 90 alunos da Licenciatura de instituições localizadas no interior do Estado de São Paulo. Como instrumentos de pesquisa o autor utilizou um questionário informativo e uma prova contendo problemas envolvendo informações completas, incompletas e supérfluas. Como resultado o autor apontou diferenças significativas entre os dois cursos, sendo que os participantes do curso de Licenciatura utilizaram os conceitos e princípios mais corretamente que os alunos provenientes do curso de magistério. O autor ressalta que o desempenho da maioria dos participantes foi sofrível e evidencia a necessidade de investimentos em programas de educação continuada, uma vez, que estes estudantes atuarão no futuro como professores.

O trabalho realizado por Quintiliano (2005) sobre resolução de problemas verificou o conteúdo de álgebra e tratou dos tipos de conhecimentos: declarativo e de procedimento. O problema de investigação proposto foi verificar quais as relações entre o conhecimento declarativo e de procedimento do estudante envolvido em atividades de solução de problemas algébricos. Os participantes da pesquisa foram 96 estudantes formandos do Ensino Fundamental de duas escolas (pública e particular) de Bauru, Estado de São Paulo. A autora utilizou como instrumento de coleta de dados um questionário e duas provas, sendo a primeira sobre conhecimento declarativo e a segunda sobre conhecimentos de procedimento com conhecimentos algébricos. Em seus resultados da pesquisa a autora destaca uma relação, na qual o participante que obteve melhor nota na prova de conhecimento declarativo também obteve melhor nota na prova de conhecimento procedimental.

O estudo realizado por Alves (2005) abordou também os conhecimentos declarativos e de procedimentos. O problema de pesquisa investigado foi verificar se existe relação entre o desempenho, o conhecimento declarativo e de procedimento e a capacidade de recuperar, durante a solução de problemas matemáticos, os conhecimentos (declarativo e de

procedimento) previamente aprendidos. Foram participantes da pesquisa 177 estudantes da 5ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio de duas escolas (pública e particular). A autora utilizou como instrumentos para coleta de dados um questionário informativo, duas provas, a primeira para avaliar o conhecimento declarativo e de procedimento e o desempenho na solução de problemas matemáticos, e outra para avaliar a memória matemática.

Na segunda fase do estudo a autora selecionou 32 participantes a partir do desempenho nas provas. O instrumento de coleta de dados utilizado nessa fase foi o teste de Cópia e Reprodução de Figuras Complexas de Rey. Com a análise dos dados a autora obteve relações entre a memória matemática e o desempenho na solução de problemas.

1.2 SINTETIZANDO ALGUMAS IDÉIAS

A seguir tabela que sintetiza os principais elementos constituintes das pesquisas selecionadas para o levantamento bibliográfico, tais como: o segmento de ensino a que pertence ou se relaciona os participantes das pesquisas; quais conteúdos matemáticos são investigados, aritmética, álgebra, geometria; utiliza a escala de atitude para a matemática ou geometria, investiga os tipos de conhecimentos declarativos e procedimentais; e se apresenta questão da confiança matemática.

Tabela 1: Síntese dos elementos da pesquisa nas Dissertações e Teses que compõe o levantamento bibliográfico

DISSERTAÇÃO OU TESE	SUJEITOS DA PESQUISA					ATTITUDES		SOLUÇÃO PROBLEMA			CONHECIMENTO		CONFIANÇA
	Fundamental	Médio	Superior	Professor	outros	Matemática	Geometria	Aritmética	Álgebra	Geometria	Declarativo	Procedimental	
ALVES (1999)		X				X		X					
ALVES (2005)	X	X									X	X	
ARAÚJO (1999)		X			X	X			X				
BRITO (1996)	X	X				X							
GONÇALEZ (2000)	X				X	X							X
LIMA (2001)	X							X	X	X			
LOOS (2003)	X				X	X							X
MORON (1998)				X		X							
NEVES (2002)	X												X
PIROLA (2000)			X		X					X			
QUINTILIANO (2005)	X								X		X	X	
REZI (2001)		X								X			
SILVA (2001)	X			X		X							
UTSUMI (2000)	X					X			X				
VIANA (2005)		X				X	X			X			

Alguns trabalhos citados tiveram como participantes especificamente alunos do Ensino Fundamental, como os trabalhos de Utsumi (2000), Lima (2001) que tiveram como sujeitos estudantes de 6^a, 7^a e 8^a séries e Quintiliano (2005) que trabalhou com alunos da 8^a série. Na investigação de Silva (2001) os sujeitos de pesquisa foram alunos do segundo ciclo do Ensino Fundamental de 5^a a 8^a séries e seus professores. As pesquisas de Gonzalez (2000) e Loos (2003) tiveram participantes do Ensino Fundamental Séries Iniciais (3^a série), alunos do segundo ciclo do Ensino Fundamental e a participação dos pais dos estudantes. Brito (1996) e Alves (2005) trabalharam com estudantes dos dois segmentos, Ensino Fundamental e Médio. Enquanto que Alves (1999), Araújo (1999), Rezi (2001) e Viana (2005) tiveram em suas pesquisa sujeitos do Ensino Médio. Verificamos que os trabalhos se concentraram em investigações envolvendo participantes do Ensino Fundamental, seguido do Ensino Médio ou até mesmo dos dois segmentos e pessoas que se relacionam com esses alunos, como pais e professores.

Diferem-se as pesquisas de Moron (1998) e Pirola (2000), por trabalhar com professores da Educação Infantil, como na investigação de Moron (1998), e com futuros professores como a investigação realizada por Pirola (2000), que teve como participantes estudantes universitários de cursos de Magistério e Licenciatura.

As pesquisas dos temas de interesse para esse estudo tiveram um olhar predominantemente para o Ensino Básico. Evidenciam que muito se tem a fazer no que diz respeito, sobretudo à formação de professores e professores em exercício.

Grande parte desses trabalhos tratou das atitudes com relação à matemática. Sendo que os trabalhos de Brito (1996), Moron (1998) e Silva (2001) utilizaram como principal instrumento na pesquisa a escala para aferir as atitudes com relação à matemática. Outros trabalhos como os de Alves (1999), Araújo (1999) e Utsumi (2000) relacionaram atitudes com solução de problemas. Gonzalez (2000) e Loos (2003) investigaram uma série de fatores relacionados a atitudes, entre ele a confiança. Viana (2005) investigou as atitudes com relação à matemática e a geometria.

Os estudos que tratam da resolução de problemas em geral optam em tratam um conteúdo específico da matemática. Alves (1999) tratou das relações em solução de problemas aritméticos. Lima (2001) atuou nas três áreas de conteúdo. Tiveram três trabalhos com interesse em conteúdos algébricos, Araújo (1999), Utsumi (2000) e Quintiliano (2005). Com três trabalhos também na área de solução de problemas geométricos, Pirola (2000), Rezi (2001) e Viana (2005).

Quintiliano (2005) e Alves (2005), trataram dos tipos de conhecimentos declarativos e procedimentais. Gonzalez (2000), Neves (2002) e Loos (2003) abordaram em suas pesquisas temas como as crenças auto-referenciadas e a confiança matemática.

Segundo a Tabela 1 é possível perceber que o foco de grande parte das pesquisas aqui mencionadas trata as atitudes dos alunos pertencentes à educação básica, sobre tudo Ensino Fundamental, em relação à matemática. Nesse contexto, existe uma demanda para pesquisa com formação de professores para aferir sobre as atitudes em relação à matemática e a geometria. Nesse sentido, abordaremos a atitudes em relação a geometria, associada a confiança em resolução de problemas geométricos e os tipos de conhecimentos.

CAPÍTULO II – PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A solução de problemas é uma atividade realizada em todas as disciplinas escolares, além disso, é possível vivenciar situações de solução de problemas em circunstâncias externas à escola, em atividades em casa, trabalho, esporte, jogos, brincadeiras, entre outras. Em determinadas situações escolares a solução de problemas deixa de ser um conteúdo para ser uma atividade de condução de determinado conteúdo específico, ou seja, a atividade de solução de problemas pode ser o eixo norteador do ensino.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de quinta a oitava série (Brasil, 1998a) e os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2002), o estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema. Um dos objetivos da Educação Básica (Pozo, 1998), é fazer com que o aluno resolva e também proponha determinados problemas fazendo uso da criatividade.

A solução de problemas é uma habilidade cognitiva. Segundo Chi e Glaser (1992) a capacidade para a solução de problemas difere de uma pessoa para outra em termos dos processos cognitivos e organização mental, que nos permite diferenciar um especialista de um novato ou, similarmente, um adulto de uma criança.

O conhecimento e a vivência do solucionador influenciam, diretamente, para o alcance do objetivo na solução de problemas. Nesse sentido pode haver diferença no desempenho em situações de resolução de problemas de uma pessoa que conhece bem o conteúdo em relação à outra que não possui o mesmo domínio. É importante ressaltar, que essa situação se confirma em sala de aula, nas quais os problemas escolares exigem domínio de determinado conhecimento.

Em particular, a investigação sobre a solução de problemas, nos domínios que exigem um conhecimento profundo, mostra como a organização do conhecimento adquirida pelo solucionador do problema, que é armazenada na memória de longa duração, influencia os processos de percepção e as estratégias usadas para a solução de problemas.

(Chi e Glaser, 1992, p 251).

Tratar da solução de problemas é intrínseco a estudos que se dedicam a investigar a aprendizagem escolar da disciplina matemática e conteúdos específicos como a geometria. Para tanto, é preciso compreender o que é um problema no sentido dado à solução de problemas em Psicologia da Educação Matemática.

Klausmeier e Goodwin (1977) afirmam que nos deparamos com um problema quando nos encontramos em uma situação que devemos solucionar um problema e não possuímos informações, conceitos, princípios ou métodos específicos disponíveis para chegar à solução. Para Sternberg (2000) uma situação em que nos empenhamos na resolução de problemas, é quando precisamos superar obstáculos, a fim de responder a uma pergunta ou alcançar um objetivo.

Para Pozo, Echeverría, et al. (1998) uma situação é considerada um problema à medida que não dispomos de mecanismos ou procedimentos automáticos que nos permita solucionar de forma imediata, ou sem exigir reflexão para resolução. Esses autores apresentam a definição clássica de problema dada por Lester:

(...) uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precise resolver e para qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve a solução.

Lester (apud Echeverria, Pozo, et al. 1998, p 15).

Resolver um problema, em situação de ensino e aprendizagem matemática, representa para muitos fazer uma série de cálculos com números retirados do enunciado aplicando o último conteúdo apresentado pelo professor, ou seja, fazem uso dos problemas como exercícios. São típicos exemplos de problemas escolares, uma vez que não apresentam obstáculos para resolução, pois está implícito que os mecanismos necessários estão presentes na teoria, conceito, procedimento ou técnica, apriori apresentada pelo professor e os dados facilmente identificáveis no enredo de problema.

Nesta situação posta acima o aluno é um mero reproduzidor de conhecimento. Por outro lado, utilizando-se da resolução de problemas, espera-se que o aluno passe a protagonizar as situações de aprendizagem, permitindo-o questionar, fazer uso dessas informações para formular novos problemas, exemplos de ações que possibilitam a construção de conhecimentos.

Klausmeier e Goodwin (1977) apresentam as seqüências de operações envolvidas na solução de problemas, sintetizando as idéias de alguns autores sobre resolução de problemas.

Quadro 1: Fases de solução de problemas e produção criativa

Rossmann (1931)	Dewey (1933)	Merrifield et al. (1960)
Necessidade ou dificuldade observada	Contacto com uma dificuldade	Preparação
Problema formulado		Análise
Informação recolhida	Localizar e definir o problema	
Soluções formuladas		Produção
	Sugerir possíveis hipóteses	
Soluções testadas	Elaboração mental	Verificação
Novas idéias formuladas	Testar hipóteses	
Novas idéias testadas e aceitas		Reaplicação

Fonte: Extraído de Klausmeier e Goodwin, 1977, p. 349.

As fases da solução de problemas envolvem o contato com uma dificuldade na fase de preparação; definição e análise do problema; formular possíveis hipóteses e soluções; testar/ verificar soluções; e formular/ reaplicar novas idéias. Sobre as etapas envolvidas na solução de problemas Polya (1945) pontua que solucionar um problema envolve quatro etapas, são elas: a) compreender o problema; b) conceber um plano; c) executar o plano; e d) verificar a solução. Krutetskii (1976) apresenta apenas três estágios: a) Obter a informação matemática; b) Processamento matemático da informação; e c) Retenção da informação matemática. Mayer (1992) considera as seguintes etapas para representação do problema: tradução do problema, integração do problema, planejamento da solução, execução da solução. Esse mesmo autor em termos de conhecimento apresenta as seguintes etapas: a) compreender o enunciado que envolve os fatores lingüísticos; b) conhecer a relação entre problemas-tipo que envolve o conhecimento de esquema; c) procedimentos de cálculos que abarca o conhecimento algorítmico; e d) como se enfocam os problemas que envolvem o conhecimento estratégico.

Sternberg amplia as fases da solução de problemas inserindo aspectos que não foram considerados pelos teóricos citados anteriormente. Como exemplo, podemos citar um problema matemática que exija a utilização de uma calculadora científica com teclas e funções específicas. Para Sternberg nas etapas para solucionar esse problema deve ser prevista a alocação de recursos.

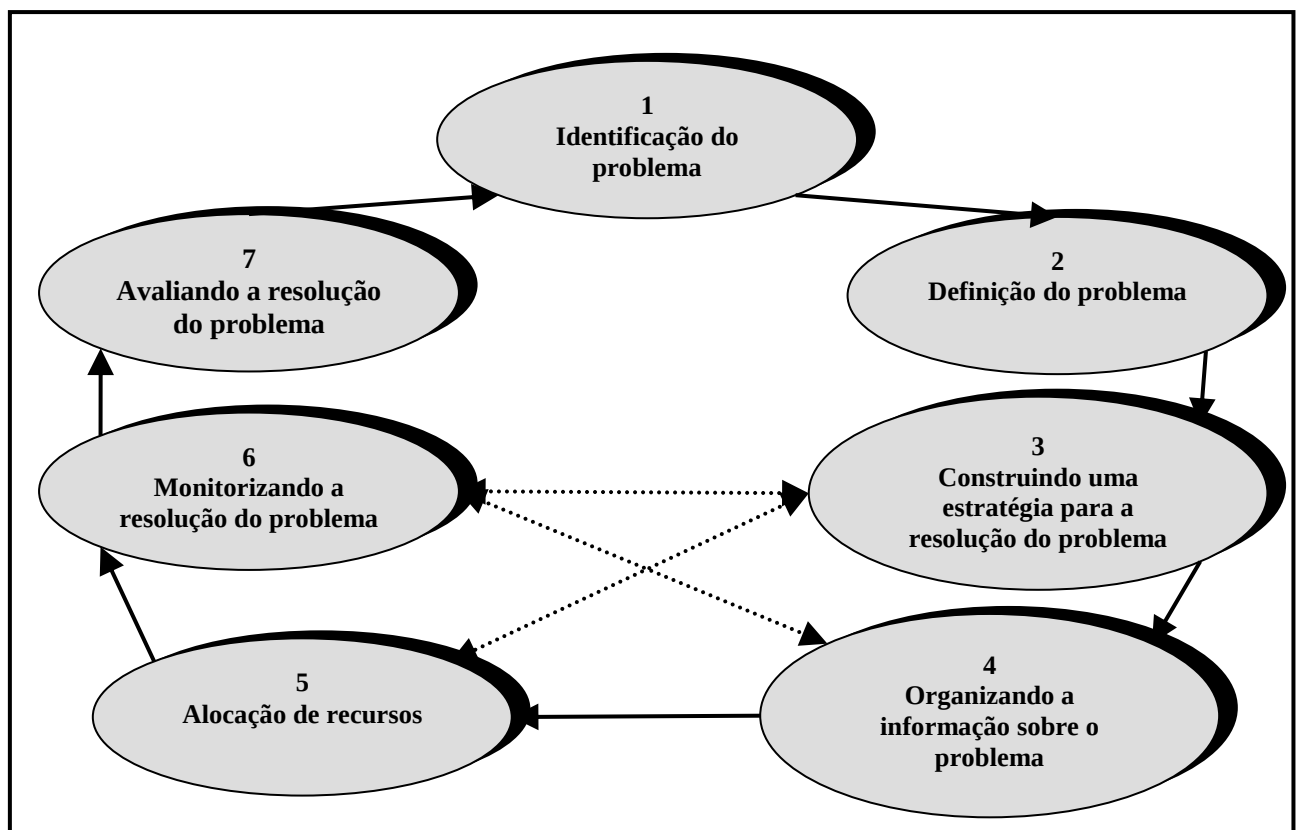


Figura 1: Ciclo de Resolução de Problemas

Fonte: Extraído de Sternberg, 2000, p.307.

O ciclo de resolução de problemas, apresentado anteriormente, proposto por Sternberg (2000) é composto por 7 etapas, das quais destacaremos os principais pontos a seguir: 1) Identificação do problema – para o autor essa etapa às vezes pode apresentar dificuldade, uma vez que nem sempre conseguimos de imediato identificar que nosso caminho para um objetivo está obstruído; 2) Definição e representação do problema – após a primeira fase de identificação do problema, é necessário definir e representar suficientemente bem o problema para conseguir resolver; 3) Formulação da estratégia – a etapa que envolve um planejamento para a resolução de problemas, segundo o autor ela pode envolver estratégias de análise e síntese. A primeira consiste na decomposição e síntese, pensamento analítico e sintético, do problema em elementos manuseáveis, a síntese consiste em reunir vários elementos apresentados no problema para organizar em informação útil; 4) Organização da informação – o autor ressalta que essa etapa está presente em todo o ciclo uma vez que ao solucionar um problema a organização e reorganização da informação acontece em todo o processo. Porém essa etapa é destinada à

sistematização, na qual acontece uma organização estratégica da informação através de uma representação que permita a melhor forma para executar a estratégia selecionada; 5) Alocação de recursos – essa etapa diz respeito a recursos que auxiliam na resolução de problemas como: tempo, espaço, equipamento, entre outros; 6) Monitoração – consiste em verificar ao longo do processo se o caminho seguido direciona ao objetivo, uma vez que é possível se constatar ao longo do processo que em algum momento houve um desvio, essa fase procura evitar dispensar grandes esforços para solucionar um problema e descobrir somente no final que o processo foi inadequado. 7) Avaliação – consiste na avaliação da solução encontrada, nesta etapa é verificado se a solução encontrada é coerente, bem como permite recomeçar de outra forma a partir da redefinição do problema, com o uso de novas estratégias, novos recursos.

As etapas da solução de problemas matemáticos envolvem uma primeira fase que consiste em compreender o problema/ enunciado de maneira a extrair as informações matemáticas. Em um segundo momento, realizar um planejamento que envolve organizar as informações e buscar estratégias/ procedimentos de resolução e alocação de recursos quando necessários; em terceiro executar o plano traçado; e por último um monitoramento/avaliação que consiste em verificar a coerência do resultado encontrado.

É importante ressaltar, que existem outros fatores que podem gerar dificuldades na resolução de problema que não estão necessariamente relacionados com as etapas de resolução de problemas, ou com conceitos. O aluno pode apresentar dificuldades quanto ao aspecto lingüístico, ou seja, pode não ter compreendido alguma palavra que consta no problema. Mayer (1992), afirma que esse fato mostra que outros tipos de conhecimento podem ser importantes para a solução de problemas. Mayer (1992) classificou esses conhecimentos em: lingüístico, factual, de esquema, de estratégias e algorítmico.

O conhecimento lingüístico como abordamos acima está relacionado com o entendimento do enunciado e das palavras, se refere à compreensão da língua materna. O conhecimento factual diz respeito, aos fatos que são citados no problema. O conhecimento de esquema é o responsável pela estruturação do conhecimento, ou seja, se refere ao conhecimento dos tipos de problemas e o conhecimento de estratégias diz respeito a como desenvolver um plano de solução. Temos como exemplos: a tentativa e erro, por analogia, entre outras. O último citado se refere ao algoritmo usado em uma operação planejada, ou seja, a descrição precisa dos passos para a resolução do problema.

O trabalho com solução de problemas na formação da Educação Básica é muito importante para que os estudantes tenham contato com diferentes tipos de problemas e maneiras de solucionar, diferentes estratégias e adquiram ao longo da escolaridade uma atitude positiva para o trabalho com resolução de problemas matemáticos. Essa postura pode auxiliá-lo durante a formação universitária e no trabalho com a resolução de problemas com diferentes tipos de conhecimentos, declarativos e procedimentais.

2.1 Tipos de conhecimentos: declarativo e de procedimento

A solução de problema é uma atividade em que conceitos e procedimentos têm praticamente o mesmo peso Alves (2005). Dessa forma, mesmo em uma situação de caráter mais procedimental se faz uso do conceito na ação. Segundo Pozo (1998):

Os procedimentos, sejam habilidades ou estratégias, aplicam-se a alguns conteúdos fatuais e conceituais que, se não forem compreendidos pelos alunos, impossibilitam que estes concebam a tarefa como um problema.

(Pozo, 1998, p. 15).

A solução de problemas vai exigir do estudante esses dois tipos de conhecimento, o conhecimento declarativo, de fatos e conceitos, e o conhecimento procedimental. O núcleo do conhecimento procedimental está em ser capaz de fazer, ou seja, o saber como, pois, segundo Pozo (1998) procedimentos constituem um conjunto de ações organizadas para a consecução de uma meta. Enquanto, o conhecimento declarativo, consiste em saber o quê. Esse autor destaca as principais diferenças entre o conhecimento declarativo e de procedimento a seguir:

Quadro 2: Diferenças entre conhecimento declarativo e procedimental

Conhecimento declarativo	Conhecimento procedimental
- Consiste em saber o quê. - É fácil de verbalizar. - Possui-se tudo ou nada. - Adquire-se de uma vez. - Adquire-se por exposição (aquisição receptiva). - Processamento essencialmente controlado.	- Consiste em saber como. - É difícil de verbalizar. - Possui-se em parte. - Adquire-se gradualmente. - Adquire-se por prática (aquisição por descobrimento). - Processamento essencialmente automático.

Fonte: Extraído de Pozo, 1989, p.141.

Segundo Pozo (1989) o conhecimento declarativo consiste em saber o quê, permite uma fácil verbalização, é adquirido por exposição de uma única vez, ou seja, aquisição receptiva e exige uma compreensão do todo e possui um processamento essencialmente controlado. Enquanto, o conhecimento procedimental consiste em saber como, é bastante difícil de verbalizar, sendo possível possuí-lo em partes, é um conhecimento que pode ser adquirido gradualmente a partir da prática, ou seja, aquisição por descoberta e caracteriza-se como um processo essencialmente automático.

No momento da resolução de uma situação problema, na ação, existe uma combinação entre esses dois tipos de conhecimento, na qual um ou outro se destaca. Assim, uma atividade que tem como cerne o conhecimento de procedimento para sua resolução, também e quase sempre vai requerer algum conhecimento conceitual.

Quando tratamos de demonstrações matemática, notamos que não é possível a fragmentação de maneira a classificar a atividade em uma ou outra categoria. O conhecimento envolvido em uma situação de demonstração matemática, no método axiomático, trata de particularidades do conhecimento declarativo e ao mesmo tempo de particularidades do conhecimento procedimental. Ou seja, para demonstrações matemáticas é preciso saber o quê, com ênfase no conceitual, e saber como, com ênfase no desenvolvimento passo a passo, que exige domínio dos procedimentos. Nesse sentido, ao nos referirmos as situações de demonstração, faremos menção que são situações que exigem o conhecimento declarativo e o conhecimento procedimental.

Na resolução de problemas matemáticos devemos considerar outros fatores além da aquisição dos conhecimentos declarativos e procedimentais sobre determinado conteúdo dessa disciplina. Fatores afetivos, sentimentos favoráveis ou desfavoráveis em relação à matemática, podem atuar de maneira significativa para a eficácia da resolução de problemas nessa disciplina.

As dificuldades para entender o problema segundo Pirola (2000) podem influenciar nas atitudes do estudante relativo à solução de problemas.

(...) a causa de os alunos não serem ‘bons solucionadores de problemas’ pode ser devida ao não entendimento do problema, o que pode gerar, nos estudantes, atitudes negativas em relação à solução de problemas e à própria matemática.

(PIROLA, 2000, p.33).

2.2 ATITUDES

2.2.1 Atitude: Apresentação e definição do termo

Freqüentemente, em conversas informais, amigos, familiares ou conhecidos cobram de uma pessoa que tome uma atitude frente às situações chamadas limites. O que se espera na verdade é que a pessoa tenha um determinado comportamento em um dado momento em que é confrontada. Notamos que na idéia colocada às palavras atitude e comportamento são utilizadas como sinônimos, porém não o são de fato. É preciso destacar que apesar da existência de uma relação bastante íntima, no qual atitude é mola propulsora para uma ação que evidência um comportamento, ou ainda, que todo comportamento, é consciente ou inconscientemente motivado por atitudes que o indivíduo possui, é preciso ficar claro que as palavras não podem ser empregadas como sinonímia.

De modo geral, atitude acaba sendo entendido como um sinônimo de comportamento, em um enfoque que prioriza apenas o aspecto observável, colocando-a como equivalente à motivação e outros. Seguramente, atitude não é sinônimo de comportamento e não pode ser confundida com ele. A atitude pode até ser um dos componentes do comportamento, mas não são sinônimos.

(BRITO, 1996, p 02)

Outros termos, além do comportamento, também são empregados erroneamente como sinônimos à atitude. Os valores, opiniões, gosto e crenças, por exemplo, carregam significados com similaridades que os colocam em algumas situações como equivalentes a atitudes. Segundo BRITO (1996):

Os valores podem ser considerados mais completos, amplos e abrangentes que as atitudes e são mais limitados pela cultura, sendo claramente unidirecionais. Embora esses dois conceitos estejam impregnados por componentes avaliativos, sendo ambos dinâmicos, os valores apresentam maior estabilidade que as atitudes e diferem destas porque estão mais carregados de apelo moral e ético.

(BRITO, 1996, p 08)

Em Brito (1996) temos um excelente exemplo que apresenta quão complexa e intrínseca é a relação entre os conceitos de: opiniões, crenças, valor, atitudes, gostar e comportamento.

Obviamente, com relação à matemática, os indivíduos apresentam **opiniões** e **crenças** com relação a ela, por exemplo, emitem opiniões baseados na crença de que a Matemática é uma disciplina

“mental”, isto é, treina a mente para outras atividades. Professores com esse tipo de crença, atribuem um **valor** exagerado a essa disciplina e com isso podem influenciar as **atitudes** de seus alunos, levando-os a **gostar** menos de resolver problemas matemáticos e apresentar um baixo desempenho (**comportamento**) na disciplina.
(BRITO, 1996, p 09, grifos do autor).

A definição de atitude adotada neste trabalho foi posta em Brito (1996) na qual a autora definiu atitude como:

uma disposição pessoal, idiossincrática, presente em todos os indivíduos, dirigida a objetos, eventos ou pessoas, que assume diferente direção e intensidade de acordo com as experiências do indivíduo. Além disso, apresenta componentes do domínio afetivo, cognitivo e motor.

(BRITO, 1996, p 11).

Ou seja, é uma tendência própria de uma pessoa de reagir e sentir em relação a algo. A atitude possui natureza binária, positiva ou negativa e apresenta uma intensidade, maior ou menor, relacionada às vivências do indivíduo. A esse respeito Viana (2005) aborda as características da atitude:

Ela também tem uma característica unidimensional e bipolar , e isto se refere ao sentimento de prazer e desprazer que o objeto provoca, e este sentimento pode ter maior ou menor intensidade. Na verdade, a atitude tem apenas uma direção, e pode assumir um dos dois sentidos: positivo ou negativo.
(VIANA, 2005, p 68).

Como afirmado por Brito (1996) a atitude é composta por elementos da esfera afetiva, conativa e cognitiva. Referente à atitude para um determinado objeto o indivíduo apresenta emoções e sentimentos no aspecto afetivo; conhecimento no elemento cognitivo e a predisposição no agir com relação ao objeto no domínio conativo. A seguir apresentamos um esquema que evidenciam os componentes das atitudes.

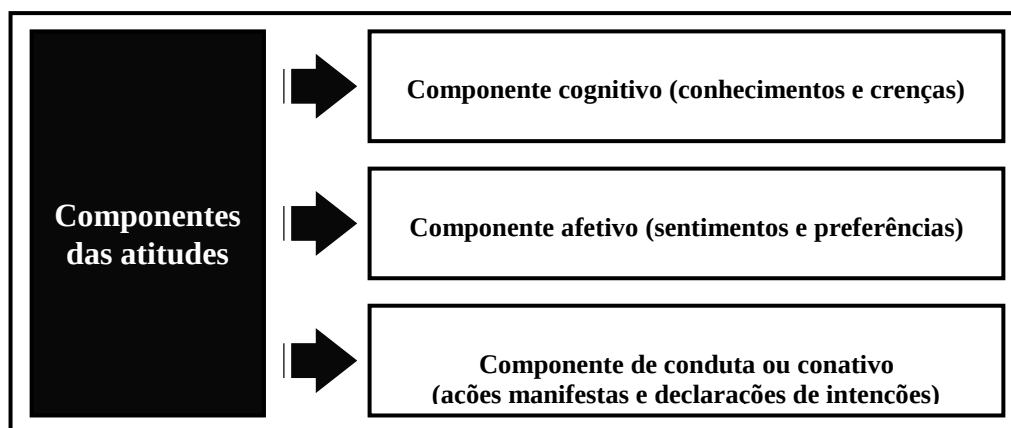


Figura 2: Componentes das atitudes
Fonte: Extraído de Sarabia, 2000, p.124.

Para Klausmeier e Goodwin (1977) a atitude apresenta um referente individual e um público. O referencial individual diz respeito aos constructos mentais – formado de acordo com suas experiências de aprendizagem e padrões de maturação únicos. Enquanto que a abordagem da atitude como entidade pública, representa uma informação organizada que corresponde aos significados de palavras, aceitos socialmente e compartilhados pelo mesmo grupo de pessoas.

É fato que a atitude que o indivíduo possui, independentemente do meio que foi adquirida, é importante e pode influenciar de forma significativa a vida do indivíduo e a relação do grupo a que pertence.

Como exemplo, em situação escolar, a atitude negativa em relação à matemática de uma pessoa pode influenciar na dedicação para com os estudos dessa disciplina, em decorrência o desempenho é afetado. Como consequência pode haver na relação com seus pares, coletivo em sala de aula, um afastamento nas situações de estudo e trabalhos em grupo referente a esse conteúdo, partindo do próprio indivíduo por se sentir incapaz nos trabalhos em matemática, ou do grupo por rotular e descriminar e julgar o colega de classe incapaz em matemática.

Klausmeier e Goodwin (1997) pontuam quão complexas e importantes são as atitudes para o indivíduo e o grupo, salientam que deve ser considerado com cuidado os atributos definidores de atitudes, uma vez que estes possibilitam um melhor entendimento sobre questões a respeito da aprendizagem e mudança de atitudes.

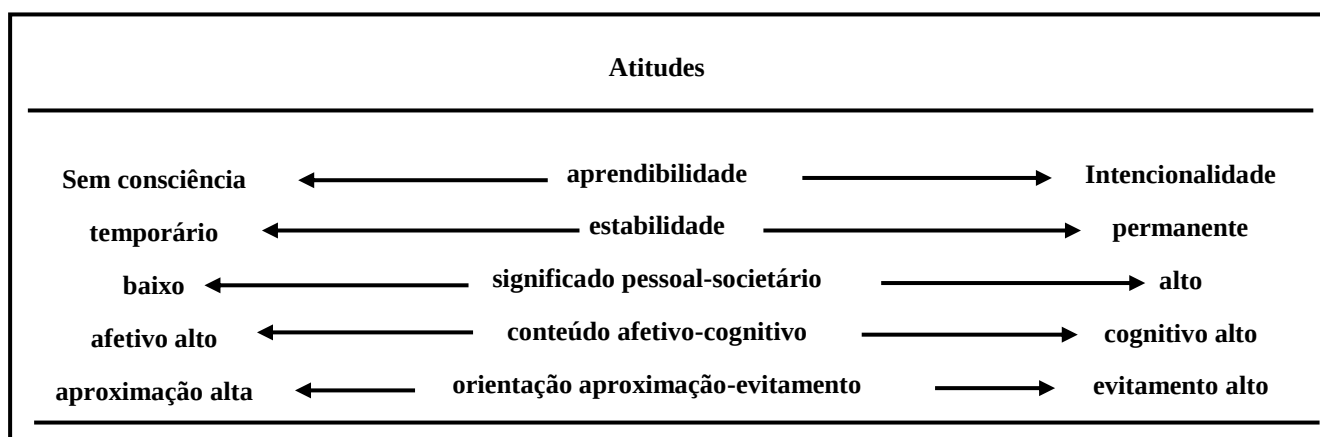


Figura 3: Atributos definidores de atitudes

Fonte: Extraído de Klausmeier e Goodwin, 1997, p.414

Conforme a figura os cinco atributos definidores de atitudes são: aprendibilidade; estabilidade; significado pessoal-societário; conteúdo afetivo-cognitivo; e orientação aproximação-evitamento (Klausmeier e Goodwin, 1977, p414-417).

O primeiro atributo, aprendibilidade, afirma que todas as atitudes são aprendidas intencionalmente ou sem consciência por parte do indivíduo. Relativo à aprendizagem intencional de atitudes o autor aponta que esta tem maiores probabilidades de ocorrer quando os indivíduos são motivados. González (2000) afirma que o indivíduo pode aprender a se comportar de modo favorável ou desfavorável em relação a algo.

Sobre, estabilidade, algumas atitudes são aprendidas, afirmam e perduram. Porém, têm atitudes que são aprendidas e se modificam ou deixam de ocorrer. Segundo Brito (1996) e González (2000), na adolescência as atitudes são mais instáveis, e à medida que os indivíduos chegam à idade adulta, as atitudes tornam-se mais estáveis.

O atributo definidor de significado pessoal-societário é referente à relação do indivíduo com outras pessoas. Klausmeier e Goodwin (1977) pontua que uma atitude envolve a relação entre uma pessoa e outras pessoas e, também, entre uma pessoa e coisas. As ações que os indivíduos empreendem em relação a outras pessoas afetam a maneira como eles se sentem em relação a si mesmo. Segundo González (2000) se as pessoas apresentarem predisposições para um intercâmbio amigável e amistoso com outros indivíduos, elas revelarão entusiasmo na relação. Em outros casos elas poderão experimentar certo isolamento ou rejeição (González, 2000, p 36).

O conteúdo afetivo-cognitivo é referente às emoções (componente afetivo) e a informação (componente cognitivo). A importância atribuída a cada componente pode

variar. Este atributo possui relação com o tipo de abordagem utilizado para a aprendizagem de atitudes.

Por último, a orientação aproximação-evitamento é referente ao tipo de atitude que o indivíduo já possui em relação a algo. Sendo positiva tenderá a se aproximar, do contrário, em caso de atitude negativa tenderá a evitar.

Para Sarabia (2000) as atitudes guiam o processo de aprendizagem de qualquer tipo de conhecimento, procedimental ou declarativo. O autor saliente que além dos componentes de atitudes colocados anteriormente deve ser considerado relativo à aprendizagem os seguintes fatores: o papel ativo das atitudes do aluno no processo de aprendizagem; a contribuição dos fatores afetivos e emocionais no sucesso ou fracasso da aprendizagem; e a possibilidade de que uma atitude positiva em relação a um objeto concreto se manifeste num comportamento de acordo com essa atitude.

Para o professor trabalhar as atitudes dos alunos com relação à disciplina matemática é preciso ter acesso a um método que possa aferir sobre as atitudes dos alunos, como por exemplo, uma escala.

2.2.2 Atitudes: A Escala de atitudes

Em pesquisa da área da psicologia da Educação Matemática é utilizado para aferir a atitude de estudantes referente à matemática entre outros instrumentos a escalas de atitudes. Esses instrumentos medem as atitudes com relação à matemática, podem ser unidimensionais, quando focam um único elemento como, por exemplo, as atitudes, ou multidimensionais, quando buscam analisar vários fatores que se relacionam com o elemento estudado como, por exemplo, a atitudes em relação à matemática e outros componentes.

A escala de atitudes de Aiken mede as atitudes em relação à matemática por si e não outros elementos. Segundo Brito (1996) a escala de atitude de Aiken:

Trata da atitude com relação à matemática “per se” evitando proposições referentes aos sentimentos dos alunos com relação à atuação do professor, aos tipos de atividades matemáticas propostas etc. De maneira geral essas escalas são compostas de itens referentes à segurança com relação à Matemática, apreciação da Matemática e o valor da Matemática.

(BRITO, 1996, p 33).

A escala de atitudes com relação à matemática elaborada por Aiken é do tipo Likert. Segundo esse autor no método de Likert de avaliações somativas o respondente indica se ele concorda fortemente, concorda, é indeciso, discorda, ou fortemente discorda com cada uma das 20 declarações que expressam atitudes positivas ou negativas para algo. A contagem é a soma dos pesos inteiros sucessivos como 1, 2, 3, 4, e 5 (Aiken, 1970).

A escala de atitudes com relação à matemática de Aiken foi elaborada em 1961. Dois anos mais tarde foi revista por este mesmo autor juntamente com Dreger. Em 1996 Brito traduziu e adaptou essa escala para o contexto brasileiro.

O processo de obtenção da escala de atitudes em relação à matemática de Brito (1996) consistiu em realizar as traduções das afirmações de forma idêntica, obtendo duas versões, português e inglês. As versões foram avaliadas por especialistas na língua inglesa e portuguesa afim de que fossem encontradas discrepâncias. Como não foram encontradas incoerências nas versões, a autora submeteu as escalas a 9 crianças das 3^a, 4^a e 7^a séries para responder a escala. Objetivou-se nessa fase verificar dificuldades de entendimento dos termos colocados nas afirmações. Segundo Brito (1996) foi necessário realizar substituições de algumas palavras e expressões por outras de melhor entendimento dos sujeitos. A versão adaptada por Brito (1996) ainda foi testada em 22 universitários e sofreu revisão realizada por mestrandos do grupo de Psicologia e Educação Matemática da UNICAMP.

É importante ressaltar que diferentemente de Aiken a escala de atitudes adaptada por Brito possui apenas 4 pontos de escolha. A autora optou ao invés de utilizar as cinco alternativas concorda fortemente, concorda, é indeciso, discorda, ou fortemente discorda, em retirar a alternativa do meio. No seu instrumento para aferir sobre atitudes com relação à matemática aparecem as seguintes opções: Discordo Totalmente, Discordo, Concordo, e Concordo Totalmente.

O cuidado de retirar a alternativa neutra impede que o participante da pesquisa se utilize dessa opção para se esquivar da resposta. Na escala as alternativas recebem pontuação de 1 a 4 diretamente para as afirmações positivas e inversamente para as afirmações negativas. Portanto a somatória final pode variar de 20 a 80 pontos.

Viana (2004) realizou a adaptação e validação da escala de atitudes em relação à matemática de Brito para atitudes em relação à geometria. A escala de atitudes com relação à geometria consiste em um dos instrumentos de pesquisa utilizados desse estudo.

A geometria trabalhada a partir do método axiomático pode fazer com que os estudantes universitários atribuam um valor excessivo as dificuldades em realizar demonstrações, influenciando nas atitudes desses alunos a gostar mais ou menos de resolver problemas de conteúdos geométricos e demonstrações matemáticas, bem como de acreditar que é capaz de solucionar os problemas. Um importante fator que pode influenciar as atitudes dos alunos em relação à matemática diz respeito à confiança que o indivíduo coloca em si em situações de solução de problemas nessa disciplina. A confiança está empregada no sentido da auto-estima do respondente enquanto solucionador de problemas matemáticos.

2.3 CONFIANÇA E A MATEMÁTICA

A confiança ao realizar uma tarefa, pode se caracterizar em diversas situações, como a linha tênue que separa o sucesso e o fracasso. Acreditar que se “é capaz de” representa o primeiro passo para solucionar um problema, realizar uma prova, participar de uma competição. O que por vezes inibe uma pessoa de realizar qualquer uma dessas tarefas sem ao menos tentar, é o fato de carregar sobre si mesma a crença de que “não é capaz”.

Segundo os PCN a resolução de problemas possibilita ao aluno mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar informações, permite ampliar os conhecimentos de conceitos e procedimentos matemáticos, a visão dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. Em outras palavras, o ensino da matemática objetiva entre outros fins possibilitar ao aluno:

sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções.

(BRASIL. 1998a, p. 48)

Mitos consolidados socialmente sobre resolução de problemas podem influenciar a autocrítica que uma pessoa faz relativo a como acredita ser o seu desempenho ao solucionar um problema matemático. Um quadro adaptado de Schenfeld (1992) apud Pozo, Echeverría, et al. (1998) apresenta alguns mitos a respeito da resolução de problema matemáticos.

- Os problemas matemáticos têm uma e somente uma resposta correta.
 - Existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático e, normalmente, o correto é seguir a última regra demonstrada em aula pelo professor.
 - Os estudantes “normais” não são capazes de entender Matemática; somente podem esperar memoriza-la e aplicar mecanicamente aquilo que aprenderam sem entender.
- Os estudantes que entenderam Matemática devem ser capazes de resolver qualquer problema em cinco minutos ou menos.
- As regras formais da Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção

Figura 4: Mitos típicos dos estudantes sobre a natureza da Matemática

Fonte: Extraído de Schenfeld (1992) apud Pozo e Echeverría, 1998, p.46.

Essas expressões colocadas acima se constituem em crenças errôneas a respeito da matemática, porém em determinadas situações elas podem formar uma realidade social. Segundo Loos (2003)

As representações subjetivas da matemática afetam não só o sentimento que as pessoas desenvolvem em relação a esse domínio de estudo, mas também as percepções de si mesmo referentes a sua capacidade de lidar com a matemática.

(LOOS, 2003, p. 16).

Neves (2002), afirma que a escola tem a função de atuar na realidade social, desenvolvendo através da educação escolar a confiança matemática, levando segurança em situações de resolução de problemas, elevando a auto-estima relativa à matemática, e no desenvolvimento de capacidades de construir conhecimentos matemáticos.

A afinidade presente entre a confiança, a atitude e o desempenho com a matemática pode levar ao afastamento de situações de aprendizagem e solução de problemas matemáticos. Segundo González (2000) a ocorrência desse afastamento com pessoas do gênero feminino ocorre com maior ênfase.

a falta de confiança no próprio desempenho tem gerado desânimo nas tentativas de solução dos problemas, levando-as a desistir logo nos primeiros fracassos, tornando-as pouco persistentes e com baixa resistência ao insucesso.

(GONÇALEZ, 2000, p. 26)

Alguns outros fatores podem influenciar de maneira significativa. Dois exemplos que se destacam são: a família e o professor. A família, principalmente os pais, com suas expectativas podem influenciar na vida escolar dos filhos interferindo na

expectativa do próprio aluno no que diz respeito ao seu desempenho em matemática e conseqüentemente na atitude do aluno em relação à matemática. Segundo González (2000):

é possível afirmar que o desenvolvimento de atitudes negativas dos alunos em relação à Matemática podem ser inferidas a partir de situações onde existem ensino deficiente, uso inadequado de metodologia, atitudes de rejeição por parte de professores, por parte dos pais e de outras pessoas que lhes são próximas.

(GONÇALEZ, 2000,p. 64)

A confiança se relaciona com a auto-eficácia, uma vez que também diz respeito diretamente ao que se acredita poder fazer, ou seja, influencia a escolha e quanto de dedicação e esforço deve se destinar a certa atividade Loos (2003). Em concordância, a confiança segundo Gonçalves (2000):

permite ao sujeito se sentir capaz de aprender Matemática, cumprir as atividades propostas e ter um desempenho adequado nos testes e provas. Se o estudante é confiante, ele terá maiores chances de sucesso, pois irá persistir mais e não desistirá tão facilmente ao se deparar com soluções de problemas mais complexos.

(GONÇALEZ, 2000,p. 117)

CAPÍTULO III – GEOMETRIA PLANA: ASPECTOS GERAIS DO SEU ENSINO

*“Em geometria não há estradas reais”
Euclides*

Historicamente, a matemática foi utilizada como um instrumento de seleção, uma vez que era a disciplina que mais reprovava os alunos. Miorim (1998), ao dissertar sobre a história da Educação Matemática, levantou alguns aspectos de como foi concebida essa disciplina. Tais aspectos são:

- a Matemática é uma ciência perfeita, que apresenta resultados imutáveis, válidos eternamente;
 - a Matemática só pode ser compreendida por alguns poucos escolhidos;
 - as pessoas que sabem Matemática são pessoas superiores;
 - a Matemática desenvolve o raciocínio das pessoas;
 - a Matemática é um elemento fundamental para selecionar as pessoas mais aptas para o trabalho em qualquer profissão.
- (Miorim, 1998, p. 20)

Corroborando com essa idéia, Rocha Falcão (2007) apresenta dez mitos referentes à aprendizagem de matemática: 1 - Construções falsas em ciência podem ser substituídas por proposições verdadeiras; 2 - A matemática está no universo, independentemente da humanidade; 3 - Matemática diz respeito a números e contas; 4 - “Matemática não é piolho, que dá na cabeça de todo mundo”; 5 - A competência matemática está comprometida em crianças com afecções neurológicas; 6 - Na aprendizagem da matemática, primeiro vem o concreto, depois o abstrato; 7 - A aritmética vem necessariamente antes da álgebra; 8 - O gênero é uma variável sem valor na explicação das diferenças de desempenho em matemática; 9 - A afetividade é uma variável sem valor na explicação das dificuldades de aprendizagem em matemática; e 10 - Em matemática, o conhecimento prático é hierarquicamente inferior ao conceitual Rocha Falcão (2007).

Nesse sentido, o ensino da geometria Euclidiana foi direcionado a classe dominante, chamada por Miorim (1998) de classe dirigente, permanecendo um privilégio dos mais abastados por muito tempo. Atualmente, a geometria faz parte sem distinção de todos os segmentos de ensino e é destinada a todos. Conforme colocado anteriormente, os textos oficiais de referência curricular nacionais garantem em documento o ensino da geometria, porém esse fato não garante o efetivo ensino dos conceitos geométricos em sala de aula.

O abandono do ensino da geometria é uma situação posta, identificada há quase duas décadas, e não se limita ao Brasil. Pavanello (1993) ressaltou que esse fenômeno, o abandono da geometria, é percebido mundialmente, e não somente em nossas escolas. Com o objetivo de levantar as causas que levaram ao quase total abandono da geometria, em sua pesquisa Pavanello (1989) faz um estudo histórico-bibliográfico de tendência sociológica que procura entender como se desenvolveu a geometria e qual o seu papel na formação dos indivíduos, e investigar como ocorreu o abandono do ensino de geometria no Brasil e suas causas. Essa mesma autora pontua que em geral a abdicação referente ao ensino de geometria acontece em detrimento a outro conteúdo contemplado pela disciplina matemática, a álgebra, que é trabalhada com mais frequência a partir da 6ª série do Ensino Fundamental.

A carência na formação dos estudantes por parte desse conteúdo pode ser constatada, freqüentemente, nos cursos de Licenciatura em Matemática, em que os alunos que possuem uma formação em geometria deficitária, decorrente da formação básica, apresentam, quase sempre, desempenho sofrível no trabalho com conceitos básicos da geometria euclidiana, e sérias dificuldades nas disciplinas, trabalhadas a partir de uma abordagem axiomática, que tratam do conteúdo de geometria no ensino superior.

Pirola (2000), em seu trabalho verificou o desempenho dos alunos de um curso de Magistério e um curso de Licenciatura em Matemática, na solução de problemas envolvendo conceitos básicos da geometria como: área, perímetro e volume. Esse autor, quanto ao desempenho dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, esperava:

(...) que os estudantes do curso de Licenciatura, em vias de serem licenciados para ensinar matemática, tivessem um desempenho alto. Isso não foi verificado, o que de certa forma ratifica algumas posições que consideram a saída de sujeitos dos cursos de Licenciatura sem nenhum preparo para ensinar matemática.

(PIROLA, 2000, p.134)

Os alunos dos cursos de licenciatura em Matemática apresentam dificuldades nos conteúdos de Geometria tratados nas disciplinas do curso de formação de professores e também dos conteúdos de Geometria da Educação Básica. Além disso, muitas vezes os cursos de formação inicial não garantem a articulação dos conceitos do conteúdo de geometria trazidos pelos alunos da formação na Educação Básica, com os conceitos de geometria abordados nas disciplinas do curso de formação de professores. Muito menos a transposição daquilo que será utilizado no seu dia a dia em sala de aula quando esses estudantes, futuro professores, estiverem atuando enquanto educadores.

Essa situação pode evidenciar algumas relações existentes entre a formação do Ensino Fundamental e Médio e a formação inicial do professor de matemática, bem como a influência da formação básica na formação em nível superior enquanto uma barreira para o progresso do aprendizado dos conceitos geométricos.

3.1 O ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM OBSTÁCULO PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

As deficiências no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos do conteúdo de geometria abordados na Educação Básica podem estar diretamente relacionadas com as dificuldades que os estudantes do curso de graduação apresentam com esse mesmo conteúdo durante a formação inicial oferecida ao professor de matemática.

Podemos verificar que essa dinâmica se apresenta de forma cíclica, ou seja, temos uma formação falha, no que diz respeito aos conceitos geométricos, no Ensino Fundamental e Ensino Médio, que contribui/ influencia para a também deficitária formação nos cursos de formação de professores e, conseqüentemente, esses professores, quando atuantes no Ensino Básico, não tenham condições de proporcionar um ensino adequado, por não possuírem os conhecimentos específicos necessários para ensinar os conceitos do conteúdo de geometria.

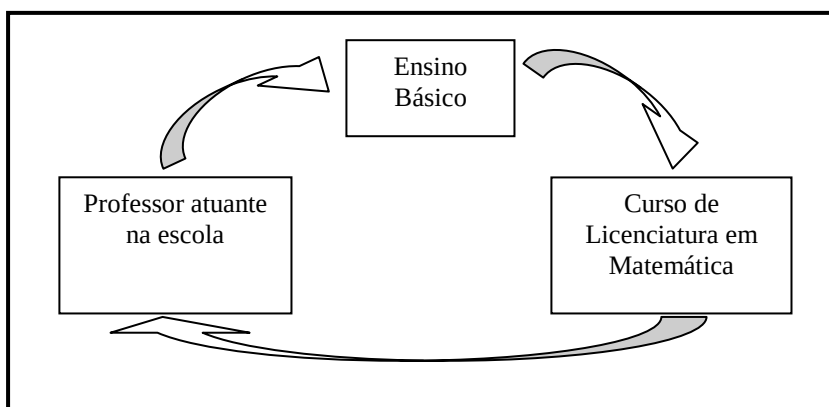


Figura 5: Modelo da estrutura de ensino influente na formação do professor

Posto isso, é certo que não podemos inferir sobre em qual dessas instâncias se inicia o “problema”, pois conforme podemos observar na figura, cada campo influencia o outro. As deficiências no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos referentes ao conteúdo de geometria no Ensino Básico influencia a formação do professor e a posteriori a sua prática na sala de aula.

O “problema” está diluído em todas as instâncias apresentadas, Ensino Básico, Curso de Licenciatura em Matemática e Professor atuante na sala de aula. Em se tratando da formação inicial de professores, as Licenciaturas são, em geral, cursos de formação que contemplam disciplinas de conteúdos pedagógicos, disciplinas de práticas de ensino, e disciplinas de conteúdos específicos.

A habilitação dada pelo curso de Licenciatura em Matemática permite antes de tudo aos licenciados formados a atuar enquanto professores nas séries finais do ensino Fundamental e no ensino Médio, ministrando aulas dos conteúdos relativos à disciplina matemática, referentes aos seguintes conteúdos: aritmética, álgebra, geometria, tratamentos da informação, grandezas e medidas, entre outros.

No ensino superior a abordagem utilizada nas disciplinas, sobretudo as de conteúdo específico, partem da premissa que os estudantes possuem a “base” do conhecimento matemático, os pré-requisitos de conceitos básicos de matemática, pois passaram por uma formação anterior em matemática, enquanto alunos durante os anos de escolaridade no Ensino Básico. A realidade mostra que muitos alunos, no conteúdo de geometria, apresentam uma formação de conceitos falha e com pouco grau de abstração.

A abordagem realizada, freqüentemente na Educação Básica, apresentando os conceitos geométricos como verdades absolutas prontas e acabadas, alicerçados em

representações gráficas, com uso de figuras que engessam o conceito, no qual acontece a super-generalização de um caso particular como o todo, pode vir a contribuir para dificuldades com abstrações em geometria. Como exemplo, o trabalho apenas com triângulos equiláteros durante as séries iniciais pode fazer com que as crianças não identifiquem outros triângulos (isósceles, escaleno, retângulo, retângulo isósceles), como pertencente à classe dos triângulos, pois atribuem como atributo definidor de triângulo três lados iguais (congruentes), quando na verdade essa é uma propriedade específica de um integrante da classe dos triângulos, o equilátero.

Outro fator que pode influenciar essa situação é a exposição a situações inadequadas, ou seja, uma sorte maior de situações adequadas pode propiciar que mais alunos tenham êxito. É recomendado para o Ensino Básico que se utilizem diferentes recursos como forma de entendimento dos conceitos. Essa abordagem está em acordo com a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 1º grau quanto ao ensino e aprendizagem de geometria.

(...) pode-se partir da manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais freqüentes, de sua caracterização através das propriedades, para somente ao final do percurso aproximar-se de uma sistematização.

(SÃO PAULO, 1991, p.11).

Porém, ressaltamos que se faz necessária à utilização dos recursos de forma intencional e, sobretudo, com o desenvolvimento de atividades direcionadas que possibilitem a formação dos conceitos geométricos. A crítica está justamente no fato de não se buscar essa sistematização. Em sala de aula, quase nunca, é reservado um momento oportuno para realizar a sistematização e abstração necessária a esse corpo de conhecimento. As situações de aprendizado com o uso amplo de recursos apresentam uma forte conotação de experiência.

As barreiras e conflitos que inibem o avanço no ato de ampliar o conhecimento de um determinado conteúdo é um obstáculo. O conhecimento que o aluno, em formação nos cursos de Licenciatura em Matemática, traz dos seus estudos na Educação Básica, em Geometria, está enraizado em sua estrutura cognitiva sendo adequado para responder as questões apresentadas no nível de escolaridade a que pertence. Esse conhecimento vai se apresentar no Ensino Superior como uma barreira inicial, ou seja, um impedimento ou

conflito que suscitará nos estudantes questões de entendimento desse conhecimento que agora deverá ser estruturado de maneira mais geral e abstrata, constituindo-se na forma de obstáculo.

Essa barreira não está vinculada à gênese do conhecimento de como foi estruturado o conhecimento geométrico, mas da forma inadequada que o aluno foi ensinado. Nesse sentido, trata-se de um obstáculo de natureza didática. Segundo Pais (2002):

Os obstáculos didáticos são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar.

(PAIS, 2002, p.44).

Não se trata, somente, do estudante não ter aprendido os conceitos geométricos, mas da forma que estes foram ensinados. Os conceitos geométricos são adquiridos no âmbito da Educação Básica, em geral, de forma bastante particular e com um tratamento intuitivo. As disciplinas que estudam o conteúdo de geometria no Ensino Superior, em sua grande maioria, adotam um Modelo Lógico Dedutivo para abordar os conceitos através de relações e determinações. O fazer ciência é buscar relações, ou seja, é necessário estabelecer uma rede conceitual. Portanto, para o estudante compreender esse novo modelo teórico, o Modelo Lógico Dedutivo, e conseguir acomodar essa nova situação em sua estrutura cognitiva, constitui-se em um obstáculo, pois exige, em determinadas situações, um abandono da forma de pensar anterior.

3.2 O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO SUPERIOR: UMA ABORDAGEM AXIOMÁTICA

A geometria ensinada nos cursos de formação de professores que se utilizam do Modelo Lógico Dedutivo apresenta os conteúdos de forma axiomática, ou seja, a partir de proposições primitivas, axiomas, postulados, teoremas etc. Esse tipo de abordagem exige tempo e amadurecimento, por parte dos estudantes, para o efetivo entendimento das problemáticas apresentadas de forma tão abstratas.

Segundo, Domingues (2002) não é bem conhecido o caminho do método axiomático em matemática, sabe-se que seu desenvolvimento está vinculado ao

desenvolvimento matemático da Grécia. Esse autor apresenta os Elementos de Euclides como a obra mais antiga a trazer essa estrutura.

Os elementos constituem um grande monumento matemático e o primeiro grande testemunho do poder do método dedutivo da matemática.

(Domingues, 2002, p.59)

Euclides organizou o conhecimento matemático. Segundo Aaboe (2002), referente aos elementos:

Os Elementos de Euclides consistem de treze Livros, como são chamados, e a simples tradução do texto, sem comentários, formaria um grande volume impresso. Nestes treze livros, com algumas exceções notáveis, como as seções cônicas e a geometria esférica, e possivelmente algumas descobertas próprias. Seu grande feito é a apresentação do material sob uma bela forma sistemática e seu tratamento dele como um todo orgânico.

(AABOE, 2002, p.52)

Os Elementos de Euclides apresenta outros conteúdos matemáticos, além do conteúdo de geometria. Segundo Eves (2004):

Contrariamente à impressão muito difundida, os elementos de Euclides, não tratam apenas de geometria – contêm também bastante teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de 465 proposições distribuídas em treze livros.

(EVES, 2004, p.169)

Nos cursos de Geometria Euclidiana Plana, são estudados grupos de axiomas tais como: axiomas de incidência, axiomas de ordem, axiomas sobre medição de segmentos, axiomas sobre medição de ângulos, entre outros. Esses axiomas juntamente com outras propriedades servem de ferramenta para a determinação das propriedades das figuras planas da Geometria Euclidiana. Segundo Barbosa (1995) a geometria:

(...) como qualquer sistema dedutivo, é muito parecido com um jogo: partimos com um certo conjunto de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem esses elementos, as quais são chamadas de axiomas. O objetivo final desse jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas teoremas ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir

dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas. (BARBOSA, 1995, p. 11).

Em síntese são determinados os conceitos primitivos sem demonstração, e então utilizados para provar outras afirmações mais complexas.

Apresentaremos a seguir, um exemplo, comumente, utilizado em cursos de Geometria Euclidiana para professores em formação inicial. Esse exemplo foi baseado em uma situação problema¹ apresentada por Barbosa (1995). Inicialmente, definiremos os dois axiomas do primeiro grupo de axiomas (de incidência) conforme apresentados por Barbosa (1995).

Axioma I_1 – Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

Axioma I_2 – Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes pontos.

(BARBOSA , 1995, p.01).

Sejam $P = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $m_1 = \{a, b, c\}$, $m_2 = \{a, d, g\}$, $m_3 = \{a, e, f\}$, $m_4 = \{b, e, g\}$, $m_5 = \{b, f, d\}$, $m_6 = \{c, d, e\}$, $m_7 = \{c, g, f\}$. Chame P de plano e $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ e m_7 de retas. Verificaremos que nessa “geometria” vale os axiomas AI_1 e AI_2 .

Dessa forma, procuraremos responder o seguinte questionamento, se esta “geometria” satisfaz o conjunto de axiomas $\{AI_1, AI_2\}$?

Primeiramente, procederemos à verificação de AI_1 a partir de um exame direto. As retas $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ e m_7 possuem 3 pontos e o plano possui 7 pontos, deste modo sempre que considerarmos uma reta teremos 3 pontos pertencentes e 4 não pertencentes a ela. Vamos analisar como exemplo, a reta $m_1 = \{a, b, c\}$ e $P = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, assim é de fácil verificação que existem 3 pontos que pertencem à reta (a, b, c) e 4 pontos que não pertencem à reta (d, e, f, g). Portanto esse modelo “geometria” satisfaz AI_1 .

Para a verificação do AI_2 precisaremos responder quais são as combinações de dois elementos de P ?

Resolução – $C_{(7,2)} = 21$. Como cada reta “apanha” 3 pontos $C_{(3,2)} = 3$ (possibilidades entre as 21). Temos 7 retas, juntando essas combinações temos $7 \times 3 = 21$. Portanto, G'' satisfaz AI_2 .

¹ Capítulo 1 – p. 07 – exercício 5.

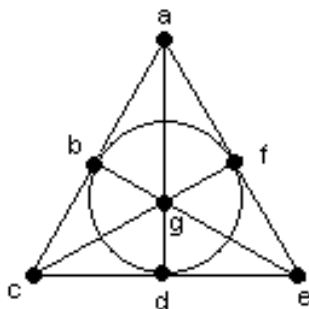


Figura 6: Representação gráfica reta $m_5=\{b,f,d\}$

Lançaremos mão de uma representação gráfica, o que não é aconselhável no tratamento axiomático. A figura permite observar que duas linhas do esquema gráfico não têm 2 pontos distintos em comum. Portanto, AI_2 é válido para essa “geometria”. Ainda, analisando essa representação $m_5 = \{b, f, d\}$ é uma reta. Aceitar essa afirmação exige um grau de abstração bastante elevado, e também uma reorganização do conceito de reta na estrutura cognitiva, uma vez que vai contra aquilo que se tinha aprendido anteriormente.

As figuras que na Educação Básica serviam para elucidar os conceitos apresentados nessa abordagem não dão conta de responder às questões apresentadas no exemplo. As relações entre os conceitos geométricos são apresentadas nesse modelo de forma bastante abstrata e se constitui em uma dificuldade no avanço do conhecimento geométrico, uma vez que se busca recorrer ao conhecimento estudado na Educação Básica na tentativa de explicar esses conceitos geométricos à luz do conhecimento que já está bem ancorado na estrutura cognitiva, sendo assim constituído na forma de obstáculo didático.

Os alunos quando se deparam com esse tipo de exemplo logo nas primeiras aulas de geometria nos cursos de Licenciatura, em geral, pode ter a sensação de que estão no lugar errado, pois parece que tudo que eles tinham de conhecimento sobre esse conteúdo não tem mais sentido. Essa sensação pode gerar uma aversão aos conteúdos de geometria, atitudes negativas, que pode inclusive ser levado, futuramente, a sala de aula quando estiver atuado como professor.

Outra questão a ser explicitada é o fato de se estudar um conteúdo a partir de um modelo axiomático por um período de mais ou menos um ano, e depois quando da utilização desse conhecimento em sala de aula, utiliza-se outra abordagem, possivelmente, voltada para a manipulação de objetos e representação de figuras. Não estamos defendendo um ensino axiomático para a Educação Básica, mas atualmente, não é trabalhada a linguagem matemática, as demonstrações, os conceitos, entre outros aspectos, que são

pertinentes e necessárias para a matemática. Obviamente, essa situação não pode ser generalizada, algumas entidades como é o caso da PUC de São Paulo mantém o projeto “APROVA-ME” (Argumentação e Prova na Matemática Escolar). Trata-se do processo de ensino-aprendizagem da prova usando recursos tecnológicos. Segundo, Grinkraut (2006):

(...) o computador influenciaria na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas, tanto em professores como em alunos.

(GRINKRAUT, 2006, p 04).

A parte essas iniciativas isoladas, o ensino de matemática, especificamente, a geometria está perdendo o seu caráter abstrato e deixando de proporcionar situações ao estudante que lhe permite adquirir habilidades de raciocínio que são estimulados a partir desse tipo de conhecimento.

É fato que outros fatores atuam para dificultar a aprendizagem do conteúdo de geometria por parte dos estudantes dos cursos de formação de professores, como por exemplo, a própria linguagem matemática. De qualquer forma, é evidente que a formação no Ensino Básico exerce uma influência singular nos cursos de nível superior maior do que acreditamos, sobretudo, nos cursos de formação de professores, uma vez que o futuro professor acabará retornando ao Ensino Básico, enquanto professor, e inevitavelmente, inconsciente ou não, sofrerá as influências dessa formação.

3.3 CONCEITOS DA GEOMETRIA PLANA EUCLIDIANA

Enquanto campo científico a Matemática permite inúmeras investigações no que diz respeito ao ensino e aprendizagem dessa disciplina, uma vez que acopla diversas áreas que em si cada uma se constitui em um campo de conhecimento. Historicamente, a disciplina Matemática é tratada, tanto no ensino como em pesquisas na área de Educação, decomposta em três grandes áreas de estudos, aritmética, álgebra e geometria.

O campo de conhecimento a tratar nesse estudo é a Geometria, essa área se encontra em evidência em pesquisas acadêmicas na área de Educação, justamente por apresentar muitas possibilidades de investigação, no que diz respeito à investigação científica na área da Educação Matemática. Entre os conteúdos componentes da geometria temos a geometria plana, geometria espacial, geometria métrica, entre outras. Iremos focar alguns conceitos da geometria plana como podemos verificar a seguir.

A Geometria Plana enquanto corpo de conhecimento sistematizado ganha consistência e reconhecimento a partir dos esforços de Euclides, em sua coletânea de livros intitulada os Elementos. Os livros textos, manuais de ensino e materiais didáticos, que abordam a geometria plana em nível superior, e mesmo aqueles que abordam esse conhecimento no Ensino Fundamental e Médio, apesar das perceptíveis e muitas modificações na maneira de apresentar o conteúdo de geometria plana, ainda trazem traços inquestionáveis da maneira e forma como eram apresentavam os conteúdos de geometria plana nos Elementos em sua origem.

Há questionamentos quanto à perda de rigor com relação à apresentação em algumas manuais de ensino que abordam o conteúdo de geometria plana, porém, ainda assim permanecem remanescentes traços da geometria plana axiomática de Euclides, como exemplos, podemos citar as provas e demonstrações, utilização de axiomas e teoremas.

Dos conteúdos presentes num curso de geometria plana fazem parte dessa investigação congruência e semelhança de figuras planas, especificamente dos triângulos. O triângulo retângulo e as relações métricas existentes nesse polígono. E o estudo de área de polígonos, com foco para a equivalência de áreas entre figuras planas, em específico a equivalência de áreas de triângulos.

3.3.1 Congruência e Semelhança

O conteúdo de congruência em um curso de geometria plana é abordado em geral no segundo ou terceiro capítulos, uma vez que em princípio são apresentadas retas e ângulos através dos axiomas de incidência e ordem, e sobre medição de segmentos e ângulos.

Antes de tratar especificamente da congruência entre figuras, entraremos em um consenso no que se refere à congruência entre segmentos e ângulos. Alguns autores associam a congruência entre esses entes matemáticos, com a igualdade, como podemos verificar em BUNT (1963):

Devido à congruência do $\triangle ABC$ e do $\triangle DEF$, o primeiro triângulo coincide com o segundo. Assim, cada lado do $\triangle ABC$ coincide com o lado correspondente do $\triangle DEF$. Por outro lado cada um dos ângulos do $\triangle ABC$ coincidirá com o ângulo correspondente do $\triangle DEF$. Deduzimos, então, que os lados e ângulos correspondentes dos dois triângulos são iguais.

(BUNT, 1963, p.70)

Outros autores como BARBOSA (1995), REZENDE e QUEIROZ (2000), definem congruência entre segmentos e ângulos como sendo aqueles que têm mesma medida.

Para congruência de figuras planas, especificamente de triângulos, encontramos distintas definições colocadas. MOISE e DOWNS (1971) afirmam que:

Duas figuras geométricas são congruentes se têm, exatamente, a mesma forma e o mesmo tamanho.

(MOISE e DOWNS, 1971, p.95)

Em concordância com esse autor RICH (1972) afirma “uma é a duplicata da outra” e acrescenta “podem ser levadas a coincidir, de forma a suas partes correspondentes se ajustarem” (RICH, 1972, p.34).

BARBOSA (1995) define congruência entre triângulos como segue:

Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

(BARBOSA, 1994, p. 34)

Em REZENDE e QUEIROZ (2000) as autoras definem congruência de triângulos como veremos a seguir:

Dois triângulos são congruentes se for possível definir uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes.

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.42)

Entendemos que BARBOSA (1995) e REZENDE e QUEIROZ (2000) estão de acordo com o que adotaremos nesse trabalho, ou seja, para obter a congruências entre os triângulos é preciso estabelecer seis congruências, três delas relativo a lados correspondentes, e as outras relativo a ângulos correspondentes.

Porém, na prática, não é necessário todas as vezes que queremos provar ou demonstrar que dois triângulos quaisquer são congruentes realizar as seis congruências, dos três pares de lados e três pares de ângulos. Podemos recorrer aos chamados Casos de Congruências entre Triângulos, que reduz o esforço pela metade, pois com três congruências apenas podemos de acordo com cada caso garantimos a congruências entre triângulos.

Os Casos de Congruências entre Triângulos são apresentados no curso de geometria plana na forma de postulados e teoremas. Dois triângulos são congruentes se possuem: dois lados respectivamente congruentes e congruentes os ângulos por eles compreendidos; se um lado e os ângulos adjacentes forem respectivamente congruentes; se um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto forem respectivamente congruentes; ou se os três lados forem respectivamente congruentes. São conhecidos respectivamente pelas siglas LAL, ALA, LAAo, LLL.

As questões que seguem abordam o conteúdo de congruência de triângulos, todas apresentam elementos comuns e estão presentes nos principais livros textos de geometria plana utilizados nos cursos de formação em nível superior. Elas serviram de fundamento para a elaboração das questões que compõe os instrumentos de pesquisa, as provas, que abordaram o conteúdo de congruência entre triângulos.

Na figura abaixo os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são retos e o segmento DE corta CA no ponto médio B de CA. Mostre que $DA = CE$.
(BARBOSA, 1995, p. 43)

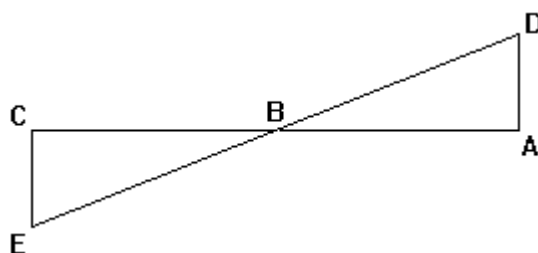


Figura 7: Exemplo I - Conteúdo - congruência de triângulos.
Fonte: Extraído de Barbosa, 1995, p. 43

Se dois segmentos se dividem mutuamente ao meio, então os segmentos que ligam as extremidades dos segmentos dados são congruentes.

(MOISE e DOWNS, 1971, p. 112)

Na figura ao lado, sabendo que C é ponto médio de BE, prove que os triângulos ABC e DEC são congruentes.

(DOLCE e POMPEO, 1993, p. 53)

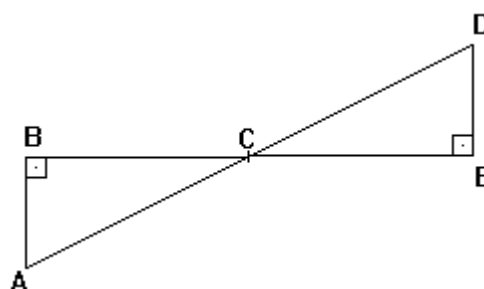


Figura 8: Exemplo II - Conteúdo - congruência de triângulos.
Fonte: Extraído de Dolce e Pompeo, 1993, p. 53

Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{RB}$ se bisseccionam no ponto F, então $\triangle FAB \cong \triangle FHR$.

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.39)

Verificamos que as situações colocadas acima são bastante similares. Porém, os dois primeiros pedem para demonstrar que os segmentos das extremidades são congruentes, enquanto que o terceiro e quarto para provar que os triângulos são congruentes. Percebemos que situações de MOISE e DOWNS (1971) e REZENDE e QUEIROZ (2000) são mais desafiadores uma vez que não fazem uso de desenho.

A utilização de situações que apresentam representação gráfica retira do respondente a responsabilidade construir a interpretação gráfica do enunciado. Dessa forma, minimiza as possibilidades de erros durante a solução das situações problemas, uma vez que, a interpretação gráfica errada tende a conduzir a uma solução também errada.

Outras situações exploram o conteúdo de maneira pragmática, ou seja, sem requerer a realização de demonstrações e provas, focando na aplicação, como os próximos exemplos:

Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β .

$$\hat{A} = 3\alpha \quad \hat{B} = \beta + 48^\circ$$

$$\hat{E} = 5\beta \quad \hat{D} = 2\alpha + 10^\circ$$

(DOLCE e POMPEO, 1993, p. 52)

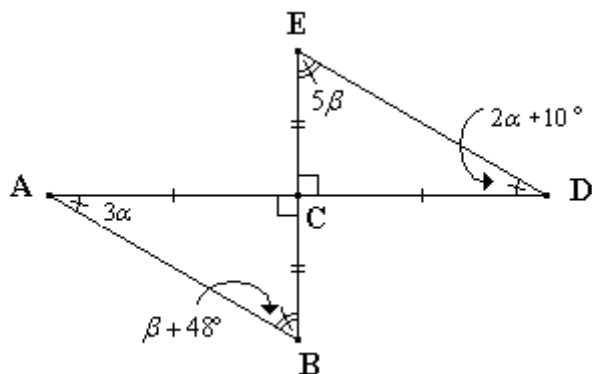


Figura 9: Exemplo III - Conteúdo - congruência de triângulos.
Fonte: extraído de Dolce e Pompeo, 1993, p. 52.

Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.

$$AB = 35 \quad AC = 2x - 6$$

$$CE = 22 \quad DE = 3y + 5$$

(DOLCE e POMPEO, 1993, p. 52)

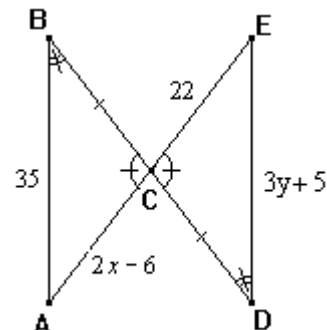


Figura 10: Exemplo IV - Conteúdo - congruência de triângulos.
Fonte: Extraído de Dolce e Pompeo, 1993, p. 52.

Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.42)

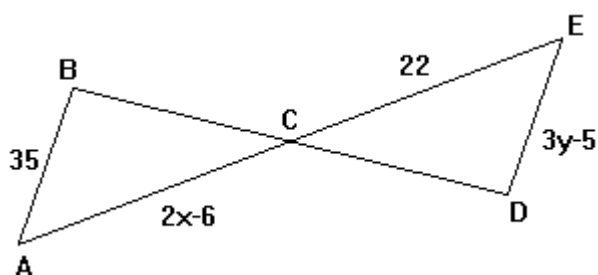


Figura 11:Exemplo V - Conteúdo - congruência de triângulos.
Fonte: Extraído de Rezende e Queiroz, 2000, p.42.

Verificamos que as duas últimas situações são exatamente as mesmas, apresentando o mesmo enunciado escrito e diferenças na representação da figura. Esses três últimos exemplos colocados também requerem o conceito de congruência de triângulos para solucioná-los, sendo que o primeiro explora medidas de ângulos e os outros dois exploram medidas de lados.

Todos os exemplos citados podem facilmente ser utilizados para o trabalho com semelhança entre triângulos, bastando que para tanto fosse garantido que o ponto de divisão dos segmentos não fosse o ponto médio dos segmentos.

Em um curso de geometria plana o conteúdo de semelhança de triângulos não é tratado próximo ao conteúdo de congruência. Apesar da aparente relação, para o trabalho com semelhança é necessário um aprofundamento nos conteúdos da geometria plana como, por exemplo, o axioma das paralelas, os teoremas Fundamental da Proporcionalidade e o de Tales, entre outros. Assim sendo, esse conteúdo é abordado nos livros textos de geometria plana dois ou três capítulos após o conteúdo de congruência de triângulos.

A seguir apresentamos a definição, de figuras planas semelhantes, apresentada por RICH (1972):

Polígonos semelhantes são polígonos que têm seus ângulos correspondentes iguais e seus lados correspondentes em proporção. Polígonos semelhantes têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

(RICH, 1972, p.119)

BARBOSA (1995) corrobora a definição posta anteriormente, como podemos ver na citação abaixo de sua definição para semelhança de triângulos.

Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de

modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

(BARBOSA, 1995, p. 92)

Nessas definições existe o incomodo em utilizar igualdade para se referir aos ângulos, quando o ideal seria afirmar que os ângulos têm mesma medida, ou seja, são congruentes. Abaixo apresentamos a definição de REZENDE e QUEIROZ (2000) para semelhança de triângulos:

Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma semelhança, e dizemos que os triângulos são semelhantes.

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.73)

Para provar ou demonstrar a semelhança entre triângulos também similarmente à congruência de triângulos podemos recorrer aos Casos de Semelhanças de triângulos. Portanto, existe a semelhança entre triângulos quando possuem: os três ângulos respectivamente congruentes, sendo suficiente mostrar que dois são respectivamente congruentes; dois lados respectivamente proporcionais e congruentes os ângulos por eles compreendidos; os três lados respectivamente proporcionais.

A seguir algumas situações que abordam o conteúdo de semelhança de triângulos, e que comumente aparecem nos principais livros textos de geometria plana utilizados nos cursos de formação em nível superior.

Considere um triângulo equilátero ABC em que P , Q e R são os pontos médios dos seus lados, respectivamente. Mostre que o $\triangle PQR$ é equilátero.

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.39)

Essa situação problema que apresenta um triângulo equilátero inscrito em outro é tradicional e apesar de aparecer no capítulo de congruência de triângulo ele trata de triângulos semelhantes, inclusive é muito similar a outra situação do capítulo de semelhança de triângulos de REZENDE e QUEIROZ (2000) como vemos a seguir:

Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo. Mostre que os quatro triângulos assim obtidos são, dois a dois, semelhantes.

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.82)

ALENCAR FILHO (1975) traz também esse conteúdo abordado de maneira bastante direta em duas situações muito parecidas:

Os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles são os vértices de um outro triângulo isósceles. Provar.

(ALENCAR FILHO, 1975, p.16)

Os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero são os vértices de um outro triângulo equilátero. Provar.

(ALENCAR FILHO, 1975, p.16)

3.3.2 Relações métricas

Dentro da classe dos triângulos temos o Triângulo Retângulo que por apresentar muitas particularidades conquistou um lugar de destaque no curso de geometria plana. O triângulo retângulo possui um dos ângulos reto, ou seja, ângulo de 90° , os seus lados são denominados hipotenusa, o lado oposto ao ângulo reto, e catetos, os outros dois lados.

Em se tratando de congruência de triângulo, o triângulo retângulo se encaixa nos casos de Congruência entre Triângulos anteriormente apresentados, mas existem outros três casos de congruência específicos para triângulos retângulos. São eles: cateto e ângulo oposto; hipotenusa e cateto; e hipotenusa e ângulo oposto. Segundo BARBOSA (1995) esses casos podem ser identificados como congruência entre (c.a), (h.c) e (h.a) respectivamente.

Com relação à semelhança entre triângulos retângulos temos um caso particular que é de grande relevância para a geometria plana, pois a partir dele, pode-se deduzir várias relações métricas do triângulo retângulo. Nesse exemplo a altura do vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo o divide em dois triângulos retângulos muito especiais, que são semelhantes entre si, e semelhantes ao original. Em BARBOSA (1995) temos:

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. Trace a altura AD do vértice A ao lado BC. No que se segue vamos

fazer uso da seguinte notação $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $h = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ e $n = \overline{DC}$.

(BARBOSA, 1995, p. 97)

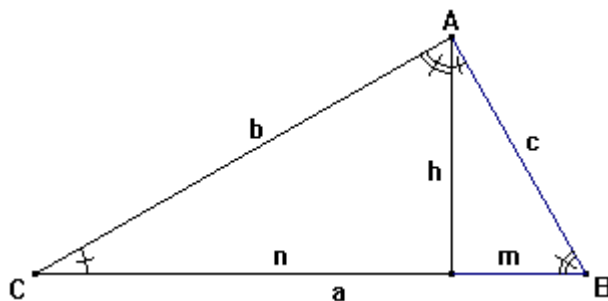


Figura 12: Exemplo I - Conteúdo - triângulo retângulo.
Fonte: Extraído de Barbosa, 1995, p. 97.

De todos os conteúdos aprendidos em um curso de geometria no Ensino Superior, as relações métricas do triângulo retângulo, sobretudo o teorema de Pitágoras, é o que mais nos é familiar com relação aos conteúdos aprendidos durante a formação básica. Isso se deve ao fato do teorema de Pitágoras ser retomado muitas vezes ao longo da escolaridade, de maneira interdisciplinar com outras matérias como a física, ou contextualizado na própria matemática em outros conteúdos.

A notação $a^2 = b^2 + c^2$ utilizada nos procedimentos de resolução de problemas com triângulo retângulo é uma representação do teorema de Pitágoras, ao qual podemos acompanhar o enunciado:

Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

(BARBOSA, 1995, p. 98)

A partir da divisão do quadrado pela diagonal obtemos dois triângulos congruentes. Considerando um desses triângulos verificamos que, apresenta as seguintes particularidades, possui um ângulo de 90° (reto), dois ângulos agudos de 45° , e os catetos com o mesmo comprimento do lado do quadrado inicial, ou seja, é um triângulo retângulo isósceles. A hipotenusa desse triângulo nada mais é do que a diagonal do quadrado inicial. DOLCE e POMPEO (1993) em seu capítulo sobre triângulos retângulos apresentam como aplicação do teorema de Pitágoras o cálculo da diagonal, sendo sua medida dada pelo lado multiplicado pela raiz quadrada de 2. Em RICH (1972) são

apresentados os seguintes princípios para o triângulo 45-45-90: “O cateto oposto a um ângulo de 45° é igual à metade da hipotenusa multiplicada pela raiz quadrada...” e “A hipotenusa é igual ao lado multiplicado pela raiz quadrada de 2. Podemos verificar que BARBOSA (1995) apresenta este último princípio em forma de situação problema:

No triângulo DEF, $\overline{DE} = \overline{EF} = 6$ e $\overline{FD} = 6\sqrt{2}$. Quanto medem os ângulos do triângulo?

(BARBOSA, 1995, p. 100)

Em MOISE e DOWNS (1971) temos:

Em um triângulo retângulo, isósceles, a hipotenusa é igual $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de cada um dos catetos.

Se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

(MOISE e DOWNS, 1971, p. 290)

Outro triângulo retângulo particularmente interessante é o chamado triângulo 30-60-90. Esse triângulo é obtido a partir da divisão de um triângulo equilátero pela altura de um dos lados. Os dois triângulos obtidos são congruentes e possuem os ângulos agudos de 30° e 60° . Considerando um desses triângulos, também é possível perceber algumas relações métricas com relação aos lados desse triângulo retângulo. O cateto maior desse triângulo retângulo é a altura do triângulo equilátero inicial, DOLCE e POMPEO (1993) em seu capítulo sobre triângulos retângulos apresentam como aplicação do teorema de Pitágoras o cálculo dessa altura, sendo sua medida dada pelo lado do triângulo equilátero inicial multiplicado pela raiz quadrada de 3 e dividido por 2. Em RICH (1972) temos o seguinte princípio para o triângulo 30-60-90 com relação ao cateto maior: “O cateto oposto ao ângulo de 60° vale metade da hipotenusa multiplicada pela raiz quadrada de 3”. MOISE e DOWNS (1971) afirmam que:

Em um triângulo cujos ângulos medem 30,60 e 90, o cateto maior
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 mede vezes o comprimento da hipotenusa.

(MOISE e DOWNS, 1971, p. 291)

Em RICH (1972) temos o seguinte princípio para o triângulo 30-60-90 com relação ao cateto menor: “O cateto oposto ao ângulo de 30° vale metade da hipotenusa”. Sobre o cateto menor MOISE e DOWNS (1971) pontuam que:

Se um ângulo agudo de um triângulo retângulo mede 30° , então o comprimento do lado oposto é metade do comprimento da hipotenusa.

(MOISE e DOWNS, 1971, p. 237)

Podemos verificar que BARBOSA (1995) apresenta o mesmo princípio em forma de situação problema. Em BARBOSA (1995) encontramos os seguintes enunciados:

Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.

Prove que, se em um triângulo retângulo o menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa, então seus ângulos agudos são de 30° e 60° .

(BARBOSA, 1995, p. 102).

Outra aplicação interessante para o teorema de Pitágoras é apresentada por DOLCE e POMPEO (1993):

Calculemos a hipotenusa a de um triângulo retângulo com um cateto $b = 2xy$ e outro $c = x^2 - y^2$.

$$a^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2$$

$$a^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4$$

$$a^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$a^2 = (x^2 + y^2)^2$$

$$a = x^2 + y^2$$

Então, temos:

Tomando x e y inteiros, primos entre si, um deles sendo par e x maior que y .

(DOLCE e POMPEO, 1993, p. 241).

Tabela 2: x e y que satisfazem triângulo retângulo na forma (catetos: $2xy$, $x^2 - y^2$ e hipotenusa: $x^2 + y^2$).

CATETO		CATETO	HIPOTENUSA	
x	y	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Extraído de Dolce e Pompeo, 1993, p. 242

BARBOSA (1995) apresenta esse mesmo conteúdo em forma de situação problema como podemos acompanhar no enunciado que segue:

Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

(BARBOSA, 1995, p. 101).

3.3.3 Área e Equivalência

Um dos últimos assuntos abordados em um curso de geometria plana é Área. Esse conteúdo é de fundamental importância, permeia toda a escolarização desde os trabalhos com malhas quadriculadas que se iniciam na Educação Infantil e primeiras séries do Ensino Fundamental.

O estudo de áreas de triângulos é particularmente especial, pois qualquer polígono pode ser dividido em um número inteiro de triângulos. A área de um polígono qualquer é um número que corresponde à região interna as linhas do polígono, ou seja, a região poligonal. Portanto, quando nos referimos a área de um triângulo, em verdade queremos dizer área de uma região triangular.

Quando duas figuras planas possuem mesma área elas são equivalentes. A seguir o clássico exemplo de Euclides:

Paralelogramos com a mesma base, e situados entre duas retas dadas, são iguais (em área).

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.175).

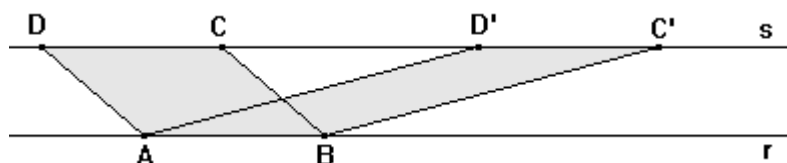


Figura 13: Exemplo I - Conteúdo – equivalência de área.

Fonte: Extraído de Rezende e Queiroz, 2000, p.175.

DOLCE e POMPEO (1993) apresentam a seguinte equivalência entre um triângulo e um paralelogramo:

Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo.

(DOLCE e POMPEO, 1993, p. 305).

Para equivalência de triângulos apresentamos a seguinte definição:

Dois triângulos de bases e alturas ordenadamente congruentes são equivalentes.

$$\Delta V_1V_2V_3 \approx \Delta V_1V'V_3$$

(DOLCE e POMPEO, 1993, p. 305).

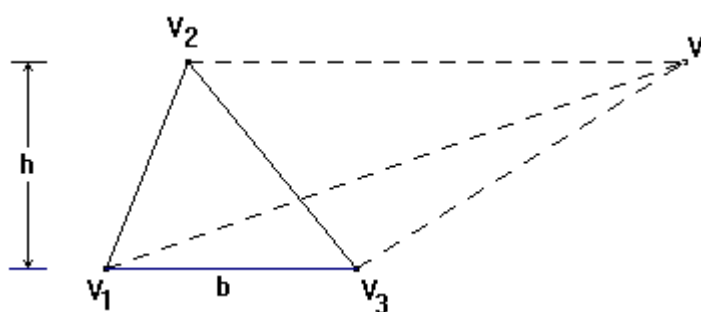


Figura 14: Exemplo II - Conteúdo – equivalência de área.

Fonte: Extraído de Dolce e Pompeo, 1993, p. 305.

REZENDE e QUEIROZ (2000) firmam que são sempre equivalentes dois triângulos de mesma base e mesma altura. Abaixo acompanhamos como as autoras apresentam esse assunto:

Seja dado o triângulo ABC. Fixando os vértices A e B e fazendo C percorrer uma reta r paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, a área dos triângulos obtidos não varia, isto é, sendo X um ponto qualquer de r , temos o triângulo ABX equivalente ao triângulo ABC, cuja área é $\frac{bh}{2}$.

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.178).

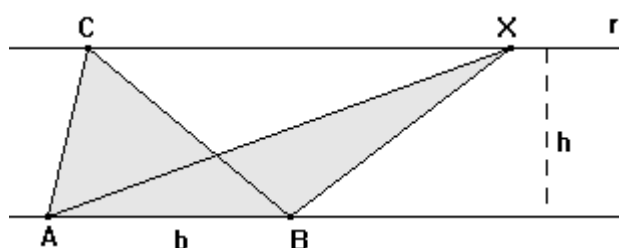


Figura 15: Exemplo III - Conteúdo – equivalência de área.
Fonte: Extraído de Rezende e Queiroz, 2000, p.178.

A seguir uma situação problema que traz dois questionamentos desse conteúdo.

Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados. Mostre também que, se dois triângulos têm um par de alturas congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre as “bases” correspondentes a essas alturas.

(REZENDE e QUEIROZ, 2000, p.117).

CAPÍTULO IV – METODOLOGIA DA PESQUISA

4.1 PROBLEMA E QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO

Tendo em vista que os alunos que estão cursando a Licenciatura em Matemática, exercerão suas atividades de docência nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, a presente pesquisa foi formulada tendo como problema gerador:

Quais as relações entre as atitudes em relação à geometria, a confiança em solução de problemas geométricos e os conhecimentos declarativos e procedimentais referentes à geometria plana?

Decorrente do problema de pesquisa foram derivadas as seguintes questões:

- 1) Existe relação entre a atitude referente à geometria e os conhecimentos (declarativo, declarativo e procedimental (demonstrações) e procedimental) geométricos?
- 2) Existe relação entre a confiança na solução de problemas geométricos e os conhecimentos (declarativo, declarativo e procedimental (demonstrações) e procedimental) em geometria?
- 3) Existe relação entre a confiança na solução de problemas geométricos e a atitude referente à geometria?
- 4) Quais as principais dificuldades apresentadas por futuros professores de matemática na resolução de problemas envolvendo conceitos geométricos, tais como congruência e semelhança de triângulos; o triângulo retângulo e as relações métricas no triângulo retângulo; área e equivalência de triângulos?

4.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Foram participantes da pesquisa 71 alunos dos quatro anos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Estado de São Paulo. Sendo que 30 participantes pertencentes ao 1º ano, ingressantes no curso. Os 2º e 3º anos com 14 e 22 participantes, respectivamente, e o 4º ano, contou com a participação de 5 alunos, dentre eles, 4 formandos.

Dessa distribuição os alunos do último ano cursam um currículo diferenciado, uma vez que, o curso sofreu um processo de Reestruturação no ano de 2005, atendendo a Resolução CNE/CP nº 2, de 19 de fevereiro de 2002, que institui a duração e a carga horária dos Cursos de Licenciatura. Dessa forma, a grande maioria dos alunos, pertencentes aos 1º, 2º e 3º ano cursam um novo currículo.

Em termos de disciplinas oferecidas com conteúdos da área de geometria temos no currículo antigo: Geometria; geometria descritiva, geometria analítica, desenho geométrico e uma disciplina intitulada complementos de matemática elementar que abordava os conteúdos de geometria métrica plana e espacial. O novo currículo mantém a mesma estrutura, o qual substitui esta última disciplina pela disciplina geometria espacial que tem como enfoque também a geometria espacial métrica. Em termos de conteúdo e carga horária obteve uma equivalência para esses conteúdos em específico. Sendo que a maior mudança diz respeito ao período no curso, que no currículo antigo essas disciplinas estavam distribuídas ao longo do curso, sendo que a disciplina de geometria (Euclidiana) era ministrada no 3º ano. Enquanto que no novo currículo, todas essas disciplinas se concentram nos primeiros dois anos de curso.

4.3 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Os instrumentos para a coleta de dados se constituíram de questionário informativo, escala de atitudes com relação à geometria, provas de conhecimentos, e teste de confiança relativo à prova de conhecimentos.

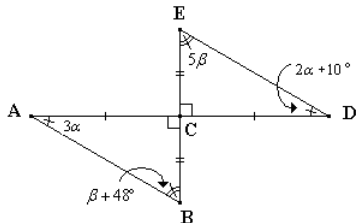
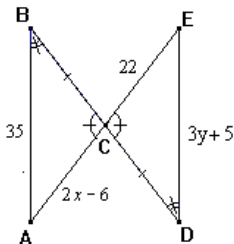
O questionário informativo é composto por 17 questões (anexo 5). As quatro primeiras são relativas às informações pessoais do participante como gênero, data de nascimento, ingresso e término previsto do curso. As restantes focalizam as experiências particulares ao longo da vida escolar de cada participante com a geometria.

Primeriamente, é questionado a respeito da vivência adquirida com a geometria durante o Ensino Fundamental e Médio. Após é perguntado quais partes da geometria é considerado pelo participante fácil ou difícil. São solicitadas informações a respeito do ensino de geometria durante o curso de Licenciatura em Matemática, referentes aos tópicos abordados e utilização de materiais para o ensino da geometria. Uma das questões pede a opinião do participante do porque se deve ensinar Geometria. É perguntando se o participante leciona, o segmento de Ensino (Fundamental, Médio, Superior e cursos preparatórios para vestibulares), a série ou disciplina. As últimas questões dizem respeito à confiança do participante na solução de problemas em geometria e demonstrações.

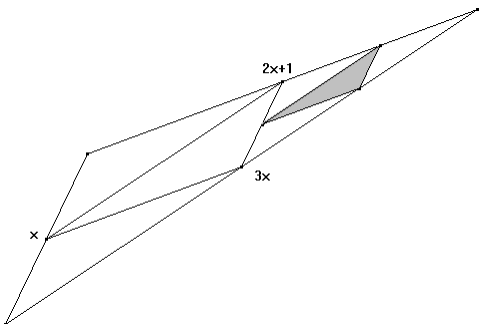
A escala de atitude em relação a Matemática VIANA e BRITO (2004) apresenta 20 afirmações que expressam o sentimento que cada participante apresenta com relação à Geometria (anexo 6). É solicitado que o participante compare o seu sentimento pessoal com aquele expresso em cada frase, assinalando um dentre os quatro pontos (discordo totalmente, discordo, concordo e concordo totalmente) colocados abaixo de cada uma das afirmações, de modo a indicar com maior exatidão possível, o sentimento que experimenta com relação à Geometria. Metade das afirmações expressa sentimentos e experiências positivas e a outra metade emoções e experiências negativas.

As provas de conhecimentos abordam os conteúdos de geometria plana apresentados no terceiro capítulo. As questões selecionadas para compor os instrumentos de pesquisa tratam dos conteúdos apresentados e foram baseadas nas situações problemas citadas como exemplos de cada conteúdo colocado no capítulo anterior. Foram selecionadas por tratarem de conteúdos de grande relevância em um curso de geometria plana e por estarem presentes nos principais livros textos utilizados em cursos de geometria plana em nível superior.

Quadro 3: Questões das provas de conhecimento geométrico – Conteúdo: Congruência entre Triângulos

CONGRUÊNCIA ENTRE TRIÂNGULOS		
Conhecimento procedimental	Conhecimento declarativo	Conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)
Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β. 		
Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos. 	O que é a congruência entre triângulos?	Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P, então $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

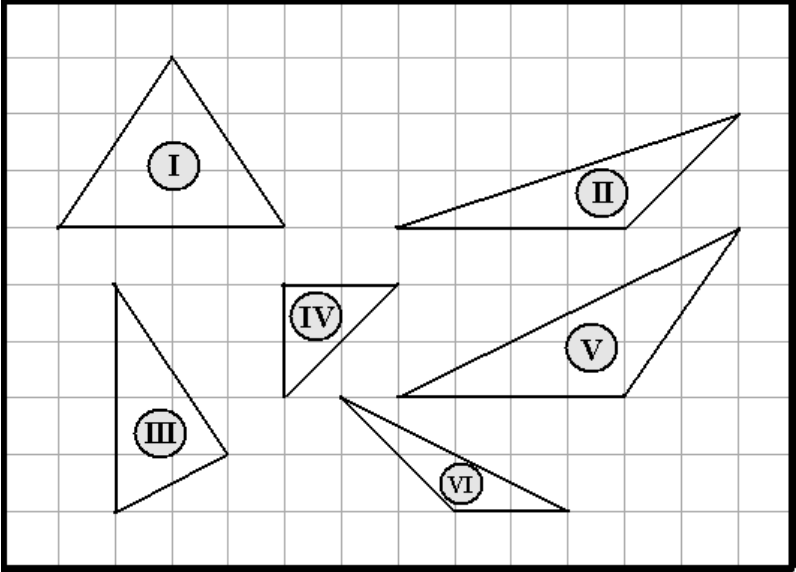
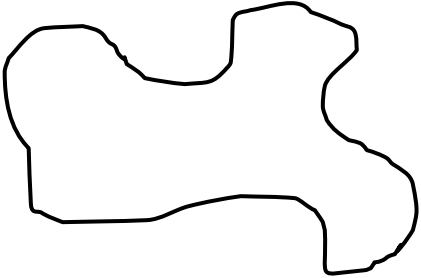
Quadro 4: Questões das provas de conhecimento geométrico – Conteúdo: Semelhança entre Triângulos

SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS		
Conhecimento procedimental	Conhecimento declarativo	Conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)
Na figura os vértices dos triângulos internos são os pontos médios dos lados dos triângulos circunscritos. Determine x, sabendo-se que o perímetro do triângulo pintado é 7,75 cm. 	O que é a semelhança entre triângulos?	Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo.

Quadro 5: Questões das provas de conhecimento geométrico – Conteúdo: Triângulos Retângulos

TRIÂNGULO RETÂNGULO		
Conhecimento procedimental	Conhecimento declarativo	Conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)
Dado um quadrado de lado a , calcular a sua diagonal d .	O que é o teorema de Pitágoras? Enuncie-o.	Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.
Dado um triângulo equilátero de lado a , calcular sua altura h .		
Determine dois triângulos retângulos que satisfazem as relações abaixo e sejam semelhantes entre si. Hipotenusa - $a = x^2 + y^2$ Catetos - $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$. Tomando x e y inteiros e $x > y$.	Apresente uma demonstração do teorema de Pitágoras.	Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.
		Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

Quadro 6: Questões das provas de conhecimento geométrico – Conteúdo: Área de figuras planas

ÁREA DE FIGURAS PLANAS		
Conhecimento procedimental	Conhecimento declarativo	Conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)
Determine a área de um triângulo equilátero de lado s. Determine quais triângulos são equivalentes. Justifique. 	Explique um procedimento para estimar a área da figura 	Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.
	O que são triângulos equivalentes?	Mostre que todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo.

A primeira prova são as questões da coluna central dos quadros anteriores, são 6 questões com características do tipo “o que é” e “explique”, ou seja, faz referencia ao conhecimento declarativo (anexo 10). Na segunda prova de conhecimentos declarativo e procedimental (demonstrações), foram utilizadas as questões da coluna à direita do quadros anteriores, com 7 questões, apresentando enunciados com as palavras chaves “demonstre” e “mostre”, evidenciando o conhecimento de demonstração (anexo 11). A terceira e última parte, questões localizadas na coluna à esquerda dos quadros anteriores, prova de conhecimentos procedimentais (anexo 12) com 8 questões, apresenta as palavras “determine” e calcular” características de problemas procedimentais.

As provas de conhecimentos foram avaliadas por um professor especialista da área de geometria. O professor especialista, utilizando as fichas de avaliação (anexo 14), apontou segundo instruções (anexo 13) se as questões eram pertinentes quanto aos conteúdos abordados, o nível de resolução (fácil - intermediário ou difícil), sugestões de resolução, alterações ou substituições.

Para cada prova de conhecimento foi elaborado um teste de confiança (anexos de 7 a 10) no qual o participante pode indicar o grau de confiança que tem de que será capaz de responder corretamente a questão, assinalando um dentre os quatro pontos (nada confiante, um pouco confiante, confiante e totalmente confiante) colocados abaixo de cada uma das questões, de modo a contemplar com maior exatidão possível, a confiança em solucionar as questões de geometria colocadas sem tentar resolvê-las.

4.4 PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para a coleta de dados foi procurada a Universidade na pessoa da coordenação de curso para solicitar autorização para realizar a pesquisa. Foi entregue uma carta (anexo 1) pedindo a permissão para a aplicação dos Instrumentos de Pesquisa, constando uma breve explicação da finalidade da pesquisa, dos instrumentos e garantindo que todos os nomes dos participantes e da instituição não seriam divulgados.

Paralelamente, foi contatado um professor especialista da área de geometria, também através de uma carta (anexo 3) com um convite para o professor especialista avaliar, as provas de conhecimentos geométricos. Na carta foi garantido que será mantido o anonimato do professor especialista avaliador, bem como será preservado o nome da Instituição a que pertence.

A coleta de dados foi dividida em dois momentos: o estudo piloto, no qual os instrumentos de pesquisa foram testados com os 07 formandos do curso de 2007. Posteriormente, a aplicação dos instrumentos, a pesquisa efetivamente, onde foram convidados a participar todos os alunos que cursavam a Licenciatura em Matemática na mesma instituição no ano letivo de 2008.

Após obter o consentimento junto à Universidade para realizar o trabalho foi contatado um professor responsável pela turma e solicitado permissão para utilização da sua aula para a aplicação dos instrumentos de pesquisa (anexo 2). Para aplicação dos instrumentos calculamos precisar de um período completo, ou seja, em termos de aula, quatro aulas.

O estudo piloto foi aplicado em 01 de dezembro de 2007. Enquanto que a coleta definitiva da pesquisa foi realizada quase um ano após, no mês de novembro de 2008, em dois dias, 08 e 12 de novembro.

A aplicação dos instrumentos seguiu a seguinte seqüência: Antes da entrega dos instrumentos de pesquisa (questionário informativo, escala de atitudes com relação à geometria, provas de conhecimentos, e teste de confiança relativo à prova de conhecimentos) os alunos receberam uma carta (anexo 4) apresentando a pesquisa e passando instruções, como as orientações do cabeçalho de cada instrumento, e que procurassem responder a todas as questões com a máxima clareza. Em cada documento havia um código particular os quais deveriam ser registrados no campo indicado nos outros instrumentos com o intuito de permitir a identificação para a pesquisadora através dos códigos como no exemplo a seguir: PAR-A01 (participante – turma A – número 01). Foi garantido também aos alunos participantes o anonimato e os dados coletados utilizados exclusivamente para a realização dessa pesquisa. Constava ainda na carta um Termo de Consentimento para realização da pesquisa, no qual foi solicitado ao aluno assinar informando que concordou voluntariamente em participar.

4.5 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

Para a análise dos dados foi feita a escolha por uma abordagem quanti-qualitativa, que como a designação sugere, foi utilizada análise estatística concomitantemente à análise qualitativa.

A estatística como ferramenta permitiu meios de quantificar e mensurar informações e dados que auxiliaram a interpretação que a pesquisadora realizou na análise qualitativa, corroborando a idéia colocada em Cazorla et al., 2006.

A Estatística é uma ferramenta valiosa para a pesquisa e está ao alcance de todos, mesmo para aqueles que optaram por metodologias de cunho qualitativo, pois complementa e enriquece o trabalho científico.

(CAZORLA ET AL., 2006, p.2).

4.5.1 Método quantitativo

O problema de pesquisa proposto investiga qual a relação entre as atitudes (medido pela somatória de pontos obtidos nos 20 itens da escala de atitudes), a confiança (medido pela somatória de pontos obtidos nas 21 questões relacionadas à confiança na solução de problemas de conhecimento em geometria) e os conhecimentos (medido pelo desempenho nas provas de conhecimento declarativo, declarativo e procedimental (demonstrações) e procedimental) referentes à geometria plana.

Nas questões de pesquisa além das atitudes referentes à geometria, a confiança na solução de problemas em geometria e o conhecimento aparecem outros elementos como as principais dificuldades encontradas nos problemas propostos em termos dos conteúdos abordados, tais como: congruência e semelhança, relações métricas no triângulo retângulo; área e equivalência. Dessa forma apresentaremos a seguir como cada um desses elementos se comporta no estudo em termos de sua função enquanto variável para a análise estatística.

Para o questionário informativo foram estabelecidas categorias para as análises das respostas referentes a 10 questões abertas das 17 presentes na prova. As questões restantes são com alternativas para serem assinaladas.

Para a escala de atitudes com relação à geometria Viana e Brito (2004) é atribuída a cada questão uma pontuação. De acordo com a opção assinalada, discordo totalmente (DT), discordo (D), concordo (C) e concordo totalmente (CT), pelo participante são atribuídos os valores 1, 2, 3 ou 4 respectivamente para as opções DT, D, C ou CT para afirmações positivas e inversamente pontuada, ou seja, 4, 3, 2 e 1 respectivamente para as opções DT, D, C e CT para afirmações negativas.

Quadro 7: Distribuição da pontuação e categorias referentes à Escala de Atitudes com relação à geometria

DESCRIÇÃO	ABREVIACÃO	PONTUAÇÃO	
		AFIRMAÇÃO POSITIVA	AFIRMAÇÃO NEGATIVA
Discorda Totalmente	DT	1	4
Discorda	D	2	3
Concorda	C	3	2
Concorda Totalmente	CT	4	1

Dessa forma a pontuação final possível de ser atingida pelo participante varia entre 20 e 80.

Quadro 8: Pontuação mínima e máxima da Escala de Atitudes com relação a geometria

DESCRIÇÃO	NÚMERO DE QUESTÕES	PONTUAÇÃO MÍNIMA	PONTUAÇÃO MÁXIMA
Afirmação Positiva	10	10	40
Afirmação Negativa	10	10	40
PONTUAÇÃO FINAL		20	80

Para as provas de conhecimentos foram criadas categorias para as análises baseadas no Sistema de Contagem de cinco pontos de Charles (1987) apud Cazorla et al. (2006).

Quadro 9: Sistema de Contagem de cinco pontos

NÚMERO DE PONTOS	CARACTERÍSTICAS OBSERVADAS NA SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS AOS ESTUDANTES
0	➤ Devolve o problema “em branco” (sem solução). ➤ Números copiados do problema; não entendimento do problema evidenciado. ➤ Resposta incorreta, sem evidenciar o desenvolvimento da solução.
1	➤ Iniciou usando estratégia inapropriada; não concluiu a solução do problema. ➤ Abordagem sem sucesso; não tentou abordagem diferente. ➤ Tentativa falha de alcançar um sub-objetivo.
2	➤ Utilizou estratégia apropriada, não encontrou a solução ou alcançou um sub-objetivo, mas não terminou a solução. ➤ Estratégia inadequada, que revela algum entendimento do problema. ➤ Resposta correta e procedimento de solução não mostrado.
3	Estratégia apropriada, porém o sujeito: ➤ Ignorou a condição do problema. ➤ Deu uma resposta incorreta sem razão aparente. ➤ Faltou de clareza no procedimento empregado.
4	➤ Estratégia (s) apropriada (s) ➤ Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. ➤ Resposta incorreta por um erro de cópia ou de cálculo.
5	➤ Estratégia (s) apropriada(s) ➤ Desenvolvimento da solução reflete entendimento do problema. ➤ Resposta correta.

Fonte: Extraído de Charles (1987) apud Cazorla et al., 2006, p.14.

Foram similarmente à proposta do Sistema de Contagem de cinco pontos apresentada acima utilizadas 6 categorias com pontuação de 0 a 5 que contemplam todas as possibilidades de respostas apresentadas pelos respondentes nas provas de conhecimentos aplicadas. As categorias são: branco ou não sei (BNS), tentou resolver sem êxito (TRE), resolveu de maneira incorreta com uso de linguagem matemática (RILM), resolveu particularizando com exemplos ou pseudo-demonstrações (REPD), resolveu corretamente com uso de linguagem inadequada (RCLI), e resolveu corretamente com uso de linguagem matemática (RCLM).

Para a categoria “branco ou não sei” foram consideradas as situações em que as questões não foram solucionadas, deixadas “em branco”. Foram categorizadas também respostas sem coerência, nas quais não fica evidenciado o entendimento do problema, bem como o desenvolvimento da solução. Por último, os casos em que o respondente registrou no espaço destinado para solucionar “não sei”.

Para a categoria “tentou resolver sem êxito” foram consideradas as respostas nas quais houve tentativa de solução, porém o objetivo não foi alcançado devido à utilização de estratégias inapropriadas e/ou utilização de uma abordagem de resolução sem sucesso. Ou seja, apesar de tentar solucionar o respondente não obteve êxito.

A categoria “Resolveu de maneira incorreta com uso de linguagem matemática” foi computada nas respostas nas quais houve uma tentativa de resolução demonstrando entendimento do problema, porém os procedimentos utilizados não levaram a solução correta. Sobretudo, as respostas evidenciaram linguagem matemática usada de maneira coerente confirmando que o respondente compreendeu a questão e possui os conhecimentos requisitados apesar de também não obter êxito no processo de resolução.

A categoria “Resolveu particularizando com exemplos ou pseudo-demonstrações ou apresentou” foi utilizada essencialmente para respostas que utilizou um exemplo particular generalizando como resposta de questões conceituais gerais, ou demonstração que apesar de utilizar rigor matemático e argumentos lógicos não chegou a ser efetivamente uma demonstração.

Foi categorizado como “Resolveu corretamente com uso de Linguagem inadequada” as respostas nas quais apareceram estratégias apropriadas, evidenciou entendimento do problema e desenvolveu uma solução correta, porém fez uso de vocabulário não-matemático e procedimentos de resolução rudimentares.

Para a categoria “Resolveu corretamente com uso de Linguagem matemática” foram acopladas as questões que apresentaram estratégias apropriadas, entendimento do problema e desenvolvimento da solução correta com uso de vocabulário pertinente, ou seja, se fez uso da linguagem matemática adequada.

Quadro 10: Distribuição da pontuação e categorias referente às provas de conhecimentos geométricos.

DESCRIÇÃO	ABREVIÇÃO	PONTUAÇÃO
Branco ou não sei	BNS	0
Tentou resolver sem êxito	TRE	1
Resolveu de maneira incorreta com uso de linguagem matemática.	RILM	2
Resolveu particularizando com exemplos ou pseudo-demonstração.	REPD	3
Resolveu corretamente com uso de Linguagem inadequada.	RCLI	4
Resolveu corretamente com uso de Linguagem matemática.	RCLM	5

Para cada prova de conhecimento é computada uma pontuação final diferente, uma vez que cada prova possui uma quantidade de questões distintas. Dessa forma a pontuação máxima alcançada na primeira prova é 30 pontos, pois possui 6 questões. A segunda prova possui 7 questões, portanto, é possível pontuar até 35 pontos. E a última prova o aluno pode pontuar até o máximo de 40 pontos, pois a prova é constituída por 8 questões.

Quadro 11: Pontuação mínima e máxima das provas de conhecimentos geométricos.

DESCRIÇÃO	NÚMERO DE QUESTÕES	PONTUAÇÃO MÍNIMA	PONTUAÇÃO MÁXIMA
Prova de conhecimento declarativo	6	0	30
Prova de conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)	7	0	35
Prova de conhecimento procedimental	8	0	40

Os testes de confiança receberam notas de acordo com cada opção assinalada pelo participante a pontuação de 1, 2, 3 ou 4 respectivamente, para as categorias nada confiante (NC), um pouco confiante (PC), confiante (C) e totalmente confiante (TC).

Quadro 12: Distribuição da pontuação e categorias referente aos testes de confiança em resolução de problemas geométricos.

DESCRIÇÃO	ABREVIACÃO	PONTUAÇÃO
Nada Confiante	NC	1
Um pouco confiante	PC	2
Confiante	C	3
Totalmente Confiante	TC	4

Para cada teste de confiança é computada uma pontuação final diferente correspondente à quantidade de questões da prova de conhecimento que está relacionado. Dessa forma a nota máxima alcançada no primeiro teste de confiança, referentes às questões de conhecimentos declarativos, são 24 pontos, pois possui 6 questões. O segundo teste de confiança relativo à prova de conhecimentos demonstração (declarativo e procedimental), com 7 questões pode alcançar até 28 pontos. O terceiro teste de confiança, vinculado a última prova de conhecimentos procedimentais, com 8 questões, é possível pontuar até 32 pontos.

Quadro 13: Pontuação mínima e máxima dos testes de confiança em resolução de problemas geométricos.

DESCRIÇÃO	NÚMERO DE QUESTÕES	PONTUAÇÃO MÍNIMA	PONTUAÇÃO MÁXIMA
Teste de confiança da Prova de conhecimento declarativo	6	6	24
Teste de confiança da Prova de conhecimento procedimental	7	7	28
Teste de confiança da Prova de conhecimento declarativo e procedimental (demonstração)	8	8	32

4.5.1.1 Apresentação das variáveis

Tabela 3: Apresentação das variáveis.

DESCRIÇÃO	VARIÁVEL	VALORES/ NÍVEIS OU CATEGORIAS	INSTRUMENTO
Atitudes em relação à Geometria	Pontuação na escala	De 20 a 80 pontos	Escala do tipo Likert 20 itens
Confiança na solução de problemas de conhecimento em geometria	Pontuação final Somatórias dos 3 testes	De 21 a 84 pontos	3 testes 21 itens
Conhecimento em geometria	Nota final Somatórias das 3 provas	De 0 a 105	3 Provas 21 questões
Confiança na solução de problemas de conhecimento declarativo	Pontuação no teste	De 6 a 24 pontos	Teste 6 itens
Conhecimento declarativo	Nota final	De 0 a 30	Prova 6 questões
Confiança na solução de problemas de conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)	Pontuação no teste	De 7 a 28 pontos	Teste 7 itens
Conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)	Nota final	De 0 a 35	Prova 7 questões
Confiança na solução de problemas de conhecimento procedimental	Pontuação no teste	De 8 a 32 pontos	Teste 8 itens
Conhecimento procedimental	Nota final	De 0 a 40	Prova 8 questões
Idade – data de nascimento	Idade	De 18 a 33 anos	Questionário
Gênero	Feminino/Masculino	F/ M	Questionário
Tempo de curso – data de ingresso e termino previsto	Tempo de curso	De 3 a 6 anos	Questionário
Estudou geometria no ensino Fundamental/ Médio	Geometria na Educação Básica	A-Sim, em todas as séries durante o ano letivo; B-Sim, em todas as séries apenas em parte do ano letivo; C-Sim, em algumas séries dependendo do professor; D-Sim, em uma matéria específica do conteúdo de geometria; E-Não, nenhum contato com o conteúdo de geometria.	Questionário

Parte mais difícil/ fácil da geometria	Parte da Geometria	A-Demonstrações;	Questionário
Tópicos que estudou no curso de Licenciatura	Tópicos de Geometria estudados no Curso	B-Geometria plana; euclidiana, estudo de polígonos; C-Geometria espacial; D-Geometria métrica; cálculos de área, volume e ângulos; E-Geometria analítica; F-Geometria descritiva, desenho geométrico; G-Trigonometria; funções e relações trigonométricas. H - nenhuma I - exercícios e resolução de problemas	Questionário
Aprendeu a utilizar materiais para o ensino de geometria	Utilização de recursos didáticos para o ensino da geometria	A-Não; B-Lousa e giz ; C-Régua, transferidos, compasso e esquadros; D-Software, informática, computador; E-Construção de sólidos geométricos com canudos; F-Dobraduras; G-Tangram; H-Ábaco e material dourado. I - geoplano L- jogos, materiais lúdicos	Questionário
Porque devemos ensinar geometria	Porque devemos ensinar geometria	A-Apresenta grande importância na matemática; B-Apresenta nova visão sobre a matemática; C-Ajuda na sistematização e rigor matemático; D-Desenvolve noção espacial, visão espacial; E-Desenvolve o raciocínio; F-Está presente em tudo; G-Permite diferenciar formas; H-Permite relacionar medidas e distâncias; I-Permite visualização e interpretação da estrutura lógica.	Questionário
Leciona no ensino Fundamental/ Médio/ Superior/ Cursos preparatórios	Leciona	A- Não B- Sim.	Questionário
Confiança na resolução de problemas/ demonstração	Confiança	A- Sim B- Não	Questionário

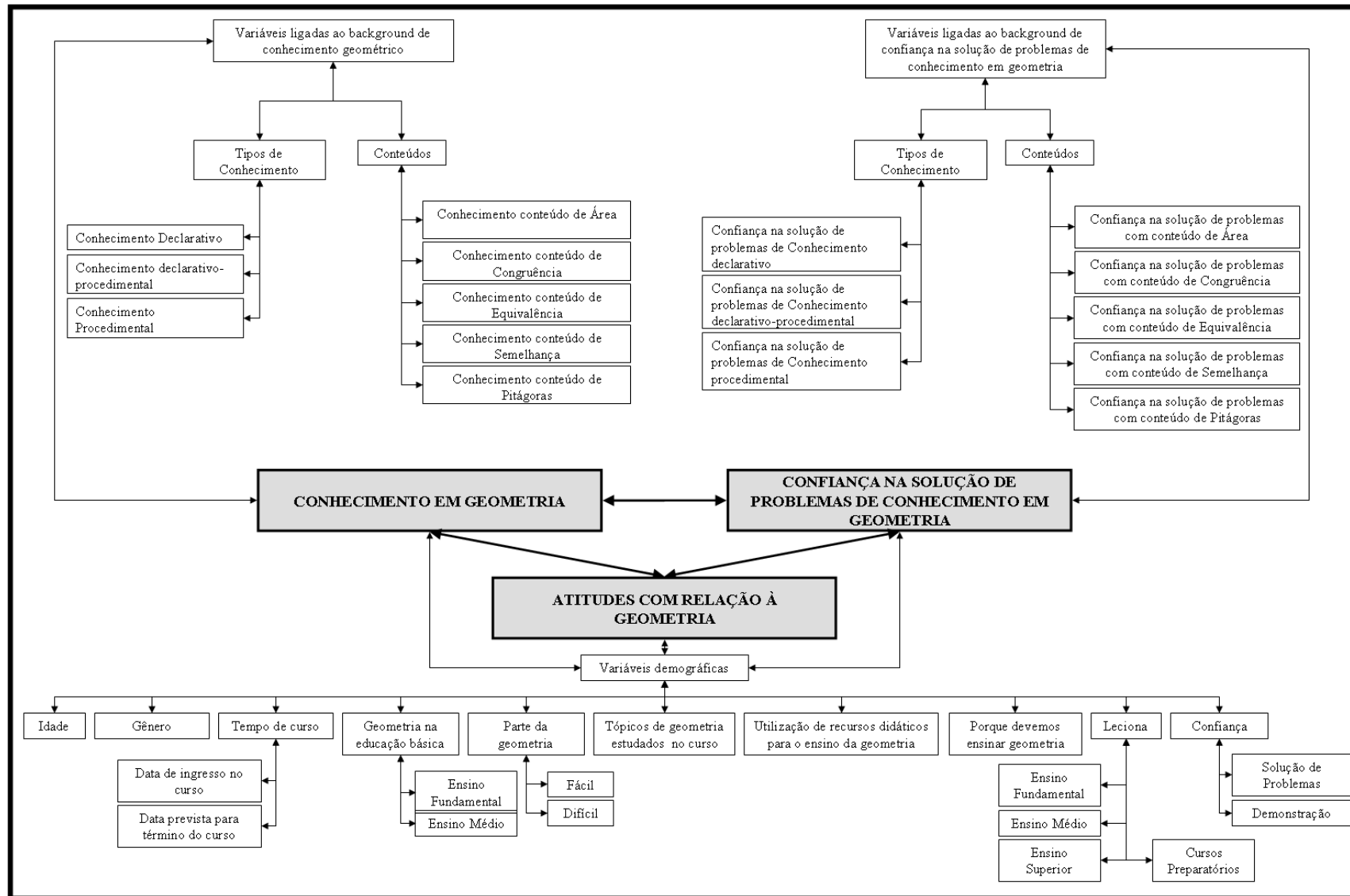


Figura 16: Esquema da pesquisa.

4.5.2 Método Qualitativo

De acordo com Garnica (2004):

Um método sempre traz, em si, a noção de eficácia. Trata-se de engendrar um mecanismo que, julgado eficaz, nos dê pistas para compreender determinada situação, resolver determinado problema, responder à determinada questão ou encaminhar determinados entraves. A eficácia, porém, será julgada segundo os pressupostos teóricos e vivências do pesquisador, e esse é o motivo principal de não se poder apartar uma metodologia de uma concepção de mundo e dos fundamentos teórico-filosóficos do pesquisador. Uma metodologia, porém – e portanto –, não é um conjunto de métodos que possa ser tratado de um modo meramente procedimental. Isso pretende significar que os limites das metodologias e de seus pressupostos teóricos dever ser séria e continuamente testados, confrontados, avaliados.

(Garnica, 2004, p. 84)

Nesse sentido a principal característica da análise qualitativa para esse trabalho é possibilitar a discussão dos dados quantitativos de maneira descritiva buscando elucidar o problema e as questões propostas na pesquisa da forma mais eficaz possível.

A pesquisa qualitativa possibilita uma análise fundamentada num processo que leva em consideração várias formas de manifestação do objeto em estudo. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), o objetivo de uma pesquisa qualitativa é fazer com que o pesquisador entenda o comportamento e as experiências dos participantes envolvidos.

Outro aspecto importante da pesquisa qualitativa para esse trabalho é que o objetivo principal da análise não é generalizar o contexto estudado e sim possibilitar que outros contextos possam se generalizar a partir de uma comparação. Segundo Bogdan e Biklen (1994):

A preocupação central não é de se os resultados sejam susceptíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles possam ser generalizados.

(Bogdan e Biklen, 1994, p 66)

4.6 O ESTUDO PILOTO

Os participantes do Estudo Piloto foram 7 alunos formandos do ano de 2007 de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública do Estado de São Paulo.

O principal objetivo do estudo piloto foi testar os instrumentos de pesquisa (questionário informativo, escala de atitudes com relação à geometria, prova de conhecimentos geométricos e testes de confiança) com relação ao entendimento dos participantes da linguagem e vocabulário utilizados na confecção dos instrumentos de pesquisa; a compreensão dos enunciados das situações, bem como o entendimento das situações colocadas nas provas; e a interpretação e legibilidade das figuras utilizadas. Objetivou-se também, apesar do número reduzido de participantes direcionamentos de categorização que auxiliasse na análise dos dados da pesquisa.

A seguir, é apresentada a descrição das situações das três provas de conhecimento com enfoque no parecer do professor especialista, as categorias, pontuação e percentual de acertos obtido por cada participante.

A primeira situação da Prova I de conhecimentos declarativos, “**O que é congruência entre triângulos?**”, foi avaliada pelo Professor Especialista como pertinente, e com um nível de resolução médio. O intuito dessa situação foi corroborado pelo comentário apresentado no parecer: “*vai avaliar se o aluno conhece o conceito ou se tem uma vaga idéia*”.

Na situação seguinte da prova de conhecimento declarativo, “**O que é semelhança entre triângulos?**”, foi sugerido pelo professor parecerista alteração no enunciado para: **O que é a semelhança entre triângulos?** Essa situação foi apontada como pertinente para o estudo e com um nível de resolução médio.

O professor especialista apresentou em seu parecer para a terceira situação, “**O que é o teorema de Pitágoras?**”, como nível de resolução fácil, mas sugeriu pedir para enunciar o teorema de Pitágoras.

A quarta situação solicitou aos participantes que apresentassem uma demonstração do teorema de Pitágoras com a seguinte colocação: **Apresente uma demonstração do teorema de Pitágoras**. Segundo o parecer do professor especialista essa situação é pertinente para o estudo e está em um nível de resolução difícil.

A situação, **explique um procedimento para calcular a área da figura**, apresentou a seguinte figura irregular. No parecer o professor apontou que “Não é possível

calcular a área, mas é possível conseguir uma aproximação por polígonos (em geral, triângulo)”.

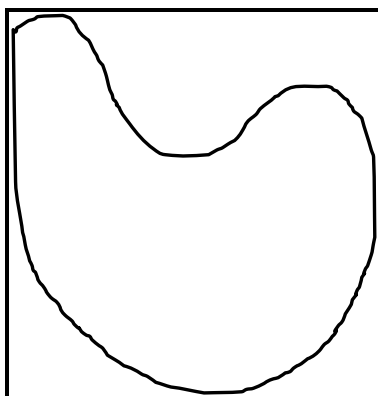


Figura 17: Figura da Situação 05 – PROVA I

A última situação da prova de conhecimentos declarativos perguntou **“O que é equivalência entre triângulos?”**, o professor especialista deu um parecer favorável a sua utilizando, considerando-a pertinente, porém sugeriu alterar o enunciado para ***O que são triângulos equivalentes?***. Considerou o nível de resolução fácil.

A prova de conhecimentos declarativo e procedimental (demonstrações) buscou que os respondentes evidenciassem nas respostas estrutura lógica, coerência, linguagem matemática adequada, simbologia correta, entre outros.

A situação inicial apresentou o seguinte enunciado: **“Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P, então $\triangle APC \cong \triangle BPD$ ”**. O professor especialista classificou essa situação como fácil e pertinente ao estudo.

A segunda situação **“Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo”**, recebeu nível médio referente ao grau de resolução apresentado pelo professor especialista, que a considerou em seu parecer pertinente para o estudo.

A situação **“Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto”**, obteve um parecer do professor especialista como pertinente e com nível de resolução médio.

A situação **“Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa”**, foi

avaliada pelo professor especialista como pertinente e com um nível fácil (com uso de trigonometria), e difícil por demonstração.

A situação “**Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$** ”, foi avaliada pelo professor especialista como pertinente ao estudo, e com nível de resolução fácil, sendo uma aplicação direta do teorema de Pitágoras.

A situação seguinte “**Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados**”, foi avaliada como pertinente e de nível fácil.

A última situação dessa prova de conhecimentos declarativo e procedimental foi “**Mostre que todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo**”. O professor especialista a considerou pertinente e de nível fácil.

A prova de conhecimentos procedimentais iniciou com a seguinte situação: **Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β** . O professor especialista avaliou essa situação como pertinente ao estudo e com nível de resolução fácil. Apenas, sugeriu especificar melhor a congruência. Ex.: $\triangle ABC \cong \triangle DEC$.

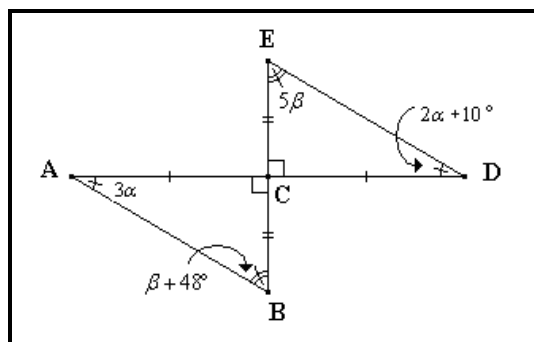


Figura 18: Figura da Situação 01 – PROVA III

Para a situação “**Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos**”, o professor avaliador também sugeriu indicar a ordem de congruência $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ e retirar as marcas dos ângulos. Complementou que a situação anterior está incluída nesta, mas a avaliou como pertinente e com nível de resolução fácil.

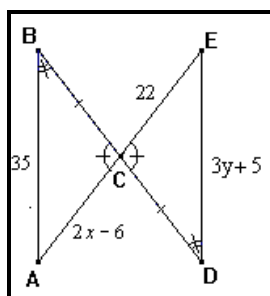


Figura 19: Figura da Situação 02 – PROVA III

A situação seguinte apresentou com o enunciado “Na figura os vértices dos triângulos internos são os pontos médios dos lados dos triângulos circunscritos. Determine x , sabendo-se que o perímetro do triângulo pintado é 7,75 cm”.

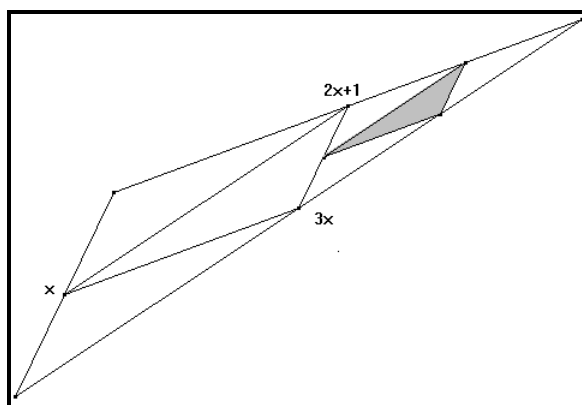


Figura 20: Figura da Situação 03 – PROVA III

A situação “Dado um quadrado de lado a , calcular a sua diagonal d ”, foi considerada pertinente pelo professor especialista e apresentando um nível de resolução fácil. O mesmo para a situação “Dado um triângulo equilátero de lado a , calcular sua altura h ”, considerada nível fácil, na qual o professor especialista acrescentou que é bastante conhecida. Porém, corroborou com a pertinência desta para o estudo.

A situação seguinte trouxe o seguinte enunciado “Determine dois triângulos retângulos que satisfazem as relações abaixo e sejam semelhantes entre si. Hipotenusa - $a = x^2 + y^2$, Catetos - $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$. Tomando x e y inteiros e $x > y$ ”. Essa situação foi considerada com um nível de resolução médio pelo professor especialista e pertinente para o estudo.

A situação “Determine a área de um triângulo equilátero de lado s ”, foi considerado pertinente e com nível fácil de resolução, o professor especialista acrescentou que essa situação é também bastante conhecida.

A última situação da prova solicitou ao participante: **“Determine quais triângulos são equivalentes. Justifique”**.

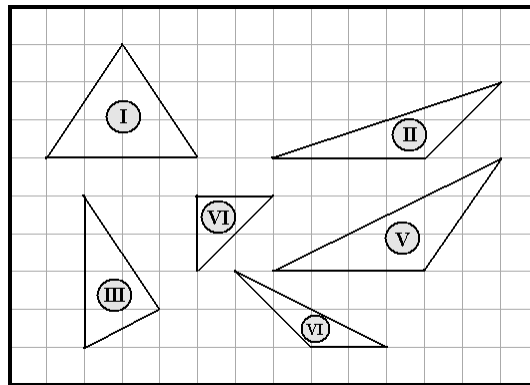


Figura 21: Figura da Situação 08 – PROVA III (A)

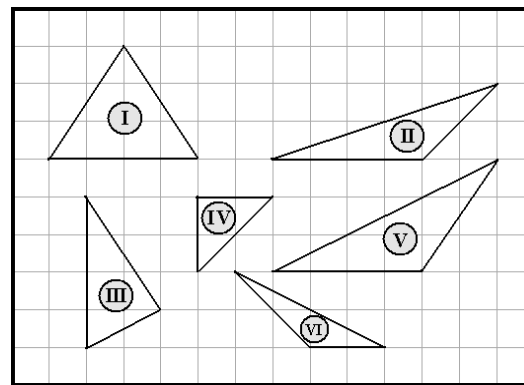


Figura 22: Figura da Situação 08 – PROVA III (B)

Com relação à figura dessa situação, no instrumento aplicado no estudo piloto, havia um erro de impressão no qual encontrávamos duas figuras com numeração VI (Figura 21). Coincidentemente, esses triângulos apresentam a mesma área sendo uma das respostas esperadas. Dessa forma, foram consideradas corretas as duas respostas conforme indicado abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\Delta I} \equiv A_{\Delta V} \\ A_{\Delta II} \equiv A_{\Delta III} \\ A_{\Delta VI} \equiv A_{\Delta VI} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{\Delta I} \equiv A_{\Delta V} \\ A_{\Delta II} \equiv A_{\Delta III} \\ A_{\Delta IV} \equiv A_{\Delta VI} \end{array} \right.$$

Verificamos que para aqueles que notaram dois triângulos com numeração VI e fizeram à correção no local (Figura 22), foi possível resolver, o mesmo para aqueles que consideraram como estava. Assim sendo, a situação foi mantida, uma vez que não

ocasionou em prejuízo para nenhum respondente. O professor especialista considerou essa situação pertinente ao estudo e com nível de resolução fácil.

O primeiro instrumento aplicado foi o questionário informativo, seguido da escala de atitudes com relação à geometria. Os testes de confiança solicitavam que os alunos afirmassem através das alternativas qual a confiança na resolução das situações apresentadas. É importante ressaltar que os participantes receberam cada teste de confiança relativo às provas de conhecimento e responderam cada um separadamente, e somente após tiveram acesso às provas, último instrumento, e a informação que teriam que resolvê-las.

4.6.1 Análise dos dados do Estudo Piloto

A seguir apresentamos alguns resultados do estudo piloto relativo ao teste de confiança e o desempenho, separadamente por Provas I, II e III, conhecimento declarativo, conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações), e conhecimento procedimental, respectivamente.

Conforme a Tabela 4, a respeito da confiança e o desempenho na Prova I de conhecimentos declarativos, os participantes da pesquisa evidenciam um comportamento proporcional da nota relativo à confiança. Porém, é possível verificar que a diferença é de 20% em média menor a nota de desempenho que a nota no teste de confiança, chegando em algumas situações a um valor bem superior a esse, como por exemplo, o participante PLT-07 que atingiu 63% e 27%, respectivamente na confiança e desempenho, com uma marca de 36 pontos percentuais de diferença.

Tabela 4: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança e desempenho na Prova I de conhecimento declarativo

DESEMPENHO X CONFIANÇA				
PROVA I - CONHECIMENTO DECLARATIVO				
	NOTA	% NOTA	CONFIANÇA	% CONFIANÇA
PLT-01	25	83%	23	96%
PLT-02	23	77%	22	92%
PLT-03	23	77%	18	75%
PLT-04	13	43%	17	71%
PLT-05	12	40%	17	71%
PLT-06	20	67%	20	83%
PLT-07	8	27%	15	63%
média	17,7	59%	18,86	79%

A Prova II de conhecimentos declarativo e procedimental (demonstração) apresentou situações de demonstração que exigiam dos participantes tanto o conhecimento declarativo de conceitos, como o conhecimento procedimental, aliado a necessidade de um raciocínio lógico dedutivo, apoiado em um desenvolvimento axiomático.

Tanto a confiança quanto o desempenho na prova II tiveram queda em pontos se comparados à primeira prova. Porém, é possível observar que os mesmos participantes que estavam com a confiança e o desempenho positivos na primeira etapa da prova de conhecimentos geométricos se mantiveram acima da média também nessa prova para esses dois elementos.

Nessa prova destaca-se a atuação do participante PLT-06, conforme verificamos na Tabela 5 apresentou 14 pontos percentuais menos confiante do que sua marca na prova (desempenho). De qualquer maneira ele está em um patamar de confiança positivo, se comparado ao grupo, porém seu desempenho foi bem melhor do que o esperado por ele mesmo.

Tabela 5: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança e desempenho na Prova II de conhecimentos declarativo e procedimental (demonstrações)

DESEMPENHO X CONFIANÇA				
PROVA II - CONHECIMENTOS DECLARATIVO E PROCEDIMENTAL				
(DEMONSTRAÇÕES)				
	NOTA	% NOTA	CONFIANÇA	% CONFIANÇA
PLT-01	32	91%	27	96%
PLT-02	18	51%	25	89%
PLT-03	26	74%	24	86%
PLT-04	5	14%	17	61%
PLT-05	3	9%	13	46%
PLT-06	31	89%	21	75%
PLT-07	8	23%	16	57%
média	17,6	50%	20,43	73%

As questões em que os participantes se mostraram mais confiantes para responder foram as pertencentes à prova de conhecimentos procedimentais. Conforme Tabela 6 a média de confiança atingiu 84%.

Nessa Prova 03 participantes superaram suas expectativas individuais e atingiram um desempenho que superou a confiança em 10%, 4%, e 2%, respectivamente para os participantes, PLT-03, PLT-07, e PLT-06.

Tabela 6: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança e desempenho na prova de conhecimentos procedimentais

DESEMPENHO X CONFIANÇA				
PROVA DE CONHECIMENTOS PROCEDIMENTAIS				
	NOTA	% NOTA	CONFIANÇA	% CONFIANÇA
PLT-01	34	85%	31	97%
PLT-02	35	88%	30	94%
PLT-03	34	85%	24	75%
PLT-04	16	40%	24	75%
PLT-05	26	65%	29	91%
PLT-06	37	93%	29	91%
PLT-07	29	73%	22	69%
média	30,1	75%	27	84%

A partir dos protocolos do estudo piloto, obtivemos a pontuação dos participantes referente a atitudes com relação à Geometria. Dessa forma, foram comparadas a pontuação na escala de atitudes e o desempenho nas provas de conhecimento declarativo, declarativo e procedimental (demonstrações) e procedimental.

Conforme a Tabela 7 os participantes que obtiveram desempenho menor que a média foram os mesmos que apresentaram atitudes negativas com relação à geometria, uma vez que, também pontuaram na escala de atitudes com relação à geometria uma nota inferior à média do grupo.

Proporcionalmente, os que tiveram atitudes positivas foram aqueles que na somatória final das provas de conhecimento obtiveram notas superiores à média. É importante observar que o participante PLT-01 alcançou 77 pontos na escala de atitudes, o equivalente a 96%, mostrando ter uma atitude bastante positiva referente a esse conteúdo. Esse mesmo participante foi o que obteve maior nota no desempenho, realizando a marca de 91 pontos em 105, o equivalente a 87%.

Tabela 7: Distribuição dos participantes de acordo com a pontuação na Escala de Atitudes em relação à geometria e o desempenho

DESEMPENHO X ESCALA DE ATITUDES				
	DESEMPENHO	% DESEMPENHO	ESCALA DE ATITUDES	% ESCALA DE ATITUDES
PLT-01	91	87%	77	96%
PLT-02	76	72%	71	89%
PLT-03	83	79%	74	93%
PLT-04	34	32%	58	73%
PLT-05	41	39%	69	86%
PLT-06	88	84%	70	88%
PLT-07	45	43%	66	83%
média	65,4	62%	69,3	87%

Similarmente, foi realizada a comparação da pontuação dos testes de confiança na resolução de problemas geométricos com a pontuação na escala de atitudes. Por comparação direta podemos verificar que dos 7 participantes do estudo piloto, três estiveram com confiança e atitudes positivas com relação a geometria e a solução de problemas com conceitos geométricos, levando-se em consideração que as notas foram superiores à médias tanto na somatória dos testes de confiança quanto na escala de atitudes com relação a geometria. Outros 3 participantes, encontram-se em lados opostos com uma confiança abaixo da média e também com atitudes negativas com relação a geometria considerando esse grupo. Apenas um participante, PLT-03, obteve nos testes de confiança a média, porém sua atitude referente à geometria é considerada alta, pois pontuou 74 em 80, com uma marca de 93%.

Tabela 8: Distribuição dos participantes de acordo com a pontuação nos testes de confiança e a Escala de Atitudes em relação à geometria

CONFIANÇA X ESCALA DE ATITUDES				
	CONFIANÇA	% CONFIANÇA	ESCALA DE ATITUDES	% ESCALA DE ATITUDES
PLT-01	81	96%	77	96%
PLT-02	77	92%	71	89%
PLT-03	66	79%	74	93%
PLT-04	58	69%	58	73%
PLT-05	59	70%	69	86%
PLT-06	70	83%	70	88%
PLT-07	53	63%	66	83%
Média	66,3	79%	69,3	87%

Da aplicação dos instrumentos de pesquisa, foi verificado que as questões das provas de conhecimento foram todas interpretadas pelos respondentes sem apresentar dificuldades relativas aos enunciados, sendo que não foi registrado por nenhum participante problema de entendimento com nenhum instrumento de coleta de dados utilizados. A única observação foi referente à figura com um par de triângulos com mesma numeração, mas que foi resolvida durante a aplicação do estudo piloto e realizada a correção para a aplicação final.

Relativo ao tempo, todos os instrumentos foram respondidos em um único encontro no qual foi reservado um período de uma aula (4 horas) para a execução do trabalho. Todos os participantes desenvolveram as atividades e entregaram todos os instrumentos bem antes do tempo previsto para o término. Dessa forma, os instrumentos permanecem como estão para a coleta de dados final.

De acordo com os dados anteriormente apresentados podemos assinalar que parece haver uma correspondência na pontuação que se manteve estável em todos os instrumentos no que diz respeito àqueles sujeitos que tiveram atitude positiva com relação à geometria. Esses participantes alcançaram uma pontuação de confiança superior à média nos testes de confiança, bem como um desempenho acima da média nas provas de conhecimento nos três tipos (declarativo, declarativo e procedimental (demonstrações), e procedimental).

Os dados do estudo piloto não permitem uma análise estatística consistente devido ao número baixo de participantes, 7 sujeitos. Todavia, possibilitam um estudo qualitativo de calibração dos instrumentos de pesquisa, bem como alguns indicativos ainda bastantes preliminares respectivos ao problema e questões de pesquisa do trabalho.

Espera-se, com um número maior de respondentes, que consigamos obter os elementos de maior significância necessários que nos permita afirmar essas relações entre a atitude referente à geometria e os conhecimentos; entre a confiança na solução de problemas geométricos e os conhecimentos em geometria; e entre a confiança na solução de problemas geométricos e a atitude referente à geometria, com maior contundência.

É importante ressaltar que os sujeitos com maior dificuldade nas demonstrações, tendem a ter um desempenho inferior nos outros tipos de conhecimento, baixa confiança na resolução de problemas, e atitudes negativas. Essa situação pode refletir e se constituir em uma das principais dificuldades apresentadas por esses profissionais no

futuro enquanto professores de matemática na educação Básica para o ensino do conteúdo de geometria plana.

4.6.2 Alterações nos instrumentos de pesquisa: contribuições do Estudo Piloto

Após a aplicação e análise dos protocolos obtidos no estudo piloto, houve a preparação dos instrumentos para a aplicação definitiva da pesquisa. Para tanto, foram levados em consideração os seguintes critérios: erros de digitação e/ou impressão, sugestões do professor parecerista, sugestões da banca de qualificação, e análise dos protocolos do estudo piloto.

Conforme, apontado anteriormente, foi corrigida a figura da situação 8 da terceira prova que trazia nas representações de triângulos nomeações numéricas repetidas.

Foi aceita a indicação conforme parecer do professor especialista a alteração no enunciado de algumas situações de conhecimento declarativo, como por exemplo: “O que é semelhança entre triângulos?” para “O que é a semelhança entre triângulos?”, ou ainda, “O que é o teorema de Pitágoras?” para “O que é o teorema de Pitágoras? Enuncie-o”.

Outra importante alteração realizada é referente à situação “Explique um procedimento para calcular a área da figura”, a qual, em concordância com o parecer do professor especialista, os professores da banca de qualificação sugeriram solicitar aos respondentes estimar a área da figura apresentada. Dessa maneira, o enunciado foi alterado para “Explique um procedimento para estimar a área da figura”.

Além disso, optou-se por substituir a figura, uma vez que pelas análises dos protocolos foi verificado que a figura utilizada pode induzir o respondente à indicação de um procedimento de resolução particular para essa figura fazendo aproximação a um círculo. Verificamos a seguir o esquema de dois participantes do estudo piloto. Nota-se que os respondentes verificaram que por composição das partes a figura tem aproximação com a área do círculo, porém este procedimento não pode ser generalizado para outras figuras irregulares.

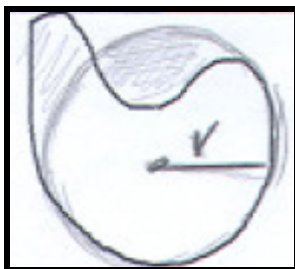


Figura 23: Figura da Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 (PLT-02)



Figura 24: Figura da Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 (PLT-01)

Logo, procuramos utilizar uma figura que não tivesse semelhança com nenhuma figura plana comumente trabalhada em situações de ensino.

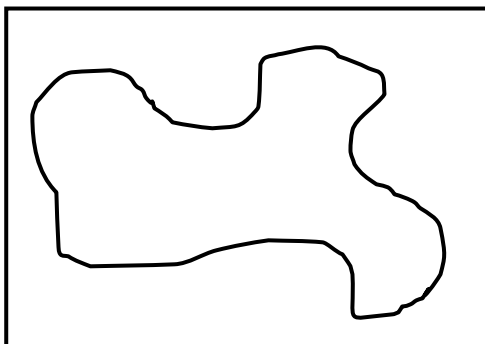


Figura 25: Figura nova - PROVA I - SITUAÇÃO 05

CAPÍTULO V – ANÁLISE DOS RESULTADOS DA PESQUISA

5.1 CARACTERÍSTICAS DOS PARTICIPANTES

Foram participantes da pesquisa os alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma Universidade Pública do Estado de São Paulo, matriculados regularmente no ano letivo de 2008, sendo quatro turmas com uma média de 35 a 40 alunos por classe, o montante de alunos matriculados nesse curso, que aproximadamente de 140 a 160 estudantes.

Todos os alunos foram convidados para participar da pesquisa, porém na ocasião da aplicação do instrumento de pesquisa as turmas não estavam completas e, ainda, em algumas delas houve aqueles que não quiseram participar. Ao todo participaram 71 alunos, sendo que as turmas A e C teve uma maior participação, conforme Tabela 9.

Tabela 9: Distribuição dos participantes de acordo com a turma

Turma	Nº de sujeitos	Porcentagem
Turma A (1º ano)	30	42,25
Turma B (2º ano)	14	19,72
Turma C (3º ano)	22	30,99
Turma D (4º ano)	05	7,04
Total	71	100,0

A distribuição por gênero foi ligeiramente maior no gênero feminino (53,5%) e as idades dos participantes variaram entre 18 e 33 anos, sendo que 90% deles estão concentrados na faixa dos 18 aos 23 anos, conforme a Tabela 9.

Tabela 9: Distribuição dos participantes de acordo com a idade

Idade	Nº de sujeitos	Porcentagem
18 anos	4	5,6
19 anos	18	25,4
20 anos	16	22,5
21 anos	15	21,1
22 anos	8	11,3
23 anos	3	4,2
24 anos	2	2,8
25 anos	1	1,4
26 anos	2	2,8
27 anos	1	1,4
33 anos	1	1,4
Total	71	100,0

Foi verificado que apenas 18,31% dos participantes exercem função docente no Ensino Fundamental, Ensino Médio, ou cursos preparatórios para vestibulares. Relativo às experiências dos participantes na formação no Ensino Fundamental e Médio, como apresentado nas Tabela 10 e Tabela 11, os participantes, de maneira geral, tiveram acesso à Geometria ao longo da escolaridade da Educação Básica.

Tabela 10: Distribuição dos participantes de acordo com as experiências com a geometria no Ensino Fundamental

Ensino Fundamental	Nº de sujeitos	Porcentagem
A – Sim, em todas as séries durante o ano letivo;	12	16,9
B – Sim, em todas as séries apenas em parte do ano letivo;	21	29,6
C – Sim, em algumas séries dependendo do professor;	29	40,8
D – Sim, em uma matéria específica do conteúdo de geometria;	7	9,9
E – Não, nenhum contato com o conteúdo de geometria.	2	2,8
Total	71	100,0

Tabela 11: Distribuição dos participantes de acordo com as experiências com a geometria no Ensino Médio

Ensino Médio	Nº de sujeitos	Porcentagem
A - Sim, em todas as séries durante o ano letivo;	18	25,4
B - Sim, em todas as séries apenas em parte do ano letivo;	14	19,7
C - Sim, em algumas séries dependendo do professor;	22	31,0
D - Sim, em uma matéria específica do conteúdo de geometria;	15	21,1
E - Não, nenhum contato com o conteúdo de geometria.	2	2,8
Total	71	100,0

As questões referentes às partes mais fácil ou mais difícil da Geometria e tópicos que estudou no curso de Licenciatura em Matemática foram abertas, dessa forma obtivemos uma diversidade grande de informações as quais os principais elementos citados foram: A - demonstrações; B - geometria plana; euclidiana, estudo de polígonos. C - geometria espacial; D - geometria métrica; cálculos de área, volume e ângulos; E - geometria analítica; F - geometria descritiva, desenho geométrico; G - trigonometria; funções e relações trigonométricas; e I - exercícios e resolução de problemas.

Para a questão sobre se aprendeu a utilizar materiais para o ensino de geometria, as principais categorias foram: A - lousa e giz; B - régua, transferidos, compasso e esquadros; C - software, informática, computador; D - construção de sólidos geométricos com canudos; E - dobraduras, EVA; F - tangram; G - ábaco e material dourado; H- geoplano; e I - jogos, materiais lúdicos.

Referente ao porquê devemos ensinar Geometria, obteve-se as seguintes respostas: A - apresenta grande importância na matemática; B - apresenta nova visão sobre a matemática; C - ajuda na sistematização e rigor matemático; D - desenvolve noção espacial, visão espacial; E - desenvolve o raciocínio; F - está presente em tudo, cotidiano, presente no dia-a-dia; G - permite diferenciar formas; H - permite relacionar medidas e distâncias; I - permite visualização e interpretação da estrutura lógica.

De acordo com a

Tabela 12 os participantes quando questionados sobre a confiança na resolução de situação problema ou exercício que envolva geometria houve um equilíbrio com 35 sim e 36 não.

Tabela 12: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança em resolução de situação problema ou exercício que envolva geometria

Confiança resolução situação problema	Nº de sujeitos	Porcentagem
Sim	35	49,3
Não	36	50,7
Total	71	100,0

Relativo à confiança nas demonstrações houve um aumento na categoria não, conforme a Tabela 13 tivemos 66,2% dos participantes que responderam não se sentir confiantes para realizar uma demonstração.

Tabela 13: Distribuição dos participantes de acordo com a confiança em resolução de demonstração

Confiança resolução demonstração	Nº de sujeitos	Porcentagem
Sim	24	33,8
Não	47	66,2
Total	71	100,0

5.2 ANÁLISE DESCRITIVA DAS RESPOSTAS DAS PROVAS DE CONHECIMENTOS

A seguir são apresentadas as respostas de participantes da pesquisa para as situações problemas das provas de conhecimento. Optou-se por colocar uma resposta representativa para cada situação, por categorias, e prova. A menos aquelas que não obtiveram respostas em alguma categoria. Dessa maneira, procura-se exemplificar as respostas em suas respectivas categorias sustentadas pelas soluções realizadas pelos respondentes. Além disso, é apresentada uma sugestão de solução para cada situação das provas de conhecimento.

5.2.1 Respostas da prova de conhecimento declarativo

PROVA I - SITUAÇÃO 01 O que é a congruência entre triângulos?
--

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova I - Situação 01): A congruência entre triângulos é a correspondência entre os vértices dos triângulos de modo que sejam congruentes (que têm mesma medida) os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes.

Essa situação obteve 26 respostas consideradas corretas e locadas na categoria RCLM com pontuação de 5 pontos. Conforme as resoluções apresentadas abaixo, percebemos que todas elas trazem elementos de relação/ correspondência entre os vértices dos triângulos referente a congruência dos ângulos e lados.

SITUAÇÃO 01: O que é a congruência entre triângulos?

RESPOSTA: Dados dois triângulos: $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, de forma que podemos estabelecer uma relação biunívoca entre seus vértices, sendo a relação indicada como a seguir: $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$, se os ângulos correspondentes são congruentes, isto é, $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, e os lados correspondentes são congruentes, isto é, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, dizemos que os dois triângulos são congruentes e denotamos isso por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Figura 26: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-A12 – Turma A – Categoria: RCLM (5 pontos)

A categoria RCLI (4 pontos) obteve 18 respostas de participantes pertencentes as turmas A, B e C, não tivemos participantes da turma D para essa categoria. Nessa categoria os participantes utilizaram o termo “igual” para se referir a congruência. Foram consideradas corretas as respostas, porém, não com uso de linguagem apropriada.

SITUAÇÃO 01: O que é a congruência entre triângulos?

RESPOSTA: Os triângulos são congruentes quando os seus lados correspondentes e os ângulos correspondentes são iguais.

Ex:

Figura 27: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-C33 – Turma C – Categoria: RCLI (4 pontos)

A categoria REPD teve 14 respostas para a situação 01 da primeira prova. Foram consideradas as respostas que representavam exemplos ou casos particulares de congruência entre triângulos..

SITUAÇÃO 01: O que é a congruência entre triângulos?

RESPOSTA: Dois triângulos são congruentes quando tem todos os lados iguais (L.L.L), ou A.L.A

Figura 28: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-B11 – Turma B – Categoria: REPD (3 pontos)

A categoria RILM (2 pontos) obteve 13 respostas apresentadas pelos participantes. Algumas respostas incorretas faziam referência a outros conteúdos matemáticos como: razão, equivalência, entre outros.

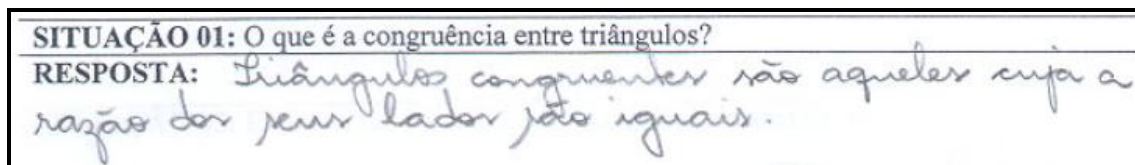


Figura 29: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-A11 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

Para a situação 01 da primeira prova não foi computada respondentes nas categorias TRE e BNS, uma vez que todas as respostas para essa questão apresentaram elementos matemáticos.

PROVA I - SITUAÇÃO 02
O que é a semelhança entre triângulos?

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova I - Situação 02): A semelhança entre triângulos é a correspondência entre os vértices dos triângulos em que os ângulos correspondentes sejam congruentes (que têm mesma medida), e os lados correspondentes sejam respectivamente proporcionais.

Essa situação obteve 21 respostas corretas enquadradas na categoria de 5 pontos (RCLM), os elementos principais foi explicitar a congruência entre os ângulos correspondentes e a proporcionalidade entre os lados correspondentes, conforme as soluções apresentadas por respondentes das 4 turmas.

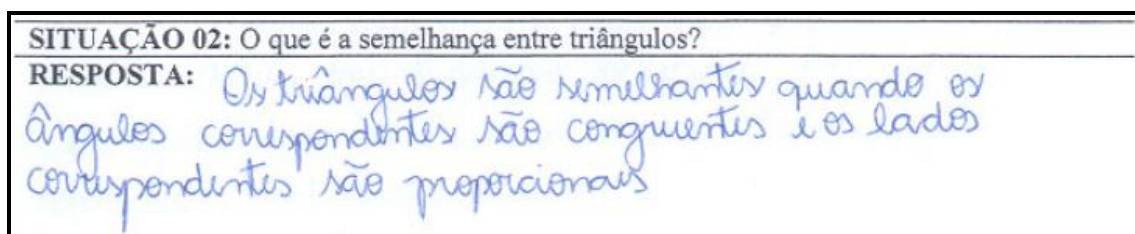


Figura 30: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-C33 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

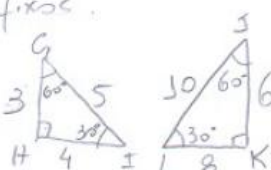
Foram locadas na categoria RCLI (4 pontos) 11 respostas de participantes que apresentaram de maneira correta o entendimento da semelhança entre triângulos, porém utilizaram de termos como por exemplo garantir a igualdade entre os ângulos.

SITUAÇÃO 02: O que é a semelhança entre triângulos?

RESPOSTA:

Dois os $\triangle GHI$ e $\triangle SKL$ são ditos triângulos semelhantes quando os ângulos internos e correspondentes são iguais, ou seja seus lados são proporcionais porém os ângulos correspondentes são fixos.

Ex...



$\frac{SK}{GH} = \frac{KL}{HI} = \frac{SL}{GI} = 2$ ou seja $\triangle GHI \approx \triangle SKL$

Figura 31: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-B13 – Turma B – Categoria: RCLI (4 pontos)

A categoria REPD teve 11 respostas para essa situação. Foram consideradas respostas que particularizou com exemplos ou apresentou propriedades, como afirmar que ao se dividir os lados dos triângulos, obtêm-se uma constante.

SITUAÇÃO 02: O que é a semelhança entre triângulos?

RESPOSTA:

Dois triângulos são semelhantes quando divididos dos lados obtém-se uma constante que também se obtida com a divisão dos outros lados.

ou seja.

Figura 32: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A04 – Turma A – Categoria: REPD (3 pontos)

A categoria RILM (2 pontos) obteve 27 respondentes. Foram consideradas respostas erradas que fazem referência a elementos matemáticos, como por exemplo: relação lado e base, equivalência, lados iguais, entre outros.

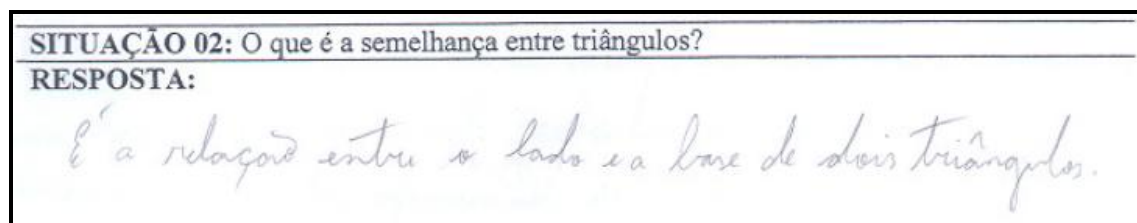


Figura 33: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A02 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE não teve nenhuma resposta para a situação 02 da primeira prova. A categoria BNS teve 01 participante apenas o PAR-B03 que declarou “não sei” para essa situação.

PROVA I - SITUAÇÃO 03
O que é o teorema de Pitágoras? Enuncie-o.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova I - Situação 03): O teorema de Pitágoras é uma relação métrica entre os lados do triângulo retângulo, na qual, enuncia-se: o quadrado do comprimento do segmento de reta da hipotenusa (hip) é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos segmentos de reta dos catetos (cat1 e cat2).
 Notação $(hip)^2 = (cat1)^2 + (cat2)^2$.

A categoria RCLM (5 pontos) contou com 17 respostas para essa situação. Aqui buscou verificar, prioritariamente, se os respondentes entendem o teorema de Pitágoras como uma relação métrica e sabem enunciá-lo.

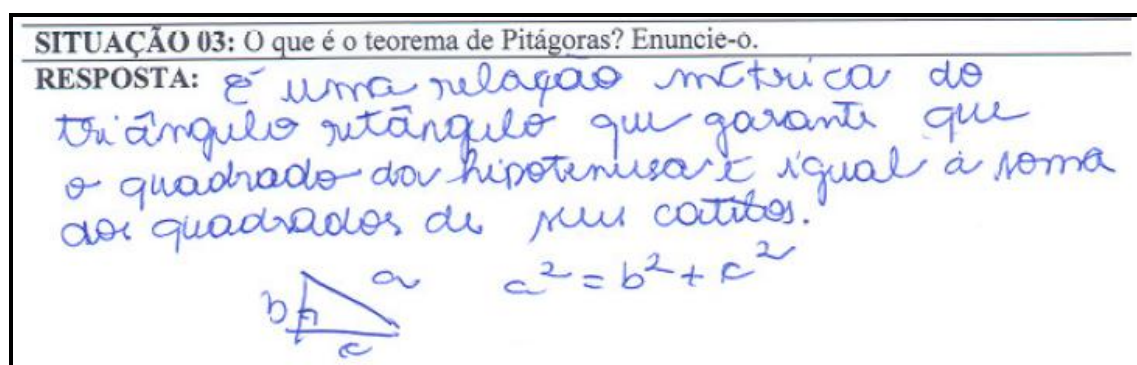


Figura 34: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-C36 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

A categoria RCLI (4 pontos) teve 42 respondentes, foram locadas as respostas que enunciaram corretamente o teorema de Pitágoras, mas não explicitaram a questão da relação métrica.

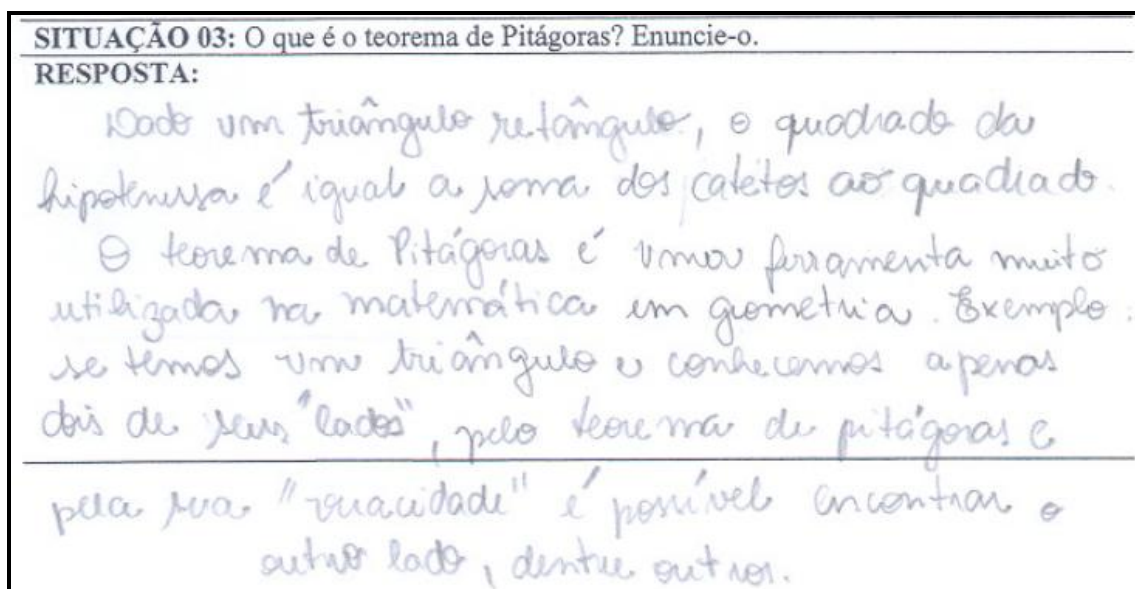


Figura 35: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: RCLI (4 pontos)

A categoria REPD (3 pontos) obteve 09 respondentes. Foram consideradas as respostas que apenas exibiram a fórmula.

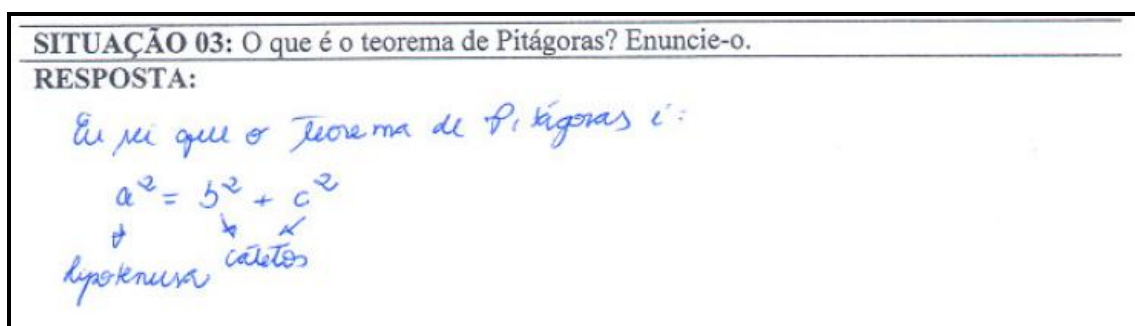


Figura 36: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-A37 – Turma A – Categoria: REPD (3 pontos)

Apenas 01 participante foi locado na categoria RILM, pois respondeu enunciando uma propriedade referente ao ângulo do reto de um triângulo retângulo.

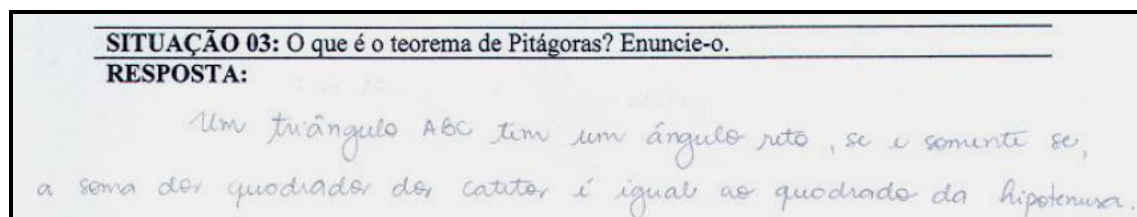


Figura 37: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B14 – Turma B – Categoria: RILM (2 pontos)

Apenas um participante na categoria TRE que esboçou uma relação com a circunferência que não foi concluída.

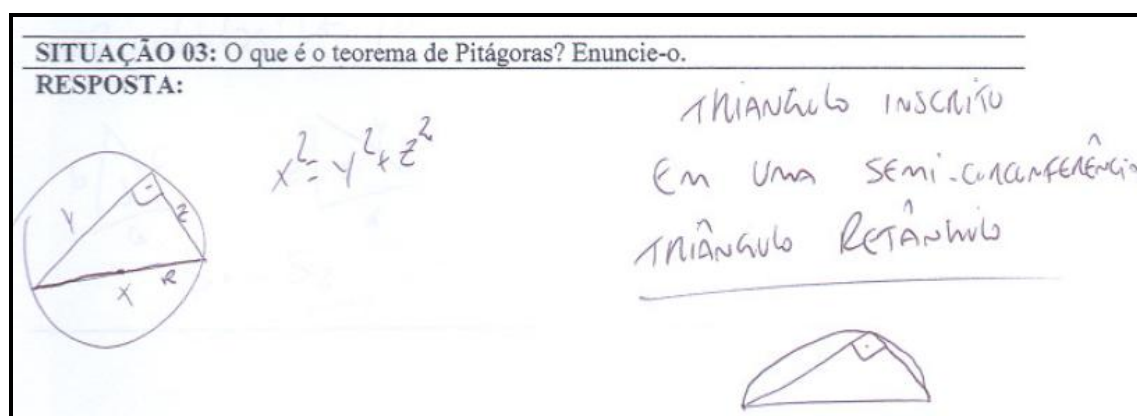


Figura 38: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-C25 – Turma C – Categoria: TRE (1 pontos)

Para essa situação apenas 01 participante declarou que não sabe, sendo locado na categoria BNS (0 ponto).

PROVA I - SITUAÇÃO 04
Apresente uma demonstração do teorema de Pitágoras.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova I - Situação 04):

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. Trace a altura AD do vértice A ao lado BC.

Temos:

$\hat{BAC} \Rightarrow \text{reto (dado)}$

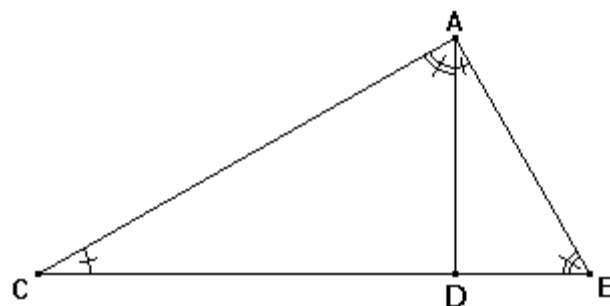
$\hat{BDA} \equiv \hat{ADC} \Rightarrow \text{reto (por construção)}$

$\hat{ACB} \equiv \hat{ACD}$ (ângulo comum) (I)

Como $\hat{BAC}$ é reto $\Rightarrow \hat{ACB} + \hat{CBA} = 90^\circ$ (II)

Como $\hat{ADC}$ é reto $\Rightarrow \hat{DAC} + \hat{ACD} = 90^\circ$ (III)

De (I), (II) e (III)



$$\widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{CBA} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{DAC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} \equiv \widehat{ADC} \\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{ACD} \\ \widehat{CBA} \equiv \widehat{DBA} \end{array} \right\} \therefore \triangle BAC \cong \triangle ADC$$

Se $\triangle BAC \cong \triangle ADC$ então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{DC} = \overline{AC} \cdot \overline{AC} \Rightarrow (\overline{AC})^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DC}$$

Analogamente. Temos

$$\widehat{ABD} \equiv \widehat{ABC} \text{ (ângulo comum) (IV)}$$

$$\text{Como } \widehat{BDA} \text{ é reto} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{ABD} = 90^\circ \text{ (V)}$$

De (II), (IV) e (V)

$$\widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \widehat{BAD} + \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BAD}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} \equiv \widehat{ADB} \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABD} \\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{BAD} \end{array} \right\} \therefore \triangle BAC \cong \triangle BDA$$

Se $\triangle BAC \cong \triangle BDA$ então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{BA} \Rightarrow (\overline{AB})^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\overline{AC})^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DC} \\ (\overline{AB})^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD} \end{array} \right\} \Rightarrow (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = (\overline{BC} \cdot \overline{BD}) + (\overline{BC} \cdot \overline{DC}) \Rightarrow (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = \overline{BC} \cdot (\overline{BD} + \overline{DC})$$

$$\Rightarrow (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BC} \Rightarrow (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = (\overline{BC})^2 \text{ cqd}$$

A categoria RCLM (5 pontos) obteve 14 respostas dos participantes das turmas A, B e C. Como podemos verificar abaixo, os respondentes utilizaram diferentes recursos matemáticos para demonstração com embasamento axiomático, trigonométrico e geométrico.

SITUAÇÃO 04: Apresente uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

RESPOSTA:

Pode ser expressa pela relação da área do quadrado maior ser igual a área do quadrado menor mais a área dos 04 triângulos retângulos.

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

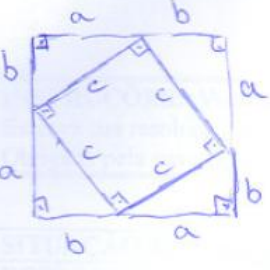
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$


Figura 39: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-C30 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

A categoria RCLI não teve nenhum respondente para a situação 04 da prova I. A categoria REPD contou com 16 respostas. Nessa categoria foram consideradas respostas que particularizou com exemplos, como a utilização do triângulo (3,4,5).

SITUAÇÃO 04: Apresente uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

RESPOSTA:

Geometricamente:

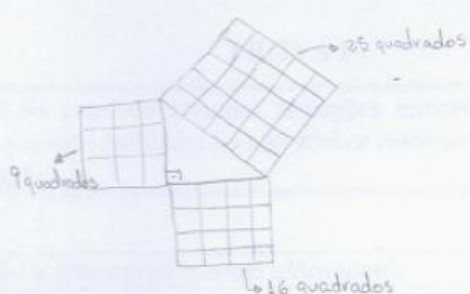


Figura 40: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-C20 – Turma C – Categoria: REPD (3 pontos)

A categoria RILM (2 pontos) teve 03 participantes. Turmas A, B e D. Foram locadas as respostas que apresentaram respostas com elementos matemáticos que não eram demonstrações do teorema de Pitágoras.

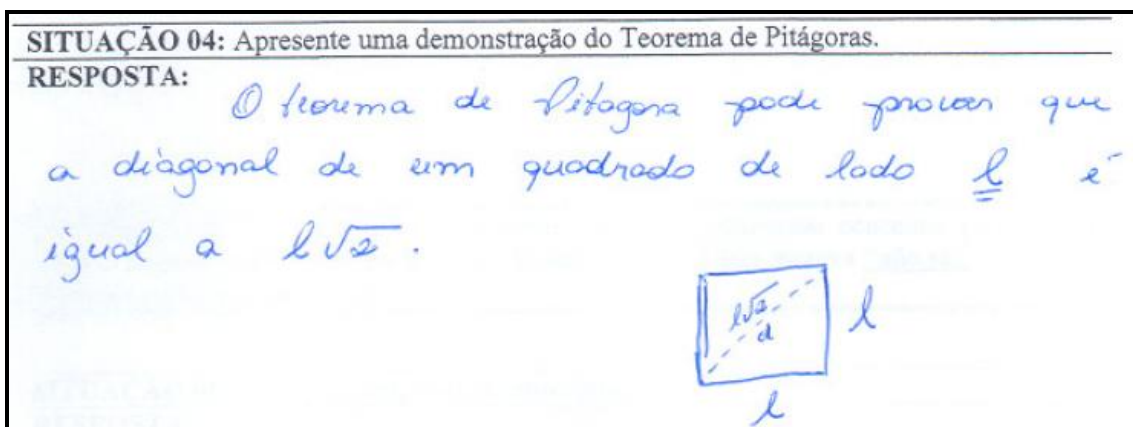


Figura 41: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-A19 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE (1 ponto) teve 11 participantes. Em geral, foram respondentes que deixaram registrado a tentativa de responder e escreveram que não sabiam.

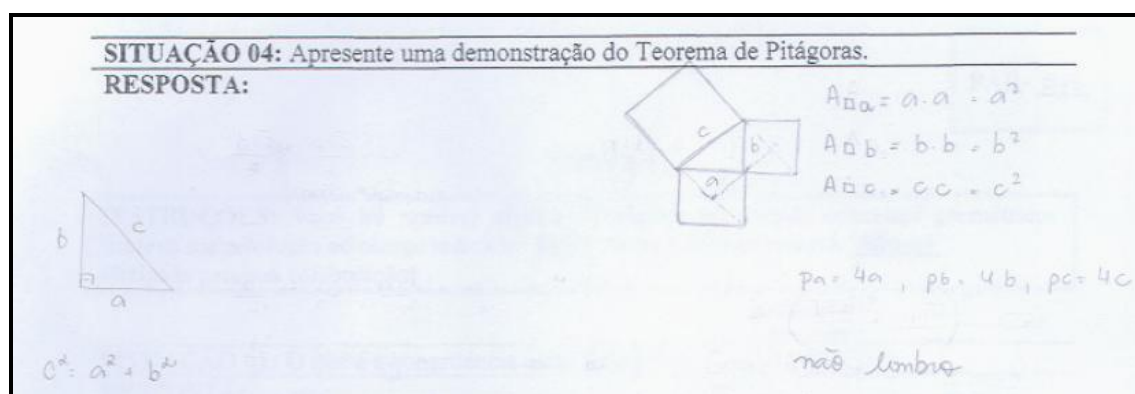


Figura 42: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-B14 – Turma B – Categoria: TRE (1 pontos)

No total tivemos 27 em branco ou declarado que não sabe para a situação 04 da primeira prova.

PROVA I - SITUAÇÃO 05

Explique um procedimento para estimar a área da figura.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova I - Situação 05):

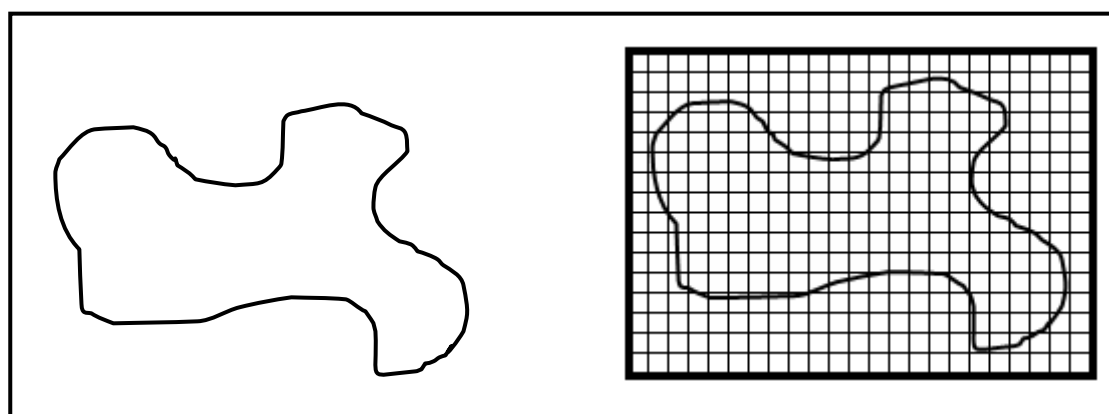


Figura 43: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA I - SITUAÇÃO 05)

Desenhar sobre a figura uma malha quadriculada. Utilizar a medida do lado do quadrado adequada (a menor possível) de maneira que os quadrados fiquem acomodados no interior da figura e sobre poucos espaços das partes irregulares. Computar os número de quadrados inteiros e multiplicar pela área da unidade do quadrado. Dessa forma obterá a área estimada da figura. É importante ressaltar que quanto menor for o lado do quadrado melhor é a estimativa da área da figura.

Para essa situação tivemos um total de 44 respondentes na categoria RCLM (5 pontos). Foram verificados diferentes procedimentos de resolução tais como podemos verificar a seguir:

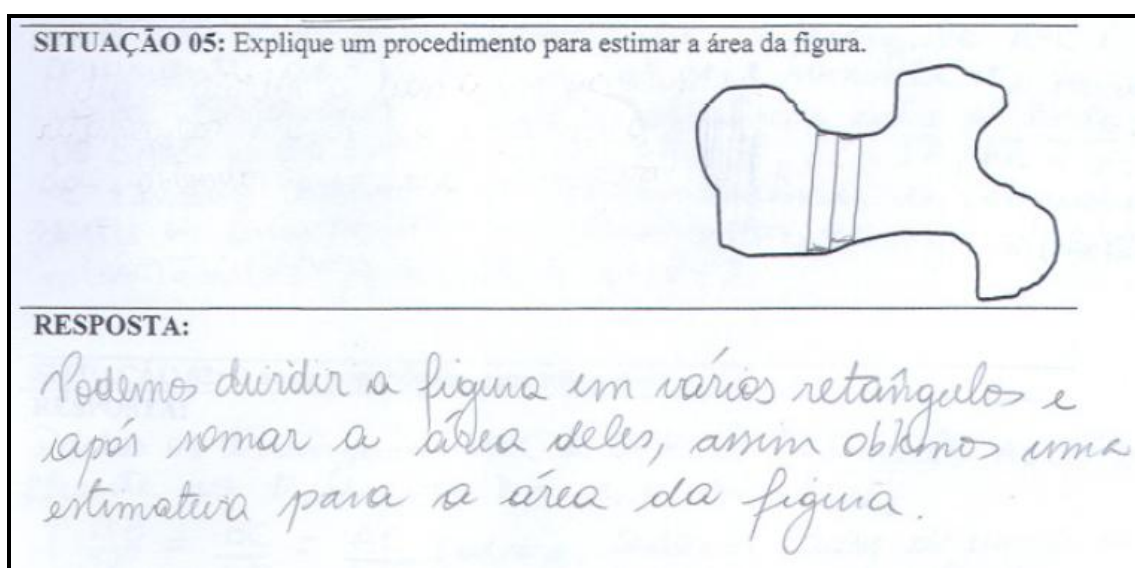


Figura 44: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-C01 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

O único respondente locado na categoria RCLI (4 pontos), descreveu um procedimento que é possível de encontrar a área, mas não deixou claro que seria necessário subtrair da medida da área do triângulo retângulo as outras figuras utilizadas para estimar a área procurada.

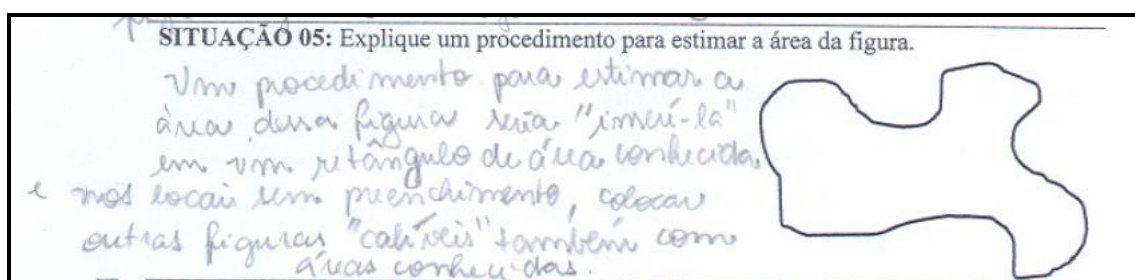
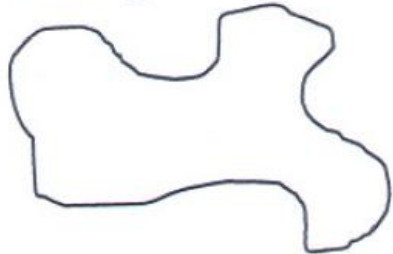


Figura 45: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: RCLI (4 pontos)

Dois respondentes da turma A foram locados na categoria REPD (3 pontos) a seguir a resposta de um deles. No exemplo os procedimentos são apresentados apenas citados, não ficando claro como estimar a área.

SITUAÇÃO 05: Explique um procedimento para estimar a área da figura.



RESPOSTA:

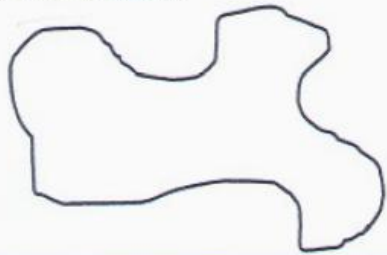
Pode ser por quadraturas, usando limite da função ou funções que mais se aproximam.

Quando a diagonal de todos os quadrados tendem a zero, obtemos a área aproximada.

Figura 46: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A19 – Turma A – Categoria: REPD (3 pontos)

Os 04 respondentes locados na categoria RILM utilizaram de elementos que não possibilitam estimar a área procurada.

SITUAÇÃO 05: Explique um procedimento para estimar a área da figura.



RESPOSTA:

Fazer quadrados e triângulos equiláteros e seus lados congruentes

Figura 47: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-B10 – Turma B – Categoria: RILM (2 pontos)

Tivemos 05 respondentes locados na categoria TER, como no exemplo a seguir em que o respondente afirma não ter elementos para responder a questão.

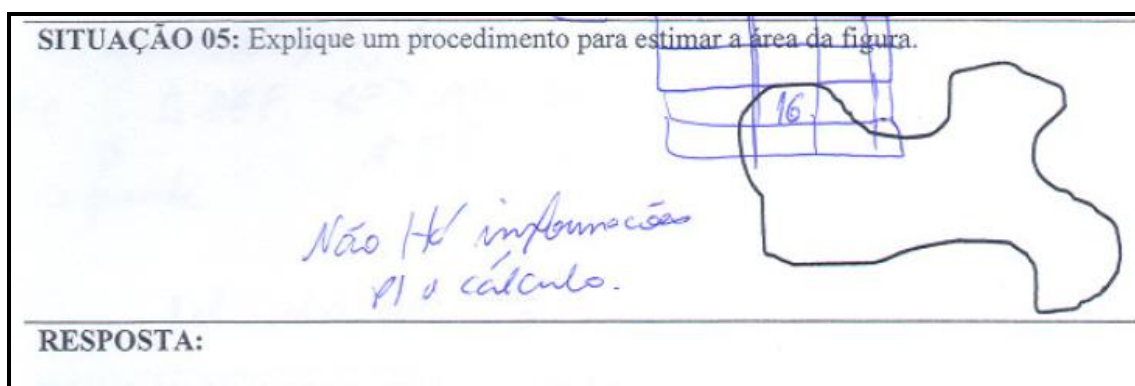


Figura 48: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A29 – Turma A – Categoria: TRE (1 pontos)

Para essa situação a categoria BNS (0 pontos) teve 15 participantes que deixaram em branco ou declararam “não sei”.

PROVA I - SITUAÇÃO 06
O que são triângulos equivalentes?

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova I - Situação 06):

Duas figuras planas são consideradas equivalentes quando possuem a mesma medida de área.

Nessa situação tivemos 38 respondentes na categoria RCLM (5 pontos) consideradas corretas.

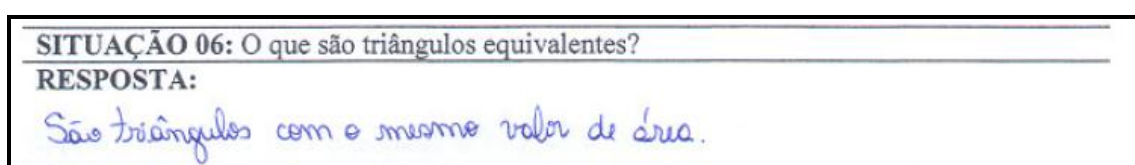


Figura 49: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C24 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

A categoria RCLI (4 pontos) contou com 05 respondentes. Suas respostas apresentam o termo igualdade entre áreas.

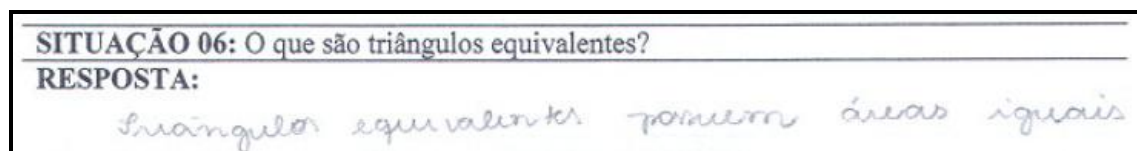


Figura 50: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-B02 – Turma B – Categoria: RCLI (4 pontos)

A categoria REPD (3 pontos) com 1 respondente na turma C apresentou uma resposta de um exemplo particular.

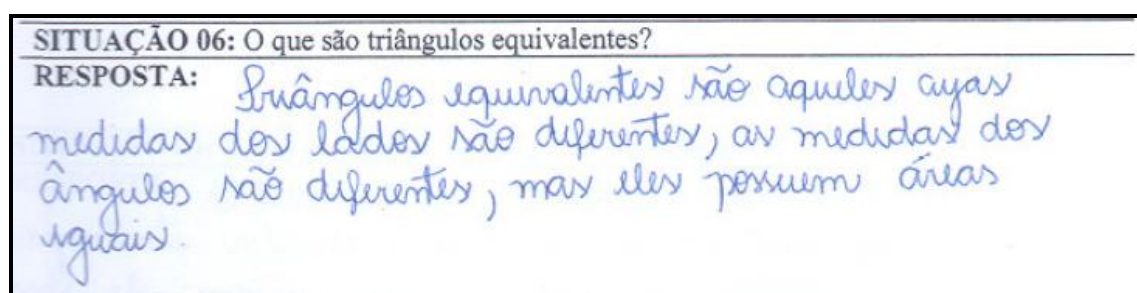


Figura 51: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C33 – Turma C – Categoria: REPD (3 pontos)

A categoria RILM (4 pontos) teve 19 participantes, com respostas erradas que apresentam elementos matemáticos como: proporção, razão, lados, ângulos, entre outros.

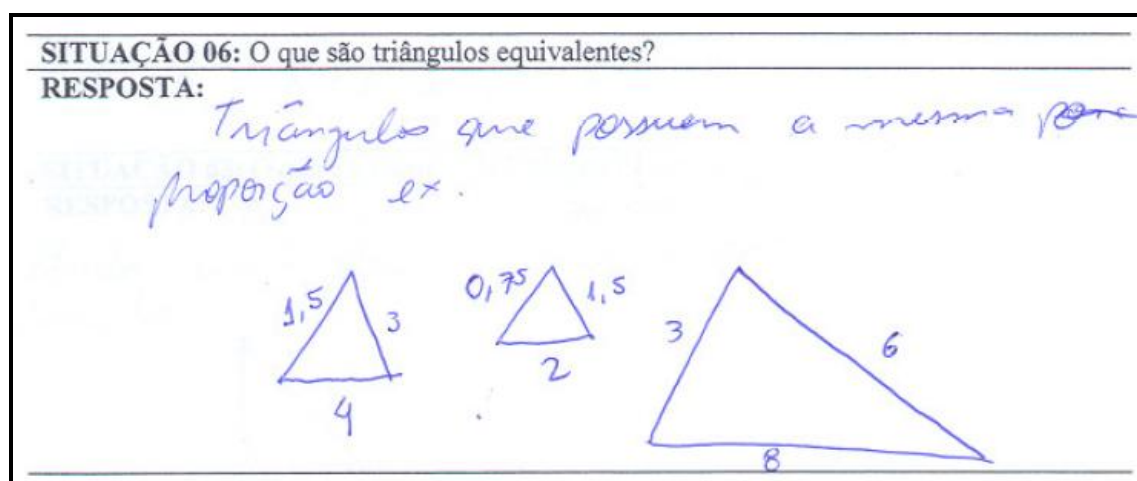


Figura 52: Solução – PROVA I – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-A29 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE não teve nenhum respondente. A categoria BNS (0 ponto) contou com 08 participantes que declaram “não sei” ou deixaram em branco.

5.2.2 Respostas da Prova de conhecimento declarativo e procedimental (demonstrações)

PROVA II - SITUAÇÃO 01

Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P , então $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 01):

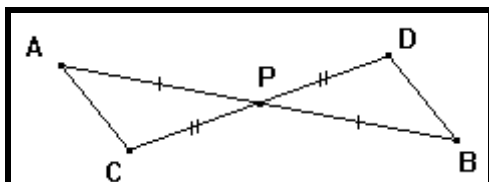


Figura 53: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 01)

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se dividem ao meio em P (dado)

$AP \cong PB$ e $CP \cong PD$ (definição de ponto médio)

$\angle APC \cong \angle BPD$ (ângulos opostos pelo vértice)

$\triangle APC \cong \triangle BPD$ (caso de congruência entre triângulos – LAL)

A categoria de 5 pontos (RCLM) teve um total de 48 respondentes. Sendo que quase na sua totalidade utilizaram os elementos ângulos opostos pelo vértice e o caso LAL de congruência.

SITUAÇÃO 01: Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P , então $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

RESPOSTA:

Se dois segmentos se bisseccionam significa que eles se intersectam nos seus respectivos pontos médios. Então $AP \cong PB$ e $CP \cong PD$. Os ângulos $\angle APC$ e $\angle BPD$ são opostos pelo vértice e portanto tem a mesma medida. Pelo caso LAL, $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

Figura 54: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-C06 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

Não tivemos participantes na categoria RILM. Já a categoria REPD contou com 14 respondentes.

SITUAÇÃO 01: Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P, então $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

RESPOSTA:



Como os dois ângulos são congruentes então os triângulos são semelhantes

Figura 55: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-D02 – Turma D – Categoria: REPD (3 pontos)

A categoria RILM teve 01 respondente da turma C, que aparentemente, não concluiu a demonstração.

SITUAÇÃO 01: Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P, então $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

RESPOSTA:

Hipótese: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ bisseccionam num ponto P
 Para: $\triangle APC \cong \triangle BPD$

Por hipótese $\alpha = \beta$ (alternos internos)

Como a soma dos ângulos internos de um $\triangle = 180^\circ$
 $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - \alpha$ $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ - \beta$
 então $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$

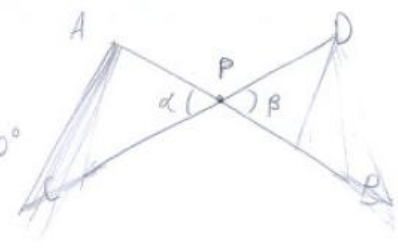
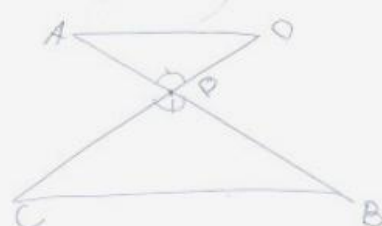


Figura 56: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-C10 – Turma C – Categoria: RILM (2 pontos)

Na categoria TRE 02 respondentes das turmas. Como no exemplo a seguir, fica evidente a tentativa de responder e declarado que não lembra. Tivemos para essa situação 06 respondentes na categoria BNS.

SITUAÇÃO 01: Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P, então $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

RESPOSTA:



$\overline{AB} \cap \overline{CD} = P$

Não me recordo

Figura 57: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-B01 – Turma B – Categoria: TRE (1 pontos)

PROVA II - SITUAÇÃO 02

Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 02):

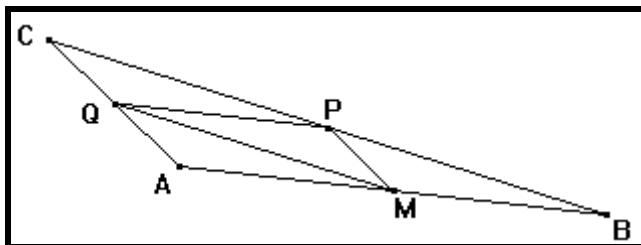


Figura 58: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 02)

Dado $\triangle ABC$

Sejam M , P e Q pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ respectivamente (dado)

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} \text{ (definição de ponto médio)}$$

$$\overline{AQ} = \frac{1}{2} \overline{AC} \text{ (definição de ponto médio)}$$

$$\hat{MAQ} \cong \hat{BAC} \text{ (mesmo ângulo)}$$

$$\triangle AMQ \cong \triangle ABC \text{ (caso de semelhança entre triângulos – LAL)}$$

$$\overline{QM} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

$$\text{De maneira análoga } \overline{QP} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$\hat{AMQ} \cong \hat{ABC} \text{ (ângulos correspondentes)}$$

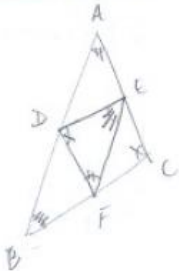
$$\hat{AMQ} \cong \hat{MQP} \text{ (ângulos alternos)}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle PQM \text{ (caso de semelhança entre triângulos – LAL)}$$

Nessa situação tivemos 18 respondentes na categoria RCLM. Os participantes utilizaram diferentes caminhos, retas paralelas e ângulos alternos internos, congruência de ângulos de um paralelogramo, entre outros.

SITUAÇÃO 02: Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo.

RESPOSTA:



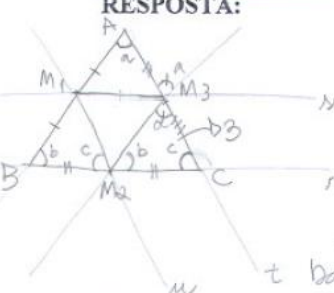
Como D e E são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente temos que $\overline{DE} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{FC}$.
 De modo análogo, $\overline{DF} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{CE}$ e $\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{BD}$.
 Assim, temos que $\triangle BFD$, $\triangle CED$, $\triangle AFD$ são paralelogramos.
 Ou seja, $\widehat{DBF} \cong \widehat{FED}$, $\widehat{ECF} \cong \widehat{FDE}$ e $\widehat{DFE} \cong \widehat{EAD}$.
 Pelo caso AAA temos que $\triangle DFE \sim \triangle CAB$.

Figura 59: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-C05 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

Na categoria RCLI (4 pontos) teve 03 participantes. Apresentam como realizar a demonstração com seqüência coerente, porém com uma estrutura descritiva.

SITUAÇÃO 02: Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo.

RESPOSTA:



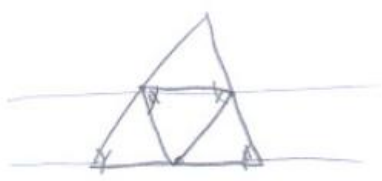
É fácil mostrar que os outros três triângulos formados quando construímos o triângulo central é semelhante ao $\triangle ABC$, por ângulos alternos internos.
 Por ex o $\triangle 3$ tem o mesmo $\widehat{C}$ de $\triangle ABC$ e por alt. int tb tem $\widehat{A}$ logo $\triangle 3 \sim \triangle ABC$, agora basta mostrar que $\triangle M_2M_1M_3 \cong \triangle 3$, que por paralelas fica fácil $\therefore \triangle M_2M_1M_3 \sim \triangle ABC$.

Figura 60: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-C02 – Turma C – Categoria: RCLI (4 pontos)

A categoria REPD (3 pontos) teve 17 respondentes, aqui as demonstrações foram reduzidas e embasadas em figuras.

SITUAÇÃO 02: Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo.

RESPOSTA:



Como dois ângulos são congruentes o terceiro também o é.
 os dois triângulos são semelhantes.

Figura 61: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-D01 – Turma D – Categoria: REPD (3 pontos)

A categoria RILM teve 4 respondentes. Nessa categoria estão as respostas erradas,

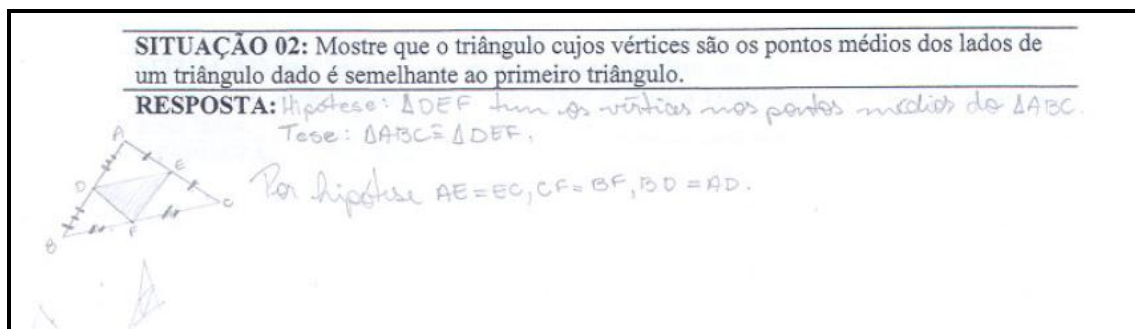


Figura 62: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A21 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE teve 21 respondentes, que em geral, esquematizaram uma figura para resolução e desistiram, e alguns casos acrescentaram que “não lembra” ou “não sabe”. Para essa situação 08 participantes na categoria BNS.

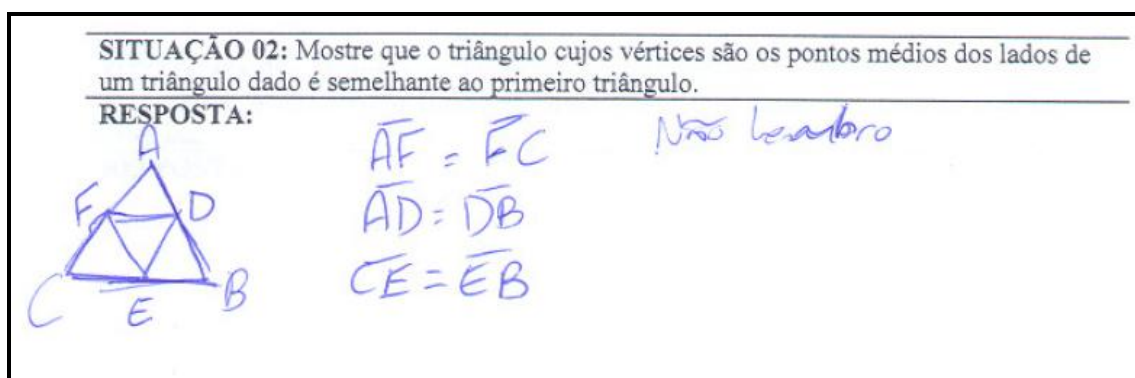


Figura 63: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-B03 – Turma B – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA II - SITUAÇÃO 03

Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 03):

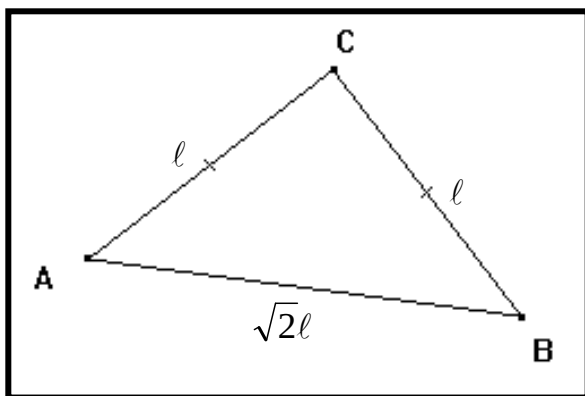


Figura 64: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA II - SITUAÇÃO 03)

$$\overline{AB} = \sqrt{2} \cdot \ell$$

$$(\overline{AB})^2 = (\sqrt{2} \cdot \ell)^2$$

$$(\overline{AB})^2 = 2\ell^2 \text{ (substituindo } \rightarrow \ell = \overline{BC})$$

$$(\overline{AB})^2 = 2\overline{BC}^2$$

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{BC})^2 + (\overline{BC})^2 \text{ (substituindo } \rightarrow \overline{BC} = \overline{CA} = \ell)$$

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{BC})^2 + (\overline{CA})^2$$

Pelo teorema de Pitágoras $\triangle ABC$ é retângulo, logo $\hat{ACB}$ é reto (ângulo oposto a base $\overline{AB} = \sqrt{2} \cdot \ell$).

Na situação 03 da prova II tivemos 30 respondentes na categoria RCLM. Essa questão foi resolvida pelos respondentes utilizando o teorema de Pitágoras, seno e cosseno, e lei dos cossenos, entre outros.

SITUAÇÃO 03: Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

RESPOSTA:

Pela Lei dos Cossenos

$$l^2 = l^2 + (\sqrt{2}l)^2 - 2l\sqrt{2}l \cos d$$

$$2\sqrt{2}l^2 \cos d = 2l^2$$

$$\cos d = \frac{2}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos d = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow d = 45^\circ$$

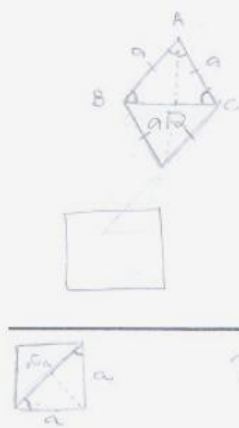
$$d + d + \beta = 180 \Rightarrow 90^\circ + \beta = 180 \Rightarrow \beta = 90^\circ \therefore \hat{C} \text{ é reto}$$

Figura 65: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-C23 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

A categoria RCLI teve 1 respondente da turma B, que descreveu o procedimento com uma sequência coerente.

SITUAÇÃO 03: Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

RESPOSTA:



Seja ABC um triângulo isósceles de lado a e base $a\sqrt{2}$. Traçando a altura perpendicular a base.

Pelo caso L.L.L., temos que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$. Pela definição de $\triangle$ isósceles, sabemos que os ângulos da base são iguais, logo $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Analisando os triângulos e utilizando a propriedade de ângulos alternos internos, vamos verificar a formação de um quadrado com 4 ângulos retos.

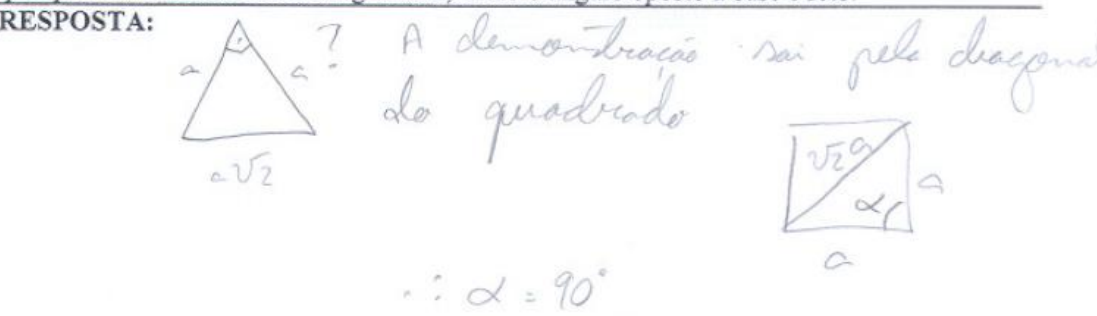
Portanto, o ângulo oposto à base do $\triangle ABC$ é também reto.

Figura 66: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B14 – Turma B – Categoria: RCLI (4 pontos)

Nessa situação tivemos 03 respondentes na categoria REDP. Com 01 respondente da turma B e 02 da turma D. Apresentaram de forma muito sucinta o que deve ser feito para demonstrar.

SITUAÇÃO 03: Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

RESPOSTA:



A demonstração sai pela diagonal do quadrado

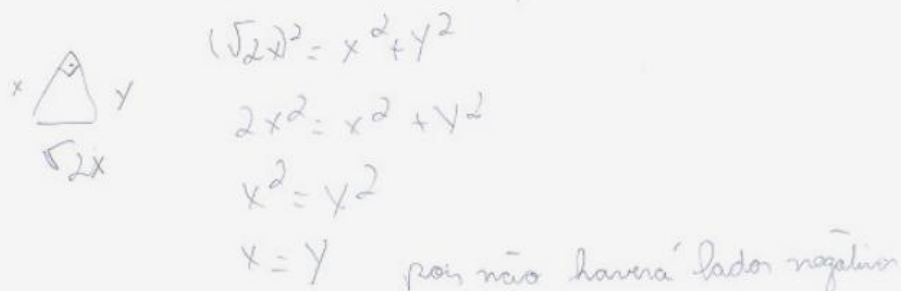
$\therefore \alpha = 90^\circ$

Figura 67: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B06 – Turma B – Categoria: REDP (3 pontos)

A categoria RILM teve 6 respondentes, nas turmas A, B e D. São respostas incorretas, conforme exemplo que segue.

SITUAÇÃO 03: Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

RESPOSTA:



$$(\sqrt{2}x)^2 = x^2 + y^2$$

$$2x^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 = y^2$$

$$x = y$$

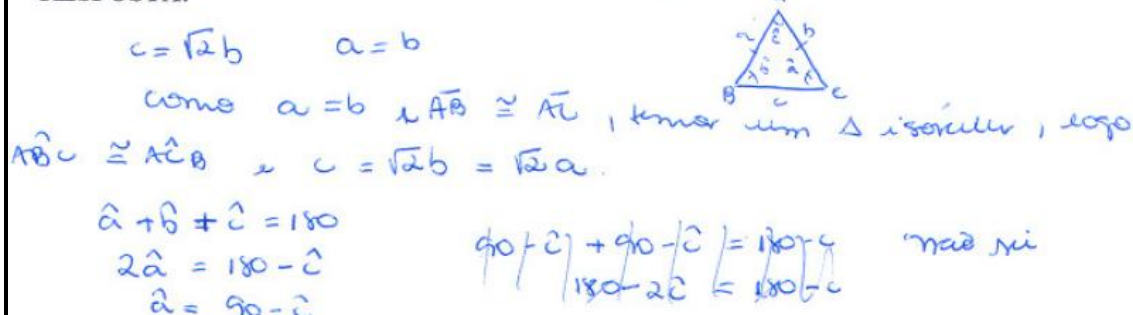
pois não haveria lado negativo

Figura 68: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B08 – Turma B – Categoria: RILM (2 pontos)

Nessa situação a categoria TRE (1 ponto) teve 07 respondentes na categoria TRE, nas turmas A e B, pois procuraram esquematizar uma figura e não conseguiram dar continuidade ou tentaram responder e desistiram. Além disso, 24 participantes foram locados na categoria BNS (0 ponto).

SITUAÇÃO 03: Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

RESPOSTA:



$$c = \sqrt{2}b \quad a = b$$

Como $a = b$, $AB \cong AC$, temos um Δ isósceles, logo $AB \cong AC \Rightarrow \hat{B} \cong \hat{C} \Rightarrow c = \sqrt{2}b = \sqrt{2}a$.

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180$$

$$2\hat{a} = 180 - \hat{c}$$

$$\hat{a} = 90 - \frac{\hat{c}}{2}$$

$$90 - \frac{\hat{c}}{2} + 90 - \frac{\hat{c}}{2} = 180 - \hat{c}$$

$$180 - \hat{c} = 180 - \hat{c}$$

não sei

Figura 69: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-B11 – Turma B – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA II - SITUAÇÃO 04

Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 04):

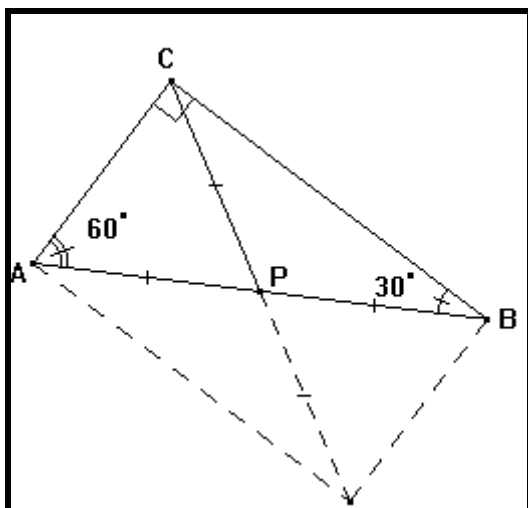


Figura 70: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA II - SITUAÇÃO 04)

Dado $\triangle ABC$ retângulo

$m(\hat{ACB}) = 90^\circ$, $m(\hat{BAC}) = 60^\circ$ e $m(\hat{ABC}) = 30^\circ$ (dado)

Seja P o ponto médio da hipotenusa

$\overline{CP} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ ($\overline{CP}$ é mediana do triângulo retângulo em relação à hipotenusa/ ou pela construção do retângulo – medida da metade da diagonal)

$\overline{CP} = \overline{AP} = \overline{PB}$

$\triangle PAC \cong \triangle PCA$ (triângulo isósceles)

$m(\hat{PAC}) = m(\hat{PCA}) = m(\hat{BAC}) = 60^\circ$

$m(\hat{CPA}) = 60^\circ$ (soma dos ângulos internos de um triângulo igual 180°)

$\triangle APC$ é equiângulo

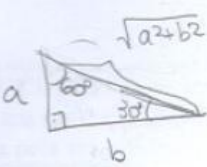
$\triangle APC$ é equilátero

$\overline{AC} = \overline{AP} = \overline{PC} = \frac{1}{2} \overline{AB}$

A situação 04 da prova II teve 33 respondentes na categoria RCLM. Essa questão foi avaliada como fácil caso a demonstração com uso de trigonometria. Todos os respondentes optaram por esse caminho.

SITUAÇÃO 04: Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.

RESPOSTA:



$$\sin 30 = \frac{\text{cat op}}{\text{hip}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2a$$

$$a = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

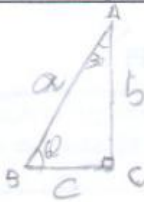
logo a é metade da hipotenusa

Figura 71: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-C19 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

Nessa situação não teve respondente na categoria RCLI. A categoria REDP (3 pontos) contou com 02 respondentes nas turmas B e C.

SITUAÇÃO 04: Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.

RESPOSTA:



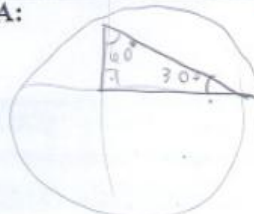
O ΔABC possui ang agudo 30° e 60° , formando o ang reto em BCA então o lado c será metade da hip " a ".

Figura 72: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-B04 – Turma B – Categoria: REDP (3 pontos)

Nessa situação foram locados 07 respondentes na categoria RILM, que apresentaram resultados errados.

SITUAÇÃO 04: Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.

RESPOSTA:



Um que o menor cateto vale $\frac{1}{2}$ da hipotenusa

Figura 73: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-D02 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE teve 16 respondentes, das turmas A, B e C. A grande maioria tentou um procedimento de resolução e não finalizou. Na situação 04 dessa prova 13 respondentes foram locados na categoria BNS.

SITUAÇÃO 04: Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.

RESPOSTA:

$\text{Sen } 60^\circ = \frac{y}{x}$ não sei

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{x}$

$\sqrt{3}x = 2y$

$x = \frac{2y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2y\sqrt{3}}{3}$

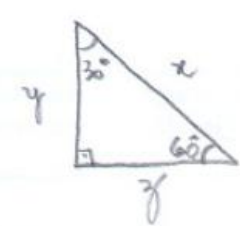


Figura 74: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-A – Turma A11 – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA II - SITUAÇÃO 05

Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 05):

Dado um triângulo de lados $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$

$$\left. \begin{aligned} (p^2 - q^2)^2 &= p^4 - 2p^2q^2 + q^2 \\ (2pq)^2 &= 4p^2q^2 \\ (p^2 + q^2)^2 &= p^4 + 2p^2q^2 + q^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Eleva todos os membros ao} \\ \text{quadrado} \end{array}$$

$$p^4 + 2p^2q^2 + q^2 = p^4 + (4p^2q^2 - 2p^2q^2) + q^2 \quad (\text{teorema de Pitágoras})$$

$$\Rightarrow (p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$$

Na situação 05 dessa prova 18 respondentes ficaram na categoria RCLM. Os procedimentos de resolução utilizados foram bastante similares conforme apresentado nas soluções abaixo.

SITUAÇÃO 05: Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

RESPOSTA:

Se o triângulo é retângulo então este satisfaz o teorema de Pitágoras:

$$(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$$

$$\Rightarrow 4p^2q^2 = 4p^2q^2 \quad \text{Ok!} \quad \therefore \text{ o triângulo é retângulo.}$$

Obs: $p^2 + q^2$ é o maior lado pois para todo $p > q$ temos $p^2 + q^2 > 2pq$ e $p^2 + q^2 > p^2 - q^2$.

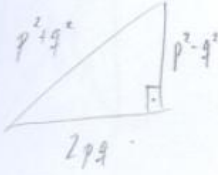


Figura 75: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-C05 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

Nessa situação não teve participantes na categoria RCLI. Na categoria REDP teve 01 respondente, da turma A que particularizou para o triângulo (3,4,5).

SITUAÇÃO 05: Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

RESPOSTA:

A afirmação é verdadeira, pois qualquer valor que eu atribuo para $p \neq q$, respeitando a condição, temos que:

$p = 2$ $q = 1$

$p^2 - q^2 = 2^2 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$ (cateto)

$2pq = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ (cateto)

$p^2 + q^2 = 2^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$ (hipotenusa).

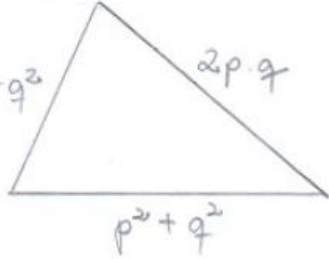


Figura 76: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A09 – Turma A – Categoria: REPD (3 pontos)

A categoria RILM contou com 3 respondentes das turmas A e C, que responderam de maneira incorreta.

SITUAÇÃO 05: Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

RESPOSTA:

$$(2pq)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (p^2 + q^2)^2$$

$$4p^2q^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + p^4 + 2p^2q^2 + q^4$$

$$4p^2q^2 = 2p^4 + 2q^4$$

$$q^2 = \frac{2p^4 + q^4}{4p^2} = q = \sqrt{\frac{2p^4 + q^4}{4p^2}} = q = \frac{\sqrt{2p^4 + q^4}}{2p}$$

Logo, $p > q$.

Figura 77: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-C04 – Turma C – Categoria: RILM (2 pontos)

Nessa situação 13 respondentes na categoria TRE que procuraram responder, mas desistiram declarando “não sei”. Ainda 36 respondentes na categoria BNS, que também declararam “não sei”, porém sem tentar responder ou simplesmente deixaram em branco.

SITUAÇÃO 05: Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

RESPOSTA:

$16 - 9 = 7$
 $p = 4$ e $q = 3$

$p^2 - q^2 = (p+q) \cdot (p-q) = (4+3) \cdot (4-3) = 7$
 $p^2 + q^2 = p \cdot p + q \cdot q = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 16 + 9 = 25$
 $2pq = p \cdot q + p \cdot q = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24$

Seja $p = a+1$ e $q = a$
 $p^2 + q^2 = (a+1)^2 + a^2 = a^2 + 2a + 1 + a^2 = 2a^2 + 2a + 1 = 2(a+1) + 1 = (2p+1)^2$
 $(2p+1)^2 = p^2 + q^2$
 $(2 \cdot (a+1) + 1)^2 = (a+1)^2 + a^2$
 $4(a+1)^2 + 4(a+1) + 1 = (a+1)^2 + a^2$
 $4a^2 + 8a + 4 + 4a + 1 = a^2 + 4a + 2$
 $4a^2 + 12a + 5 = a^2 + 4a + 2$
 $3a^2 + 8a + 3 = 0$

SITUAÇÃO 06: Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.

Figura 78: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-D06 – Turma D – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA II - SITUAÇÃO 06

Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 06):

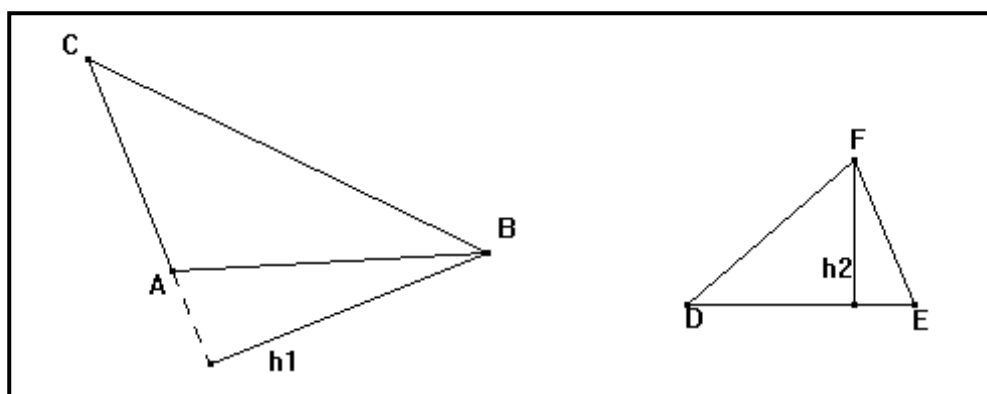


Figura 79: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 06)

Dado $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$

Seja $\overline{AC} = \overline{DE}$ (dado)

$$\text{Área}_{\triangle ABC} = \frac{\overline{AC} \times h_1}{2} \quad (\text{Cálculo de área do } \triangle ABC)$$

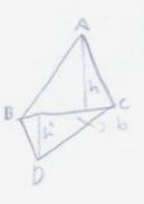
$$\text{Área}_{\triangle DEF} = \frac{\overline{DE} \times h_2}{2} \text{ (Cálculo de área do } \triangle DEF \text{)}$$

$$\frac{\text{Área}_{\triangle ABC}}{\text{Área}_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{\overline{AC} \times h_1}{2}}{\frac{\overline{DE} \times h_2}{2}} = \frac{\overline{AC} \times h_1}{\overline{DE} \times h_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

A situação 06 da segunda prova teve 15 respondentes na categoria RCLM, com diferentes procedimentos para demonstrar essa situação.

SITUAÇÃO 06: Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.

RESPOSTA:



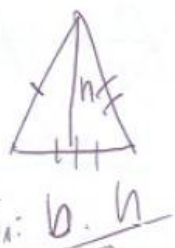
razão entre áreas: $\frac{\frac{BC \cdot h}{2}}{\frac{BC \cdot h'}{2}} = \frac{h}{h'}$

Figura 80: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-B09 – Turma B – Categoria: RCLM (5 pontos)

Essa situação não teve respondentes na categoria RCLI. Foram locados na categoria REDP situação de 02 respondentes da turma C.

SITUAÇÃO 06: Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.

RESPOSTA:



Logo suas bases são congruentes

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h}{H}$

Figura 81: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C25 – Turma C – Categoria: REDP (3 pontos)

Para essa situação 03 respondentes foram locados na categoria RILM, nas turmas A, B e C.

SITUAÇÃO 06: Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.

RESPOSTA: H: $\triangle ABC \cong \triangle MNP$ $\overline{AB} \cong \overline{MN}$

T: $\frac{\text{Área } ABC}{\text{Área } MNP} = \frac{h}{h'}$



$\overline{AB} \cong \overline{MN}$ logo Pelo caso de congruência LAL.

$\overline{AP} \cong \overline{MQ}$

Logo $= \frac{\overline{BP} \cdot \overline{AP}}{\overline{NQ} \cdot \overline{MQ}} \therefore \frac{P}{Q}$

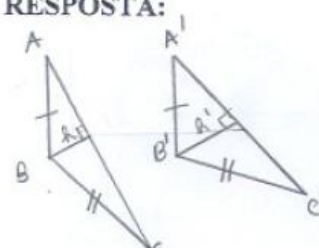
$\triangle APB \therefore \frac{\overline{BP} \cdot \overline{AP}}{2} \cong \triangle MQN \frac{\overline{NQ} \cdot \overline{MQ}}{2}$

Figura 82: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C04 – Turma C – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE apresentou 16 respondentes nas turmas A, B e C, que tentaram responder e abandonaram a resolução. Na situação 06 dessa prova 35 participantes na categoria BNS.

SITUAÇÃO 06: Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.

RESPOSTA:



$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Área = $\overline{AC} \cdot h$

Área = $\overline{A'C'} \cdot h'$

$\therefore \frac{h}{h'}$

Figura 83: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-C19 – Turma C – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA II - SITUAÇÃO 07

Mostre que todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 07):

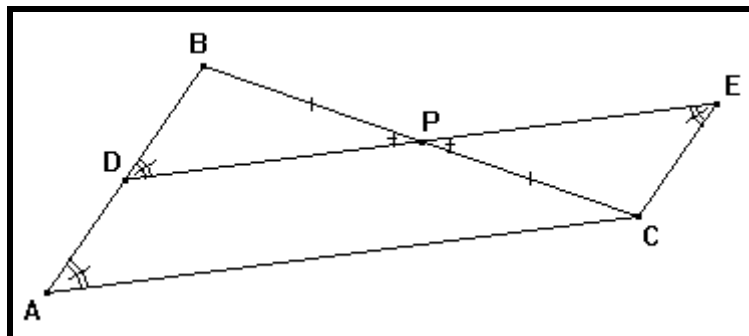


Figura 84: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova II - Situação 07)

Dado $\triangle ABC$

Seja D o ponto médio de $\overline{AB}$

Seja $\overline{DE}$ a semi-reta paralela e congruente a $\overline{AC}$

$\overline{BP} \cong \overline{PC}$ (teorema de Tales)

$\hat{B}PD \cong \hat{C}PE$ (ângulos opostos pelo vértice)

$\hat{C}AB \cong \hat{P}DB$ (ângulos correspondentes)

$\hat{P}DB \cong \hat{P}EC$ (ângulos alternos)

$\triangle PDB \cong \triangle PEC$ (caso de congruência entre triângulos – ALAo)

$\text{Área}_{\triangle PDB} = \text{Área}_{\triangle PEC}$ (equivalência de área)

$\text{Área}_{\triangle ABC} = \text{Área}_{\triangle PDB} + \text{Área}_{\square ADPC}$

$\text{Área}_{\triangle ABC} = \text{Área}_{\text{Paralelogramo ADEC}}$

Essa situação teve 21 respondentes na categoria RCLM. Os respondentes utilizaram diferentes formas para demonstrar como podemos verificar a seguir:

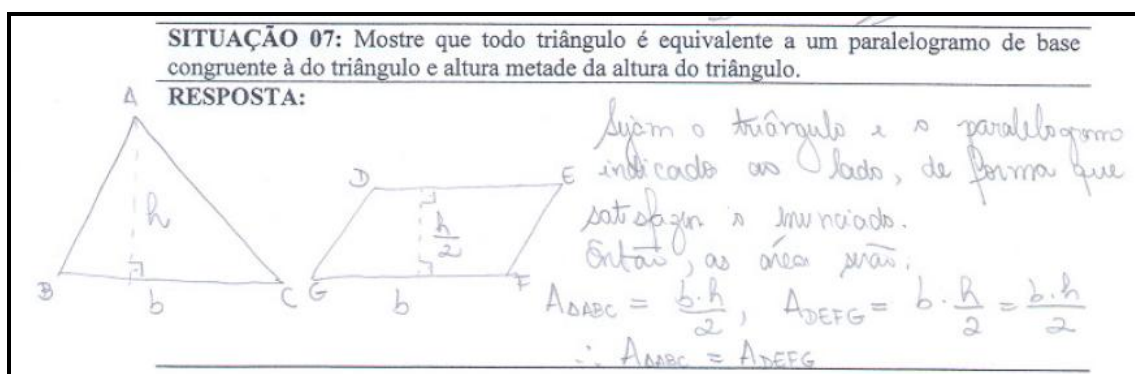


Figura 85: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A12 – Turma A – Categoria: RCLM (5 pontos)

A na categoria RCLI teve apenas 01 respondente da turma A que pela apresenta o cálculo da área, porém não foi colocado formalmente.

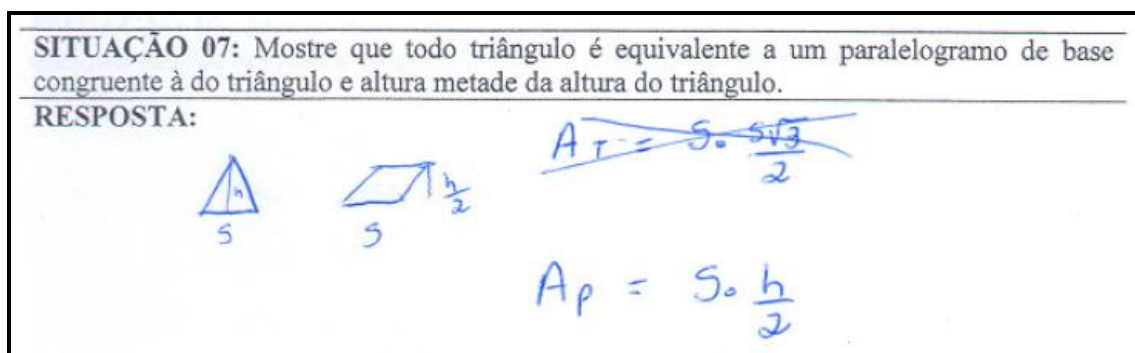


Figura 86: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A19 – Turma A – Categoria: RCLI (4 pontos)

A categoria REDP teve 06 respondentes que resolveram de considerando triângulo e paralelogramo com mesma altura.

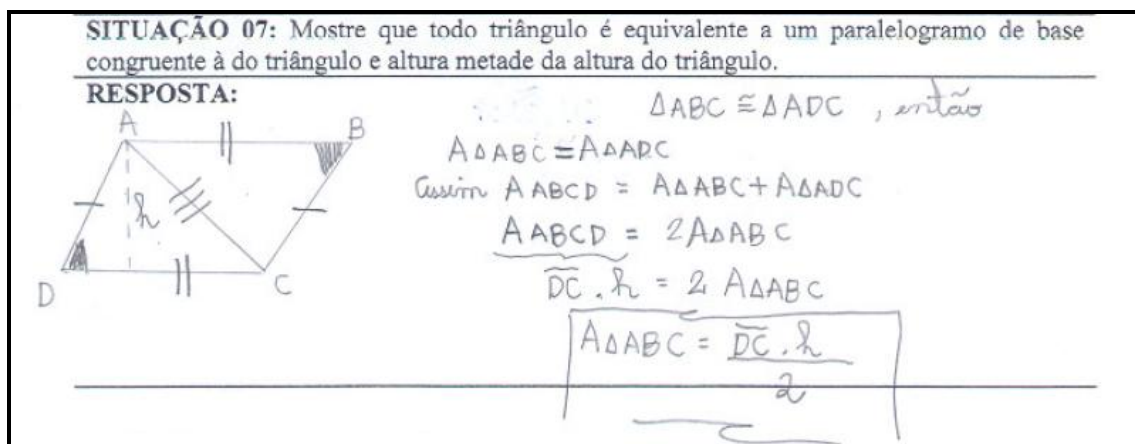


Figura 87: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-C23 – Turma C – Categoria: REDP (3 pontos)

Nessa situação 02 respondentes locados na categoria RILM, que apresentaram solução errada como é verificado a seguir:

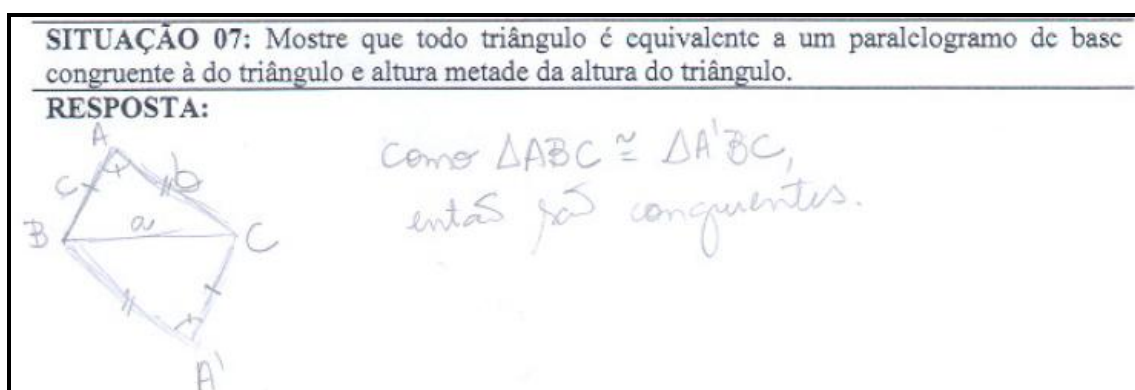


Figura 88: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-D07 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE contou com 11 respondentes que tentaram e não finalizaram a questão. E 30 participantes na categoria BNS (0 ponto).

SITUAÇÃO 07: Mostre que todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo.

RESPOSTA:

não sei

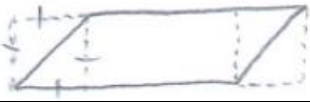
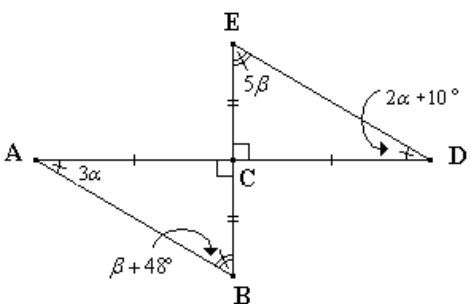


Figura 89: Solução – PROVA II – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A11 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)

5.2.3 Respostas da Prova de conhecimento procedimental

PROVA III - SITUAÇÃO 01

Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. determine o valor de α e β .



Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 01):

$$\text{Dado } \triangle ABC \equiv \triangle DEC \begin{cases} \hat{C}ED \equiv \hat{C}BA \\ \hat{E}CD \equiv \hat{B}CA \\ \hat{E}DC \equiv \hat{B}AC \end{cases}$$

$$m(\hat{C}ED) = m(\hat{C}BA)$$

$$5\beta = \beta + 48^\circ$$

$$4\beta = 48^\circ$$

$$\beta = 12^\circ$$

$$m(\hat{E}DC) = m(\hat{B}AC)$$

$$2\alpha + 10^\circ = 3\alpha$$

$$\alpha = 10^\circ$$

Na situação 01 da terceira 64 respondentes foram locados na categoria RCLM, as respostas todas por procedimentos bastante similares como podemos verificar a seguir:

SITUAÇÃO 01: Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β .

$5\beta = \beta + 48$
 $\beta = 12^\circ$

$2\alpha + 10 = 3\alpha$
 $\alpha = 10^\circ$

Figura 90: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-D01 – Turma D – Categoria: RCLM (5 pontos)

Nessa situação não teve respondentes nas categorias de 4 e 3 pontos, RCLI e REPD respectivamente. A categoria RILM contou com 05 participantes que apresentaram basicamente erros de cálculo.

SITUAÇÃO 01: Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β .

RESPOSTA:

$$\begin{cases} 2\alpha + 10 + 5\beta = 90^\circ \\ 3\alpha + \beta + 48^\circ = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 90 - 48^\circ \\ 2\alpha + 5\beta = 80^\circ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3\alpha + \beta &= 42^\circ \\ 3(38^\circ - \beta) + \beta &= 42^\circ \\ 114^\circ - 3\beta + \beta &= 42^\circ \\ 114^\circ - 2\beta &= 42^\circ \\ 72^\circ &= 2\beta \\ \beta &= 36^\circ \\ \alpha + \beta &= 38^\circ \\ \therefore \alpha &= 2^\circ \end{aligned}$$

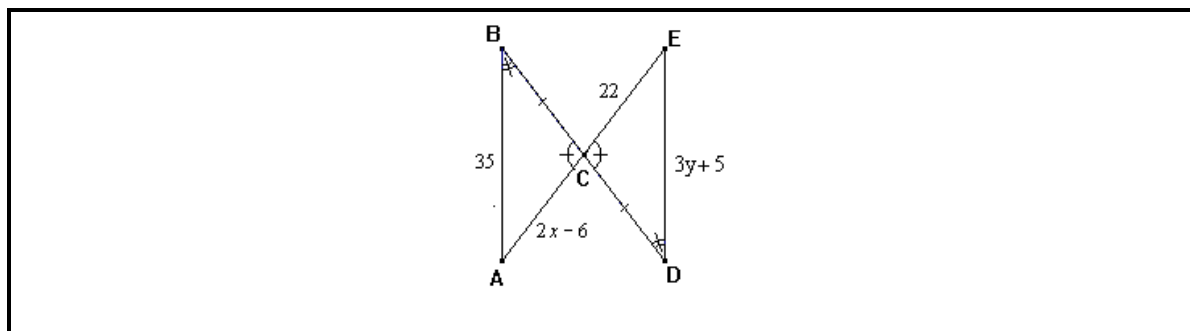
~~$3\alpha + \beta = 42^\circ$
 $3(38^\circ - \beta) + \beta = 42^\circ$
 $114^\circ - 3\beta + \beta = 42^\circ$
 $114^\circ - 2\beta = 42^\circ$
 $72^\circ = 2\beta$
 $\beta = 36^\circ$
 $\alpha + \beta = 38^\circ$
 $\therefore \alpha = 2^\circ$~~

Figura 91: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 01 – Participante PAR-D06 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos)

Não tivemos participantes locados na categoria TRE. E na categoria BNS (0 ponto) 02 respondentes.

PROVA III - SITUAÇÃO 02

Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.



Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 02):

$$\text{Dado } \triangle CBA \equiv \triangle CDE \begin{cases} \overline{ED} \equiv \overline{AB} \\ \overline{CD} \equiv \overline{CB} \\ \overline{EC} \equiv \overline{AC} \end{cases}$$

$$m(\overline{ED}) = m(\overline{AB})$$

$$3y + 5 = 35$$

$$3y = 30$$

$$y = 10$$

$$m(\overline{EC}) = m(\overline{AC})$$

$$22 = 2x - 6$$

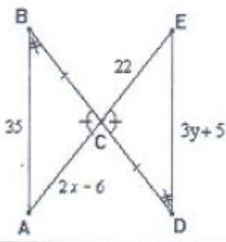
$$2x = 28$$

$$x = 14$$

$$\frac{P(\triangle CBA)}{P(\triangle CDE)} = \frac{m(\overline{AB}) + m(\overline{CB}) + m(\overline{AC})}{m(\overline{ED}) + m(\overline{CD}) + m(\overline{EC})} = 1$$

A situação 02 dessa prova teve 36 respondentes na categoria RCLM. Conforme verificamos a seguir, a grande diferenciação nas respostas diz respeito a parte final, na qual foi solicitado a razão entre os triângulos envolvidos.

SITUAÇÃO 02: Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.



RESPOSTA:

$$3y+5 = 35 \quad 2x-6 = 22$$

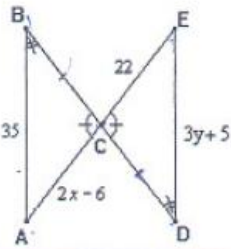
$$y = 10 \quad x = 14$$

Se os triângulos são congruentes a razão é 1

Figura 92: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-D01 – Turma D – Categoria: RCLM (5 pontos)

Essa situação teve 01 respondente na categoria RCLI, da turma A. O PAR-A32 apresentou a razão de todos os lados 1, o que conseqüentemente leva a razão dos perímetros 1, porém não explicitou.

SITUAÇÃO 02: Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.



$35 = 3y+5 \quad 22 = 2x-6$

$y = 10 \quad x = 14$

$\frac{BA}{DE} = \frac{35}{35} = 1$

RESPOSTA:

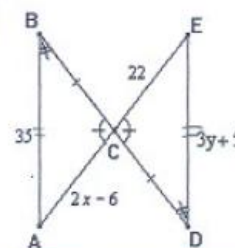
$y = 10 \quad x = 14$

$\frac{BA}{DE} = 1, \frac{EC}{AC} = 1$ e $\frac{BC}{DC} = 1$

Figura 93: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A32 – Turma A – Categoria: RCLI (4 pontos)

Na situação 02 dessa prova não tivemos respondentes na categoria REPD. A categoria RILM teve 31 participantes, que apresentaram erro de cálculos, erro ao explicitar a razão dos perímetros dos triângulos, entre outros.

SITUAÇÃO 02: Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.



RESPOSTA:

$$\begin{aligned} 3y + 5 &= 35 \\ 3y &= 35 - 5 \\ 3y &= 30 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

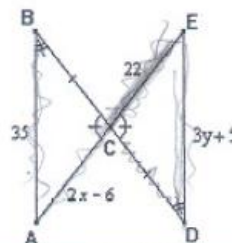
$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 22 \\ 2x &= 22 + 6 \\ 2x &= 28 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

$$\frac{P.CBA}{P.CDE} = \frac{7}{5}$$

Figura 94: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A07 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE teve 01 participante da turma A que tentou resolver e depois declarou “não sei”. A categoria BNS teve apenas 02 participantes para essa situação.

SITUAÇÃO 02: Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.



RESPOSTA:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{22-6}{22} = \frac{35}{3y+5} \quad \frac{22}{3y+5} = \frac{2x-6}{35}$$

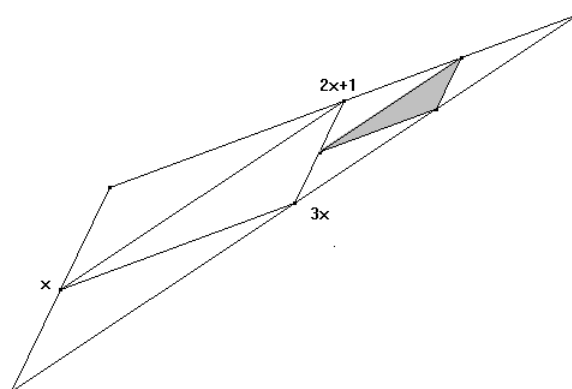
Não Sei

Figura 95: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 02 – Participante PAR-A22 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA III - SITUAÇÃO 03

Na figura os vértices dos triângulos internos são os pontos médios dos lados dos triângulos circunscritos. Determine x , sabendo-se que o perímetro do triângulo

pintado é 7,75 cm.



Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 03):

$$P_{\Delta \text{externo}} = 2.x + 1 + x + 3.x$$

$$P_{\Delta \text{externo}} = 4.P_{\Delta \text{pintado}}$$

$$2.x + 1 + x + 3.x = 4.P_{\Delta \text{pintado}}$$

$$2.x + 1 + x + 3.x = 4.7,75$$

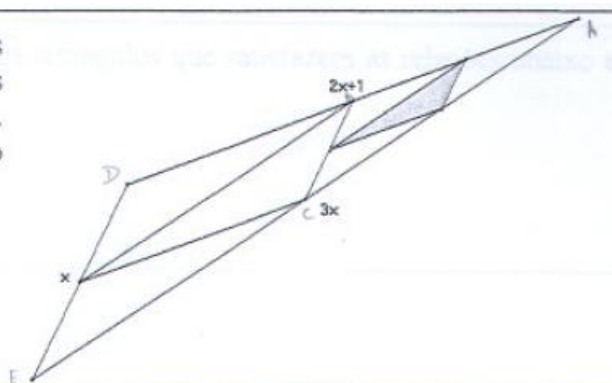
$$6.x + 1 = 31$$

$$6.x = 30$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

Na categoria RCLM teve 22 participantes que calcularam corretamente e utilizaram diferentes procedimentos de resolução.

SITUAÇÃO 03: Na figura os vértices dos triângulos internos são os pontos médios dos lados dos triângulos circunscritos. Determine x , sabendo-se que o perímetro do triângulo pintado é 7,75 cm.



RESPOSTA:

O perímetro do triângulo ABC é $7,75 \times 2 = 15,50 \text{ cm}$.

O perímetro do triângulo ADE é $15,50 \times 2 = 31 \text{ cm}$

$$2x + 1 + x + 3x = 31$$

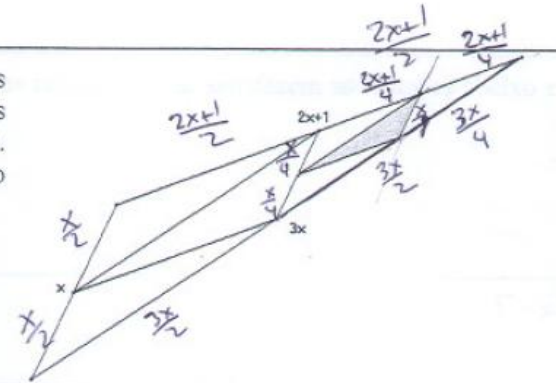
$$6x = 30$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

Figura 96: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-C20 – Turma C – Categoria: RCLM (5 pontos)

As categorias RCLI e REPD não tiveram respondentes nessa situação. A categoria RILM teve 16 participantes que de maneira geral apresentaram erro de cálculo ou organização erraram na organização dos dados.

SITUAÇÃO 03: Na figura os vértices dos triângulos internos são os pontos médios dos lados dos triângulos circunscritos. Determine x , sabendo-se que o perímetro do triângulo pintado é 7,75 cm.



RESPOSTA:

$$\frac{x}{8} + \frac{2x+1}{4} + \frac{3x}{4} = 7,75$$

$$\frac{x + 4x + 2 + 6x}{8} = 7,75$$

$$11x + 2 = 62$$

$$11x = 60$$

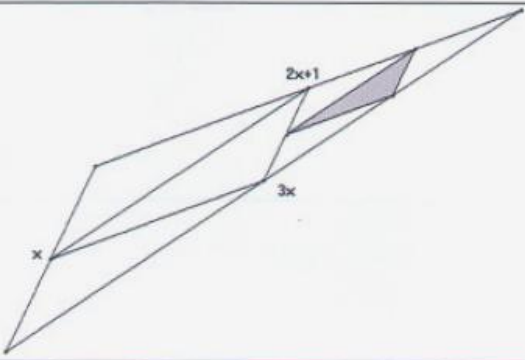
$$x = \frac{60}{11}$$

Handwritten calculations on the right side of the page show a vertical sum: 6, 4, 7,75, x, 9, 6900, with three exclamation marks to the right.

Figura 97: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-D08 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE teve 02 participantes das turmas A e C, que tentaram, mas desistiram de resolver a situação. A categoria BNS teve 31 respondentes nessa situação.

SITUAÇÃO 03: Na figura os vértices dos triângulos internos são os pontos médios dos lados dos triângulos circunscritos. Determine x , sabendo-se que o perímetro do triângulo pintado é 7,75 cm.



RESPOSTA:

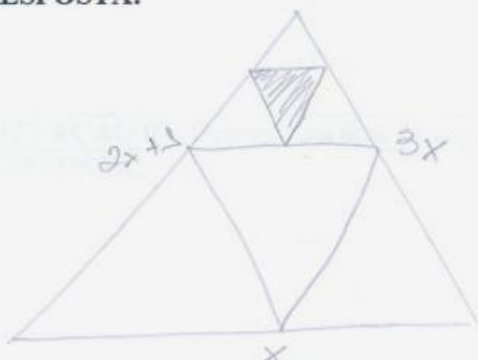


Figura 98: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 03 – Participante PAR-A15 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA III - SITUAÇÃO 04
Dado um quadrado de lado a , calcular a sua diagonal d .

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 04):

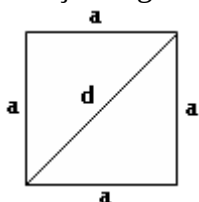


Figura 99: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA III - SITUAÇÃO 04)

Por Pitágoras

$$(hip)^2 = (cat1)^2 + (cat2)^2$$

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2.a^2$$

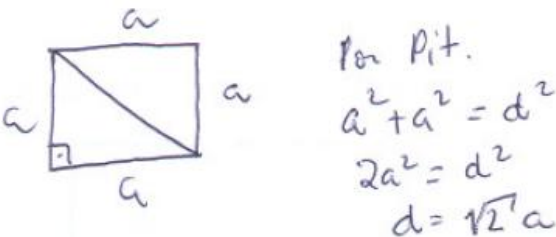
$$d = \sqrt{2.a^2}$$

$$d = a\sqrt{2}$$

A situação 04 da terceira prova teve 63 respondentes na categoria RCLM, sendo que grande parte resolveu por Pitágoras.

SITUAÇÃO 04: Dado um quadrado de lado a , calcular a sua diagonal d .

RESPOSTA:



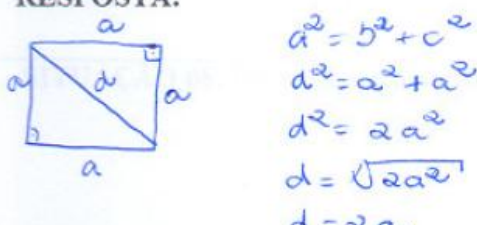
Por Pit.
 $a^2 + a^2 = d^2$
 $2a^2 = d^2$
 $d = \sqrt{2}a$

Figura 100: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-D08 – Turma D – Categoria: RCLM (5 pontos)

As categorias RCLI e REPD não tiveram respondentes nessa situação. A categoria RILM teve 3 participantes, das turmas A e B, que chegaram no resultado final errado.

SITUAÇÃO 04: Dado um quadrado de lado a , calcular a sua diagonal d .

RESPOSTA:



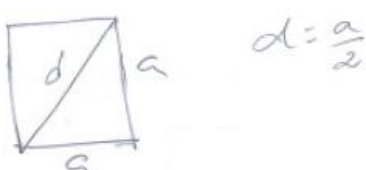
$a^2 = b^2 + c^2$
 $d^2 = a^2 + a^2$
 $d^2 = 2a^2$
 $d = \sqrt{2a^2}$
 $d = 2a$

Figura 101: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-A37 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE teve 02 participantes das turmas A e B que tentaram responder e 03 participantes na categoria BNS.

SITUAÇÃO 04: Dado um quadrado de lado a , calcular a sua diagonal d .

RESPOSTA:

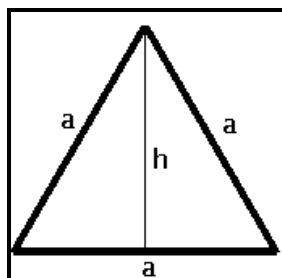


$d = \frac{a}{2}$

Figura 102: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 04 – Participante PAR-B04 – Turma B – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA III - SITUAÇÃO 05**Dado um triângulo eqüilátero de lado a , calcular sua altura h .**

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 05):

**Figura 103: Solução sugerida pela pesquisadora (PROVA III - SITUAÇÃO 05)**

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 = h^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Na situação 05 da prova III tivemos 54 respondentes na categoria RCLM.

Alguns optaram pelo uso de seno e cosseno, outros por Pitágoras.

SITUAÇÃO 05: Dado um triângulo eqüilátero de lado a , calcular sua altura h .

RESPOSTA:

 Um diagrama de um triângulo eqüilátero com seus lados rotulados como 'a'. A altura é rotulada como 'h'. Os dois ângulos da base são rotulados como 60°.

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a}$$

$$h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
Figura 104: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A12 – Turma A – Categoria: RCLM (5 pontos)

As categorias RCLI e REPD não tiveram respondentes nessa situação. A categoria RILM teve 12 participantes que em geral cometeram erro em passagens matemáticas.

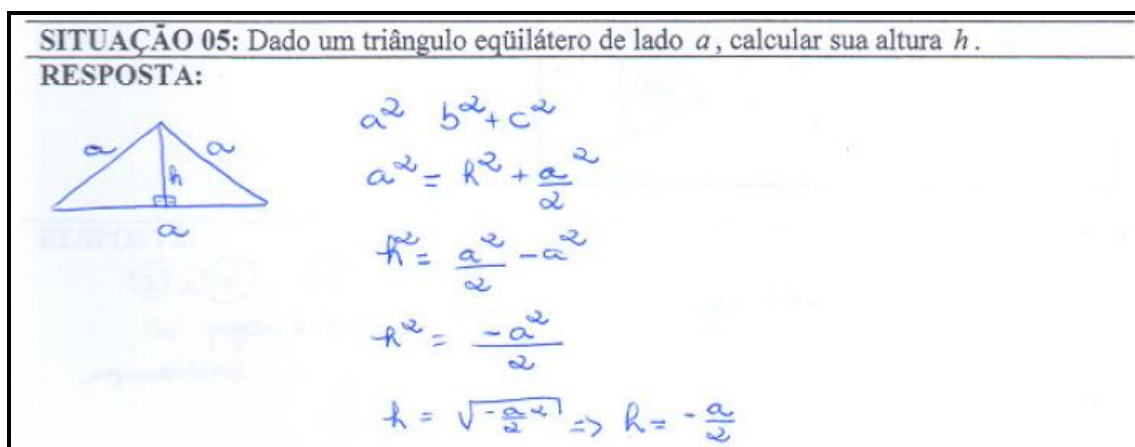


Figura 105: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A37 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE teve 01 participante da turma A que tentou resolver e afirmou “não lembrar”. A categoria BNS teve 04 respondentes nessa situação.

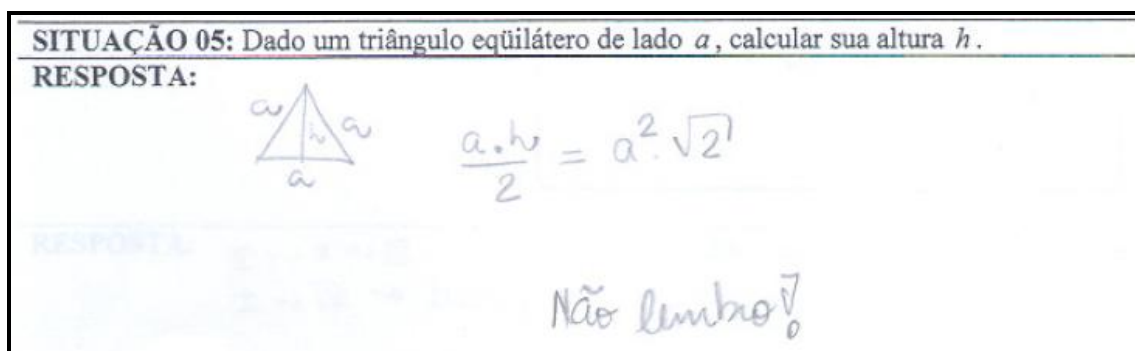


Figura 106: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 05 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA III - SITUAÇÃO 06

Determine dois triângulos retângulos que satisfazem as relações abaixo e sejam semelhantes entre si.

Hipotenusa - $a = x^2 + y^2$

Catetos - $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$.

Tomando x e y inteiros e $x > y$.

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 06):

Considerando $x=2$ e $y=1$

$$a = x^2 + y^2 \Rightarrow a = 2^2 + 1^2 \Rightarrow a = 4 + 1 \Rightarrow a = 5$$

$$b = 2xy \Rightarrow b = 2 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow b = 4$$

$$c = x^2 - y^2 \Rightarrow c = 2^2 - 1^2 \Rightarrow c = 4 - 1 \Rightarrow c = 3$$

Considerando $x=4$ e $y=2$

$$a = x^2 + y^2 \Rightarrow a = 4^2 + 2^2 \Rightarrow a = 16 + 4 \Rightarrow a = 20$$

$$b = 2xy \Rightarrow b = 2 \cdot 4 \cdot 2 \Rightarrow b = 16$$

$$c = x^2 - y^2 \Rightarrow c = 4^2 - 2^2 \Rightarrow c = 16 - 4 \Rightarrow c = 12$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Rightarrow \frac{20}{5} = \frac{16}{4} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\Delta(3,4,5) \cong \Delta(12,16,20)$$

A situação 06 da prova III teve apenas 03 respondentes na categoria RCLM, turmas A e C. Nos exemplos os participantes apresentaram os triângulos (3,4,5) e (12,16,20).

SITUAÇÃO 06: Determine dois triângulos retângulos que satisfazem as relações abaixo e sejam semelhantes entre si.

Hipotenusa - $a = x^2 + y^2$

Catetos - $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$.

Tomando x e y inteiros e $x > y$.

RESPOSTA:

Triângulos retângulos:

1º: $\begin{cases} a_1 = 2^2 + 1^2 = 5 \\ b_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \\ c_1 = 2^2 - 1^2 = 3 \end{cases}$

2º: $\begin{cases} a_2 = 4^2 + 2^2 = 20 \\ b_2 = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16 \\ c_2 = 4^2 - 2^2 = 12 \end{cases}$

Logo: podemos considerar um triângulo retângulo de catetos 3 e 4, e hipotenusa 5; e outro triângulo retângulo de catetos 12 e 16, e hipotenusa 20. Os dois são prop.

SITUAÇÃO 07: Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .

RESPOSTA: $\frac{\sqrt{3}}{4} s^2$

Figura 107: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-A12 – Turma A – Categoria: RCLM (5 pontos)

As categorias RCLI e REPD não tiveram respondentes nessa situação. A categoria RILM teve 21 participantes. Alguns apresentaram erro de cálculo e até mesmo de entendimento, ou apresentaram triângulos com medidas não proporcionais.

SITUAÇÃO 06: Determine dois triângulos retângulos que satisfazem as relações abaixo e sejam semelhantes entre si.

Hipotenusa - $a = x^2 + y^2$

Catetos - $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$.

Tomando x e y inteiros e $x > y$.

RESPOSTA:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & y^2 = 5 - x^2 \\ x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 5 + x^2 = 4 \quad 2x^2 = 9 \quad x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

SITUAÇÃO 07: Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .

RESPOSTA: $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Figura 108: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-D08 – Turma D – Categoria: RILM (2 pontos)

É importante ressaltar que muitos respondentes solucionaram a situação como o participante PAR-D08 que apresentou os triângulos (3,4,5) e (6,8,10) que não satisfaz a situação colocada, como pode ser verificado a seguir:

Considerando $x=2$ e $y=1$

$$a = x^2 + y^2 \Rightarrow a = 2^2 + 1^2 \Rightarrow a = 4 + 1 \Rightarrow a = 5$$

$$b = 2xy \Rightarrow b = 2 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow b = 4$$

$$c = x^2 - y^2 \Rightarrow c = 2^2 - 1^2 \Rightarrow c = 4 - 1 \Rightarrow c = 3$$

Considerando $x=3$ e $y=1$

$$a = x^2 + y^2 \Rightarrow a = 3^2 + 1^2 \Rightarrow a = 9 + 1 \Rightarrow a = 10$$

$$b = 2xy \Rightarrow b = 2 \cdot 3 \cdot 1 \Rightarrow b = 6$$

$$c = x^2 - y^2 \Rightarrow c = 3^2 - 1^2 \Rightarrow c = 9 - 1 \Rightarrow c = 8$$

$$\frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c} \Rightarrow \frac{10}{5} \neq \frac{6}{4} \neq \frac{8}{3}$$

Portanto $\Delta(3,4,5)$ não é semelhante a $\Delta(10,6,8)$.

A categoria TRE teve 11 participantes que tentaram responder e não obtiveram sucesso. Rara essa situação a categoria BNS teve 36 participantes locados.

SITUAÇÃO 06: Determine dois triângulos retângulos que satisfazem as relações abaixo e sejam semelhantes entre si.

Hipotenusa - $a = x^2 + y^2$

Catetos - $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$.

Tomando x e y inteiros e $x > y$.

RESPOSTA:

$$x^2 + y^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2$$

x, y
tg $x > y$

Figura 109: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 06 – Participante PAR-A25 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)

PROVA III - SITUAÇÃO 07

Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .

Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 07):

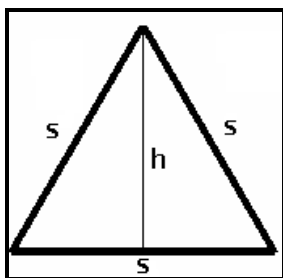


Figura 110: Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 07)

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$s^2 = h^2 + \frac{s^2}{4}$$

$$s^2 - \frac{s^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3}{4}s^2 = h^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}s^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

$$A = \frac{s \cdot h}{2}$$

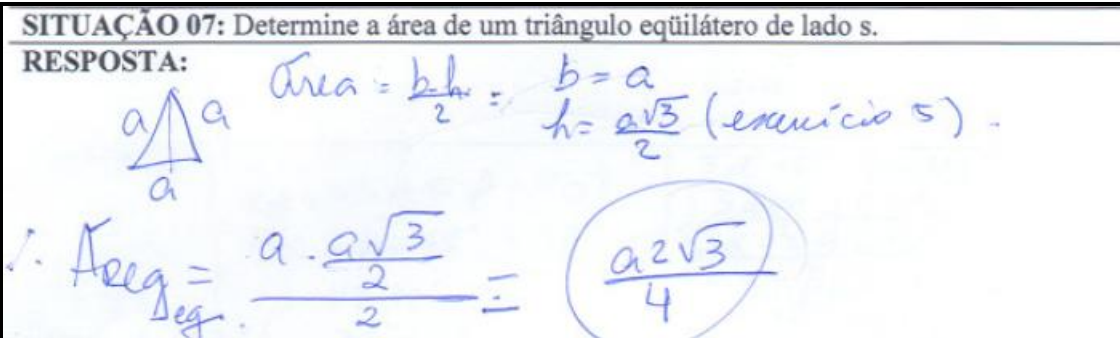
$$A = \frac{s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

A situação 07 da prova teve 50 respondentes na categoria RCLM todos com respostas bastante similares.

SITUAÇÃO 07: Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .

RESPOSTA:



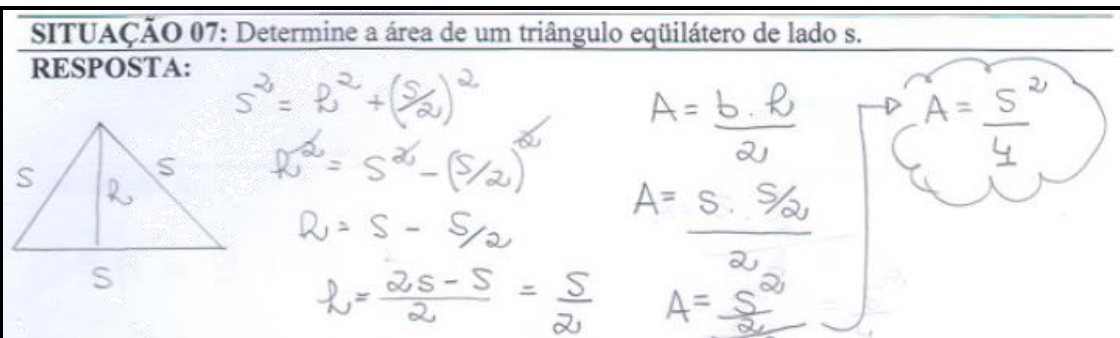
$$A_{eq} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Figura 111: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-D06 – Turma D – Categoria: RCLM (5 pontos)

As categorias RCLI e REPD não tiveram respondentes nessa situação. A categoria RILM teve 12 participantes, que cometeram em sua maioria erros algébricos ou partiram de uma altura calculada errada na situação 05.

SITUAÇÃO 07: Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .

RESPOSTA:



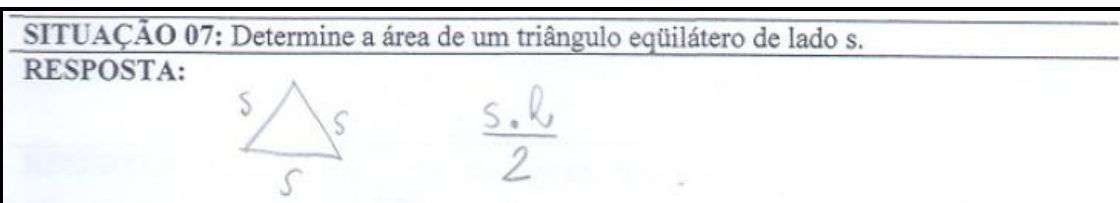
$$A = \frac{s \cdot \frac{s}{2}}{2} = \frac{s^2}{4}$$

Figura 112: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A14 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE teve 01 participante da turma A apenas explicitou a fórmula da área do triângulo, mas não resolveu. A categoria BNS teve 08 respondentes nessa situação.

SITUAÇÃO 07: Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .

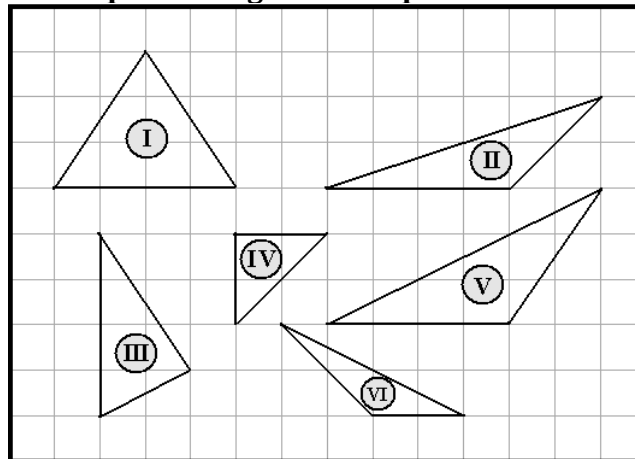
RESPOSTA:



$$\frac{s \cdot h}{2}$$

Figura 113: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 07 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: TRE (1 ponto)

Determine quais triângulos são equivalentes. Justifique.



Solução sugerida pela pesquisadora (Prova III - Situação 08):

Triângulo I - Consideramos o lado com 4 unidades de comprimento a base, logo a altura relativa a esse lado possui 3 unidades de comprimento. Portanto a área do triângulo I é:

$$\text{Área}\Delta I = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Analogamente,

$$\text{Área}\Delta II = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

$$\text{Área}\Delta III = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

$$\text{Área}\Delta IV = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$\text{Área}\Delta V = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$\text{Área}\Delta VI = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$\text{Área}\Delta I = \text{Área}\Delta V \therefore \Delta I \equiv \Delta V$$

$$\text{Área}\Delta II = \text{Área}\Delta III \therefore \Delta II \equiv \Delta III$$

$$\text{Área}\Delta IV = \text{Área}\Delta VI \therefore \Delta IV \equiv \Delta VI$$

A situação 08 da terceira prova teve 24 respondentes na categoria RCLM. Eles informaram os triângulos equivalentes e justificaram a equivalência.

SITUAÇÃO 08: Determine quais triângulos são equivalentes. Justifique.

$\textcircled{I} \quad \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ $\textcircled{V} \quad \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$
 $\textcircled{II} \quad \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ $\textcircled{VI} \quad \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$
 $\textcircled{III} \quad \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$
 $\textcircled{IV} \quad \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

RESPOSTA:
 São equivalentes os Δ s I e V, II e III e IV e VI, pois possuem as mesmas áreas.

Figura 114: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 08 – Participante PAR-B13 – Turma B – Categoria: RCLM (5 pontos)

A categoria RCLI teve 02 respondentes da turma C para essa situação. Em suas respostas foi informada corretamente a equivalência entre as figuras, mas não foi justificado.

SITUAÇÃO 08: Determine quais triângulos são equivalentes. Justifique.

$\textcircled{I} \text{ e } \textcircled{V}$
 $\textcircled{II} \text{ e } \textcircled{III}$
 $\textcircled{IV} \text{ e } \textcircled{VI}$

Figura 115: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 08 – Participante PAR-C35 – Turma C – Categoria: RCLI (4 pontos)

A categoria REPD não teve respondentes nessa situação. A categoria RILM teve 22 participantes que em algumas situações relacionaram as figuras erradas, ou calcularam as áreas erradas, e em outras respostas justificaram de maneira errada.

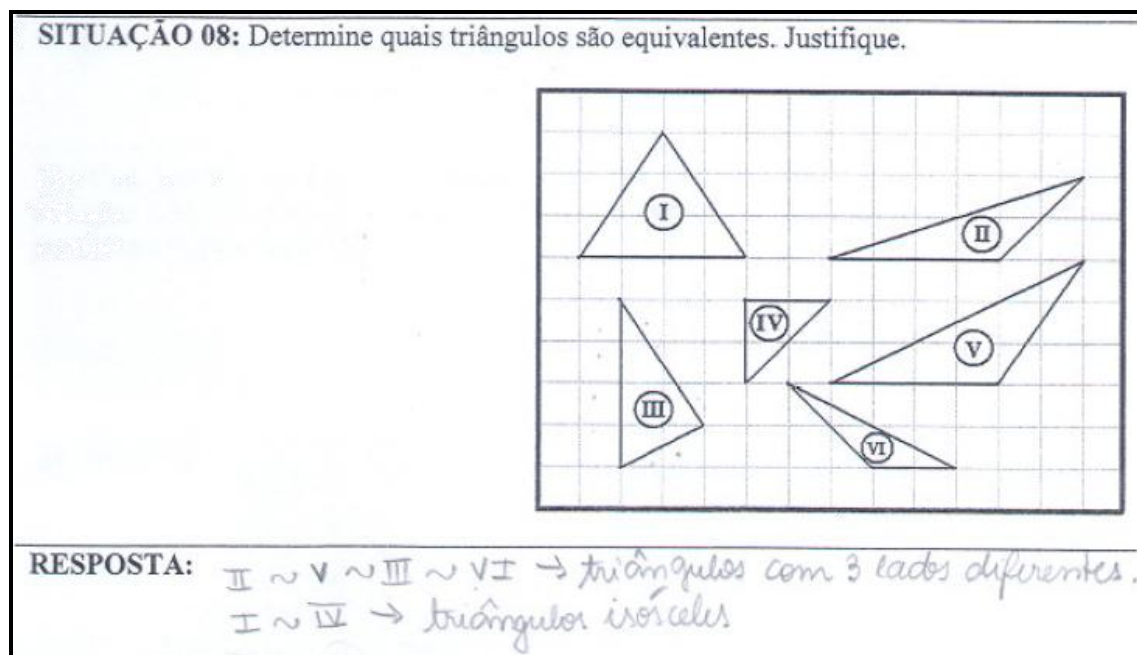


Figura 116: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 08 – Participante PAR-A03 – Turma A – Categoria: RILM (2 pontos)

A categoria TRE teve 09 participantes das turmas A, B e C. Foram respostas de participantes que tentaram resolver e afirmaram que “não sei”, em outros casos pessoas que fizeram relação entre figuras erradas e ainda não justificaram. A categoria BNS teve 14 respondentes nessa situação.

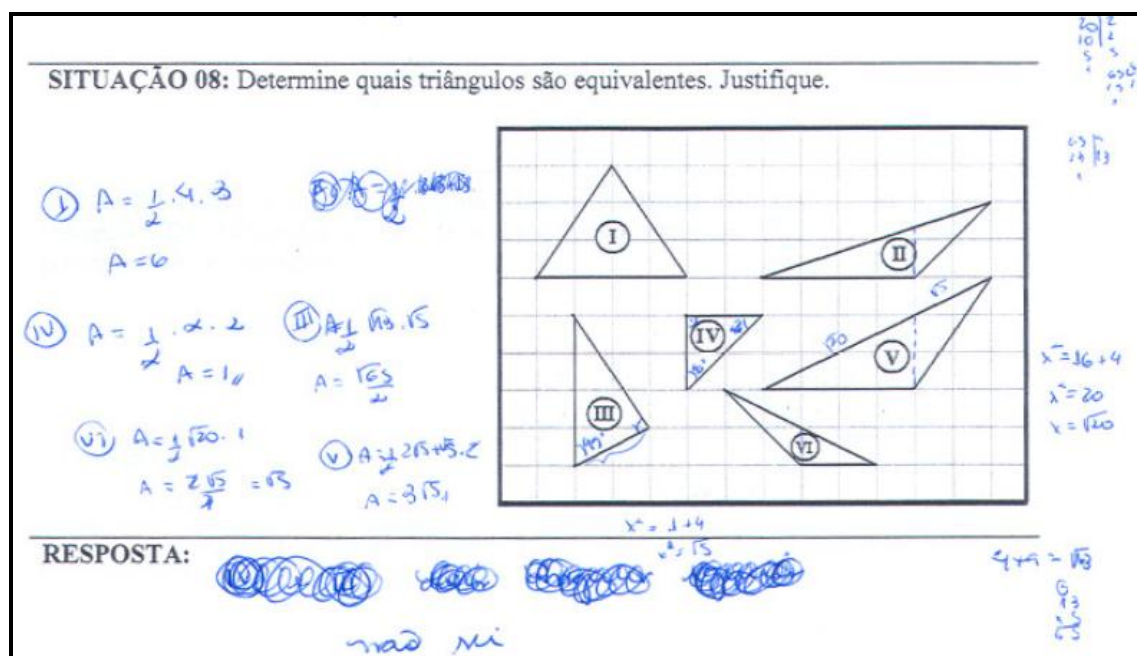


Figura 117: Solução – PROVA III – SITUAÇÃO 08 – Participante PAR-B11 – Turma B – Categoria: TRE (1 ponto)

5.3 ANÁLISE DOS DADOS DAS ESCALAS, TESTES E PROVAS

Para melhor análise dos dados os valores da escala de confiança em resolução de problemas e das provas de conhecimentos geométricos foram padronizados para a escala de 0 a 100, conforme Quadro 14.

Quadro 14: Transformação da pontuação dos instrumentos

INSTRUMENTOS	ITENS	VALORES	TRANSFORMAÇÃO
CP1 – Confiança na Prova 1	6	6-24	$100*(CP1-6)/18$
CP2 – Confiança na Prova 2	7	7-28	$100*(CP1-7)/21$
CP3 – Confiança na Prova 3	8	8-32	$100*(CP1-8)/24$
CP – Confiança (global)*	21	21-84	$100*(CP-21)/63$
P1 – Conhecimento na Prova 1	6	0-30	$100*P1/30$
P2 – Conhecimento na Prova 2	7	0-35	$100*P2/35$
P3 – Conhecimento na Prova 3	8	0-40	$100*P3/40$
P – Conhecimento (global)*	21	0-105	$100*P/105$

*Calculado como a soma das pontuações nas três provas

A Tabela 14 mostra as estatísticas mais relevantes para os três instrumentos e seus componentes.

Tabela 14: Estatísticas nas escalas de atitude, confiança e na prova de conhecimento geométrico

Escalas	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão
Atitude (20-80)	71	33,0	79,0	61,920	10,630
Confiança (0-100)	71	19,0	98,4	68,075	18,285
Confiança P1 (0-100)	71	22,2	100,0	71,127	19,419
Confiança P2 (0-100)	71	0,0	100,0	53,588	25,879
Confiança P3 (0-100)	71	29,2	100,0	78,462	17,691
Conhecimento (0-100)	71	22,9	100,0	60,215	18,768
Conhecimento P1 (0-100)	71	26,7	100,0	66,573	18,231
Conhecimento P2 (0-100)	71	0,0	100,0	48,612	27,821

Conhecimento P3 (0-100)	71	7,5	100,0	65,599	20,777
-------------------------	----	-----	-------	--------	--------

O Gráfico 1 ilustra a distribuição da pontuação na escala de atitudes. Podem ser verificados resultados dos participantes na escala de atitudes em relação à Geometria sendo a média do grupo igual a 61,920 e desvio padrão igual a 10,630. O grupo apresentou atitudes bastante positivas com relação à Geometria acima do ponto médio, que é igual a 50.

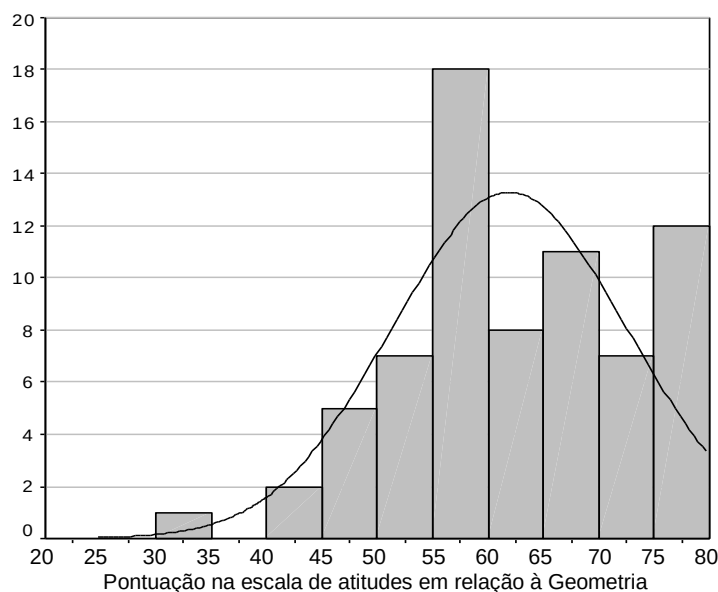


Gráfico 1: Distribuição da pontuação na escala de atitudes em relação à Geometria.

O Gráfico 2 ilustra a distribuição da pontuação na escala de confiança. Podemos verificar que o mesmo acontece para a confiança na resolução de problemas geométricos, conforme Gráfico 2. Os respondentes apresentam pontuação acima do ponto médio que é igual a 50. A pontuação média foi igual a 68,075 e desvio padrão igual a 18,285.

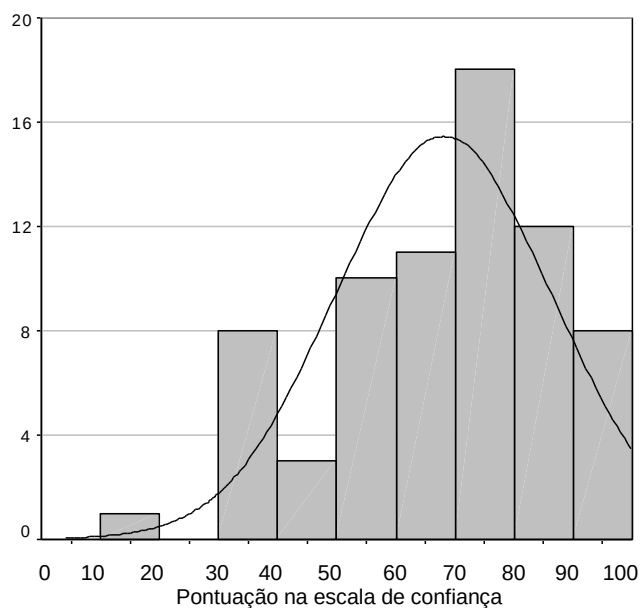


Gráfico 2: Distribuição da pontuação na escala de confiança em relação à Geometria.

O Gráfico 3 ilustra a distribuição da pontuação na prova de conhecimento. Verificamos que o desempenho na prova de conhecimentos não foi tão positivo quanto as atitudes e a confiança, embora tenha sido acima do ponto médio. A pontuação média foi igual a 60,215 e desvio padrão igual a 18,768, como mostra o Gráfico 3.

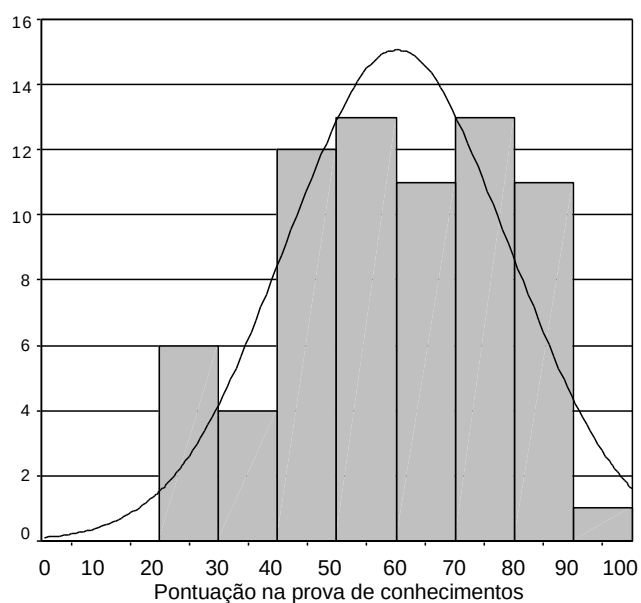


Gráfico 3: Distribuição da pontuação na prova de conhecimentos geométricos.

O Gráfico 4 mostra de forma comparativa a pontuação média nas três provas e na pontuação global do nível de confiança e do conhecimento. Observa-se que o desempenho geral nas provas ficou aquém das expectativas colocadas pelos participantes. Analisando-se cada prova, separadamente, a confiança supera o desempenho nas três provas, sendo que essa diferença é maior na Prova III, ou seja, os participantes se sentem mais confiantes para resolver situações de conhecimentos procedimentais. Verifica-se que a prova I, de conhecimentos declarativos também apresenta média relativamente alta em comparado à prova II de conhecimentos declarativos e procedimentais (demonstrações).

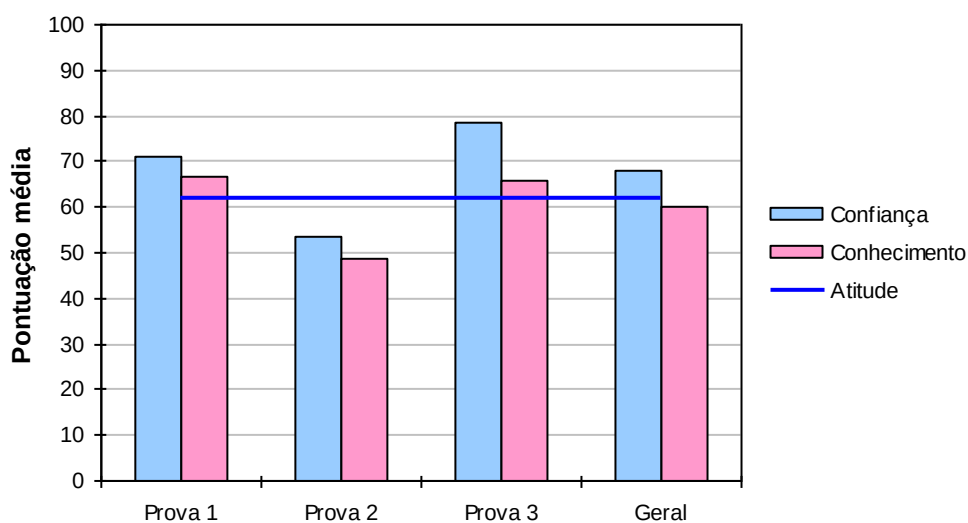


Gráfico 4: Pontuação média na confiança e nas provas de conhecimentos geométricos.

O Gráfico 5, apresenta o diagrama da caixa², que ilustra de forma mais completa o desempenho dos participantes, tanto no nível de confiança, quanto na resolução dos problemas. Observa-se que mais de 50% dos respondentes obtiveram pontos abaixo de 50 na prova II. Em contrapartida, o desempenho na prova I (conhecimento declarativo) e prova III (conhecimento procedimental) foram melhores, sendo que 50% dos respondentes tiveram pontuação igual ou superior a 65 e 70 pontos, respectivamente.

² O diagrama é formado por uma caixa que contém 50% dos dados, abaixo da borda encontram-se 25% e acima da caixa 25%. Valores que se afastam uma vez e meia o comprimento da caixa, são valores que fogem do padrão, conhecidos como “outliers”. O risco dentro da caixa representa a mediana, isto é abaixo desse valor tem-se 50% dos dados.

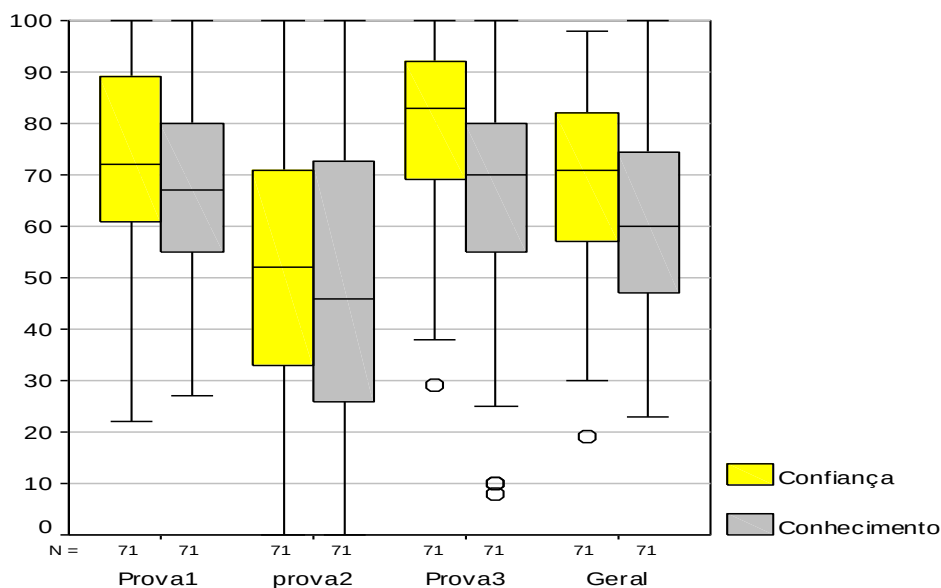


Gráfico 5: Distribuição da pontuação na prova de confiança e de conhecimentos geométricos.

A seguir será analisada a relação entre as variáveis em estudo, para tanto foi utilizado o coeficiente de correlação.

A Tabela 15 mostra a matriz de correlação, na qual se observa que todas as correlações são positivas, isto é, quando uma variável cresce, a outra também cresce, e todas são altamente significativas ($p < 0,01$). Porém, essas correlações não são tão fortes, pois variam de 0,370 até 0,905. Obviamente as correlações entre as pontuações nas provas e a pontuação global são mais fortes, pois as primeiras fazem parte da segunda, indicando qual das três tem maior influência, que neste caso é a prova II.

Desta matriz, algumas correlações têm maior interesse para o presente estudo (células coloridas de azul). Pode-se verificar que a atitude está correlacionada com a confiança ($r(71) = 0,517$; $p = 0,000$) e com o conhecimento ($r(71) = 0,444$; $p = 0,000$) e, a confiança também se correlaciona com o conhecimento ($r(71) = 0,668$; $p = 0,000$).

Tabela 15: Matriz de correlação entre a pontuação nas escalas, testes e provas

	Atitude (20-80)	Confiança (0-100)				Conhecimento (0-100)			
		CP1	CP2	CP3	Global	P1	P2	P3	Global
Atitude	1,000	,370 ,001	,556 ,000	,386 ,001	,517 ,000	,340 ,004	,420 ,000	,338 ,004	,444 ,000
CP1		1,000	,618 ,000	,631 ,000	,828 ,000	,612 ,000	,453 ,000	,360 ,002	,545 ,000
CP2			1,000	,666 ,000	,905 ,000	,563 ,000	,623 ,000	,344 ,003	,609 ,000
CP3				1,000	,874 ,000	,494 ,000	,449 ,000	,535 ,000	,585 ,000
Confiança					1,000	,634 ,000	,597 ,000	,469 ,000	,668 ,000
P1						1,000	,745 ,000	,464 ,000	,841 ,000
P2							1,000	,451 ,000	,891 ,000
P3								1,000	,774 ,000

Por outro lado, também se confirma a correlação entre a confiança e o desempenho em cada uma das três provas (células coloridas em rosa), sendo um pouco mais forte na Prova II e mais fraca na Prova III.

A correlação entre a confiança e o conhecimento em cada prova, coloridos de rosa na matriz, mostra uma correlação um pouco maior na prova II e um pouco menor na prova III, como ilustra o Gráfico 6.

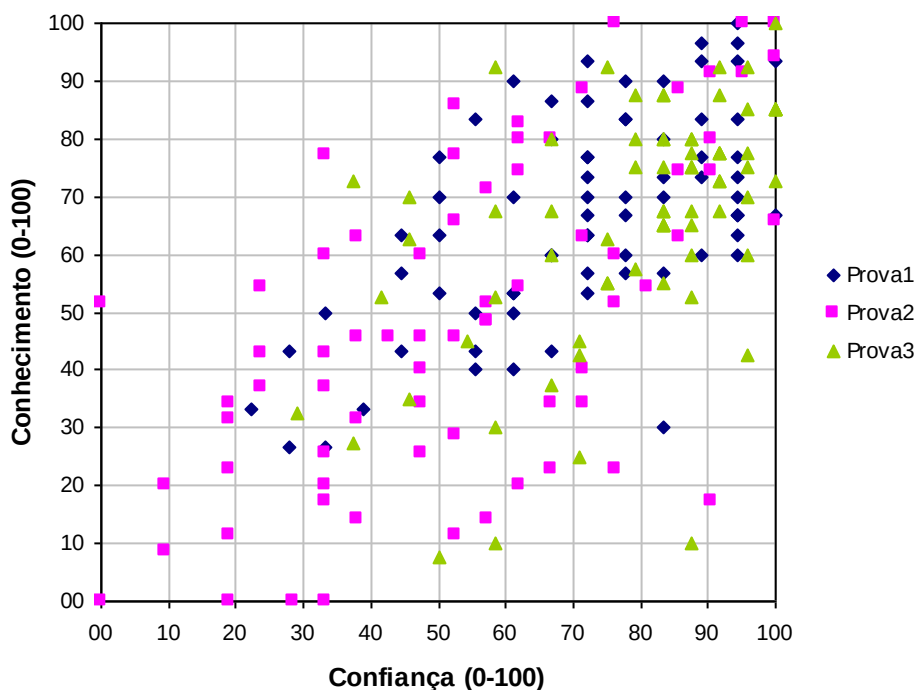


Gráfico 6: Relação entre o desempenho e a confiança nas três provas.

A seguir foi analisada a interferência das variáveis independentes, como a turma, gênero e exercício da docência.

A Tabela 16 e o Gráfico 7 mostram o desempenho médio na escala de atitude, confiança e conhecimento, segundo as turmas. Pode-se observar que a trajetória média das atitudes e do conhecimento geométrico é similar. Em geral, há uma tendência crescente da turma 1 para a turma 3, havendo um recuo na turma 4. As diferenças entre as médias se mostraram estatisticamente significativa para o conhecimento, no qual a Turma 3 se destacou das outras. Já nas atitudes essas diferenças foram significativas apenas para um nível de significância de 10%, ou seja, há uma tendência, porém essa não é muito clara. Novamente a turma três se destaca das outras.

Quando se analisa o nível da confiança, observa-se que a Turma 1 e 2 é similar, havendo um crescimento na turma 3 e 4, porém essas diferenças não foram estatisticamente significativas.

Tabela 16: Estatísticas por turma nas escalas de atitude, confiança e na prova de conhecimento geométrico

Instrumentos	Turma	N	Média	Desvio padrão	Teste F	
					F(3,67)	p-valor
Atitude (20-80)	1	30	58,2	11,5	2,640	0,057
	2	14	62,7	7,9		
	3	22	66,1	9,8		
	4	5	63,6	10,7		
Confiança (0-100)	1	30	64,8	18,5	1,796	0,156
	2	14	63,4	19,0		
	3	22	73,3	15,0		
	4	5	78,1	24,1		
Conhecimento (0-100)	1	30	52,9	18,1	4,500	0,006
	2	14	58,5	17,6		
	3	22	70,7	17,0		
	4	5	62,9	15,2		

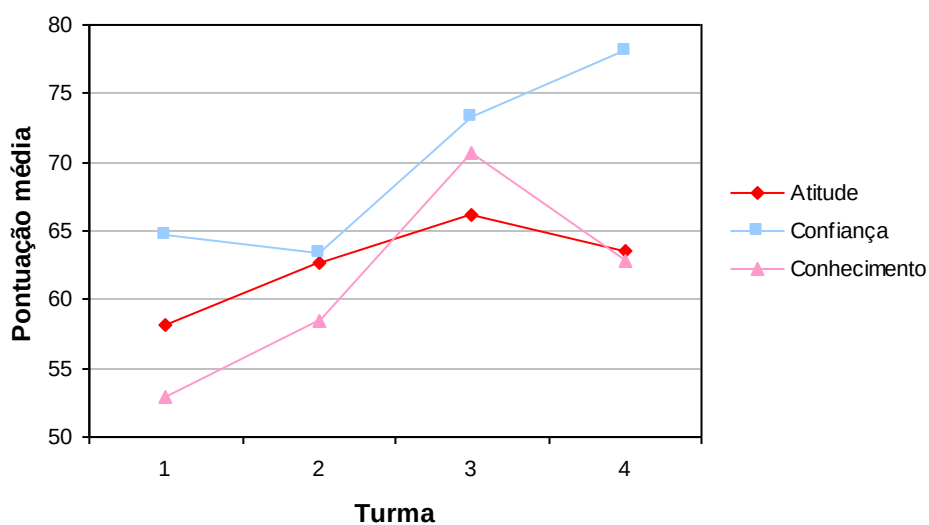
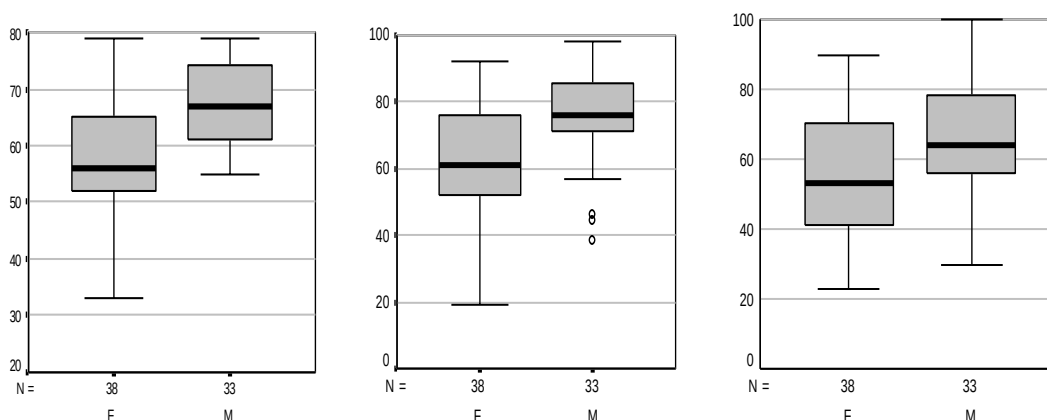


Gráfico 7: Pontuação média nos instrumentos por turma.

Quando essas variáveis são analisadas por gênero em todos os casos, os homens sempre se saíram melhor do que as mulheres, como mostram os resultados do teste *t-student* constantes na Tabela 17 e no 8.

Tabela 17: Estatísticas da pontuação nos instrumentos por gênero.

Escala	Gênero	N	Média	Desvio padrão	Teste t-student	
					t(69)	p-valor
Atitude	Feminino	38	57,74	10,89	-3,896	,000
(20-80)	Masculino	33	66,73	8,11		
Confiança	Feminino	38	61,28	18,10	-3,644	,001
(0-100)	Masculino	33	75,90	15,31		
Conhecimento	Feminino	38	55,19	19,92	-2,512	,014
(0-100)	Masculino	33	66,00	15,73		

**Gráfico 8: Distribuição da pontuação nos instrumentos por gênero.**

O Gráfico 9 mostra a relação entre a confiança e as atitudes, segundo gênero. Observa-se que a nuvem de pontos das mulheres se espalha no centro do gráfico mostrando uma alta variabilidade tanto em relação às atitudes quanto a confiança, isto é encontramos mulheres confiantes e com atitudes positivas, mulheres confiantes com atitudes negativas, mulheres pouco confiantes com atitude positiva e mulheres pouco confiantes e com atitude negativa. Este comportamento é mais peculiar das mulheres, do que dos homens, por essa razão que o coeficiente de correlação é baixo e o modelo: $Y = 0,8884X + 13,068$, explica apenas 26,69% da variação da confiança ($R^2=26,69\%$), quando as atitudes variam.

Situação similar é observada quando se analisa a relação entre o conhecimento e as atitudes, neste caso os homens também apresentam um comportamento bastante disperso, como mostra a Gráfico 10. O modelo: $Y = 0,7843X + 11,656$; explica apenas 19,15% da variação da confiança, pela variação das atitudes ($R^2 = 0,1915$).

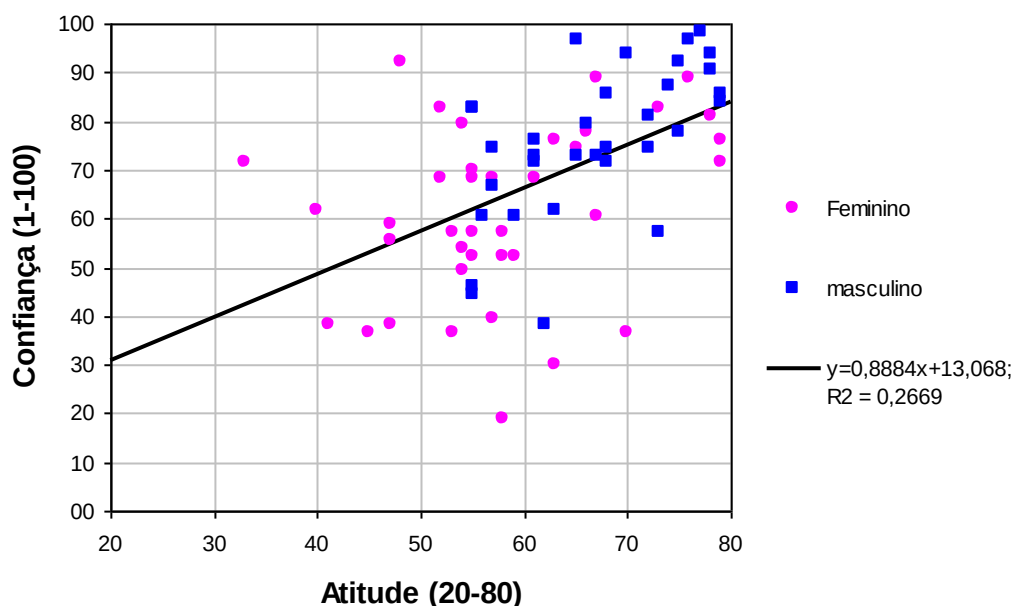


Gráfico 9: Relação entre a confiança e as atitudes, segundo gênero.

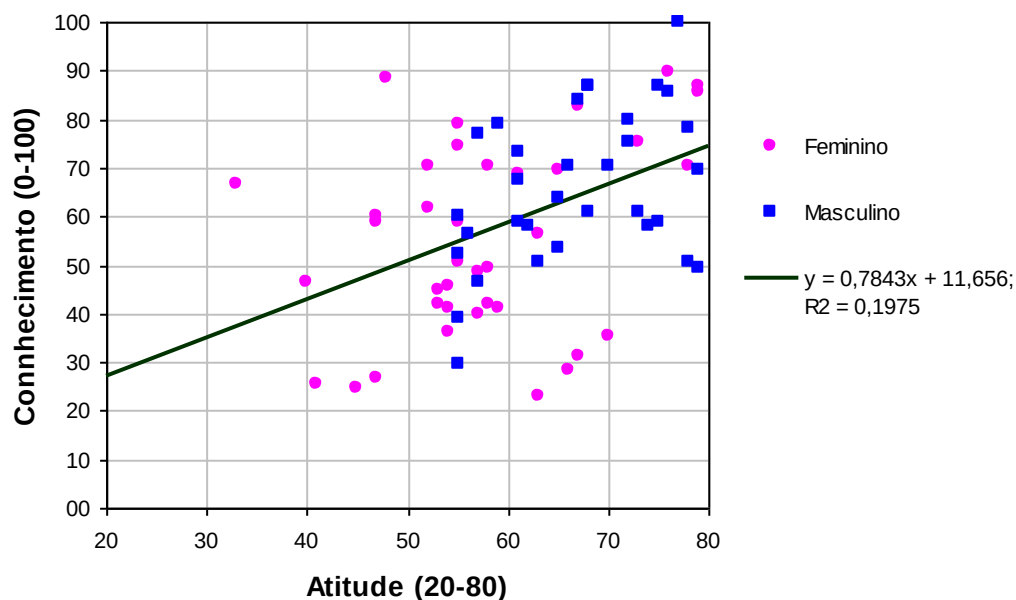


Gráfico 10: Relação entre o conhecimento e as atitudes, segundo gênero.

Já a relação entre o conhecimento e a confiança é a mais forte das três relações estudadas e como sempre, os homens tendem a ser mais confiantes e a ter melhor desempenho no conhecimento, como mostra o Gráfico 11.

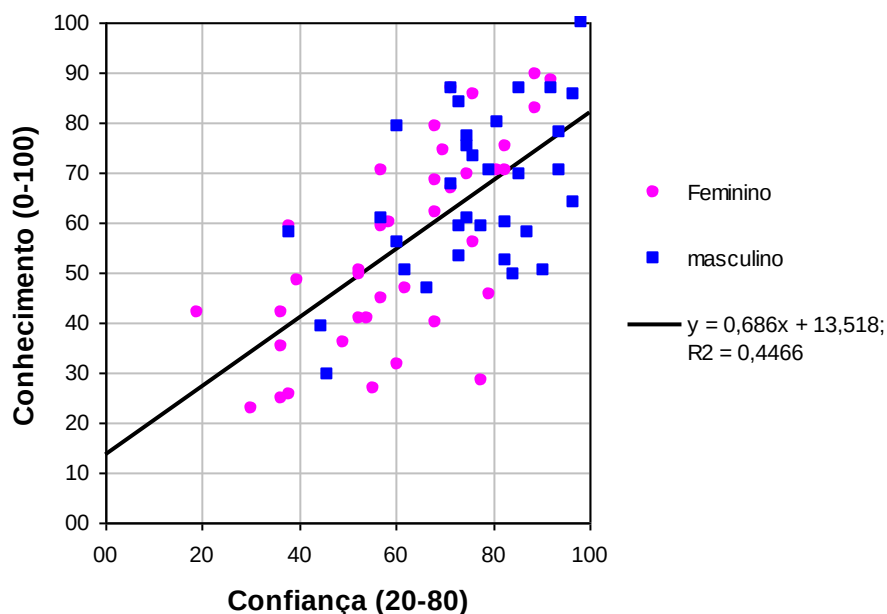


Gráfico 11: Relação entre o conhecimento e a confiança, segundo gênero.

A Tabela 18 e a Gráfico 12 mostram o impacto do fato do respondente estar exercendo o magistério na escala de atitudes, de confiança e no desempenho. Apesar de se observar diferenças na pontuação média, essas não foram significativas segundo o teste *t-student*.

Tabela 18: Estatísticas da pontuação nos instrumentos por situação de lecionar ou não.

Escala	Leciona	N	Média	Desvio padrão	Teste <i>t-student</i>	
					t(69)	p-valor
Atitude (20-80)	Não	58	62,38	10,69	0,774	0,442
	Sim	13	59,85	10,52		
Confiança (0-100)	Não	58	67,02	18,63	-1,025	0,309
	Sim	13	72,77	16,49		
Conhecimento (0-100)	Não	58	58,16	18,60	-1,988	0,051
	Sim	13	69,38	17,31		
	Geral	71	60,2	18,8		

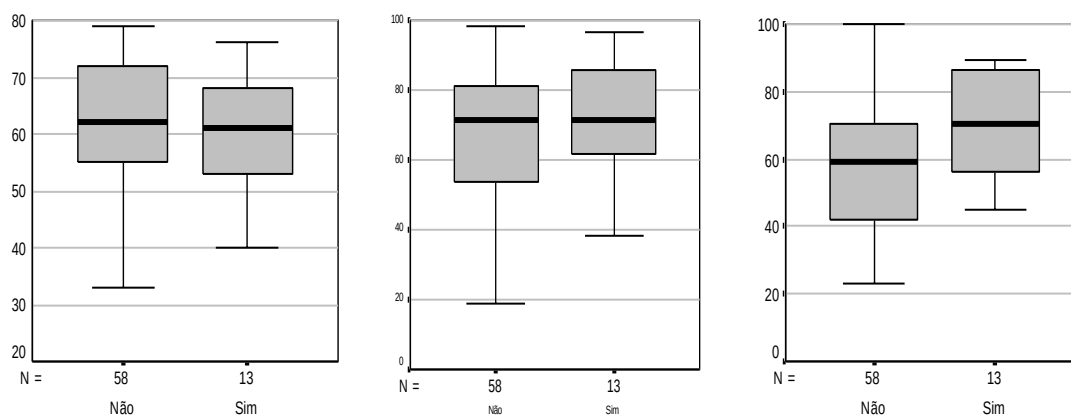


Gráfico 12: Distribuição da pontuação nos instrumentos por exercício da docência.

CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO

A presente pesquisa teve por objetivo investigar as relações entre os conhecimentos geométricos, as atitudes em relação à geometria e a confiança dos graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática.

A análise dos resultados mostrou que existe correlação entre esses elementos quando analisados de forma global, ou seja, considerado a pontuação na escala de atitudes, a nota global das provas de conhecimento geométrico (soma das notas das três provas), e a nota global dos testes de confiança (soma da pontuação dos três testes).

Verificou-se que os participantes possuem atitude positiva em relação a geometria, o que de certa forma, é um resultado esperado, uma vez que os participantes compõem um grupo de estudantes graduandos em Licenciatura em Matemática.

Se considerarmos apenas as atitudes referentes à geometria e o domínio dos conhecimentos geométricos, percebe-se pela análise estatística que as médias globais são correlacionadas, ou seja, as atitudes em relação à geometria se relacionam com o domínio dos conhecimentos desse conteúdo.

Ao analisarmos as provas em separado verificamos que, apesar de haver diferenças nas médias de desempenho nas provas, as correlações de cada uma foram bastante próximas ao valor global das provas de conhecimento. É importante ressaltar que inclusive a prova com menor desempenho (de conhecimentos declarativos e procedimentais – demonstrações) está correlacionada com atitude.

Observou-se também que a confiança e o desempenho nas provas se relacionam significativamente. A correlação entre a nota global no teste de confiança e a nota global nas provas de conhecimentos geométricos foi mais forte, sendo que essa correlação também existe se consideradas as provas e as confiança relacionadas em termos do tipo de conhecimento.

Sendo assim, podemos inferir que na resolução de problemas geométricos, quando a confiança é alta, existe um bom desempenho e quando a confiança é baixa, esta acarreta na queda no desempenho, ou seja, domínio do conteúdo. Cabe ressaltar, que a confiança na resolução de problemas práticos, procedimentais, do tipo “calcule” e “determine”, foi a mais alta e obteve a maior nota de desempenho. Já a confiança na prova de conhecimentos declarativos, com questões do tipo “o que é” foi um pouco menor que a

de conhecimentos procedimentais, mantendo-se positiva. Da mesma forma o desempenho nesta prova também foi um pouco menor, apesar de atingir um bom resultado.

No entanto, a prova de conhecimentos procedimentais e declarativos (demonstrações) obteve no teste de confiança uma nota bem abaixo dos outros testes. Ficou evidenciado que os estudantes, independentemente da turma/ ano não se sentem seguros para realizar demonstrações matemáticas. E o resultado foi corroborado com a prova de desempenho, obtendo a menor pontuação.

A respeito dos conteúdos das provas de conhecimento, é possível fazer algumas inferências relativas às questões que se destacaram como, por exemplo, a situação problema que solicitou a demonstração do Teorema de Pitágoras, na qual mais de 50% dos respondentes foram locados na categoria TRE e BNS, ou seja, tentaram resolver e desistiram ou deixaram em branco. O Teorema de Pitágoras ao longo da escolaridade da Educação Básica possui muitas aplicações, na disciplina de matemática em outros conteúdos, e em outras disciplinas como a física. Em contrapartida, é observado na prova I de conhecimentos declarativos e na prova II de conhecimentos procedimentais que esse mesmo conteúdo (Teorema de Pitágoras) quando apresentado com uma abordagem de tipo de conhecimento diferente, obteve um percentual de acertos elevado.

Nota-se que, ao se abordar o mesmo conteúdo em situações que utilizam diferentes tipos de conhecimentos, pode-se haver diferenciação no desempenho. Ou seja, as dificuldades dos participantes não estão relacionadas ao conteúdo, mas sim às situações que estes se apresentam, ou seja, situações de prova formal. Uma vez que, as outras situações problemas da prova II (demonstrações) também tiveram um percentual grande de participantes que não responderam as questões. Esses resultados evidenciam que alguns participantes não possuem as habilidades do pensamento lógico-dedutivo desenvolvidas, ou seja, não conseguem abstrair, generalizar, organizar e estruturar as informações contidas nas questões para o desenvolvimento de uma demonstração ou prova matemática com a estrutura axiomática.

No entanto, o saber calcular um quesito mínimo necessário a um professor. Manter-se com apenas esse conhecimento é estar no mesmo patamar que os alunos da Educação Básica. Um licenciando e futuro professor de matemática precisa ir além, precisa ser capaz de trabalhar o conteúdo matemático em todas as instancias do conhecimento (declarativo, procedimental e em situações de demonstrações).

Espera-se um melhor desempenho relativo ao conhecimento declarativo procedimental (demonstrações) em situações de problemas geométricos. Essa lacuna, constatada, pode interferir na atuação destes em sala de aula futuramente. O que confirma o exposto por Pirola (2000) que apontou um despreparo dos graduandos das Licenciaturas em Matemática para ensinar matemática em sua pesquisa na área de geometria.

Em relação ao gênero, Utsumi (2000) aponta que a variável tem relação com a nota (desempenho), González (2000) afirma que a confiança de pessoas do gênero feminino é menor para a resolução de problemas. Corroborando com as autoras, verificou-se que quando as variáveis atitudes, confiança e conhecimentos são analisados por gênero em todos os casos, os participantes do gênero masculino sempre se saíram melhor, como mostram os resultados do testes.

Foi verificado um movimento crescente do 1º para o 2º ano e do 2º para o 3º ano, relativo a pontuação da escala de atitudes, a pontuação dos testes de confiança, bem como nas provas de conhecimentos.

Ao longo do curso os alunos passam a ser mais confiantes e também a ter um maior domínio do conhecimento. Verificou-se também, que ao longo do curso, os alunos vão ficando com atitudes mais positivas em relação a geometria, do que os alunos que são ingressantes.

Houve uma diferenciação muito grande relativa à turma D (4º ano) sobre esses resultados, porém pouco se pode inferir, pois a quantidade de participantes dessa turma foi a menor, 5 participantes, não nos permitindo afirmar com contundência, se o fato de pertencerem a outro currículo pode ou não ter influenciado em relação à essa diferença.

Ao se optar em trabalhar com essa forma de organização do conhecimento, estrutura axiomática, é preciso levar em consideração fatores como: obstáculos didáticos que podem influenciar no aprendizado e desenvolvimento da disciplina; fatores emocionais, como a confiança em resolução de problemas e situações de demonstração; bem como as atitudes em relação à geometria. O rigor matemático presente nas demonstrações e situações de prova formal são inerentes a formação do professor de matemática. São atividades necessárias que possibilitam realizar abstrações, levantar conjecturas e validar resultados. Além disso, podem ser utilizadas como ferramentas em outros conteúdos da matemática.

Essa estrutura de conhecimento, é bastante eficaz e de grande necessidade para a atuação na docente no Ensino Fundamental e Médio, como um instrumento que possa

ajudar a romper o ciclo das deficiências no processo de ensino e aprendizagem da geometria no Ensino Básico, de maneira a permitir aos futuros professores, proporcionar um ensino adequado em termos de conceitos desse conteúdo.

REFERÊNCIAS

- AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Trad. de João Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. 170 p.
- AIKEN, L. R. **Attitudes Toward Mathematics**. Review of Educational Research, 40 (4), 551-596, 1970.
- ALENCAR FILHO, E. Exercícios de geometria plana. São Paulo: Nobel, 1975.
- ALVES, E.V. **Um estudo exploratório das relações entre memória, desempenho e os procedimentos utilizados na solução de problemas matemáticos**. Tese (Doutorado em Educação) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2005.
- ALVES, E.V. **Um estudo exploratório dos componentes da habilidade matemática requeridos na solução de problemas aritméticos por estudantes do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 1999.
- ARAÚJO, E.A. **Influências das habilidades e das atitudes em relação à matemática e a escolha profissional**. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 1999.
- BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1995.
- BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/ SEMTEC, 2002.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - Ensino de primeira a quarta séries**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - Ensino de quinta a oitava séries**, Brasília: MEC/ SEF. 1998a.
- BRASIL. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**. Brasília: MEC/ SEF, 1998b.
- BRITO, M. R. F. **Um estudo sobre as atitudes em relação à matemática em estudantes de 1º e 2º graus**. Tese de Livre Docência. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, São Paulo, 1996.
- BRITO, M.R.F.; GARCIA, V.J.N. **A psicologia cognitiva e suas aplicações à educação**. In: BRITO, M.R.F.(Org.) **Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Pesquisa**. Florianópolis: Insular, 2001.
- BUNT, L. N. H. **Introdução ao curso de geometria plana**. Ed. Fundo de Cultura. Rio de Janeiro: 1963.
- CAZORLA, I. M. et al. **Estatística para a formação do Professor Pesquisador**. Mini-curso do VIII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo, (2006). Disponível em http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/epem_3.doc acesso em 08/04/2008.
- CHI, M. T. H. & GLASER, R. A. **Capacidade para a Solução de Problemas**. In Sternberg, R.J. **As Capacidades Intelectuais Humanas: Uma Abordagem em Processamento de Informações**. Porto Alegre: Artes Médicas. p. 250-275, 1992.

CNE. Resolução CNE/CP 2/2002. Diário Oficial da União, Brasília, 4 de março de 2002. Seção 1, p. 9.

COLL, C.; POZO, J. I.; SARABIA, B.; VALLS, E. (org.). **Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

DOLCE O.; POMPEO, J.N., **Geometria Plana. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar**, vol.09, 7ª ed., São Paulo: Atual, 1993.

DOMINGUES, H. **A demonstração ao longo dos séculos**. In Bolema 18, Unesp. Rio Claro: 2002

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp. Campinas. 2002.

FIORENTINI, D. **Rumos da Pesquisa brasileira em educação matemática**. Campinas, Unicamp. Tese de doutorado em metodologia do Ensino, 1994.

GARNICA, A. V. M. **História Oral e Educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GONÇALEZ, M.H.C.C. **Relações entre a família, o gênero, o desempenho, a confiança e as atitudes em relação à matemática**. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2000.

GRINKRAUT, M. L. **A gênese instrumental em professores da educação básica no ensino-aprendizagem da prova**. In: EBRAPEM - X Encontro Brasileiro de estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2006, Belo Horizonte. EBRAPEM - Conhecimento e inclusão social - Caderno de resumos, 2006. p. 44-44.

KILPATRICK, J. **Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico**. **Zetetiké**, Campinas (SP), Cempem/FE/Unicamp, v.4, n.5, p.99-120, jan/jun-1996.

KLAUSMEIER, H.J.; GOODWIN, W. **Manual de Psicologia Educacional: aprendizagem e capacidades humanas**. (Tradução de Abreu, M. C. T. A.). São Paulo: Harper & Row, 1977.

KRUTETSKY, V.A. **The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren**. Chicago,IL:University of Chicago Press, 1976.

LIMA, V.S. **Solução de problemas: habilidades matemáticas, flexibilidade de pensamento e criatividade**. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

LOOS, H. **Atitude e desempenho em matemática, crenças auto-referenciadas e família: uma path-analysis**. Tese (Doutorado em Educação: Psicologia, Desenvolvimento Humano e Educação) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2003.

LOPES, A.R.C. **Bachelard: o Filósofo da desilusão**. Caderno Catarinense de Ensino de Física, V.13, n. 03, p.248-273, 1996.

MAYER, R. E. **A capacidade para a matemática**. In Sternberg, R. As capacidades intelectuais humanas. Uma abordagem em processamento de informação (Tradução de Batista, D.) (pp. 144-168). Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

- MELO, M.V. **Três décadas de pesquisa em Educação matemática na Unicamp**: um estudo histórico a partir de teses e dissertações. Dissertação de mestrado, Unicamp, 2006.
- MIORIM, M.A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.
- MOISE, E.E., DOWNS Jr., F.L. **Geometria Moderna**. Trad. Renate G.Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1971.
- MORON, C.F. **Um estudo exploratório sobre as atitudes e as concepções dos professores de educação infantil em relação à matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação: Psicologia Educacional) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 1998.
- NEVES, L.F. **Um estudo sobre as relações entre a percepção e as expectativas dos professores e dos alunos e o desempenho em matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2002.
- PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- PAVANELLO, R.M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil**: causas e consequências. Zetetiké, V.1, N.1, p.7-17, 1993.
- PAVANELLO, R.M. **O abandono do ensino de geometria**: uma abordagem histórica. Dissertação (Mestrado em Educação) - UNICAMP, Campinas, 1989, 195f.
- PIROLA, N.A. **Solução de problemas geométricos**: dificuldades e perspectivas. Tese (doutorado em Psicologia Educacional) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.
- PIROLA, N.A. **Um estudo sobre a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de 1o grau**. Dissertação (Mestrado em Educação) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 1995.
- PIROLA, N.A.; BRITO, M.R.F. **A formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos da escola elementar**. In BRITO, M.R.F. (Org.) *Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Pesquisa*. Florianópolis: Insular, 2001.
- POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Ed. Interciencias, 1986.
- POZO, J.I. (org.), ECHEVERRÍA, M. D. P. P., CASTILLO, J. D., CRESPO, M. A. M., & ANGÓN, Y.P. **A Solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver para aprender**. (tradução de Neves, B. A.). Porto Alegre: ARTMED, 1998. (publicado originalmente em 1994).
- POZO, J.I. **Teorias Cognitivas da Aprendizagem**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998.
- QUINTILIANO, L.C. **Conhecimento declarativo e de procedimento na solução de problemas algébricos**. Dissertação (Mestrado em Educação) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2005.
- REZENDE, E.Q.F.; QUEIROZ, M.L.B. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2000.
- REZI, V. **Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**. 183p. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

RICH, B. **Geometria plana**. São Paulo: McGraw - Hill do Brasil, 1972.

ROCHA FALCÃO, J.T. **Psicologia da Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ROCHA FALCÃO, J.T. **Dez mitos acerca do ensino e da aprendizagem da matemática**: síntese de pesquisas e reflexões teóricas 1986/2006. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte (MG): Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. p. 1-15.

SÃO PAULO (Estado) **Proposta curricular para o ensino de matemática - 1º Grau**. São Paulo: SE/ CENP, 1991.

SARABIA, B. **A aprendizagem e o ensino das atitudes**. In: COLL, César et al. Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SILVA, M.V. **Variáveis atitudinais e o baixo desempenho em matemática de alunos de 5ª a 8ª série do ensino fundamental**. 228p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

STERNBERG, R. J. (2000) - **Psicologia Cognitiva**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

UTSUMI, M.C. **Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos**: um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE/Unicamp, Campinas (SP), 2000.

VIANA, O.A. **As atitudes de alunos do ensino médio em relação à geometria**: Adaptação e validação de escala. Anais do VIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, 2004.

VIANA, O.A. **O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e a geometria**. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

ANEXOS

MODELOS DE CARTAS

Anexo 01: Permissão para Aplicação dos Instrumentos de Pesquisa

Bauru, __ de _____ de 2007.

Prezado(a) Senhor(a):

Tem o presente a finalidade de solicitar ao Conselho de Curso da Licenciatura em Matemática autorização para realizar a coleta de dados de uma pesquisa sobre os conhecimentos, atitudes e confiança dos alunos do Curso de Licenciatura Matemática sobre a Geometria. A investigação faz parte do Trabalho de Mestrado a ser defendido por *Andréia Aparecida da Silva Brito Nascimento*, aluna regular do Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência da UNESP-Bauru.

Os instrumentos que serão utilizados para a coleta de dados se constituem em: aplicação de questionário informativo, escala de atitudes em relação à geometria, instrumento sobre confiança e prova de geometria. Informamos que a pesquisa está sendo encaminhada ao Conselho de Ética da Faculdade de Ciências e que todos os nomes dos participantes e da instituição não serão divulgados. Após o término da pesquisa os resultados serão disponibilizados à Coordenação do Curso e a pesquisadora se coloca à disposição para apresentá-los e discuti-los com os interessados.

A investigação se dará em dois momentos: o estudo piloto, no qual os instrumentos de pesquisa serão testados com os formandos do curso de 2007, e posteriormente, uma nova aplicação dos instrumentos, a pesquisa efetivamente, com todos os alunos que estiverem cursando a Licenciatura em Matemática no ano letivo de 2008.

Na expectativa de poder contar com a valiosa colaboração de Vossa Senhoria, agradecemos antecipadamente, apresentando protestos de estima e consideração.

Atenciosamente,

Andréia Aparecida da Silva Brito Nascimento
Mestranda do Programa de Pós-Graduação em
Educação para a Ciência UNESP-Bauru

Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola
Orientador e Professor do Programa de Pós-Graduação
em Educação para a Ciência UNESP-Bauru

Ilmo(a) Senhor(a):

DD. Coordenador(a) do Curso de Licenciatura em Matemática
Universidade _____

Anexo 02: Permissão para Utilização da aula para a aplicação dos Instrumentos de Pesquisa

Bauru, ____ de novembro de 2008.

Prezado(a) Senhor(a):

Pretendemos realizar uma pesquisa sobre os conhecimentos, atitudes e confiança dos alunos do Curso de Licenciatura Matemática sobre a Geometria. A investigação faz parte do Trabalho de Mestrado a ser defendido por *Andréia Aparecida da Silva Brito Nascimento* aluna regular do Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência da UNESP-Bauru.

O Conselho de Curso da Licenciatura em Matemática está ciente e autorizou a realização da pesquisa. Assim, através desta solicitamos de Vossa Senhoria a gentileza de ceder sua aula para a realização da coleta de dados.

Os instrumentos que serão utilizados para a coleta de dados se constituem em: aplicação de questionário informativo, escala de atitudes em relação à geometria, instrumento sobre confiança e prova de geometria.

Na expectativa de poder contar com a valiosa colaboração de Vossa Senhoria, agradecemos antecipadamente, apresentando protestos de estima e consideração.

Atenciosamente,

Andréia Aparecida da Silva Brito Nascimento

Mestranda do Programa de Pós-Graduação em
Educação para a Ciência UNESP-Bauru

Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola

Orientador e Professor do Programa de Pós-Graduação
em Educação para a Ciência UNESP-Bauru

Ilmo(a) Senhor(a):

Professor(a) do Curso de Licenciatura em Matemática
Universidade _____

Anexo 03: Convite para professor especialista

Bauru, __ de _____ de 2007.

Prezado(a) Senhor(a):

Pretendemos realizar uma pesquisa sobre os conhecimentos, atitudes e confiança dos alunos do Curso de Licenciatura Matemática sobre a Geometria. A investigação faz parte do Trabalho de Mestrado a ser defendido por Andréia Aparecida da Silva Brito Nascimento aluna regular do Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência da UNESP-Bauru.

Assim, através desta solicitamos de Vossa Senhoria a gentileza de avaliar, as provas de conhecimentos geométricos, instrumentos da pesquisa que pertencem a sua área de especialidade.

Esclarecemos que será mantido o anonimato do professor especialista avaliador, bem como será preservado o nome da Instituição a que pertence.

Na expectativa de poder contar com a valiosa colaboração de Vossa Senhoria, agradecemos antecipadamente, apresentando protestos de estima e consideração.

Atenciosamente,

Andréia Aparecida da Silva Brito Nascimento
Mestranda do Programa de Pós-Graduação em
Educação para a Ciência UNESP-Bauru

Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola
Orientador e Professor do Programa de Pós-Graduação
em Educação para a Ciência UNESP-Bauru

Ilmo(a) Senhor(a):

Professor(a) do Curso de Licenciatura em Matemática
Universidade _____

Anexo 04: Participação alunos e termo de consentimento

Bauru, ____ de novembro de 2008.

CARO ALUNO:

Este material faz parte de uma pesquisa sobre os conhecimentos, atitudes e confiança dos alunos do Curso de Licenciatura Matemática sobre a Geometria. Essa pesquisa é realizada pela Professora Andréia Aparecida da Silva Brito Nascimento mestranda do Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência da UNESP-Bauru, sob orientação do Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola.

Solicitamos que responda cada instrumento seguindo as orientações do cabeçalho, respondendo a todas as questões com a máxima clareza, pois suas respostas são de grande relevância para a pesquisa em Educação Matemática, principalmente, na área de formação de professor. Portanto, não deixe de responder nenhum dos itens.

Esclarecemos que será mantido o seu anonimato, bem como será preservado o nome da Instituição a que pertence. Os dados coletados serão utilizados exclusivamente para a realização dessa pesquisa.

Agradecemos a colaboração e reiteramos que sua participação é de fundamental importância para o desenvolvimento da pesquisa.

Obrigada pela atenção e disponibilidade.

Termo de Consentimento para Realização da Pesquisa:

Eu, _____, concordo voluntariamente em participar desta pesquisa.

e-mail: _____

Obs.: Para identificação nas outras folhas utilize o seguinte código: **PAR-01**

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO

Anexo 05: Questionário informativo sobre o aluno

PAR- ____

QUESTIONÁRIO INFORMATIVO

INSTRUÇÕES: Você irá responder a um questionário sobre suas experiências com a Geometria. Responda-o com toda a sua sinceridade. Obrigada pela sua colaboração!

1. **Data de nascimento:** __/__/____.

2. **Gênero:** () feminino () masculino

3. **Data de Ingresso no Curso de Licenciatura em Matemática:** __/__/____.

4. **Data prevista para o término do Curso:** __/__/____.

5. **Quando você fazia o Ensino Fundamental, você estudou Geometria?**

- () Sim, em todas as séries durante o ano letivo;
- () Sim, em todas as séries apenas em parte do ano letivo;
- () Sim, em algumas séries dependendo do professor;
- () Sim, em uma matéria específica do conteúdo de geometria;
- () Não, nenhum contato com o conteúdo de geometria.

6. **Quando você fazia o Ensino Médio, você estudou Geometria?**

- () Sim, em todas as séries durante o ano letivo;
- () Sim, em todas as séries apenas em parte do ano letivo;
- () Sim, em algumas séries dependendo do professor;
- () Sim, em uma matéria específica do conteúdo de geometria;
- () Não, nenhum contato com o conteúdo de geometria.

7. **Qual parte da Geometria você considera mais difícil?**

8. **Qual parte da Geometria você considera mais fácil?**

9. **Cite alguns tópicos da Geometria que você estudou no seu curso de Licenciatura em Matemática.**

10. Você aprendeu a utilizar materiais para o ensino de Geometria no seu curso de Licenciatura em Matemática. Quais?

11. Em sua opinião, porque devemos ensinar Geometria?

12. Atualmente você leciona para alunos do Ensino Fundamental?

() sim () não

Se sim, qual série?

() 5ª série () 6ª série () 7ª série () 8ª série

13. Atualmente você leciona para alunos do Ensino Médio?

() sim () não

Se sim, qual série?

() 1ª série () 2ª série () 3ª série

14. Atualmente você leciona para alunos do Ensino Superior?

() sim () não

Se sim, qual curso e disciplina?

curso: _____ disciplina: _____

curso: _____ disciplina: _____

15. Atualmente você leciona para alunos de cursos preparatórios para vestibulares?

() sim () não

Se sim, qual tema ou conteúdo/ disciplina?

conteúdo/ disciplina : _____

conteúdo/ disciplina : _____

16. Quando você está diante de uma situação que envolva a geometria você se sente confiante para a resolução? Explique.

17. Quando é solicitado a você realizar uma demonstração em geometria você se sente confiante para a resolução? Explique.

ESCALA

Anexo 06: Escala de atitudes em relação à geometria

PAR- _____

ESCALA DE ATITUDES EM RELAÇÃO À GEOMETRIA

VIANA e BRITO (2004)

INSTRUÇÕES: Cada uma das frases abaixo expressa o sentimento que cada pessoa apresenta com relação à Geometria. Você deve comparar o seu sentimento pessoal com aquele expresso em cada frase, assinalando um dentre os quatro pontos colocados abaixo de cada uma delas, de modo a indicar com maior exatidão possível, o sentimento que você experimenta com relação à Geometria. Obrigada pela sua colaboração!

1. Eu sempre fico numa terrível tensão na aula cujo conteúdo é geometria.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

2. Eu não gosto de geometria e me assusta ter que estudar esse conteúdo.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

3. Eu acho a geometria muito interessante e gosto das aulas que abordam esse conteúdo.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

4. A geometria é fascinante e divertida.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

5. A geometria me faz sentir seguro e é ao mesmo tempo estimulante.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

6. “Dá um branco” na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo geometria.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

7. Eu tenho uma sensação de insegurança quando me esforço em geometria.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

8. A geometria me deixa inquieto, descontente, irritado e impaciente.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

9. O sentimento que tenho em relação à geometria é bom.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

10. A geometria me faz sentir como se estivesse perdido numa selva de figuras, formas e números e sem encontrar a saída.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

11. A geometria é algo que aprecio grandemente.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

12. Quando ouço a palavra geometria, eu tenho um sentimento de aversão.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

13. Eu encaro a geometria com um sentimento de indecisão, que é resultado do medo de não ser capaz em geometria.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

14. Eu gosto realmente de geometria.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

15. A geometria é um dos conteúdos que eu realmente gosto de estudar na escola.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

16. Pensar sobre a obrigação de resolver um problema de geometria me deixa nervoso.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

17. Eu nunca gostei de geometria e é o conteúdo que me dá mais medo.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

18. Eu fico mais feliz na aula de geometria do que na aula de qualquer outro conteúdo.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

19. Eu me sinto tranquilo em geometria e gosto muito desse conteúdo.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

20. Eu tenho uma reação definitivamente positiva em relação à geometria. Eu gosto e aprecio esse conteúdo.

☐ discordo totalmente ☐ discordo ☐ concordo ☐ concordo totalmente

TESTES DE CONFIANÇA**Anexo 07: Teste de confiança I – conhecimentos declarativos****PAR- _____****CONFIANÇA - PROVA I**

INSTRUÇÕES: Suponha que você seja solicitado a solucionar as seguintes situações. Indique o grau de confiança que você tem de que será capaz de responder corretamente a questão. Obrigada pela sua colaboração!

POR FAVOR, NÃO TENDE RESOLVÊ-LAS.

SITUAÇÃO 01: O que é a congruência entre triângulos?

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 02: O que é a semelhança entre triângulos?

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

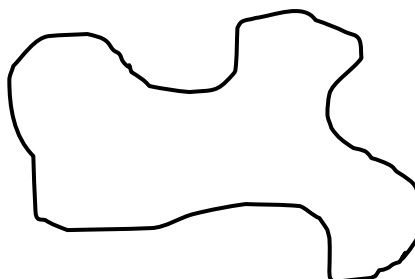
SITUAÇÃO 03: O que é o teorema de Pitágoras? Enuncie-o.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 04: Apresente uma demonstração do teorema de Pitágoras.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 05: Explique um procedimento para estimar a área da figura.



☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 06: O que são triângulos equivalentes?

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

**Anexo 08: Teste de confiança II – conhecimentos declarativos e procedimentais
(demonstrações)**

PAR- _____

CONFIANÇA - PROVA II

INSTRUÇÕES: Suponha que você seja solicitado a solucionar as seguintes situações. Indique o grau de confiança que você tem de que será capaz de responder corretamente a questão. Obrigada pela sua colaboração!

POR FAVOR, NÃO TENHA RESOLVÊ-LAS.

SITUAÇÃO 01: Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P, então $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 02: Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 03: Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 04: Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 05: Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 06: Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 07: Mostre que todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo.

☐ nada confiante

☐ um pouco confiante

☐ confiante

☐ totalmente confiante

Anexo 09: Teste de confiança III – conhecimentos procedimentais

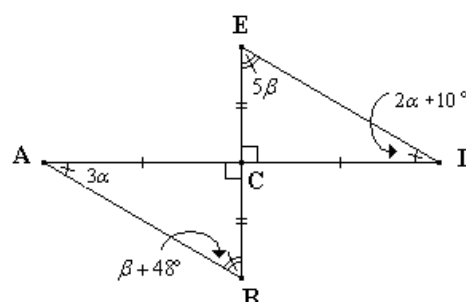
PAR- ____

CONFIANÇA - PROVA III

INSTRUÇÕES: Suponha que você seja solicitado a solucionar as seguintes situações. Indique o grau de confiança que você tem de que será capaz de responder corretamente a questão. Obrigada pela sua colaboração!

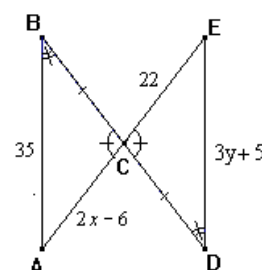
POR FAVOR, NÃO TENDE RESOLVÊ-LAS.

SITUAÇÃO 01: Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β .



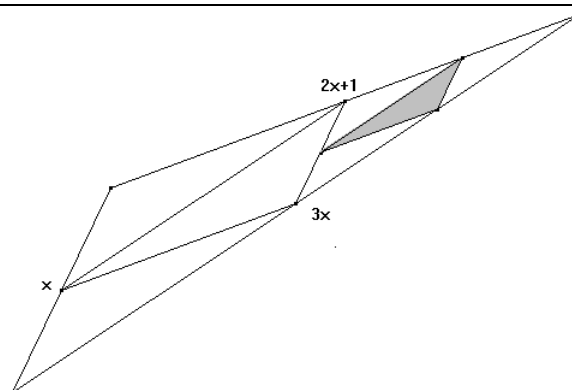
☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 02: Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.



☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 03: Na figura os vértices dos triângulos internos são os pontos médios dos lados dos triângulos circunscritos. Determine x , sabendo-se que o perímetro do triângulo pintado é 7,75 cm.



☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 04: Dado um quadrado de lado a , calcular a sua diagonal d .

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 05: Dado um triângulo equilátero de lado a , calcular sua altura h .

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 06: Determine dois triângulos retângulos que satisfazem as relações abaixo e sejam semelhantes entre si.

Hipotenusa - $a = x^2 + y^2$

Catetos - $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$.

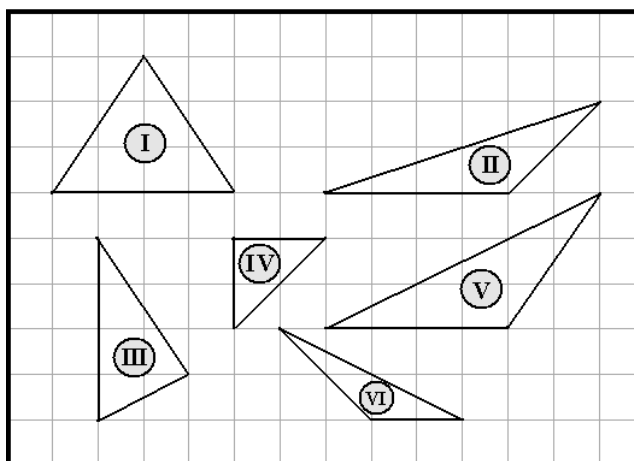
Tomando x e y inteiros e $x > y$.

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 07: Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .

☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

SITUAÇÃO 08: Determine quais triângulos são equivalentes. Justifique.



☐ nada confiante ☐ um pouco confiante ☐ confiante ☐ totalmente confiante

PROVAS DE CONHECIMENTO**Anexo 10: Prova I - Conhecimentos declarativos****PAR- _____****PROVA I**

INSTRUÇÕES: Você irá resolver algumas situações envolvendo conceitos geométricos. Escreva sua resolução no campo indicado. Se não souber resolver escreva "não sei". Obrigada pela sua colaboração!

SITUAÇÃO 01: O que é a congruência entre triângulos?

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 02: O que é a semelhança entre triângulos?

RESPOSTA:

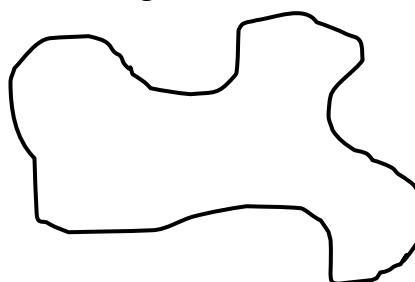
SITUAÇÃO 03: O que é o teorema de Pitágoras? Enuncie-o.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 04: Apresente uma demonstração do teorema de Pitágoras.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 05: Explique um procedimento para estimar a área da figura.



RESPOSTA:

SITUAÇÃO 06: O que são triângulos equivalentes?

RESPOSTA:

Anexo 11: Prova II - Conhecimentos declarativos e procedimentais (demonstrações)

PAR- _____

PROVA II

INSTRUÇÕES: Você irá resolver algumas situações envolvendo conceitos geométricos. Escreva sua resolução no campo indicado. Se não souber resolver escreva "não sei". Obrigada pela sua colaboração!

SITUAÇÃO 01: Demonstre que, se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se bisseccionam no ponto P, então $\triangle APC \cong \triangle BPD$.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 02: Mostre que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado é semelhante ao primeiro triângulo.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 03: Mostre que, se a base de um triângulo é $\sqrt{2}$ vezes o comprimento de qualquer um dos dois lados congruentes, então o ângulo oposto à base é reto.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 04: Prove que, se um triângulo retângulo tem ângulos agudos 30° e 60° , então seu menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 05: Mostre que todo triângulo de lado $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$ é um triângulo retângulo. Aqui, p e q são quaisquer números inteiros positivos com $p > q$.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 06: Mostre que, se dois triângulos têm um par de lados correspondentes congruentes, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas relativas a esses lados.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 07: Mostre que todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo.

RESPOSTA:

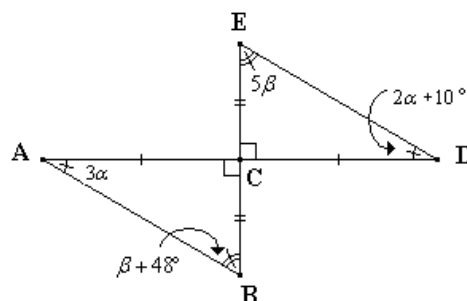
Anexo 12: Prova III - Conhecimentos procedimentais

PAR- ____

PROVA III

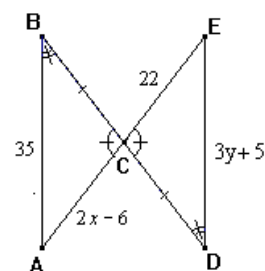
INSTRUÇÕES: Você irá resolver algumas situações envolvendo conceitos geométricos. Escreva sua resolução no campo indicado. Se não souber resolver escreva **"não sei"**. Obrigada pela sua colaboração!

SITUAÇÃO 01: Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β .



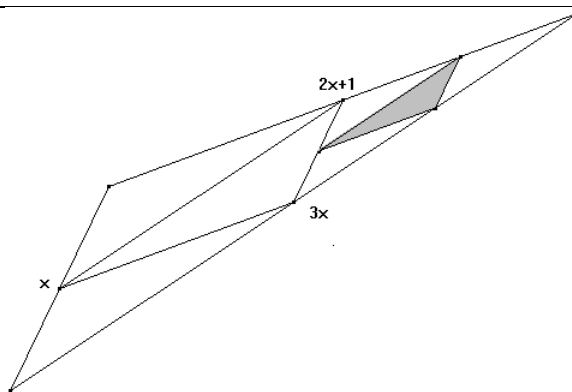
RESPOSTA:

SITUAÇÃO 02: Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de x e y e a razão entre os perímetros desses triângulos.



RESPOSTA:

SITUAÇÃO 03: Na figura os vértices dos triângulos internos são os pontos médios dos lados dos triângulos circunscritos. Determine x , sabendo-se que o perímetro do triângulo pintado é 7,75 cm.



RESPOSTA:

SITUAÇÃO 04: Dado um quadrado de lado a , calcular a sua diagonal d .

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 05: Dado um triângulo equilátero de lado a , calcular sua altura h .

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 06: Determine dois triângulos retângulos que satisfazem as relações abaixo e sejam semelhantes entre si.

Hipotenusa - $a = x^2 + y^2$

Catetos - $b = 2xy$ e $c = x^2 - y^2$.

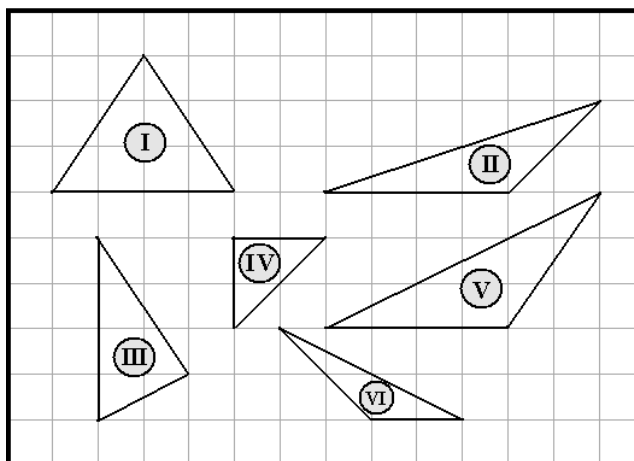
Tomando x e y inteiros e $x > y$.

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 07: Determine a área de um triângulo equilátero de lado s .

RESPOSTA:

SITUAÇÃO 08: Determine quais triângulos são equivalentes. Justifique.



RESPOSTA:

PARECER DAS QUESTÕES

Anexo 13: Instruções – Parecer do Professor Especialista

PARECER DAS QUESTÕES DE CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS

INSTRUÇÕES:

As questões apresentadas a seguir serão selecionadas para comporem os instrumentos de pesquisa que avaliarão os conhecimentos geométricos dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática.

Dos conteúdos presentes num curso de geometria plana no ensino superior abordaremos nessa investigação os seguintes: congruência e semelhança de figuras planas, especificamente dos triângulos; triângulo retângulo e suas relações métricas, especificamente o teorema de Pitágoras; e o estudo de área de polígonos, e equivalência de áreas entre figuras planas, novamente em específico a equivalência de áreas de triângulos.

Do parecer sugerimos constar: se é pertinente à questão para o conteúdo apresentado; avaliação do nível de resolução (fácil - intermediário ou difícil); sugestão de resolução; sugestões de alterações na questão ou substituição da mesma; e outras indicações que se fizerem necessárias. Em caso de indicação de substituição da questão adotar os procedimentos sugeridos anteriormente para o novo enunciado.

A seguir, apresentamos as fichas com cada questão.

Agradecemos novamente a colaboração e reiteramos que sua avaliação é de fundamental importância para a fidedignidade da pesquisa.

Anexo 14: Modelo de Ficha – Parecer do Professor Especialista

CONTEÚDO: CONGRUÊNCIA ENTRE TRIÂNGULOS
QUESTÃO: O que é congruência entre triângulos?
PARECER: