



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/07

Quebra de Simetria no Universo Primordial

Rodrigo Rocha Cuzinatto

Orientador

Prof. Dr. Ruben Aldrovandi

Abril de 2007

Dedicado aos meus pais José e Maria Rita

Agradecimentos

Aos meus amados pais e à minha querida irmã Fernanda.

Ao Prof. Ruben Aldrovandi, meu orientador e amigo, pela decisão de trabalhar comigo também no doutorado, por sua sinceridade e confiança, e por ter dado a liberdade e o incentivo que tive em meu projeto paralelo ao da tese.

Ao Prof. Pimentel, pelos cursos, trabalhos sugeridos e apoio acadêmico. E ao Bruto, pelas nossas conversas durante o chá da tarde.

Ao Prof. Galetti, pela oportunidade da monitoria.

Aos meus companheiros de estrada: Cássius, Léo e PJ. Sempre fazendo valer a pena!

Aos meus amigos do IFT, do Tai Chi Chuan e da Guitarra.

À FAPESP, pelo apoio financeiro (processo 02/05763-8).

Resumo

Apresentamos a solução analítica completa para as equações de Friedmann válida na presença da constante cosmológica Λ , do parâmetro de curvatura κ , de matéria não-relativística (bariônica ou escura) e de radiação. Este é o modelo $\Lambda\gamma$ CDM, que exhibe claramente a aceleração recente e inclui modelos particulares, como o Λ CDM. Obtemos o conjunto completo dos geradores de simetria para o elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) pela integração direta das equações de Killing. O processo de cálculo leva à função $U = a^2 \dot{H}$, produto do quadrado do fator de escala pela derivada temporal da função de Hubble. U constante fixa a solução maximalmente simétrica de de Sitter (dS) – com 10 geradores – em detrimento de qualquer outra solução de FRW – com 6 geradores. A interpretação física dos geradores de dS nas coordenadas comóveis não é evidente, o que exige a transcrição deles para coordenadas estáticas de dS. Nestas coordenadas, eles têm uma interpretação clara, dada a relação direta com os geradores de Poincaré via contrações de Wigner-Inönú. Um passo necessário é a construção das transformações de Robertson generalizadas entre o intervalo estático de dS e o elemento de linha de FRW para os três valores de κ .

Palavras Chaves: Equações de Friedmann; soluções exatas; campos de Killing; modelos de Sitter e Friedmann-Robertson-Walker; simetrias.

Áreas do conhecimento: 1.05.01.03-7; 1.04.04.04-0.

Abstract

Analytic expressions for solutions in the Standard Model are presented here for all combinations of $\Lambda = 0$, $\Lambda \neq 0$, $\kappa = 0$ and $\kappa \neq 0$ in the presence and absence of radiation and nonrelativistic matter. The most complete case (here called the $\Lambda\gamma$ CDM Model) has $\Lambda \neq 0$, $\kappa \neq 0$, and supposes the presence of radiation and dust. It exhibits clearly the recent onset of acceleration and reduces to the particular models such as the Λ CDM Model. A detailed examination of the Killing equations in Robertson–Walker coordinates shows how the addition of matter and/or radiation to a de Sitter Universe breaks the symmetry generated by four of its Killing fields. The product $U = a^2 \dot{H}$ of the squared scale parameter by the time-derivative of the Hubble function encapsulates the relationship between the two cases: the symmetry is maximal when U is a constant, and reduces to the 6-parameter symmetry of a generic Friedmann–Robertson–Walker model when it is not. As the fields physical interpretation is not clear in these coordinates, comparison is made with the Killing fields in static coordinates, whose interpretation is made clearer by their direct relationship to the Poincaré group generators via Wigner–Inönü contractions.

Índice

1	Introdução	1
2	As soluções exatas do Modelo Cosmológico Padrão [15]	4
2.1	Soluções de de Sitter	6
2.1.1	O caso $\kappa = 0$	7
2.1.2	O caso $\kappa \neq 0$	7
2.2	Soluções do Modelo Λ -FRW	8
2.2.1	Materia Não-Relativística	8
2.2.2	Radiação com $\kappa \neq 0$ e $\Lambda \neq 0$	12
2.2.3	A Solução Geral: $M \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\Lambda \neq 0$ e $\kappa \neq 0$	14
3	As simetrias de dS e FRW nas coordenadas comóveis [24]	19
3.1	A função quebra de simetria $U(t)$	20
3.2	A integração da componente ξ_0	23
3.3	As componentes ξ_μ de Killing em FRW	25
4	As simetrias de dS nas coordenadas estáticas	32
5	Transformações entre as coordenadas de FRW e dS	36
5.1	As Transformações de Robertson Generalizadas	36
5.2	Transformação dos geradores de dS nas coordenadas estáticas para as coordenadas comóveis	41
6	A contração de Inönü-Wigner da algebra de dS para a de Poincaré	44
6.1	O limite $L \rightarrow \infty$ nas coordenadas estáticas	44
6.1.1	Interpretação dos geradores	44
6.1.2	Contração algébrica	45
6.2	O limite $L \rightarrow \infty$ nas coordenadas de FRW	46
6.2.1	$\kappa = 0$	46
6.2.2	$\kappa = -1$	51
6.2.3	$\kappa = +1$	52

6.3	Quadro geral das Contrações	52
7	Comentários Finais	54
A	Integração das componentes ξ_i de FRW	57
A.1	A componente radial $\xi_1 = \xi_1(t, r, \theta, \phi)$	57
A.1.1	Dependência de ξ_1 em t	57
A.1.2	Dependência de ξ_1 em r	59
A.1.3	Dependência de ξ_1 em θ	62
A.1.4	Dependência de ξ_1 em ϕ	64
A.1.5	Condição de periodicidade sobre $\xi_1(t, r, \theta, 0)$	65
A.2	A componente $\xi_2 = \xi_2(t, r, \theta, \phi)$	65
A.2.1	Dependência de ξ_2 em t	65
A.2.2	Dependência de ξ_2 em r	66
A.2.3	Dependência de ξ_2 em θ	69
A.2.4	Dependência de ξ_2 em ϕ	70
A.3	A componente $\xi_3 = \xi_3(t, r, \theta, \phi)$	71
A.3.1	Dependência de ξ_3 em t	71
A.3.2	Dependência de ξ_3 em r	71
A.3.3	Dependência de ξ_3 em θ	73
A.3.4	Dependência de ξ_3 em ϕ	74
A.3.5	Condição de periodicidade sobre $\xi_3(t, r, \theta, 0)$	74
B	Cálculo do comutador $[S_0, S_i]$	76
C	Invertendo as Transformações de Robertson Generalizadas	80
D	Transformando o gerador P_i para coordenadas comóveis	83
D.1	O operador $\partial_{\bar{t}}$	83
D.2	O operador P_i	85
	Referências	89

Capítulo 1

Introdução

Os problemas da planura e do horizonte causal no Universo observável levaram à idéia de que ele começou sua evolução com um período curto de expansão vertiginosa [1], dito inflacionário. O paradigma para esta fase é o modelo de de Sitter (dS), em que o fator de escala $a(t)$ de medida de distâncias aumenta exponencialmente com o tempo cosmológico t .^{*} Nesta solução aparece o raio L de dS, que equivale à constante cosmológica Λ .

Para permitir a formação dos elementos leves (nucleossíntese), foi necessário que esta etapa evolutiva desse lugar à expansão desacelerada. A descrição desta é feita pelas soluções de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), modelos de universo preenchidos por radiação ou matéria (bariônica ou escura-fria) [5], [6], [7], [8].

Porém, isto não é tudo: medidas recentes [9], [10], [11] indicam que a matéria constitui no máximo trinta por cento do total energético e que a contribuição da radiação é desprezível em relação a esta parcela. A fonte dominante a determinar a dinâmica do universo atual é de natureza desconhecida, chamada de energia escura. Mais: o universo estaria acelerando novamente, mas com características distintas da inflação. Verificou-se que os dados poderiam ser acomodados por um modelo cosmológico híbrido, combinando as características do de dS com às da classe de modelos de FRW puros. Tal modelo é chamado de Λ CDM (Λ -Cold Dark Matter), nome baseado nos componentes que admite como fonte da gravitação: a matéria não-relativística e a constante cosmológica. A conclusão oferecida pelo relativo sucesso do modelo Λ CDM é: os setenta por cento de energia escura seriam de responsabilidade de Λ .

A discussão não está encerrada, entretanto, e os dados das observações cosmológicas ganharam nos últimos anos uma grande precisão, despertando o interesse

^{*}Diferentes cenários inflacionários são aceitáveis em princípio [2] mas o mais simples é aquele dado pela solução de dS. E, em que pesem as críticas, e.g. [3],[4], ele é uma primeira aproximação adequada para praticamente todos os modelos calcados na dinâmica do inflaton.

numa solução exata completa para as equações diferenciais de $a(t)$. É usual que se discuta os modelos FRW nas coordenadas ditas “comóveis” de Friedmann, e o modelo de dS em outras coordenadas (como as ditas “estáticas”). Isso dificulta qualquer comparação que se queira fazer entre eles e, ainda mais, qualquer estudo de uma eventual transição de um a outro. Examinaremos aqui a solução geral do modelo completo em coordenadas comóveis de Friedmann. O capítulo 2 cuida da construção deste modelo completo que computa todos os quatro tipos de fontes: matéria (como poeira), radiação, constante cosmológica e parâmetro de curvatura κ . (Os valores de κ fixam a geometria da seção espacial em plana – $\kappa = 0$, esférica – $\kappa = +1$, ou hiperbólica – $\kappa = -1$.) A solução é implícita: encontra-se o tempo como função do fator de escala e não o contrário. $t = t(a)$ é dada em termos de funções elípticas de primeiro e terceiro tipos e esta sofisticação motiva uma abordagem construtiva, encontrando soluções para valores particulares de κ e considerando em adição a constante cosmológica, na presença e ausência de matéria e radiação com complexidade crescente. A solução completa, nomeada $\Lambda\gamma$ CDM, deve ser usada sempre que se quer precisão, distoando particularmente do modelo Λ CDM para valores baixos de t .

Focalizaremos justamente a transição entre as fases acelerada e desacelerada no universo primordial, que equivale a uma passagem eventual do modelo de dS ao de FRW. Gostaríamos de entender qual mecanismo engendra a transição entre esses diferentes cenários; o que poderia ser feito de duas formas: (i) estudando a viabilidade uma equação de estado unificada admitida pelos modelos baseada em primeiros princípios (o que afetaria o lado direito das Equações de Einstein)[†] ou (ii) abordando a referida transição do ponto de vista geométrico (lado esquerdo das equações de Einstein), como um processo de quebra de simetria. É nesta segunda vertente que se enquadram os resultados expostos no capítulo 3 e seguintes.

As simetrias de um dado espaço-tempo são as isometrias associadas ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Os campos de isometrias são determinados como soluções das equações de Killing [6] escritas para esta métrica. Integrando esse conjunto de equações diferenciais parciais acopladas, determinamos as componentes de Killing ξ^μ com as quais se constroem os geradores $X_N = \xi_N^\mu \partial_\mu$ relacionados a cada uma das N constantes de integração. Tais geradores formam a álgebra do grupo de simetria do modelo sob análise: a tabela de comutação desses geradores é de particular interesse para classificação do grupo.

No capítulo 3 implementamos este programa para o intervalo de FRW em suas

[†]Um fluido exótico portador de uma equação de estado em que a pressão é negativa, $p = -\epsilon$ (ϵ é a densidade de energia), mimetiza o efeito da constante cosmológica.

coordenadas comóveis usuais. A integração mostra que é possível obter dez geradores de simetria apenas se $a(t)$ é fixado como a solução de dS, i.e., os dez geradores de Killing não são válidos para qualquer função de escala de FRW: eles são geradores de dS expressos nas coordenadas comóveis de FRW. Para todo $a(t)$ que não o de dS, restam apenas os seis geradores de simetria da seção espacial de FRW [12]. A quebra de simetria dS-FRW emerge não como um processo, mas como uma seleção: ou a função $U = a^2 \dot{H}$ (sendo $H = \dot{a}/a$; o ponto indica derivada temporal) é constante no tempo, dando origem à solução de dS e ao número maximal de simetrias; ou $U = U(t)$ e $a(t)$ permanece a determinar, exigindo que $\xi^0 = 0$ e que seis seja o número de geradores de FRW.

Depois de uma transformação adequada, os dez geradores de dS em coordenadas comóveis precisam coincidir com os geradores de dS nas, talvez mais familiares, coordenadas estáticas. A comparação é desejável porque os geradores de dS nas coordenadas de FRW não possuem interpretação física imediata, uma propriedade que os geradores de dS nas coordenadas estáticas possuem, dada a relação próxima destes com os geradores do grupo de Poincaré das isometrias do espaço de Minkowski (capítulo 4). Para executar a comparação construímos, no capítulo 5, as transformações de Robertson generalizadas entre os intervalos de dS em coordenadas estáticas e o de FRW. Estendemos, assim, as regras dadas na Ref. [5] válidas para o caso em que o parâmetro de curvatura é nulo ($\kappa = 0$). Os geradores de dS nas coordenadas estáticas são listados no capítulo 4 juntamente com a tabela de comutação de dS no mesmo sistema de coordenadas. A transformação dos geradores de um sistema de coordenadas para o outro é realizada na seção 5.2.

Em favor da atribuição de significado físico aos geradores do capítulo 3, e para atestar que eles são de fato geradores de dS, estudamos as suas contrações de acordo com a teoria de Inönü-Wigner [13], [14]. A contração de Inönü-Wigner relaciona diferentes grupos através de uma cuidadosa tomada de limite no(s) parâmetro(s) presente(s) na estrutura algébrica dos grupos. Sabemos que o limite $L \rightarrow \infty$ deve reduzir a álgebra de dS à de Poincaré. Portanto, se a nossa integração das equações de Killing estiver correta, os conjuntos de geradores de dS nas coordenadas estáticas e de FRW irão ambos degenerar nos geradores de Poincaré (ou numa combinação linear deles) neste limite. Isto é verificado no capítulo 6.

Tecemos os comentários finais no capítulo 7.

Capítulo 2

As soluções exatas do Modelo Cosmológico Padrão [15]

Para fixar a notação, escrevemos as equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

com constante cosmológica Λ e conteúdo de energia modelado por um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} ,$$

onde p é a pressão do fluido e $\rho = \epsilon/c^2$ é o equivalente em massa da densidade de energia. Usaremos a assinatura da métrica $(+1, -1, -1, -1)$, tal que o quadrado da quadri-velocidade u^μ é $u_\mu u^\mu = 1$ para linhas de fluxo do tipo tempo.

Quando escolhemos um referencial que acompanha a expansão cósmica ($u_\mu = \delta_{\mu 0}$) – adotando, assim, coordenadas comóveis, e usamos o elemento de linha de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (2.1)$$

($\kappa = 0, \pm 1$) para o cálculo do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e do escalar de curvatura R , somos levados ao par de equações de Friedmann para o parâmetro de escala $a(t)$:

$$\dot{a}^2 = \left[2 \left(\frac{4\pi G}{3} \right) \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \right] a^2 - \kappa c^2, \quad (2.2)$$

$$\ddot{a} = \left[\frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \right] a. \quad (2.3)$$

O intervalo (2.1) é construído por argumentos de simetria: ele descreve espaços-tempos com seções espaciais homogêneas e isotrópicas [8], [6], [7], que constituem folhas localizadas pelo tempo cosmológico t .

Diferenciando (2.2) com respeito a t e empregando (2.3), encontramos a expressão para a conservação da energia,

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) , \quad (2.4)$$

em que

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.5)$$

é a função de Hubble.

Em termos de H , o par (2.2,2.3) é reescrito como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\kappa c^2}{a^2}, \quad (2.6)$$

$$\dot{H} = -\frac{3}{2} \left[\frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \right] + \frac{\kappa c^2}{a^2}. \quad (2.7)$$

Seja $t = t_0$ o valor atual do tempo cosmológico. Definimos $f(t_0) = f_0$ como o valor atual da função (arbitrária) $f(t)$; assim, por exemplo, $H(t_0) = H_0$ é o valor da função de Hubble hoje (ou seja, a constante de Hubble). Acrescentamos a essas definições a da densidade crítica

$$\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.8)$$

em termos da qual a Eq. (2.6) torna-se

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega(t) + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa(t), \quad (2.9)$$

sendo

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}; \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}; \quad \Omega_\kappa = -\frac{\kappa c^2}{a^2 H_0^2} \quad (2.10)$$

os parâmetros adimensionais de densidade. Note-se que: (i) Ω é função do tempo: $\rho = \rho(t)$ é a soma das contribuições da *matéria* (bariônica e escura-fria) $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{crit}}$ e da *radiação* $\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_{crit}}$; (ii) Ω_Λ é uma constante; e (iii) Ω_κ varia com t segundo $a^{-2}(t)$ mas é identicamente zero para um modelo de seção-espacial plana ($\kappa = 0$). Avaliando (2.9) em $t = t_0$ encontramos o vínculo usual

$$\Omega_0 + \Omega_{\kappa 0} + \Omega_\Lambda = 1, \quad (2.11)$$

ou, para $\Omega_{total} \equiv (\Omega_0 + \Omega_\Lambda)$,

$$\Omega_{total} - 1 = \frac{\kappa c^2}{a_0^2 H_0^2}. \quad (2.12)$$

A observação fixa o valor de κ : somos forçados a escolher $\kappa = +1$ se $\Omega_{total} > 1$ e $\kappa = -1$ caso $\Omega_{total} < 1$. Em ambos os casos o valor atual do fator de escala é determinado por $a_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\Omega_{total}-1}} \frac{c}{H_0}$. Se $\Omega_{total} = 1$, então $\kappa = 0$ e a_0 permanece indeterminado.

2.1 Soluções de de Sitter

Lembremos que há dois tipos de espaços de de Sitter, um com curvatura escalar de Ricci negativa ($R < 0$) e outro com curvatura escalar de Ricci positiva ($R > 0$), respectivamente:

1. *Espaço-tempo de de Sitter (dS)*. Indicado por $dS(4, 1)$, consiste de uma 4-superfície hiperbólica cuja inclusão no espaço pseudo-Euclidiano $\mathbf{E}^{4,1}$ satisfaz ($A, B = 0, 1, 2, 3, 4$)

$$\eta_{AB}x^Ax^B = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta - (x^4)^2 = -L^2,$$

onde $(\eta_{\alpha\beta}) = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$. Esta variedade é um hiperbolóide com topologia $R^1 \times S^3$ e grupo de movimento pseudo-ortogonal $SO(4, 1)$.

2. *Espaço-tempo de anti-de Sitter (AdS)*. Indicado por $dS(3, 2)$, uma 4-superfície hiperbólica cuja inclusão no espaço pseudo-Euclidiano $\mathbf{E}^{3,2}$ satisfaz

$$\eta_{AB}x^Ax^B = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + (x^4)^2 = L^2.$$

Esta variedade é um hiperbolóide com topologia $S^1 \times R^3$ e grupo de movimento $SO(3, 2)$.

Com a notação $\eta_{44} = s$, ambos os espaços de de Sitter podem ser postos em

$$\eta_{AB}x^Ax^B = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + s(x^4)^2 = sL^2.$$

Os espaços de de Sitter são soluções das equações de Einstein sem fontes e com Λ relacionada ao pseudo-raio L e escalar de curvatura R por

$$\frac{\Lambda}{3} = -\frac{s}{L^2} = -\frac{R}{12}. \quad (2.13)$$

Note, portanto:

$$\begin{aligned} dS &: s = -1; \quad \Lambda > 0, \\ AdS &: s = +1; \quad \Lambda < 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Daqui em diante, preocupar-nos-emos apenas com os espaços de de Sitter (dS).

O espaço de dS é a solução de vácuo homogênea e isotrópica das equações de Friedmann: satisfaz (2.2) e (2.3) com p e ρ nulos, i.e.,

$$\dot{a}^2 = \frac{c^2}{L^2}a^2 - \kappa c^2; \quad (2.15)$$

$$\ddot{a} = \frac{c^2}{L^2}a. \quad (2.16)$$

Estas equações não são independentes.

2.1.1 O caso $\kappa = 0$

Sugerimos $a(t) = e^{\alpha t}$ e fazemos a substituição deste anatz em (2.16), o que resulta em $\alpha = \pm c/L$. De maneira geral, teríamos, portanto, $a = A_0 e^{\frac{c}{L}t} + B_0 e^{-\frac{c}{L}t}$. Porém a Eq. (2.15) com $\kappa = 0$ exige $B_0 = 0$. Ademais, se vamos impor a condição inicial

$$a(0) = A, \quad (2.17)$$

devemos ter $A_0 = A = a_0 e^{-\frac{c}{L}t_0}$. A solução dita “inflacionária do tipo exponencial” é obtida tomando o sinal + para α :

$$a(t) = A e^{\frac{c}{L}t}. \quad (2.18)$$

Perceba-se que $\frac{\Lambda}{3} = -\frac{s}{L^2} > 0$ é essencial para a inflação – apenas o espaço de de Sitter dS (e não o de anti-de Sitter AdS) pode levar a uma função de crescimento exponencial. Outro ponto: os tratamentos usuais consideram soluções com valor inicial $A = 0$, representando a singularidade do Big Bang. Aqui, porém, não haverá inflação se o valor inicial de $a(t)$ é zero. Procuraremos por soluções com $A > 0$ que generalizam (2.18), i.e., que se reduzem a ela quando apenas o termo cosmológico está presente e $\kappa = 0$.

Inserindo (2.18) na definição (2.5) da função de Hubble, encontramos

$$H = \frac{c}{L}, \quad (2.19)$$

uma constante.

2.1.2 O caso $\kappa \neq 0$

Se substituirmos $a = A_0 e^{\frac{c}{L}t} + B_0 e^{-\frac{c}{L}t}$ em (2.15) e mantivermos $\kappa \neq 0$ encontraremos a restrição $B_0 = \frac{\kappa L^2}{4A_0}$. Então, a condição inicial $a(0) = A$ fixa $A_0 = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - \kappa L^2}}{2}$. Apenas o sinal positivo leva à solução

$$a(t) = \frac{1}{2} \left[\left(A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right) e^{\frac{c}{L}t} + \frac{\kappa L^2}{\left(A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right)} e^{-\frac{c}{L}t} \right], \quad (2.20)$$

que se reduz a (2.18) quando $\kappa = 0$.

A solução (2.20) tem a forma sugestiva

$$a(t) = \frac{1}{2} \left[f_L(t) + \frac{\kappa L^2}{f_L(t)} \right], \quad (2.21)$$

com

$$f_L(t) = \left(A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right) e^{\frac{ct}{L}}. \quad (2.22)$$

Substituindo (2.21) em (2.1), encontramos o elemento de linha inflacionário de Sitter *a la* Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{1}{4} \left[f_L(t) + \frac{\kappa L^2}{f_L(t)} \right]^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.23)$$

Empregando (2.21) – e o fato que $\dot{f}_L = \frac{c}{L} f_L$ – calculamos a função de Hubble (2.5) relativa à solução de dS:

$$H(t) = \frac{c}{L} \left(1 - 2 \frac{\kappa L^2}{f_L^2(t) + \kappa L^2} \right). \quad (2.24)$$

Note-se como (2.24) se reduz à (2.19) para $\kappa = 0$.

A identidade

$$\left(A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right) \left(A - \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right) = \kappa L^2 \quad (2.25)$$

permite pôr (2.20) em termos de funções hiperbólicas do tempo:

$$a(t) = A \cosh \frac{ct}{L} + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \sinh \frac{ct}{L}. \quad (2.26)$$

2.2 Soluções do Modelo Λ -FRW

Chamamos Modelo de Λ -FRW aquele que, além da matéria não-relativística (bariônica e escura) e radiação, considera a energia escura (constante cosmológica) como fonte para a dinâmica de $a(t)$.

2.2.1 Materia Não-Relativística

A Eq. (2.4) pode ser posta na forma

$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) = - \frac{p}{c^2} \frac{d(a^3)}{dt}. \quad (2.27)$$

No regime não-relativístico, a pressão da matéria (bariônica ou escura-fria) $p = nkT$ é desprezível em comparação com a densidade, $(\rho + \frac{p}{c^2}) = \frac{n}{c^2} (mc^2 + kT) \simeq \rho$, pois $mc^2 \gg kT$: a energia da massa de repouso é muito maior que a energia de agitação térmica das partículas massivas. Colocando

$$p = 0, \quad (2.28)$$

a chamada *aproximação de poeira*, na equação (2.27) resulta a igualdade

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 = \text{constante}, \quad (2.29)$$

onde a_0 e ρ_0 são os valores atuais ($t = t_0$) do fator de escala e da densidade.

O caso $\kappa = 0$ e $\Lambda \neq 0$ (Modelo Λ CDM)

Elimina-se o termo em ρ de (2.7) usando (2.6):

$$\dot{H} = \frac{3}{2} \left(\frac{c^2}{L^2} - H^2 \right) - \frac{4\pi G}{c^2} p - \frac{1}{2} \frac{\kappa c^2}{a^2}, \quad (2.30)$$

onde, de acordo com (2.13), fizemos $\frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{L^2}$.*

Na aproximação de poeira ($p = 0$) e no caso em que $\kappa = 0$ devemos resolver

$$\dot{H} = \frac{3}{2} \left(\frac{c^2}{L^2} - H^2 \right). \quad (2.31)$$

A integração é trabalhosa mas direta e o resultado é:

$$H(t) = \frac{c}{L} \frac{\left[\frac{c}{L} + H(0) \right] e^{\frac{3}{2} \frac{c}{L} t} \mp \left[\frac{c}{L} - H(0) \right]}{\left[\frac{c}{L} + H(0) \right] e^{\frac{3}{2} \frac{c}{L} t} \pm \left[\frac{c}{L} - H(0) \right]}. \quad (2.32)$$

Com (2.6), $\kappa = 0$, $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$, e a definição

$$Mc^2 \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^3 \quad (2.33)$$

obtemos:

$$H^2 = \frac{Mc^2}{a^3} + \frac{c^2}{L^2}. \quad (2.34)$$

Daí segue a condição inicial

$$H^2(0) = \frac{Mc^2}{A^3} + \frac{c^2}{L^2}. \quad (2.35)$$

Também da expressão acima para H^2 vêm:

$$a = (Mc^2)^{\frac{1}{3}} \left[H^2 - \frac{c^2}{L^2} \right]^{-\frac{1}{3}},$$

ou, com (2.32),

$$a = \left(\frac{ML^2}{\mp 4 \left[\frac{c^2}{L^2} - H^2(0) \right]} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\left[\frac{c}{L} + H(0) \right] e^{\frac{3}{2} \frac{c}{L} t} \pm \left[\frac{c}{L} - H(0) \right] e^{-\frac{3}{2} \frac{c}{L} t} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Esta última, com a escolha do sinal superior, reduz-se a

$$a(t) = \frac{A}{2^{\frac{2}{3}}} \left(\left[1 + \sqrt{1 + \frac{ML^2}{A^3}} \right] e^{\frac{3}{2} \frac{c}{L} t} + \left[1 - \sqrt{1 + \frac{ML^2}{A^3}} \right] e^{-\frac{3}{2} \frac{c}{L} t} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.36)$$

*Estamos restritos ao modelo de dS para o qual $s = -1$. (Como dissemos, não tratamos o caso AdS.)

ao empregarmos (2.35). A opção pelo sinal + é adequada tendo em vista que assim obtemos os limites adequados:

(i) para $M \rightarrow 0$ temos:

$$a(t) = Ae^{\frac{c}{L}t},$$

a solução inflacionária usual (2.18) válida quando apenas a constante cosmológica é fonte de curvatura; e

(ii) com $L \rightarrow \infty$ (i.e. $\Lambda \rightarrow 0$) encontramos:

$$a(t) \simeq \frac{A}{2^{\frac{2}{3}}} \left(\left[1 + \sqrt{\frac{M}{A^3}} L \right] \left[1 + \frac{3}{2} \frac{c}{L} t \right] + \left[1 - \sqrt{\frac{M}{A^3}} L \right] \left[1 - \frac{3}{2} \frac{c}{L} t \right] \right)^{\frac{2}{3}},$$

ou seja,

$$a(t) \simeq \left(A^{3/2} + \frac{3}{2} \sqrt{M} c t \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.37)$$

a solução para um universo dominado pela matéria.[†]

Em uma notação análoga a (2.21) escrevemos (2.36) como

$$a(t) = \frac{A}{2^{\frac{2}{3}}} \left(f_M(t) - \frac{ML^2}{A^3} \frac{1}{f_M(t)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.38)$$

onde

$$f_M(t) = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{ML^2}{A^3}} \right] e^{\frac{3}{2} \frac{c}{L} t}. \quad (2.39)$$

O caso $\kappa \neq 0$ e $\Lambda = 0$

Aqui as equações (2.2) e (2.3) ficam:

$$\dot{a}^2 + \kappa c^2 - \frac{Mc^2}{a} = 0 \quad (2.40)$$

$$\ddot{a} + \frac{1}{2} \frac{Mc^2}{a^2} = 0, \quad (2.41)$$

onde usamos (2.29) e (2.33). A primeira das equações acima equivale a

$$\int \frac{ada}{\sqrt{Ma - \kappa a^2}} = c \int dt \quad (2.42)$$

e a resolvemos para cada valor de κ .

[†]A maneira usual de escrever a solução de um universo dominado pela matéria $a(t) = a_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}}$ é encontrada do nosso resultado ao lembrarmos que de (2.6) segue $H_0^2 = \frac{Mc^2}{a_0^3}$. Este caso usual é normalizado a valores atuais.

(a) $\kappa = 0$. Pode ser usado como um caso-teste: com a condição inicial $a(0) = A$, a integração leva a

$$a^{\frac{3}{2}} - A^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{M} ct ,$$

justamente o resultado (2.37) da sub-seção 2.2.1: limite de (2.36) quando $\Lambda \rightarrow 0$.

(b) $\kappa = +1$. A integração de (2.42),

$$\int \frac{\sqrt{\frac{a}{M}} d\left(\frac{a}{M}\right)}{\sqrt{1 - \frac{a}{M}}} = \frac{c}{M} \int dt ,$$

dá $a(t)$ de um modo implícito:[‡]

$$ct = \sqrt{MA - A^2} - \sqrt{Ma - a^2} + M \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{a}{M}} \right) - \arcsin \left(\sqrt{\frac{A}{M}} \right) \right] . \quad (2.43)$$

(c) $\kappa = -1$. Resolvendo

$$\int \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{1 + \frac{a}{M}}} = \sqrt{M} c \int dt$$

obtem-se:[§]

$$ct = \sqrt{Ma + a^2} - \sqrt{MA + A^2} + M \ln \left[\frac{\sqrt{A} + \sqrt{A + M}}{\sqrt{a} + \sqrt{a + M}} \right] . \quad (2.44)$$

Note-se que no limite em que $M \rightarrow 0$, $a(t) = A + ct$, mas isso corresponderia a um modelo cosmológico sem fontes (também sem energia escura Λ) mas com um parâmetro de curvatura não-nulo, o que não parece razoável na teoria de Einstein da gravitação, segundo a qual só a presença de matéria-energia é que engendra a curvatura do espaço-tempo. Este limite é, pois, descartado.

[‡]Resolve-se a integral

$$\int \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{1 - y}} = \arcsin \sqrt{y} - \sqrt{y} \sqrt{1 - y}$$

pelo método de integração por partes, aplicado diversas vezes, com algumas substituições de variáveis auxiliares.

[§]A integral

$$\int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1 + y}} dy = \sqrt{y} \sqrt{1 + y} - \operatorname{arcsinh} \sqrt{y}$$

resolve-se de maneira inteiramente análoga ao caso anterior; e é fácil mostrar a igualdade

$$\operatorname{arcsinh} \sqrt{y} = \ln \left(\sqrt{y} + \sqrt{y + 1} \right) .$$

Quando $M > 0$, aparece uma função de $a(t)$:

$$\frac{e^{\sqrt{\frac{a}{M} + \left(\frac{a}{M}\right)^2}}}{\sqrt{\frac{a}{M}} + \sqrt{1 + \frac{a}{M}}} = \frac{e^{\sqrt{\frac{A}{M} + \left(\frac{A}{M}\right)^2}}}{\sqrt{\frac{A}{M}} + \sqrt{1 + \frac{A}{M}}} e^{\frac{ct}{M}}.$$

Isto pode ser escrito como

$$F\left[\frac{a(t)}{M}\right] = F\left[\frac{A}{M}\right] e^{\frac{ct}{M}},$$

com

$$F(x) = \frac{e^{\sqrt{x+x^2}}}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$$

monotônica, assim como $a(t)$.

Resolvemos nesta seção as equações de Friedmann com uma fonte de poeira ($M \neq 0$) para $\kappa \neq 0$ ou para o caso $\Lambda \neq 0$ escolhendo soluções do tipo inflacionário. O caso com ambos $\kappa \neq 0$ e $\Lambda \neq 0$ é muito mais complexo, praticamente tanto quanto o caso geral incluindo radiação (além de matéria, energia escura e κ), do qual trataremos mais tarde.

2.2.2 Radiação com $\kappa \neq 0$ e $\Lambda \neq 0$

A equação de estado para a radiação,

$$p = \frac{\rho c^2}{3}, \quad (2.45)$$

vem de considerações acerca da estatística do corpo negro [16], onde o equivalente em massa da energia

$$\rho = \frac{\epsilon}{c^2} \quad (2.46)$$

é calculado com expressão da densidade de energia da radiação de corpo negro

$$\epsilon = \frac{48\pi}{(hc)^3} \zeta(4) (kT)^4. \quad (2.47)$$

Note-se ademais, a relação entre a temperatura T e o fator de escala $a(t)$ via *redshift* z :[¶]

$$kT = kT_0 (1+z) = kT_0 \left(\frac{a_0}{a}\right), \quad (2.48)$$

[¶]Para entender a relação (2.48), lembre-se que a energia média por fóton $\langle E \rangle = \langle h\nu \rangle$, em que h é a constante de Plank e ν a frequência da radiação, é proporcional à sua energia térmica kT , i.e., $\langle h\nu \rangle \propto kT$. Por outro lado, o red-shift é definido como a relação $(1+z) = \frac{\nu}{\nu_0}$ entre a frequência ν_0 medida na recepção (hoje, $t = t_0$) e a frequência ν com que houve a emissão (em t). Com isso, associamos T a z . Por fim, relacionamos z à $a(t)$ através da interação do intervalo (2.1) para um raio de luz ($ds = 0$) do ponto de emissão até nós: $(1+z) = \frac{a_0}{a}$.

onde k é a constante de Boltzman [17]. Substituindo (2.47) e (2.48) em (2.46), temos:

$$\frac{\rho}{\rho_{crit}} = \Omega_{\gamma 0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4, \quad (2.49)$$

em que $\Omega_{\gamma 0}$ é a constante

$$\Omega_{\gamma 0} = \frac{1}{\rho_{crit}} \frac{48\pi}{h^3 c^5} \zeta(4) (kT_0)^4. \quad (2.50)$$

Inserindo (2.49) e (2.45) nas Eqs. (2.2) e (2.3) encontramos:

$$\dot{a}^2 = \left[\frac{\gamma c^2}{a^4} + \frac{c^2}{L^2} \right] a^2 - \kappa c^2 \quad (2.51)$$

$$\ddot{a} = \left[\frac{c^2}{L^2} - \frac{\gamma c^2}{a^4} \right] a, \quad (2.52)$$

onde definimos

$$\gamma c^2 \equiv \Omega_{\gamma 0} H_0^2 a_0^4. \quad (2.53)$$

Este é o parâmetro que acusa a presença da radiação.

Resolvemos a Eq. (2.51)

$$\frac{ada}{\sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{\gamma} \right) a^2 + \left(\frac{1}{\gamma L^2} \right) a^4}} = \sqrt{\gamma c^2} dt$$

por integração direta (completando quadrado e mudando de variáveis). O resultado é:

$$a(t) = \sqrt{\frac{\kappa L^2}{2} - \frac{1}{2} \left[f_{\gamma}(t) + \frac{\left(\frac{\kappa L^2}{2} \right)^2 - \gamma L^2}{f_{\gamma}(t)} \right]} \quad (2.54)$$

com

$$f_{\gamma}(t) = \left[\left(\frac{\kappa L^2}{2} - A^2 \right) - \sqrt{\gamma L^2 + A^2 (A^2 - \kappa L^2)} \right] e^{2 \frac{\gamma}{L} t}, \quad (2.55)$$

uma solução com forma semelhante às Eqs. (2.21, 2.38).

Observe-se que o valor a $t = 0$ é $a(0) = A$ de forma coerente com a condição inicial (2.17) que adotamos.

É um bom teste analisar alguns limites:

(i) No limite em que $\gamma \rightarrow 0$ (ausência de radiação), a equação (2.54) reduz-se a solução de de Sitter para $\kappa \neq 0$, Eq. (2.26).

(ii) Para $L \rightarrow \infty$ (ausência de constante cosmológica), o fator de escala (2.54) simplifica-se para

$$a(t) = \sqrt{A^2 + 2\sqrt{\gamma - \kappa A^2} ct - \kappa (ct)^2}. \quad (2.56)$$

(iii) No caso em que apenas $\kappa = 0$:

$$a(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[A^2 + \sqrt{\gamma L^2 + A^4} \right] e^{2\frac{c}{L}t} + \left[A^2 - \sqrt{\gamma L^2 + A^4} \right] e^{-2\frac{c}{L}t} \right\}}. \quad (2.57)$$

(iv) Tomando, em adição à restrição $\kappa = 0$, também o limite $\Lambda \rightarrow 0$ (i.e., $L \rightarrow \infty$) segue que:

$$a(t) = \sqrt{A^2 + 2\sqrt{\gamma}ct}, \quad (2.58)$$

que é a solução convencional para um universo dominado pela radiação, em que $a \propto t^{1/2}$.

2.2.3 A Solução Geral: $M \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\Lambda \neq 0$ e $\kappa \neq 0$

De acordo com as seções anteriores, matéria não-relativística e radiação são descritas em Cosmologia pelos pares de equações constitutivas

$$\rho_M = \frac{3}{8\pi G} \frac{Mc^2}{a^3}, \quad p_M = 0 \quad (2.59)$$

e

$$\rho_\gamma = \frac{3}{8\pi G} \frac{\gamma c^2}{a^4}, \quad p_\gamma = \frac{\rho_\gamma c^2}{3}, \quad (2.60)$$

respectivamente. Assim, as fontes contribuindo para as equações de Friedmann, Eqs. (2.2,2.3) são $\rho = (\rho_M + \rho_\gamma)$ e $p = p_\gamma$ levando a:

$$\dot{a}^2 = \left[\frac{Mc^2}{a^3} + \frac{\gamma c^2}{a^4} + \frac{c^2}{L^2} \right] a^2 - \kappa c^2, \quad (2.61)$$

$$\ddot{a} = \frac{c^2}{L^2} a - \frac{1}{2} \left[\frac{Mc^2}{a^3} + 2\frac{\gamma c^2}{a^4} \right] a. \quad (2.62)$$

A integração da primeira das equações acima

$$\int_A^a \frac{a \, da}{\sqrt{\gamma L^2 + ML^2 a - \kappa L^2 a^2 + a^4}} = \frac{c}{L} \int_0^t dt$$

é feita seguindo os passos abaixo:

1. Escreva-se a integral acima em termos das raízes $\{r_i\}$ do denominador:

$$\int \frac{a \, da}{\sqrt{\gamma L^2 + ML^2 a - \kappa L^2 a^2 + a^4}} = \int \frac{a \, da}{\sqrt{(a - r_1)(a - r_2)(a - r_3)(a - r_4)}}. \quad (2.63)$$

2. Introduza-se algumas constantes, em termos das quais as raízes serão expressas mais tarde:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left[27 (ML^2)^2 - 2 (\kappa L^2)^3 + 72 (\kappa L^2) (\gamma L^2) \right]^2 ; \\
c_2 &= (\kappa L^2)^2 + 12 (\gamma L^2) ; \\
c_3 &= c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2^3} ; \\
c_4 &= \frac{1}{3} \left[2\kappa L^2 - \left(\frac{c_3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} - c_2 \left(\frac{2}{c_3} \right)^{\frac{1}{3}} \right] ; \\
c_5 &= 2\kappa L^2 - c_4 ; \\
c_6 &= \frac{\sqrt{c_4}}{2} .
\end{aligned} \tag{2.64}$$

3. As raízes, então, serão:

$$\begin{aligned}
r_1 &= c_6 - \frac{1}{2} \sqrt{c_5 - \frac{ML^2}{c_6}} ; & r_2 &= c_6 + \frac{1}{2} \sqrt{c_5 - \frac{ML^2}{c_6}} ; \\
r_3 &= -c_6 - \frac{1}{2} \sqrt{c_5 + \frac{ML^2}{c_6}} ; & r_4 &= -c_6 + \frac{1}{2} \sqrt{c_5 + \frac{ML^2}{c_6}} .
\end{aligned} \tag{2.65}$$

4. As soluções serão implícitas e envolverão funções elípticas de dois tipos [18], [19]:

- A integral elíptica de primeiro tipo com parâmetro m e amplitude ϕ ,

$$F[\phi, m] = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} ; \tag{2.66}$$

- A integral elíptica de terceiro tipo com parâmetro m , característica n e amplitude ϕ :

$$\Pi[n, \phi, m] = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} . \tag{2.67}$$

5. A característica e o parâmetro para o problema em questão serão:

$$n = \left(\frac{r_2 - r_4}{r_1 - r_4} \right) ; \quad m = \left(\frac{r_1 - r_3}{r_2 - r_3} \right) n . \tag{2.68}$$

6. A amplitude envolvida será

$$\phi(a) = \arcsin \sqrt{\frac{a - r_2}{n(a - r_1)}} . \tag{2.69}$$

7. Afinal, a solução implícita será:

$$\frac{ct}{2L} = \frac{(r_1 - r_2) \Pi[n, \phi(x), m] - r_1 F[\phi(x), m]}{\sqrt{(r_2 - r_3)(r_1 - r_4)}} \Big|_{x=A}^a. \quad (2.70)$$

Vemos das suas definições que ambas as funções elípticas desaparecem quando $\phi = 0$, i.e., quando $a = r_2$; e isto leva a $t = 0$, portanto. Pondo de outra forma, $a(0) = A = r_2$ é a condição inicial do caso cosmológico geral. A forma complicada desta solução sugere o seu uso apenas no caso geral. De fato, ela reduz-se aos casos particulares esperados, o que pode ser verificado mais facilmente confrontando os gráficos de cada caso particular com as curvas correspondentes construídas a partir do fator de escala geral obtido de (2.70).

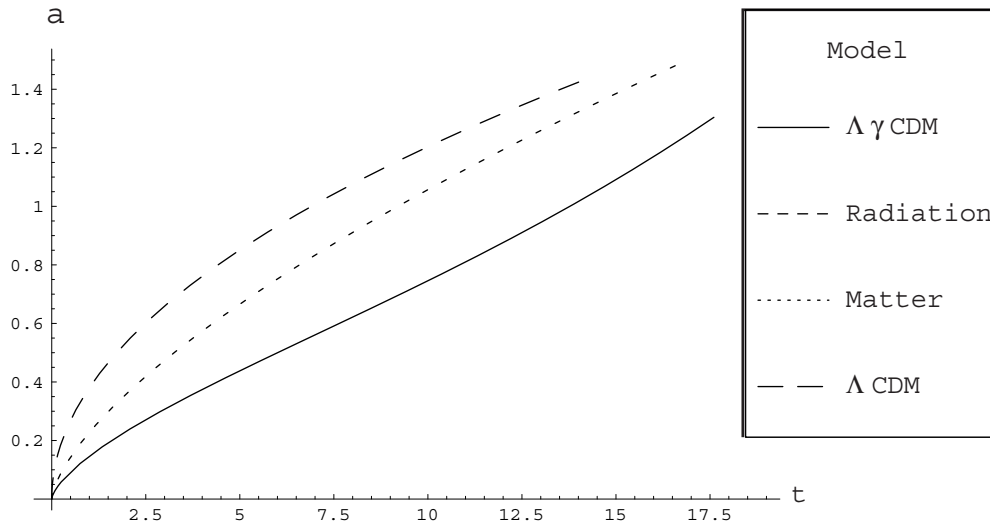


Figura 2.1: O fator de escala $a(t)/a_0$ em termos de t (em Gyear). As duas curvas superiores são modelos de referência (somente radiação e matéria, respectivamente) de evolução desacelerada. A linha cheia é a representação do universo $\Lambda\gamma$ CDM, que coincide com o modelo Λ CDM na escala usada. Ele apresenta um ponto de inflexão no qual Λ passa a dominar e começa a aceleração.

Os gráficos mostrados na Figura 2.1 incluem a solução geral – linha cheia, o Modelo $\Lambda\gamma$ CDM – e dois outros casos de referência: Universo dominado pela radiação – linha tracejada, correspondente à Eq. (2.58) – e Universo dominado pela matéria – linha pontilhada, cf. (2.37). Em acordo com os dados observacionais, o parâmetro de curvatura é posto nulo para todas as funções $a(t)$, $\kappa = 0$. Os

valores de L , M e γ são escolhidos de acordo com os valores atuais [9], [10], [20]: $\Omega_{total} = 1.02 \pm 0.02$, $\Omega_{m0} = 0.27 \pm 0.04$ (contribuição das matérias bariônica e escura), $\Omega_{\gamma0} = (4.9 \pm 0.5) \times 10^{-5}$, e $H_0 = (71^{+0.004}_{-0.003}) \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. O tempo $T = ct$ ($c = 1$) é dado em Gyear e o fator de escala é medido em unidades do seu valor atual a_0 , uma constante arbitrária. Quando consideramos somente radiação (somente matéria), tomamos $\Omega_{\gamma0} = \Omega_{total}$ ($\Omega_{m0} = \Omega_{total}$).

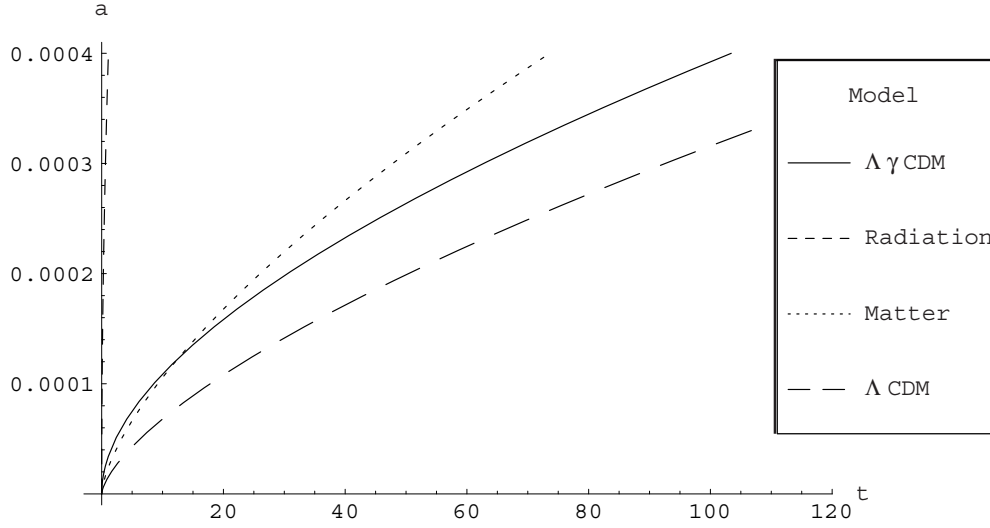


Figura 2.2: Ampliação da curva $a(t)/a_0$ para o universo primordial, com o tempo t dado agora em kyear. A curva tracejada do modelo de radiação situa-se muito próxima do eixo vertical. A diferença entre as curvas $\Lambda\gamma\text{CDM}$ e ΛCDM (linha cheia e linha tracejada inferior) é mostrada claramente.

A idade do Universo segundo o modelo $\Lambda\gamma\text{CDM}$ é 13.8 Gyear. Ao contrário dos outros dois modelos mostrados na Fig. 2.1 ele possui um ponto de inflexão para z não muito grande e que inicia a aceleração atual. Naturalmente, os efeitos da matéria e radiação superam largamente o da constante cosmológica no Universo primordial e um modelo puro de radiação evolui muito mais rapidamente que um Universo dominado pela matéria. No presente e futuro, entretanto, a constante cosmológica torna-se mais importante que radiação e matéria e domina a dinâmica cósmica.

Outro gráfico interessante é aquele da solução para matéria mais Λ (com $\gamma = \kappa = 0$), o modelo ΛCDM . Na verdade, este também consta na Fig. 2.1 mas coincide com a solução completa na escala usada. Em escala menores, todavia, está claro que o modelo geral $\Lambda\gamma\text{CDM}$ difere do modelo ΛCDM ($\Omega_{m0} = 0.27$, $\Omega_{\Lambda} = 0.73$, $\gamma = \kappa = 0$), que corresponde a curva inferior na Fig. 2.2, a qual é uma ampliação da Fig. 2.1 para

tempos primordiais. A radiação é o componente dominante neste período inicial: observe-se a curva tracejada muito próxima ao eixo vertical, ou o intervalo $t \lesssim 10$ kyear onde o modelo completo (linha cheia) supera o de matéria (linha pontilhada).

Os trabalhos [21], [22] e [23] construíram em etapas a solução geral com $M \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\Lambda \neq 0$ e $\kappa \neq 0$. A contribuição dada com o modelo $\Lambda\gamma$ CDM é apresentar esta solução em uma versão compacta e em notação moderna.

Capítulo 3

As simetrias de dS e FRW nas coordenadas comóveis [24]

Sejam

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (3.1)$$

as transformações infinitesimais de ponto que mantêm a métrica invariante em forma, as *isometrias*. O tensor métrico $\bar{g}_{\mu\nu}$ deve ser igual à métrica original $g_{\mu\nu}$,

$$\delta g_{\mu\nu}(\bar{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) - g_{\mu\nu}(\bar{x}) \equiv 0 . \quad (3.2)$$

Para fazer sentido, o cálculo da diferença $\delta g_{\mu\nu}$ entre as métricas original e transformada deve ser feito no mesmo ponto, e.g., $\bar{x}$.

A regra para a transformação do tensor métrico sob mudança de ponto é:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \bar{g}_{\rho\sigma}(\bar{x}) . \quad (3.3)$$

Note-se que o tensor transformado $\bar{g}_{\mu\nu}$ é calculado no ponto transformado $\bar{x}$. Dada a condição de isometria (3.2) esta equação torna-se:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(\bar{x}) . \quad (3.4)$$

A transformação $x \rightarrow \bar{x}$ é infinitesimal, tal que podemos escrever a expansão:

$$g_{\rho\sigma}(\bar{x}) = g_{\rho\sigma}(x + \xi) \simeq g_{\rho\sigma}(x) + \partial_\lambda g_{\rho\sigma}(x) \xi^\lambda . \quad (3.5)$$

Tendo em vista (3.1), também temos:

$$\frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (x^\rho + \xi^\rho) = \delta_\mu^\rho + \partial_\mu \xi^\rho ,$$

de maneira que (3.4) é:

$$g_{\mu\nu}(x) = (\delta_\mu^\rho + \partial_\mu \xi^\rho) (\delta_\nu^\sigma + \partial_\nu \xi^\sigma) [g_{\rho\sigma}(x) + \partial_\lambda g_{\rho\sigma}(x) \xi^\lambda] .$$

Desprezando termos proporcionais a ξ ($\partial\xi$) e $(\partial\xi)^2$:

$$0 = \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) \xi^\lambda + \partial_\nu \xi^\sigma g_{\mu\sigma}(x) + \partial_\mu \xi^\rho g_{\rho\nu}(x)$$

ou, usando $\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu$,

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_\lambda = 0 \quad (3.6)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (3.7)$$

são os símbolos (simétricos) de Christoffel, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$, que constituem a conexão da Relatividade Geral.

As equações (3.6) são denominadas *equações de Killing*, e, em termos da derivada covariante $\nabla = \partial + \Gamma$, ficam

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (3.8)$$

uma forma explicitamente simétrica nos índices μ e ν . Determinar as isometrias de uma certa métrica é integrar as equações de Killing para esta métrica.

Dado um elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

é possível empregar as componentes $g_{\mu\nu}$ para calcular os símbolos de Christoffel através de (3.7) e, então, especificar cada equação de Killing correspondente a qual valor dos índices de espaço-tempo.

3.1 A função quebra de simetria $U(t)$

No caso do elemento de linha de FRW,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.9)$$

os únicas componentes não-nulas da conexão são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= \frac{a^2 H}{1 - \kappa r^2}; \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = a^2 H r^2; \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a^2 H r^2 \sin^2 \theta; \\ \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = H; \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2}; \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - \kappa r^2); \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta; \\ \Gamma_{t\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta t}^\theta = H; \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma_{t\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi t}^\phi = H; \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

e as equações diferenciais de Killing (3.6) assumem a forma:

$$\partial_0 \xi_0 = 0 ; \quad (3.11)$$

$$\partial_1 \xi_0 + \partial_0 \xi_1 - 2H \xi_1 = 0 ; \quad (3.12)$$

$$\partial_2 \xi_0 + \partial_0 \xi_2 - 2H \xi_2 = 0 ; \quad (3.13)$$

$$\partial_3 \xi_0 + \partial_0 \xi_3 - 2H \xi_3 = 0 ; \quad (3.14)$$

$$\partial_2 \xi_1 + \partial_1 \xi_2 - \frac{2}{r} \xi_2 = 0 ; \quad (3.15)$$

$$\partial_3 \xi_1 + \partial_1 \xi_3 - \frac{2}{r} \xi_3 = 0 ; \quad (3.16)$$

$$\partial_3 \xi_2 + \partial_2 \xi_3 - 2 \cot \theta \xi_3 = 0 ; \quad (3.17)$$

$$(1 - \kappa r^2) \partial_1 \xi_1 - \kappa r \xi_1 - a^2 H \xi_0 = 0 ; \quad (3.18)$$

$$\partial_2 \xi_2 + r (1 - \kappa r^2) \xi_1 - a^2 H r^2 \xi_0 = 0 ; \quad (3.19)$$

$$\partial_3 \xi_3 + \sin \theta \cos \theta \xi_2 + r (1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta \xi_1 - a^2 H r^2 \sin^2 \theta \xi_0 = 0 . \quad (3.20)$$

Daqui em diante adotaremos $c = 1$: a coordenada $x^0 = t$ assume dimensão de comprimento. Lembramos que em (3.9) as coordenadas $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$ são adimensionais cabendo à função de escala $a(t)$ carregar a dimensão de comprimento.

Os cálculos de integração das equações de Killing (3.11-3.20) são bastante longos e trabalhosos. Como as equações são acopladas temos que usá-las conjuntamente, tomando a derivada parcial de uma delas com respeito a dada coordenada e empregando uma outra equação diferencial envolvendo esta derivação para eliminar termos indesejados.*

Tome-se ∂_0 de (3.18), use-se (3.11) para eliminar $\partial_0 \xi_0$, e (3.12) para substituir $\partial_0 \xi_1$. Isto conduz, depois de se utilizar (3.18) novamente para substituir $\partial_1 \xi_1$, à equação de segunda ordem para a dependência de ξ_0 em r :

$$(1 - \kappa r^2) \partial_1 \partial_1 \xi_0 - \kappa r \partial_1 \xi_0 + U \xi_0 = 0 , \quad (3.21)$$

onde definimos

$$U(t) = a^2 \dot{H} , \quad (3.22)$$

*Este procedimento é levado a cabo integralmente neste capítulo e no Apêndice A, um possível exagero que pode ser relevado tendo em vista as pretensões didáticas com que a tese foi escrita. Para um exemplo mais simples vide a Ref. [25], Apêndice K, onde se aborda o caso da esfera unitária S_2 , decrita por $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Também indicamos aos que iniciam o estudo do assunto a excelente Ref. [26].

dada como função de a e $H = \dot{a}/a$. Tais quantidades são soluções das equações de Friedmann (2.6,2.7):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3.23)$$

$$\dot{H} = -\frac{3}{2} \left[\frac{8\pi G}{3}(\rho + p) \right] + \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3.24)$$

em que a constante cosmológica

$$\Lambda = \frac{3}{L^2} \quad (3.25)$$

aparece em termos do raio L de de Sitter.

Observe-se que U pode ser escrita também em termos da função desaceleração q definida como

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}}. \quad (3.26)$$

A partir de (3.22), temos:

$$U = -a^2 H^2 (1 - q). \quad (3.27)$$

$U(t)$ é chamada de *função de quebra de simetria* devido às seguintes considerações. Extraia-se ∂_0 de (3.21) e empregue-se (3.11) para obter:

$$\dot{U} \xi_0 = 0, \quad (3.28)$$

Logo,

$$\xi_0 = 0 \quad (3.29)$$

ou

$$U = \text{constante}. \quad (3.30)$$

Tomemos o segundo caso, Eq. (3.30). Primeiro, observe-se a equação de Friedmann para $\dot{H}$, Eq. (3.24), e perceba-se que é a própria equação para U ,

$$U = a^2 \dot{H} = -\frac{3}{2} \left[\frac{8\pi G}{3}(\rho + p) \right] a^2 + \kappa. \quad (3.31)$$

Restringindo-nos ao caso de dS, caracterizado pela ausência de fontes ($\rho = p = 0$) [5], esta igualdade reduz-se a:

$$U = \kappa. \quad (3.32)$$

Portanto, a função U é uma constante no caso de de Sitter ($\kappa = -1, 0, +1$ é uma constante!), exatamente como requerido pelo vínculo (3.30). Somos tentados a dizer: $U = \text{constante}$ implica o modelo cosmológico de dS. Isto é confirmado após o longo trabalho de integração de todas as quatro componentes ξ_μ e a identificação do grupo de simetria subjacente como o grupo de dS.

3.2 A integração da componente ξ_0

Nesta seção faremos a integração de ξ_0 em detalhe, para exemplificar o procedimento. Na próxima seção, apenas daremos os resultados para as demais componentes de Killing e, no Apêndice A, encontram-se os cálculos completos de ξ_i .

A dependência radial da componente ξ_0 é dada pela integração da equação de-sacoplada (3.21). Substitua-se (3.32), $U = \kappa$, em (3.21), para reescrever o primeiro membro como a derivada total

$$\partial_1 \left[(1 - \kappa r^2) \partial_1 \xi_0 + \kappa r \xi_0 \right] = 0 .$$

O termo em colchetes deve ser uma constante em r , mas não com respeito às outras coordenadas:

$$(1 - \kappa r^2) \partial_1 \xi_0 + \kappa r \xi_0 = \tau_1(\theta, \phi) , \quad (3.33)$$

cuja solução deve ser a soma da solução homogênea com a particular, $\xi_0 = \xi_0^h + \xi_0^p$.

A solução homogênea ξ_0^h é obtida fixando $\tau_1 = 0$. Por integração direta temos:

$$\xi_0^h = \tau_2(\theta, \phi) \sqrt{1 - \kappa r^2} . \quad (3.34)$$

Uma solução particular para (3.33) é da forma:

$$\xi_0^p = \tau_1(\theta, \phi) r , \quad (3.35)$$

conforme facilmente verificado por substituição na equação diferencial. Dessa forma,

$$\xi_0 = \tau_1(\theta, \phi) r + \tau_2(\theta, \phi) \sqrt{1 - \kappa r^2} , \quad (3.36)$$

onde $\tau_1(\theta, \phi)$ e $\tau_2(\theta, \phi)$ devem ser obtidas das demais equações do sistema (3.11)-(3.20).

Em verdade, para determinar a dependência de ξ_0 em θ , tome-se $\partial_0(3.19)$, use-se (3.13), (3.12) e (3.11) para eliminar $\partial_0 \xi_2$, $\partial_0 \xi_1$ e $\partial_0 \xi_0$ respectivamente e, depois, a Eq. (3.19) para substituir $\partial_2 \xi_2$. Resultado:

$$\partial_2 \partial_2 \xi_0 + r (1 - \kappa r^2) \partial_1 \xi_0 + U r^2 \xi_0 = 0 \quad (3.37)$$

com $U = \kappa$. Usando (3.36) segue:

$$[\partial_2 \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) + \tau_1(\theta, \phi)] r + \partial_2 \partial_2 \tau_2(\theta, \phi) \sqrt{1 - \kappa r^2} = 0 ,$$

Esta igualdade é verificada para todos os valores de r se os coeficientes das funções r e $\sqrt{1 - \kappa r^2}$ anularem-se independentemente:

$$\begin{cases} \partial_2 \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) + \tau_1(\theta, \phi) = 0 \\ \partial_2 \partial_2 \tau_2(\theta, \phi) = 0 \end{cases} , \quad (3.38)$$

donde segue

$$\tau_1(\theta, \phi) = \tau_3(\phi) \sin \theta + \tau_4(\phi) \cos \theta \quad (3.39)$$

e

$$\tau_2(\theta, \phi) = \tau_5(\phi) \theta + \tau_6(\phi) , \quad (3.40)$$

com o que concluimos a determinação da dependência de ξ_0 em θ : pondo (3.39,3.40) em (3.36),

$$\xi_0 = r [\tau_3(\phi) \sin \theta + \tau_4(\phi) \cos \theta] + \sqrt{1 - \kappa r^2} [\tau_5(\phi) \theta + \tau_6(\phi)] . \quad (3.41)$$

Quanto à dependência de ξ_0 em ϕ : tome $\partial_0(3.20)$ e use (3.14), (3.13), (3.12) e (3.11) para eliminar $\partial_0\xi_3$, $\partial_0\xi_2$, $\partial_0\xi_1$ e $\partial_0\xi_0$ nesta ordem. Então, substitua $\partial_3\xi_3$ como dada por (3.20) para encontrar:

$$\partial_3\partial_3\xi_0 + \sin \theta \cos \theta \partial_2\xi_0 + r (1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta \partial_1\xi_0 + U r^2 \sin^2 \theta \xi_0 = 0 . \quad (3.42)$$

Novamente lembramos que, no caso de dS, $U = \kappa$. Pondo (3.41) em (3.42) resulta:

$$\begin{aligned} & r \sin \theta [\partial_3\partial_3\tau_3(\phi) + \tau_3(\phi)] + \\ & + r \cos \theta [\partial_3\partial_3\tau_4(\phi)] + \\ & + \sqrt{1 - \kappa r^2} [\partial_3\partial_3\tau_5(\phi) \theta + \sin \theta \cos \theta \tau_5(\phi) + \partial_3\partial_3\tau_6(\phi)] = 0 . \end{aligned}$$

Dada a independência dos coeficientes $r \sin \theta$, $r \cos \theta$ e $\sqrt{1 - \kappa r^2}$, resta o sistema:

$$\begin{cases} \partial_3\partial_3\tau_3(\phi) + \tau_3(\phi) = 0 \\ \partial_3\partial_3\tau_4(\phi) = 0 \\ \partial_3\partial_3\tau_5(\phi) \theta + \sin \theta \cos \theta \tau_5(\phi) + \partial_3\partial_3\tau_6(\phi) = 0 \end{cases} . \quad (3.43)$$

Das duas primeiras:

$$\tau_3(\phi) = \tau_7 \sin \phi + \tau_8 \cos \phi \quad (3.44)$$

e

$$\tau_4(\phi) = \tau_9 \phi + \tau_{10} . \quad (3.45)$$

A última equação do sistema (3.43) impõe

$$\tau_5(\phi) = 0 \quad (3.46)$$

e

$$\partial_3\partial_3\tau_6(\phi) = 0 ,$$

graças à independência das funções que aparecem multiplicando $\partial_3\partial_3\tau_5(\phi)$, $\tau_5(\phi)$ e $\partial_3\partial_3\tau_6(\phi)$. Do último resultado:

$$\tau_6(\phi) = \tau_{11} \phi + \tau_{12} . \quad (3.47)$$

Substituindo (3.44)-(3.47) em (3.41) determinamos a dependência de ξ_0 em ϕ :

$$\begin{aligned} \xi_0 = & r [(\tau_7 \sin \phi + \tau_8 \cos \phi) \sin \theta + (\tau_9 \phi + \tau_{10}) \cos \theta] + \\ & + \sqrt{1 - \kappa r^2} [\tau_{11} \phi + \tau_{12}] . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Impondo a condição de periodicidade na coordenada azimutal,

$$\xi_0(r, \theta, 0) = \xi_0(r, \theta, 2\pi) ,$$

obtem-se

$$\tau_9 = \tau_{11} = 0 . \quad (3.49)$$

Isto em (3.48) dá:

$$\xi_0 = r [(\tau_7 \sin \phi + \tau_8 \cos \phi) \sin \theta + \tau_{10} \cos \theta] + \sqrt{1 - \kappa r^2} \tau_{12} .$$

Ao renomear as constantes

$$\tau_7 = C_2 ; \quad \tau_8 = C_1 ; \quad \tau_{10} = C_3 ; \quad \tau_{12} = C_0 ;$$

estabelecemos a forma final da componente temporal de Killing para a solução de dS:

$$\xi_0 = \sqrt{1 - \kappa r^2} C_0 + r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] . \quad (3.50)$$

3.3 As componentes ξ_μ de Killing em FRW

Na seção anterior exemplificamos a integração da componente de Killing ξ_0 para a solução de dS nas coordenadas comóveis de FRW. As demais componentes são obtidas por procedimento semelhante, e, no Apendice A, efetuamos a integração detalhada dos ξ_i . Aqui, apenas elencaremos os resultados, poupando o leitor dos longos cálculos:

$$\xi_0 = \sqrt{1 - \kappa r^2} C_0 + r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] ; \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 = & a^2 H \frac{r}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} C_0 + \\ & + \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} + a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] + \\ & + a^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \sin \theta + K_3 \cos \theta] ; \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r^2 (L_1 \sin \phi - L_2 \cos \phi) ; \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \xi_3 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r^2 [\sin \theta \cos \theta (L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi) - \sin^2 \theta L_3] . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Frisamos que, nestas equações, a e H são o fator de escala e a função de Hubble para a solução de dS – Eqs. (2.26, 2.24, 2.22):

$$a(t) = A \cosh \frac{t}{L} + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \sinh \frac{t}{L} , \quad (3.55)$$

com $A = a(0)$ e

$$H(t) = \frac{1}{L} - 2 \frac{\kappa L}{(A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2})^2 e^{\frac{2t}{L}} + \kappa L^2} . \quad (3.56)$$

Para um $a(t)$ diferente de (3.55), $\dot{U} \neq 0$ e portanto a componente temporal de Killing deve ser nula, $\xi_0 = 0$, conforme as Eqs. (3.28, 3.29, 3.30).[†] Isto é conseguido anulando as constantes C_μ : $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Mas então reduzimos o número de constantes de integração a seis, que é o número de geradores de simetrias da seção espacial de qualquer solução de Friedmann.

Com a métrica de FRW inversa,

$$(g_{\mu\nu})^{-1} = (g^{\mu\nu}) = \text{diag} \left\{ 1, -\frac{(1 - \kappa r^2)}{a^2(t)}, -\frac{1}{a^2(t)r^2}, -\frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \right\} , \quad (3.57)$$

escrevemos as componentes de Killing contravariantes, $\xi^\mu = g^{\mu\nu} \xi_\nu$:

$$\xi^0 = \sqrt{1 - \kappa r^2} C_0 + r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] ; \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \xi^1 = & -H r \sqrt{1 - \kappa r^2} C_0 + \left[\kappa H (1 - \kappa r^2) + \right. \\ & - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} + H r^2 \right) \left. \right] [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] + \\ & - \sqrt{1 - \kappa r^2} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \sin \theta + K_3 \cos \theta] ; \end{aligned} \quad (3.59)$$

[†]Vide também ref. [6], capítulo 13, à seção sobre subespaços maximalmente simétricos.

$$\begin{aligned} \xi^2 = & \left[\kappa H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \right] \frac{1}{r} [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] + \\ & - \frac{1}{r} \sqrt{1 - \kappa r^2} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] + \\ & - (L_1 \sin \phi - L_2 \cos \phi) ; \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \xi^3 = & \left[\kappa H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \right] \frac{1}{r} (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \csc \theta + \\ & - \frac{1}{r} \sqrt{1 - \kappa r^2} (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \csc \theta + \\ & - [\cot \theta (L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi) - L_3] . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Elas são necessárias para composição dos geradores $X_N = \xi_N^\mu \partial_\mu$ para cada constante de integração N .

Por exemplo, o gerador X_{C_0} é obtido fixando todas as constantes C_i , K_i e L_i iguais a zero nas componentes de Killing contravariantes ξ^μ – Eqs. (3.58)-(3.61) – e mantendo apenas C_0 diferente de zero, resultando:

$$\xi_{C_0}^0 = \sqrt{1 - \kappa r^2} C_0 ; \quad \xi_{C_0}^1 = -H r \sqrt{1 - \kappa r^2} C_0 ; \quad \xi_{C_0}^2 = 0 ; \quad \xi_{C_0}^3 = 0 ,$$

ou

$$(\xi_{C_0}^\mu) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \kappa r^2} \\ -H r \sqrt{1 - \kappa r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Note-se que desprezamos na última expressão a constante de integração (que aparece como um fator multiplicativo irrelevante), i.e., tomamos $C_0 = 1$. Então o gerador associado é:

$$X_{C_0} = \xi_{C_0}^\mu \partial_\mu = \sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_0 - H r \sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_1 = \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H r \partial_r) . \quad (3.62)$$

Usando a expressão do operador de dilatação espacial,

$$D = r \frac{\partial}{\partial r} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} , \quad (3.63)$$

onde

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (3.64)$$

são coordenadas cartesianas adimensionais, escrevemos $X_{C_0} \equiv S_0$ em sua forma final:

$$S_0 = \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H D) . \quad (3.65)$$

Vale a taquigrafia usual $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Um segundo exemplo é o gerador $X_{C_1} \equiv S_1$ construído ao tomarmos $C_1 = 1$ e $C_0 = C_2 = C_3 = C_4 = K_i = L_i = 0$ nas Eqs. (3.58-3.61). As componentes ficam:

$$(\xi_{C_1}^\mu) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ \left[\kappa H (1 - \kappa r^2) - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} + H r^2 \right) \right] \sin \theta \cos \phi \\ \left[\kappa H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \right] \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \\ - \left[\kappa H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \right] \frac{1}{r} \csc \theta \sin \phi \end{pmatrix} ,$$

e o gerador,

$$\begin{aligned} X_{C_1} = & r \sin \theta \cos \phi \partial_t + \\ & + \kappa H \left[(1 - \kappa r^2) \sin \theta \cos \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \partial_\theta - \frac{1}{r} \csc \theta \sin \phi \partial_\phi \right] + \\ & - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{a^2 H} + H r^2 \right) \sin \theta \cos \phi \partial_r + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \left(\frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \partial_\theta - \frac{1}{r} \csc \theta \sin \phi \partial_\phi \right) \right] . \end{aligned}$$

Tivemos o cuidado de separar o termo presente para qualquer valor de κ (primeira linha) dos termos que aparecem somente quando $\kappa = \pm 1$ (segunda linha) ou se $\kappa = 0$ (terceira e quarta linhas). Podemos reorganizar X_{C_1} tendo por base a forma do operador ∂_x em coordenadas esféricas:

$$\partial_x = \sin \theta \cos \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \partial_\theta - \frac{1}{r} \csc \theta \sin \phi \partial_\phi ,$$

expressão derivada usando a inversa de (3.64),

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} , \end{aligned} \quad (3.66)$$

e a regra de derivação implícita

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} .$$

Temos:

$$\begin{aligned} X_{C_1} = & x \partial_t + \kappa H [\partial_x - \kappa r \sin \theta \cos \phi (r \partial_r)] + \\ & - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2 H} \partial_x + 2H r \sin \theta \cos \phi (r \partial_r) - H r^2 \partial_x \right] , \end{aligned}$$

onde somamos e subtraímos o termo $(H r^2 \sin \theta \cos \phi \partial_r)$. Uma vez que $D = r \partial_r$ e $x = r \sin \theta \cos \phi$, ficamos com

$$X_{C_1} = x \partial_t + \kappa H (\partial_x - \kappa x D) - (1 - \kappa^2) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_x + H x D \right], \quad (3.67)$$

ou

$$S_1 = x (\partial_t - H D) + \kappa H \partial_1 - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_1. \quad (3.68)$$

Os demais geradores são construídos de forma análoga: associados às constantes C_i ($i = 1, 2, 3$) teremos os três geradores $X_{C_i} \equiv S_i$; os três operadores $X_{K_i} \equiv T_i$ são associados às constantes K_i . As constantes L_i produzem os geradores $X_{L_i} \equiv J_i$. Na transformação para coordenadas cartesianas, será preciso usar, além de (3.63), os operadores de derivação:

$$\partial_x = \sin \theta \cos \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \partial_\theta - \frac{1}{r} \csc \theta \sin \phi \partial_\phi; \quad (3.69)$$

$$\partial_y = \sin \theta \sin \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \partial_\theta + \frac{1}{r} \csc \theta \cos \phi \partial_\phi; \quad (3.70)$$

$$\partial_z = \cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta, \quad (3.71)$$

e

$$\partial_r = \sin \theta \cos \phi \partial_x + \sin \theta \sin \phi \partial_y + \cos \theta \partial_z; \quad (3.72)$$

$$\partial_\theta = r \cos \theta \cos \phi \partial_x + r \cos \theta \sin \phi \partial_y - r \sin \theta \partial_z; \quad (3.73)$$

$$\partial_\phi = -r \sin \theta \sin \phi \partial_x + r \sin \theta \cos \phi \partial_y. \quad (3.74)$$

Os geradores de dS nas coordenadas co-móveis de FRW (após transformação para as coordenadas cartesianas) são:

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H D) \\ S_i &= x^i (\partial_t - H D) + \kappa H \partial_i - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i \\ T_i &= -\sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_i \\ J_i &= \epsilon_{ij}^k x^j \partial_k. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Na expressão (3.75), $x^0 = t$, como antes; mas agora: $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. Na expressão de J_i aparece o símbolo de Levi-Civita (sob convenção de soma de Einstein): $\epsilon_{12}^3 = 1$ e

$$\epsilon_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{para permutações cíclicas de } ijk \\ -1, & \text{para permutações não cíclicas de } ijk \\ 0, & \text{para índices repetidos} \end{cases}. \quad (3.76)$$

Os geradores S_0 e S_i desaparecem para um $a(t)$ diferente da solução de dS (3.55) porque eles se originam das constantes C_μ que são nulas quando $a(t)$ é arbitrário – vide comentário abaixo de (3.56). Por isso a forma (3.75) é bastante conveniente para reconhecer a quebra de simetria entre dS e FRW.

Note-se que, de acordo com (3.56), H de dS pode ser constante, caso tomemos $\kappa = 0$, ou $H = H(t)$, se $\kappa = \pm 1$. Por isso, no segundo termo de S_i , o qual aparece somente quando $\kappa = \pm 1$, o parâmetro de Hubble é uma função do tempo – dada pela Eq. (3.56). Diferentemente, no último termo de S_i teremos:

$$H = \frac{1}{L} ; \quad a(t) = Ae^{t/L} \quad (\kappa = 0) , \quad (3.77)$$

cf. (3.55).

Nas coordenadas comóveis, cada campo T_i tem o aspecto de um gerador de translação com um fator $\sqrt{1 - \kappa r^2}$ contabilizando a curvatura. Analogamente, S_0 é campo de translação temporal em um espaço-tempo curvo do qual subtrai-se a expansão da seção espacial, a qual é medida pelo termo $(H D)$. Os J_i têm a forma usual de geradores de rotação. Os geradores S_i , porém, não possibilitam interpretação clara imediata, motivo pelo qual investigaremos as isometrias de dS nas coordenadas estáticas e as relacionaremos com os campos (3.75).

A tabela de comutação dos operadores (3.75) constitui a álgebra do grupo de dS nas coordenadas comóveis e interessa-nos obtê-la. O cálculo dos comutadores é uma tarefa trabalhosa e delicada em que se deve dedicar zelo especial ao parâmetro de curvatura κ .[‡] No Apêndice B exemplificamos o procedimento, avaliando $[S_0, S_i]$. Para expressar este resultado em termos de L – conforme apresentado na Eq. (3.78) abaixo – empregam-se as equações de Friedmann particularizadas para a solução de dS, Eqs. (3.23,3.24). Por isso, o cálculo não é tão trivial quanto se poderia pensar. Obtém-se:

$$[S_0, S_i] = -\kappa \frac{1}{L^2} T_i - (1 - \kappa^2) \frac{1}{L} S_i \quad (3.78)$$

$$[S_0, T_i] = -\kappa S_i + (1 - \kappa^2) \frac{1}{L} T_i \quad (3.79)$$

$$[S_0, J_i] = 0 \quad (3.80)$$

$$[S_i, S_j] = \kappa \frac{1}{L^2} \epsilon_{ij}^k J_k \quad (3.81)$$

$$[S_i, T_j] = -\delta_{ij} S_0 - (1 - \kappa^2) \frac{1}{L} \epsilon_{ij}^k J_k \quad (3.82)$$

$$[S_i, J_j] = -\epsilon_{ij}^k S_k \quad (3.83)$$

[‡]Para evitar erro, é recomendável calcular a tabela de comutação três vezes: uma para cada valor de κ , agregando os resultados depois.

$$[T_i, T_j] = -\kappa \epsilon_{ij}^k J_k \quad (3.84)$$

$$[T_i, J_j] = -\epsilon_{ij}^k T_k \quad (3.85)$$

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^k J_k . \quad (3.86)$$

Os operadores de translação espacial T_i e de rotação J_i constituem uma sub-álgebra, mas o mesmo não acontece com o conjunto $\{S_\mu\}$ dos geradores de dS: a comutação de S_0 com S_i , ou de S_i e S_j resultam nos geradores T_i e J_k se $\kappa \neq 0$ (e estes não pertencem ao conjunto $\{S_\mu\}$).

Conforme discutido na Introdução, repetiremos todo o procedimento desenvolvido neste capítulo 3 para o modelo de dS nas coordenadas estáticas. Por razão de economia, apenas escrevemos os resultados. Fique registrado, todavia, que os cálculos foram realizados passo a passo e são também bastante longos.

Capítulo 4

As simetrias de dS nas coordenadas estáticas

O elemento de linha de dS nas coordenadas estáticas é:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right) c^2 d\bar{t}^2 - \frac{d\bar{r}^2}{\left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right)} - \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (4.1)$$

Nestas coordenadas, a coordenada radial $\bar{r}$ carrega a dimensão de comprimento, bem como L e, ao tomarmos $c = 1$, o próprio tempo $\bar{t}$. Por outro lado, nas coordenadas de FRW o raio comóvel r é adimensional e $a(t)$ e t (para $c = 1$) possuem dimensão de comprimento (as coordenadas angulares não foram equipadas com barras, pois são as mesmas nos dois sistemas de coordenadas).

Os símbolos de Christoffel não nulos associados ao intervalo estático (4.1) são:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{01} &= -\frac{\frac{\bar{r}}{L^2}}{\left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right)} ; \quad \Gamma^1_{00} = -\frac{\bar{r}}{L^2} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right) ; \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{\frac{\bar{r}}{L^2}}{\left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right)} ; \quad \Gamma^1_{22} = -\bar{r} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right) ; \quad \Gamma^1_{33} = -\bar{r} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right) \sin^2 \theta ; \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{\bar{r}} ; \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta ; \\ \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{\bar{r}} ; \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot \theta , \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que os índices $(0, 1, 2, 3)$ dos $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ referem-se a $\bar{x}^0 = \bar{t}$, $\bar{x}^1 = \bar{r}$, $\bar{x}^2 = \theta$ e $\bar{x}^3 = \phi$. As equações de Killing (3.6) relativas a (4.1) são ($c = 1$), em consequência,

$$\partial_0 \bar{\xi}_0 + \frac{\bar{r}}{L^2} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right) \bar{\xi}_1 = 0 \quad (4.3)$$

$$\partial_1 \bar{\xi}_0 + \partial_0 \bar{\xi}_1 + 2 \frac{\bar{r}}{L^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right)} \bar{\xi}_1 = 0 \quad (4.4)$$

$$\partial_2 \bar{\xi}_0 + \partial_0 \bar{\xi}_2 = 0 \quad (4.5)$$

$$\partial_3 \bar{\xi}_0 + \partial_0 \bar{\xi}_3 = 0 \quad (4.6)$$

$$\partial_2 \bar{\xi}_1 + \partial_1 \bar{\xi}_2 - \frac{2}{r} \bar{\xi}_2 = 0 \quad (4.7)$$

$$\partial_3 \bar{\xi}_1 + \partial_1 \bar{\xi}_3 - \frac{2}{r} \bar{\xi}_3 = 0 \quad (4.8)$$

$$\partial_3 \bar{\xi}_2 + \partial_2 \bar{\xi}_3 - 2 \cot \theta \bar{\xi}_3 = 0 \quad (4.9)$$

$$\partial_1 \bar{\xi}_1 - \frac{\bar{r}}{L^2} \frac{1}{(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2})} \bar{\xi}_1 = 0 \quad (4.10)$$

$$\partial_2 \bar{\xi}_2 + \bar{r} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right) \bar{\xi}_1 = 0 \quad (4.11)$$

$$\partial_3 \bar{\xi}_3 + \bar{r} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right) \sin^2 \theta \bar{\xi}_1 + \sin \theta \cos \theta \bar{\xi}_2 = 0 . \quad (4.12)$$

As Eqs. (4.7-4.12) permitem determinar as dependências das componentes espaciais $\bar{\xi}_i$ nas coordenadas $\bar{x}^1 = \bar{r}$, $\bar{x}^2 = \theta$ e $\bar{x}^3 = \phi$. Então, usamos as Eqs. (4.3-4.6) para estabelecer a dependência funcional dos $\bar{\xi}_i$ em $\bar{x}^0 = \bar{t}$, bem como calcular a componente $\bar{\xi}_0$. Como resultado do processo de integração, temos as seguintes componentes de Killing para dS nas coordenadas estáticas:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_0 = & \bar{K}_0 \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}\right) - \frac{\bar{r}}{L} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \left\{ \left[\left(\bar{K}_1 \cosh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_2 \sinh \frac{\bar{t}}{L} \right) \cos \phi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\bar{K}_3 \cosh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_4 \sinh \frac{\bar{t}}{L} \right) \sin \phi \right] \sin \theta + \left(\bar{K}_5 \cosh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_6 \sinh \frac{\bar{t}}{L} \right) \cos \theta \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 = & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}}} \left\{ \left[\left(\bar{K}_1 \sinh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_2 \cosh \frac{\bar{t}}{L} \right) \cos \phi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\bar{K}_3 \sinh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_4 \cosh \frac{\bar{t}}{L} \right) \sin \phi \right] \sin \theta + \left(\bar{K}_5 \sinh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_6 \cosh \frac{\bar{t}}{L} \right) \cos \theta \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2 = & \bar{r} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \left\{ \left[\left(\bar{K}_1 \sinh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_2 \cosh \frac{\bar{t}}{L} \right) \cos \phi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\bar{K}_3 \sinh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_4 \cosh \frac{\bar{t}}{L} \right) \sin \phi \right] \cos \theta - \left(\bar{K}_5 \sinh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_6 \cosh \frac{\bar{t}}{L} \right) \sin \theta \right\} + \\ & + \bar{r}^2 (\bar{L}_1 \sin \phi - \bar{L}_2 \cos \phi) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_3 = & -\bar{r} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \left[\left(\bar{K}_1 \sinh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_2 \cosh \frac{\bar{t}}{L} \right) \sin \phi + \right. \\ & \left. - \left(\bar{K}_3 \sinh \frac{\bar{t}}{L} + \bar{K}_4 \cosh \frac{\bar{t}}{L} \right) \cos \phi \right] \sin \theta + \\ & + \bar{r}^2 [\sin \theta \cos \theta (\bar{L}_1 \cos \phi + \bar{L}_2 \sin \phi) - \sin^2 \theta \bar{L}_3] . \end{aligned} \quad (4.16)$$

De posse das componentes covariantes (4.13-4.16), usamos a métrica inversa extraída de (4.1),

$$(\bar{g}^{\mu\nu}) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2})}, - \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2} \right), -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right\}, \quad (4.17)$$

para obter as componentes de Killing contravariantes $\bar{\xi}^\mu = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu$. Com elas compomos os dez geradores $\bar{X}_N = \bar{\xi}_N^\mu \bar{\partial}_\mu$ relativos às constantes de integração $\bar{K}_0, \bar{K}_1, \dots, \bar{K}_6$ e $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$.

Após transformação das coordenadas esféricas $(\bar{r}, \theta, \phi)$ para coordenadas cartesianas (aqui, dimensionadas!),

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{r} \sin \theta \cos \phi \\ \bar{y} &= \bar{r} \sin \theta \sin \phi \\ \bar{z} &= \bar{r} \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.18)$$

escrevemos os geradores como:

$$\begin{aligned} T_0 &= \partial_{\bar{t}}; \\ I_i &= -\frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}}} \cosh \frac{\bar{t}}{L} \bar{x}^i \partial_{\bar{t}} - \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \sinh \frac{\bar{t}}{L} \bar{\partial}_i; \\ P_i &= -\frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}}} \sinh \frac{\bar{t}}{L} \bar{x}^i \partial_{\bar{t}} - \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \cosh \frac{\bar{t}}{L} \bar{\partial}_i; \\ \bar{J}_i &= \epsilon_{ij}^{\quad k} \bar{x}^j \bar{\partial}_k, \end{aligned} \quad (4.19)$$

O gerador T_0 é relativo à constante $\bar{K}_0$; I_i foi construído pela manutenção das constantes $\bar{K}_1, \bar{K}_3$ e $\bar{K}_5$ (com índices ímpares); as constantes $\bar{K}_2, \bar{K}_4$ e $\bar{K}_6$ (com índices pares) são relativas a P_i ; e $\bar{J}_i$ é o gerador obtido do não anulamento das constantes $\bar{L}_i$ nas componentes $\bar{\xi}^\mu$. A interpretação física dessas simetrias vem com a análise do limite $L \rightarrow \infty$, situação em que os operadores (4.19) devem se reduzir aos de Poincaré: boosts, rotações e translações espaciais e temporal.

A tabela de comutação dos geradores de dS nas coordenadas estáticas é:

$$[T_0, P_i] = \frac{1}{L} I_i \quad (4.20)$$

$$[T_0, I_i] = \frac{1}{L} P_i \quad (4.21)$$

$$[T_0, J_i] = 0 \quad (4.22)$$

$$[P_i, P_j] = -\frac{1}{L^2} \epsilon_{ij}^{k} J_k \quad (4.23)$$

$$[P_i, I_j] = -\frac{1}{L} \delta_{ij} T_0 \quad (4.24)$$

$$[P_i, J_j] = -\epsilon_{ij}^{k} P_k \quad (4.25)$$

$$[I_i, I_j] = \frac{1}{L^2} \epsilon_{ij}^{k} J_k \quad (4.26)$$

$$[I_i, J_j] = -\epsilon_{ij}^{k} I_k \quad (4.27)$$

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^{k} J_k . \quad (4.28)$$

Esta é a álgebra do grupo de dS, que se reduzem à algebra do grupo de Poincaré sob contrações de Wigner-Inönü [14] ao tomarmos $L \rightarrow \infty$. Disso trataremos no capítulo 6.

Capítulo 5

Transformações entre as coordenadas de FRW e dS

Se ambos os conjuntos de geradores $(T_0, I_i, P_i, \bar{J}_i)$ e (S_0, S_i, T_i, J_i) são geradores de dS, deve haver uma transformação de coordenadas capaz de levar um conjunto no outro. Essas transformações são as mesmas capazes de converter o intervalo de dS nas coordenadas estáticas no intervalo de FRW com $a(t)$ fixado como a solução de dS. Abaixo construiremos essas regras de transformação, chamadas de transformações de Robertson generalizadas.

5.1 As Transformações de Robertson Generalizadas

As transformações de Robertson [5]

$$r = \frac{(\bar{r}/A)}{\sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}}} e^{-\bar{t}/L}, \quad (5.1)$$

$$t = \bar{t} + \frac{1}{2}L \ln \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2} \right), \quad (5.2)$$

ou

$$\bar{r} = r (Ae^{t/L}), \quad (5.3)$$

$$\bar{t} = t - \frac{1}{2}L \ln \left[1 - \frac{r^2}{L^2} (Ae^{t/L})^2 \right], \quad (5.4)$$

convertem o elemento de linha estático de dS (4.1) à forma

$$ds^2 = dt^2 - (Ae^{t/L}) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (5.5)$$

que é precisamente o intervalo de FRW (3.9) com o valor particular $\kappa = 0$ para o parâmetro de curvatura se identificarmos $a(t) = Ae^{t/L}$. Esta é o paradigma de

solução inflacionária.* Nosso propósito é estender as transformações acima para incluir os casos $\kappa = \pm 1$. Inspirados nas Eqs. (5.3) e (5.4), procuramos por uma transformação

$$\begin{aligned}\bar{r} &= rf(t) , \\ \bar{t} &= g(t) + h(t, r) ,\end{aligned}\tag{5.6}$$

onde $f(t)$, $g(t)$ e $h(t, r)$ são funções a serem determinadas. Ao inserir (5.6) no intervalo estático (4.1) e impor igualdade com o elemento de linha de FRW somos levados a um sistema de equações diferenciais parciais,

$$\left[1 - \frac{(rf)^2}{L^2}\right] (\dot{g} + \dot{h})^2 - \frac{1}{\left[1 - \frac{(rf)^2}{L^2}\right]} r^2 \dot{f}^2 = 1 ,\tag{5.7}$$

$$\left[1 - \frac{(rf)^2}{L^2}\right] 2h' (\dot{g} + \dot{h}) - \frac{1}{\left[1 - \frac{(rf)^2}{L^2}\right]} 2rf\dot{f} = 0 ,\tag{5.8}$$

$$\frac{1}{\left[1 - \frac{(rf)^2}{L^2}\right]} f^2 - \left[1 - \frac{(rf)^2}{L^2}\right] h'^2 = \frac{f^2(t)}{1 - \kappa r^2} ,\tag{5.9}$$

$$f^2(t) = a^2(t) ,\tag{5.10}$$

onde ponto e linha indicam derivações com respeito a t e r , respectivamente. Eliminando o fator $(\dot{g} + \dot{h})$ das primeiras duas equações, é possível determinar h'^2 em termos de f e $\dot{f}$. Substituindo o resultado na Eq. (5.9) resulta

$$\dot{f}^2 = \frac{f^2}{L^2} - \kappa ,\tag{5.11}$$

que, devido à Eq. (5.10), é exatamente a equação de Friedmann (3.23) em termos do parâmetro de escala,

$$\dot{a}^2 = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{L^2}\right) a^2 - \kappa ,\tag{5.12}$$

para o caso de de Sitter ($\rho = 0$) com $\kappa = 0, \pm 1$. Isto é um fato curioso, uma vez que as equações de Friedmann nascem da dinâmica do campo gravitacional – ditada pelas equações de Einstein – e do intervalo de FRW, enquanto a relação

*Ou como prefere o autor da Ref. [2] à página 261: “The de Sitter universe is still, however, a very useful zeroth order approximation for nearly all inflationary models. In fact, the effective equation of state must satisfy the condition $\varepsilon + 3p < 0$ for at least 75 e-folds. This is generally possible only if during most of the time we have $p \approx -\varepsilon$ to a rather high accuracy.”

(5.11) manifesta-se somente como um efeito de transformação de coordenadas. Sua solução é, obviamente, a Eq. (3.55):

$$f(t) = A \cosh \frac{t}{L} + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \sinh \frac{t}{L} . \quad (5.13)$$

O próximo passo é isolar h' na Eq. (5.9),

$$h'(t, r) = L \frac{\frac{rf}{L} \sqrt{\left(\frac{f}{L}\right)^2 - \kappa}}{\left[1 - \frac{(rf)^2}{L^2}\right] \sqrt{1 - \kappa r^2}} , \quad (5.14)$$

e integrar diretamente, fixando assim a dependência radial de $h(t, r)$. É mais seguro resolver para cada valor de κ separadamente e reunir *a posteriori* as soluções numa única fórmula, qual seja

$$h(t, r) = L \ln \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{f}{L}\right)^2 - \kappa} + \frac{f}{L} \sqrt{1 - \kappa r^2}}{\sqrt{1 - \frac{(rf)^2}{L^2}}} \right] + z(t) . \quad (5.15)$$

Por enquanto, $z(t)$ é função arbitrária e $\bar{t}$ é determinado a menos de uma função de t , digamos,

$$\bar{g}(t) \equiv g(t) + z(t) . \quad (5.16)$$

A função $\bar{g}(t)$ será fixada tão logo avaliarmos $\dot{h}(t, r)$. A derivada da Eq.(5.15) com respeito a t dá, depois de alguma álgebra,

$$\dot{h}(t, r) = \dot{z}(t) + \frac{\sqrt{1 - \kappa r^2}}{1 - \frac{(rf)^2}{L^2}} . \quad (5.17)$$

Esta expressão, uma vez inserida com a Eq.(5.14) em (5.8), leva a:

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = 0 ,$$

i.e.,

$$\bar{g} = g + z = \text{constante} \equiv T . \quad (5.18)$$

Usando Eqs. (5.13), (5.15) e (5.18), a Eq. (5.6) pode ser reescrita como

$$\bar{r}(t, r) = ra(t) ; \quad (5.19)$$

$$\bar{t}(t, r) = T + L \ln \left[\frac{\sqrt{\left[\frac{a(t)}{L}\right]^2 - \kappa} + \frac{a(t)}{L} \sqrt{1 - \kappa r^2}}{\sqrt{1 - \frac{[ra(t)]^2}{L^2}}} \right] , \quad (5.20)$$

com $a(t)$ dado por (3.55).

A constante T é fixada ao requerermos que essas expressões permaneçam não-singulares no limite $L \rightarrow \infty$. Esta forte exigência é necessária tendo em vista dois fatos: **(1)** estudaremos as contrações de Inönü-Wigner [14] dos operadores de simetria de dS para os geradores de Poincaré em ambas coordenadas, estáticas e comóveis, comparando os resultados ao final via (5.19,5.20), as quais, portanto, devem permanecer válidas; **(2)** o elemento de linha estático de dS (4.1) reduz-se comportadamente ao intervalo de Minkowski em coordenadas esféricas

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.21)$$

no limite $L \rightarrow \infty$. Se substituirmos o fator de escala de dS (3.55) no elemento de linha de FRW (3.9) o que obtemos é o intervalo de dS em coordenadas comóveis. Esta forma do ds^2 de dS também deve reduzir-se ao intervalo de Minkowski (5.21) depois que restituirmos a dimensão de comprimento à coordenada radial comóvel (sem dimensão) r . Devolver a dimensão a r significa converter (t, r) em $(\bar{t}, \bar{r})$ através de (5.19,5.20) tendo tomado $L \rightarrow \infty$.

Procedamos caso a caso. (i) Para $\kappa = 0$, $a(t) = Ae^{t/L}$ e (5.20) é:

$$\bar{t} = T + L \ln \frac{2A}{L} + t - \frac{1}{2} L \ln \left[1 - \frac{r^2}{L^2} (Ae^{t/L})^2 \right] \quad (\kappa = 0) . \quad (5.22)$$

Note-se que no limite $L \rightarrow \infty$ o segundo termo diverge. Para evitar esta singularidade, fixamos

$$T = -L \ln \frac{2A}{L} \quad (\kappa = 0) . \quad (5.23)$$

Esta escolha é particularmente conveniente, pois com ela a Eq. (5.22) torna-se justamente a lei de transformação de Robertson (5.4).

(ii) No caso $\kappa = -1$, se $L \gg 1$,

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r a(t) , \quad a(t) = (A + t) , \\ \bar{t} &= T + a(t) \sqrt{1 + r^2} \quad (L \gg 1, \kappa = -1) . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Estas são precisamente as expressões para a lei de transformação das coordenadas (barradas) de Minkowski às coordenadas de FRW. Esta afirmação é verificada, por exemplo, repetindo os passos dessa seção para os elementos de linha (5.21) e (3.9): proponha um anatz como (5.6), e, então, insira-o em (5.21) para, depois de uma comparação com (3.9), encontrar um conjunto de equações diferenciais análogas a (5.7-5.10), as quais, levam a (5.24) por integração direta. Este trabalho recompensamos com a conclusão que podemos tomar

$$T = 0 \quad (\kappa = -1) \quad (5.25)$$

sem perda de generalidade. Naturalmente, poderíamos preferir tomar um outro valor para T neste caso, e.g., $T = -L \ln \left(1 + \frac{2A}{L}\right)$. O único vínculo é evitar formas funcionais de T singulares no limite $L \rightarrow \infty$.

(iii) Se $\kappa = +1$ e $L \gg 1$, as Eqs. (5.19,5.20) simplificam-se para:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= r a(t) , \quad a(t) = (A + i t) , \\ \bar{t} &= T + L \ln i - i a(t) \sqrt{1 - \bar{r}^2} \quad (L \gg 1, \kappa = +1) .\end{aligned}\quad (5.26)$$

O fator de escala complexo é apenas uma patologia do sistema de coordenadas e não significa que obtivemos uma solução não-física. Ele reflete nossa exigência forçada de uma igualdade entre o elemento de linha de FRW

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] . \quad (5.27)$$

e o intervalo de Minkowski. O espaço de Minkowski é plano, não-compacto, enquanto a seção espacial do elemento de linha acima é uma esfera. A divergência do segundo termo de $\bar{t}$, Eq. (5.26), é evitada pela escolha

$$T = -L \ln i \quad (\kappa = +1) . \quad (5.28)$$

Concluindo, escrevemos a forma final unificada das transformações de Robertson generalizadas (TRG), utilizando a definição

$$T = L \ln \tau(\kappa) ; \quad \tau(\kappa) = \begin{cases} \frac{L}{2A} , & \kappa = 0 \\ 1 , & \kappa = -1 \\ \frac{1}{i} , & \kappa = +1 \end{cases} , \quad (5.29)$$

como

$$\begin{aligned}\bar{r} &= r a(t) , \quad a(t) = A \cosh \frac{t}{L} + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \sinh \frac{t}{L} , \\ \bar{t} &= L \ln \left[\tau(\kappa) \frac{a(t) \left(H(t) + \frac{\sqrt{1 - \kappa r^2}}{L} \right)}{\sqrt{1 - \frac{[ra(t)]^2}{L^2}}} \right] ,\end{aligned}\quad (5.30)$$

onde empregamos a identidade

$$\sqrt{\left[\frac{a(t)}{L} \right]^2 - \kappa} = a(t) H(t) , \quad (5.31)$$

válida para a solução (3.55) de dS, como o leitor pode facilmente verificar.

Enfatizemos que o que fizemos nesta seção é diferente dos resultados encontrados na literatura. Com efeito, nossos procedimentos e resultados não coincidem com os

tratamentos apresentados, por exemplo, em [27], [28], [29] e [2], mas implementam em todos os detalhes a transformação mencionada na Ref. [3]. A Ref. [27] exhibe o intervalo (5.27) – a menos da convenção de signatura da métrica e da definição $r = \sin \chi$. Todavia, o parâmetro de expansão é tomado ser $a(t) = L \cosh \frac{t}{L}$, o que corresponderia fixar arbitrariamente $A = L$ em nossa solução (3.55). Isto implicaria que o fator de escala é sempre maior do que o horizonte L de dS. Ademais, não é dada qualquer transformação entre as cordenadas estáticas de dS e as comóveis de FRW, mas apenas transformações de variáveis de imersão (5-dimensionais) às coordenadas comóveis. A escolha $A = L$ é feita também na Ref. [30] que apresenta um estudo extensivo da geometria de dS em vários sistemas de coordenadas, incluindo a transformação entre a parametrização estática e as três seções de FRW ($\kappa = 0, \pm 1$) para o espaço-tempo de dS. Não obstante, essas não são exatamente as transformações de Robertson generalizadas; não apenas devido à escolha para o valor de A , mas também devido ao fato que elas não possuem limite apropriado quando $L \rightarrow \infty$.

5.2 Transformação dos geradores de dS nas cordenadas estáticas para as coordenadas comóveis

Começamos comentando alguns resultados relevantes.

As coordenadas angulares estáticas θ e ϕ são as mesmas que as de FRW. Portanto, dividindo (4.18) por (3.64), e usando (5.30), obtemos

$$\bar{x}^i = x^i a(t) . \quad (5.32)$$

Para obter os operadores $\partial_{\bar{t}}$ e $\bar{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$ em termos das coordenadas co-móveis, escrevemos

$$\partial_{\bar{t}} = \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial r}$$

e

$$\bar{\partial}_i = \frac{\partial t}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^k} .$$

Porém, para avaliar as derivações parciais contidas nestas equações somos obrigados a inverter as leis de transformação de coordenadas (5.30) e (5.32).

Depois de mais um trabalho de cálculo – Apêndice C – obtemos:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\bar{r}}{\sqrt{R^2 + \kappa L^2}}; \quad R(\bar{t}, \bar{r}) \equiv \frac{L}{2} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \left[\frac{e^{\bar{t}/L}}{\tau(\kappa)} - \kappa \frac{\tau(\kappa)}{e^{\bar{t}/L}} \right] \\ t &= L \ln \left[\frac{\sqrt{R^2 + \kappa L^2} + R}{A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2}} \right]; \end{aligned} \quad (5.33)$$

valendo também a forma de R em termos das coordenadas co-móveis:

$$R = \sqrt{a^2(t) - \kappa L^2} = L a(t) H(t) ; \text{ i.e., } a = \sqrt{R^2 + \kappa L^2} , \quad (5.34)$$

que é justamente a identidade (5.31).

Invertendo (5.32),

$$x^i = \frac{\bar{x}^i}{\sqrt{R^2 + \kappa L^2}} . \quad (5.35)$$

Com os resultados acima encontramos as parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} &= \sqrt{1 - \kappa r^2} ; & \frac{\partial r}{\partial \bar{t}} &= -H(t) r \sqrt{1 - \kappa r^2} ; \\ \frac{\partial t}{\partial \bar{x}^i} &= -\frac{a(t) H(t) x^i}{\left(1 - \frac{[ra(t)]^2}{L^2}\right)} ; & \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} &= \frac{1}{a(t)} \left(\delta_i^k + \frac{a^2(t) H^2(t) x^k x^i}{\left(1 - \frac{[ra(t)]^2}{L^2}\right)} \right) , \end{aligned}$$

(que não dependem da constante de integração $T(\kappa)$ das TRG) com as quais calculamos $\partial_{\bar{t}}$ e $\bar{\partial}_i$:

$$\partial_{\bar{t}} = \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H(t) D) ; \quad (5.36)$$

$$\bar{\partial}_i = -\frac{a(t) H(t)}{\left(1 - \frac{[ra(t)]^2}{L^2}\right)} x^i (\partial_t - H(t) D) + \frac{1}{a(t)} \partial_i \quad (5.37)$$

(no Apêndice D acrescentamos o cálculo de $\partial_{\bar{t}}$ como exemplo). Estas, juntamente com a identidade

$$\left(e^{\bar{t}/L} \pm e^{-\bar{t}/L} \right) = \frac{\tau^2(\kappa) a^2(t) \left(H(t) + \frac{\sqrt{1-\kappa r^2}}{L} \right)^2 \pm \left(1 - \frac{[ra(t)]^2}{L^2} \right)}{\tau(\kappa) a(t) \sqrt{1 - \frac{[ra(t)]^2}{L^2}} \left(H(t) + \frac{\sqrt{1-\kappa r^2}}{L} \right)} \quad (5.38)$$

derivada diretamente de (5.30), permitem pôr os geradores T_0 , P_i , I_i e $\bar{J}_i$ – Eq. (4.19) – em termos das coordenadas co-móveis:

$$T_0 = \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H D) \quad (5.39)$$

$$P_i = \begin{cases} \frac{A}{L} [x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i] + \frac{1}{2A} (-\partial_i) , & \text{para } \kappa = 0 \\ [x^i (\partial_t - H D) - H \partial_i] , & \text{para } \kappa = -1 \\ i [x^i (\partial_t - H D) + H \partial_i] , & \text{para } \kappa = +1 \end{cases} \quad (5.40)$$

$$I_i = \begin{cases} -\frac{A}{L} [x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i] + \frac{1}{2A} (-\partial_i) , & \text{para } \kappa = 0 \\ \frac{1}{L} (-\sqrt{1+r^2} \partial_i) , & \text{para } \kappa = -1 \\ -\frac{i}{L} (-\sqrt{1-r^2} \partial_i) , & \text{para } \kappa = +1 \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\bar{J}_i = \epsilon_{ij}^k x^j \partial_k . \quad (5.42)$$

Confrontando estes resultados com os geradores de dS S_0 , S_i , T_i , e J_i – Eq. (3.75) – concluímos o que consta da tabela a seguir:

Correspondência (linha a linha) entre os geradores de dS		
	coordenadas de dS	coordenadas de FRW
	T_0	S_0
	P_i	$\kappa = 0 \quad \frac{A}{L} S_i + \frac{1}{2A} T_i$ $\kappa = -1 \quad S_i$ $\kappa = +1 \quad i S_i$
	I_i	$\kappa = 0 \quad -\frac{A}{L} S_i + \frac{1}{2A} T_i$ $\kappa = -1 \quad \frac{1}{L} T_i$ $\kappa = +1 \quad -\frac{i}{L} T_i$
	$\bar{J}_i$	J_i

Tabela 1: Os geradores de dS nas coordenadas estáticas (barradas) podem ser transformados para as coordenadas de FRW (sem barra) pelas transformações de Robertson generalizadas. Quando o fazemos, $T_0 = \partial_t = \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H D) = S_0$, e assim por diante, linha a linha.

Como os geradores co-móveis S_0 , S_i , T_i , e J_i são obtidos (diretamente ou através de combinações lineares) dos geradores de de Sitter nas familiares coordenadas estáticas T_0 , P_i , I_i e $\bar{J}_i$ concluímos que eles são de fato geradores do grupo de de Sitter. Então S_0 , S_i , T_i , e J_i devem ter um bom limite para os geradores de Poincaré quando $L \rightarrow \infty$, assim como T_0 , P_i , I_i e $\bar{J}_i$ o têm. Cuidaremos disso no próximo capítulo.

Capítulo 6

A contração de Inönü-Wigner da algebra de dS para a de Poincaré

No capítulo 5 comentamos que, tomando $L \rightarrow \infty$ no elemento de linha estático de dS, aplainamos a sua geometria, reduzindo-o ao intervalo de Minkowski. Este fato tem um correspondente na estrutura algébrica dos grupos de movimento de dS e Poincaré, os grupos de simetria dos espaços-tempos de dS e Minkowski, respectivamente.

Com efeito, a álgebra do grupo de dS recai na de Poincaré no limite $L \rightarrow \infty$ [14]. Neste sentido, dS é uma extensão de Poincaré. O limite $L \rightarrow \infty$ deve ser feito com cuidado, motivo pelo qual merece esta seção. Tratamos separadamente a contração na álgebra de dS em coordenadas estáticas (seção 6.1) e coordenadas de FRW (seção 6.2).

6.1 O limite $L \rightarrow \infty$ nas coordenadas estáticas

6.1.1 Interpretação dos geradores

No limite $L \rightarrow \infty$, a razão $(\bar{t}/L)$ é pequena para valores finitos do tempo. Então, os geradores I_i e P_i em (4.19) podem ser reescritos usando as aproximações

$$\sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} = 1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2} + O\left(\frac{\bar{r}^4}{L^4}\right); \sinh \frac{\bar{t}}{L} = \frac{\bar{t}}{L} + O\left(\frac{\bar{t}^3}{L^3}\right); \cosh \frac{\bar{t}}{L} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\bar{t}^2}{L^2} + O\left(\frac{\bar{t}^4}{L^4}\right)$$

para a raiz quadrada e as funções hiperbólicas. Manteremo-nos até primeira ordem em (t/L) .

(a) P_i no limite de L grande reduz-se a:

$$P_i = -\frac{1}{L} \frac{\bar{t}}{L} \bar{x}^i \partial_{\bar{t}} - \bar{\partial}_i .$$

O primeiro termo é desprezível com respeito ao segundo por duas ordens de grandeza em L . Logo,

$$P_i = -\bar{\partial}_i , \tag{6.1}$$

que reconhecemos como o gerador das *translações espaciais* em Minkowski neste limite de $L \rightarrow \infty$.

(b) O gerador I_i fica:

$$I_i = -\frac{1}{L} \bar{x}^i \partial_{\bar{t}} - \frac{\bar{t}}{L} \bar{\partial}_i .$$

Redefinindo I_i como

$$B_i = -L I_i \quad (6.2)$$

reconhecemos o gerador de *boosts* da álgebra de Poincaré: no limite em que $L \rightarrow \infty$:

$$B_i = (\bar{x}^i \partial_{\bar{t}} + \bar{t} \bar{\partial}_i) . \quad (6.3)$$

Poder-se-ia argumentar contra a redefinição que acabamos de adotar, dizendo que estamos escondendo um infinito em B_i . Isso é uma verdade. Não obstante, usamos em nossa defesa o seguinte: a multiplicação por L elimina a dimensão do gerador I_i , o que é desejável por sua interpretação *a posteriori*. Além disso, esta é uma prática comum na teoria das contrações algébricas [14].

(c) T_0 e J_i são imediatamente percebidos como os geradores das simetrias de *translação temporal* e *rotação*, nesta ordem, e mantêm esta interpretação no limite $L \rightarrow \infty$ porque não são afetados por ele.

6.1.2 Contração algébrica

A álgebra do grupo de dS (4.20-4.28) pode ser reescrita em termos de B_i , Eq. (6.2):

$$\begin{aligned} [T_0, B_i] &= -P_i \\ [T_0, P_i] &= -\frac{1}{L^2} B_i \\ [T_0, J_i] &= 0 \\ [B_i, B_j] &= \epsilon_{ij}^{k} J_k \\ [B_i, P_j] &= -\delta_{ij} T_0 \\ [B_i, J_j] &= -\epsilon_{ij}^{k} B_k \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= -\frac{1}{L^2} \epsilon_{ij}^{k} J_k \\ [P_i, J_j] &= -\epsilon_{ij}^{k} T_k \\ [J_i, J_j] &= \epsilon_{ij}^{k} J_k . \end{aligned}$$

Esta tabela de comutação é bem conhecida; vide, por exemplo, [31] e [32]. E, no limite $L \rightarrow \infty$, esse conjunto reduz-se a:

$$[T_0, B_i] = - P_i$$

$$[T_0, P_i] = 0$$

$$[T_0, J_i] = 0$$

$$[B_i, B_j] = \epsilon_{ij}^{k} J_k$$

$$[B_i, P_j] = - \delta_{ij} T_0 \tag{6.5}$$

$$[B_i, J_j] = - \epsilon_{ij}^{k} B_k$$

$$[P_i, P_j] = 0$$

$$[P_i, J_j] = - \epsilon_{ij}^{k} P_k$$

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^{k} J_k ,$$

que é exatamente a álgebra do grupo de Poincaré, o grupo de simetrias do espaço-tempo plano de Minkowski. Tudo conforme o esperado.

6.2 O limite $L \rightarrow \infty$ nas coordenadas de FRW

Dividiremos a análise em três casos:

6.2.1 $\kappa = 0$

Interpretação dos geradores

Fixando $\kappa = 0$ na Eq. (3.75) obtemos:

$$S_0 = (\partial_t - H D)$$

$$S_i = x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i$$

$$T_i = - \partial_i$$

$$J_i = \epsilon_{ij}^{k} x^j \partial_k , \tag{6.6}$$

onde, de acordo com (3.77),

$$a(t) = A e^{t/L} ; \quad H = \frac{1}{L} . \tag{6.7}$$

Ao analisarmos o limite $L \gg 1$ enfrentaremos um problema de divergência em um dos termos de S_i . Veja-se:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} \right) \partial_i &= -\frac{1}{2} \frac{L}{(Ae^{t/L})^2} \partial_i \simeq -\frac{1}{2} \frac{L}{A^2} \left(1 - 2 \frac{t}{L} \right) \partial_i = \\ &= \frac{L}{A} \left(\frac{1}{2A} T_i \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{t}{A} \partial_i \right) \quad (L \gg 1) . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Se $L \rightarrow \infty$, o primeiro termo da segunda linha diverge. Esta dificuldade pode ser superada se redefinirmos o nosso gerador para excluir esse termo problemático. Esta sugestão é lícita, porque o termo problema em S_i é linear em outro gerador do conjunto, T_i , e sabemos que qualquer combinação linear de geradores também constitui um gerador. Propomos fazer a troca

$$S_i \rightarrow \left(\frac{A}{L} S_i + \frac{1}{2A} T_i \right) = P_i . \quad (6.9)$$

Esta redefinição não só elimina a divergência como tem a forma de P_i em coordenadas de FRW – observe a *Tabela 1* – o que propicia a interpretação da combinação (6.9) como gerador das *translações espaciais*. De fato, quando $L \gg 1$ tal combinação é:

$$S_i \rightarrow P_i \simeq \frac{1}{L} \left[A x^i \left(\partial_t - \frac{1}{L} D \right) + \frac{t}{A} \partial_i + \frac{A r^2}{L} \frac{\partial_i}{2} \right] + \frac{1}{A} T_i \quad (L \gg 1) . \quad (6.10)$$

onde usamos (6.6), (6.7) e (6.8). O primeiro termo de (6.10) desaparece no limite em que $L \rightarrow \infty$ e resta o termo $\frac{1}{A} T_i$. Logo, em coordenadas comóveis,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_i = \frac{1}{A} T_i = \frac{1}{A} (-\partial_i) \quad (\text{comóveis}) . \quad (6.11)$$

Perceba que isto corresponde ao limite de P_i (6.1) em coordenadas estáticas

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_i = -\bar{\partial}_i \quad (\text{estáticas}) . \quad (6.12)$$

A razão da correspondência é operatorial e dimensional: em ambas as relações (6.11) e (6.12) aparece o operador de derivação com respeito as coordenadas espaciais e o fator $(1/A)$ acerta a dimensão de inverso de comprimento que P_i deve carregar – $\bar{\partial}_i$ possui dimensão do inverso de comprimento, pois as coordenadas barradas são dimensionadas, mas ∂_i é adimensional já que as coordenadas espaciais de FRW não carregam dimensão.

Também pensando na interpretação física dos geradores no limite $L \rightarrow \infty$, propomos a alteração

$$T_i \rightarrow \left(-\frac{A}{L} S_i + \frac{1}{2A} T_i \right) = (L I_i) , \quad (6.13)$$

cf. a *Tabela 1*. A combinação (6.13) é justamente $(L I_i)$ nas coordenadas de FRW. E já sabemos que $(-L I_i) = B_i$, Eq. (6.2), tem o significado de *boosts* no limite para Poincaré:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (-B_i) = -(\bar{x}^i \partial_{\bar{t}} + \bar{t} \bar{\partial}_i) \quad (\text{estáticas}) . \quad (6.14)$$

(Vide Eq. (6.3).) Em coordenadas comóveis temos:

$$T_i \rightarrow -B_i \simeq -\left(\frac{1}{A} t \partial_i + A x^i \partial_t\right) + \frac{A}{L} \left(x^i D - \frac{r^2}{2} \partial_i\right) \quad (L \gg 1) \quad (6.15)$$

(foram usadas as Eqs. (6.6), (6.7) e (6.8) na combinação (6.13) para encontrarmos este resultado). Logo, ao tomarmos $L \rightarrow \infty$, perdemos o último termo de (6.15) e resta-nos:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (-B_i) = -\left(\frac{1}{A} t \partial_i + A x^i \partial_t\right) \quad (\text{comóveis}) , \quad (6.16)$$

os boosts em coordenadas comóveis. Novamente, a função do fator A é adequar as dimensões.

Não encontramos problemas para escrever o operador $S_0 = (\partial_t - \frac{1}{L} D)$ no limite $L \rightarrow \infty$:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} S_0 = \partial_t = T_0 , \quad (6.17)$$

que é interpretado como gerador da *translação temporal*.*

O gerador comóvel J_i das *rotações* não é afetado pelo limite $L \rightarrow \infty$,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} J_i = J_i = \epsilon_{ij}^k x^j \partial_k = \bar{J}_i . \quad (6.18)$$

Contração algébrica

É uma tarefa simples mostrar que a tabela de comutação (3.78-3.86) coincide com a álgebra (6.5) de Poincaré quando $L \rightarrow \infty$. Vejamos em detalhe. Os geradores (6.6) obedecem às relações (3.78-3.86) com $\kappa = 0$. São elas:

$$\begin{aligned} [S_0, S_i] &= -\frac{1}{L} S_i \\ [S_i, S_j] &= 0 \\ [S_0, T_i] &= \frac{1}{L} T_i \\ [S_i, T_j] &= -\delta_{ij} S_0 - \frac{1}{L} \epsilon_{ij}^k J_k \\ [S_0, J_i] &= 0 \\ [S_i, J_j] &= -\epsilon_{ij}^k S_k \end{aligned} \quad (6.19)$$

*Tendo em vista as transformações (5.4) no limite $L \rightarrow \infty$, i.e., $\bar{t} = t$, não é necessário restaurar as dimensões adequadas ao operador ∂_t em coordenadas comóveis para sermos capazes de interpretar seu significado.

$$\begin{aligned} [T_i, T_j] &= 0 \\ [T_i, J_j] &= -\epsilon_{ij}^k T_k \\ [J_i, J_j] &= \epsilon_{ij}^k J_k . \end{aligned}$$

As transformações dos geradores de dS – e as Eqs. (6.9), (6.13), (6.17) e (6.18) – sugerem as substituições

$$\begin{aligned} T_0 &= S_0 \\ P_i &= \frac{A}{L} S_i + \frac{1}{2A} T_i \\ I_i &= -\frac{A}{L} S_i + \frac{1}{2A} T_i \\ J_i &= \bar{J}_i \end{aligned} \tag{6.20}$$

em (6.19). (Evitamos tomar o limite $L \rightarrow \infty$ diretamente, sem fazer as substituições, porque enfrentaríamos o problema da divergência de S_i além da dificuldade de interpretação do significado físico dos geradores, conforme discutido acima.)

Devemos eliminar S_i e T_i da álgebra de dS em favor de P_i e $(L I_i)$. Para tanto, consideremos a soma das duas equações intermediárias em (6.20):

$$P_i + I_i = \frac{1}{A} T_i , \tag{6.21}$$

e diferença delas:

$$P_i - I_i = \frac{2A}{L} S_i . \tag{6.22}$$

Substituindo nas relações de comutação (6.19):

$$\begin{aligned} [S_0, P_i] - [S_0, I_i] &= -\frac{1}{L} (P_i - I_i) \\ [P_i, P_j] - [P_i, I_j] - [I_i, P_j] + [I_i, I_j] &= 0 \\ [S_0, P_i] + [S_0, I_i] &= \frac{1}{L} (P_i + I_i) \\ [P_i, P_j] + [P_i, I_j] - [I_i, P_j] - [I_i, I_j] &= -\frac{2}{L} \delta_{ij} S_0 - \frac{2}{L^2} \epsilon_{ij}^k J_k \\ [S_0, J_i] &= 0 \\ [P_i, J_j] - [I_i, J_j] &= -\epsilon_{ij}^k (P_k - I_k) \\ [P_i, P_j] + [P_i, I_j] + [I_i, P_j] + [I_i, I_j] &= 0 \\ [P_i, J_j] + [I_i, J_j] &= -\epsilon_{ij}^k (P_k + I_k) \\ [J_i, J_j] &= \epsilon_{ij}^k J_k . \end{aligned}$$

(I) Combinando as linhas seis e oito do conjunto acima (somando-as e subtraindo-as), resulta:

$$[P_i, J_j] = -\epsilon_{ij}^k P_k \quad (6.23)$$

e

$$[I_i, J_j] = -\epsilon_{ij}^k I_k . \quad (6.24)$$

(II) Repetindo o procedimento com as linhas um e três:

$$[S_0, P_i] = \frac{1}{L} I_i \quad (6.25)$$

e

$$[S_0, I_i] = \frac{1}{L} P_i . \quad (6.26)$$

(III) Somando e subtraindo as linhas dois e quatro, dá:

$$[P_i, P_j] - [I_i, P_j] = -\frac{1}{L}\delta_{ij}S_0 - \frac{1}{L^2}\epsilon_{ij}^k J_k ; \quad [P_i, I_j] - [I_i, I_j] = -\frac{1}{L}\delta_{ij}S_0 - \frac{1}{L^2}\epsilon_{ij}^k J_k . \quad (6.27)$$

Por outro lado, combinando as linhas quatro e sete, chegamos a:

$$[P_i, P_j] + [P_i, I_j] = -\frac{1}{L}\delta_{ij}S_0 - \frac{1}{L^2}\epsilon_{ij}^k J_k ; \quad -[I_i, P_j] - [I_i, I_j] = -\frac{1}{L}\delta_{ij}S_0 - \frac{1}{L^2}\epsilon_{ij}^k J_k .$$

Considere-se a primeira equação em cada um dos dois últimos resultados:

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] - [I_i, P_j] &= -\frac{1}{L}\delta_{ij}S_0 - \frac{1}{L^2}\epsilon_{ij}^k J_k \\ [P_j, P_i] + [P_j, I_i] &= -\frac{1}{L}\delta_{ji}S_0 - \frac{1}{L^2}\epsilon_{ji}^k J_k , \end{aligned}$$

em que a última sofreu a renomeação $i \leftrightarrow j$. Somando estas equações obtemos:

$$([P_i, P_j] + [P_j, P_i]) - ([I_i, P_j] - [P_j, I_i]) = -\frac{1}{L}(\delta_{ij} + \delta_{ji})S_0 - \frac{1}{L^2}(\epsilon_{ij}^k + \epsilon_{ji}^k)J_k .$$

O primeiro termo é nulo pela própria definição de comutador e o último termo é zero em vista da propriedade de antissimetria do símbolo de Levi-Civita. Dada a simetria de δ_{ij} segue:

$$[I_i, P_j] = \frac{1}{L}\delta_{ij}S_0 . \quad (6.28)$$

Agora é possível avaliar $[P_i, P_j]$ e $[I_i, I_j]$ por substituição em (6.27). Temos:

$$[P_i, P_j] = -\frac{1}{L^2}\epsilon_{ij}^k J_k \quad (6.29)$$

e

$$[I_i, I_j] = \frac{1}{L^2}\epsilon_{ij}^k J_k . \quad (6.30)$$

Colecionando os resultados (I)-(III) (e lembrando das equivalências $T_0 = S_0$ e $J_i = \bar{J}_i$) escrevemos:

$$\begin{aligned}
 [T_0, I_i] &= \frac{1}{L} P_i \\
 [T_0, P_i] &= \frac{1}{L} I_i \\
 [T_0, J_i] &= 0 \\
 [I_i, I_j] &= \frac{1}{L^2} \epsilon_{ij}^k \bar{J}_k \\
 [I_i, P_j] &= \frac{1}{L} \delta_{ij} T_0 \\
 [I_i, \bar{J}_j] &= -\epsilon_{ij}^k I_k \\
 [P_i, P_j] &= -\frac{1}{L^2} \epsilon_{ij}^k \bar{J}_k \\
 [P_i, \bar{J}_j] &= -\epsilon_{ij}^k P_k \\
 [\bar{J}_i, \bar{J}_j] &= \epsilon_{ij}^k \bar{J}_k .
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Esta é precisamente a álgebra de dS em coordenadas estáticas (4.20-4.28) – ou alternativamente Eq. (6.4) – cujo limite à Poincaré para $L \rightarrow \infty$ foi mostrado acima (seção 6.1).

6.2.2 $\kappa = -1$

Interpretação dos geradores

Pondo $\kappa = -1$ na Eq. (3.75):

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \sqrt{1+r^2} (\partial_t - H D) \\
 S_i &= x^i \partial_t - H (\partial_i + x^i D) \\
 T_i &= -\sqrt{1+r^2} \partial_i \\
 J_i &= \epsilon_{ij}^k x^j \partial_k ,
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

onde, conforme (3.56),

$$H(t) = \frac{1}{L} + \frac{2L}{e^{2\frac{t}{L}} (A + \sqrt{A^2 + L^2})^2 - L^2} . \tag{6.33}$$

Temos:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} H(t) \simeq \frac{1}{(A+t)} . \tag{6.34}$$

Substituindo (6.34) em (6.32), encontramos a forma dos geradores de Poincaré em coordenadas comóveis para $\kappa = -1$. Todavia é difícil dar a interpretação usual (translações, boosts, rotações) aos geradores neste sistema de coordenadas. Para recuperarmos este significado precisamos restaurar a dimensão às coordenadas comóveis aplicando as transformações (5.24). Com algum trabalho de cálculo, encontra-se:

$$\begin{aligned} S_0 &= \partial_{\bar{t}} = -T_0 \\ S_i &= -\bar{\partial}_i = \bar{P}_i \\ T_i &= -\left(\bar{x}^i \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{t} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\right) = (L I_i) \\ J_i &= \epsilon_{ij}^{k} \bar{x}^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} = \bar{J}_i, \end{aligned} \tag{6.35}$$

que dá interpretação direta à S_0 como operador de *deslocamento no tempo*; S_i como gerador das *translações espaciais*; T_i são os *boosts* e J_i , as *rotações*.

Contração algébrica

Num cálculo completamente análogo ao do caso $\kappa = 0$, converte-se a álgebra de dS em coordenadas de FRW para $\kappa = -1$ à álgebra de dS em coordenadas estáticas, que, por seu turno, reduz-se a Poincaré quando $L \rightarrow \infty$.

6.2.3 $\kappa = +1$

O caso $\kappa = +1$ é inteiramente análogo ao $\kappa = -1$ e por isso apenas elencaremos os resultados na *Tabela 2* à seguir.

6.3 Quadro geral das Contrações

Os resultados de toda o capítulo 6 estão reunidos na Tabela 2 abaixo.

Contração de Inönü-Wigner para dS				
	coordenadas de dS			
	gerador	versão $L \rightarrow \infty$		
	T_0	$\partial_{\bar{t}}$		
	P_i	$-\bar{\partial}_i$		
	$(-LI_i)$	$(\bar{x}^i \bar{\partial}_t + \bar{t} \bar{\partial}_i)$		
	$\bar{J}_i$	$\epsilon_{ij}{}^k \bar{x}^j \bar{\partial}_k$		
coordenadas de FRW				
gerador	versão $L \rightarrow \infty$			
S_0	κ	r e x^i adimensionais		dimensionando r e x^i
	0	∂_t		$\partial_{\bar{t}}$
	-1	$\sqrt{1+r^2} \left(\partial_t - \frac{1}{(1+t)} D \right)$		$\partial_{\bar{t}}$
	+1	$\sqrt{1-r^2} \left(\partial_t - \frac{i}{(1+it)} D \right)$		$\partial_{\bar{t}}$
S_i	κ	r e x^i adimensionais		dimensionando r e x^i
	0	$S_i \rightarrow \left(\frac{1}{L} S_i + \frac{1}{2} T_i = P_i \right)$		$-\bar{\partial}_i$
	-1	$x^i \partial_t - \frac{1}{(1+t)} (\partial_i + x^i D)$		$-\bar{\partial}_i$
	+1	$x^i \partial_t + \frac{i}{(1+it)} (\partial_i - x^i D)$		$-i \left(-\bar{\partial}_i \right)$
T_i	κ	r e x^i adimensionais		dimensionando r e x^i
	0	$T_i \rightarrow \left(-S_i + \frac{1}{2} L T_i = L I_i \right)$		$-(\bar{x}^i \bar{\partial}_t + \bar{t} \bar{\partial}_i)$
	-1	$-\sqrt{1+r^2} \partial_i$		$-(\bar{x}^i \bar{\partial}_t + \bar{t} \bar{\partial}_i)$
	+1	$-\sqrt{1-r^2} \partial_i$		$-i (\bar{x}^i \bar{\partial}_t + \bar{t} \bar{\partial}_i)$
J_i		r e x^i adimensionais	dimensionando r e x^i	
		$\epsilon_{ij}{}^k x^j \partial_k$	$\epsilon_{ij}{}^k \bar{x}^j \bar{\partial}_k$	

Tabela 2: Comparação entre a contração dos geradores de dS nos sistemas de coordenadas de dS e FRW. Depois de efetuada a contração de Wigner em que $L \rightarrow \infty$ devemos reconhecer os geradores do grupo de Poincaré.

Os geradores S_0 , S_i , T_i , e J_i são adequados para reconhecer a quebra de simetria entre dS e FRW: S_0 e S_i desaparecem a não ser que estejamos em dS. Não obstante, como estão expressos em coordenadas adimensionais, não são convenientes para comparação com os familiares geradores do grupo de Poincaré no limite $L \rightarrow \infty$. Para atribuir interpretação física a esses geradores devemos restaurar dimensão às coordenadas espaciais r , x^i . Então, por exemplo, os T_i , que nas coordenadas comóveis poderiam ser associados a translações (em seções espaciais com $\kappa = -1, 0, +1$), ganham o significado de boosts quando escritos em coordenadas barradas (dimensionadas).

Capítulo 7

Comentários Finais

Justificamos no capítulo 2 a importância da busca por soluções exatas das equações de Friedmann incluindo o caso geral de um universo preenchido por matéria (bariônica e escura-fria), radiação, com constante cosmológica não nula e com todos os valores permitidos para o parâmetro de curvatura, $\kappa = -1, 0, +1$. De fato, construímos uma tal solução para toda história cósmica (sob a hipótese de independência entre as equações constitutivas dos componentes do fluido cosmológico). Obtivemos o fator de escala como função implícita do tempo, $t = t(a)$, envolvendo funções elípticas de primeiro e terceiro tipos. Argumentamos que o modelo $\Lambda\gamma$ CDM é conveniente sempre que se exige precisão, em particular no universo primordial quando difere notoriamente do modelo Λ CDM.

Neste trabalho de tese tratamos conjuntamente as isometrias de dS e FRW usando o mesmo sistema de coordenadas (comóveis) para descrever ambos os espaços-tempos. Tal abordagem mostrou-se profícua, porque dela emergiu a função de quebra de simetria $U(t) = a^2\dot{H}$, cuja constância ou não seleciona um modelo cosmológico ou outro. Sendo uma simples seleção, este cenário de transição não constitui um processo, uma deformação contínua da solução acelerada de dS na classe de modelos de FRW por perda gradual de simetrias. As contrações de Inönü-Wigner não podem ser usadas para obtenção desse desejado processo, pois mantêm o número de geradores fixo: o grupo de dS, com seus dez geradores, pode ser contraído ao grupo de Poincaré, este também dotado de dez geradores. Todavia, o grupo de dS não pode ser contraído ao de FRW, que é equipado com somente seis geradores de simetria.

Outra vantagem de apresentar os geradores de dS em coordenadas comóveis é o fato de trazê-los para as coordenadas-padrão da cosmologia moderna: as coordenadas de FRW. Esta forma dos geradores de dS foi comparada àquela em coordenadas estáticas através das transformações de Robertson generalizadas, um feito útil para evidenciar o significado físico dos geradores.

Se insistirmos na existência de uma transição contínua entre o universo de dS e as soluções de FRW, então seria um problema interessante obter a dinâmica deste processo. A solução usual é rejeitar o modelo de dS como o modelo correto para o estágio inicial acelerado do universo. Isto é justificado com base no problema da saída elegante: argumenta-se que a expansão de dS nunca acaba. A dinâmica da transição para um universo desacelerado é então aquela de um novo campo escalar, o inflaton, cujo significado em termos das interações fundamentais é ainda obscuro.

A menos da gravitação, todas as interações são bem descritas no arcabouço geométrico das teorias de gauge. Então, numa abordagem conservadora, poder-se-ia pensar em usar as teorias de gauge para explicar a dinâmica da transição dS-FRW ausente aqui. De fato, nosso trabalho deve prosseguir na direção de aplicar as Teorias de Gauge Estendidas [33], [34], [35] a este problema cosmológico. A idéia é associar os geradores de simetria que são perdidos na passagem de dS à FRW (os operadores S_μ relacionados à componente ξ^0 de Killing) ao potencial de gauge anômalo que define o campo de gauge de quebra de simetria. Este satisfaz a equação de Yang-Mills e, portanto, possui uma dinâmica. Somos incentivados nesta direção pelo próprio fato que as conexões de Levi-Civita para dS satisfazem uma equação de Yang-Mills. A quebra parcial das simetrias de gauge não é novidade, mas aqui ela envolveria o próprio espaço-tempo.

Além das Extensões em Teorias de Gauge, também as Teorias de Gauge de Segunda Ordem [36], [37] tem potencial de ataque ao quebra-cabeça da aceleração do universo em larga escala, um trabalho em progresso: investigamos se uma Lagrangiana análoga à da Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky [38] para o tensor de curvatura de FRW leva à equações de movimento para $a(t)$ que admitem soluções com $\ddot{a} > 0$.

O problema da transição entre soluções cosmológicas aceleradas e desaceleradas é certamente mais abrangente que aquele das transições entre os paradigmas de dS e FRW. Uma modelagem apropriada da equação de estado – relação pressão-densidade de energia, $p = p(\rho)$ – para o fluido cósmico pode descrever a passagem intermodelos. Um exemplo é dado em [4], em que parâmetros livres em “uma equação de estado fenomenológica de transição” podem ser ajustados a fim de estabelecer a taxa de conversão do universo inflacionário para o dominado pela radiação. A Ref. [39] constitui uma tentativa de produzir pressão negativa no universo primordial através da correção na equação de estado para a matéria bariônica admitindo interação forte. A pressão dos nucleons interagentes, vindos da radiação de fundo por produção de pares, é obtida pela técnica de Mayer da Expansão em Clusters [16] aplicada ao potencial nuclear. A parte atrativa do potencial engendra um decréscimo acentuado de pressão que pode ser suficientemente para provocar a aceleração do universo

jovem.

Apêndice A

Integração das componentes ξ_i de FRW

Na seção 3.2 mostramos explicitamente a dedução da componente Killing ξ_0 para as simetrias de dS nas coordenadas comóveis – Eq. (3.50). Acontece que essa é a componente mais simples de se integrar. Logo, pode ser de interesse registrar o longo (e não-trivial no caso de ξ_1) procedimento de cálculo das demais componentes ξ_i . É o que consta deste apêndice.

A.1 A componente radial $\xi_1 = \xi_1(t, r, \theta, \phi)$

A.1.1 Dependência de ξ_1 em t

Extraia-se ∂_0 da Eq. (3.12) e empregue-se (3.11), obtendo-se a derivada total em relação a $x^0 = t$,

$$\partial_0 [\partial_0 \xi_1 - 2H \xi_1] = 0$$

que dá para o termo entre colchetes uma função de r , θ e ϕ a ser determinada:

$$\partial_0 \xi_1 - 2H \xi_1 = R_1(r, \theta, \phi) . \quad (\text{A.1})$$

A solução ξ_1^h da equação homogênea

$$\partial_0 \xi_1^h - 2H \xi_1^h = 0 ,$$

ou

$$\int \frac{d\xi_1^h}{\xi_1^h} = 2 \int H dt ,$$

é obtida ao notarmos a validade de

$$\int H dt = \int \frac{\dot{a}}{a} dt = \int \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt = \int \frac{d}{dt} (\ln a) dt = \ln a . \quad (\text{A.2})$$

Logo,

$$\xi_1^h = R_2(r, \theta, \phi) a^2 \quad (\text{A.3})$$

Para uma solução particular, ξ_1^p , substitua-se o anatz

$$\xi_1^p = R_3(t) R_4(r, \theta, \phi) , \quad (\text{A.4})$$

inspirado na forma obtida para a solução homogênea – que é um produto de uma função dependente exclusivamente do tempo, a^2 , por uma função das outras coordenadas $R_2(r, \theta, \phi)$ – no primeiro membro de

$$\partial_0 \xi_1^p - 2H \xi_1^p = R_1(r, \theta, \phi) \quad (\text{A.5})$$

para avaliar

$$\partial_0 R_3(t) R_4(r, \theta, \phi) - 2H R_3(t) R_4(r, \theta, \phi) = R_1(r, \theta, \phi)$$

ou

$$\partial_0 R_3 - 2H R_3 = \frac{R_1(r, \theta, \phi)}{R_4(r, \theta, \phi)} .$$

Observemos o que acontece ao adotarmos o anatz

$$R_3(t) = a^2 H . \quad (\text{A.6})$$

Então,

$$\partial_0 R_3 = \partial_0 (a^2 H) = 2a\dot{a}H + a^2 \dot{H} = 2a^2 H^2 + U$$

e

$$\partial_0 R_3 - 2H R_3 = 2a^2 H^2 + U - 2H (a^2 H) = U = \kappa ,$$

a última igualdade resultando do fato de lidarmos com a solução de de Sitter. Isto satisfaz a equação diferencial para R_3 apenas se

$$R_1(r, \theta, \phi) = \kappa R_4(r, \theta, \phi) . \quad (\text{A.7})$$

Mas isso implicaria $R_1(r, \theta, \phi) = 0$ no caso $\kappa = 0$, introduzindo um vínculo novo desnecessário para este valor de κ .

(a) $\kappa = 0$. De fato, quando $\kappa = 0$, e **apenas** neste caso, a função de Hubble é uma constante – cf. Eq. (3.56), $H = 1/L$, e a equação diferencial para a solução particular (A.5), $\partial_0 \xi_1^p - 2H \xi_1^p = R_1(r, \theta, \phi)$, é satisfeita por

$$\xi_1^p = -\frac{1}{2H} R_1(r, \theta, \phi) \quad (\kappa = 0) , \quad (\text{A.8})$$

como se vê por inspeção:

$$\partial_0 \xi_1^p - 2H \xi_1^p = 0 - 2H \left[-\frac{1}{2H} R_1(r, \theta, \phi) \right] = R_1(r, \theta, \phi) .$$

(b) $\kappa = \pm 1$. Para $\kappa = +1$ ou $\kappa = -1$, o vínculo (A.7) funciona e a equação diferencial (A.5) fica

$$\partial_0 \xi_1^p - 2H \xi_1^p = \kappa R_4(r, \theta, \phi) .$$

Com o anatz (A.4, A.6) para ξ_1^p ,

$$\xi_1^p = a^2 H R_4(r, \theta, \phi) ,$$

a equação acima é realmente satisfeita:

$$\partial_0 \xi_1^p - 2H \xi_1^p = (2a^2 H^2 + U) R_4(r, \theta, \phi) - 2a^2 H^2 R_4(r, \theta, \phi) = \kappa R_4(r, \theta, \phi) .$$

Em termos de $R_1(r, \theta, \phi)$ a solução ξ_1^p é

$$\xi_1^p = a^2 H \frac{R_1(r, \theta, \phi)}{\kappa} \quad (\kappa = \pm 1)$$

ou, como κ é somente um sinal nesse caso,

$$\xi_1^p = \kappa a^2 H R_1(r, \theta, \phi) \quad (\kappa = \pm 1) . \quad (\text{A.9})$$

Agregando os casos (A.8) e (A.9), escrevemos:

$$\xi_1^p = \left[\kappa a^2 H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2H} \right] R_1(r, \theta, \phi) . \quad (\text{A.10})$$

A solução geral é a combinação da homogênea com a particular, $\xi_1 = \xi_1^h + \xi_1^p$:

$$\xi_1 = \left[\kappa a^2 H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2H} \right] R_1(r, \theta, \phi) + a^2 R_2(r, \theta, \phi) . \quad (\text{A.11})$$

A.1.2 Dependência de ξ_1 em r

Encontraremos a dependência de ξ_1 em r usando a expressão (A.11) acima, ξ_0 – Eq. (3.50) – na forma

$$\xi_0 = r \tau_1(\theta, \phi) + \sqrt{1 - \kappa r^2} \tau_2 \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\tau_1(\theta, \phi) = [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] ; \quad \tau_2 = C_0 , \quad (\text{A.13})$$

e a equação diferencial (3.18). Esta última é equivalente a

$$\sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_1 \xi_1 - \frac{\kappa r}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \xi_1 - a^2 H \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = 0 ,$$

ou seja,

$$\partial_1 \left[\sqrt{1 - \kappa r^2} \xi_1 \right] - a^2 H \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = 0 . \quad (\text{A.14})$$

Temos três casos:

(a) $\kappa = 0$. Para este valor do parâmetro de curvatura, as Eqs. (A.11) e (A.12) reduzem-se a:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -\frac{1}{2H}R_1(r, \theta, \phi) + a^2 R_2(r, \theta, \phi) \quad (H = \text{const}) , \\ \xi_0 &= r \tau_1(\theta, \phi) + \tau_2 ,\end{aligned}$$

equações que, substituídas em (A.14),

$$\partial_1 \xi_1 - a^2 H \xi_0 = 0 ,$$

levam a

$$\partial_1 R_1(r, \theta, \phi) - 2a^2 H \{ \partial_1 R_2(r, \theta, \phi) - H [r \tau_1(\theta, \phi) + \tau_2] \} = 0 .$$

Mas isto deve ser válido para todos os valores do tempo, logo:

$$\begin{cases} \partial_1 R_1(r, \theta, \phi) = 0 \\ \partial_1 R_2(r, \theta, \phi) - H [r \tau_1(\theta, \phi) + \tau_2] = 0 \end{cases} ,$$

conduzindo a

$$R_1(r, \theta, \phi) = R_5(\theta, \phi) \quad (\text{A.15})$$

e

$$R_2(r, \theta, \phi) = H \frac{r^2}{2} \tau_1(\theta, \phi) + H r \tau_2 + R_6(\theta, \phi) . \quad (\text{A.16})$$

Substituindo estas fórmulas em (A.11) especificamos a dependência de ξ_1 em r para $\kappa = 0$:

$$\xi_1 = -\frac{1}{2H}R_5(\theta, \phi) + a^2 H \left[\frac{r^2}{2} \tau_1(\theta, \phi) + r \tau_2 \right] + a^2 R_6(\theta, \phi) \quad (H = \text{const}) .$$

Este resultado decorreu da integração de (3.18). Ele satisfaz também a Eq. (3.12)? Vejamos. Substituindo a expressão acima para ξ_1 bem como (A.12) em (3.12) encontramos:

$$\partial_1 \xi_0 + \partial_0 \xi_1 - 2H \xi_1 = \tau_1(\theta, \phi) + R_5(\theta, \phi) = 0 .$$

E isto leva a

$$R_5(\theta, \phi) = -\tau_1(\theta, \phi) ,$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a^2 H r C_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} + a^2 H r^2 \right) [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] + \\ &\quad + a^2 R_6(\theta, \phi) \quad (\kappa = 0) .\end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde substituímos as formas funcionais de $\tau_1(\theta, \phi)$ e τ_2 .

(b) $\kappa = +1$. Fixando $\kappa = +1$ nas Eqs. (A.11) e (3.50),

$$\xi_1 = a^2 H R_1(r, \theta, \phi) + a^2 R_2(r, \theta, \phi) ; \quad \xi_0 = r \tau_1(\theta, \phi) + \sqrt{1-r^2} \tau_2 ,$$

escrevemos (3.18),

$$(1-r^2) \partial_1 \xi_1 - r \xi_1 - a^2 H \xi_0 = 0 ,$$

como:

$$\begin{aligned} a^2 H \left[(1-r^2) \partial_1 R_1(r, \theta, \phi) - r R_1(r, \theta, \phi) - r \tau_1(\theta, \phi) - \sqrt{1-r^2} \tau_2 \right] + \\ + a^2 \left[(1-r^2) \partial_1 R_2(r, \theta, \phi) - r R_2(r, \theta, \phi) \right] = 0 . \end{aligned}$$

Nesse caso H não é uma constante – vide (3.56) – e as funções $a^2 H$ e a^2 são linearmente independentes. Assim sendo, temos, simultaneamente:

$$\begin{cases} (1-r^2) \partial_1 R_1(r, \theta, \phi) - r R_1(r, \theta, \phi) - r \tau_1(\theta, \phi) - \sqrt{1-r^2} \tau_2 = 0 \\ (1-r^2) \partial_1 R_2(r, \theta, \phi) - r R_2(r, \theta, \phi) = 0 \end{cases} .$$

Analisemos a equação de R_1 . Dividindo-a por $\sqrt{1-r^2}$, escrevemo-la como:

$$\partial_1 \left[\sqrt{1-r^2} R_1(r, \theta, \phi) \right] - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \tau_1(\theta, \phi) - \tau_2 = 0 ,$$

que por integração direta dá:

$$\sqrt{1-r^2} R_1(r, \theta, \phi) = -\sqrt{1-r^2} \tau_1(\theta, \phi) + r \tau_2 + R_5(\theta, \phi) ,$$

i.e.,

$$R_1(r, \theta, \phi) = -\tau_1(\theta, \phi) + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \tau_2 + \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} R_5(\theta, \phi) . \quad (\text{A.18})$$

Por seu turno, a equação para R_2 é:

$$\partial_1 \left[\sqrt{1-r^2} R_2(r, \theta, \phi) \right] = 0 ,$$

i.e.,

$$\sqrt{1-r^2} R_2(r, \theta, \phi) = R_6(\theta, \phi) ,$$

ou

$$R_2(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} R_6(\theta, \phi) . \quad (\text{A.19})$$

Por conseguinte:

$$\xi_1 = a^2 H \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} [r \tau_2 + R_5(\theta, \phi)] - \tau_1(\theta, \phi) \right] + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} R_6(\theta, \phi) .$$

Esta não é a forma final da dependência de ξ_1 em r . Devemos assegurar que esta fórmula e $\xi_0 = r \tau_1(\theta, \phi) + \sqrt{1-r^2} \tau_2$ satisfazem (3.12). Usaremos o resultado

$$\partial_0(a^2 H) = 2a\dot{a}H + a^2\dot{H} = 2a^2 H^2 + U, \quad (\text{A.20})$$

que para a solução de dS ($U = \kappa$) com $\kappa = +1$ fica somente $\partial_0(a^2 H) = 2a^2 H^2 + 1$. Temos:

$$\partial_1 \xi_0 + \partial_0 \xi_1 - 2H \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} R_5(\theta, \phi) = 0.$$

Uma vez que isto deve ser válido para todo r , segue que:

$$R_5(\theta, \phi) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Conseqüentemente, a forma final da dependência de ξ_1 em r no caso $\kappa = +1$ é:

$$\begin{aligned} \xi_1 = & a^2 H \left[\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} C_0 - [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] \right] + \\ & + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} R_6(\theta, \phi) \quad (\kappa = +1). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

(c) $\kappa = -1$. As diferenças com respeito ao caso $\kappa = +1$ são mínimas e o roteiro de cálculo, o mesmo. Resulta que:

$$\begin{aligned} \xi_1 = & a^2 H \left[\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} C_0 + [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] \right] + \\ & + a^2 \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} R_6(\theta, \phi) \quad (\kappa = -1). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Reunir as soluções $\kappa = 0$, $\kappa = +1$ e $\kappa = -1$ é uma tarefa fácil. Inspecionando as Eqs. (A.17), (A.22) e (A.23) montamos a versão unificada de ξ_1 :

$$\begin{aligned} \xi_1 = & a^2 H \frac{r}{\sqrt{1-\kappa r^2}} C_0 + \\ & + \left[(1-\kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} + a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] + \\ & + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-\kappa r^2}} R_6(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Os casos $\kappa = 0$ e $\kappa = \pm 1$ são tão diferentes que iremos tratá-los separadamente em quase todos os cálculos, agregando os resultados *a posteriori*.

A.1.3 Dependência de ξ_1 em θ

Tome-se ∂_2 da Eq. (3.15), e use-se (3.19) para substituir $\partial_2 \xi_2$ em termos de ξ_1 e ξ_0 , depois do que se emprega (3.18) para chegar a:

$$\partial_2 \partial_2 \xi_1 + \xi_1 + a^2 H r [r \partial_1 \xi_0 - \xi_0] = 0. \quad (\text{A.25})$$

Novamente, há que se tratar três casos:

(a) $\kappa = 0$. Substituindo (3.50) e (A.24) – com $\kappa = 0$ – em (A.25) resulta:

$$a^2 [\partial_2 \partial_2 R_6(\theta, \phi) + R_6(\theta, \phi)] = 0, \quad (\text{A.26})$$

que deve ser satisfeita para todo valor de $a(t)$. Portanto:

$$\partial_2 \partial_2 R_6(\theta, \phi) + R_6(\theta, \phi) = 0, \quad (\text{A.27})$$

cujas soluções são do tipo

$$R_6(\theta, \phi) = R_7(\phi) \sin \theta + R_8(\phi) \cos \theta. \quad (\text{A.28})$$

(b) $\kappa = +1$. Pondo (3.50) e (A.24) – com $\kappa = +1$ – em (A.25) encontramos a equação diferencial

$$a^2 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} [\partial_2 \partial_2 R_6(\theta, \phi) + R_6(\theta, \phi)] = 0. \quad (\text{A.29})$$

que deve valer para todo $a(t)$ e r . Logo, é preciso satisfazer

$$\partial_2 \partial_2 R_6(\theta, \phi) + R_6(\theta, \phi) = 0,$$

que é exatamente a Eq. (A.27): a forma funcional de $R_6(\theta, \phi)$ é dada por (A.28) também se $\kappa = +1$.

Note-se que a diferença entre as Eqs. (A.26) e (A.29) para os casos $\kappa = 0$ e $\kappa = 1$ é apenas o fator a multiplicar o colchetes que constituirá a equação diferencial (A.27) para R_6 . De qualquer forma, os fatores são tomados diferentes de zero em ambos os casos e, por isso, poderíamos ter-los tratado de forma unificada, economizando trabalho. Isto será possível em outras ocasiões, mencionadas oportunamente.

(c) $\kappa = -1$. Uma rápida checagem mostra que (A.28) é igualmente uma solução para o caso $\kappa = -1$. Observamos apenas, que a equação diferencial neste caso,

$$a^2 \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} [\partial_2 \partial_2 R_6(\theta, \phi) + R_6(\theta, \phi)] = 0,$$

carrega um fator não-nulo diferente daqueles em (A.26) e (A.29). Mas isso não importa em termos práticos, conforme discutido acima.

Concluimos o cálculo da dependência de ξ_1 em θ substituindo (A.28) na expressão geral (A.24) para a dependência de ξ_1 em r :

$$\begin{aligned} \xi_1 = & a^2 H \frac{r}{\sqrt{1-\kappa r^2}} C_0 + \\ & + \left[(1-\kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} + a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] + \\ & + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-\kappa r^2}} [R_7(\phi) \sin \theta + R_8(\phi) \cos \theta]. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

A.1.4 Dependência de ξ_1 em ϕ

Tome-se ∂_3 da Eq. (3.16) e, no resultado, substitua $\partial_3 \xi_3$ conforme dado pela Eq. (3.20), para encontrar

$$\begin{aligned} \partial_3 \partial_3 \xi_1 + \partial_1 \partial_3 \xi_3 - \frac{2}{r} \partial_3 \xi_3 &= \partial_3 \partial_3 \xi_1 - \sin \theta \cos \theta \left[\partial_1 \xi_2 - \frac{2}{r} \xi_2 \right] + \\ &\quad - r \sin^2 \theta \left[(1 - \kappa r^2) \partial_1 \xi_1 - \kappa r \xi_1 \right] + \\ &\quad + a^2 H r^2 \sin^2 \theta \partial_1 \xi_0 + \sin^2 \theta \xi_1 = 0 . \end{aligned}$$

Se usarmos (3.15), eliminamos os termos em ξ_2 , uma componente que ainda não conhecemos. Empregando também (3.18), temos

$$\partial_3 \partial_3 \xi_1 + \sin \theta \cos \theta \partial_2 \xi_1 + \sin^2 \theta \xi_1 + a^2 H r \sin^2 \theta [r \partial_1 \xi_0 - \xi_0] = 0 , \quad (\text{A.31})$$

uma equação diferencial dada em termos da componente ξ_0 , completamente calculada, e de ξ_1 .

Substituindo os resultados (3.50) e (A.30) em (A.31) chega-se a:

$$a^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \{ [\partial_3 \partial_3 R_7(\phi) + R_7(\phi)] \sin \theta + \partial_3 \partial_3 R_8(\phi) \cos \theta \} = 0 ,$$

que leva ao sistema

$$\begin{cases} \partial_3 \partial_3 R_7(\phi) + R_7(\phi) = 0 \\ \partial_3 \partial_3 R_8(\phi) = 0 \end{cases} , \quad (\text{A.32})$$

donde seguem

$$R_7(\phi) = R_9 \sin \phi + R_{10} \cos \phi , \quad (\text{A.33})$$

e

$$R_8(\phi) = R_{11} \phi + R_{12} \quad (\text{A.34})$$

(R_9, R_{10}, R_{11} e R_{12} constantes).

Colocando Eqs. (A.33) e (A.34) em (A.30) encontramos:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a^2 H \frac{r}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} C_0 + \\ &\quad + \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} + a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] + \\ &\quad + a^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} [(R_9 \sin \phi + R_{10} \cos \phi) \sin \theta + (R_{11} \phi + R_{12}) \cos \theta] . \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

A.1.5 Condição de periodicidade sobre $\xi_1(t, r, \theta, 0)$

Como feito no cálculo da componente ξ_0 , seção 3.2, agora impomos a condição de periodicidade de ξ_1 na coordenada azimutal:

$$\xi_1(t, r, \theta, 0) = \xi_1(t, r, \theta, 2\pi) ,$$

i.e., $\xi_1(t, r, \theta, 0) - \xi_1(t, r, \theta, 2\pi) = 0$. Usando (A.35), obtemos

$$2\pi R_{11} \cos \theta = 0 ,$$

que é válida para todo valor de θ apenas se

$$R_{11} = 0 . \quad (\text{A.36})$$

Este vínculo elimina o termo de ξ_1 linear em ϕ . Ademais, renomeando as constantes

$$R_9 = K_2 ; \quad R_{10} = K_1 ; \quad R_{12} = K_3 ;$$

escrevemos (A.35) em sua forma final:

$$\begin{aligned} \xi_1 = & a^2 H \frac{r}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} C_0 + \\ & + \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} + a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] + \\ & + a^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \sin \theta + K_3 \cos \theta] . \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Esta é a equação (3.52) apresentada na seção 3.3.

A.2 A componente $\xi_2 = \xi_2(t, r, \theta, \phi)$

A.2.1 Dependência de ξ_2 em t

A dependência temporal de ξ_2 é igual àquela de ξ_1 porque as equações de Killing que relacionam ξ_0 e ξ_2 – Eqs. (3.11) and (3.13) – são do mesmo tipo das equações relacionando ξ_0 e ξ_1 – Eqs. (3.11) and (3.12). Esta é a razão pela qual o processo de obtenção da dependência de ξ_2 em t é uma cópia exata do que fizemos na seção A.1.1, exceto pelo fato que devemos mudar o índice 1 para 2. Logo:

$$\xi_2 = \left[\kappa a^2 H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2H} \right] \Theta_1(r, \theta, \phi) + a^2 \Theta_2(r, \theta, \phi) . \quad (\text{A.38})$$

Obviamente, trocamos o nome das funções arbitrárias constantes em t por conveniência.

A.2.2 Dependência de ξ_2 em r

Avaliamos a dependência de ξ_2 em r a partir de (3.15). Usando (A.37) e (A.38), calculamos:

$$\begin{aligned} & \partial_2 \xi_1 + \partial_1 \xi_2 - \frac{2}{r} \xi_2 = \\ & = \left[\kappa a^2 H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2H} \right] \left[\partial_1 \Theta_1 - \frac{2}{r} \Theta_1 - \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) \right] + \\ & + a^2 \left[\partial_1 \Theta_2 - \frac{2}{r} \Theta_2 + (1 - \kappa^2) \frac{H r^2}{2} \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \partial_2 \Xi(\theta, \phi) \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

A função $\tau_1(\theta, \phi)$ é a que aparece em (A.13) e definimos

$$\Xi(\theta, \phi) = [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \sin \theta + K_3 \cos \theta] . \quad (\text{A.40})$$

O segundo membro de (A.39) deve ser nulo. Analisemos isto caso a caso.

(a) $\kappa = 0$. Neste caso, $H = \text{const}$ e os termos que tem a função $a^2(t)$ por coeficiente devem anular-se independentemente dos demais: a Eq. (A.39) é válida qualquer que seja t . Temos:

$$\begin{cases} \partial_1 \Theta_1(r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Theta_1(r, \theta, \phi) - \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) = 0 \\ \partial_1 \Theta_2(r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Theta_2(r, \theta, \phi) + H \frac{r^2}{2} \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) + \partial_2 \Xi(\theta, \phi) = 0 \end{cases} . \quad (\text{A.41})$$

A primeira equação do sistema (A.41) é uma equação diferencial para a dependência de $\Theta_1(r, \theta, \phi)$ em r . A equação homogênea é:

$$\partial_1 \Theta_1^h - \frac{2}{r} \Theta_1^h = 0 ,$$

e sua solução, obtida por uma integração direta e trivial, é:

$$\Theta_1^h(r, \theta, \phi) = \Theta_3(\theta, \phi) r^2 ,$$

onde $\Theta_3(\theta, \phi)$ é uma função arbitrária de integração constante em r . O ansatz

$$\Theta_1^p(r, \theta, \phi) = -r \partial_2 \tau_1(\theta, \phi)$$

é uma solução particular para

$$\partial_1 \Theta_1^p(r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Theta_1^p(r, \theta, \phi) - \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) = 0 ,$$

como se verifica por simples substituição. Logo, a solução $\Theta_1(r, \theta, \phi) = \Theta_1^h(r, \theta, \phi) + \Theta_1^p(r, \theta, \phi)$ é:

$$\Theta_1(r, \theta, \phi) = r^2 \Theta_3(\theta, \phi) - r \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) . \quad (\text{A.42})$$

A segunda equação do sistema (A.41) é uma equação diferencial para a dependência de $\Theta_2(r, \theta, \phi)$ em r . Para obter a sua solução, note-se que:

$$\partial_1 \left(\frac{\Theta_2}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \partial_1 \Theta_2 - \frac{2}{r^3} \Theta_2 ,$$

e, portanto,

$$r^2 \partial_1 \left(\frac{\Theta_2}{r^2} \right) = \partial_1 \Theta_2 - \frac{2}{r} \Theta_2 ,$$

exatamente os primeiros dois termos da equação diferencial sob estudo. Assim, ela pode ser escrita na forma

$$\partial_1 \left(\frac{\Theta_2}{r^2} \right) + \frac{H}{2} \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) + \frac{1}{r^2} \partial_2 \Xi(\theta, \phi) = 0 ,$$

que é prontamente integrada:

$$\Theta_2 = r^2 \Theta_4(\theta, \phi) - \frac{H}{2} r^3 \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) + r \partial_2 \Xi(\theta, \phi) . \quad (\text{A.43})$$

Esta sistemática é equivalente a que foi empregada na obtenção de (A.42).

Substituindo (A.42) e (A.43) na expressão (A.38) – com $\kappa = 0$:

$$\begin{aligned} \xi_2 = & -\frac{1}{2H} [r^2 \Theta_3(\theta, \phi) - r \partial_2 \tau_1(\theta, \phi)] + \\ & + a^2 \left[r^2 \Theta_4(\theta, \phi) - \frac{H}{2} r^3 \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) + r \partial_2 \Xi(\theta, \phi) \right] . \end{aligned}$$

Esta é uma solução aceitável se satisfaz também as outras equações de Killing envolvendo ξ_2 . Em particular, ela deve verificar (3.13). Usando a expressão de ξ_2 acima e também a Eq. (3.50) para ξ_0 com $\kappa = 0$,

$$\xi_0 = C_0 + r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \sin \theta + C_3 \cos \theta] = C_0 + r \tau_1(\theta, \phi) ,$$

encontramos:

$$\partial_2 \xi_0 + \partial_0 \xi_2 - 2H \xi_2 = r^2 \Theta_3(\theta, \phi) = 0 ,$$

que estabelece um novo vínculo:

$$\Theta_3(\theta, \phi) = 0 . \quad (\text{A.44})$$

O resultado final para a dependência radial de ξ_2 quando $\kappa = 0$ é, finalmente,

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \frac{1}{2H} r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] + a^2 r^2 \Theta_4(\theta, \phi) + \\ & - a^2 H \frac{r^3}{2} [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] \quad (\kappa = 0) , \quad (\text{A.45}) \end{aligned}$$

onde já substituímos

$$\partial_2 \tau_1 (\theta, \phi) = [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] \quad (\text{A.46})$$

e

$$\partial_2 \Xi (\theta, \phi) = [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] . \quad (\text{A.47})$$

(b) $\kappa = \pm 1$. Os termos proporcionais a $(1 - \kappa^2)$ são zero e lembramos o leitor uma vez mais que H não é uma constante neste caso. Isto garante a independência de a^2 e $a^2 H$. Então, para certificar a validade da igualdade (A.39) para todo t , impomos:

$$\begin{cases} \partial_1 \Theta_1 (r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Theta_1 (r, \theta, \phi) - \partial_2 \tau_1 (\theta, \phi) = 0 \\ \partial_1 \Theta_2 (r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Theta_2 (r, \theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \partial_2 \Xi (\theta, \phi) = 0 \end{cases} . \quad (\text{A.48})$$

A equação para $\Theta_1 (r, \theta, \phi)$ do sistema (A.48) coincide com aquela do caso $\kappa = 0$ – primeira equação do sistema (A.41). A sua solução é, pois,

$$\Theta_1 (r, \theta, \phi) = r^2 \Theta_3 (\theta, \phi) - r \partial_2 \tau_1 (\theta, \phi) , \quad (\text{A.49})$$

como (A.42).

De forma análoga ao que fizemos no caso $\kappa = 0$, reescrevemos a equação diferencial para $\Theta_2 (r, \theta, \phi)$ como:

$$r^2 \partial_1 \left(\frac{\Theta_2}{r^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \partial_2 \Xi (\theta, \phi) = 0 .$$

Como, por mudança de variáveis,

$$\int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \kappa r^2}} = -\frac{1}{r} \sqrt{1 - \kappa r^2} ,$$

temos:

$$\Theta_2 (r, \theta, \phi) = r \sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_2 \Xi (\theta, \phi) + r^2 \Theta_4 (\theta, \phi) . \quad (\text{A.50})$$

Substituindo (A.49) e (A.50) em (A.38) – com $(1 - \kappa^2) = 0$:

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \kappa a^2 H \left[r^2 \Theta_3 (\theta, \phi) - r \partial_2 \tau_1 (\theta, \phi) \right] + \\ & + a^2 \left[r^2 \Theta_4 (\theta, \phi) + r \sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_2 \Xi (\theta, \phi) \right] . \end{aligned}$$

Novamente, devemos checar se esta solução satisfaz (3.13). Usando, além de ξ_2 acima, também (3.50) (com $\kappa \neq 0$),

$$\xi_0 = \sqrt{1 - \kappa r^2} C_0 + r \tau_1 (\theta, \phi)$$

avalia-se:

$$\partial_2 \xi_0 + \partial_0 \xi_2 - 2H \xi_2 = r \partial_2 \tau_1(\theta, \phi) + \kappa^2 [r^2 \Theta_3(\theta, \phi) - r \partial_2 \tau_1(\theta, \phi)] = 0 ,$$

onde usamos $a^2 \dot{H} = U = \kappa$ para a solução de de Sitter. Já que $\kappa = \pm 1$, temos $\kappa^2 = 1$ e o primeiro termo cancela o último, deixando $r^2 \Theta_3(\theta, \phi) = 0$, o que é verdade para todos os valores de r . Por isso,

$$\Theta_3(\theta, \phi) = 0 , \quad (\text{A.51})$$

como no caso $\kappa = 0$.

Com essa informação adicional, a forma funcional de ξ_2 é, até agora:

$$\begin{aligned} \xi_2 = & -\kappa a^2 H r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r^2 \Theta_4(\theta, \phi) \quad (\kappa = \pm 1) , \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

em que usamos (A.46) e (A.47).

Para terminar esta seção, pomos (A.45) e (A.52) na mesma expressão:

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] + a^2 r^2 \Theta_4(\theta, \phi) . \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

A.2.3 Dependência de ξ_2 em θ

A dependência de ξ_2 em θ segue da equação de Killing (3.19),

$$\partial_2 \xi_2 + r (1 - \kappa r^2) \xi_1 - a^2 H r^2 \xi_0 = 0 ,$$

e dos resultados (3.50), (A.37) e (A.53). Usando as três últimas relações citadas, calculamos (3.19) como:

$$a^2 r^2 \partial_2 \Theta_4(\theta, \phi) = 0 ,$$

válida para os três valores de κ e para todo $a(t)$ e r . Logo,

$$\Theta_4(\theta, \phi) = \Theta_5(\phi) + \Theta_6 . \quad (\text{A.54})$$

Ao substituírmos (A.54) em (A.53) completamos os cálculos desta seção:

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] + a^2 r^2 [\Theta_5(\phi) + \Theta_6] . \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

A.2.4 Dependência de ξ_2 em ϕ

Extraindo ∂_3 de (3.17) e usando (3.20) para eliminar $\partial_3 \xi_3$ em termos de ξ_2 , ξ_1 e ξ_0 encontramos a equação diferencial

$$\partial_3 \partial_3 \xi_2 - \sin \theta \cos \theta \partial_2 \xi_2 + \xi_2 - r (1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta \partial_2 \xi_1 + a^2 H r^2 \sin^2 \theta \partial_2 \xi_0 = 0 \quad (\text{A.56})$$

para o cálculo da dependência azimutal da componente ξ_2 .

O que segue vale para os três valores de κ . Substituindo (A.55), (A.37) e (3.50) em (A.56) avaliamos, depois de algum trabalho de cálculo,

$$a^2 r^2 [\partial_3 \partial_3 \Theta_5(\phi) + \Theta_5(\phi) + \Theta_6] = 0 .$$

Uma vez que isto é válido para todos os valores de t e r , devemos satisfazer

$$\partial_3 \partial_3 \Theta_5(\phi) + \Theta_5(\phi) + \Theta_6 = 0 . \quad (\text{A.57})$$

A solução homogênea é da forma

$$\Theta_5^h(\phi) = \Theta_7 \sin \phi + \Theta_8 \cos \phi ,$$

enquanto que uma solução particular é

$$\Theta_5^p(\phi) = -\Theta_6 ,$$

conforme uma substituição direta confirma. Logo, a solução geral para Θ_5 é a soma

$$\Theta_5(\phi) = \Theta_7 \sin \phi + \Theta_8 \cos \phi - \Theta_6 . \quad (\text{A.58})$$

Pondo (A.58) em (A.55), resulta a forma final da dependência da componente ξ_2 em ϕ :

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r^2 [\Theta_7 \sin \phi + \Theta_8 \cos \phi] . \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Note-se que não há termos lineares em ϕ e, como consequência, esta solução automaticamente satisfaz o requerimento de periodicidade. Portanto, a solução (A.59) já é o resultado final para a forma funcional completa de $\xi_2(t, r, \theta, \phi)$. Entretanto, apenas por conveniência, renomearemos as constantes Θ_7 e Θ_8 :

$$\Theta_7 = L_1 ; \quad \Theta_8 = -L_2 ,$$

tal que

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r [(C_2 \sin \phi + C_1 \cos \phi) \cos \theta - C_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} [(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos \theta - K_3 \sin \theta] + \\ & + a^2 r^2 (L_1 \sin \phi - L_2 \cos \phi) . \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

A.3 A componente $\xi_3 = \xi_3(t, r, \theta, \phi)$

A.3.1 Dependência de ξ_3 em t

A dependência temporal de ξ_3 é igual àquela de ξ_1 e ξ_2 , porque as equações de Killing que relacionam ξ_0 e ξ_3 – Eqs. (3.11) and (3.14) – são do mesmo tipo das equações relacionando ξ_0 e ξ_1 – Eqs. (3.11) e (3.12) – ou ξ_0 e ξ_2 – Eqs. (3.11) e (3.13). Assim sendo,

$$\xi_3 = \left[\kappa a^2 H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2H} \right] \Phi_1(r, \theta, \phi) + a^2 \Phi_2(r, \theta, \phi) , \quad (\text{A.61})$$

onde, novamente, alteramos o nome das funções arbitrárias constantes em t .

A.3.2 Dependência de ξ_3 em r

Na seção A.2.2, encontramos a dependência da componente ξ_2 na coordenada radial através da equação de Killing (3.15). A dependência de ξ_3 em r é, por sua vez, calculada mediante a Eq. (3.16). Compare (3.15) e (3.16) e note que ambas as equações são idênticas a menos da troca do índice 2 pelo índice 3. Isto significa que a dependência radial de ξ_3 deve ser a mesma que a da componente ξ_2 . Isto é, de fato, uma verdade, conforme se verifica pela repetição do procedimento desenvolvido na referida seção.

Substituindo (A.37) e (A.61) na equação de Killing (3.16) temos:

$$\begin{aligned} \partial_3 \xi_1 + \partial_1 \xi_3 - \frac{2}{r} \xi_3 = \\ = \left[\kappa a^2 H - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2H} \right] \left[\partial_1 \Phi_1 - \frac{2}{r} \Phi_1 - \partial_3 \tau_1(\theta, \phi) \right] + \\ + a^2 \left[\partial_1 \Phi_2 - \frac{2}{r} \Phi_2 - (1 - \kappa^2) H \frac{r^2}{2} \partial_3 \tau_1(\theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \partial_3 \Xi(\theta, \phi) \right] , \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

onde, conforme as definições (A.13, A.40) de $\tau_1(\theta, \phi)$ e $\Xi(\theta, \phi)$,

$$\partial_3 \tau_1(\theta, \phi) = (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \sin \theta \quad (\text{A.63})$$

e

$$\partial_3 \Xi(\theta, \phi) = (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin \theta . \quad (\text{A.64})$$

O segundo membro de (A.62) deve ser nulo. Analisemos as conseqüências desse fato para cada κ .

(a) $\kappa = 0$. Sabemos que $H = \text{const}$ neste caso e, portanto, os termos que tem a função $a^2(t)$ por coeficiente devem anular-se independentemente dos que aparecem

como coeficientes de $(-1/2H)$. Temos:

$$\begin{cases} \partial_1 \Phi_1(r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Phi_1(r, \theta, \phi) - \partial_3 \tau_1(\theta, \phi) = 0 \\ \partial_1 \Phi_2(r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Phi_2(r, \theta, \phi) + H \frac{r^2}{2} \partial_3 \tau_1(\theta, \phi) + \partial_3 \Xi(\theta, \phi) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

Economizaremos muito trabalho se reconhecermos que o sistema (A.65) tem a mesma dependência em r que o sistema (A.41) para Θ_1 e Θ_2 resolvido na seção A.2.2. Isto significa que a forma funcional de Φ_1 e Φ_2 será a mesma dos resultados (A.42), (A.43), (A.44), i.e.,

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \theta, \phi) &= r^2 \Phi_3(\theta, \phi) - r \partial_3 \tau_1(\theta, \phi), \quad \Phi_3(\theta, \phi) = 0; \\ \Phi_2(r, \theta, \phi) &= r \partial_3 \Xi(\theta, \phi) + r^2 \Phi_4(\theta, \phi) - \frac{H}{2} r^3 \partial_3 \tau_1(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Enfatizamos que $\Phi_3(\theta, \phi) = 0$ é exigida por (3.14), da mesma forma que $\Theta_3(\theta, \phi)$ foi fixado em zero devido a (3.13).

Substituindo os resultados (A.66) em (A.61) – com $\kappa = 0$ –

$$\xi_3 = \frac{1}{2H} r \partial_3 \tau_1(\theta, \phi) + a^2 \left[r \partial_3 \Xi(\theta, \phi) + r^2 \Phi_4(\theta, \phi) - \frac{H}{2} r^3 \partial_3 \tau_1(\theta, \phi) \right]$$

ou, por conta de (A.63, A.64),

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right] r (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ &+ a^2 r (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin \theta + a^2 r^2 \Phi_4(\theta, \phi) \quad (\kappa = 0). \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

(b) $\kappa = \pm 1$. Os termos proporcionais a $(1 - \kappa^2)$ desaparecem e, pela independência das funções a^2 e $a^2 H$ na Eq. (A.62), somos levados a

$$\begin{cases} \partial_1 \Phi_1(r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Phi_1(r, \theta, \phi) - \partial_3 \tau_1(\theta, \phi) = 0 \\ \partial_1 \Phi_2(r, \theta, \phi) - \frac{2}{r} \Phi_2(r, \theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} \partial_3 \Xi(\theta, \phi) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.68})$$

Este sistema é completamente análogo a (A.48) e suas soluções (A.49), (A.50) e (A.51). Assim, satisfaremos (A.68) e (3.14), com:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \theta, \phi) &= r^2 \Phi_3(\theta, \phi) - r \partial_3 \tau_1(\theta, \phi); \\ \Phi_2(r, \theta, \phi) &= r \sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_3 \Xi(\theta, \phi) + r^2 \Phi_4(\theta, \phi); \\ \Phi_3(\theta, \phi) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Pondo isto em (A.61), obtém-se:

$$\xi_3 = -\kappa a^2 H r \partial_3 \tau_1(\theta, \phi) + a^2 \left[r \sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_3 \Xi(\theta, \phi) + r^2 \Phi_4(\theta, \phi) \right]$$

ou

$$\begin{aligned} \xi_3 = & -\kappa a^2 H r (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin \theta + a^2 r^2 \Phi_4(\theta, \phi) \quad (\kappa = \pm 1) . \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Reunindo (A.67) e (A.70) na mesma expressão:

$$\begin{aligned} \xi_3 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin \theta + a^2 r^2 \Phi_4(\theta, \phi) . \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

A.3.3 Dependência de ξ_3 em θ

Substituindo a expressão (A.71) da componente ξ_3 e a forma final (A.60) para ξ_2 na equação de Killing (3.17), encontramos, depois de algumas manobras algébricas:

$$\begin{aligned} & \partial_3 \xi_2 + \partial_2 \xi_3 - 2 \cot \theta \xi_3 = \\ & = a^2 r^2 [\partial_2 \Phi_4(\theta, \phi) - 2 \cot \theta \Phi_4(\theta, \phi) + (L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi)] = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Logo, devemos satisfazer

$$\partial_2 \Phi_4(\theta, \phi) - 2 \cot \theta \Phi_4(\theta, \phi) + L(\phi) = 0 , \quad (\text{A.73})$$

tendo definido

$$L(\phi) = L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi . \quad (\text{A.74})$$

A solução homogênea de (A.73),

$$\int \frac{d\Phi_4^h}{\Phi_4^h} = 2 \int \cot \theta d\theta + \ln \Phi_5(\phi) ,$$

é

$$\ln \Phi_4^h = \ln(\sin^2 \theta) + \ln \Phi_5(\phi) = \ln [\sin^2 \theta \Phi_5(\phi)] ,$$

onde $\ln \Phi_5(\phi)$ é uma constante de integração conveniente em θ , i.e.,

$$\Phi_4^h(\theta, \phi) = \sin^2 \theta \Phi_5(\phi) .$$

Como uma solução particular de (A.73),

$$\partial_2 \Phi_4^p - 2 \cot \theta \Phi_4^p + L(\phi) = 0$$

tentemos o ansatz

$$\Phi_4^p(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \theta L(\phi) .$$

Uma substituição no primeiro membro da equação imediatamente acima mostra que nosso anatz é um bom palpite. Reunindo $\Phi_4^h(\theta, \phi)$ e $\Phi_4^p(\theta, \phi)$ encontramos:

$$\Phi_4(\theta, \phi) = \sin^2 \theta \Phi_5(\phi) + \sin \theta \cos \theta L(\phi) , \quad (\text{A.75})$$

um resultado válido para os três valores de κ .

Concluimos o cálculo da dependência de ξ_3 em θ inserindo (A.75) – e (A.74) – em (A.71):

$$\begin{aligned} \xi_3 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r^2 [\sin^2 \theta \Phi_5(\phi) + \sin \theta \cos \theta (L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi)] . \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

A.3.4 Dependência de ξ_3 em ϕ

A função que falta, $\Phi_5(\phi)$, é determinada pela substituição das componentes ξ_3 , ξ_2 , ξ_1 , e ξ_0 – Eqs.(A.76,A.60,A.37,3.50) – na última das equações de Killing, Eq. (3.20). Com algum trabalho direto de cálculo, chegamos a:

$$\begin{aligned} \partial_3 \xi_3 + \sin \theta \cos \theta \xi_2 + r (1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta \xi_1 - a^2 H r^2 \sin^2 \theta \xi_0 = \\ = a^2 r^2 \sin^2 \theta \partial_3 \Phi_5(\phi) = 0 . \end{aligned}$$

Então,

$$\partial_3 \Phi_5(\phi) = 0 , \quad (\text{A.77})$$

cuja solução é:

$$\Phi_5(\phi) = \Phi_6 \phi + \Phi_7 . \quad (\text{A.78})$$

Porque $\Phi_5(\phi)$ é o mesmo para os três valores de κ , podemos substituir (A.78) diretamente em (A.76) e obter a dependência de ξ_3 em ϕ :

$$\begin{aligned} \xi_3 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r^2 [\sin^2 \theta (\Phi_6 \phi + \Phi_7) + \sin \theta \cos \theta (L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi)] . \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

A.3.5 Condição de periodicidade sobre $\xi_3(t, r, \theta, 0)$

A componente ξ_3 na forma (A.79) possui um termo linear na coordenada ϕ . Porém, se exigirmos que

$$\xi_3(t, r, \theta, 0) = \xi_3(t, r, \theta, 2\pi) ,$$

i.e., $\xi_3(t, r, \theta, 0) - \xi_3(t, r, \theta, 2\pi) = 0$, este termo desaparece pois, então, temos de satisfazer:

$$-\sin^2 \theta \Phi_6 2\pi = 0 ,$$

e portanto

$$\Phi_6 = 0 . \quad (\text{A.80})$$

Pondo (A.80) em (A.79) e renomeando a constante

$$\Phi_7 = -L_3 ,$$

obtemos a forma final da componente ξ_3 , qual seja:

$$\begin{aligned} \xi_3 = & \left[(1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} - a^2 H r^2 \right) - \kappa a^2 H \right] r (C_2 \cos \phi - C_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r \sqrt{1 - \kappa r^2} (K_2 \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin \theta + \\ & + a^2 r^2 \sin \theta [(L_1 \cos \phi + L_2 \sin \phi) \cos \theta - L_3 \sin \theta] . \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Com isso encerramos o cálculo das componentes covariantes ξ_μ de Killing para a solução de dS nas coordenadas comóveis de FRW: a integração das equações de Killing (3.11-3.20) – conforme procedimento detalhado mostrado na seção 3.2 e neste apêndice – leva às Eqs. (3.50), (A.37), (A.60) and (A.81), que são os resultados (3.51-3.54) apresentados na seção 3.3.

Apêndice B

Cálculo do comutador $[S_0, S_i]$

Consideraremos a ação do operador $[S_0, S_i]$ sobre uma função teste $f = f(t, r, \theta, \phi)$ arbitrária. De acordo com (3.75):

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H D) , \\ S_i &= x^i (\partial_t - H D) + \kappa H \partial_i - (1 - \kappa^2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i . \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Portanto, para:

(a) $\kappa = 0$, ficamos com:

$$S_0 = (\partial_t - H D) , \quad S_i = x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i , \quad (\text{B.2})$$

onde

$$H = \frac{1}{L} \quad (\text{B.3})$$

é uma constante – cf. Eq. (3.56). O comutador de interesse é

$$[S_0, S_i] f = S_0 (S_i f) - S_i (S_0 f) ,$$

cujo primeiro termo se escreve:

$$\begin{aligned} S_0 (S_i f) &= x^i \partial_t^2 f - H (D x^i) \partial_t f - H x^i D (\partial_t f) + \\ &\quad - H x^i \partial_t (D f) + H^2 (D x^i) D f + H^2 x^i D^2 f + \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\partial_t \left(\frac{1}{a^2 H} \right) (\partial_i f) + \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) (\partial_t \partial_i f) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} H \left[-H D (r^2) (\partial_i f) + \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) D (\partial_i f) \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Uma digressão – alguns resultados que podem ser úteis:

$$(D x^i) = x^j \partial_j (x^i) = x^j \delta_j^i = x^i ; \quad (\text{B.5})$$

devido a (3.63), e

$$D(r^2) = r \partial_r (r^2) = r(2r) = 2r^2 ; \quad (\text{B.6})$$

Uma vez que H é constante quando $\kappa = 0$:

$$\partial_t \left(\frac{1}{a^2 H} \right) = - \left(\frac{1}{a^2 H} \right)^2 \partial_t (a^2 H) = - \left(\frac{1}{a^2 H} \right)^2 (2a \dot{a} H) = - \frac{1}{a^4 H^2} (2a^2 H^2) ,$$

i.e.,

$$\partial_t \left(\frac{1}{a^2 H} \right) = - \frac{2}{a^2} \quad (\kappa = 0) . \quad (\text{B.7})$$

Fim da digressão.

O segundo termo da relação de comutação:

$$\begin{aligned} S_i(S_0 f) &= x^i \partial_t^2 f - H x^i \partial_t (Df) - H x^i D(\partial_t f) + H^2 x^i D^2 f + \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) [(\partial_i \partial_t f) - H \partial_i (Df)] . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Subtraindo o primeiro e o segundo termos, Eqs. (B.4,B.8), resulta:

$$\begin{aligned} [S_0, S_i] f &= -H (Dx^i) \partial_t f + H^2 (Dx^i) Df - \frac{1}{2} \partial_t \left(\frac{1}{a^2 H} \right) (\partial_i f) + \\ &\quad - \frac{1}{2} H^2 D(r^2) (\partial_i f) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) H [D(\partial_i f) - \partial_i (Df)] , \end{aligned}$$

onde usamos a comutação do operador de derivação temporal ∂_t com os de derivação espacial, D e ∂_i :

$$D(\partial_t f) = \partial_t (Df) , \quad \partial_t \partial_i f = \partial_i \partial_t f .$$

Note-se que

$$D(\partial_i f) = x^j \partial_j (\partial_i f) = x^j \partial_i \partial_j f$$

e, por outro lado,

$$\partial_i (Df) = \partial_i (x^j \partial_j f) = \partial_i x^j \partial_j f + x^j \partial_i \partial_j f = \delta_i^j \partial_j f + x^j \partial_i \partial_j f .$$

Substituindo a penúltima equação na última:

$$\partial_i (Df) = \partial_i f + D(\partial_i f) ; \quad (\text{B.9})$$

Com este resultado, (B.5), (B.6) e (B.7), escrevemos o comutador como:

$$[S_0, S_i] f = -H \left[x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i \right] f .$$

A expressão entre colchetes é exatamente S_i – vide Eq. (B.2). Logo

$$[S_0, S_i] = -\frac{1}{L} S_i \quad (\kappa = 0) , \quad (\text{B.10})$$

onde substituímos (B.3).

(b) $\kappa = \pm 1$. Se $\kappa \neq 0$ os geradores (B.1) perdem termos com $(1 - \kappa^2)$, e ficamos com:

$$S_0 = \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H D) ; \quad S_i = x^i (\partial_t - H D) + \kappa H \partial_i , \quad (\text{B.11})$$

mas H não mais é uma constante – cf. Eq. (3.56).

Precisaremos do seguinte resultado:

$$D\sqrt{1 - \kappa r^2} = r \partial_r \sqrt{1 - \kappa r^2} = r \frac{1}{2} \frac{-2\kappa r}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = -\frac{\kappa r^2}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} , \quad (\text{B.12})$$

e

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) = \sum_j (x^j)^2 = \delta_{ij} x^i x^j = -\eta_{jk} x^j x^k ,$$

tal que

$$\partial_i (r^2) = -\eta_{jk} \delta_i^j x^k - \eta_{jk} x^j \delta_i^k = -\eta_{ik} x^k - \eta_{ji} x^j = -2\eta_{ij} x^j = 2\delta_{ij} x^j = 2x^i , \quad (\text{B.13})$$

pois usamos a convenção

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_{00} & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix} .$$

Portanto:

$$\partial_i \sqrt{1 - \kappa r^2} = \frac{1 - \kappa \partial_i (r^2)}{2 \sqrt{1 - \kappa r^2}} = \frac{1}{2} \frac{-\kappa 2x^i}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = -\frac{\kappa x^i}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} . \quad (\text{B.14})$$

Vamos ao cálculo do comutador usando (B.11). O primeiro termo é:

$$\begin{aligned} S_0 (S_i f) &= \\ &= \sqrt{1 - \kappa r^2} \left[x^i \partial_t^2 f + \kappa \dot{H} \partial_i f + \kappa H \partial_t (\partial_i f) - \dot{H} x^i Df - H x^i \partial_t (Df) \right] + \\ &\quad - \sqrt{1 - \kappa r^2} H \left[x^i \partial_t f + x^i D(\partial_t f) + \kappa H D(\partial_i f) - H x^i Df - H x^i D^2 f \right] , \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde usamos (B.5). E o segundo termo:

$$\begin{aligned} S_i (S_0 f) &= \\ &= x^i \sqrt{1 - \kappa r^2} \left[\partial_t^2 f - \dot{H} Df - H \partial_t (Df) \right] + \\ &\quad - H x^i \left(D\sqrt{1 - \kappa r^2} \right) (\partial_t f - H Df) - H x^i \sqrt{1 - \kappa r^2} \left[D(\partial_t f) - H (D^2 f) \right] + \\ &\quad + \kappa H \left(\partial_i \sqrt{1 - \kappa r^2} \right) (\partial_t f - H Df) + \kappa H \sqrt{1 - \kappa r^2} \left[\partial_i (\partial_t f) - H \partial_i (Df) \right] . \end{aligned}$$

Empregando (B.12), (B.14) e lembrando que, para $\kappa = \pm 1$, $\kappa^2 = 1$, encontramos:

$$\begin{aligned} S_i (S_0 f) &= \\ &= \sqrt{1 - \kappa r^2} \left[x^i \partial_t^2 f + \kappa H \partial_i (\partial_t f) - \dot{H} x^i Df - H x^i \partial_t (Df) \right] + \\ &- \sqrt{1 - \kappa r^2} H \left[x^i (\partial_t f - H Df) + x^i D (\partial_t f) - H x^i D^2 f + \kappa H \partial_i (Df) \right] , \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Construimos o comutador subtraindo (B.16) de (B.4):

$$[S_0, S_i] f = \sqrt{1 - \kappa r^2} \left\{ \kappa \dot{H} (\partial_i f) + \kappa H^2 [\partial_i (Df) - D (\partial_i f)] \right\} ;$$

ou, devido à (B.9),

$$[S_0, S_i] f = \kappa \left(\dot{H} + H^2 \right) \sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_i f ;$$

onde reconlecemos o gerador

$$T_i = -\sqrt{1 - \kappa r^2} \partial_i ,$$

cf. (3.75).

A função $\left(\dot{H} + H^2 \right)$ é justamente a soma das equações de Friedmann (3.23,3.24):

$$\left(\dot{H} + H^2 \right) = \frac{1}{L^2} - \frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) , \quad (\text{B.17})$$

onde usamos a relação (2.13),

$$\frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{L^2} .$$

A solução de dS, cujas simetrias ora estudamos, corresponde a solução de vácuo: persiste apenas a componente de energia escura Λ desaparecendo qualquer contribuição da densidade ($\rho = 0$) ou de uma equação de estado ($p = 0$). Portanto, em nosso caso, o último termo de (B.17) desaparece, e ficamos com:

$$\left(\dot{H} + H^2 \right) = \frac{1}{L^2} \quad (dS) . \quad (\text{B.18})$$

Dessa informação segue que:

$$[S_0, S_i] = - \kappa \frac{1}{L^2} T_i \quad (\kappa = \pm 1) . \quad (\text{B.19})$$

Agora podemos reunir os resultados (B.10) e (B.19) para o comutador $[S_0, S_i]$ unificando os casos $\kappa = 0$ e $\kappa = \pm 1$ numa única expressão:

$$[S_0, S_i] = - (1 - \kappa^2) \frac{1}{L} S_i - \kappa \frac{1}{L^2} T_i , \quad (\text{B.20})$$

que é a Eq. (3.78) da seção 3.3.

Apêndice C

Invertendo as Transformações de Robertson Generalizadas

As transformações de Robertson generalizadas (5.30,5.29,5.31) são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{r} = r a(t) , \\ \bar{t} = L \ln \left[\frac{\tau(\kappa)}{L} \frac{\sqrt{a^2(t) - \kappa L^2} + a(t) \sqrt{1 - \kappa r^2}}{\sqrt{1 - \frac{[ra(t)]^2}{L^2}}} \right] , \end{array} \right. \quad \tau(\kappa) = \begin{cases} \frac{L}{2A} , & \kappa = 0 \\ 1 , & \kappa = -1 \\ \frac{1}{i} , & \kappa = +1 \end{cases} \quad (C.1)$$

valendo

$$\sqrt{a^2(t) - \kappa L^2} = L a(t) H(t) . \quad (C.2)$$

Substituindo $\bar{r} = r a(t)$ em $\bar{t}$:

$$\frac{L}{\tau} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} e^{\bar{t}/L} = \sqrt{a(t)^2 - \kappa L^2} + \sqrt{a^2(t) - \kappa \bar{r}^2} . \quad (C.3)$$

Definimos

$$F(\bar{t}, \bar{r}) \equiv \frac{L}{\tau} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} e^{\bar{t}/L} \quad (C.4)$$

e efetuamos a mudança de variáveis

$$R \equiv \sqrt{a^2(t) - \kappa L^2} \quad (C.5)$$

tal que

$$a^2(t) = R^2 + \kappa L^2 \quad (C.6)$$

e a Eq. (C.3) fique:

$$R + \sqrt{R^2 + \kappa L^2 - \kappa \bar{r}^2} = F .$$

Quadrando esta expressão, isolamos a variável R :

$$R = \frac{F^2 - \kappa (L^2 - \bar{r}^2)}{2F} \quad (C.7)$$

Note-se que R é função da coordenada temporal comóvel t na Eq. (C.5), pois é dado em termos de $a(t)$. Por outro lado, a Eq. (C.7) apresenta R como função das coordenadas estáticas $\bar{t}$ e $\bar{r}$, uma vez que $F = F(\bar{t}, \bar{r})$. De fato, substituindo (C.4) em (C.7), obtemos $R(\bar{t}, \bar{r})$ explicitamente:

$$R(\bar{t}, \bar{r}) = \frac{L}{2} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \left(\frac{e^{\bar{t}/L}}{\tau(\kappa)} - \kappa \frac{\tau(\kappa)}{e^{\bar{t}/L}} \right) . \quad (\text{C.8})$$

(Esta é a forma que aparece na Eq. (5.33) da seção 5.2.)

O fator de escala $a(t)$ também pode ser visto como uma função de $\bar{t}$ e $\bar{r}$: basta substituir $R = R(\bar{t}, \bar{r})$ – Eq. (C.8) – na igualdade (C.6). Isto nos ajudará a isolar o tempo comóvel t em termos das coordenadas estáticas $\bar{t}$ e $\bar{r}$. Mas primeiro note-se que podemos isolar t como função do próprio fator de escala obtendo $t = t(a)$. De fato, usando a forma funcional de $a(t)$ exposta em (C.1):

$$a = A \left(\frac{e^{t/L} + e^{-t/L}}{2} \right) + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \left(\frac{e^{t/L} - e^{-t/L}}{2} \right) .$$

i.e.,

$$\left(A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right) e^{t/L} + \left(A - \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right) e^{-t/L} = 2a .$$

Multiplicando a equação acima por

$$z \equiv e^{\bar{t}/L} \quad (\text{C.9})$$

obtemos:

$$P z^2 - 2a z + Q = 0 , \quad (\text{C.10})$$

com

$$P \equiv \left(A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right) ; \quad (\text{C.11})$$

$$Q \equiv \left(A - \sqrt{A^2 - \kappa L^2} \right) . \quad (\text{C.12})$$

Observe-se que:

$$(P Q) = A^2 - (A^2 - \kappa L^2) = \kappa L^2 . \quad (\text{C.13})$$

A solução de (C.10) é:

$$z = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(P Q)}}{2P}$$

ou, em termos de t ,

$$t = L \ln \left[\frac{a \pm \sqrt{a^2 - \kappa L^2}}{A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2}} \right] ,$$

onde empregamos (C.9) e (C.13). Vide que a escolha do sinal negativo no numerador não interessa: se tomamos $\kappa = 0$ neste caso o argumento do $\ln$ anula-se gerando uma singularidade. Logo,

$$t = L \ln \left[\frac{a + \sqrt{a^2 - \kappa L^2}}{A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2}} \right] . \quad (\text{C.14})$$

Para obter definitivamente $t = t(\bar{t}, \bar{r})$, basta substituir (C.6) interpretada como

$$a(\bar{t}, \bar{r}) = \sqrt{R^2(\bar{t}, \bar{r}) + \kappa L^2} \quad (\text{C.15})$$

em (C.14). Assim procedendo obtemos:

$$t(\bar{t}, \bar{r}) = L \ln \left[\frac{R(\bar{t}, \bar{r}) + \sqrt{R^2(\bar{t}, \bar{r}) + \kappa L^2}}{A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2}} \right] , \quad (\text{C.16})$$

com $R(\bar{t}, \bar{r})$ dado por (C.8).

Avaliar r em termos de $\bar{t}$ e $\bar{r}$ é trivial: a Eq. (C.1) estabelece que

$$r = \frac{\bar{r}}{a} . \quad (\text{C.17})$$

Inserindo (C.15) em (C.17) resulta:

$$r(\bar{t}, \bar{r}) = \frac{\bar{r}}{\sqrt{R^2(\bar{t}, \bar{r}) + \kappa L^2}} . \quad (\text{C.18})$$

As Eqs. (C.16) e (C.18) completam a demonstração de que (5.33) são as transformações inversas da seção 5.2.

Apêndice D

Transformando o gerador P_i para coordenadas comóveis

Neste Apêndice efetuaremos em detalhe a transformação de P_i – calculado originalmente em coordenadas estáticas, Eq. (4.19) – para coordenadas comóveis, levando ao resultado (5.40). Com isso pretendemos mostrar como a escolha (5.29) para a constante de integração $\tau(\kappa)$ é fundamental. O procedimento desenvolvido aqui aplica-se também a transformação do gerador I_i – Eq. (5.41).

D.1 O operador $\partial_{\bar{t}}$

Efetuiremos explicitamente o cálculo do operador

$$\partial_{\bar{t}} = \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial r} , \quad (\text{D.1})$$

necessário à obtenção de P_i nas coordenadas de FRW, com base nos resultados do apêndice C.

De (C.16) e (C.8),

$$t = L \ln \left[\frac{R + \sqrt{R^2 + \kappa L^2}}{A + \sqrt{A^2 - \kappa L^2}} \right] ; \quad R(\bar{t}, \bar{r}) = \frac{L}{2} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \left(\frac{e^{\bar{t}/L}}{\tau(\kappa)} - \kappa \frac{\tau(\kappa)}{e^{\bar{t}/L}} \right) , \quad (\text{D.2})$$

vemos que t só depende de $\bar{t}$ através de R . Assim, é interessante obter $\frac{\partial t}{\partial R}$ e $\frac{\partial R}{\partial \bar{t}}$ para construir

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial t}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \bar{t}} . \quad (\text{D.3})$$

Resulta de (D.2) que:

$$\frac{\partial t}{\partial R} = \frac{L}{\sqrt{R^2 + \kappa L^2}} , \quad (\text{D.4})$$

De acordo com (C.15), isto também vale

$$\frac{\partial t}{\partial R} = \frac{L}{a} . \quad (\text{D.5})$$

Agora, precisamos de $\frac{\partial R}{\partial \bar{t}}$:

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{L} \left[\frac{L}{2} \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \left(\frac{e^{\bar{t}/L}}{\tau} + \kappa \frac{\tau}{e^{\bar{t}/L}} \right) \right] = \frac{R}{L} + \kappa \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \frac{\tau}{e^{\bar{t}/L}} . \quad (\text{D.6})$$

As Eqs. (D.4,D.6) já permitem obter $\frac{\partial t}{\partial \bar{t}}$ em coordenadas estáticas (barradas). É útil, todavia, apresentar esta quantidade em função das coordenadas comóveis. Para isso, note-se que de (C.1) segue:

$$e^{\bar{t}/L} = \frac{\tau \left(\sqrt{a^2 - \kappa L^2} + a \sqrt{1 - \kappa r^2} \right)}{L \sqrt{1 - \frac{(ra)^2}{L^2}}} ; \quad (\text{D.7})$$

e, portanto,

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{L} \left[\sqrt{a^2 - \kappa L^2} + \frac{\kappa L^2 - \kappa r^2 a^2}{\left(\sqrt{a^2 - \kappa L^2} + a \sqrt{1 - \kappa r^2} \right)} \right]$$

uma vez que $R = \sqrt{a^2 - \kappa L^2}$, Eq. (C.5). Continuando, encontramos simplesmente

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{t}} = \frac{a}{L} \sqrt{1 - \kappa r^2} . \quad (\text{D.8})$$

Substituindo (D.5,D.8) em (D.3) concluímos que:

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \sqrt{1 - \kappa r^2} . \quad (\text{D.9})$$

Precisaremos de

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial r}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \bar{t}} \quad (\text{D.10})$$

para completar o cálculo de (D.1). De (C.18), calculamos:

$$\frac{\partial r}{\partial R} = - \frac{R}{(R^2 + \kappa L^2)^{3/2}} \bar{r} , \quad (\text{D.11})$$

ou, em coordenadas comóveis,

$$\frac{\partial r}{\partial R} = - \frac{\sqrt{a^2 - \kappa L^2}}{a^2} r . \quad (\text{D.12})$$

Inserindo (D.12,D.8) em (D.10) resulta:

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{t}} = - \frac{1}{a} \frac{\sqrt{a^2 - \kappa L^2}}{L} r \sqrt{1 - \kappa r^2} .$$

Porém, a solução de dS satisfaz (C.2), $\sqrt{a^2 - \kappa L^2} = LaH$. De modo que a equação acima pode ser posta na forma:

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{t}} = -H r \sqrt{1 - \kappa r^2} . \quad (\text{D.13})$$

Finalmente, substituindo (D.9) e (D.13) em (D.1) encontramos o operador

$$\partial_{\bar{t}} = \sqrt{1 - \kappa r^2} (\partial_t - H r \partial_r) \quad (\text{D.14})$$

em coordenadas de FRW. Este resultado é precisamente a Eq. (5.36), sendo $D = r \partial_r$.

Por um procedimento completamente análogo encontramos o outro operador diferencial necessário ao cálculo de P_i em coordenadas comóveis: com a Eq. (5.35),

$$x^i = \frac{\bar{x}^i}{\sqrt{R^2 + \kappa L^2}}, \quad (\text{D.15})$$

(C.8), $\bar{r} = r a(t)$, (C.6), (D.5) e $D = r \partial_r = x^k \partial_k$, avalia-se $\bar{\partial}_i$ como dado pela Eq. (5.37):

$$\bar{\partial}_i = -\frac{aH}{\left(1 - \frac{(ra)^2}{L^2}\right)} x^i (\partial_t - H D) + \frac{1}{a} \partial_i. \quad (\text{D.16})$$

As funções hiperbólicas $\sinh \frac{\bar{t}}{L}$ e $\cosh \frac{\bar{t}}{L}$ também aparecem na forma funcional de P_i e, por isso, elas precisam ser expressas em termos de (t, r) . Decorre imediatamente de (5.30) – ou de (C.1, C.2) – que:

$$\frac{(e^{\bar{t}/L} \pm e^{-\bar{t}/L})}{2} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2 a^2 \left(H + \frac{\sqrt{1 - \kappa r^2}}{L}\right)^2 \pm \left(1 - \frac{(ra)^2}{L^2}\right)}{\tau a \sqrt{1 - \frac{(ra)^2}{L^2}} \left(H + \frac{\sqrt{1 - \kappa r^2}}{L}\right)}. \quad (\text{D.17})$$

O sinal superior corresponde ao $\cosh \frac{\bar{t}}{L}$ e o inferior ao $\sinh \frac{\bar{t}}{L}$.

D.2 O operador P_i

O gerador P_i de dS nas coordenadas estáticas é – Eq. (4.19):

$$P_i = -\frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}}} \sinh \frac{\bar{t}}{L} \bar{x}^i \partial_{\bar{t}} - \sqrt{1 - \frac{\bar{r}^2}{L^2}} \cosh \frac{\bar{t}}{L} \bar{\partial}_i. \quad (\text{D.18})$$

Substituindo (C.1), (D.17),

$$\bar{x}^i = x^i a(t), \quad (\text{D.19})$$

[que é a Eq. (5.32)] e também (D.14, D.16) em (D.18), chegamos a:

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{(1 - \kappa \tau^2)}{\tau} x^i (\partial_t - H D) - \left[\tau H + \frac{1}{2} \frac{(1 + \kappa \tau^2)}{\tau} \frac{\left(1 - \frac{(ra)^2}{L^2}\right)}{a^2 \left(H + \frac{\sqrt{1 - \kappa r^2}}{L}\right)} \right] \partial_i, \quad (\text{D.20})$$

onde usamos (C.2):

$$aH = \frac{\sqrt{a^2 - \kappa L^2}}{L}.$$

Até aqui não substituímos os valores de $\tau = \tau(\kappa)$, dados pela (5.29), e não o fizemos por um motivo: mostrar que efetivamente precisamos dos três valores diferentes para esta constante para construir um quadro coerente, em que os geradores de dS nas coordenadas estáticas são mapeados nos geradores de dS nas coordenadas de FRW – ou numa combinação linear destes. Assim, estudemos cada a caso:

(a) $\kappa = 0$. O gerador (D.20) fica:

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} x^i (\partial_t - H D) - \left[\tau H + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} \frac{\left(1 - \frac{(ra)^2}{L^2}\right)}{a^2 \left(H + \frac{1}{L}\right)} \right] \partial_i ;$$

lembrando que, cf. (3.77),

$$H = \frac{1}{L} ; \quad a(t) = Ae^{t/L} .$$

Por isto, reescrevemos P_i como:

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} \left[x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i \right] + \tau \frac{1}{L} (-\partial_i) .$$

Neste expressão identificamos a presença de dois dos geradores de dS nas coordenadas comóveis de Friedmann, quais sejam

$$S_i = x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i \quad (\kappa = 0) \quad (D.21)$$

e

$$T_i = -\partial_i , \quad (\kappa = 0) . \quad (D.22)$$

(Vide a Eq. (3.75) para conferência.)

Aqui não foi necessário adotar um valor preferencial para τ a fim de escrever P_i em termos dos geradores nas coordenadas de FRW. Isso não ocorrerá, porém, quando $\kappa = \pm 1$. Dado que temos liberdade para fixar τ à vontade, escolhemos convenientemente o valor

$$\tau = \frac{L}{2A} , \quad (\kappa = 0) . \quad (D.23)$$

que coincide com aquele sugerido pelas transformações de Robertson generalizadas (TRG), cf. Eq. (C.1). Desta feita,

$$P_i = \frac{A}{L} \left[x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 H} - H r^2 \right) \partial_i \right] + \frac{1}{2A} (-\partial_i) \quad (\kappa = 0) , \quad (D.24)$$

i.e.,

$$P_i = \frac{A}{L} S_i + \frac{1}{2A} T_i \quad (\kappa = 0) . \quad (D.25)$$

(A Eq. (D.25) consta na *Tabela 1*, seção 5.2.)

(b) $\kappa = -1$. Para este valor de κ , o gerador (D.20) é:

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{(1 + \tau^2)}{\tau} x^i (\partial_t - H D) - \left[\tau H + \frac{1}{2} \frac{(1 - \tau^2)}{\tau} \frac{\left(1 - \frac{(ra)^2}{L^2}\right)}{a^2 \left(H + \frac{\sqrt{1+r^2}}{L}\right)} \right] \partial_i$$

e não conseguimos expressar P_i como uma combinação simples dos geradores S_0 , S_i , T_i e J_i a menos que escolhamos τ de modo a anular o último termo do colchetes na igualdade acima. Ou seja, precisamos que $(1 - \tau^2) = 0$, o que se consegue fixando

$$\tau = 1, \quad (\kappa = -1) . \quad (D.26)$$

Mas esta é precisamente a escolha adotada quando da derivação das TRG na seção 5.2! Naquela ocasião, porém, impusemos $\tau = 1$ por outros motivos: evitar singularidades nas TRG sob o limite $L \rightarrow \infty$; e, levar o intervalo de dS ao de Minkowski neste mesmo limite. Dito tudo isso, fica a certeza de que a escolha (D.26) é a mais conveniente.

Então, P_i reduz-se à

$$P_i = x^i (\partial_t - H D) - H \partial_i \quad (\kappa = -1) , \quad (D.27)$$

que é exatamente o gerador S_i para $\kappa = -1$, Eq. (3.75). Logo,

$$P_i = S_i \quad (\kappa = -1) . \quad (D.28)$$

(Vemos a Eq. (D.28) na *Tabela 1*.)

(c) $\kappa = +1$. A Eq. (D.20) fica:

$$P_i = \frac{1}{2} \frac{(1 - \tau^2)}{\tau} x^i (\partial_t - H D) - \left[\tau H + \frac{1}{2} \frac{(1 + \tau^2)}{\tau} \frac{\left(1 - \frac{(ra)^2}{L^2}\right)}{a^2 \left(H + \frac{\sqrt{1-r^2}}{L}\right)} \right] \partial_i$$

e o valor da constante que leva ao anulamento de $(1 + \tau^2)$ e do termo não linear em P_i é, nesse caso,

$$\tau = \frac{1}{i}, \quad (\kappa = +1) . \quad (D.29)$$

O escolha $(+i)$ também serviria, mas (D.29) é compatível com o que concluímos na seção 5.2, por isso é a preferida aqui. Logo,

$$P_i = i [x^i (\partial_t - H D) + H \partial_i] \quad (\kappa = +1) , \quad (D.30)$$

i.e.,

$$P_i = i S_i \quad (\kappa = +1) . \quad (D.31)$$

(Frisamos que (D.31) está posta na *Tabela 1.*)

Reunimos as Eqs. (D.24), (D.27) e (D.30) no resultado

$$P_i = \begin{cases} \frac{A}{L} [x^i (\partial_t - H D) - \frac{1}{2} (\frac{1}{a^2 H} - H r^2) \partial_i] + \frac{1}{2A} (-\partial_i) , & \kappa = 0 \\ [x^i (\partial_t - H D) - H \partial_i] , & \kappa = -1 \\ i [x^i (\partial_t - H D) + H \partial_i] , & \kappa = +1 \end{cases} , \quad (\text{D.32})$$

a Eq. (5.40) da seção 5.2.

Referências

- [1] A. H. Guth, *Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problem*, Physical Review D **23** (1981) 357.
- [2] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, New York, 2005.
- [3] É. B. Gliner, *The vacuum-like state of a medium and Friedman cosmology*, Soviet Physics – DOKLADY **15** (1970) 559.
- [4] I. G. Dymnikova, *Inflationary universes from the point of view of general relativity*, Soviet Physics JETP **63** (6) (1986) 1111.
- [5] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Dover, New York, 1987.
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [7] V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific, Singapore, 1985.
- [8] J. V. Narlikar, *An Introduction to Cosmology*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [9] S. Perlmutter *et al.*, *Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe and its cosmological implications*, Nature **392** (1998) 51 [astro-ph/9712212]; S. Perlmutter *et al.*, *Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae*, Astrophysical Journal **517** (1999) 565 [astro-ph/9812133].
- [10] A. G. Riess *et al.*, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astronomical Journal **116** (1998) 1009 [astro-ph/9805201]; A. G. Riess *et al.*, *A preliminary indication of evolution of type Ia supernovae from their Risetimes*, Astronomical Journal **118** (1999) 2668 [astro-ph/9907038].

- [11] D. N. Spergel *et al.*, *First year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters*, Astrophysical Journal Supplement Series **148** (2003) 175 [astro-ph/0302209]. Atualizações disponíveis no site <http://lambda.gsfc.nasa.gov>.
- [12] J. Garecki, *An interesting property of the isotropic and homogeneous cosmological models*, General Relativity and Gravitation **27** (1995) 55.
- [13] E. İnönü and E. P. Wigner, *On the contraction of groups and their representations*, Proceedings of the National Academy of Sciences **39** (1953) 510-524.
- [14] E. İnönü, in F. Gürsey (ed.), *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, Istanbul Summer School of Theoretical Physics, Gordon and Breach, New York, 1962.
- [15] R. Aldrovandi, R. R. Cuzinatto and L. G. Medeiros, *Analytic solutions for the Λ -FRW model*, Foundations of Physics **36** (2006) 1736-1752; [gr-qc/0508073].
- [16] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2nd. ed., Butterworth Heinemann, Oxford, 2001.
- [17] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Physical Cosmology*, notas internas do IFT-UNESP, 2002; disponível no site: www.ift.unesp.br/gcg/.
- [18] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik (edition by Alan Jeffrey), *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1980.
- [19] M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1968.
- [20] Particle Data Group, *Review of Particle Physics*; S. Eidelman *et al.*, Physics Letters **B 592** (2004) 1.
- [21] R. Coquereaux and A. Grossmann, *Analytic discussion of spatially closed Friedman universes with cosmological constant and radiation pressure*, Annals of Physics **143**, 296 (1982).
- [22] M. Dabrowski and J. Stelmach, *Analytic solutions of Friedman equation for spatially opened universes with cosmological constant and radiation pressure*, Annals of Physics **166**, 422 (1986).
- [23] M. P. Dabrowski, *Oscillating Friedman cosmology*, Annals of Physics **248**, 199-219 (1996).

- [24] R. Aldrovandi, R. R. Cuzinatto and L. G. Medeiros, *Primeval symmetry breaking* [gr-qc/0509003].
- [25] M. Blagojejevic, *Gravitation and Gauge Symmetries*, Institute of Physics Publishing, 2001.
- [26] W. R. Davies and G. H. Katzin, *Mechanical conservation laws and the physical properties of groups of motions in flat and curved space-times*, American Journal of Physics **30** (1962) 750.
- [27] S. Hawking and G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space and Time* , Cambridge Monographs on Mathematical Physics, New York, 1995.
- [28] E. A. Lord, *Geometry of the De-Sitter universe*, International Journal of Theoretical Physics **9** (1974) 117-127.
- [29] Y. Kim, C. Young Oh and N. Park, *Classical geometry of De Sitter Spacetime: an introductory review*, hep-th/0212326.
- [30] E. Eriksen and Ø. Grmanto n, *The de Sitter universe models*, Journal of Modern Physics **D 4** (1995) 115-159.
- [31] H. Bacry and J. M. Lévy-Leblond, *Possible Kinematics*, Journal of Mathematical Physics **9** (1968) 1605-1614.
- [32] L. C. B. Crispino, *Grupos de Newton-Hooke e outros Grupos Cinemáticos*, Dissertação de Mestrado apresentada no IFT–UNESP, 1997; IFT–T.005/96.
- [33] R. Aldrovandi, *Gauge theories, and beyond* in T. W. Barret and D. M. Grimes (eds.), *Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, 1995, ps. 3-51.
- [34] R. Aldrovandi, *Extended Gauge Theories*, Journal of Mathematical Physics **32** (1991) 2503-512.
- [35] R. Aldrovandi, *Breeding Curvature from Extended Gauge Covariance*, Physics Letters **A155** (1991) 459-63.
- [36] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo. P. J. Pompéia, *Second order gauge theory*; Annals of Physics **322** (2006) 2936-2963 [hep-th/0502052].
- [37] R. R. Cuzinatto, L. G. Medeiros, C. A. M. de Melo and P. J. Pompeia, *Gauge Formulation for Higher Order Gravity* [gr-qc/0611116].

- [38] B. Podolsky, *A Generalized Electrodynamics. Part I – Non-Quantum*, Physical Review **62** (1942) 68-71.
- [39] R. Aldrovandi, R. R. Cuzinatto and L. G. Medeiros, *Cosmic acceleration from elementary interactions* [gr-qc/0512135].
- [40] Ryoyu Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction*, Physical Review **101** (1956) 1597.
- [41] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics*, World Scientific, Singapore, 1995.