UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Letícia Sanches Silva

O Invariante $E(G, W, M)$: Algumas Propriedades e Aplicações na Teoria de Decomposição de Grupos

São José do Rio Preto
2013

Letícia Sanches Silva

O Invariante $E(G, W, M)$: Algumas Propriedades e Aplicações na Teoria de Decomposição de Grupos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Topologia Algébrica, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

São José do Rio Preto
2013

Letícia Sanches Silva

O Invariante $E(G, W, M)$: Algumas Propriedades e Aplicações na Teoria de Decomposição de Grupos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Topologia Algébrica, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Profa. Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho
Professor Adjunto Nível II
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 27 de fevereiro de 2013.

Aos meus pais,
Gerson e Neuza,
dedico.

Agradecimentos

Agradecimento primordial não poderia deixar de ser a Deus, que me permitiu sonhar e tornou-me capaz de realizar os meus objetivos. Especialmente agradeço:
À Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pela excelente e valiosa orientação desde a graduação, pelos conhecimentos transmitidos, pela disponibilidade, atenção e dedicação, indispensáveis para a concretização deste trabalho.
À Profª. Drª. Maria Gorete Carreira Andrade, pela tutoria no grupo PET, fundamental para o meu progresso acadêmico e pessoal, pelas sugestões dadas e pelo incentivo.
À Profª. Drª. Flávia Souza Machado da Silva pelas recomendações dadas no exame de qualificação.
À Banca Examinadora, por terem aceito o nosso convite.
Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio e demais professores do Departamento de Matemática do IBILCE, pela formação acadêmica e consideração para com os alunos.
Aos meus pais Gerson e Neuza, minha eterna gratidão pelo amor incondicional e pelos sacrifícios realizados afim de manter os meus estudos.
Aos meus irmãos Leandro e Liliane e demais familiares pela preciosidade na minha vida.
Ao meu namorado Carlos, agradeço o apoio inestimável, companheirismo, carinho, cuidado e a compreensão nos momentos de ausência.
À Orazília, pelo afeto e incentivo desde o começo da minha jornada.
Aos amigos de pós-graduação: Aneliza, Gislaine, Juliana, Jhony, Robson e Willian, pelo tempo dedicado aos estudos em grupo, pela força, união e pelos momentos de descontração.
Aos demais amigos por me acompanharem nesta caminhada, fazendo-me capaz de superar os momentos mais difíceis.
À CAPES, pelo apoio financeiro.
Enfim, ao concluir esta etapa, deixo meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram, de alguma forma, para a realização desta.

"O êxito da vida não se mede pelo que você conquistou,
mas sim pelas dificuldades que superou no caminho."

(Abrahan Lincoln)

Resumo

Em [6], Andrade e Fanti definiram o invariante $E(G, W, M)$, sendo G um grupo, W um G-conjunto e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, e apresentaram alguns resultados usando $E(G, W, \mathbb{Z}_2)$ ($\mathbb{Z}_2$ visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial) relacionados com decomposição de grupos e dualidade. $E(G, W, M)$ é definido usando (co)homologia de grupos para o par $((G, W), M)$ seguindo [14]. O objetivo deste trabalho é apresentar os resultados dados em [6], porém acrescentando as provas de alguns resultados que são mencionados em [6], mas que não foram provados, como por exemplo, a invariância de $E(G, W, M)$ por pares isomorfos e a independência do conjunto de representantes das G-órbitas. Procurou-se também generalizar alguns resultados para um $\mathbb{Z}_2G$-módulo M qualquer (não necessariamente $\mathbb{Z}_2$), e apresentar algumas outras propriedades de $E(G, W, M)$, em especial para o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathcal{F}_TG$, sendo T um subgrupo de G, explorando, sempre que possível, sua relação com decomposição de grupos. Muitos desses resultados estão fortemente relacionados com alguns apresentados em [7], para o invariante de pares de grupos $E(G, \mathcal{S}, M)$, sendo $\mathcal{S}$ uma família de subgrupos de G.

Palavras-chave: (Co)homologia de Grupos, Decomposição de Grupos, Invariante $E(G, W, M)$.

Abstract

In [6], Andrade and Fanti defined the invariant $E(G, W, M)$, where G is a group, W is a G-set and M is a $\mathbb{Z}_2G$-module, and presented some results using $E(G, W, \mathbb{Z}_2)$ ($\mathbb{Z}_2$ seen as a trivial $\mathbb{Z}_2G$-module) related to splitting of groups and duality. $E(G, W, M)$ is defined using (co)homology of groups for the pair $((G, W), M)$ following [14]. The purpose of this work is to present the results given in [6] but adding proofs of some results that were referred but not proved there, such as the invariance of $E(G, W, M)$ for isomorphic pairs and the independence of the set of orbit representatives in W. We also attempt to generalize some results for any $\mathbb{Z}_2G$-módulo M (not necessarily $\mathbb{Z}_2$) and present some other properties of $E(G, W, M)$, specially for the $\mathbb{Z}_2G$-module $\mathcal{F}_TG$ where T is a subgroup of G, exploring, whenever possible, its relationship with splitting of groups. Many of those results are strongly related with some given in [7] for the invariant of pairs of groups $E(G, \mathcal{S}, M)$ where $\mathcal{S}$ is a family of subgroups of G.

Keywords: *(Co)homology of Groups, Splitting of groups, Invariant $E(G, W, M)$.*

Sumário

Introdução

Na teoria clássica de invariantes ends apresenta-se o número de ends de um grupo G, $e(G)$. Tal invariante foi introduzido por Hopf ([19]) para grupos finitamente gerados. Posteriormente, Specker ([33]) apresentou uma definição para $e(G)$, onde G é um grupo qualquer (não necessariamente finitamente gerado). No caso em que G é infinito, tem-se

$$e(G) := 1 + \dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2 G). \qquad (1)$$

Dados G um grupo e T um subgrupo de G, Houghton ([20]) e Scott ([30]), independentemente, introduziram o invariante end $e(G, T)$, que é uma extensão natural de $e(G)$. Quando $[G : T] = \infty$, não há uma fórmula cohomológica para $e(G, T)$, como a que foi dada em (1) para $e(G)$. Na tentativa de se obter tal fórmula cohomológica, Andrade e Fanti ([3]), definiram um invariante "end" generalizado, $E(G, \mathcal{S}, M)$, sendo G um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i,\, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G, com $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.

Posteriormente, em [6], os autores adaptaram a definição de $E(G, \mathcal{S}, M)$ à notação de Dicks-Dunwoody para o par (G, W) e denotaram o invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$ neste caso por $E(G, W, M)$, sendo G um grupo, W um conjunto não vazio munido de uma G-ação e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e apresentaram alguns resultados usando $E(G, W, \mathbb{Z}_2)$ ($\mathbb{Z}_2$ visto como $\mathbb{Z}_2G$ módulo trivial) relacionados com decomposição de grupos e dualidade. $E(G, W, M)$ é definido usando cohomologia de grupos para o par $((G, W), M)$, seguindo [14], obtendo uma caracterização mais elegante de $E(G, \mathcal{S}, M)$.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar os resultados dados em [6], porém acrescentando as provas de alguns resultados que são mencionados, mas cujas demonstrações não foram apresentadas em [6], além de generalizar alguns desses resultados, dados em [6], para M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer (não necessariamente $\mathbb{Z}_2$) e explorar algumas outras propriedades de $E(G, W, M)$ para $\mathbb{Z}_2G$-módulos

particulares, como $M = \mathbb{Z}_2 G$, $M = \mathcal{F}_T G$, e $M = \mathbb{Z}_2(G/T)$, sendo T um subgrupo de G. Procurou-se também, sempre que possível, obter alguns resultados relacionando $E(G, W, M)$ com a teoria de decomposição de grupos.

A seguir relatamos os principais objetos de estudo em cada capítulo deste texto.

Os dois primeiros capítulos desta dissertação tratam de assuntos que fazem parte dos pré-requisitos necessários para a elaboração do trabalho e são de suma importância para o desenvolvimento e entendimento dos capítulos posteriores. O leitor que já possui tais conhecimentos prévios, pode iniciar sua leitura no terceiro capítulo.

O primeiro capítulo é dedicado ao estudo de alguns tópicos de Álgebra Homológica, tais como: sequências exatas, complexo de (co)cadeias, módulos livres e projetivos, RG-módulos, produto tensorial, módulo de homomorfismos e resoluções projetivas de R sobre RG, sendo G um grupo e R um anel com unidade (que na maioria das vezes será considerado como sendo o anel $\mathbb{Z}$ ou o corpo $\mathbb{Z}_2$). As principais referências com respeito aos assuntos citados acima são [21] e [29].

Dada uma resolução projetiva de R sobre RG, sendo R um anel com unidade e G um grupo, podemos considerar complexos de cadeias e cocadeias especiais, a partir dos quais define-se os grupos de homologia e de cohomologia de G com coeficientes em um RG-módulo M, que são apresentados no Capítulo 2. Finalizamos o Capítulo 1 com alguns exemplos de resoluções projetivas de R sobre RG, para grupos particulares.

O segundo capítulo diz respeito à teoria básica de (co)homologia absoluta de grupos. Nas primeiras seções desse capítulo introduzimos os conceitos de grupos (co)invariantes, módulos (co)induzidos, Fórmula de Mackey, aplicações (co)induzidas e o Lema de Shapiro. Na seção 2.6 exibimos o cálculo dos grupos de cohomologia de alguns grupos particulares, e na seção seguinte apresentamos uma interpretação topológica para (co)homologia de grupos, que nos dá uma relação entre a (co)homologia de um grupo G e a (co)homologia de um espaço de Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$.

Na seção 2.8 estudamos o conceito de derivação de grupos e apresentamos a relação existente entre os grupos de cohomologia de ordem 1, de um grupo G com coeficientes em um RG-módulo M, e os grupos de derivações. Por fim, fazemos um breve estudo sobre dualidade de grupos, de fato, apresentamos apenas alguns conceitos e resultados que serão utilizados posteriormente, quando for abordado um resultado envolvendo $E(G, W, \mathbb{Z}_2)$. As principais referências utilizadas neste capítulo são [10] e [12].

No terceiro capítulo, introduzimos o conceito de decomposição de grupos. Dizemos que um grupo G se decompõe sobre um subgrupo T se G é um produto livre amalgamado não trivial (com subgrupo amalgamado T), ou seja, $G = G_1 *_T G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$ ou se G é um HNN-grupo sobre um grupo base G_1, $G = G_1 *_{T,\theta}$. Grupos que se decompõe sobre um subgrupo surgem naturalmente, por exemplo, quando calculamos, através do Teorema de Van Kampen, o grupo fundamental de superfícies compactas. Além de apresentar as definições de produto livre amalgamado e extensões HNN e dar alguns exemplos, detalhamos as demonstrações de duas proposições, dadas em [10], envolvendo grupos que se decompõe (Proposição 3.1.3 e Proposição 3.1.4). Para isso, usamos o conceito de derivação de grupos. Tais proposições serão bastante utilizadas no capítulo final desta dissertação.

Iniciamos o quarto capítulo com a definição de (co)homologia relativa $H_*(G, W; M)$ e $H^*(G, W; M)$, segundo Dicks-Dunwoody ([14]), onde G é um grupo, W é um G-conjunto e M é um RG-módulo, sendo $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$. Nos dedicamos mais diretamente ao conceito de cohomologia. Mostramos a existência da sequência exata longa neste caso (de cohomologia) e, a seguir, apresentamos uma relação entre essa teoria de cohomologia e a de Bieri e Eckmann ([11]). Bieri e Eckmann definiram cohomologia relativa para pares $(G, \mathcal{S})$, onde G é um grupo e $\mathcal{S}$ é uma família de subgrupos de G. Para ir da teoria de Dicks-Dunwoody para a teoria de Bieri-Eckmann, tomamos $\mathcal{S}$ a família formada pelos subgrupos de isotropia dados pela ação de G em W (tendo fixado um conjunto de representantes para as G-órbitas) ([17]). Finalizamos este capítulo com uma breve introdução ao conceito de pares de dualidade que será utilizado, posteriormente, em resultados dos capítulos seguintes.

O quinto capítulo trata do principal objeto de estudo deste trabalho, o invariante $E(G, W, M)$, que é definido a partir de um grupo G, um G-conjunto W e um $\mathbb{Z}_2G$-módulo M. Para esta definição considera-se, ainda, um conjunto E de representantes para as G-órbitas em W, tal que $[G : G_w] = \infty$, para todo $w \in E$. Observe que, em geral, E não é único, o que nos motiva a mostrar que a definição de $E(G, W, M)$ independe do conjunto de representantes para as G-órbitas em W. Este resultado é apresentado na seção 5.2. Prosseguindo, mostramos a invariância (cohomológica) de $E(G, W, M)$ por isomorfismo de pares em uma determinada categoria (de pares) e algumas propriedades deste invariante quando M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer. As referências utilizadas neste capítulo são [1], [3] e [7].

Na seção 5.5 apresentamos um resultado dado em [6], que relaciona $E(G, W, \mathbb{Z}_2)$ e dualidade. Em seguida, definimos o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\mathcal{F}_TG$ e os invariantes ends, para um grupo G, $e(G)$, e para pares de grupos (G, T) (T um subgrupo de G): $e(G, T)$

e $\tilde{e}(G,T)$. Verificamos algumas propriedades do invariante $E(G,W,M)$ nos casos particulares em que $M = \mathbb{Z}_2G$, $M = \mathbb{Z}_2(G/T)$ e $M = \mathcal{F}_TG$ e exibimos algumas relações entre estes invariantes.

No sexto, e último, capítulo desta dissertação apresentamos alguns resultados relacionando $E(G,W,M)$ com decomposição de grupos.

O primeiro resultado que relaciona o conceito de decomposição de grupos com a teoria de ends foi dado por Stallings ([35] e [34]). Tal resultado é conhecido como Teorema de Estrutura de Stallings e fornece uma condição necessária e suficiente para G se decompor sobre um subgrupo finito. Scott ([31]), tentou generalizar o resultado de Stallings e obteve uma condição necessária para G se decompor sobre um subgrupo (não necessariamente finito) de G. Posteriormente Kropholler e Roller ([23]) apresentaram alguns resultados envolvendo decomposição de um grupo G sobre um subgrupo T comensurável com um subgrupo S de G. Alguns resultados relacionando decomposição de grupos foram também obtidos considerando o invariante end $E(G,\mathcal{S},M)$ (ver [9] e [7]). Muitos resultados apresentados aqui estão fortemente relacionados com resultados existentes para $E(G,\mathcal{S},M)$.

Na seção 6.2, apresentamos um resultado, dado em [6], envolvendo $E(G,W,\mathbb{Z}_2)$ e decomposição de grupos. Em seguida verificamos, sob as mesmas hipóteses desse resultado, o que ocorre no caso em que $M = \mathcal{F}_TG$, sendo T um subgrupo finito de G. Como $\mathcal{F}_TG \simeq \mathbb{Z}_2G$, quando T é finito, essa análise recai ao caso $E(G,W,\mathbb{Z}_2G)$, tratado em [5]. Também procurou-se obter resultados envolvendo $E(G,W,\mathcal{F}_TG)$ e decomposição de grupos quando T não é finito. Nesse sentido foi possível obter um resultado no caso em que T é finitamente gerado e normal em G. Na seção 6.4 apresentamos um resultado que caracteriza, sob certas condições, $E(G,W,\mathbb{Z}_2(G/T))$ quando G se decompõe sobre um subgrupo T de índice infinito em G (Teorema 6.4.1). Por fim, na seção 6.5, trabalhamos com o conceito de decomposição adaptada de grupos e apresentamos (de acordo com [5]), um critério cohomológico para este tipo de decomposição.

Capítulo

1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo vamos relatar alguns tópicos de Álgebra Homológica de fundamental importância para o entendimento e o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Dentre os assuntos abordados aqui destacamos: sequências exatas, complexos de (co)cadeias, ação de grupos, RG-módulos, módulos livres e projetivos, produto tensorial, módulo de homomorfismos e resoluções projetivas.

1.1 Sequências Exatas e Complexos de (Co)cadeias

Seja R um anel com unidade.

Definição 1.1.1 *Uma* ***sequência exata*** *de R-módulos é uma sequência finita ou infinita*

$$\cdots \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O \to \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos tais que a imagem do homomorfismo de chegada coincide com o núcleo (kernel) do homomorfismo de saída para todo módulo, exceto nos extremos da sequência (se existir).

Definição 1.1.2 *Toda sequência exata da forma*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O \to 0$$

é chamada de ***sequência exata curta****.*

Exemplo 1.1.1 *Considere N um submódulo de um R-módulo M e o módulo quociente $Q = M/N$. Como o homomorfismo inclusão $i : N \to M$ é um monomorfismo e a projeção canônica $p : M \to Q$ é um epimorfismo, então* $\mathrm{Im}\,(i) = N = \ker(p)$*, e a sequência*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta.

Definição 1.1.3 *(i) Dizemos que uma sequência exata*

$$\cdots \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O \to \cdots$$

cinde *(split)* ***no módulo*** *N se, e somente se, o submódulo $A = \mathrm{Im}\,(f) = \ker(g)$ do módulo N é um somando direto de N, ou seja, se, e somente se, N é decomposto na soma direta de A e um outro submódulo de N.*

(ii) Uma sequência exata ***cinde****, ou é cindida se esta cinde em cada um de seus módulos exceto, possivelmente, nos seus extremos.*

Definição 1.1.4 *Uma sequência finita ou infinita*

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O \to \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos é dita ***semi-exata*** *se, e somente se, em cada módulo (exceto nos extremos), a imagem do homomorfismo de entrada está contida no núcleo (kernel) do homomorfismo de saída, isto é,* $\mathrm{Im}\,(f) \subset \ker(g)$.

Observação 1.1.1

1. *Uma sequência é semi-exata se, e somente se, a composição $g \circ f$ de quaisquer dois homomorfismos consecutivos f e g na sequência é o homomorfismo trivial, isto é, $g \circ f = 0$.*
2. *Toda sequência exata de homomorfismos de R-módulos é semi-exata, mas nem toda sequência semi-exata é exata.*

Definição 1.1.5 *Dada uma sequência semi-exata qualquer*

$$C : \cdots \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O \longrightarrow \cdots$$

de homomorfismos de R-módulos, o módulo quociente $\ker(g)/\mathrm{Im}\,(f)$ *é chamado* ***módulo derivado*** *da sequência C no módulo N.*

Os módulos de uma sequência semi-exata C são usualmente indexados por inteiros na ordem decrescente ou por inteiros na ordem crescente.

Definição 1.1.6 *Se são usados inteiros na ordem decrescente como índices, a sequência semi-exata C é chamada* ***complexo de cadeias*** *e os homomorfismos em C são, em geral, denotados pelo símbolo ∂. Deste modo, um complexo de cadeias C possui a seguinte forma:*

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots ,$$

com $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, para todo n.

Observação 1.1.2 *Os elementos de C_n são chamados* ***cadeias n-dimensionais de*** *C e os homomorfismos ∂ são chamados* ***operadores bordos****. O kernel de ∂_n, denotado por $Z_n(C)$, é chamado* ***módulo n-dimensional de ciclos de*** *C. A imagem de ∂_{n-1}, denotada por $B_n(C)$, é chamada* ***módulo n-dimensional de bordos de*** *C.*

Definição 1.1.7 *O módulo derivado de C no módulo C_n,*

$$H_n(C) := \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}$$

é chamado ***módulo de homologia*** *n-dimensional de C. A coleção $H_*(C) = \{H_n(C)\}$ é chamada* ***homologia do complexo de cadeias*** *C.*

Definição 1.1.8 *Quando inteiros na ordem crescente são usados como índices, a sequência semi-exata é chamada* ***complexo de cocadeias*** *e os homomorfismos em C são usualmente denotados pelo símbolo δ. Deste modo, um complexo de cocadeias C possui a seguinte forma:*

$$C : \cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots ,$$

com $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$, para todo n.

Observação 1.1.3 *Os termos* ***cocadeia***, ***cociclo*** *e* ***cobordo*** *de um complexo de cocadeias são usados no lugar de cadeia, ciclo e bordo (de um complexo de cadeias). E também, sobrescritos são usados em vez de subscritos.*

Definição 1.1.9 *O módulo derivado*

$$H^n(C) := \frac{Z^n(C)}{B^n(C)},$$

onde $Z^n(C) = \ker \delta^n$ e $B^n(C) = \operatorname{Im}(\delta^{n-1})$, é chamado ***módulo de cohomologia*** *n-dimensional de C e a coleção $H^*(C) = \{H^n(C)\}$ é chamada* ***cohomologia do complexo de cocadeias*** *C.*

Definição 1.1.10 *Considere quaisquer dois complexos de cadeias de R-módulos:*

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

$$D : \cdots \xrightarrow{\partial'_{n+2}} D_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial'_n} D_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \cdots$$

Uma ***aplicação de cadeias*** $f : C \to D$ *é uma família de homomorfismos*

$$f = \{f_n : C_n \to D_n;\, n \in \mathbb{Z}\}$$

de R-módulos, indexada por inteiros ($n \in \mathbb{Z}$)*, tais que a relação de comutatividade* $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ *é verdade, para todo* $n \in \mathbb{Z}$*, no seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ D_n & \xrightarrow[\partial'_n]{} & D_{n-1} \end{array}$$

Proposição 1.1.1 *Seja* $f : C \to D$ *uma aplicação de cadeias arbitrária. Então, para cada* $n \in \mathbb{Z}$*, o homomorfismo* $f_n : C_n \to D_n$ *leva* $Z_n(C)$ *em* $Z_n(D)$ *e* $B_n(C)$ *em* $B_n(D)$*.*

Demonstração: Provemos que $f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$ e $f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$.

Seja $x \in Z_n(C) = \ker(\partial_n)$. Então, $f_n(x) \in f_n(Z_n(C))$ e $\partial_n(x) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} f_{n-1}(\partial_n(x)) &= 0 \Rightarrow \\ (f_{n-1} \circ \partial_n)(x) &= 0 \Rightarrow \\ (\partial'_n \circ f_n)(x) &= 0 \Rightarrow \\ \partial'_n(f_n(x)) &= 0 \Rightarrow \\ f_n(x) \in \ker(\partial'_n) &= Z_n(D). \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que $x \in \text{Im}\,(\partial_{n+1})$, então existe $y \in C_{n+1}$ tal que $\partial_{n+1}(y) = x$. Assim,

$$f_n(x) = f_n(\partial_{n+1}(y)) = (f_n \circ \partial_{n+1})(y) = (\partial'_{n+1} \circ f_{n+1})(y) = \partial'_{n+1}(f_{n+1}(y)).$$

Portanto, $f_n(x) \in \text{Im}\,(\partial'_{n+1})$. ■

Definição 1.1.11 *Seja* $f : C \to D$ *uma aplicação de cadeias. Segue da proposição anterior que, para cada* $n \in \mathbb{Z}$*,* f_n *induz um homomorfismo* $H_n(f) : H_n(C) \to H_n(D)$ *tal que a cada* $\bar{x} := x + Z_n(C)$ *associa* $H_n(f)(\bar{x}) := f_n(x) + Z^n(D) = \overline{f_n(x)}$*. Este homomorfismo será referido*

como ***homomorfismo*** *(**n-dimensional**)* ***induzido por*** *f. É fácil ver que $H_n(id) = id_{H_n}$ e $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$.*

Considere agora o seguinte diagrama de complexos de cadeias:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
E: 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_n} & & \\
C: 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

onde cada linha é exata. Suponhamos que $x \in \ker(\partial''_n) \subset E_n$. Como g_n é sobrejetora, existe $y \in D_n$ tal que $g_n(y) = x$. Assim $\partial'_n(y) \in D_{n-1}$. Mostra-se que $\partial'_n(y) \in \ker(g_{n-1}) = \text{Im}\,(f_{n-1})$. Logo, existe $z \in C_{n-1}$ tal que $f_{n-1}(z) = \partial'_n(y)$. Mostra-se também que $z \in \ker(\partial_{n-1})$. Então define-se:

$$\begin{array}{rccc}
\partial: & H_n(E) & \to & H_{n-1}(C) \\
 & \bar{x} = x + \text{Im}\,(\partial''_{n+1}) & \mapsto & \partial(\bar{x}) = \bar{z} = z + \text{Im}\,(\partial_n).
\end{array}$$

Pode-se mostrar que ∂ está bem definido e é um homomorfismo. (Veja [21], Lemas I.6.6, I.6.7 e I.6.8).

Definição 1.1.12 *O homomorfismo $\partial : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$ dado anteriormente, construído para cada inteiro n, é denominado* ***homomorfismo conexão*** *(em homologia).*

Proposição 1.1.2 *Uma sequência exata curta de complexos de cadeias*

$$0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C'' \to 0$$

da origem à seguinte sequência exata longa de homologia:

$$\cdots \to H_n(C') \xrightarrow{H(i)} H_n(C) \xrightarrow{H(\pi)} H_n(C'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C') \to \cdots$$

Demonstração: [21], Capítulo I, Teorema 6.9. ■

Observação 1.1.4 *Analogamente, para complexos de cocadeias, podemos definir aplicação de cocadeias, homomorfismo induzido e homomorfismo conexão (em cohomologia). A saber:*

Definição 1.1.13 *Considere quaisquer dois complexos de cocadeias de R-módulos:*

$$C: \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} C^{n+2} \xrightarrow{\bar{\delta}^{n+2}} \cdots$$

$$D : \cdots \xrightarrow{\bar{\delta}^{n-1}} D^n \xrightarrow{\bar{\delta}^n} D^{n+1} \xrightarrow{\bar{\delta}^{n+1}} D^{n+2} \xrightarrow{\bar{\delta}^{n+2}} \cdots$$

Uma ***aplicação de cocadeias*** $f : C \to D$ *é uma família de homomorfismos*

$$f = \{f^n : C^n \to D^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

de R-módulos, indexada por inteiros $(n \in \mathbb{Z})$*, tais que a relação de comutatividade* $\bar{\delta}^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \delta^n$ *é verdade, para todo* $n \in \mathbb{Z}$*, no seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} C^n & \xrightarrow{\delta^n} & C^{n+1} \\ {\scriptstyle f^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} \\ D^n & \xrightarrow[\bar{\delta}^n]{} & D^{n+1} \end{array}$$

Proposição 1.1.3 *Seja* $f : C \to D$ *uma aplicação de cocadeias arbitrária. Então, para cada* $n \in \mathbb{Z}$*, o homomorfismo* $f^n : C^n \to D^n$ *leva* $Z^n(C)$ *em* $Z^n(D)$ *e* $B^n(C)$ *em* $B^n(D)$*.*

Demonstração: A ideia para a demonstração deste resultado é análoga a feita na Proposição 1.1.1. ■

Definição 1.1.14 *Seja* $f : C \to D$ *uma aplicação de cocadeias. Segue da proposição anterior que, para* $n \in \mathbb{Z}$*,* f_n *induz um homomorfismo* $H^n(f) : H^n(C) \to H^n(D)$ *tal que a cada* $\bar{x} = x + B^n(C)$ *associa* $H^n(f)(\bar{x}) := f^n(x) + B^n(D) = \overline{f^n(x)}$*. Este homomorfismo será referido como* ***homomorfismo*** $(n$***-dimensional***$)$ ***induzido*** $(em\ cohomologia)$ *por* f*. É fácil ver que* $H^n(id) = id_{H^n}$ *e* $H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f)$*.*

Considere o seguinte diagrama de complexos de cocadeias:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ E : 0 & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{f^n} & D^n & \xrightarrow{g^n} & E^n & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \delta^n}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{\delta}^n}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{\bar{\delta}}^n}\downarrow & & \\ C : 0 & \longrightarrow & C^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & D^{n+1} & \xrightarrow{g^{n+1}} & E^{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

onde cada linha é exata. Suponhamos que $x \in \ker \bar{\bar{\delta}}^n \subset E^n$. Como g^n é sobrejetora, existe $y \in D^n$, de modo que $g^n(y) = x$. Assim, $\bar{\delta}^n(y) \in D^{n+1}$. Pode-se verificar que $\bar{\delta}^n(y) \in \ker(g^{n+1}) = \mathrm{Im}\,(f^{n+1})$. Logo, existe $z \in C^{n+1}$ tal que $f^{n+1}(z) = \bar{\delta}^n(y)$. Pode-se mostrar que $z \in \ker \delta^{n+1}$, e então

$$\begin{array}{rccc} \delta : & H^n(E) & \to & H^{n+1}(C) \\ & \bar{x} = x + \mathrm{Im}\,(\bar{\bar{\delta}}^{n-1}) & \mapsto & \bar{z} = z + \mathrm{Im}\,(\delta^n) \end{array}$$

está bem definido e é um homomorfismo.

Definição 1.1.15 *O homomorfismo dado anteriormente, construído para cada inteiro n, é denominado* ***homomorfismo conexão*** *(em cohomologia).*

Proposição 1.1.4 *Uma sequência exata curta de complexos de cocadeias*

$$0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$$

da origem à seguinte sequência exata longa de cohomologia:

$$\cdots \to H^n(C') \xrightarrow{H^n(f)} H^n(C) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(C'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C') \to \cdots,$$

onde $H^n(f)$ e $H^n(g)$ são os homomorfismos (n-dimensionais) induzidos (em cohomologia) por f e g, respectivamente.

Demonstração: [37], Capítulo III, p. 78. ■

Definição 1.1.16 *Dois homomorfismos (ou aplicações de cocadeias) $f, g : C \to D$ são ditos* ***homotópicos*** *quando existe uma família de homomorfismos*

$$h = \{h^n : C^n \to D^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\delta^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \delta^n = f^n - g^n : C^n \to D^n,$$

conforme indicado no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta^{n-2}} & C^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\delta^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^{n-1}} & \swarrow{\scriptstyle h^n} & \downarrow{\scriptstyle f^n} & \swarrow{\scriptstyle h^{n+1}} & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta^{n-2}} & D^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{\delta^n} & D^{n+1} & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & \cdots
\end{array}$$

Notação: *$f \sim g$.*

Definição 1.1.17 *Sejam C e D complexos de cocadeias e $f : C \to D$, $g : D \to C$ aplicações de cocadeias tais que $f \circ g$ é homotópica ao endomorfismo idêntico de D em D e $g \circ f$ é homotópica ao endomorfismo idêntico de C em C. Nestas condições, as aplicações f e g são chamadas* ***equivalências de homotopia*** *e C e D são ditos complexos de cocadeias* ***homotopicamente equivalentes****.*

Notação: $C \sim D$.

Proposição 1.1.5 *Se $f, g : C \to D$ são homomorfismos homotópicos então*

$$H^n(f) = H^n(g), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: [21], Capítulo I, Proposição 6.4.

Lema 1.1.1 *Se C e D são complexos de cocadeias homotopicamente equivalentes, então*

$$H^n(C) \simeq H^n(D), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Temos que

$$C \sim D \Rightarrow \exists f : C \to D \text{ e } g : D \to C$$

tais que

$$f \circ g \sim id_D : D \to D$$

$$g \circ f \sim id_C : C \to C.$$

Considere os homomorfismos induzidos em cohomologia

$$H^n(f) : H^n(C) \to H^n(D) \text{ e } H^n(g) : H^n(D) \to H^n(C).$$

Temos:

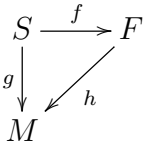
$$\begin{aligned} id_{H^n(C)} &= H^n(id_C) \overset{Prop.1.1.5}{=} H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f), \\ id_{H^n(D)} &= H^n(id_D) \overset{Prop.1.1.5}{=} H^n(f \circ g) = H^n(f) \circ H^n(g). \end{aligned}$$

Assim, $H^n(f)$ é um isomorfismo cuja inversa é $H^n(g)$. Portanto, o resultado segue. ■

1.2 Módulos Livres/Projetivos, Ação de Grupos e RG-módulos

Módulos Livres e Projetivos

Definição 1.2.1 *Seja R um anel com unidade. Um **R-módulo livre** sobre um conjunto S é um R-módulo F junto com uma função $f : S \to F$ tal que, para toda função $g : S \to M$, onde M é um R-módulo, existe um único homomorfismo $h : F \to M$ tal que a relação de comutatividade $h \circ f = g$ é verdade no seguinte diagrama:*



Neste caso, dizemos que F é R-livre gerado por S.

Exemplo 1.2.1 *1. Seja $S = \{1\}$, então $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre sobre S.*

De fato, dada a função $f : S \to \mathbb{Z}$ tal que $f(1) = 1$, para toda função $g : S \to M$ com $g(1) = m_0$, $m_0 \in M$ fixo, defina $h : \mathbb{Z} \to M$ por $h(n) = nm_0$. Assim, $(h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(1) = 1 \cdot m_0 = m_0 = g(1)$, ou seja, $h \circ f = g$.

Para provar a unicidade de h, suponha que exista outro homomorfismo $h' : \mathbb{Z} \to M$ tal que $h' \circ f = g$. Daí, como $\mathbb{Z}$ é gerado por 1, $h'(1) = h'(f(1)) = (h' \circ f)(1) = g(1) = m_0 = h(1)$. Logo, $h'(n) = nh'(1) = nh(1) = h(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. Generalizando, todo anel R com unidade é um R-módulo livre sobre S, se S é um conjunto unitário.

Com efeito, seja $S = \{s\}$, dada a função $f : S \to R$ tal que $f(s) = 1$, para toda função $g : S \to M$ com $g(s) = m_0$, $m_0 \in M$ fixo, definimos $h : R \to M$ por $h(a) = a \cdot h(1) = a \cdot m_0$. Logo, $(h \circ f)(s) = h(f(s)) = h(1) = m_0 = g(s)$, ou seja, $h \circ f = g$ e h é claramente único.

Proposição 1.2.1 *Seja I um conjunto não vazio e $\mathcal{F} = \{M_i \mid i \in I\}$ uma família de R-módulos com $M_i \simeq R$ para todo $i \in I$. Um R-módulo M é R-livre gerado por I se, e somente se, $M \simeq \bigoplus_{i \in I} M_i$.*

Demonstração: [21], Capítulo I, Corolários 4.4 e 4.5. ■

Exemplo 1.2.2 *Pela proposição anterior, temos que $\mathbb{Z}_2$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, pois caso contrário, dado I um conjunto não vazio e $\mathcal{F} = \{M_i \mid i \in I\}$ uma família de $\mathbb{Z}$-módulos com $M_i \simeq \mathbb{Z}$, $\forall i \in I$, teríamos*

$$\mathbb{Z}_2 \simeq \bigoplus_{i \in I} M_i \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z},$$

o que não ocorre.

Teorema 1.2.1 *Todo R-módulo é isomorfo a um quociente de um R-módulo livre.*

Demonstração: Sejam M um R-módulo e S um subconjunto de M que gera M. Considere o R-módulo livre F gerado pelo conjunto S. Então, a função inclusão

$$g : S \to M$$

se estende a um homomorfismo

$$h : F \to M.$$

Como $S = g(S) \subset h(F) \subset M$ e S gera M temos que $h(F) = M$. Daí, h é um epimorfismo. Então, M é isomorfo ao módulo quociente $F/\ker(h)$ do R-módulo livre F. ■

Definição 1.2.2 *Um R-módulo P é chamado* ***projetivo*** *se, e somente se, para todo homomorfismo $f : P \to N$ e todo epimorfismo $g : M \to N$ de R-módulos, existe um homomorfismo $h : P \to M$ tal que $g \circ h = f$.*

Usando a linguagem de diagramas, podemos reestruturar esta definição da seguinte forma: Um R-módulo P é projetivo se, e somente se, todo diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de homomorfismos de R-módulos, onde a sequência é exata, pode ser encaixado no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow^{h} & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde $h : P \to M$ é homomorfismo de R-módulos.

Proposição 1.2.2 *São equivalentes as seguintes condições para um R-módulo P:*
(i) P é projetivo.
(ii) Toda sequência exata

$$0 \to M \to M' \to P \to 0$$

cinde.
(iii) P é somando direto de um módulo livre.

Demonstração: [12], Capítulo I, Proposição 8.2. ■

Proposição 1.2.3 *Todo módulo livre é projetivo.*

Demonstração: [12], Capítulo I, Proposição 7.2. ■

Ação de Grupos

Definição 1.2.3 *Sejam G um grupo e W um conjunto não vazio. Uma* ***ação*** *(à esquerda) de G em W (ou uma G-**ação** em W) é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G \times W & \to & W \\ & (g, w) & \mapsto & g \cdot w \end{array}$$

satisfazendo, para todo $w \in W$, as seguintes condições:
(i) $1_G \cdot w = w$, onde 1_G é o elemento neutro de G.
(ii) $(g_1 g_2)w = g_1(g_2 w)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

Neste caso, pode-se dizer também que G ***atua sobre*** *W.*

Equivalentemente, uma ação de G em W (à esquerda) é um homomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & G & \to & Bij(W) \\ & g & \mapsto & \varphi(g) = \varphi_g \quad (\textit{denota-se } g \cdot w = \varphi_g(w)), \end{array}$$

onde $Bij(W) = \{f : W \to W; f$ é bijeção$\}$ é um grupo com a operação composição.

*Usaremos a expressão "W é um G-**conjunto**" para indicar que estamos considerando W munido de uma G-ação.*

Definição 1.2.4 *Diz-se que uma G-ação em W é:*
(a) ***livre****, se a seguinte condição for verdadeira:*

$$g \cdot w = w \text{ para algum } w \in W \text{ se, e somente se, } g = 1.$$

(b) ***trivial****, se:*

$$g \cdot w = w, \, \forall g \in G, \, \forall w \in W.$$

Definição 1.2.5 *Sejam W um G-conjunto e $w \in W$. Define-se a G-**órbita** de w como sendo o conjunto*

$$G(w) := \{g \cdot w, \, g \in G\}.$$

Este conjunto é também, usualmente, denotado por $O(w)$.

Definição 1.2.6 *Diz-se que uma G-ação em W é* ***transitiva*** *se esta satisfaz a seguinte igualdade:*

$$G(w) = W, \, \forall w \in W.$$

Proposição 1.2.4 *Seja W um G-conjunto. Então:*
(i) $w \in G(w)$, $\forall w \in W$.
(ii) Dados $w_1, w_2 \in W$, tem-se

$$G(w_1) = G(w_2) \text{ ou } G(w_1) \cap G(w_2) = \emptyset.$$

Demonstração: (ii) Mostraremos que se $G(w_1) \cap G(w_2) \neq \emptyset$ então $G(w_1) = G(w_2)$. De fato,

$$G(w_1) \cap G(w_2) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \, w \in G(w_1) \cap G(w_2) \Rightarrow \exists \, g, \, h \in G; \, g \cdot w_1 = w = h \cdot w_2.$$

Daí, se $y \in G(w_1)$, então $y = g'w_1$, para algum $g' \in G$. Logo,

$$y = g'g^{-1}g \cdot w_1 = g'g^{-1} \cdot w = g'g^{-1}h \cdot w_2 = h' \cdot w_2; \; h' = g'g^{-1}h \in G.$$

Assim $y \in G(w_2)$ e consequentemente $G(w_1) \subset G(w_2)$. De forma análoga mostra-se que $G(w_2) \subset G(w_1)$, donde segue a igualdade desejada. ■

Segue da proposição anterior que existe um conjunto $E = \{w_i, i \in I\}$ tal que $\{G(w_i),\, i \in I\}$ forma uma partição de W, ou seja, $W = \dot{\bigcup}_{w_i \in E} G(w_i)$.

Definição 1.2.7 *O conjunto E dado acima é chamado de* ***conjunto de representantes das G-órbitas (distintas) de W.***

Note que se E' é um outro conjunto de representantes para as G-órbitas em W, então existe uma bijeção entre E e E'.

Definição 1.2.8 *O conjunto*

$$G_w := \{g \in G,\, g \cdot w = w\}$$

é um subgrupo de G chamado ***subgrupo de isotropia****, ou* ***subgrupo estabilizador*** *de w em G.*

Observação 1.2.1 *Dado W um G-conjunto, para cada $w \in W$, existe uma bijeção entre o conjunto quociente G/G_w e a órbita $G(w)$, dada pela aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} \eta: & G(w) & \to & G/G_w \\ & gw & \mapsto & \bar{g} = gG_w. \end{array}$$

De fato, temos:

- *η está bem definida e é injetora, pois*

$$\eta(gw) = \eta(hw) \Leftrightarrow \bar{g} = \bar{h} \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_w \Leftrightarrow (h^{-1}g)w = w \Leftrightarrow gw = hw.$$

- *η é sobrejetora, pois*

$$\forall\, \bar{g} \in G/G_w,\, \bar{g} = gG_w = \eta(gw),\, g \in G.$$

Anel Grupo e RG-módulos

Definição 1.2.9 *Sejam R um anel com unidade 1_R e G um grupo multiplicativo, com elemento neutro 1_G. Denote RG (ou $R[G]$) o R-módulo livre gerado pelos elementos de G. Assim, um elemento de RG é expresso unicamente na forma $\sum_{g \in G} r_g g$, com $r_g \in R$ e $r_g = 0$ para quase todo $g \in G$, isto é, exceto para um número finito de elementos $g \in G$.*

Em RG, as operações de adição e multiplicação são dadas por:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} s_g g\right) &= \sum_{g\in G}(r_g + s_g)g, \quad e\\ \left(\sum_{g\in G} r_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in G} s_h h\right) &= \sum_{g,h\in G} (r_g s_h)\cdot(gh).\end{aligned}$$

Tais operações fazem de RG um anel com unidade $1_{RG} = 1_R 1_G$, chamado ***anel grupo*** *de G sobre R.*

Neste trabalho, são de maior interesse os RG-módulos em que R denota o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ ou o corpo $\mathbb{Z}_2$. Sempre que necessário especificamos qual dos dois está sendo utilizado. De fato, na maioria das situações trabalhamos com $\mathbb{Z}_2G$-módulos.

Os conceitos de ação de grupos e RG-módulos estão intimamente relacionados, conforme mostra a proposição seguinte.

Proposição 1.2.5 *Sejam G um grupo (multiplicativo) e M um conjunto não vazio. Então, M é um RG-módulo (à esquerda) se, e somente se, M é um R-módulo (à esquerda) munido de uma ação (à esquerda) de G em M.*

Demonstração: Se M é um RG-módulo então M é um R-módulo considerando, para todo $r \in R$ e $m \in M$, $rm := (r1_G)m$, e pode-se definir uma G-ação por $gm := (1g)m$.

Reciprocamente, se M é um R-módulo e existe uma ação de G em M então podemos dar a M uma estrutura de RG-módulos da seguinte maneira:

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) m := \sum_{g\in G} r_g(g\cdot m),$$

onde $r_g \in R$ é nulo para quase todo $g \in G$ e $m \in M$. ■

Definição 1.2.10 *A aplicação $\varepsilon : RG \to R$ definida por $\varepsilon(g) = 1$, $\forall g \in G$, e estendida por linearidade, de modo que*

$$\varepsilon\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) = \sum_{g\in G} r_g \varepsilon(g) = \sum_{g\in G} r_g,$$

é chamada ***aplicação aumentação usual****.*

Observação 1.2.2 *A aplicação aumentação usual é sobrejetora, pois para todo $r \in R$ existe $\lambda = r\cdot g \in RG$ tal que $\varepsilon(\lambda) = r$ (g um elemento qualquer de G).*

Proposição 1.2.6 *Sejam $G = \langle g\rangle \simeq \mathbb{Z}$ um grupo cíclico, e $\varepsilon : RG \to R$ a aplicação aumentação usual. Então,* $\ker\varepsilon = \langle g-1\rangle$, *em RG, ou seja,* $\ker\varepsilon = (g-1)\cdot RG$.

Demonstração: Seja $\lambda \in \ker \varepsilon$. Como $\ker \varepsilon = \{\lambda \in RG;\ \varepsilon(\lambda) = 0\}$, temos que $\lambda = r_0 g^k + r_1 g^{k+1} + \ldots + r_n g^{k+n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon(\lambda) = 0$ (aqui estamos supondo $r_n \neq 0$, mas podemos ter $r_i = 0$, se $i \neq n$). Agora,
$\varepsilon(\lambda) = 0 \Rightarrow r_0 + r_1 + \ldots + r_n = 0 \Rightarrow r_n = -r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda &= r_0 g^k + r_1 g^{k+1} + \ldots + r_{n-1} g^{k+(n-1)} + (-r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-1}) g^{k+n} \\
&= -r_0 g^k (g^n - 1) - r_1 g^{k+1} (g^{n-1} - 1) - \ldots - r_{n-1} g^{k+(n-1)} (g - 1) \\
&= (g-1)[-r_0 g^k (g^{n-1} + g^{n-2} + \ldots + g^2 + g + 1) - \\
&- r_1 g^{k+1} (g^{n-2} + \ldots + g + 1) - \ldots - r_{n-1} g^{k+(n-1)}] \\
&= (g-1)(-r_0 g^{k+(n-1)} - r_0 g^{k+(n-2)} - \ldots - r_0 g^k - r_1 g^{k+(n-1)} - \\
&- \ldots - r_1 g^{k+1} - \ldots - r_{n-1} g^{k+(n-1)}) = \\
&= (g-1)[-r_0 g^k + (-r_0 - r_1) g^{k+1} + (-r_0 - r_1 - r_2) g^{k+2} + \ldots + \\
&+ (-r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-1}) g^{k+(n-1)}] \in (g-1) \cdot RG.
\end{aligned}$$

Logo, $\ker \varepsilon \subset (g-1) \cdot RG$. Por outro lado, seja $\lambda \in (g-1) \cdot RG$. Temos que $\lambda = (g-1) \cdot \mu$ com $\mu \in RG$, isto é, $\mu = \sum_g r_g g$, tal que $r_g \in R$ e $g \in G$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda &= (g-1) \cdot \sum_g r_g g = \sum_g r_g g^2 - \sum_g r_g g. \text{ Logo} \\
\varepsilon(\lambda) &= \sum_g r_g - \sum_g r_g = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $(g-1) \cdot RG \subset \ker \varepsilon$ e segue a igualdade desejada. ■

Mais geralmente, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 1.2.7 *Se G é um grupo e $\varepsilon : RG \to R$ é a aplicação aumentação usual, então*

$$\ker \varepsilon = \langle g - 1,\ g \in G \ e\ g \neq 1 = 1_G \rangle .$$

Demonstração: Seja $u = \sum_{g \in G} r_g g \in RG$. Temos

$$u \in \ker \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{g \in G} r_g = 0,$$

assim,

$$u = u - \left(\sum_{g \in G} r_g \right) 1_G = \sum_{g \in G} r_g (g - 1_G),$$

de onde segue que o núcleo da aplicação aumentação ($\ker \varepsilon$) é gerado pelos elementos

$$\{g-1,\, g \in G \text{ e } g \neq 1 = 1_G\},$$

como queríamos. ■

Proposição 1.2.8 *Sejam W um G-conjunto, E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W e RW o R-módulo livre gerado por W. Temos:*

(i) $RW = \bigoplus_{w\in E} R(G(w)) \simeq \bigoplus_{w\in E} R(G/G_w)$.

(ii) Se W é um G-conjunto livre, então $RW \simeq \bigoplus_{w\in E} RG$.

Demonstração: (i) Note que se

$$W = \dot{\bigcup_{w\in E}} G(w),$$

então

$$RW = R\left[\dot{\bigcup_{w\in E}} G(w)\right] = \bigoplus_{w\in E} RG(w).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \alpha \in R\left[\dot{\bigcup_{w\in E}} G(w)\right] &\Leftrightarrow \alpha = n_{r_1}u_{r_1} + \cdots + n_{r_k}u_{r_k},\ n_{r_j} \in R \text{ e } u_{r_j} \in \dot{\bigcup_{w\in E}} G(w) \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \bigoplus_{w\in E} RG(w). \end{aligned}$$

Como existe uma bijeção entre $G(w)$ e G/G_w, $w \in E$ (Observação 1.2.1), segue que $RG(w) \simeq R(G/G_w)$, para cada $w \in E$, e portanto,

$$RW \simeq \bigoplus_{w\in E} R(G/G_w).$$

(ii) De (i) temos que $RW = \bigoplus_{w\in E} R(G(w)) \simeq \bigoplus_{w\in E} R(G/G_w)$. Daí, usando o fato que a ação de G em W é livre, temos que $G_w = \{1\}$ e

$$RW = \bigoplus_{w\in E} R(G(w)) \simeq \bigoplus_{w\in E} RG.$$

Dessa forma concluímos que RW é um RG-módulo livre com base E. ■

Corolário 1.2.1 *Sejam H um subgrupo de G e E um conjunto de representantes para as classes laterais gH de H em G. Então,*

$$RG = \bigoplus_{g \in E} RH.$$

Demonstração: A multiplicação à esquerda dos elementos de H pelos elementos de G faz de G um H-conjunto livre, pois

$$h \cdot g = g \Leftrightarrow h = 1.$$

Portanto, o resultado segue da proposição anterior. ■

1.3 Produto Tensorial e Grupo de Homomorfismos

Nesta seção temos por objetivo definir o produto tensorial de M e N sobre R (denotado $M \otimes_R N$), o grupo (módulo) de homomorfismos $Hom(M, N)$, onde R é um anel e M e N são R-módulos, e estudar algumas propriedades envolvendo estes conceitos.

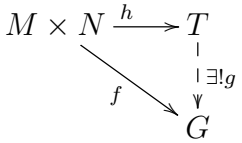
Produto Tensorial

Definição 1.3.1 *Sejam R um anel, M um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano (aditivo). Uma aplicação $f : M \times N \to G$ que satisfaz:*

1. $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$,
2. $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$, *e*
3. $f(rm, n) = f(m, rn)$,

*para todos $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$ é chamada **aplicação R-biaditiva**.*

Definição 1.3.2 *Dados um anel R e R-módulos M e N, define-se o **produto tensorial** de M e N sobre R e denota-se $M \otimes_R N$, como sendo o par (T, h), onde $T = M \otimes_R N$ é um grupo abeliano aditivo e h é uma aplicação R-biaditiva de $M \times N$ em T que satisfaz o seguinte problema de diagrama universal: para todo grupo G e para toda aplicação biaditiva $f : M \times N \to G$, existe um único homomorfismo $g : T \to G$ tal que a relação de comutatividade $g \circ h = f$ é verdade no seguinte diagrama:*



Quando não houver dúvidas sobre o anel R em questão, o produto tensorial de M e N sobre R será denotado simplesmente por $M \otimes N$.

Definição 1.3.3 *A aplicação biaditiva natural $f : M \times N \to M \otimes N$ será chamada* ***aplicação tensorial*** *e, para cada $m \in M$ e $n \in N$, o elemento $f(m,n)$ de $M \otimes N$, denotado por $m \otimes n$, será chamado de R-**produto tensorial dos elementos** m **e** n.*

Observação 1.3.1 *1. Segue diretamente da biaditividade da aplicação tensor f que*

$$\begin{aligned}(m_1r_1 + m_2r_2) \otimes n &= r_1(m_1 \otimes n) + r_2(m_2 \otimes n),\\ m \otimes (r'_1n_1 + r'_2n_2) &= r'_1(m \otimes n_1) + r'_2(m \otimes n_2),\end{aligned}$$

$\forall m_1, m_2, m \in M$; $n_1, n_2, n \in N$ *e* $r_1, r_2, r'_1, r'_2 \in R$.

2. *Em particular, $\forall m \in M$, $n \in N$ e $r \in R$, temos as seguintes propriedades:*

   (i) $(mr) \otimes n = r(m \otimes n) = m \otimes (rn)$.

   (ii) $0 \otimes n = 0 = m \otimes 0$.

   (iii) $(-m) \otimes n = -(m \otimes n) = m \otimes (-n)$.

3. *Como $f(M \times N)$ gera o grupo abeliano $M \otimes_R N$, temos que todo elemento $t \in M \otimes N$ pode ser escrito da seguinte forma:*

$$t = \sum_{i=1}^{n} (m_i \otimes n_i),$$

com $m_i \in M$ e $n_i \in N$, $i = 1, \ldots, n$. Note que a expressão de t não é única. Por exemplo:

$$\begin{aligned}0 &= m \otimes (n + n') - m \otimes n - m \otimes n', \text{ e}\\ 0 &= mr \otimes n - m \otimes rn,\end{aligned}$$

onde $m \in M$, $n \in N$ e $r \in R$.

Exemplo 1.3.1 *Considere $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ vistos como módulos sobre o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Temos que $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3 = 0$.*

De fato, como $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ e $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{\bar{0}}, \bar{\bar{1}}, \bar{\bar{2}}\}$, segue, das propriedades anteriores, que

$$\begin{aligned}\bar{1} \otimes \bar{\bar{1}} &= \bar{3} \otimes \bar{\bar{1}} = \bar{1}3 \otimes \bar{\bar{1}} = \bar{1} \otimes 3\bar{\bar{1}} = \bar{1} \otimes \bar{\bar{0}} = 0, \text{ e}\\ \bar{1} \otimes \bar{\bar{2}} &= \bar{1} \otimes 2\bar{\bar{1}} = \bar{1}2 \otimes \bar{\bar{1}} = \bar{0} \otimes \bar{\bar{1}} = 0.\end{aligned}$$

Proposição 1.3.1 *Para todo R-módulo à esquerda N, existe um R-isomorfismo natural:*

$$h : R \otimes N \to N;\ r \otimes n \mapsto rn,$$

ou seja, $R \otimes N \simeq N$.

Demonstração: Segue essencialmente da definição de produto tensorial. (Veja [29], Capítulo II, Proposição 2.58). ■

Proposição 1.3.2 *Considere* $f_1 : M \to M'$ *e* $f_2 : N \to N'$ *aplicações de R-módulos à direita e à esquerda, respectivamente. Então existe uma única aplicação, denotada por* $f_1 \otimes f_2$*, tal que*

$$(f_1 \otimes f_2)(m \otimes n) = f_1(m) \otimes f_2(n), \forall m \in M \text{ e } n \in N.$$

Demonstração: [29], Capítulo II, Proposição 2.46. ■

Definição 1.3.4 *Definimos o* R***-produto tensorial de*** f_1 ***e*** f_2 *como sendo a aplicação*

$$f_1 \otimes f_2 : M \otimes N \to M' \otimes N',$$

dada na proposição anterior.

Proposição 1.3.3 *Se* $f : M \to M'$ *e* $g : N \to N'$ *são isomorfismos de R-módulos à direita e à esquerda, respectivamente, então o produto tensorial*

$$h = f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$$

é um isomorfismo de grupos abelianos.

Demonstração: [29], Capítulo II, Corolário 2.49. ■

Observação 1.3.2 *Quando* R *é um anel comutativo, todo R-módulo à esquerda possui uma estrutura natural de R-módulo à direita, e vice-versa. Neste caso, o produto tensorial* $M \otimes_R N$ *pode ser definido considerando* M *e* N *como R-módulos à esquerda. Ainda,*
$f : M \times N \to M \otimes_R N$ *será uma aplicação bilinear e,* $M \otimes_R N$ *será um R-módulo com*

$$r(m \otimes n) = rm \otimes n = m \otimes rn, \forall m \in M, n \in N \text{ e } r \in R.$$

(*Veja [29], Capítulo II, Proposição 2.55*).

Módulo de Homomorfismos

Sejam M e N R-módulos arbitrários e considere o conjunto $Hom_R(M, N)$ de todos os homomorfismos do módulo M no módulo N. Como os módulos em questão são considerados sobre um anel R fixado, podemos denotar simplesmente por $Hom(M, N)$.

Dados ϕ e ψ em $Hom(M,N)$, considere a aplicação

$$\phi+\psi : M \to N;\ (\phi+\psi)(m) := \phi(m)+\psi(m),$$

para todo $m \in M$. É fácil ver que $\phi+\psi \in Hom(M,N)$, de modo que esta adição "+" torna $Hom(M,N)$ um grupo abeliano e portanto um $\mathbb{Z}$-módulo.

Agora, para todo $r \in R$ e para todo $\phi \in Hom(M,N)$ considere a aplicação

$$r\phi : M \to N;\ (r\phi)(m) := r[\phi(m)].$$

Note que se R for um anel comutativo, podemos verificar usando a comutatividade de R que $r\phi$ é um R-homomorfismo do módulo M no módulo N, e assim a associação $(r,\phi) \mapsto r\phi$ define uma multiplicação por escalar no grupo abeliano $Hom(M,N)$. Logo, no caso em que R é comutativo, $Hom(M,N)$ é um R-módulo.

Definição 1.3.5 *Quando R é um anel comutativo, o R-módulo $Hom(M,N)$ é chamado* ***módulo de homomorfismos*** *do módulo M no módulo N.*

Observação 1.3.3 *No que segue, se R é um anel comutativo com unidade, teremos homomorfismos/isomorfismos de R-módulos. No entanto, é interessante observar que caso R não seja comutativo, resultados similares são válidos por considerar $Hom(M,N)$ como um grupo abeliano ou um $\mathbb{Z}$-módulo, obtendo assim homomorfismos de grupos abelianos ou equivalentemente, de $\mathbb{Z}$-módulos. Observamos, por exemplo, que se G não é abeliano, o anel mais usado nesta dissertação, $\mathbb{Z}_2G$, não é um anel comutativo.*

Proposição 1.3.4 *Para qualquer R-módulo M, sempre temos $Hom_R(R,M) \simeq M$.*

Demonstração: O isomorfismo é obtido por considerar

$$\begin{array}{rccc} \psi: & M & \to & Hom_R(R,M) \\ & m & \mapsto & \psi(m);\ \psi(m)(1)=m, \end{array}$$

e estender por linearidade. (Veja [21], Capítulo I, Proposição 8.1). ■

Sejam $f : M' \to M$ e $g : N \to N'$ homomorfismos de R-módulos e considere os módulos $Hom(M,N)$ e $Hom(M',N')$. Defina uma função

$$h : Hom(M,N) \to Hom(M',N');\ h(\varphi) := g \circ \varphi \circ f,$$

para todo $\varphi \in Hom(M,N)$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ {\scriptstyle f}\uparrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M' & \xrightarrow[h(\varphi)]{} & N \end{array}$$

Esta função h é um homomorfismo do módulo $Hom(M,N)$ no módulo $Hom(M',N')$, a qual será denotada por $Hom(f,g)$. Assim, temos que $Hom(f,g)(\varphi) = g \circ \varphi \circ f$. Em particular,

$$Hom(f, id_N) : Hom(M,N) \to Hom(M',N);\ Hom(f,id_N)(\varphi) = \varphi \circ f.$$

$$Hom(id_M, g) : Hom(M,N) \to Hom(M,N');\ Hom(id_M,g)(\varphi) = g \circ \varphi.$$

Notação: $f^* = Hom(f, id_N)$ e $g_* = Hom(id_M, g)$.

Proposição 1.3.5 *(i) Se $id_M : M \to M$ e $id_N : N \to N$ são os homomorfismos idênticos dos R-módulos M e N, respectivamente, então*

$$Hom(id_M, id_N) = id_{Hom(M,N)} : Hom(M,N) \to Hom(M,N)$$

é o homomorfismo idêntico do módulo $Hom(M,N)$.

(ii) Se $f : M' \to M$, $f' : M'' \to M'$, $g : N \to N'$ e $g' : N' \to N''$, são homomorfismos de R-módulos então $Hom(f \circ f', g' \circ g) = Hom(f',g') \circ Hom(f,g)$, onde

$$Hom(f \circ f', g' \circ g) : Hom(M,N) \to Hom(M'',N'')$$

e

$$Hom(f',g') \circ Hom(f,g) : Hom(M,N) \to Hom(M'',N'').$$

Em particular, $(f \circ f')^* = (f')^* \circ f^*$ e $(g' \circ g)_* = (g')_* \circ g_*$.

Demonstração: (i) É imediata.

(ii) Seja $\varphi \in Hom(M'',N'')$. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ M' & \dashrightarrow & N \\ {\scriptstyle f'}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ M'' & \xrightarrow{\varphi} & N'' \end{array}$$

então,

$$Hom((f \circ f', g' \circ g))(\varphi) = (g' \circ g) \circ \varphi \circ (f \circ f')$$

e

$$\begin{aligned}(Hom(f', g') \circ Hom(f, g))(\varphi) &= Hom(f', g')(Hom(f, g))(\varphi) = (Hom(f', g'))(g \circ \varphi \circ f) \\ &= g' \circ (g \circ \varphi \circ f) \circ f' = (g' \circ g) \circ \varphi \circ (f \circ f').\end{aligned}$$

Logo,

$$Hom(f \circ f', g' \circ g) = Hom(f', g') \circ Hom(f, g).$$

Para verificar a última afirmação, basta, no segundo caso, considerar $g = g' = id_N$ e, no primeiro, $f = f' = id_M$. ■

Corolário 1.3.1 *Se $f : M' \to M$ e $g : N \to N'$ são isomorfismos de R-módulos, então $Hom(f, g) : Hom(M, N) \to Hom(M', N')$ também é isomorfismo de R-módulos e $(Hom(f, g))^{-1} = Hom(f^{-1}, g^{-1})$.*

Demonstração: Como f e g são isomorfismos, segue que existem homomorfismos $h : M \to M'$ e $k : N' \to N$ tais que $h \circ f$, $f \circ h$, $g \circ k$ e $k \circ g$ são homomorfismos idênticos. Pela proposição anterior, temos que as composições $Hom(h, k) \circ Hom(f, g)$, $Hom(f, g) \circ Hom(h, k)$ são homomorfismos idênticos dos módulos $Hom(M, N)$ e $Hom(M', N')$, respectivamente. Portanto, $Hom(f, g)$ é um isomorfismo e $(Hom(f, g))^{-1} = Hom(h, k) = Hom(f^{-1}, g^{-1})$. ■

Teorema 1.3.1 *Se $M = \bigoplus_{\mu \in M} M_\mu$ e $N = \prod_{\eta \in N} N_\eta$, onde M_μ e N_η são R-módulos à esquerda para todo μ e η, então*

$$Hom(M, N) \simeq \prod_{(\mu, \eta) \in M \times N} Hom(M_\mu, N_\eta).$$

Demonstração: [21], Capítulo I, Teorema 8.4. ■

Os próximos corolários seguem diretamente do teorema anterior.

Corolário 1.3.2 *Seja $M = \bigoplus_{\mu \in M} M_\mu$, onde M_μ são R-módulos à esquerda para todo $\mu \in M$ e seja N um R-módulo à esquerda. Então,*

$$Hom(M, N) \simeq \prod_{\mu \in M} Hom(M_\mu, N).$$

■

Corolário 1.3.3 *Seja* $N = \prod_{\eta \in N} N_\eta$, *onde* N_η *são* R*-módulos à esquerda e considere* M *um* R*-módulo à esquerda. Então,*

$$Hom(M, N) \simeq \prod_{\eta \in N} Hom(M, N_\eta).$$

■

Corolário 1.3.4 $Hom(M, N_1 \oplus N_2) \simeq Hom(M, N_1) \oplus Hom(M, N_2)$, *onde* M, N_1 *e* N_2 *são* R*-módulos à esquerda.*

■

Teorema 1.3.2 *Sejam* $f : M' \to M$ *e* $g : N \to N'$ *homomorfismo arbitrários de* R*-módulos à esquerda. Considere o homomorfismo*

$$h = Hom(f, g) : Hom(M, N) \to Hom(M', N').$$

Então, o kernel de h ($\ker h$) *é o submódulo* K *dado por*

$$K = \{\phi \in Hom(M, N);\ \phi[\text{Im}\,(f)] \subset \ker(g)\}.$$

Demonstração: [21], Capítulo I, Teorema 8.5. ■

Na proposição seguinte os módulos considerados são sobre um anel "R" particular, o anel RG (vide Definição 1.2.9). Por um abuso de notação, estamos usando a mesma letra R.

Proposição 1.3.6 *Sejam* G *um grupo e* F, M *e* N RG*-módulos. Tem-se que*

$$Hom_{RG}(F \otimes M, N) \simeq Hom_{RG}(F, Hom(M, N)).$$

Demonstração: Considere

$$\begin{array}{rccc} \psi: & Hom_{RG}(F \otimes M, N) & \to & Hom_{RG}(F, Hom(M, N)) \\ & f & \mapsto & \psi(f), \end{array}$$

onde, para cada $f : F \otimes M \to N$,

$$\begin{array}{rccc} \psi(f): & F & \to & Hom(M, N) \\ & x & \mapsto & \psi(f)(x);\ \psi(f)(x)(m) := f(x \otimes m), \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Hom_{RG}(F, Hom(M, N)) & \to & Hom_{RG}(F \otimes M, N) \\ & g & \mapsto & \phi(g), \end{array}$$

tal que para cada $g : F \to Hom(M, N)$,

$$\begin{array}{rccc} \phi(g): & F \otimes M & \to & N \\ & x \otimes m & \mapsto & \phi(g)(x \otimes m) := \ g(x)(m). \end{array}$$

Temos que $\psi(f)$ é homomorfismo de RG-módulos. De fato,

$$\begin{aligned} g \cdot \psi(f)(x)(m) &= g \cdot f(x \otimes m), \text{ e} \\ \psi(f)(g \cdot x)(m) &= f(gx \otimes m) = g \cdot f(x \otimes m). \end{aligned}$$

Portanto, $g \cdot \psi(f)(x)(m) = \psi(f)(g \cdot x)(m)$.
Pode-se verificar também que ϕ é homomorfismo e que $\phi = \psi^{-1}$. Logo,

$$Hom_{RG}(F \otimes M, N) \simeq Hom_{RG}(F, Hom(M, N)).$$

■

1.4 Resoluções Projetivas de M sobre RG

Definição 1.4.1 *Sejam M um R-módulo arbitrário e R um anel com unidade. Uma **resolução de** M **sobre** R, ou uma R-resolução de M é uma sequência exata de R-módulos*

$$F : \cdots \longrightarrow F_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

a qual satisfaz as seguintes condições:
(i) $F_{-1} = M$.
(ii) $F_n = 0$, $\forall n < -1$.

Equivalentemente, uma resolução de M sobre R ou uma R-resolução de M é uma sequência exata de R-módulos que possui a seguinte forma:

$$F : \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

Definição 1.4.2 *A aplicação $\varepsilon : F_0 \to M$ é chamada **aplicação aumentação**. Se cada F_i é livre, dizemos que a **resolução** é **livre**. Se cada F_i é projetivo, dizemos que a **resolução** é **projetiva**.*
Notação: *$\varepsilon : F \to M$ denota uma resolução de M.*

Proposição 1.4.1 *Dado um R-módulo M, sempre podemos construir uma R-resolução livre de M.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 1.2.1, sabemos que todo R-módulo M é isomorfo ao quociente de um R-módulo livre, isto é, existe um R-módulo livre F_0 e um isomorfismo

$$\psi_0 : M \to F_0/Q_0.$$

Sejam $\tilde{\varepsilon} : F_0 \to F_0/Q_0$ tal que $\tilde{\varepsilon}(x) = x + Q_0$ a projeção natural e $\varepsilon := \psi_0^{-1} \circ \tilde{\varepsilon}$, onde $\psi_0^{-1} : F_0/Q_0 \to M$ associa a cada $x + Q_0 \in F_0/Q_0$, um elemento $m_x \in M$ tal que $\psi_0(m_x) = x + Q_0$. Temos que ε é sobrejetora, pois ψ_0^{-1} e $\tilde{\varepsilon}$ são sobrejetoras e $\ker(\varepsilon) = Q_0$.

$$F_0 \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \frac{F_0}{Q_0} \xrightarrow{\psi_0^{-1}} M \longrightarrow 0.$$

Analogamente, o R-submódulo $\ker(\varepsilon) = Q_0$ é isomorfo ao quociente de um R-módulo livre, isto é, $\ker(\varepsilon) \overset{\psi_1}{\simeq} F_1/Q_1$, onde F_1 é livre. Novamente, tome a projeção natural $\tilde{\partial}_1 : F_1 \to F_1/Q_1$ e $\partial_1 := i \circ \psi_1^{-1} \circ \tilde{\partial}_1$, onde $i : Q_0 = \ker(\varepsilon) \to F_0$ é a inclusão. Então,

$$\begin{aligned}
\text{Im}\,(\partial_1) &= i(\psi_1^{-1}(\tilde{\partial}_1(F_1))) = i\left(\psi_1^{-1}\left(\frac{F_1}{Q_1}\right)\right) \\
&= i(\ker(\varepsilon)) = \ker(\varepsilon), \text{ e} \\
\ker(\partial_1) &= \ker(i \circ \psi_1^{-1} \circ \tilde{\partial}_1) = \ker(i(\psi_1^{-1}) \circ \tilde{\partial}_1) \\
&= \ker(\psi_1^{-1} \circ \tilde{\partial}_1) = \ker(\tilde{\partial}_1), \text{ pois } i \text{ e } \psi_1^{-1} \text{são homomorfismos injetores.}
\end{aligned}$$

Mas $\ker(\tilde{\partial}_1) = Q_1$, assim temos a sequência exata

$$F_1 \xrightarrow{\tilde{\partial}} \frac{F_1}{Q_1} \overset{\psi_1^{-1}}{\simeq} \ker(\varepsilon) \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \frac{F_0}{Q_0} \simeq M \longrightarrow 0$$

e daí,

$$F_1 \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

com F_0 e F_1 R-módulos livres. Continuando o processo indutivamente, vamos obter a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

sendo F_i R-módulo livre, para cada i. ■

Estamos, em geral, interessados em resoluções projetivas de $M = R$ sobre RG, com R visto como RG-módulo trivial.

Lema 1.4.1 *Se F é uma resolução projetiva de R sobre RG e H é um subgrupo de G, então F também é uma resolução projetiva de R sobre RH.*

Demonstração: Considere a seguinte resolução projetiva de R sobre RG:

$$\cdots \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to R \to 0.$$

Como cada F_n é um RG-módulo projetivo, segue pela Proposição 1.2.2 que F_n é um somando direto de um RG-módulo livre. Assim,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i \in I} (RG)_i.$$

Mas, pelo Corolário 1.2.1, RG é RH-módulo livre, daí

$$RG \simeq \bigoplus_{j \in J} (RH)_j.$$

Portanto,

$$F_n \oplus Q_n = \bigoplus_{i,j} (RH)_{i,j},$$

novamente pela Proposição 1.2.2, como F_n é somando direto de um RH-módulo livre, temos que F_n é um RH-módulo projetivo, consequentemente, F é uma resolução projetiva de R sobre RH. ■

Teorema 1.4.1 *Duas resoluções projetivas do mesmo módulo M são homotopicamente equivalentes. Mais precisamente, se*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

e

$$\cdots \longrightarrow F_2' \xrightarrow{\partial_2} F_1' \xrightarrow{\partial_1} F_0' \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

são resoluções projetivas de M então existe uma aplicação de cadeia preservando aumentação $f : \{F_n\} \to \{F_n'\}$, única a menos de homotopia e f é uma equivalência de homotopia.

Demonstração: [12], I. Teorema 7.5. ■

Observação 1.4.1 *Com base no teorema anterior podemos dizer que: "Duas resoluções de um mesmo módulo M são "iguais" a menos de uma equivalência de homotopia".*

Teorema 1.4.2 *Se M é um R-módulo à esquerda arbitrário e*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

é uma sequência exata de R-módulos à direita, então a sequência

$$A \otimes M \xrightarrow{f \otimes id_M} B \otimes M \xrightarrow{g \otimes id_M} C \otimes M \to 0$$

de seus produtos tensoriais, sendo $id_M : M \to M$ o homomorfismo idêntico, é também uma sequência exata.

Demonstração: [21], Capítulo I, Teorema 7.9 ou [29], Capítulo II, Teorema 2.63, p. 84. ■

Teorema 1.4.3 *Se a seguinte sequência de homomorfismos de R-módulos à direita*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

é uma sequência exata curta que cinde, então a sequência

$$0 \to A \otimes M \xrightarrow{f \otimes id_M} B \otimes M \xrightarrow{g \otimes id_M} C \otimes M \to 0$$

de seus produtos tensoriais, com o homomorfismo idêntico $id_M : M \to M$, onde M é um R-módulo à esquerda, é também uma sequência exata curta que cinde.

Demonstração: [21], Capítulo I, Teorema 7.10. ou [29], Capítulo II, p. 84. ■

Teorema 1.4.4 *Se M é um R-módulo à esquerda e*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

é uma sequência exata de R-módulos à esquerda, então a sequência

$$0 \to Hom(C, M) \xrightarrow{g^*} Hom(B, M) \xrightarrow{f^*} Hom(A, M),$$

onde $f^* = Hom(f, id_M)$, $g^* = Hom(g, id_M)$ e $id_M : M \to M$ é o homomorfismo idêntico do módulo M também é uma sequência exata.

Demonstração: [21], Capítulo I, Teorema 8.7 ou [29], Capítulo II, Teorema 2.40, p. 62. ■

Teorema 1.4.5 *Se M é um R-módulo à esquerda e*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

é uma sequência exata curta que cinde, então a sequência

$$0 \to Hom(C, M) \xrightarrow{g^*} Hom(B, M) \xrightarrow{f^*} Hom(A, M) \to 0,$$

onde $f^* = Hom(f, id_M)$, $g^* = Hom(g, id_M)$ e $id_M : M \to M$ é o homomorfismo idêntico do módulo M também é uma sequência exata curta que cinde.

Demonstração: [21], Capítulo I, Teorema 8.8. ou [29], Capítulo II, p. 60. ■

Teorema 1.4.6 *Sejam M um R-módulo arbitrário e $id_M : M \to M$ o homomorfismo idêntico. São equivalentes:*
(a) M é projetivo.
(b) Toda sequência exata de R-módulos

$$0 \to M \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

cinde.
(c) M é isomorfo a um somando direto de um R-módulo livre.
(d) Se $h : A \to B$ é epimorfismo então $h_* = Hom(id_M, h) : Hom(M, A) \to Hom(M, B)$ também é epimorfismo.
(e) Se a sequência de R-módulos

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

é exata, então a sequência

$$0 \to Hom(M, A) \xrightarrow{f_*} Hom(M, B) \xrightarrow{g_*} Hom(M, C) \to 0,$$

onde $f_* = Hom(id_M, f)$ e $g_* = Hom(id_M, g)$ também é uma sequência exata.

Demonstração: [21], Capítulo I, Teorema 9.4. ■

Definição 1.4.3 *Um R-módulo M à esquerda é chamado R-**plano** se para qualquer sequência exata curta de R-módulos à direita*

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0,$$

a sequência

$$0 \to A \otimes M \xrightarrow{f \otimes id_M} B \otimes M \xrightarrow{g \otimes id_M} C \otimes M \to 0$$

é exata.

Lema 1.4.2 *Todo módulo projetivo é plano.*

Demonstração: [21], Capítulo I, Exercício 9.E. ■

Vejamos agora, exemplos de resoluções livres (projetivas) de R sobre RG.

Resolução de R sobre RG, quando G é cíclico finito

Exemplo 1.4.1 *Considere* $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *e a sequência*

$$\cdots \longrightarrow RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} \cdots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

onde ε *é a aplicação aumentação,* $t-1$ *e* N *denotam, respectivamente, a multiplicação por* $(t-1)$ *e* $1+t+\ldots+t^{n-1}$*, isto é, se* $r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1}$ *é um elemento de* RG*,*

$$\begin{aligned}
\varepsilon(r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1}) &= r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1}, \\
(t-1)(r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1}) &= (r_{n-1} - r_0)1 + (r_0 - r_1)t + \ldots + (r_{n-2} - r_{n-1})t^{n-1}, \\
N(r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1}) &= (1 + t + \ldots + t^{n-1})(r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1}).
\end{aligned}$$

Sabemos que RG *é um* RG*-módulo livre (Corolário* 1.2.1*), logo pela Proposição* 1.2.3*,* RG *é um* RG*-módulo projetivo. Além disso, temos:*

(I) ε *é epimorfismo, pois* ε *é a aplicação aumentação.*

(II) $\mathrm{Im}\,(t-1) = \ker \varepsilon$*.*

De fato, seja $y = r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1} \in \ker \varepsilon$ *com* $r_i \in R$*, para* $0 \leq i \leq n-1$*, podendo ser nulos. Daí,*

$$\begin{aligned}
\varepsilon(y) = 0 &\Rightarrow r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1} = 0 \\
&\Rightarrow r_{n-1} = -r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-2}.
\end{aligned}$$

Assim, existe $x = (-r_0)1 + (-r_0 - r_1)t + \ldots + (-r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-2})t^{n-2} \in RG$ *tal que*

$$\begin{aligned}
(t-1)x &= (t-1)[(-r_0)1 + (-r_0 - r_1)t + \ldots + (-r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-2})t^{n-2}] \\
&= r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1} = y.
\end{aligned}$$

Logo, $\ker \varepsilon \subset \mathrm{Im}\,(t-1)$*.*

Agora, seja $y \in \mathrm{Im}\,(t-1)$*. Então, existe* $z = r'_0 1 + r'_1 t + \ldots + r'_{n-1}t^{n-1} \in RG$ *com* $y = (t-1)z$*. Daí,*

$$\begin{aligned}
y &= (r'_{n-1} - r'_0)1 + (r'_0 - r'_1)t + \ldots + (r'_{n-2} - r'_{n-1})t^{n-1} \Rightarrow \\
\varepsilon(y) &= (r'_{n-1} - r'_0) + (r'_0 - r'_1) + \ldots + (r'_{n-2} - r'_{n-1}) = 0 \Rightarrow y \in \ker(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Im}\,(t-1) \subset \ker \varepsilon$*, de onde segue a igualdade desejada.*

(III) $\mathrm{Im}\,(N) = \ker(t-1)$*.*

De fato, seja $y \in \mathrm{Im}\,(N)$*. Então, existe* $z = r'_0 1 + r'_1 t + \ldots + r'_{n-1}t^{n-1} \in RG$ *com*

$y = (1 + t + \ldots + t^{n-1})z$. *Dessa forma,*

$$(t-1)[(1+t+\ldots+t^{n-1})z] = (t-1)(1+t+\ldots+t^{n-1})z = (t^n-1)z = 0,$$

pois $t^n = 1$. *Assim,* $y \in \ker(t-1)$ *e consequentemente,* $\mathrm{Im}\,(N) \subset \ker(t-1)$.

Agora, seja $y = r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1} \in \ker(t-1)$. *Então,* $(t-1)y = 0$, *daí,*

$$(r_{n-1} - r_0)1 + (r_0 - r_1)t + \ldots + (r_{n-2} - r_{n-1})t^{n-1} = 0,$$

ou seja, $r_i = r_0$, *para todo* $i = 1, \ldots, n-1$. *Assim,*

$$y = r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1} = (1 + t + \ldots + t^{n-1})r_0 \in \mathrm{Im}\,(N).$$

Portanto, $\ker(t-1) \subset \mathrm{Im}\,(N)$ *e consequentemente,* $\mathrm{Im}\,(N) = \ker(t-1)$.

(IV) $\mathrm{Im}\,(t-1) = \ker(N)$.

De fato, seja $y \in \mathrm{Im}\,(t-1)$. *Então, existe* $z = (r'_0 1 + r'_1 t + \ldots + r'_{n-1}t^{n-1}) \in RG$ *tal que* $y = (t-1)z$. *Daí,*

$$N(y) = (1 + t + \ldots + t^{n-1})(t-1)z = (t^n - 1)z = 0.$$

Assim, $y \in \ker(N)$ *e consequentemente,* $\mathrm{Im}\,(t-1) \subset \ker(N)$.

Por outro lado, seja $y \in \ker(N)$. *Então,*

$$y = r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1} \in RG \text{ e } N(y) = 0.$$

Daí,

$$(1 + t + \ldots + t^{n-1})(r_0 1 + r_1 t + \ldots + r_{n-1}t^{n-1}) = 0.$$

Então, como $t^n = 1$, *temos que*

$$(r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1})1 + \ldots + (r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1})t^{n-1} = 0.$$

Assim, $r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1} = 0$, *o que nos leva a* $r_0 = -r_1 - \ldots - r_{n-1}$ *e daí,*

$$\begin{aligned} y &= (t-1)r_1 + (t^2-1)r_2 + \ldots + (t^n-1)r_{n-1} \\ &= (t-1)[r_1(1+t) + \ldots + r_{n-1}(1+t+\ldots+t^{n-2})] \in \mathrm{Im}\,(t-1). \end{aligned}$$

Portanto, $\ker(N) \subset \mathrm{Im}\,(t-1)$.

De (I), (II), (III) *e* (IV) *concluímos que a sequência dada inicialmente é exata. Portanto,*

$$\cdots \longrightarrow RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} \cdots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

é uma resolução livre (projetiva) de R sobre RG.

Resolução de R sobre RG quando G é cíclico infinito

Exemplo 1.4.2 *Seja $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Considere a seguinte sequência*

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0,$$

onde ∂ é a multiplicação por $(t-1)$ e ε é a aplicação aumentação, ou seja,

$$\partial(\sum_i r_i t^i) = (t-1)(\sum_i r_i t^i) = \sum_i (r_i t^{i+1} - r_i t^i) = \sum_i (r_{i-1} - r_i) t^i$$

e

$$\varepsilon(\sum_i r_i t^i) = \sum_i r_i,$$

onde $r_i \in R$ e $r_i = 0$ exceto para um número finito de $i's$, $i \in \mathbb{Z}$.

Como vimos no exemplo anterior, RG é RG-módulo livre (projetivo). Além disso, temos:

(I) ∂ é monomorfismo, pois
$u = \sum_i r_i t^i \in \ker(\partial) \Rightarrow \partial(\sum_i r_i t^i) = 0 \Rightarrow \sum_i (r_{i-1} - r_i) t^i = 0 \Rightarrow r_{i-1} = r_i \Rightarrow r_j = r_i,\ \forall i, j.$
Como $r_i = 0$ exceto para um número finito de índices então $r_i = 0$ para todo i e daí,

$$u = \sum_i r_i t^i = 0.$$

(II) $\operatorname{Im}\partial = \ker\varepsilon$, *pois* $\forall u \in RG$, $u = \sum_i r_i t^i$; $r_i \in R$ *são quase todos nulos, logo*

$$(\varepsilon \circ \partial)(\sum_i r_i t^i) = \varepsilon(\sum_i (r_{i-1} - r_i) t^i) = \sum_i r_{i-1} - r_i = \sum_i r_{i-1} - \sum_i r_i = 0$$

e daí,

$$\operatorname{Im}\partial \subset \ker\varepsilon.$$

Por outro lado, se $y \in \ker\varepsilon$, então

$$y = r_0 t^k + r_1 t^{k+1} + \ldots + r_n t^{k+n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ r_0 \neq 0 \ e\ r_n \neq 0$$

(*aqui podemos ter* $r_i = 0$ *se* $1 \leq i \leq n-1$) *e* $\varepsilon(y) = 0$. *Assim,* $r_0 + r_1 + \ldots + r - n = 0$, *o que nos leva a* $r_n = r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-1}$. *Daí, existe*

$$x = (-r_0)t^k + (-r_0 - r_1)t^{k+1} + \ldots + (-r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-1})t^{k+(n-1)} \in RG$$

com

$$\begin{aligned} \partial(x) = (t-1)x &= tx - x = (-r_0)t^{k+1} + (-r_0 - r_1)t^{k+2} + \ldots + \\ &+ (-r_0 - r_1 - \ldots - r_{n-1})t^{k+n} + r_0 t^k + (r_0 + r_1)t^{k+1} + \ldots + \\ &+ (r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1})t^{k+(n-1)} \\ &= r_0 t^k + r_1 t^{k+1} + \ldots + r_n t^{k+n} = y. \end{aligned}$$

Logo,

$$\ker(\varepsilon) \subset \text{Im}\,(\partial).$$

(III) ε *é um epimorfismo, pois* ε *é a aplicação aumentação.*

De (I), (II) *e* (III) *concluímos que a sequência dada inicialmente é exata. Logo,*

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre (projetiva) de R *sobre* RG.

Capítulo

2

(Co)homologia Absoluta de Grupos

Neste capítulo vamos abordar, inicialmente, assuntos da teoria básica de (co)homologia absoluta de grupos, tais como: grupos invariantes e coinvariantes e módulos induzidos e coinduzidos. A seguir vamos definir (co)homologia absoluta de grupos, aplicações induzidas e apresentar o Lema de Shapiro. Também vamos calcular os grupos de cohomologia de certos grupos particulares e apresentar uma interpretação topológica para (co)homologia (absoluta) de grupos. Além disso, veremos alguns resultados envolvendo derivações de grupos, em especial, vamos relacionar este conceito com o grupo de cohomologia de ordem 1 de um grupo G com coeficientes em um RG-módulo M. Finalizamos este capítulo com uma breve introdução à teoria de dualidade de grupos.

2.1 Os Grupos Invariantes e Coinvariantes de um RG-módulo M

Definição 2.1.1 *Sejam G um grupo e M um RG-módulo (à esquerda). O* ***grupo dos invariantes*** *de M, denotado por M^G, é definido por:*

$$M^G := \{m \in M;\, g \cdot m = m,\, \forall g \in G\}.$$

Observação 2.1.1

1. *Se a ação de G em M é trivial, isto é, $g \cdot m = m$, para qualquer $m \in M$ então $M^G = M$.*

2. *A G-ação sobre M induz a G-ação trivial sobre M^G e assim, M^G é um RG-módulo trivial. Ainda, M^G é o maior submódulo de M no qual G atua trivialmente.*

Definição 2.1.2 *O* ***grupo dos coinvariantes*** *de M, o qual denotamos por M_G, é dado por:*

$$M_G := \frac{M}{\langle g \cdot m - m;\ g \in G \ \ e \ \ m \in M \rangle},$$

onde $\langle g \cdot m - m;\ g \in G \ \ e \ \ m \in M \rangle$ é o submódulo de M gerado pelos elementos $g \cdot m - m$, com $g \in G$ e $m \in M$.

Observação 2.1.2 *Se a ação de G em M é trivial, então $M_G = M/0 = M$.*

Definição 2.1.3 *Sejam M e N RG-módulos à esquerda. Podemos dar a $M \otimes_R N$ (respectivamente $Hom_R(M,N)$) uma estrutura de RG-módulo, induzida pela* ***G-ação diagonal*** *dada por:*

$$g \cdot (m \otimes n) := g \cdot m \otimes g \cdot n,\ \forall g \in G,\ m \in M \ \ e \ n \in N,$$

$$(\textit{respectivamente, } (g \cdot f)(m) := gf(g^{-1}m),\ \forall g \in G,\ m \in M \ \ e \ f \in Hom_R(M,N)).$$

Proposição 2.1.1 *Seja M um RG-módulo e R visto como RG-módulo trivial. Temos:*
(i) $M^G \simeq Hom_{RG}(R,M) = (Hom_R(R,M))^G$
(ii) $M_G \simeq R \otimes_{RG} M = (R \otimes_R M)^G$

Demonstração: *(i)* [32], Proposição 1.2.11 e Corolário 1.2.12.
(ii) [12], Capítulo II, 2.1 e [32], Proposição 1.2.6. ■

2.2 Módulos (Co)induzidos ($\mathrm{Ind}\,_S^G M$ e $\mathrm{Coind}\,_S^G M$)

Considere R_1 e R_2 anéis, e $\alpha : R_1 \to R_2$ um homomorfismo de anéis. Se M é um R_2-módulo (à esquerda), pode-se ver M como um R_1-módulo (à esquerda) definindo em M a R_1-ação:

$$\begin{array}{rccc} \mu: & R_1 \times M & \to & M \\ & (r_1, m) & \mapsto & r_1 \cdot m = \alpha(r_1)m, \end{array}$$

onde $r_1 \in R_1$ e $m \in M$.

Obtem-se, assim, um funtor da categoria dos R_2-módulos (à esquerda) para a categoria dos R_1-módulos (à esquerda) denominado **restrição de escalares**. Neste caso, M é dito um R_1-módulo por restrição de escalares (via α) e é denotado por $\mathrm{Res}\,_{R_1}^{R_2} M$.

Por outro lado, pode-se ver R_2 como um R_1-módulo (à direita), por restrição de escalares, através da ação:

$$\begin{array}{rccc} \eta: & R_2 \times R_1 & \to & R_2 \\ & (r_2, r_1) & \mapsto & r_2 \cdot r_1 = r_2\alpha(r_1), \end{array}$$

onde $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$ e $r_2\alpha(r_1)$ é a multiplicação do anel. Assim, podemos considerar o produto tensorial $R_2 \otimes_{R_1} M$ e definir, então, a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \psi: & R_2 \times (R_2 \otimes_{R_1} M) & \to & R_2 \otimes_{R_1} M \\ & (r_2, r_2' \otimes m) & \mapsto & r_2 \cdot (r_2' \otimes m) := r_2 r_2' \otimes m, \end{array}$$

onde $r_2, r_2' \in R_2$ e $m \in M$. Mostra-se que ψ está bem definida e é uma R_2-ação. O R_2-módulo (à esquerda) $R_2 \otimes_{R_1} M$ é dito ser obtido de M por **extensão de escalares** de R_1 para R_2 (via α).

Ainda, se M é um R_1-módulo (à esquerda), pode-se obter um R_2-módulo (à esquerda), $Hom_{R_1}(R_2, M)$, bastante relacionado com M, da seguinte maneira:

Por restrição, vê-se R_2 como um R_1-módulo (à esquerda)

$$\begin{array}{rccl} \xi: & R_1 \times R_2 & \to & R_2 \\ & (r_1, r_2) & \mapsto & r_1 \cdot r_2 = \alpha(r_1) r_2,\ r_1 \in R_1 \text{ e } r_2 \in R_2, \end{array}$$

onde $\alpha(r_1)r_2$ é a multiplicação do anel. Assim, faz sentido considerar $Hom_{R_1}(R_2, M)$. Pode-se mostrar que a aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \varsigma: & R_2 \times Hom_{R_1}(R_2, M) & \to & Hom_{R_1}(R_2, M) \\ & (r_2, f) & \mapsto & r_2 f;\ (r_2 f)(r_2') := f(r_2' r_2) \end{array}$$

está bem definida e é uma R_2-ação. Assim, $Hom_{R_1}(R_2, M)$ é um R_2-módulo, obtido de M por **coextensão de escalares** de R_1 para R_2 (via α).

Proposição 2.2.1 *Se $k : R_1 \to R_2$ é um homomorfismo de anéis, M é um R_1-módulo (à esquerda) e N é um R_2-módulo (à esquerda), então:*
(i) $Hom_{R_1}(M, N) \simeq Hom_{R_2}(R_2 \otimes_{R_1} M, N)$ como grupos.
(ii) $Hom_{R_1}(N, M) \simeq Hom_{R_2}(N, Hom_{R_1}(R_2, M))$ como grupos.
Demonstração: [12], Capítulo III, 3.3 e 3.5. ■

Considerando R um anel comutativo com unidade, G um grupo, S um subgrupo de G, $\alpha : RS \hookrightarrow RG$ a aplicação inclusão de RS em RG e M é um RG-módulo, podemos ver M como um RS-módulo através de α o qual denotamos por $\text{Res}\,\frac{G}{S}M$ (módulo restrição).

Seja M um RS-módulo. O RG-módulo obtido de M por extensão de escalares será denotado por $\text{Ind}\,\frac{G}{S}M$, ou seja,

$$\text{Ind}\,\tfrac{G}{S}M := RG \otimes_{RS} M.$$

Neste caso, a extensão de escalares é chamada **indução**.

Note que Ind $\uparrow_S^G M$ será um RG-módulo com a G-ação

$$g \cdot (g' \otimes m) := gg' \otimes m;\ g, g' \in G \text{ e } m \in M.$$

Também podemos associar ao RS-módulo o RG-módulo obtido de M por coextensão de escalares (que neste caso chamamos de **coindução**) e denotamos por Coind $\uparrow_S^G M$, ou seja,

$$\text{Coind } \uparrow_S^G M := Hom_{RS}(RG, M).$$

Coind $\uparrow_S^G M$ é um RG-módulo com a G-ação

$$g \cdot f;\ (g \cdot f)(g') := f(g'g),\ \forall g, g' \in G \text{ e } f \in \text{Coind } \uparrow_S^G M.$$

Os RG-módulos Ind $\uparrow_S^G M$ e Coind $\uparrow_S^G M$ dados anteriormente são denominados **módulo induzido** e **módulo coinduzido**, respectivamente.

Proposição 2.2.2 *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RG-módulo. Existem RG-isomorfismos naturais:*
(i) Ind $\uparrow_S^G \left(\text{Res } \uparrow_S^G M\right) \simeq R(G/S) \otimes_R M$ *(com a G-ação diagonal).*
(ii) Coind $\uparrow_S^G \left(\text{Res } \uparrow_S^G M\right) \simeq Hom_R(R(G/S), M)$ *(com a G-ação diagonal).*

Demonstração: (i) [12], Capítulo III, Proposição 5.6.
(ii) Análoga a (i), [12], Capítulo III, Exercício 2(b), p. 71. ■

Corolário 2.2.1 *Nas condições da proposição anterior, considerando $M = R$ como um RG-módulo trivial, tem-se*

$$\text{Ind } \uparrow_S^G R \simeq R(G/S).$$

Demonstração: É um caso particular da proposição anterior (i). ■

Proposição 2.2.3 *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RS-módulo. Então:*

(i) Ind $\uparrow_S^G M = \bigoplus_{g \in G/S} gM$*, onde gM é o transformado de M pela ação de G.*

(ii) Coind $\uparrow_S^G M \simeq \prod_{g \in G/S} gM$.

Demonstração: [12], Capítulo III, Proposição 5.1, p. 67 e p. 70. ■

Proposição 2.2.4 *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RS-módulo. Então, existe um monomorfismo*

$$\vartheta : \text{Ind } \uparrow_S^G M \to \text{Coind } \uparrow_S^G M.$$

Demonstração: Considere a aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \vartheta_0: & M & \to & \text{Coind}\,\overset{G}{S}M \\ & m & \mapsto & \vartheta_0(m); \quad \vartheta_0(m)(g) = \begin{cases} g\cdot m, & \text{se } g\in S, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

Note que,

$$\vartheta_0(m)(1) = m,\ \forall m\in M.$$

Assim,

$$m\neq m' \Rightarrow \vartheta_0(m)\neq\vartheta_0(m'),$$

logo, ϑ_0 é injetora. Além disso, para quaisquer $s\in S$, $m\in M$ e $g\in G$,

$$\vartheta_0(s\cdot m)(g) = \begin{cases} g\cdot(s\cdot m) = (gs)\cdot m, & \text{se } g\in S, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$(s\cdot\vartheta_0(m))(g) \overset{\text{ação no Coind}}{=} \vartheta_0(m)(gs) = \begin{cases} (gs)\cdot m, & \text{se } gs\in S \overset{s\in S}{\Leftrightarrow} g\in S, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De forma que ϑ_0 é um RS-monomorfismo.

Considere $N = \text{Coind}\,\overset{G}{S}M$ e $i: M\to \text{Ind}\,\overset{G}{S}M$ definida por $i(m) := 1\otimes m$, $\forall m\in M$. Então, por [12], Capítulo III, 3.2 p. 63, temos que existe uma única aplicação de RG-módulos

$$\vartheta : \text{Ind}\,\overset{G}{S}M \to \text{Coind}\,\overset{G}{S}M,$$

tal que $\vartheta\circ i = \vartheta_0$. $\qquad (*)$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad i \quad} & \text{Ind}\,\overset{G}{S}M \\ {\scriptstyle\vartheta_0}\downarrow & \swarrow_{\vartheta} & \\ N = \text{Coind}\,\overset{G}{S}M & & \end{array}$$

Mas

$$\begin{array}{rcl} \vartheta\circ i = \vartheta_0 & \Rightarrow & (\vartheta\circ i)(m) = \vartheta_0(m) \\ & \Rightarrow & \vartheta(1\otimes m) = \vartheta_0(m) \\ & \Rightarrow & \vartheta(1\otimes m)(g) = \vartheta_0(m)(g) = \begin{cases} g\cdot m, & \text{se } g\in S, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad (**) \end{array}$$

Assim, como ϑ é aplicação de RG-módulos, se $g' \in G$ então

$$\vartheta(g' \cdot (1 \otimes m)) = g' \cdot \vartheta(1 \otimes m).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \vartheta(g' \otimes m)(g) &= \vartheta(g' \cdot (1 \otimes m))(g) = (g' \cdot \vartheta(1 \otimes m))(g) \\ &= \vartheta(1 \otimes m)(gg') \overset{(**)}{=} \begin{cases} (gg') \cdot m, & \text{se } gg' \in S, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação $\vartheta : \text{Ind } \overset{G}{S}M \to \text{Coind } \overset{G}{S}M$ dada nos geradores por

$$\vartheta(g' \otimes m)(g) = \begin{cases} (gg') \cdot m, & \text{se } gg' \in S, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é tal que

$$\vartheta(g \otimes m) = g\vartheta(1 \otimes m) = g\vartheta_0(m),$$

e como ϑ_0 é monomorfismo, segue que ϑ também é monomorfismo. ■

Proposição 2.2.5 *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RS-módulo. Se $[G : S] < \infty$, então*

$$\text{Ind } \overset{G}{S}M \simeq \text{Coind } \overset{G}{S}M.$$

Demonstração: Dada uma família arbitrária de R-módulos, $\{M_i\}_{i \in I}$, temos que se o conjunto de índices I for finito, então a soma direta e o produto direto, $\bigoplus_{i \in I} M_i$ e $\prod_{i \in I} M_i$ são equivalentes. Assim, como $[G : S] < \infty$, segue da Proposição 2.2.3 que $\text{Ind } \overset{G}{S}M \simeq \text{Coind } \overset{G}{S}M$. Este isomorfismo é dado explicitamente em [12], Capítulo III, Proposição 5.9. ■

Lema 2.2.1 *Sejam G um grupo, S e T subgrupos de G satisfazendo $S \subset T \subset G$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Então:*
(i) Existe um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo natural:

$$\text{Coind } \overset{G}{T}\text{Coind } \overset{T}{S}M \overset{\nu}{\to} \text{Coind } \overset{G}{S}M.$$

(ii) Existe um $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo natural:

$$\text{Ind } \overset{G}{T}\text{Coind } \overset{T}{S}M \overset{\vartheta}{\to} \text{Coind } \overset{G}{T}\text{Coind } \overset{T}{S}M.$$

Demonstração: (i) Tomando $N = \mathbb{Z}_2G$, $R_1 = \mathbb{Z}_2S$ e $R_2 = \mathbb{Z}_2T$ na Proposição 2.2.1, segue que

$$\text{Coind } \overset{G}{S}M = Hom_{\mathbb{Z}_2S}(\mathbb{Z}_2G, M) \overset{Prop.2.2.1(ii)}{\simeq} Hom_{\mathbb{Z}_2T}(\mathbb{Z}_2G, Hom_{\mathbb{Z}_2S}(\mathbb{Z}_2T, M)) = \text{Coind } \overset{G}{T}\text{Coind } \overset{T}{S}M.$$

O isomorfismo ν (em (i)), pode ser dado explicitamente por

$$f \mapsto \nu(f);\ \nu(f)(g) = f(g)(1),$$

onde $f \in \text{Coind}\uparrow_T^G \text{Coind}\uparrow_S^T M = Hom_{\mathbb{Z}_2T}(\mathbb{Z}_2G, Hom_{\mathbb{Z}_2S}(\mathbb{Z}_2T, M))$, $g \in G$ e $1 \in \mathbb{Z}_2T$.

(ii) Basta considerar na Proposição 2.2.4, T no lugar de S e o $\mathbb{Z}_2T$-módulo Coind $\uparrow_S^T M$ no lugar de M. O isomorfismo ϑ pode ser dado explicitamente por

$$\vartheta(g_0 \otimes h)(g) = \begin{cases} (gg_0) \cdot h, & \text{se } gg_0 \in T, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $g_0 \otimes h \in \text{Ind}\uparrow_T^G \text{Coind}\uparrow_S^T M = \mathbb{Z}_2G \otimes_{\mathbb{Z}_2T} Hom_{\mathbb{Z}_2S}(\mathbb{Z}_2T, M)$. ■

Proposição 2.2.6 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Se $[G : S] = \infty$, então $(\text{Ind}\uparrow_S^G M)^G = 0$, para qualquer RS-módulo M.*

Demonstração: Suponhamos que $(\text{Ind}\uparrow_S^G M)^G \neq 0$. Então, existe $u \in \text{Ind}\uparrow_S^G M$, $u \neq 0$ tal que

$$g \cdot u = u,\ \forall g \in G.$$

Pela Proposição 2.2.3 (i), temos que $\text{Ind}\uparrow_S^G M = \bigoplus_{g \in E} gM$, onde E é um conjunto de representantes para G/S. Logo,

$$u = g_1m_1 + \ldots + g_km_k,$$

com $g_i \in E$, $g_im_i \neq 0$ e $g_im_i \neq g_jm_j$ se $i \neq j$ (pois $g_iM \cap g_jM = 0$).

Seja $g \in G$. Como a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \text{Ind}\uparrow_S^G M & \to & \text{Ind}\uparrow_S^G M \\ & v & \mapsto & gv \end{array}$$

é uma bijeção, segue que

$$gg_im_i \neq gg_jm_j,\ \forall i \neq j.$$

Afirmação: $m_i = m_j = m$, $\forall i \neq j$.

De fato, para cada i, j, seja $g := g_ig_j^{-1}$. Como $gu = u$, temos

$$gg_1m_1 + \ldots + gg_im_i + \ldots + g_im_j + \ldots + gg_km_k = g_1m_1 + \ldots + g_km_k.$$

Mas

$$g_im_j = gg_jm_j \neq gg_rm_r, \text{ se } j \neq r,\ g_im_j \neq 0 \text{ e } g_im_j \neq g_rm_r, \text{ se } i \neq r$$

(pois $g_i, g_r \in E$ e $g_iM \cap g_rM = 0$).

Assim, temos uma única possibilidade, que é $g_im_j = g_im_i$. Daí, $m_j = m_i$. Dessa forma,

$$u = g_1m + \ldots + g_km.$$

Como $[G : S] = \infty$, existe $g_0 \in E$ tal que $g_0 \notin \{g_1, \ldots g_k\}$. Tomemos $g := g_0g_1^{-1}$. Do fato que $gu = u$ segue que

$$gg_1m + \ldots + gg_km = g_1m + \ldots + g_km,$$

daí, como $gg_1m \neq gg_rm$ se $r \neq 1$ e $gg_1m \neq 0$, deve existir algum $j \in \{1, \ldots, k\}$ de forma que $gg_1m = g_jm$. Logo,

$$g_j^{-1}gg_1m = 1_Gm \neq 0,$$

daí, $g_j^{-1}gg_1 \in S$ (pois $gM = M$ se $g \in S$). Mas $g_j^{-1}gg_1 = g_j^{-1}g_0$, de onde segue que $g_j^{-1}g_0 \in S$, para algum j, o que contradiz o fato que $g_o \notin \{g_1, \ldots, g_k\}$. Consequentemente nossa suposição inicial é falsa, portanto

$$(\text{Ind } \overset{G}{H}M)^G = 0.$$

■

A próxima proposição é conhecida como **Fórmula de Mackey** e será bastante utilizada nos capítulos finais desta dissertação.

Proposição 2.2.7 [***Fórmula de Mackey***] *Sejam S e T subgrupos de G e considere E um conjunto de representantes para as classes duplas SgT. Então, para qualquer RT-módulo M, ($R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$) existe um RG-isomorfismo,*

$$\text{Res } \overset{G}{S}\text{Ind } \overset{G}{T}M \simeq \bigoplus_{g \in E} \text{Ind } \overset{S}{S\cap gTg^{-1}}\text{Res } \overset{gTg^{-1}}{S\cap gTg^{-1}}gM.$$

Em particular, se T é normal em G e $T \subset S$ então, existe um RT-isomorfismo

$$\text{Res } \overset{G}{T}\text{Ind } \overset{G}{T}M \simeq \bigoplus_{g \in G/T} gM,$$

e no caso em que $T = \{1\}$ e L é um conjunto de representantes para as classes Sg, para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo tem-se

$$\text{Res } \overset{G}{S}\text{Ind } \overset{G}{\{1\}}M \simeq \bigoplus_{g \in L} \text{Ind } \overset{S}{\{1\}}gM.$$

Demonstração: [12], Capítulo III, Proposição 5.6. ■

Proposição 2.2.8 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Se M é um $\mathbb{Z}_2S$-módulo e N é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, então temos um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo*

$$N \otimes \text{Ind } \overset{G}{S}M \simeq \text{Ind } \overset{G}{S}(\text{Res } \overset{G}{S}N \otimes M),$$

onde o produto tensorial à esquerda tem a G-ação diagonal e o da direita a S-ação diagonal

Demonstração: [12], Capítulo III, Exercício 2(a), p. 71. ■

2.3 Os Grupos $H_*(G;M)$ e $H^*(G;M)$

Definição 2.3.1 *Sejam R um anel com unidade e*

$$\cdots \longrightarrow F_3 \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0,$$

ou mais simplesmente, $\varepsilon : F \to R$, uma resolução projetiva de R sobre RG (com R visto como um RG-módulo trivial) e M um RG-módulo (à esquerda). Considere os complexos de cadeias e cocadeias, respectivamente,

$$F \otimes_{RG} M : \cdots \to F_2 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_2} F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \to 0,$$

$$Hom_{RG}(F,M) : 0 \longrightarrow Hom_{RG}(F_0,M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(F_1,M) \xrightarrow{\delta^1} Hom_{RG}(F_2,M) \longrightarrow \cdots,$$

com o operador bordo dado por $\bar{\partial}_n := \partial_n \otimes id_M$ e o operador cobordo dado por $\delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1}$, para todo $f \in Hom_{RG}(F_n, M)$. Os n-ésimos ***grupos de homologia e cohomologia*** *de G (sobre R) com coeficientes em M são, para todo $n \in \mathbb{Z}$ definidos, respectivamente, por:*

$$\begin{aligned} H_n(G;M) &:= H_n(F \otimes_{RG} M) = \frac{\ker \bar{\partial}_n}{\operatorname{Im} \bar{\partial}_{n+1}}, \\ H^n(G;M) &:= H^n(Hom_{RG}(F,M)) = \frac{\ker \delta^n}{\operatorname{Im} \delta^{n-1}}. \end{aligned}$$

As coleções $\{H_n(G;M)\}_n$ e $\{H^n(G;M)\}_n$ são denominadas, respectivamente, ***homologia e cohomologia do grupo*** *G com coeficientes em M.*

Como já mencionado anteriormente, tem-se maior interesse quando M é um RG-módulo, onde $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$. Em geral, consideraremos o conceito de cohomologia de um grupo G com coeficientes em M, com M sendo um RG-módulo nessas condições.

A proposição seguinte relaciona os grupos de homologia e de cohomologia no nível 0, de um grupo G com coeficientes em um RG-módulo M, com os grupos invariantes e coinvariantes de M.

Proposição 2.3.1 *Seja M um RG-módulo. Temos:*
(i) $H_0(G;M) \simeq M_G$.
(ii) $H^0(G;M) \simeq M^G$.

Demonstração: (i) [12], Capítulo III, 1.5.

(ii) Seja

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de R sobre RG.

Pelo Teorema 1.4.4, temos que o funtor $Hom_{RG}(-,M)$ é exato à esquerda, logo a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_{RG}(R,M) \xrightarrow{\varepsilon^*} Hom_{RG}(F_0,M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(F_1,M) \longrightarrow \cdots$$

$$\uparrow_{\delta^{-1}}$$

$$0$$

é exata à esquerda, e daí, ε^* é monomorfismo e $\operatorname{Im}\varepsilon^* = \ker\delta^0$. Assim,

$$\begin{aligned} H^0(G;M) \quad &= \quad \frac{\ker\delta^0}{\operatorname{Im}\delta^{-1}} \simeq \ker\delta^0 = \operatorname{Im}\varepsilon^* \\ &\overset{Teo.\,Isom.}{\simeq} \quad \frac{Hom_{RG}(R,M)}{\ker\varepsilon^*} \overset{\varepsilon^*\ monomorf.}{\simeq} Hom_{RG}(R,M) \overset{Prop.2.1.1}{\simeq} M^G. \end{aligned}$$

Portanto, $H^0(G;M) \simeq M^G$. ■

Proposição 2.3.2 *Se G é um grupo e $(M_i)_{i\in I}$ uma família de RG-módulos, temos:*
(i) $H^0(G;\bigoplus_{i\in I} M_i) \simeq \bigoplus_{i\in I} H^0(G;M_i)$.

(ii) Se G é finitamente gerado então $H^1(G;\bigoplus_{i\in I} M_i) \simeq \bigoplus_{i\in I} H^1(G;M_i)$.

Demonstração: São casos particulares de um resultado mais geral apresentado em [10], Capítulo II, Proposição 2.4 (obtidos considerando em [10]: Exercício p. 23, Observação p. 19, Proposição. 2.1 e o fato que a soma direta é um limite direto de somas diretas finitas). ■

2.4 Aplicações Induzidas em (Co)homologia

Considere pares (G,M) e (G',M') com G, G' grupos, M um RG-módulo e M' um RG'-módulo ($R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$).

Uma aplicação de (G,M) em (G',M') é um par (β,φ) satisfazendo:
(i) $\beta : G \to G'$ é um homomorfismo de grupos.
(ii) $\varphi : M' \to M$ é um homomorfismo de RG-módulos tal que

$$\varphi(\beta(g)\cdot m') = g\cdot\varphi(m'),\ \forall g\in G \text{ e } \forall m'\in M'.$$

Se β e φ são isomorfismos, se diz que (G, M) e (G', M') são isomorfos e denota-se $(G, M) \simeq (G', M')$.

Dada uma aplicação $(\beta, \varphi) : (G, M) \to (G', M')$, considere $\varepsilon : F \to R$ uma resolução projetiva de R sobre RG e $\varepsilon' : F' \to R$ uma resolução projetiva de R sobre RG'.

Temos que $\varepsilon' : F' \to R$ também é uma resolução projetiva de R sobre RG (via β), pois cada F'_n pode ser considerado um RG-módulo com a G-ação

$$\begin{array}{rccl} * : & G \times F'_n & \to & F'_n \\ & (g, y) & \mapsto & g * y := \beta(g) \cdot y \quad \text{(ação de } G\text{' em } F\text{')} \ . \end{array}$$

Mais precisamente, F'_n é visto como RG-módulo por restrição de escalares considerando o homomorfismo (que também será denotado por β)

$$\beta : RG \to RG'$$

tal que associa a cada $g \in RG$ o elemento $\beta(g)$ e estendido linearmente. Daí pela unicidade de resoluções, existe uma aplicação

$$\tau : F \to F',$$

única a menos de homotopia (equivalência de homotopia). Temos que,

$$\tau(g \cdot x) = g\tau(x), \ \forall g \in G \text{ e } \forall x \in F \text{ (pois } \tau \text{ é uma aplicação de } RG\text{-módulos).}$$

Para cada $n \geq 0$, se consideramos, $\tau_n : F_n \to F'_n$, e $\varphi : M' \to M$, podemos considerar a aplicação

$$Hom(\tau_n, \varphi) : Hom_{RG'}(F'_n, M') \to Hom_{RG}(F_n, M); \ f_n \mapsto \varphi \circ f \circ \tau_n.$$

Assim, temos uma aplicação entre os complexos,

$$\begin{array}{rccc} Hom(\tau, \varphi) : & Hom_{RG'}(F', M') & \to & Hom_{RG}(F, M) \\ & f & \mapsto & \varphi \circ f \circ \tau, \end{array}$$

a qual é uma aplicação de cadeias que induz um homomorfismo bem definido (chamado **homomorfismo induzido em cohomologia**):

$$\begin{array}{rccc} Hom((\tau, \varphi))^* = (\beta, \varphi)^* : & H^*(G', M') & \to & H^*(G, M) \\ & [f] & \mapsto & [\varphi \circ f \circ \tau]. \end{array}$$

Em particular, considerando $G = G'$, $\beta = id_G : G \to G$ e $\varphi : M' \to M$ obtemos

$$(id_G, \varphi)^* : H^*(G, M') \to H^*(G, M); \qquad [f] \mapsto [\varphi \circ f].$$

Por simplicidade de notação, estamos usando o mesmo símbolo para representar classes diferentes.

A aplicação induzida em cohomologia $(\beta, \varphi)^*$ satisfaz as seguintes propriedades:
(i) Se $\beta = id_G : G \to G$ e $\varphi = id_M : M \to M$ então $(\beta, \varphi)^* : id_{H^*(G,M)}$.
(ii) Dadas as aplicações $(\beta, \varphi) : (G, M) \to (G', M')$ e $(\beta', \varphi') : (G', M') \to (G'', M'')$, $(\beta, \varphi)^* \circ (\beta', \varphi')^* = (\beta' \circ \beta, \varphi \circ \varphi')^* \overset{not.}{=} ((\beta', \varphi') \circ (\beta, \varphi))^*$.

Notações especiais:

1. $(\beta, id_M)^* = \beta^*$.
2. $(id_G, \varphi)^* \overset{not.}{=} H^*(G, \varphi)$ ou simplesmente φ^* (quando não houver confusão).

Analogamente para a homologia, vamos considerar pares (G, M) e (G', M') com G, G' grupos, M um RG-módulo e M' um RG'-módulo. Uma aplicação de (G, M) em (G', M') é um par (β, φ), onde $\beta : G' \to G$ é um homomorfismo de grupos e $\varphi : M \to M'$ é um homomorfismo de RG-módulos considerando M' um RG-módulo via β, isto é, um homomorfismo de RG-módulos satisfazendo: $\varphi(g * m) = \beta(g) \cdot \varphi(m)$.

Sejam ε e ε' resoluções projetivas de R sobre RG e RG', respectivamente. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente, temos que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \to F'$, única a menos de homotopia.

Ainda, $\tau(g \cdot x) = g * \tau(x) = \beta(g) \cdot \tau(x)$, pois τ é homomorfismo de RG-módulos. Considere, agora:

$$\begin{array}{rccc} \tau \otimes \varphi : & F \otimes_{RG} M & \to & F' \otimes_{RG'} M' \\ & x \otimes m & \mapsto & \tau(x) \otimes \varphi(m). \end{array}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $F \otimes_{RG} M$ e $F' \otimes_{RG'} M'$, daí, $\tau \otimes \varphi$ induz uma aplicação bem definida:

$$\begin{array}{rccc} H_*(\beta, \varphi) \overset{not.}{=} (\beta, \varphi)_* : & H_*(G, M) & \to & H_*(G', M') \\ & [x \otimes m] & \mapsto & [(\tau \otimes \varphi)(x \otimes m)] = [\tau(x) \otimes \varphi(m)]. \end{array}$$

Pode-se verificar que:
(i) Se $M = M'$, $G = G'$, $\beta = id_G$ e $\varphi = id_M$, então $(\beta, \varphi)_* = id_{H_*(G,M)}$.
(ii) Se $(\beta, \varphi) : (G, M) \to (G', M')$ e $(\beta', \varphi') : (G', M') \to (G'', M'')$, então

$$(\beta', \varphi')_* \circ (\beta, \varphi)_* = (\beta' \circ \beta, \varphi' \circ \varphi)_* \overset{not.}{=} ((\beta', \varphi') \circ (\beta, \varphi))_*.$$

Observação 2.4.1 *Os homomorfismos induzidos, definidos para homologia e cohomologia, são casos particulares de homomorfismos induzidos em complexos de cadeias e cocadeias dados na Definição* 1.1.11 *e na Definição* 1.1.14.

Proposição 2.4.1 *Seja*

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0$$

uma sequência exata de RG-módulos. Temos:
(i) Para todo inteiro n existe uma aplicação $\partial : H_n(G; M'') \to H_{n-1}(G; M')$ *tal que a sequência*

$$\cdots \to H_1(G; M) \xrightarrow{j_1} H_1(G; M'') \xrightarrow{\partial} H_0(G; M') \xrightarrow{i_0} H_0(G; M) \xrightarrow{j_0} H_0(G; M'') \to 0$$

é exata, onde as aplicações i_k *e* j_k *são induzidas por i e j respectivamente, em cada nível de homologia e* ∂ *é o homomorfismo conexão em homologia* (*Definição* 1.1.12).
(ii) Para todo inteiro n existe uma aplicação $\delta : H^n(G; M'') \to H^{n+1}(G; M')$ *tal que a sequência*

$$0 \to H^0(G; M') \xrightarrow{i^0} H^0(G; M) \xrightarrow{j^0} H^0(G; M'') \xrightarrow{\delta} H^1(G; M') \xrightarrow{i^1} H^1(G; M) \xrightarrow{j^1} \cdots$$

é exata, onde as aplicações i^k *e* j^k *são induzidas por i e j respectivamente, em cada nível de cohomologia e* ∂ *é o homomorfismo conexão em cohomologia* (*Definição* 1.1.15).

Demonstração: Seja

$$F : \cdots \to F_n \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to R \to 0$$

uma resolução projetiva de R sobre RG.

(i) Como cada F_n é RG-projetivo, pelo Lema 1.4.2, F_n é RG-plano. Então,

$$0 \to M' \otimes_{RG} F_n \to M \otimes_{RG} F_n \to M'' \otimes_{RG} F_n \to 0$$

é exata para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, temos a seguinte sequência exata de complexo de cadeias:

$$0 \to M' \otimes_{RG} F \to M \otimes_{RG} F \to M'' \otimes_{RG} F \to 0.$$

Logo, pela Proposição 1.1.2, temos a sequência exata longa de homologia:

$$\cdots \to H_1(M'' \otimes_{RG} F) \xrightarrow{\delta} H_0(M' \otimes_{RG} F) \to H_0(M \otimes_{RG} F \to H_0(M'' \otimes_{RG} F) \to 0$$

que nos fornece a sequência desejada.

(ii) Analogamente, como os $F_n's$ são RG-projetivos, temos pelo Teorema 1.4.6 que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, a sequência

$$0 \to Hom_{RG}(F_n, M') \to Hom_{RG}(F_n, M) \to Hom_{RG}(F_n, M'') \to 0$$

é exata e assim temos a sequência exata curta de complexos de cocadeias:

$$0 \to Hom_{RG}(F, M') \to Hom_{RG}(F, M) \to Hom_{RG}(F, M'') \to 0$$

que nos fornece, pela Proposição 1.1.4, a sequência exata longa em cohomologia. ■

Aplicação Restrição

Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RG-módulo. Vimos que M pode ser visto como RS-módulo por restrição de escalares e denotamos por $\mathrm{Res}\,^G_S M$.

Considere $\varepsilon : F \to R$ e $\varepsilon' : F' \to R$ resoluções projetivas de R sobre RS e RG respectivamente. Neste caso, se na aplicação induzida em cohomologia consideramos no lugar de G o subgrupo S, no lugar de G' o grupo G, $M = \mathrm{Res}\,^G_S M$, $M' = M$ e a inclusão $\beta : S \to G$, obtemos a seguinte aplicação induzida:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{res}\,^G_{S,M} \overset{not.}{=} (\beta, id_M)^* : & H^*(G,M) & \to & H^*(S,M) = H^*(S, \mathrm{Res}\,^G_S M) \\ & [f] & \mapsto & [id \circ f \circ \tau]. \end{array}$$

Por restrição, $\varepsilon' : F' \to R$ também é uma resolução projetiva de R sobre RS e como os grupos de cohomologia independem da resolução, podemos tomar $F = F'$ e consequentemente $\tau : F \to F'$ como sendo a identidade. Dessa forma

$$\mathrm{res}\,^G_{S,M}([f]) = [id \circ f \circ \tau] = [f],$$

com f vista no primeiro membro como aplicação de RG-módulos e no segundo como aplicação de RS-módulos.

Observação 2.4.2 *Se G é um grupo, S e H são subgrupos de G com $S \subset H$, podemos considerar*

$$H^*(G;M) \overset{\mathrm{res}\,^G_H}{\to} H^*(H;M) \overset{\mathrm{res}\,^H_S}{\to} H^*(S;M),$$

e tem-se $\mathrm{res}\,^G_S = \mathrm{res}\,^H_S \circ \mathrm{res}\,^G_H$, *de modo que* $\ker \mathrm{res}\,^G_H \subset \ker \mathrm{res}\,^G_S$.

Definição 2.4.1 *A aplicação* $\mathrm{res}\,^G_{S,M}$ *que acabamos de definir é denominada* ***aplicação restrição*** *e quando não houver dúvidas com respeito ao RG-módulo M em questão, será denotada simplesmente por* $\mathrm{res}\,^G_S$.

Observação 2.4.3 *Também pode-se definir a aplicação induzida em homologia pela inclusão $\beta : S \to G$, denominada* ***aplicação corestrição****.*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{cor}\,{}^{G}_{S,M} \overset{not.}{=} (\beta, id_M)_* : & H_*(S,M) & \to & H_*(G,M) \\ & [x \otimes_{RS} m] & \mapsto & [x \otimes_{RG} m]. \end{array}$$

2.5 Lema de Shapiro

O Lema de Shapiro, apresentado a seguir, tem como objetivo relacionar (sob certas condições) a cohomologia de um grupo com a de seu subgrupo.

Proposição 2.5.1 [***Lema de Shapiro***] *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RS-módulo (à esquerda) ($R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$). Considere a inclusão $i : S \to G$, $\pi : \mathrm{Coind}\,{}^{G}_{S}M \to M$ dada por $\pi(f) = f(1), \forall f \in \mathrm{Coind}\,{}^{G}_{S}M$ e $\varphi : M \to \mathrm{Ind}\,{}^{G}_{S}M$ definida por $\varphi(m) = 1 \otimes m, \forall m \in M$. Então, as aplicações induzidas*

$$(i,\varphi)_* : H_*(S;M) \to H_*(G; \mathrm{Ind}\,{}^{G}_{S}M) \quad e \quad (i,\pi)^* : H^*(G; \mathrm{Coind}\,{}^{G}_{S}M) \to H^*(S;M)$$

são isomorfismos.

Demonstração: Provaremos que $(i,\pi)^*$ é um isomorfismo. A demonstração que $(i,\varphi)_*$ também é isomorfismo segue com um raciocínio similar ao que faremos aqui.

Considere

$$\varepsilon : \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \longrightarrow R \quad \text{e} \quad \varepsilon' : \cdots \longrightarrow F'_1 \xrightarrow{\partial'_1} F'_0 \longrightarrow R,$$

ou simplesmente, $\varepsilon : F \longrightarrow R$ e $\varepsilon' : F' \longrightarrow R$, resoluções projetivas de R sobre RS e RG respectivamente. Temos que $\varepsilon' : F' \longrightarrow R$ também é uma resolução projetiva de R sobre RS e como os grupos de cohomologia independem da resolução, podemos considerar $F = F'$ e, a aplicação de cadeias $\tau : F \to F' = F$ como sendo a identidade, isto é, $\tau = id_F$. Assim

$$\begin{array}{rccc} (i,\pi)^* : & H^*(G; \mathrm{Coind}\,{}^{G}_{S}M) & \to & H^*(S;M) \\ & [f] & \mapsto & [\pi \circ f \circ id_F] = [\pi \circ f], \end{array}$$

onde $f \in Hom_{RG}(F, \mathrm{Coind}\,{}^{G}_{S}M)$ e $\pi \circ f \in Hom_{RS}(F,M)$. Agora, para cada $n \geq 0$, considere

$$\begin{array}{rccc} \phi_n : & Hom_{RG}(F_n, \mathrm{Coind}\,{}^{G}_{S}M) & \to & Hom_{RS}(F_n,M) \\ & f & \mapsto & \phi_n(f) = \pi \circ f. \end{array}$$

Observe que,

$$(\pi \circ f)(sx) = s(\pi \circ f)(x), \text{ para todos } s \in S \text{ e } x \in F_n.$$

De fato, pela definição de π, temos que $(\pi \circ f)(sx) = f(sx)(1)$, como $f \in Hom_{RG}(F, \text{Coind}\,{}_S^G M)$ e $s \in S \subseteq G$, segue que $f(sx) = (s \cdot f(x))$, daí, pela G-ação (à esquerda) no $\text{Coind}\,{}_S^G M$, vem que

$$(s \cdot f(x))(1) = f(x \cdot s) = f(x)(s) = f(x)(s \cdot 1)$$

e usando o fato de que $f(x) \in \text{Coind}\,{}_S^G M$, temos

$$f(x)(s \cdot 1) = s(f(x)(1)) = s \cdot (\pi \circ f)(x),$$

de onde segue a igualdade desejada. Logo, $\phi_n(f) = \pi \circ f \in Hom_{RS}(F_n, M)$.

Ainda temos que ϕ_n é um isomorfismo. Para verificarmos este fato, basta considerarmos

$$\begin{array}{rccl} \psi_n: & Hom_{RS}(F_n, M) & \to & Hom_{RG}(F_n, \text{Coind}\,{}_S^G M) \\ & \rho & \mapsto & \psi_n(\rho);\ \psi_n(\rho)(x)(g) := \quad \rho(g \cdot x),\ \forall x \in F_n \ \ e\ g \in G. \end{array}$$

Temos:

- ψ_n está bem definida. De fato, observe que

$$\psi_n(\rho)(x) \in \text{Coind}\,{}_S^G M = Hom_{RS}(RG, M),\ \text{pois}$$

$$\psi_n(\rho)(x)(g) = \rho(g \cdot x),\ \forall g \in RG \text{ e } \rho \in Hom_{RS}(F_n, M).$$

  Também ψ_n é um RG-homomorfismo, isto é,

$$\begin{array}{rcl} \psi_n(\rho)(g_1 \cdot x) & = & (g_1 \cdot \psi_n(\rho))(x),\ \forall g_1 \in G \text{ e } \forall x \in F_n,\ \text{pois} \\ (\psi_n(\rho)(g_1 \cdot x))(g) & \overset{def.\,\psi_n}{=} & \rho(g(g_1 \cdot x)) = \rho(g \cdot g_1 x) \text{ e} \\ (g_1 \psi_n(\rho)(x))(g) & \overset{\text{ação no Coind}\,{}_S^G M}{=} & \psi_n(\rho)(x)(g \cdot g_1) \overset{def.\,\psi}{=} \rho((g \cdot g_1)x) = \rho(g \cdot g_1 \cdot x). \end{array}$$

- $\psi_n \circ \phi_n = id_{Hom_{RG}(F_n, \text{Coind}\,{}_S^G M)}$. De fato,

$$\forall f \in Hom_{RS}(F_n, \text{Coind}\,{}_S^G M),\ (\psi_n \circ \phi_n)(f) = \psi_n(\phi_n(f)) = \psi_n(\pi \circ f).$$

  Mas, para quaisquer $x \in F_n$ e $g \in G$, temos que

$$\begin{array}{rcl} \psi_n(\pi \circ f)(x)(g) & \overset{def.\,\psi_n}{=} & (\pi \circ f)(g \cdot x) = \pi(f(g \cdot x)) \\ & \overset{def.\,\pi}{=} & f(g \cdot x)(1) \overset{f:RG-Hom.}{=} (gf(x))(1) \\ & \overset{\text{ação no Coind}\,{}_S^G M}{=} & f(x)(1 \cdot g) = f(x)(g). \end{array}$$

Assim, $(\psi_n \circ \phi_n)(f) = f$.

- $\phi_n \circ \psi_n = id_{Hom_{RS}(F_n,M)}$. De fato, $\forall \rho \in Hom_{RS}(F_n, M)$ e $x \in F_n$,

$$(\phi_n \circ \psi_n)(\rho)(x) = \phi_n(\psi_n(\rho)(x)) = \pi \circ (\psi_n(\rho)(x)) = \psi_n(\rho)(x)(1) = \rho(1 \cdot x) = \rho(x),$$

logo, $(\phi_n \circ \psi_n)(\rho) = \rho$.

Agora, considere os complexos de cocadeias

$$C := \{C^n : Hom_{RG}(F_n, \text{Coind}\,{}_S^G M)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ e } D := \{D^n : Hom_{RS}(F_n, M)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Seja $\phi = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a família das aplicações $\phi_n : C^n \to D^n$, definidas anteriormente, que indicamos no diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
C^n & \xrightarrow{\phi_n} & D^n \\
{\scriptstyle \widetilde{\delta}^n}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta^n} \\
C^{n+1} & \xrightarrow{\phi_{n+1}} & D^{n+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

onde δ^n e $\widetilde{\delta}^n$ são operadores cobordos (como na Definição 2.3.1). Temos que ϕ é uma aplicação de cocadeias, isto é,

$$\delta^n \circ \phi_n = \phi_{n+1} \circ \tilde{\delta^n},$$

pois

$$(\delta^n \circ \phi_n)(f) = \delta^n(\pi \circ f) = (\pi \circ f) \circ \partial_{n+1} \text{ e}$$

$$(\phi_{n+1} \circ \tilde{\delta}^n)(f) = \phi_{n+1}(f \circ \partial_{n+1}) = \pi \circ (f \circ \partial_{n+1}) = (\pi \circ f) \circ \partial_{n+1}.$$

Consequentemente, $\phi : Hom_{RG}(F, \text{Coind}\,{}_S^G M) \to Hom_{RS}(F, M)$ induz um isomorfismo

$$\begin{array}{rccc}
\phi^* : & H^*(C) & \to & H^*(D) \\
& [f] & \mapsto & \phi^*([f]) = [\pi \circ f] = (i, \pi)^*([f]).
\end{array}$$

Mas, $H^*(C) = H^*(G; \text{Coind}\,{}_S^G M)$ e $H^*(D) = H^*(S; M)$, portanto

$$\phi^* = (i, \pi)^* : H^*(G; \text{Coind}\,{}_S^G M) \to H^*(S; M)$$

é um isomorfismo. ■

Observação 2.5.1 *Os isomorfismos dados na proposição anterior são denominados* ***isomorfismos de Shapiro****.*

Proposição 2.5.2 [***Lema de Shapiro - 2ª versão***] *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RG-módulo. Então:*
(i) $H_*(S; \operatorname{Res}_S^G M) \simeq H_*(G; R(G/S) \otimes_R M)$.
(ii) $H^*(S; \operatorname{Res}_S^G M) \simeq H^*(G; Hom_R(R(G/S), M))$.

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 2.2.2 e do Corolário 2.2.1. ■

2.6 Exemplos de Grupos de Cohomologia

Vejamos agora o cálculo do grupo de cohomologia de alguns grupos particulares.

Exemplo 2.6.1 *Vamos calcular $H^n(G; M)$, onde M é um RG-módulo, para casos especiais do grupo G.*

1. *Sejam $G = \{1\}$ e M um RG-módulo. Dessa forma, temos que $RG = R$, $\varepsilon = id_R$ e*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de R sobre RG.

Aplicando o funtor $Hom_R(-, M)$ na sequência anterior, obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow Hom_R(R, M) \longrightarrow 0.$$

Mas $Hom_R(R, M) \overset{Prop.1.3.4}{\simeq} M$, de modo que esse complexo se reduz a

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$H^n(\{1\}; M) \simeq \begin{cases} M^{\{1\}} \simeq M, & se\ n = 0, \\ 0, & se\ n > 0. \end{cases}$$

2. *Sejam $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$, o grupo cíclico infinito e M um RG-módulo. Então*

$$H^n(G; M) \simeq \begin{cases} M^G, & se\ n = 0, \\ M_G, & se\ n = 1, \\ 0, & se\ n \geq 2. \end{cases}$$

De fato, vimos que a sequência

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} 0,$$

com ε a aplicação aumentação ($\varepsilon(\sum r_k t^k) = \sum r_k$) e ∂ a multiplicação por $(t-1)$, é uma resolução livre (portanto, projetiva) de R sobre RG (Exemplo 1.4.2). Aplicando o funtor $Hom_{RG}(-, M)$, temos:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} Hom_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^1=0} 0,$$

com δ^0 a multiplicação por $(t-1)$, pois

$$\delta^0(f)(x) = (f \circ \partial)(x) = f((t-1)(x)) = (t-1)f(x),$$

para todo $f \in Hom_{RG}(RG, M)$ e todo $x \in RG$. Como $Hom_{RG}(RG, M) \simeq M$, a sequência anterior é equivalente a

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} M \xrightarrow{\delta^0=t-1} M \xrightarrow{\delta^1=0} 0.$$

Assim,

$$H^1(G; M) = \frac{\ker(\delta^1)}{\text{Im}\,(\delta^0)} = \frac{M}{(t-1)M} \simeq M_G \text{ e } H^n(G; M) = 0, \text{ para } n \geq 2.$$

Logo,

$$H^n(G; M) \simeq \begin{cases} M^G, & \text{se } n = 0\,(Prop.2.3.1), \\ M_G, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Calculemos os grupos de cohomologia de $G \simeq \mathbb{Z}$ para alguns módulos particulares.

(i) *Se M é um RG-módulo trivial então,*

$$H^0(G; M) = M = H^1(G; M) \text{ e } H^n(G; M) = 0, \text{ para } n \geq 2.$$

(ii) *Seja $M = \mathbb{Z}G$ visto como $\mathbb{Z}G$-módulo com a G-ação natural: $t^k \cdot (rt^{k'}) := rt^{k+k'}$, para todos t^k, $t^{k'} \in G$ e $r \in R$. Então*

$$H^0(G; \mathbb{Z}G) \simeq (\mathbb{Z}G)^G \simeq 0 \text{ (pois } t^k \cdot t^{k'} \neq t^k \text{ se } t^k \neq 1).$$

Determinemos $H^1(G; \mathbb{Z}G) \simeq (\mathbb{Z}G)_G$. Denotemos por $I = \langle t^k \cdot z - z;\, t^k \in G, z \in \mathbb{Z}G \rangle$ e

$\overline{x} = x + I \in \dfrac{\mathbb{Z}G}{I} = (\mathbb{Z}G)_G$. *Considere* $y = t^k \in \mathbb{Z}G$ *com* $k > 0$. *Como*

$$t^k - 1 = (t-1)(t^{k-1} + \ldots + 1) \in I,$$

segue que

$$\overline{t^k - 1} = \overline{0} \text{ e assim, } \overline{y} = \overline{t^k} = \overline{1}.$$

Agora, se $y = t^{-k} \in \mathbb{Z}G$, *com* $k > 0$, *também temos*

$$\overline{y} = \overline{t^{-k}} = \overline{1},$$

pois

$$t^{-k} = (1 - t^k)t^{-k} + 1 \quad e \quad \overline{1 - t^{-k}} = \overline{1 - (1 - t^k)t^{-k} - 1} = \overline{(t^k - 1)t^{-k}} = \overline{0}.$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{Z}G$,

$$x = r_0 t^k + r_1 t^{k+1} + \ldots + r_n t^{k+n} \, (\text{com } k \in \mathbb{Z},\ n \geq 0 \text{ e } r_i \in \mathbb{Z}),$$

temos $\overline{x} = \overline{(r_0 + r_1 + \ldots + r_n)} = r\overline{1}$, *onde* $r = r_0 + r_1 + \ldots + r_n \in \mathbb{Z}$. *Então,*

$$H^1(G; \mathbb{Z}G) \simeq \{r\overline{1},\ r \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}\overline{1} \simeq \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$H^n(G; \mathbb{Z}G) \simeq \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(iii) *Se* $M = \mathbb{Z}_2G$ *é visto como* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo com a* G*-ação:* $t^k \cdot (1 \cdot t^{k'}) := 1 \cdot t^{k+k'}$, $1 \in \mathbb{Z}_2$, t^k, $t^{k'} \in G$, *então, como no caso anterior,*

$$H^1(G; \mathbb{Z}_2G) \simeq \langle 1 + I \rangle .$$

Mas, agora temos que $\langle 1 + I \rangle = \{0 + I, 1 + I\} \simeq \mathbb{Z}_2$. *Assim,*

$$H^n(G; \mathbb{Z}_2G) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}_2G)^G \simeq 0, & \text{se } n = 0, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

3. Seja, $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$ e M um RG-módulo. Vimos que a sequência

$$\ldots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0,$$

tal que ε é aplicação aumentação e $t-1$ e N denotam, respectivamente, a multiplicação por $t-1$ e $1+t+\ldots+t^{n-1}$, é uma resolução livre (portanto projetiva) de R sobre RG (Exemplo 1.4.1). Aplicando o funtor $Hom_{RG}(-, M)$, temos:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} Hom_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^1} Hom_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta^2} \ldots,$$

sendo que $\delta^n(f)(x) := (f \circ \partial_{n+1})(x)$ com $\partial_{n+1} = t-1$ se n é par e $\partial_{n+1} = N$ se n é ímpar. Como $Hom_{RG}(RG, M) \simeq M$, segue que a sequência acima é equivalente a

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} M \xrightarrow{\delta^0} M \xrightarrow{\delta^1} M \xrightarrow{\delta^2} \ldots,$$

onde $\delta^{2k} = t-1$ e $\delta^{2k+1} = N$, $k \geq 0$. Portanto,

$$H^n(G; M) \simeq \begin{cases} M^G, & \text{se } n = 0, \\ \dfrac{\ker(N)}{\mathrm{Im}\,(t-1)} = \dfrac{\ker(N)}{(t-1)M}, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ \dfrac{\ker(t-1)}{\mathrm{Im}\,(N)} = \dfrac{M^G}{N \cdot M}, & \text{se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

Finalizamos esta seção com o cálculo dos grupos de cohomologia de $G \simeq \mathbb{Z}_n$ para alguns casos particulares.

(i) *Se M é um RG-módulo trivial, então*

$$(t-1)m = tm - m = 0 \text{ e } (1+t+\ldots+t^{n-1})m = m + tm + \ldots + t^{n-1}m = n \cdot m, \ \forall m \in M,$$

ou seja, $t-1$ é o homomorfismo nulo e N é a multiplicação por n. Assim,

$$H^n(G; M) \simeq \begin{cases} M, & \text{se } n = 0, \\ \ker(N), & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ \frac{M}{N \cdot M}, & \text{se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

Em particular, para $M = \mathbb{Z}$, com a G-ação trivial, obtemos

$$H^n(G;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ \frac{\mathbb{Z}}{n\cdot\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_n, & \text{se } n \text{ é par, } n \geq 2. \end{cases}$$

(ii) *Se* $G = \{1, t\} \simeq \mathbb{Z}_2$ *e* $M = \mathbb{Z}$ *é visto com um* $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_2)$*-módulo com a* G*-ação* $1 \cdot r := r$ *e* $t \cdot r = -r$*, para todo* $r \in \mathbb{Z}$*, temos que*

$$(t-1)\cdot r = t\cdot r - 1\cdot r = -r - r = -2r$$

e

$$(1+t)\cdot r = 1\cdot r + t\cdot r = r - r = 0,$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$*. Assim,*

$$\begin{aligned} \ker(N) &= \ker(1+t) = \mathbb{Z},\ \text{Im}\,(1+t) = (1+t)\mathbb{Z} = 0, \\ \ker(t-1) &= 0 \text{ e } \text{Im}\,(t-1) = (t-1)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo,

$$H^n(\mathbb{Z}_2;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_2} = 0, & \text{se } n = 0, \\ \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ 0, & \text{se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

2.7 Interpretação Topológica para (Co)homologia de Grupos

Nesta seção, vamos apresentar brevemente uma relação entre a (co)homologia de um grupo G e a (co)homologia de um espaço topológico particular, denominado $K(G,1)$-complexo. Antes de apresentar tal resultado, é necessário apresentar alguns conceitos topológicos, tais como segue:

CW-Complexos

Definição 2.7.1 *Seja* X *um espaço de Hausdorff, dizemos que* X *admite uma estrutura de* CW***-complexo*** *se possui uma coleção de subconjuntos fechados* σ_j^q *(onde* q *representa dimensão* $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ *e* j *varia sobre um conjunto de índices* J_q*), e uma família de subespaços fechados* $X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^q \subset \ldots$*, com*

$$X^q = \bigcup_{\substack{p \leq q \\ j \in J_p}} \sigma_j,$$

(por definição $X^{-1} = \emptyset$*), e fronteira dada por* $f_q^j = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\sigma_i^p - f_i^p$ *intersecta* $\sigma_j^q - f_j^q$ *somente quando* $p = q$ *e* $i = j$*.*

(ii) $X = \bigcup_q X^q$.
(iii) Para cada σ_j^q, *existe uma aplicação característica* $\phi_j^q : D^q \to \sigma_j^q$ (*onde* D^q *é o disco de dimensão* q) *que leva* S^{q-1} (*esfera de dimensão* $q-1$) *sobre* f_j^q , *e aplica* $D^q - S^{q-1}$ *homeomorficamente sobre* $\sigma_j^q - f_j^q$ (S^{-1} *é o conjunto vazio*).
(iv) f_j^q *intersecta um número finito de conjuntos* $(\sigma_i^q - f_i^q)$, $i \in J_q$.
(v) Um subconjunto Y *de* X *é fechado se* $Y \cap \sigma_j^q$ *é fechado em* σ_j^q, $\forall q$ *e* $\forall j \in J_q$, *onde* σ_j^q *possui a topologia quociente de* D^q (*via* ϕ_j^q).

$K(G,1)$-Complexos

Definição 2.7.2 *Seja* X *um CW-complexo tal que:*
(i) X *é conexo.*
(ii) $\pi_1(X) = G$.
(iii) $\pi_n(X) = 0$, $\forall n \geq 2$.

Nestas condições, se diz que X *é um* ***complexo de Eilenberg-MacLane do tipo*** $(G,1)$ *ou simplesmente,* $K(G,1)$***-complexo***.

Exemplo 2.7.1 *Seja* $G = F(S)$, *o grupo livre gerado por um conjunto* S. *Considere* $X = \bigvee_{s\in S} S_s^1$ (*bouquet de círculos indexados pelo conjunto* S), *então* X *é um* $K(G,1)$*-complexo. Veja os detalhes em* [*12*], *Capítulo I. Exemplo 4.3, p. 16.*

Proposição 2.7.1 [***Interpretação Topológica para*** $H_*(G;M)$ ***e*** $H^*(G;M)$] *Sejam* G *um grupo,* X *um* $K(G,1)$*-complexo e* M *um* RG*-módulo, então*

$$\begin{aligned} H_*(G;M) &\simeq H_*(X;\mathcal{M}) \text{ e} \\ H^*(G;M) &\simeq H^*(X;\mathcal{M}), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{M}$ *é o sistema de coeficientes locais sobre* X *associado ao* RG*-módulo* M ([*15*]). *Em particular, se* M *é um* RG*-módulo trivial, então*

$$\begin{aligned} H_*(G;M) &\simeq H_*(X;M) \text{ e} \\ H^*(G;M) &\simeq H^*(X;M), \end{aligned}$$

Demonstração: [12], Capítulo III, p. 59 ou [18], Teorema 10.7.14c, p. 461. ■

Observação 2.7.1 *Dado um grupo* G, *sempre existe um* $K(G,1)$*-complexo* (*Veja* [*12*], *Teorema 7.1, p. 205*).

Exemplo 2.7.2 *Considere o bouquet de círculos* $X = \bigvee_{s\in S} S^1$. *Pelo Exemplo* 2.7.1, X *é um* $K(G,1)$*-complexo, onde* $G = F(S)$ *é o grupo livre gerado pelo conjunto* S. *Assim, se* $M = \mathbb{Z}$, *então pela proposição anterior*

$$H_n(F(S)) \simeq H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & se\ n = 0, \\ \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}, & se\ n = 1, \\ 0, & se\ n \geq 2, \end{cases}$$

e

$$H^n(F(S)) \simeq H^n(X) = \begin{cases} \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}, & se\ n = 0, \\ \mathbb{Z}, & se\ n = 1, \\ 0, & se\ n \geq 2. \end{cases}$$

Note que X é um CW-complexo de dimensão 1, logo não possui células de dimensão maior que 1. Portanto $H_n(X) = 0 = H^n(X)$ para $n \geq 2$.

2.8 Derivações de Grupos e sua relação com $H^1(G; M)$

Nesta seção apresentamos uma interpretação para $H^1(G; M)$, onde M é um RG-módulo, em termos de derivações de grupos. Derivações de grupos serão também utilizadas em resultados sobre decomposição de grupos (Proposição 3.1.3 e Proposição 3.1.4 do capítulo seguinte).

Sejam G um grupo e M um RG-módulo.

Definição 2.8.1 *Uma* ***derivação*** *de* G *em* M *é uma aplicação* $d : G \to M$, *com a seguinte propriedade*

$$d(gh) = d(g) + gd(h),\ \forall g, h \in G.$$

Exemplo 2.8.1 *Para cada* $m \in M$, *a aplicação*

$$d_m : G \to M;\ d_m(g) := gm - m$$

é uma derivação. De fato, sejam g, $h \in G$. *Temos:*

$d_m(gh) = ghm - m$ *e* $d_m(g) + gd_m(h) = gm - m + g(hm - m) = gm - m + ghm - gm = ghm - m$.

Definição 2.8.2 *As derivações dadas no exemplo anterior são denominadas* ***derivações principais***.

Definição 2.8.3 *Considere $M = RG$. A aplicação $d : G \to RG$ dada por*

$$d(w) := w - 1,\ w \in G$$

é uma derivação principal denominada ***derivação interna****.*

Note que $d = d_1$, sendo $1 = 1 \cdot 1_G \in RG$.

Notação: $Der(G,M) = \{d : G \to M;\ d \text{ é derivação}\}$ denota o conjunto das derivações de G em M e $P(G,M) = \{d_m,\ m \in M\}$ denota o conjunto das derivações principais de G em M, sendo G um grupo e M um RG-módulo.

Proposição 2.8.1 *Sejam G um grupo, M um RG-módulo e $d \in Der(G,M)$. Então:*
(i) $d(1_G) = 0$.
(ii) $d(g) = -gd(g^{-1})$, $\forall g \in G$.

Demonstração: Seja $d \in Der(G,M)$.
(i) $d(1_G) = d(1_G \cdot 1_G) = d(1_G) + 1_G d(1_G) = d(1_G) + d(1_G)$. Logo, $d(1_G) = 0$.
(ii) $d(g \cdot g^{-1}) = d(1_G) = 0$. Mas, $d(g \cdot g^{-1}) = d(g) + gd(g^{-1})$. Logo

$$d(g) + gd(g^{-1}) = 0, \text{ ou seja } d(g) = -gd(g^{-1}).$$

■

Note que se $M = \mathbb{Z}_2 G$, $d(g) = gd(g^{-1})$.

O próximo resultado fornece uma relação entre o conceito de derivação de grupos, que acabamos de estudar, com o grupo de cohomologia absoluta de ordem 1 de um grupo G com coeficientes em um RG-módulo M.

Proposição 2.8.2 *Sejam G um grupo e M um RG-módulo. Então*

$$H^1(G;M) \simeq \frac{Der(G,M)}{P(G,M)}.$$

Demonstração: [12], Capítulo III, Exercício 2, p. 60. ■

2.9 Grupos de Dualidade

Nesta seção faremos um breve estudo sobre dualidade de grupos. Nosso objetivo aqui é apresentar apenas alguns conceitos e resultados que serão utilizados posteriormente, em resultados envolvendo $E(G,W,\mathbb{Z}_2)$ e dualidade.

Definição 2.9.1 *Um grupo G é denominado grupo* ***do tipo*** FP ***sobre*** R *se existe uma resolução projetiva de R sobre RG de comprimento finito,*

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to R \to 0,$$

com F_i finitamente gerado para todo i.

Definição 2.9.2 *Um grupo G é denominado* ***grupo de dualidade de dimensão*** n ***sobre*** R *(*D^n***-grupo***), se existe um RG-módulo C, chamado* **módulo dualizante de** G*, e isomorfismos naturais tais que*

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo RG-módulo M, onde $C \otimes_R M$ é visto como RG-módulo com a G-ação diagonal.

Se $C \simeq R$ como RG-módulo, dizemos que G é um ***grupo de dualidade de Poincaré de dimensão*** n ***sobre*** R *(*PD^n***-grupo***).*

Exemplo 2.9.1 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ *é um D^1-grupo. (Veja [12], Capítulo VIII, Exemplo 2, p. 223).*

Proposição 2.9.1 *G é um D^0-grupo sobre R se, e somente se, a ordem de G é finita e invertível em R.*

Demonstração: [10], Capítulo IX, Proposição 9.17. ■

Proposição 2.9.2 *G é um D^n-grupo sobre R se, e somente se, G é do tipo FP sobre R.*

Demonstração: [10], Capítulo IX, Teorema 9.2. ■

Capítulo

3

Decomposição de Grupos

Nosso principal interesse neste capítulo é apresentar o conceito de decomposição de grupos e detalhar a demonstração de duas proposições dadas em [10], (envolvendo grupos que se decompõe), cujas demonstrações usam derivações (Proposição 3.1.3 e Proposição 3.1.4). Tais proposições serão úteis em resultados, sobre decomposição de grupos envolvendo o invariante $E(G, W, M)$, apresentados no último capítulo.

3.1 Produto Livre Amalgamado e Extensões HNN

Definição 3.1.1 *Se diz que um grupo G é definido por geradores $X = \{x_k\}$ e relações $\mathcal{R} = \{r_j = 1\}$, se $G \simeq F/H$, onde F é um grupo livre gerado por X e H é o menor subgrupo normal de F gerado por $\{r_j\}$. Neste caso, dizemos que $\langle X; \mathcal{R}\rangle$ é uma* ***apresentação*** *de G.*

Definição 3.1.2 *Considere os grupos G_1 e G_2 com apresentações $G_1 = \langle X_1; \mathcal{R}_1\rangle$ e $G_2 = \langle X_2; \mathcal{R}_2\rangle$. Se $T \subset G_1$ e $S \subset G_2$ são subgrupos com um dado isomorfismo $\theta : T \to S$, então o* ***produto livre*** *$G_1 *_T G_2$* ***de*** *G_1* ***e*** *G_2* ***com subgrupo amalgamado*** *$T \simeq \theta(T) = S$ é dado por*

$$G_1 *_T G_2 := \langle X_1, X_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, t = \theta(t), \forall t \in T\rangle\,.$$

Exemplo 3.1.1 *Sejam $G_1 = \langle X_1; \mathcal{R}_1\rangle$, $G_2 = \langle X_2; \mathcal{R}_2\rangle$, $T = S = \{1\}$ (subgrupo trivial) e $\theta = id$, então*

$$G_1 *_T G_2 = \langle X_1, X_2; \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\rangle\,.$$

Em particular, se tomamos $G_1 = \langle a\rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $G_2 = \langle b\rangle \simeq \mathbb{Z}$, então o produto livre de G_1 e G_2

é o grupo livre com dois geradores

$$G_1 * G_2 = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Exemplo 3.1.2 *Dados os grupos*

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle = \langle a_1, b_1; \emptyset \rangle \, , \, G_2 = \langle a_2 \rangle * \langle b_2 \rangle = \langle a_2, b_2; \emptyset \rangle \, , \\ T &= \left\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \right\rangle \;\; e \;\; S = \left\langle b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \right\rangle . \end{aligned}$$

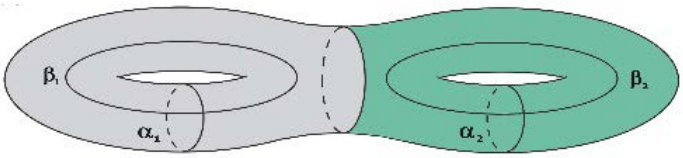
Então, considerando o isomorfismo $\theta : T \to S$ definido por

$$\theta(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1},$$

tem-se que

$$G_1 *_T G_2 = \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1 \right\rangle .$$

$G_1 *_T G_2$ é o grupo fundamental do Bitoro. Este fato segue do Teorema de Seifert-van-Kampen ([26], Capítulo IV), considerando subespaços adequados.



Definição 3.1.3 *Considere $G_1 = \langle X_1; \mathcal{R}_1 \rangle$, se T e T' são subgrupos de G_1 com um dado isomorfismo $\theta : T \to T'$, então* ***o HNN-grupo $G_1 *_{T,\theta}$ sobre o grupo base G_1, com respeito a θ e letra estável*** *p, é dado por*

$$G_1 *_{T,\theta} := \left\langle X_1, p; \mathcal{R}_1, p^{-1} t p = \theta(t), \, \forall t \in T \right\rangle .$$

Exemplo 3.1.3 *Sejam $G_1 = \{1\}$, $T = T' = \{1\}$ e $\theta = id$.*

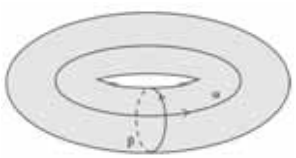
$$G_1 *_{T,\theta} = \left\langle 1, p; p^{-1} \cdot 1 \cdot p = 1 \right\rangle = \langle 1, p \rangle = \langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

Exemplo 3.1.4 *Seja $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle = \langle a, b; \; ab = ba \rangle$. Considere o grupo $G_1 = T = T' = \langle a \rangle$, $\theta = id : T \to T$ e b a letra estável. Então*

$$G_1 *_{T,\theta} = \left\langle a, b; \; b^{-1} a b = \theta(a) = a \right\rangle = \langle a, b; ab = ba \rangle = G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Note que G é o grupo fundamental de $M =$Toro, e se $a = [\alpha]$, $b = [\beta]$ são os geradores, A o

subespaço (topológico) de M representado pelo caminho α e B o subespaço representado pelo caminho β então $\pi_1(M) = T*_{T,\theta}$ onde o grupo $T = \pi_1(A) = \langle a \rangle$.



Definição 3.1.4 *Diz-se que* ***um grupo*** G ***se decompõe*** (***splits***) ***sobre um subgrupo*** T *se G é um produto não trivial com subgrupo amalgamado T, isto é, $G = G_1 *_T G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$, ou se G é um HNN-grupo com grupo base T, ou seja, $G = G_1*_{T,\theta}$.*

Proposição 3.1.1 *Se $G = G_1 *_T G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$ então $[G : G_i] = \infty$, $i = 1, 2$.*

Demonstração: [4], Teorema 3.2. ■

Proposição 3.1.2 *Se T e T' são subgrupos de G_1 com um dado isomorfismo $\theta : T \to T'$ e se $G = G_1*_{T,\theta}$, então $[G : G_1] = \infty$.*

Demonstração: [4], Teorema 3.4. ■

Teorema 3.1.1 [***Teorema da Forma Normal para*** $G = G_1 *_T G_2$] *Sejam $G = G_1 *_T G_2$ e T_α transversais à esquerda de G_α módulo T (representante para as classes laterais à esquerda de G_α módulo T) contendo $1 \in G$, para $\alpha = 1, 2$. Seja U o conjunto de todos os produtos $g_1 g_2 \dots g_k$, $1 \leq k < \infty$, $1 \neq g_i \in T_1 \cup T_2$, com a propriedade que fatores consecutivos não pertencem simultaneamente a T_α, $\alpha = 1, 2$. Então, $U \cup \{1\}$ é um transversal à esquerda para G módulo T.*

Demonstração: [10], Capítulo II, p. 26. ■

Observação 3.1.1 *Segue do teorema anterior que um elemento $g \in G = G_1 *_T G_2$ pode ser escrito (de modo único) como*

$$g = a_1 b_1 \dots a_k b_k c,$$

com $a_i \in T_1$, $b_i \in T_2$, $i = 1, \dots, k$ e $c \in T$, podendo apenas a_1 ou b_k serem iguais a 1.

Teorema 3.1.2 [***Teorema da Forma Normal para*** $G = G_1*_{T,\theta}$] *Seja $G = G_1*_{T,\theta}$, com T e T' subgrupos de G_1 e $\theta : T \to T'$ um isomorfismo. Considere T_1 e T_1' transversais à esquerda de G_1 módulo T e G_1 módulo T', respectivamente, onde $T' = \theta(T)$, ambos contendo $1 \in G$. Seja V o conjunto de todos os produtos $a_1 p^{n_1} \dots a_k p^{n_k}$, onde $n_i = \pm 1$, $a_i \in T_1$ se $n_i = -1$ e $a_i \in T_1'$ se $n_i = 1$. Então, $V \cup \{1\}$ é um transversal à esquerda para G módulo G_1.*

Demonstração: [10], Capítulo II, p. 31. ■

Observação 3.1.2 *Segue do teorema anterior que se* $g \in G_1 *_{T,\theta}$ *então* $g = a_1 p^{n_1} \dots a_k p^{n_k} c$, *com* $n_i = \pm 1$, $a_i \in T_1$ *se* $n_i = -1$, $a_i \in T_1'$ *se* $n_i = 1$ *e* $c \in G_1$.

Definição 3.1.5 (*[10], Capítulo I, Seção 2.4, p. 26 e 31*)
(*i*) *Dados* $G = G_1 *_T G_2$ *e* $g \notin T$ *considere, de acordo com o Teorema* 3.1.1 *e a Observação* 3.1.1, $g = g_1 g_2 \dots g_n c \in G$. *O* ***comprimento*** l *de* gT *é definido por*

$$l(gT) := n.$$

Também define-se $l(cT) = l(T) := 0$, $\forall c \in T$. *Note, por exemplo, que um elemento do tipo* $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k c \in G_1 *_T G_2$ ($a_i \in T_1$, $b_i \in T_2$ *não nulos*) *tem comprimento* $2k$, *enquanto que um do tipo* $b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k$ *tem comprimento* $2k - 1$.
(*ii*) *Sejam* $G = G_1 *_{T,\theta}$ *e* $g = a_1 p_1^{n_1} \dots a_k p_k^{n_k} c \in G$ (*como na Observação* 3.1.2); $g \notin T$. *O* ***comprimento*** l *de* gT *é definido por*

$$l(gT) := \sum_{i=1}^{k} |n_i| = k.$$

Também define-se $l(a_1 p_1^{n_1} \dots a_k p_k^{n_k} G_1) = k$.

Para as duas próximas proposições (que dão sequências exatas curtas para grupos que se decompõem) precisa-se de alguns resultados sobre derivações, que são tratados a seguir.

Lema 3.1.1 *Sejam* G *um grupo e* M *um* RG*-módulo* ($R = \mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{Z}_2$). *Toda derivação* $d : G \to M$ (*vide Definição* 2.8.1) *se estende unicamente para um* R*-homomorfismo* (*que vamos denotar também por* d),

$$d : RG \to M;\ d\left(\sum r_g g\right) := \sum r_g d(g),$$

com a propriedade que

$$d(\lambda_1 \lambda_2) = d(\lambda_1) \cdot \varepsilon(\lambda_2) + \lambda_1 d(\lambda_2),\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in RG,$$

onde $\varepsilon : RG \to R$ *é a aplicação aumentação usual.*
Demonstração: Sejam $\lambda_1 = \sum r_g g$ e $\lambda_2 = \sum s_h h$ elementos de RG, então

$$\begin{aligned} d(\lambda_1 \lambda_2) &= d\left(\sum r_g g \cdot \sum s_h h\right) \\ &= d\left(\sum r_g s_h gh\right) \\ &= \sum r_g s_h d(gh) \\ &= \sum r_g s_h (d(g) + g d(h)). \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} & d(\lambda_1)\cdot\varepsilon(\lambda_2)+\lambda_1\, d(\lambda_2) \\ = \;& d\left(\sum r_g g\right)\varepsilon\left(\sum s_h h\right)+\sum r_g g\, d\left(\sum s_h h\right) \\ = \;& \left(\sum r_g d(g)\right)\sum s_h+\sum r_g g\left(\sum s_h d(h)\right) \\ = \;& \sum r_g s_h d(g)+\sum r_g s_h g d(h) \\ = \;& \sum r_g s_h (d(g)+g d(h)). \end{aligned}$$

Logo o resultado segue. ■

Lema 3.1.2 *Dados M um RG-módulo, $\varepsilon : RG \to R$ a aplicação aumentação e $\Delta = \ker\varepsilon$, tem-se:*
(i) $Der(G,M)$ é um R-módulo.
(ii) $\phi : Der(G,M) \to Hom_{RG}(\Delta, M)$, $d \mapsto \phi(d)$; $\phi(d)(g-1) := d(g)$, $g \in G$ é um isomorfismo.

Demonstração: Vejamos apenas (ii). Note que ϕ é homomorfismo, pois

$$\Delta = \ker\varepsilon = \langle g-1,\, g \in G\rangle$$

(Proposição 1.2.7) e, para $d_1, d_2 \in Der(G,M)$,

$$\phi(d_1+d_2)(g-1) = (d_1+d_2)(g) = d_1(g)+d_2(g) = \phi(d_1)(g-1)+\phi(d_2)(g-1)),\ \forall g \in G.$$

Ainda, ϕ é bijetora, pois

$$\begin{array}{rcl} \psi : Hom_{RG}(\Delta, M) & \to & Der(G,M) \\ f & \mapsto & \psi(f);\ \psi(f)(g) := f(g-1),\ g \in G \end{array}$$

é a inversa de ϕ. Portanto

$$Der(G,M) \simeq Hom_{RG}(\Delta, M).$$

■

Corolário 3.1.1 *Se $G = F$ é um grupo livremente gerado por $\{x_i,\, i \in I\}$ e $\Delta_F = \ker\varepsilon_F$, $\varepsilon_F : RF \to R$, a aplicação aumentação, então:*
(i) Δ_F é um RF-módulo livre sobre $\{x_i - 1,\, i \in I\}$.
(ii) Cada escolha arbitrária de elementos $\alpha_i \in M$, $i \in I$, determina uma única derivação $d : F \to M$, com $d(x_i) = \alpha_i$.

Demonstração: (i) Note, por exemplo, que se $g = x_i x_j \in F$,

$$g-1 = x_i(x_j-1)+(x_i-1),\ \text{com } x_i = 1\cdot x_i \in RF.$$

Daí, segue da Proposição 1.2.7 que Δ_F é gerado por $\{x_i - 1,\, i \in I\}$ como RF-módulo.

(ii) Considere o homomorfismo $\varphi : \Delta_F \to M$, definido nos geradores por $\varphi(x_i - 1) = \alpha_i$, $i \in I$, e estendido por linearidade. Tendo em vista o isomorfismo dado no Lema 3.1.2 (ii) (para $G = F$)

$$\phi : Der(F, M) \to Hom_{RG}(\Delta_F, M),$$

existe uma única derivação $d : F \to M$ tal que $\phi(d) = \varphi$ e

$$d(x) = \phi(d)(x - 1) = \varphi(x - 1),$$

de modo que $d(x_i) = \varphi(x_i - 1) = \alpha_i$. ■

Definição 3.1.6 *Em particular, no corolário anterior, considerando $M = RF$, para cada i fixado, o homomorfismo*

$$\varphi_i : \Delta_F \to M, \quad x_i - 1 \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

(obtido escolhendo $\{\alpha_j,\, j \in I\}$; $\alpha_i = 1$ e $\alpha_j = 0$ se $i \neq j$) corresponde, pelo isomorfismo anterior, a uma única derivação, que será denotada por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : F \to RF;$$

e que é definida nos geradores por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \varphi_i(x_i - 1) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e estendida de modo natural. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) := \frac{\partial}{\partial x_i}(x_k) + x_k \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j). \qquad (1)$$

*Essas derivações são chamadas **derivações parciais** com respeito a x_i.*

Seja $d : F \to M$ uma derivação. Defina $\widetilde{d} : F \to M$ por

$$\widetilde{d}(w) := \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(w) d(x_i),\ w \in F. \qquad (2)$$

$\widetilde{d}$ está bem definida, pois $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(w) = 0$, exceto para um número finito de elementos.

Observe que $\widetilde{d}$ é uma derivação, uma vez que para u, $v \in F$,

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(uv): &= \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(uv)d(x_i)\\ &\overset{(1)}{=} \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(u)d(x_i) + u\sum \frac{\partial}{\partial x_i}(v)d(x_i)\\ &= \widetilde{d}(u) + u\widetilde{d}(v).\end{aligned}$$

Observe também que, pela definição de $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_j)$,

$$\widetilde{d}(x_j) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)d(x_i) = d(x_j). \tag{3}$$

Logo, como $\{x_j,\ j \in I\}$ é o conjunto de geradores (livres) de F, temos $\widetilde{d} = d$. Assim, por (2) temos a seguinte fórmula:

$$d(w) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(w)d(x_i),\ w \in F, \tag{4}$$

para toda derivação $d : F \to M$. Em particular, se aplicamos esta fórmula para uma derivação interna $d : F \to RF$; $d(w) = w - 1$, $(M = RF)$, obtemos

$$\begin{aligned}d(w) &\overset{(4)}{=} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(w)(d(x_i)) \overset{Def.2.8.3}{=} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(w)(x_i - 1) \Rightarrow\\ w - 1 &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(w)(x_i - 1),\ w \in F \text{ (grupo livre). } (*)\end{aligned}$$

Esta última igualdade é denominada **Fórmula Fundamental**, e há duas maneiras de generalizá-la:

1ª) Estender a fórmula a RF (por linearidade), por considerar

$$\begin{array}{rccc} d: & RF & \to & RF;\\ & \sum\limits_x r_x x & \mapsto & \sum\limits_x r_x d(x).\end{array}$$

Em particular, obtem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} &: RF \to RF;\\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_x r_x x\right) &= \sum_x r_x \frac{\partial}{\partial x_i}(x).\end{aligned} \tag{5}$$

Assim, dado $\mu = \sum_x r_x x \in RF$ temos,

$$\begin{aligned} d(\mu) &= d\left(\sum_x r_x x\right) = \sum_x r_x d(x) \overset{(4)}{=} \sum_x \sum_i r_x \frac{\partial}{\partial x_i}(x)(d(x_i)) \\ &= \sum_i \sum_x r_x \frac{\partial}{\partial x_i}(x)(x_i - 1) \overset{(5)}{=} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)(x_i - 1). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $d : F \to RF$ é derivação interna,

$$\begin{aligned} d(\mu) &= \sum_x r_x d(x) = \sum_x r_x (x - 1) \\ &= \sum_x r_x x - \sum_x r_x = \mu - \varepsilon_F(\mu). \end{aligned}$$

Portanto, $\mu - \varepsilon_F(\mu) = d(\mu) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)(x_i - 1)$, $\mu \in RF$. $\qquad (**)$

2ª) Estender a fórmula fundamental para RG, sendo G um grupo qualquer, por considerar uma apresentação livre $\pi : F \to G$ de G e uma extensão natural $\pi : RF \to RG$. De fato, seja G um grupo, $\pi : R \to G$ uma apresentação de G, com F grupo livremente gerado por $\{x_i,\, i\}$ e G com geradores $\{g_i = \pi(x_i),\, i\}$;

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{\pi}{\to} & G \simeq \dfrac{F}{\ker \pi} \\ x_i & \mapsto & \bar{x}_i = g_i. \end{array}$$

Temos o homomorfismo induzido, que também denotaremos por π,

$$\begin{array}{rccc} \pi : & RF & \to & RG \\ & r_x x & \mapsto & r_x \pi(x). \end{array}$$

Seja $\mu = \sum_x r_x x \in RF$. Por $(**)$ (fórmula para RF), temos

$$\begin{aligned} \mu - \varepsilon_F(\mu) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)(x_i - 1) \Rightarrow \\ \pi(\mu - \varepsilon_F(\mu)) &= \pi\left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)(x_i - 1)\right) \Rightarrow \\ \pi(\mu) - \pi(\varepsilon_F(\mu)) &= \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)\right) \pi(x_i - 1) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)\right)(g_i - 1). \end{aligned}$$

Seja $\lambda = \pi(\mu) \in RG$, temos

$$\lambda - \pi(\varepsilon_F(\mu)) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)\right)(g_i - 1), \qquad (6)$$

agora,

$$\begin{aligned} \pi(\varepsilon_F(\mu)) &= \pi\left(\left(\sum_x r_x\right)1_F\right) = \pi\left(\sum_x r_x 1_F\right) = \sum_x r_x 1_G \text{ e} \\ \varepsilon(\lambda) &= \varepsilon\left(\pi(\mu)\right) = \varepsilon\left(\pi\left(\sum r_x x\right)\right) = \varepsilon\left(\sum_x r_x \pi(x)\right) = \sum_x r_x 1_G, \end{aligned}$$

de modo que $\varepsilon(\lambda) = \pi(\varepsilon_F(\mu))$. Portanto, de (6), segue

$$\lambda - \varepsilon(\lambda) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)\right)(g_i - 1), \lambda \in RG. \qquad (***)$$

Proposição 3.1.3 *Se $G = G_1 *_T G_2$ então temos a sequência exata curta de RG-módulos*

$$0 \to R(G/T) \xrightarrow{\alpha} R(G/G_1) \oplus R(G/G_2) \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} R \to 0,$$

onde α é dado por $\alpha(gT) = (gG_1, -gG_2)$, $g \in G$ e $\bar{\varepsilon}(gG_1, 0) = \bar{\varepsilon}(0, gG_2) = 1$ ($\bar{\varepsilon}$, a aplicação aumentação).

Demonstração: Claramente $\bar{\varepsilon}$ é epimorfismo. Vamos mostrar que $\operatorname{Im}\alpha = \ker\bar{\varepsilon}$.

(I) $\operatorname{Im}\alpha \subset \ker\bar{\varepsilon}$.

De fato, um elemento de $R(G/T)$ é da forma $\sum_{g\in G} r_g gT$, que pode ser escrito (por abuso de notação) como $\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)T$, ou simplesmente λT, $\lambda \in RG$. Assim,

$u \in \operatorname{Im}\alpha \Rightarrow u = \alpha(\lambda T) = \alpha(r_{g_1}g_1T + \ldots + r_{g_k}g_kT) = \alpha(r_{g_1}g_1T) + \ldots + \alpha(r_{g_k}g_kT)$, $g_i \in G\,(i = 1, \ldots, k)$.

Então,

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(u) &= \bar{\varepsilon}(\alpha(r_{g_1}g_1T) + \ldots + \alpha(r_{g_k}g_kT)) \\ &= \bar{\varepsilon}(\alpha(r_{g_1}g_1T)) + \ldots + \bar{\varepsilon}(\alpha(r_{g_k}g_kT)) \\ &= \bar{\varepsilon}(r_{g_1}g_1G_1, -r_{g_1}g_1G_2) + \ldots + \bar{\varepsilon}(r_{g_k}g_kG_1, -r_{g_k}g_kG_2) \\ &= \bar{\varepsilon}(r_{g_1}g_1G_1, 0) + \bar{\varepsilon}(0, -r_{g_1}g_1G_2) + \ldots + \bar{\varepsilon}(r_{g_k}g_kG_1, 0) + \bar{\varepsilon}(0, -r_{g_k}g_kG_2) \\ &= \sum_{i=1}^{k} r_{g_i} - \sum_{i=1}^{k} r_{g_i} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $u \in \ker \bar{\varepsilon}$.

(II) $\ker \bar{\varepsilon} \subset \operatorname{Im} \alpha$.

Sejam $\{g_i,\, i\}$ e $\{h_j,\, j\}$ conjuntos de geradores de G_1 e G_2, respectivamente. Considere F o grupo livre gerado por $\{x_i, y_j,\, i, j\}$ e a apresentação $F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G_1 *_T G_2$ com $\pi(x_i) = g_i$ e $\pi(y_j) = h_j$.

Pela fórmula fundamental estendida de RF para RG (dada em $(***)$) com $G = G_1 *_T G_2$, temos que, para todo $\lambda = \pi(\mu) \in RG$,

$$\lambda - \varepsilon(\lambda) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)\right)(g_i - 1) + \sum_j \pi\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(\mu)\right)(h_j - 1),$$

onde $\varepsilon : RG \to R$ é a aplicação aumentação usual. Assim, considerando as classes laterais de G_1 e G_2 (em G) obtemos, respectivamente,

$$\lambda G_1 - \varepsilon(\lambda)G_1 = \sum_j \pi\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(\mu)\right)(h_j - 1)G_1. \qquad (i)$$

$$\lambda G_2 - \varepsilon(\lambda)G_2 = \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)\right)(g_i - 1)G_2. \qquad (ii)$$

Seja $(\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2) \in R(G/G_1) \bigoplus R(G/G_2)$ tal que $(\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2) \in \ker \bar{\varepsilon}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in RG$.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2) &= \bar{\varepsilon}(\lambda_1 G_1, 0) + \bar{\varepsilon}(0, \lambda_2 G_2) = 0 \Rightarrow \\ \bar{\varepsilon}(\lambda_1 G_1, 0) &= -\bar{\varepsilon}(0, \lambda_2 G_2). \qquad (iii) \end{aligned}$$

Note que

$$\lambda = \sum r_g g \in RG \Rightarrow \bar{\varepsilon}(\lambda G_1, 0) = \varepsilon(\lambda) = \bar{\varepsilon}(0, \lambda G_2).$$

Assim, segue de (iii), que

$$\varepsilon(\lambda_1) = -\varepsilon(\lambda_2).$$

Tome $\mu_1, \mu_2 \in RF$ com $\pi(\mu_1) = \lambda_1$ e $\pi(\mu_2) = \lambda_2$. Vamos mostrar que existe um elemento w em $R(G/T)$ tal que $\alpha(w) = (\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2)$. De fato, considere

$$w := \sum_j \pi\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(\mu_1)\right)(h_j - 1)T - \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_2)\right)(g_i - 1)T + \varepsilon(\lambda_1)T \in R(G/T).$$

Como $g_i \in G_1$ e $h_j \in G_2$, pela definição de α obtemos

$$\alpha(w) = \left(\sum_j \pi\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(\mu_1)\right)(h_j - 1)G_1 + \varepsilon(\lambda_1)G_1, \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_2)\right)(g_i - 1)G_2 - \varepsilon(\lambda_2)G_2\right).$$

Agora, usando na primeira coordenada a igualdade (i) para $\lambda = \lambda_1$ e $\mu = \mu_1$, na segunda coordenada a igualdade (ii), para $\lambda = \lambda_2$ e $\mu = \mu_2$ e o fato que $\varepsilon(\lambda_1) = -\varepsilon(\lambda_2)$, tem-se

$$\alpha(w) = (\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2 - \varepsilon(\lambda_2)G_2 - \varepsilon(\lambda_1)G_2) = (\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2).$$

Assim $(\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2) \in \operatorname{Im} \alpha$.
Portanto, $\ker \bar{\varepsilon} \subset \operatorname{Im} \alpha$ e, consequentemente, $\ker \bar{\varepsilon} = \operatorname{Im} \alpha$.

Por fim, mostraremos que α é monomorfismo.

Seja $\lambda \in RG$ tal que $\alpha(\lambda T) = (\lambda G_1, -\lambda G_2) = 0$, isto é, $\lambda G_1 = \lambda G_2 = 0$. Vamos mostrar que $\lambda = 0$, ou seja, mostraremos que $\ker \alpha = 0$ (logo α é monomorfismo).

Temos que

$$\lambda \in RG \Rightarrow \lambda = \sum_{g \in G} r_g g, \text{ com } r_g \text{ quase todos nulos, ou seja, } \lambda = r_{g_1} g_1 + \ldots + r_{g_k} g_k,\ r_{g_i} \neq 0.$$

Seja $supp(\lambda T) := \{g_1 T, \ldots, g_k T\}$ o suporte de λT, (isto é, o conjunto formado pelos gT tais que $r_g \neq 0$ na expressão de λT). Sejam T_1 e T_2 transversais à esquerda de G_1 módulo T e de G_2 módulo T, respectivamente. Pela Observação 3.1.1, qualquer $g \in G = G_1 *_T G_2$ pode ser escrito na forma $g = a_1 b_1 \ldots a_n b_n c$, onde $a_i \in T_1$, $b_i \in T_2$, $c \in T$ e $a_i, b_i \neq 1$, exceto possivelmente nos seus extremos (caso contrário, teríamos fatores consecutivos em um mesmo T_α, $\alpha \in \{1, 2\}$), de modo que,

$$supp(\lambda T) = \{a_{11} b_{11} \ldots a_{1_{n_1}} b_{1_{n_1}} T, \ldots, a_{k1} b_{k1} \ldots a_{k_{n_k}} b_{k_{n_k}} T\}.$$

Suponha que exista um elemento $g_j T$, de comprimento não nulo, no suporte de λT ($g_j = a_{j_1} b_{j_1} \ldots a_{j_{n_j}} b_{j_{n_j}}$). Devemos analisar os seguintes casos:

(1) g_j termina em $a_{j_{n_j}}$, ou seja, $g_j = a_{j_1} b_{j_1} \ldots a_{j_{n_j}}$. Neste caso,

$$g_j G_2 = a_{j_1} b_{j_1} \ldots a_{j_{n_j}} G_2$$

tem o mesmo comprimento que $g_j T$. Como o comprimento de $g_j T$ é não nulo, segue que $g_j G_2$ não se anula em λG_2. Logo, $\lambda G_2 \neq 0$, o que é uma contradição.

(2) g_j termina em $b_{j_{n_j}}$, ou seja $g_j = a_{j_1} b_{j_1} \ldots a_{jn_j} b_{j_{n_j}}$. Dessa forma, $g_j G_1$ tem o mesmo comprimento que $g_j T$ e portanto $g_j G_1$ não se anula em λG_1, daí $\lambda G_1 \neq 0$, o que é uma contradição.

Assim, concluímos que não existe elemento de comprimento não nulo no suporte de λT. Portanto, $\lambda = 0$. Daí, $\ker \alpha = 0$ e consequentemente, α é monomorfismo. ■

Proposição 3.1.4 *Se $G = G_1 *_{T,\theta}$ então temos a sequência exata curta de RG-módulos*

$$0 \to R(G/T) \xrightarrow{\alpha} R(G/G_1) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} R \to 0,$$

onde α é dado por $\alpha(gT) = gG_1 - gp^{-1}G_1$, ($p$ é a letra estável de G) e $\tilde{\varepsilon}$ é a aplicação aumentação.

Demonstração: Temos que $\tilde{\varepsilon}$ é epimorfismo. Mostremos que $\operatorname{Im}\alpha = \ker\tilde{\varepsilon}$.

(I) $\operatorname{Im}\alpha \subset \ker\tilde{\varepsilon}$. De fato,

$u \in \operatorname{Im}\alpha \Rightarrow u = \alpha(\lambda T) = \alpha(r_{g_1}g_1T + \ldots + r_{g_k}g_kT) = \alpha(r_{g_1}g_1T) + \ldots + \alpha(r_{g_k}g_kT)$, $g_i \in G\,(i = 1, \ldots, k)$.

Mas

$$\alpha(r_{g_i}g_iT) = r_{g_i}g_iG_1 - r_{g_i}g_ip^{-1}G_1,$$

daí,

$$\tilde{\varepsilon}(\alpha(r_{g_i}g_iT)) = \tilde{\varepsilon}(r_{g_i}g_iG_1 - r_{g_i}g_ip^{-1}G_1) = r_{g_i} - r_{g_i} = 0,$$

e portanto,

$$\varepsilon(u) = \varepsilon(\alpha(r_{g_1}g_1T) + \ldots + \alpha(r_{g_k}g_kT)) = \varepsilon(\alpha(r_{g_1}g_1T)) + \ldots + \varepsilon(\alpha(r_{g_k}g_kT)) = 0.$$

Logo, $u \in \ker\tilde{\varepsilon}$.

(II) $\ker\tilde{\varepsilon} \subset \operatorname{Im}\alpha$.

Considere uma apresentação $F_1 \twoheadrightarrow G_1$, F_1 livre gerado por $\{x_i,\, i \in I\} = X_1$; $G_1 = \langle X_1; \mathcal{R}_1\rangle$. Sabemos que $G = G_1 *_{T,\theta} = \langle X_1, p; \mathcal{R}_1\rangle$, de modo que $\pi : F \twoheadrightarrow G = G_1 *_{T,\theta}$ é uma apresentação de $G = G_1 *_{T,\theta}$, sendo F livremente gerado por $\{x_i,\, i \in I\} \cup \{q\}$, $\pi(x_i) = g_i$ e $\pi(q) = p$.

Pela fórmula fundamental estendida para RG (dada por $(***)$) temos, para todo $\lambda \in RG$,

$$\lambda - \varepsilon(\lambda) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)\right)(g_i - 1) + \pi\left(\frac{\partial}{\partial q}(\mu)\right)(p - 1),$$

onde $\mu \in RF$ com $\pi(\mu) = \lambda$ e $\varepsilon : RG \to R$ é a aplicação aumentação usual. Então,

$$\begin{aligned}
\lambda G_1 - \varepsilon(\lambda)G_1 &= \pi\left(\frac{\partial}{\partial q}(\mu)\right)(p-1)G_1 \\
&= \pi\left(\frac{\partial}{\partial q}(\mu)\right)p(1-p^{-1})G_1 \\
&= \pi\left(\frac{\partial}{\partial q}(\mu)\right)pG_1 - \pi\left(\frac{\partial}{\partial q}(\mu)\right)pp^{-1}G_1 \\
&= \alpha\left(\pi\left(\frac{\partial}{\partial q}(\mu)\right)pT\right). \qquad (i)
\end{aligned}$$

Agora, seja $\lambda G_1 \in R(G/G_1)$ tal que $\lambda G_1 \in \ker\tilde{\varepsilon}$, isto é, $\tilde{\varepsilon}(\lambda G_1) = 0$. Então

$$\varepsilon(\lambda) = \tilde{\varepsilon}(\lambda G_1) = 0$$

e por (i), segue que

$$\lambda G_1 = \alpha\left(\pi\left(\frac{\partial}{\partial q}(\mu)\right)pT\right) \in \operatorname{Im}\alpha.$$

Portanto, $\ker\tilde{\varepsilon} \subset \operatorname{Im}\alpha$. Consequentemente, $\ker\tilde{\varepsilon} = \operatorname{Im}\alpha$.

Resta-nos mostrar que α é monomorfismo. Para tal, vamos escolher transversais à esquerda T_1 e T_1' de G_1 módulo T e G_1 módulo $T' = \theta(T)$, respectivamente, com T_1 e T_1' contendo $1 \in G$. Pelo Teorema 3.1.2, o conjunto V formado pelos elementos $a_1p^{n_1}\ldots a_kp^{n_k}$ e 1, onde $n_i = \pm 1$, $a_i \in T_1$ se $n_i = -1$ e $a_i \in T_1'$ se $n_i = 1$ é um transversal à esquerda para G módulo G_1.

Podemos verificar que o conjunto dos elementos da forma va_0, onde $v \in V$ e $a_0 \in T_1$ é um transversal à esquerda para G módulo T. De fato,
como V é um transversal à esquerda para G módulo G_1, segue que

$$G = \dot{\bigcup_{v\in V}} vG_1$$

e como T_1 é transversal de G_1 módulo T,

$$G_1 = \dot{\bigcup_{a_0\in T_1}} a_0T.$$

Daí,

$$G = \dot{\bigcup_{v\in V,\, a_0\in T_1}} va_0T.$$

Dessa forma, dado $\lambda \in RG$, temos que um elemento $\lambda T \in R(G/T)$ é tal que

$$\lambda T = \sum_{j=1}^{k} r_j v_j a_{0_j} T;\ r_j \in R,\ v_j \in V,\ a_{0_j} \in T_1, r_j \neq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\alpha(\lambda T) &= \sum_{j=1}^{k} r_j \alpha(v_j a_{0_j} T) \\
&= \sum_{j=1}^{k} r_j \left(v_j a_{0_j} G_1 - v_j a_{0_j} p^{-1} G_1\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} r_j v_j a_{0_j} G_1 - \sum_{j=1}^{k} r_j v_j a_{0_j} p^{-1} G_1.
\end{aligned}$$

Observe que $\sum_{j=1}^{k} r_j v_j a_{0_j} G_1 = \lambda G_1$ e $\sum_{j=1}^{k} r_j v_j a_{0_j} p^{-1} G_1 = \lambda p^{-1} G_1$.

Considere $\lambda T \in R(G/T)$ com $\lambda T \in \ker \alpha$, ou seja, $\alpha(\lambda T) = \lambda G_1 - \lambda p^{-1} G_1 = 0$. Vamos mostrar que $\lambda T = 0$, isto é, mostraremos que $\ker \alpha = 0$ e portanto, α é monomorfismo.

Suponhamos que exista um elemento $g_j T = v_j a_0 T = a_{j_1} p^{n_{j_1}} a_{j_2} p^{n_{j_2}} \ldots a_{j_m} p^{n_{j_m}} a_{0_j}$ de comprimento máximo m ($m \neq 0$) entre os elementos que aparecem no suporte de λT. Temos as seguintes situações:

(i) $a_{0_j} \neq 1$. Neste caso, temos que

$$v_j a_{0_j} T = a_{j_1} p^{n_{j_1}} \ldots a_{j_m} p^{n_{j_m}} a_{0_j} T$$

dá origem ao somando (em $\alpha(\lambda T)$, mais precisamente em $\lambda p^{-1} G_1$)

$$v_j a_{0_j} p^{-1} G_1 = a_{j_1} p^{n_{j_1}} \ldots a_{j_m} p^{n_{j_m}} a_{0_j} p^{-1} G_1,$$

que possui comprimento $m+1$ no suporte de $\lambda p^{-1} G_1$. Daí, como $\lambda G_1 - \lambda p^{-1} G_1 = 0$ e em $supp(\lambda G_1)$, todos os elementos possuem comprimento menor ou igual a m, segue que $r_j v_j a_{0_j} p_j^{-1} G_1$ deve se cancelar com um outro somando em $\lambda p^{-1} G_1$, ou seja,

$$r_j v_j a_{0_j} p^{-1} G_1 = r_s v_s a_{0_s} p^{-1} G_1.$$

Como V é um transversal à esquerda para G módulo G_1, (a representação é única), temos que $v_j a_{0_j} = v_s a_{0_s}$. Logo, o elemento $r_j v_j a_{0_j} T$ se cancelaria com o elemento $r_s v_s a_{o_s}$ em λT.

Consequentemente, não existiria um elemento va_iT de comprimento máximo no suporte de λT.

(ii) $a_{0_1} = 1$ e $n_{j_m} = -1$. Nessas condições, temos que o elemento

$$v_j a_{0_j} T = v_j T = a_{j_1} p^{n_{j_1}} \dots a_{j_m} p^{-1} T,$$

de comprimento m, dá origem ao termo

$$v_j p^{-1} G_1 = a_{j_1} p^{n_{j_1}} \dots a_{j_m} p^{-1} 1 p^{-1} G_1,$$

de comprimento $m+1$. Daí, com o mesmo raciocínio feito no caso anterior, também concluímos que não existiria um elemento de comprimento máximo m no suporte de λT. Dessa forma, podemos assumir que:

(iii) $a_{0_j} = 1$ e $n_{j_m} = 1$, isto é,

$$v_j T = v_j a_{0_j} T = a_{j_1} p^{n_{j_1}} \dots a_{j_m} p T,$$

e qualquer outro elemento de comprimento máximo m em λT é deste tipo (pois caso contrário recairíamos nos casos (i) ou (ii)).

Observe que $v_j T$ dá origem ao somando (em $\alpha(\lambda T)$ mais precisamente em $\lambda p^{-1} G_1$)

$$v_j p^{-1} G_1 = a_{j_1} p^{n_{j_1}} \dots a_{j_m} p p^{-1} G_1 = a_{j_1} p^{n_{j_1}} \dots p^{n_{j_{m-1}}} a_{j_m} G_1,$$

de modo que o comprimento de $v_j p^{-1} G_1$ no suporte de $\lambda p^{-1} G_1$ é $m-1$. Ainda, um termo em $\lambda p^{-1} G_1$ de suporte máximo m tem que ser do tipo $a_1 p^{n_1} a_2 p^{n_2} \dots a_m p^{-1} G_1$ e daí não se cancela com $v_j G_1$. Assim, como $\lambda G_1 - \lambda p^{-1} G_1 = 0$, um tal termo, $r_j v_j G_1 = r_j a_{j_1} p^{n_{j_1}} \dots a_{j_m} p G_1$ deve cancelar-se com outro elemento da forma

$$r_s v_s G_1 = r_s a_{s_1} p^{n_{s_1}} \dots a_{s_m} p G_1$$

em λG_1, novamente pela unicidade da representação, visto que V é um transversal de G módulo G_1, temos $v_j = v_s$, consequentemente $v_j T = v_s T$ e assim já existiria o cancelamento de $r_j v_j T$ com $r_s v_s T$ em λT. Com isso, concluímos, como nos outros casos, que não existe somando de comprimento máximo em λT.

Logo, $\lambda T = 0$, ou seja, $\ker \alpha = 0$ e portanto, α é monomorfismo. ■

O próximo resultado relaciona a (co)homologia de um produto livre amalgamado $G = G_1 *_T G_2$ com a (co)homologia dos subgrupos G_1, G_2 e T.

Teorema 3.1.3 *Sejam $G = G_1 *_T G_2$ e M um RG-módulo (à esquerda). Então, existem sequências exatas longas naturais (**sequências de Mayer-Vietoris**)*

$$\cdots \to H_k(T;M) \overset{(\mathrm{cor}\,{}^{G_1}_{T}, -\mathrm{cor}\,{}^{G_2}_{T})}{\to} H_k(G_1;M) \oplus H_k(G_2;M) \overset{(\mathrm{cor}\,{}^{G}_{G_1}, \mathrm{cor}\,{}^{G}_{G_2})}{\to} H_k(G;M) \overset{\delta}{\to} H_{k-1}(T;M) \to \cdots,$$

e

$$\cdots \to H^k(G;M) \overset{(\mathrm{res}\,{}^{G}_{G_1}, \mathrm{res}\,{}^{G}_{G_2})}{\to} H^k(G_1;M) \oplus H^k(G_2;M) \overset{(\mathrm{res}\,{}^{G_1}_{T}, -\mathrm{res}\,{}^{G_2}_{T})}{\to} H^k(T;M) \overset{\delta}{\to} H^{k+1}(G;M) \to \cdots$$

Demonstração: [10], Capítulo II, Teorema 2.10. ■

Capítulo

4

(Co)homologia Relativa para pares (G, W)

Neste capítulo apresentamos a definição de (co)homologia relativa segundo Dicks-Dunwoody ([14]), nos dedicamos mais diretamente ao conceito de cohomologia. Mostramos a existência da sequência exata longa neste caso e, a seguir, relacionamos essa teoria de cohomologia com a de Bieri e Eckmann ([11]). Bieri e Eckmann definiram (co)homologia relativa para pares $(G, \mathcal{S})$, onde G é um grupo e $\mathcal{S}$ é uma família de subgrupos de G, enquanto que Dicks e Dunwoody trabalharam com pares (G, W), sendo G um grupo e W um G-conjunto. Aqui, R indicará $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$.

4.1 (Co)homologia Relativa, segundo Dicks-Dunwoody

Sejam G um grupo e W um G-conjunto (conjunto não vazio, munido de uma ação à esquerda de G).

Definição 4.1.1 *Considere RW o R-módulo livre gerado por W. Sejam $\varepsilon : RW \to R$ a aplicação aumentação ($\varepsilon(\sum r_w w) = \sum r_w$), $\Delta_W = \ker \varepsilon$, M um RG-módulo e $P \to \Delta_W$ uma RG-resolução projetiva de Δ_W. Os* ***grupos de homologia e cohomologia relativa*** *de ordem n, $n \in \mathbb{Z}$, do par (G, W), com coeficientes em M, são definidos, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} H_n(G, W; M) &:= H_{n-1}(P \otimes_{RG} M), \\ H^n(G, W; M) &:= H^{n-1}(Hom_{RG}(P, M)). \end{aligned}$$

Proposição 4.1.1 *Seja G um grupo. Se W é um G-conjunto, M um RG-módulo e F uma resolução projetiva de R sobre RG então*

$$H^n(G,W;M) \simeq H^{n-1}(Hom_{RG}(F, Hom_R(\Delta_W, M))) = H^{n-1}(G; Hom_R(\Delta_W, M)).$$

Demonstração: Primeiramente, observe que se F é uma resolução projetiva de R sobre RG, então como Δ_W é R-livre (e portanto R-projetivo), $P := F \otimes \Delta_W$ é uma RG-resolução projetiva de $R \otimes \Delta_W \overset{Prop.1.3.1}{\simeq} \Delta_W$ (isto pode ser mostrado de modo similar ao feito em [32], Proposição 1.5.5 p. 20). Além disso, pela Proposição 1.3.6, tem-se

$$Hom_{RG}(F, Hom(\Delta_W, M)) \simeq Hom_{RG}(F \otimes \Delta_W, M).$$

Assim,

$$\begin{aligned} H^n(G,W;M) &\overset{Def.4.1.1}{=} H^{n-1}(Hom_{RG}(P,M)) = H^{n-1}(Hom_{RG}(F \otimes \Delta_W, M)) \\ &\simeq H^{n-1}(Hom_{RG}(F, Hom_R(\Delta_W, M)) \overset{Def.2.3.1}{=} H^{n-1}(G; Hom_R(\Delta_W, M)). \end{aligned}$$

■

Mostraremos agora a existência da sequência exata longa para o par (G,W), onde G é um grupo e W é um G-conjunto. Para isso, adaptamos a prova dada em [13] (Proposição 2.5.6) à notação de Dicks-Dunwoody.

Proposição 4.1.2 *Seja (G,W) um par onde G é um grupo e W é um G-conjunto. Considere E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W, G_w o subgrupo de isotropia de w, para cada $w \in E$, e M um RG-módulo. Então, temos a seguinte sequência exata longa (em cohomologia):*

$$0 \to H^0(G;M) \to H^0(W;M) \overset{\delta}{\to} H^1(G,W;M) \overset{J}{\to} H^1(G;M) \overset{\mathrm{res}\,_W^G}{\to} H^1(W;M) \to \cdots,$$

onde

$$\mathrm{res}\,_W^G : H^n(G;M) \to H^n(W;M) \overset{not.}{=} \prod_{w \in E} H^n(G_w;M)$$

é a aplicação restrição definida por $\mathrm{res}\,_W^G[f] := \left(\mathrm{res}\,_{G_w}^G[f]\right)_{w \in E}$, *sendo* $\mathrm{res}\,_{G_w}^G : H^n(G;M) \to H^n(G_w;M)$ *a aplicação restrição, induzida, no nível n de cohomologia, pelas inclusões* $G_w \overset{i}{\hookrightarrow} G$, *para cada $w \in E$.*

Demonstração: Considere a sequência exata curta de RG-módulos

$$0 \to \Delta_W \overset{i}{\to} RW \overset{\varepsilon}{\to} R \to 0,$$

onde $\Delta_W = \ker \varepsilon$, i é a aplicação inclusão e ε é a aplicação aumentação.

Como R é R-projetivo, segue pela Proposição 1.2.2 e pelo Teorema 1.4.5, que a sequência

$$0 \to Hom_R(R, M) \stackrel{\varepsilon^\#}{\to} Hom_R(RW, M) \stackrel{i^\#}{\to} Hom_R(\Delta_W, M) \to 0,$$

onde $\varepsilon^\#(f) = Hom(\varepsilon, id)(f) = f \circ \varepsilon$ e $i^\#(f) = Hom(i, id)(f) = f \circ i$, também é exata.

Seja $F \to R$ uma resolução projetiva de R sobre RG. Como os $F_n's$ são RG-projetivos segue, do Teorema 1.4.6, que para cada $n \in \mathbb{Z}$, a sequência

$$0 \to Hom_{RG}(F_n, Hom_R(R, M)) \stackrel{\varepsilon_n^\#}{\to} Hom_{RG}(F_n, Hom_R(RW, M)) \stackrel{i_n^\#}{\to} Hom_{RG}(F_n, Hom_R(\Delta_W, M)) \to 0$$

é exata. Logo, temos a seguinte sequência exata curta de complexos de cocadeias:

$$0 \to Hom_{RG}(F, Hom_R(R, M)) \stackrel{\widetilde{\varepsilon^\#}}{\to} Hom_{RG}(F, Hom_R(RW, M)) \stackrel{\widetilde{i^\#}}{\to} Hom_{RG}(F, Hom_R(\Delta_W, M)) \to 0,$$

sendo $\widetilde{\varepsilon^\#}(f) = \varepsilon^\# \circ f$ e $\widetilde{i^\#}(f) = i^\# \circ f$, o que nos fornece a seguinte sequência exata longa em cohomologia (ver Proposição 2.4.1):

$$\begin{aligned} \cdots \to H^n(G; Hom_R(R, M)) &\stackrel{\varepsilon_n^*}{\to} H^n(G; Hom_R(RW, M)) \stackrel{i_n^*}{\to} H^n(G; Hom_R(\Delta_W, M)) \stackrel{\tau_n}{\to} \\ &\stackrel{\tau_n}{\to} H^{n+1}(G, Hom_R(R, M)) \to \cdots, \qquad (I) \end{aligned}$$

onde $(\varepsilon_n^*)([f]) = [\widetilde{\varepsilon_n^\#}(f)] = [\varepsilon_n^\# \circ f]$; $(i_n^*)([f]) = [\widetilde{i_n^\#}(f)] = [i_n^\# \circ f]$ e τ_n é o homomorfismo conexão (Definição 1.1.15).

Como E é um conjunto de representantes para as G-órbitas distintas de W segue, da Proposição 1.2.8, que

$$RW \simeq \bigoplus_{w \in E} R(G/G_w).$$

Logo a sequência exata longa (I) toma a forma

$$\begin{aligned} \cdots \;\to\; & H^n(G; Hom_R(R, M)) \stackrel{\varepsilon_n^*}{\to} H^n(G; Hom_R(\bigoplus_{w \in E} R(G/G_w), M)) \stackrel{i_n^*}{\to} \\ & \stackrel{i_n^*}{\to} H^n(G; Hom_R(\Delta_W, M)) \stackrel{\tau_n}{\to} H^{n+1}(G, Hom_R(R, M)) \to \cdots \end{aligned}$$

Agora, $Hom_R(R, M) \stackrel{\psi;\, Prop.1.3.4}{\simeq} M$. Assim,

$H^n(G; M) \stackrel{\psi^*}{\simeq} H^n(G; Hom_R(R, M))$, onde ψ^* é o homomorfismo induzido de ψ (isto é,

$$\psi^*[f] = [\psi \circ f],\ \psi : M \to Hom_R(R, M);\ \psi(m)(1) = m).$$

Além disso,

$$H^{n-1}(G; Hom_R(\Delta_W, M)) \overset{Prop.4.1.1}{\simeq} H^n(G, W; M).$$

Vamos mostrar que

$$H^n(G, Hom_R(\bigoplus_{w\in E} R(G/G_w), M)) \overset{\rho^*}{\simeq} H^n(W; M), \qquad (*)$$

sendo ρ^* a aplicação apresentada a seguir.

Com isso, a sequência exata anterior toma a seguinte forma:

$$\cdots \to H^n(G; M) \overset{\rho^*\circ\varepsilon^*\circ\psi^*}{\to} H^n(W; M) \to H^{n+1}(G, W; M) \to H^{n+1}(G; M) \to H^{n+1}(W; M) \to \cdots$$

Mostraremos também que $\rho^* \circ \varepsilon^* \circ \psi^* = \text{res}_W^G$, $\qquad (**)$
onde $\text{res}_W^G[f] = \left(\text{res}_{G_w}^G[f]\right)_{w\in E}$, com $\text{res}_{G_w}^G : H^n(G; W) \to H^n(G_w; M)$ induzida pela inclusão $G_w \overset{i}{\hookrightarrow} G$. De forma a obtermos a sequência desejada.

Para mostrar $(*)$ e $(**)$, considere a aplicação $H^n(G; M) \overset{\text{res}_W^G}{\to} H^n(W; M)$ e a sequência:

$$\begin{aligned} H^n(G; M) \overset{\psi^*}{\to}\ & H^n(G; Hom_R(R, M)) \overset{\varepsilon^*}{\to} H^n(G; Hom_R(\bigoplus_{w\in E} R(G/G_w, M))) \overset{\phi^*}{\to} \\ \overset{\phi^*}{\to}\ & H^n(G; \prod_{w\in E} Hom_R(R(G/G_w), M)) \overset{\gamma}{\to} \prod_{w\in E} H^n(G; Hom_R(R(G/G_w), M)) \overset{\varphi^*}{\to} \\ \overset{\varphi^*}{\to}\ & \prod_{w\in E} H^n(G; Coind_{G_w}^G M) \overset{\pi^*}{\to} \prod_{w\in E} H^n(G; M) \overset{(\text{res}_{G_w}^G)_{w\in E}}{\to} H^n(W; M), \end{aligned}$$

em que

- ϕ^* é a aplicação induzida de $\phi : Hom_R(\bigoplus_{w\in E} R(G/G_w), M) \to \prod_{w\in E} Hom_R(R(G/G_w), M)$, dada por $\phi(f) = (f \circ j_{w'})_{w'\in E}$, sendo $j_{w'}$ a inclusão de $R(G/G_{w'})$ em RW, para cada $w' \in E$;
- $\varphi^* = (\varphi_w^*)_{w\in E}$ é a aplicação induzida de $\varphi_w : Hom_R(R(G/G_w), M) \to Coind_{G_w}^G M$ dada por $\varphi_w(f_w)(x) = xf_w(x^{-1}G_w)$;
- $\pi^* = (\pi_w^*)_{w\in E}$ é a aplicação induzida de $\pi_w : Coind_{G_w}^G M \to M$ dada por $\pi_w(f_w) = f_w(1)$;
- $\gamma : H^n(G; \prod_{w\in E} Hom_R(R(G/G_w), M)) \to \prod_{w\in E} H^n(G; Hom_R(R(G/G_w), M))$ é a aplicação dada por $\gamma([f]) = ([p_w \circ f])_{w\in E}$, onde
  $p_w : \prod_{w\in E} Hom_R(R(G/G_w), M) \to Hom_R(R(G/G_w), M)$ é a projeção, e

- $(\operatorname{res}^G_{G_w})_{w\in E} : \prod_{w\in E} H^n(G;M) \to H^n(W;M)$, tal que $(\operatorname{res}^G_{G_w})_{w\in E}([\phi_w]_{w\in E}) = (\operatorname{res}^G_{G_w}([\phi_w]))_{w\in E}$.

Note que ϕ^*, φ^*, γ e $(\operatorname{res}^G_{G_w})_{w\in E}\circ(\pi_w^*)_{w\in E} = (\operatorname{res}^G_{G_w}\circ\pi_w^*)_{w\in E}$ são isomorfismos, onde $(\operatorname{res}^G_{G_w}\circ\pi_w^*)_{w\in E} : H^n(G;\operatorname{Coind}^G_{G_w}M) \to H^n(G_w;M)$ é o isomorfismo de Shapiro. Daí

$\rho^* := (res^G_{G_w})_{w\in E}\circ(\pi_w^*)_{w\in E}\circ\varphi^*\circ\gamma\circ\phi^*$ é isomorfismo, e consequentemente,

$$H^n(G, Hom_R(\bigoplus_{w\in E} R(G/G_w), M)) \overset{\rho^*}{\simeq} H^n(W;M).$$

Por fim, dado $[f]\in H^n(G;M)$, temos:

$$\begin{aligned}
(\rho^*\circ\varepsilon^*\circ\psi^*)([f]) &= \rho^*\circ\varepsilon^*[\psi\circ f] = \rho^*[\varepsilon^\#\circ\psi\circ f]\\
&= ((\operatorname{res}^G_{G_w})_{w\in E}\circ(\pi_w^*)_{w\in E}\circ\varphi^*\circ\gamma\circ\phi^*)[\varepsilon^\#\circ\psi\circ f]\\
&= (\operatorname{res}^G_{G_w})_{w\in E}\circ(\pi_w^*)_{w\in E}\circ\varphi^*\circ\gamma[\phi\circ\varepsilon^\#\circ\psi\circ f]\\
&= (\operatorname{res}^G_{G_w})_{w\in E}\circ(\pi_w^*)_{w\in E}\circ\varphi^*([p_w\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\psi\circ f])_{w\in E}\\
&= (\operatorname{res}^G_{G_w})_{w\in E}\circ(\pi_w^*)_{w\in E}([\varphi_w\circ p_w\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\psi\circ f])_{w\in E}\\
&= ((\operatorname{res}^G_{G_w})[(\pi_w\circ\varphi_w\circ p_w\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\psi\circ f)])_{w\in E}.
\end{aligned}$$

Mas, para todo $u\in F_n$, sendo $F=(F_n)\to R$ uma resolução projetiva de R sobre RG,

$$\begin{aligned}
(\pi_w\circ\varphi_w\circ p_w\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\psi\circ f)(u) &= (\pi_w\circ\varphi_w\circ p_w\circ\phi\circ\varepsilon^\#\circ\psi)(f(u))\\
&= (\pi_w\circ\varphi_w\circ p_w\circ\phi)(\varepsilon^\#(\psi(f(u)))\\
&= (\pi_w\circ\varphi_w\circ p_w\circ\phi)(\psi(f(u))\circ\varepsilon))\\
&= (\pi_w\circ\varphi_w\circ p_w)(\psi(f(u))\circ\varepsilon\circ j_{w'})_{w'\in E}\\
&= (\pi_w\circ\varphi_w)(\psi(f(u))\circ\varepsilon\circ j_w)\\
&= \pi_w(\varphi_w(\psi(f(u))\circ\varepsilon\circ j_w))\\
&= (\varphi_w(\psi(f(u)))\circ\varepsilon\circ j_w)(1)\\
&= 1\cdot(\psi(f(u))\circ\varepsilon\circ j_w)(1\cdot G_w)\\
&= (\psi(f(u)))(1) = f(u),\ \forall u\in F_n.
\end{aligned}$$

Assim, $(\rho^*\circ\varepsilon^*\circ\psi^*[f]) = (\operatorname{res}^G_{G_w}[f])_{w\in E} = \operatorname{res}^G_W[f]$, como queríamos. ■

4.2 $H^*(G,\mathcal{S};M)$ e $H_*(G,\mathcal{S};M)$

Nesta seção apresentamos o conceito de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i,\, i \in I\}$ de subgrupos de G, $H_*(G,\mathcal{S};M)$ e $H^*(G,\mathcal{S};M)$. Essa teoria de (co)homologia relativa para pares $(G,\mathcal{S})$ foi introduzida por Bieri e Eckmann em [11] e está intimamente relacionada com a de pares (G,W), definida na seção anterior. O conceito de (co)homologia de pares de grupos $(G,\mathcal{S})$ é uma extensão natural da definição dada por Ribes ([28]) considerando $\mathcal{S} = \{S\}$, família com apenas um subgrupo. Para mais detalhes, veja [3]. Apresentamos também o conceito de dualidade para par que será utilizado em resultados dos capítulos seguintes.

Definição 4.2.1 *Um* ***par grupo*** $(G,\mathcal{S})$ *consiste de um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i,\, i \in I\}$ de subgrupos, não necessariamente distintos, de G.*

Considere um par grupo $(G,\mathcal{S})$ e $R(G/\mathcal{S})$ o R-módulo livre gerado pelas classes $gS_i, i \in I$, na qual G atua por multiplicação à esquerda. Assim,

$$R(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i\in I} R(G/S_i) \overset{Cor.2.2.1}{=} \bigoplus_{i\in I} Ind_{S_i}^G R = \bigoplus_{i\in I} RG \otimes_{RS_i} R.$$

Seja $\epsilon : R(G/\mathcal{S}) \to R$ a aplicação aumentação usual que leva cada gerador gS_i em $1 \in R$, e denotemos por $\Delta_{\mathcal{S}}$ o núcleo de ϵ.

Definição 4.2.2 *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i,\, i \in I\}$ e M um RG-módulo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ define-se os* ***grupos de homologia e cohomologia relativa*** *de ordem n para $(G,\mathcal{S})$ com coeficientes em M, respectivamente, por:*

$$\begin{aligned} H_n(G,\mathcal{S};M) &:= H_{n-1}(G;\Delta_{\mathcal{S}} \otimes_R M), \\ H^n(G,\mathcal{S};M) &:= H^{n-1}(G;Hom_R(\Delta_{\mathcal{S}},M)), \end{aligned}$$

onde as ações de G em $\Delta_{\mathcal{S}} \otimes_R M$ e $Hom_R(\Delta_{\mathcal{S}},M)$ são as ações diagonais (Definição 2.1.3), dadas por

$$g\cdot(x\otimes m) = g(x\otimes m) = gx\otimes gm \;\; e \;\; (g\cdot f)(x) = gf(g^{-1}x),$$

respectivamente (com $g \in G$, $x \in \Delta_{\mathcal{S}}$, $m \in M$ e $f \in Hom_R(\Delta_{\mathcal{S}},M)$).

Observação 4.2.1 **(i)** *Se $n < 0$, segue da definição que,*

$$H_n(G,\mathcal{S};M) = H^n(G,\mathcal{S};M) = 0.$$

(ii) *Se $\mathcal{S} = \emptyset$, por convenção, considera-se*

$$H_n(G,\emptyset;M) = H_n(G;M) \;\; e \;\; H^n(G,\emptyset;M) = H^n(G;M).$$

(iii) *É usual denotar, para qualquer família* $\mathcal{S}=\{S_i, i\in I\}$ *de subgrupos de* G,

$$H_n(\mathcal{S};M)=\bigoplus_{i\in I} H_n(S_i;M) \text{ e } H^n(\mathcal{S};M)=\prod_{i\in I} H^n(S_i;M),$$

onde M *é um* $R\mathcal{S}$*-módulo, isto é, um* RS_i*-módulo para todo* $i\in I$*. Note que se* M *é um* RG*-módulo então* M *é um* $R\mathcal{S}$*-módulo por restrição de escalares.*

Para o par grupo $(G,\mathcal{S})$, também temos uma sequência exata longa em cohomologia. A saber:

Proposição 4.2.1 *Sejam* $(G,\mathcal{S})$ *um par grupo onde* $\mathcal{S}=\{S_i,\, i\in I\}$ *e* M *é um* RG*-módulo. Então, temos a seguinte sequência exata longa:*

$$\cdots\to H^n(G;M)\overset{\text{res}\,_S^G}{\to}\prod_{i\in I}H^n(S_i;M)\overset{\delta}{\to}H^{n+1}(G,\mathcal{S};M)\overset{J}{\to}H^{n+1}(G;M)\to\cdots$$

que é natural no RG*-módulo* M *e no par* $(G,\mathcal{S})$*, onde*

$$\text{res}\,_S^G : H^n(G;M)\longrightarrow H^n(\mathcal{S};M):=\prod_{i\in I}H^n(S_i;M),$$

dada por $\text{res}\,_S^G([f])=(res_{S_i}^G[f])_{i\in I}$*, é a aplicação induzida (no nível* n *de cohomologia) pelas inclusões* $S_i\overset{i}{\hookrightarrow}G$*.*

Demonstração: [11], Proposição 1.1, ou [13], Proposição 2.5.6. ■

4.3 A Relação entre as Teorias de Cohomologia: de Bieri-Eckmann e Dicks-Dunwoody

O objetivo desta seção é apresentar a relação entre as duas teorias de cohomologia (de Bieri-Eckmann e Dicks-Dunwoody). Dado um par (G,W), para ir da teoria de Dicks-Dunwoody para a teoria de Bieri-Eckmann basta escolher a família de subgrupos $\mathcal{S}$ de G formada pelos subgrupos de isotropia dados pela ação de G em W. O teorema seguinte nos mostra como fazer isso nesse sentido, tal resultado foi estabelecido (implicitamente) em [14], mencionado em [6] e demonstrado em [17] e [8].

Teorema 4.3.1 *Sejam* G *um grupo,* M *um* RG*-módulo e* W *um* G*-conjunto. Considere* $E=\{w_i, i\in I\}$ *um conjunto de representantes para as* G*-órbitas de* W *e seja* $\mathcal{S}=\{S_i:=G_{w_i},\, i\in I\}$ *a família dos subgrupos de isotropia dos representantes em* E*. Então, os grupos de cohomologia relativa com coeficientes em* M *do par* (G,W)*, dados pela Definição* 4.1.1*, e os grupos de cohomologia relativa com coeficientes em* M *do par* $(G,\mathcal{S})$*, dados pela*

Definição 4.2.2, *são isomorfos, isto é, para todo* $n \in \mathbb{Z}$, *temos*

$$H^n(G, W; M) \simeq H^n(G, \mathcal{S}; M).$$

Demonstração: Pela Proposição 1.2.8, temos (o RG-isomorfismo)

$$RW \simeq \bigoplus_{w_i \in E} R(G/G_{w_i}) = R(G/\mathcal{S});\ w = gw_i \mapsto gG_{w_i}.\ (*)$$

Considere as aplicações aumentação

$$\varepsilon : RW \to R \quad \text{e} \quad \epsilon : R(G/\mathcal{S}) \to R,$$

$R(G/\mathcal{S})$ o R-módulo livre gerado pelas classes $gS_i = gG_{w_i}$, com $w_i \in E$ (elementos distintos). Se identificamos RW com $R(G/\mathcal{S})$ via o isomorfismo $(*)$, então $\Delta_W = \ker \varepsilon$ é identificado com $\Delta_{\mathcal{S}} = \ker \epsilon$, isto é, $\Delta_W \simeq \Delta_{\mathcal{S}}$ $(**)$.

Para melhor visualizar tome, por exemplo,

$$u = n_1 w_1' + \cdots + n_k w_k' \in RW = \bigcup_i RG(w_i), \ \text{ com } \ w_i' \in G(w_i), \text{isto é, } w_i' = g_i w_i.$$

Então $\varepsilon(u) = n_1 + \cdots + n_k$ $(\varepsilon : RW \to R)$. Se considerarmos $\epsilon : R(G/\mathcal{S}) \to R$, em $R(G/\mathcal{S})$ u corresponderia (via o isomorfismo $(*)$) a

$$\tilde{u} = n_1 g_1 G_{w_1} + \cdots + n_k g_k G_{w_k},$$

e daí

$$\epsilon(\tilde{u}) = \epsilon(n_1 g_1 G_{w_1} + \cdots + n_k g_k G_{w_k}) = n_1 + \cdots + n_k.$$

De modo que $\varepsilon(u) = 0 \Leftrightarrow \epsilon(\tilde{u}) = 0$, isto é, $u \in \Delta_W \Leftrightarrow \tilde{u} \in \Delta_{\mathcal{S}}$.

Assim,

$$\begin{aligned} H^n(G, W; M) &\overset{Prop.4.1.1}{\simeq} H^{n-1}(G; Hom_R(\Delta_W, M)) \\ &\overset{(**)}{\simeq} H^{n-1}(G; Hom_R(\Delta_{\mathcal{S}}, M)) \overset{Def.4.2.2}{=} H^k(G, \mathcal{S}; M). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. ■

Observação 4.3.1 *1. Um resultado similar é válido para os grupos de homologia* $H_n(G, \mathcal{S}; M)$ *e* $H_n(G, W; M)$.

2. Se usamos o isomorfismo entre os grupos de cohomologia, dado pelo teorema anterior, pode-se deduzir a sequência exata longa para (G, W) *a partir da sequência exata longa dada para* $(G, \mathcal{S})$ (*Proposição* 4.2.1).

4.4 Pares de Dualidade

Bieri e Eckmann ([11]) definiram o conceito de dualidade para um par grupo $(G, \mathcal{S})$, sendo $\mathcal{S}$ uma família de subgrupos de G. Posteriormente, Dicks e Dunwoody ([14]) consideraram dualidade para um par (G, W), onde G é um grupo e W é um G-conjunto. Nesta seção, apresentamos apenas alguns resultados (envolvendo esses conceitos) que serão utilizados na seção 5.5 do próximo capítulo. Em especial a relação entre os dois conceitos (para $R = \mathbb{Z}_2$).

Definição 4.4.1 ([*11*], § 4 *e* 6) *Dizemos que um par grupo* $(G, \mathcal{S})$ *é um* ***par de dualidade de dimensão*** n ***sobre*** R *ou um* D^n***-par*** *se existe um* RG*-módulo* C *e isomorfismos naturais*

$$\begin{aligned} H_{n-k}(G, \mathcal{S}; C \otimes_R M) &\simeq H^k(G; M), \\ H^k(G, \mathcal{S}; M) &\simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M), \end{aligned}$$

para todo RG*-módulo* M *e todo* $k \in \mathbb{Z}$*, sendo* $\mathcal{S}$ *uma família finita de* D^{n-1}*-subgrupos de* G *com módulo dualizante* C*. Se* $C \simeq R$*, diz-se que* $(G, \mathcal{S})$ *é um* PD^n*-par* (*par de dualidade de Poincaré*).

Proposição 4.4.1 *Sejam* G *um grupo e* $\mathcal{S}$ *uma família de subgrupos de* G*. Se* $(G, \mathcal{S})$ *é um* D^n*-par com módulo dualizante* C*, então:*
(*i*) G *é um* D^{n-1}*-grupo com o módulo dualizante* $\Delta_{\mathcal{S}} \otimes_R C$ (*com a* G*-ação diagonal*).
(*ii*) *Cada* $S_i \in \mathcal{S}$ *é um* D^{n-1}*-grupo com módulo dualizante* C (*considerado como* S_i*-módulo por restrição*).
(*iii*) $\mathcal{S}$ *é uma família finita de subgrupos de* G*.*

Demonstração: [11], Teorema 4.2. ■

Observação 4.4.1 *Se* $(G, \mathcal{S})$ *é um* PD^n*-par então, cada elemento de* $\mathcal{S}$ *é um* PD^{n-1}*-subgrupo de* G*.*

Definição 4.4.2 ([*14*], *p. 139, para* $\mathbb{Z}_2$) *Seja* (G, W) *um par onde* G *é um grupo e* W *é um* G*-conjunto.* (G, W) *é um* ***par de dualidade de Poincaré*** *de dimensão* n*, ou simplesmente um* PD^n*-par* (*sobre* $\mathbb{Z}_2$)*, se para todo* $\mathbb{Z}_2G$*-módulo* M *e para todo* $k \in \mathbb{Z}$*, existem os isomorfismos naturais:*

$$\begin{aligned} H_k(G, W; M) &\simeq H^{n-k}(G; M), \\ H^k(G, W; M) &\simeq H_{n-k}(G; M). \end{aligned}$$

Proposição 4.4.2 *Seja* (G, W) *um* PD^n*-par, onde* G *é um grupo e* W *é um* G*-conjunto. Então,*
(*i*) W *possui um número finito de* G*-órbitas.*
(*ii*) *Para cada* $w \in W$*, tem-se que o subgrupo de isotropia* G_w *é um* PD^{n-1}*-grupo.*

Demonstração: [24], p. 273. ■

Proposição 4.4.3 *Seja (G, W) um par onde G é um grupo e W é um G-conjunto. Considere E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W tal que $[G : G_w] = \infty, \forall w \in E$ e $\mathcal{S} = \{G_w, w \in E\}$. (G, W) é um PD^n-par (segundo a Definição 4.4.2) então $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par (de acordo com a Definição 4.4.1).*

Demonstração: [17] e [8]. ■

Capítulo

5

O Invariante $E(G, W, M)$

Neste capítulo apresentamos o invariante $E(G, W, M)$ e algumas de suas propriedades, dentre elas: a independência do conjunto de representantes para as G-órbitas e a invariância (cohomológica), por isomorfismo de pares. Aqui vamos considerar $R = \mathbb{Z}_2$, isto é, trabalhamos com $\mathbb{Z}_2G$-módulos, de modo que, podemos ver os grupos de (co)homologia (absoluta e relativa) como espaços vetoriais sobre $\mathbb{Z}_2$, o que nos permite falar em dimensão desses espaços. Algumas das propriedades apresentadas são bastante similares às existentes para $E(G, \mathcal{S}, M)$, o invariante definido em [3], (vide [7]) e foram adaptadas aqui, à notação de Dicks-Dunwoody.

5.1 A Definição de $E(G, W, M)$

Definição 5.1.1 *Sejam G um grupo e W um G-conjunto. Considere E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W tal que $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in E$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Define-se ([6]):*

$$E(G, W, M) := 1 + \dim \ker \operatorname{res}_W^G,$$

onde, $\operatorname{res}_W^G : H^1(G; M) \to H^1(W; M) = \prod_{w \in E} H^1(G_w; M)$; $\operatorname{res}_W^G([f]) = \left(\operatorname{res}_{G_w}^G [f]\right)_{w \in E}$, *sendo* $\operatorname{res}_{G_w}^G : H^1(G; M) \to H^1(G_w; M)$ *a aplicação induzida da inclusão* $G_w \hookrightarrow G$.

Observação 5.1.1

1. *Na definição anterior, em função da exigência de que $[G : G_w] = \infty$, segue que o grupo G considerado é um grupo infinito.*
2. *Se W é um G-conjunto e E é um conjunto de representantes para as G-órbitas em W, segue em vista do isomorfismo $H^*(G, \mathcal{S}; M) \simeq H^*(G, W; M)$, que $E(G, \mathcal{S}, M)$ coincide*

com $E(G,W,M)$ se $\mathcal{S} = \{G_w,\, w \in E\}$ (sendo $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in E$, e G_w os subgrupos de isotropia).

3. *A definição de $E(G,W,M)$ e de outros invariantes existentes para pares têm sido, de certo modo, motivada na definição de $e(G)$, o número de ends de um grupo G (veja [3]), e de $e(G,T)$, com T subgrupo de G, apresentados na seção 5.6 deste capítulo. Como $e(G) = 0$, se G é finito, e $e(G) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$, se G é infinito, ainda, $e(G,T) = 0$ se $[G : T] < \infty$, é natural supor $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in E$ e considerar a definição de $E(G,W,M)$ apresentada.*

4. *Há uma interpretação topológica para a (co)homologia relativa ([11]) que estende a interpretação dada para (co)homologia absoluta (Proposição 2.7.1). Logo, considerando o Teorema 4.3.1, é possível obter, em condições adequadas, uma interpretação topológica para $E(G,W,M)$.*

Apresenta-se a seguir uma propriedade de $E(G,W,M)$ que será útil na demonstração do principal resultado da próxima seção. Esse resultado foi dado em [7], usando a notação de Bieri-Eckmann.

Proposição 5.1.1 *Considere G um grupo, W um G-conjunto e E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W. Suponha que $[G : G_w] = \infty, \forall w \in E$. Seja M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e considere as restrições $\operatorname{res}^G_{G_w} : H^1(G; M) \to H^1(G_w; M)$. Então,*

$$E(G,W,M) = 1 + \dim \bigcap_{w \in E} \ker \operatorname{res}^G_{G_w}.$$

Demonstração: Temos que

$$\operatorname{res}^G_W : H^1(G;M) \to \prod_{w \in E} H^1(G_w;M) \text{ e } \operatorname{res}^G_{G_w} : H^1(G;M) \to H^1(G_w;M). \text{ Assim,}$$

$$\begin{aligned} f \in \ker \operatorname{res}^G_W &\Leftrightarrow \left(\operatorname{res}^G_{G_w}(f)\right)_{w \in E} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{res}^G_{G_w}(f) = 0,\ \forall w \in E \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f \in \ker \operatorname{res}^G_{G_w},\ \forall w \in E. \end{aligned}$$

Logo, $\ker \operatorname{res}^G_W = \bigcap_{w \in E} \ker \operatorname{res}^G_{G_w}$, de modo que

$$E(G,W,M) = 1 + \dim \ker \operatorname{res}^G_W = 1 + \dim \bigcap_{w \in E} \ker \operatorname{res}^G_{G_w}.$$

■

5.2 Independência do Conjunto de Representantes de Órbitas na Definição de $E(G,W,M)$

Observe que $E(G,W,M)$ é definido sobre um grupo G, um G-conjunto W com $[G : G_w] = \infty, \forall w \in E$, onde E é um conjunto de representantes para as G-órbitas em W e M é um RG-módulo. Nosso interesse agora é mostrar que essa definição independe do conjunto de representantes das G-órbitas escolhido.

Lema 5.2.1 *Sejam W um G-conjunto e $w \in W$. Se as G-órbitas $G(w) = G(w')$ e $w' = g_0 w$ ($g_0 \in G$) então $G_{w'} = g_0 G_w g_0^{-1}$.*

Demonstração: Por hipótese

$G(w) = G(w') \Leftrightarrow \{gw,\, g \in G\} = \{gw',\, g \in G\}$, de modo que $w' \in G(w') = G(w)$.

Supondo que $w' = g_0 w$, temos

$g \in G_{w'} \Leftrightarrow gw' = w' \Leftrightarrow gg_0 w = g_0 w \Leftrightarrow g_0^{-1} g g_0 w = w \Leftrightarrow g_0^{-1} g g_0 \in G_w \Leftrightarrow g \in g_0 G_w g_0^{-1}$. ■

Proposição 5.2.1 *Se W é um G-conjunto, w e w' são elementos de uma mesma G-órbita e $w' = g_0 w$ então, considerando as restrições*

$$\operatorname{res}^G_{G_w} : H^1(G;M) \to H^1(G_w, M) \quad e \quad \operatorname{res}^G_{G_{w'}} : H^1(G;M) \to H^1(G_{w'}, M),$$

tem-se

$$\ker \operatorname{res}^G_{G_w} = \ker \operatorname{res}^G_{G_{w'}}.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.8.2, temos que

$$H^1(G;M) \simeq \frac{Der(G,M)}{P(G,M)} \text{ e } H^1(G_w;M) \simeq \frac{Der(G_w,M)}{P(G_w,M)},$$

onde

$$Der(G,M) = \{d : G \to M;\, d(gh) = d(g) + gd(h),\, \forall g,h \in G\}$$

é o grupo das derivações de G em M, e

$$P(G,M) = \{d_m \in Der(G,M);\, d_m(g) = gm - m,\, m \in M \text{ fixo}\}$$

é o grupo das derivações principais de G em M.

Indicando um elemento $d + P(G,M)$ de $H^1(G;M)$ por $[d]$, tem-se que

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{res}^G_{G_w} : & H^1(G;M) & \to & H^1(G_w;M) \\ & [d] & \mapsto & [d|_{G_w}]. \end{array}$$

Note que

$$[d] \in \ker \operatorname{res}_{G_w}^{G} \Leftrightarrow \operatorname{res}_{G_w}^{G}([d]) = 0 \Leftrightarrow [d|_{G_w}] = 0 \Leftrightarrow d|_{G_w} \in P(G_w, M),$$

ou seja, existe $m \in M$ tal que $d|_{G_w} = d_m : G_w \to M$. Similarmente,

$$[d] \in \ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^{G} \Leftrightarrow \operatorname{res}_{G_{w'}}^{G}([d]) = 0 \Leftrightarrow [d|_{G_{w'}}] = 0 \Leftrightarrow d|_{G_{w'}} \in P(G_{w'}, M),$$

ou seja, existe $m' \in M$ tal que $d|_{G_{w'}} = d_{m'} : G_{w'} \to M$.

Mostremos que $\ker \operatorname{res}_{G_w}^{G} \subset \ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^{G}$.

Seja $[d] \in \ker \operatorname{res}_{G_w}^{G}$ e $m \in M$ tal que $d|_{G_w} = d_m$.

Pelo lema anterior, uma vez que $w' = g_0 w$, temos que $G_{w'} = g_0 G_w g_0^{-1}$. Seja $m' := g_0 m - d(g_0)$, vamos mostrar que $[d] \in \ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^{G}$. De fato, se $g' \in G_{w'}$ então $g' = g_0 g g_0^{-1}$, para algum $g \in G_w$. Daí usando o fato que em uma derivação tem-se $d(g) = -gd(g^{-1})$ (Proposição 2.8.1), segue que

$$\begin{aligned}
d|_{G_{w'}}(g') &= d(g') \overset{\text{Lema}}{=} d(g_0 g g_0^{-1}) = d(g_0) + g_0 d(g g_0^{-1}) \\
&= d(g_0) + g_0 d(g) + g_0 g d(g_0^{-1}) \\
&= d(g_0) + g_0 d(g) + g_0 g(-g_0^{-1} d(g_0)) \\
&= d(g_0) + g_0 d(g) - g' d(g_0) \\
&= -g' d(g_0) + d(g_0) + g_0(gm - m) \,(\text{pois } g \in G_w \text{ e } d|_{G_w} = d_m) \\
&= -g' d(g_0) + d(g_0) + g_0 gm - g_0 m \\
&= -g' d(g_0) + d(g_0) + g_0 g(g_0^{-1} g_0) m - g_0 m \\
&= -g' d(g_0) + d(g_0) + g' g_0 m - g_0 m \\
&= g'(g_0 m - d(g_0)) - (g_0 m - d(g_0)) \\
&= g' m' - m' = d_{m'}(g').
\end{aligned}$$

Assim, $\ker \operatorname{res}_{G_w}^{G} \subset \ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^{G}$. De modo análogo, mostra-se que $\ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^{G} \subset \ker \operatorname{res}_{G_w}^{G}$, consequentemente

$$\ker \operatorname{res}_{G_w}^{G} = \ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^{G}.$$

■

Corolário 5.2.1 *A definição de $E(G,W,M)$ independe do conjunto de representantes das G-órbitas escolhido.*

Demonstração: Seja W um G-conjunto e E, E' conjuntos de representantes para as G-órbitas em W. Notemos que se $w' = g_0 w$, com $w \in E$ e $w' \in E'$, então

$$[G : G_w] = \infty \Leftrightarrow [G : G_{w'}] = \infty,$$

visto que $[G : G_w] = |G(w)| = |G(w')| = [G : G_{w'}]$. Pela proposição anterior,

$$\ker \operatorname{res}^G_{G_w} = \ker \operatorname{res}^G_{G_{w'}},$$

daí,

$$\bigcap_{w \in E} \ker \operatorname{res}^G_{G_w} = \bigcap_{w' \in E'} \ker \operatorname{res}^G_{G_{w'}},$$

e o resultado segue da Proposição 5.1.1. ■

5.3 A Invariância Cohomológica de $E(G, W, M)$ (por Isomorfismo de Pares)

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são os pares $((G, W); M)$ tais que G é um grupo, W é um G-conjunto com $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in E$, onde E é um conjunto de representantes para as G-órbitas de W e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, e cujos morfismos são aplicações

$$\varphi : ((G, W); M) \to ((G', W'); M')$$

consistindo de:
(i) Um homomorfismo de grupos $\alpha : G \to G'$;
(ii) Uma aplicação $\psi : W \to W'$, com $\psi(E) \subset E'$ tal que $\alpha(G_w) = G'_{\psi(w)}$, $\forall w \in E$, sendo E' um conjunto de representantes para as G'-órbitas de W';
(iii) Um homomorfismo $\phi : M' \to M$ satisfazendo a condição $\phi(\alpha(g) \cdot m') = g \cdot \phi(m')$, $\forall g \in G$ e $m' \in M'$, isto é, ϕ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$-módulos onde consideramos M' como $\mathbb{Z}_2G$-módulo via α. (Note que, no par $((G', W'), M')$, M' é um $\mathbb{Z}_2G'$-módulo).

Dados objetos $((G, W), M)$ e $((G', W'), M')$ de $\mathcal{C}$, um isomorfismo entre esses objetos consiste de:
(i) Um isomorfismo de grupos $\alpha : G \to G'$;
(ii) Uma bijeção $\psi : W \to W'$, tal que $\psi(E) = E'$ e $\alpha(G_w) = G'_{\psi(w)}$, $\forall w \in E$;
(iii) Um isomorfismo de grupos abelianos $\phi : M' \to M$ que é um isomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$-módulos, considerando em M' a G-ação $g \cdot m' := \alpha(g) \cdot m'$.

Neste caso se diz que os **pares** $((G, W), M)$ e $((G', W'), M')$ são **isomorfos** na categoria $\mathcal{C}$.

No próximo resultado mostramos que $E(G,W,M)$ é invariante na categoria $\mathcal{C}$. Essa demonstração foi dada em [1] usando a notação de Bieri-Eckmann e adaptada aqui à notação de Dicks-Dunwoody para pares (G,W).

Teorema 5.3.1 *Se os pares* $((G,W);M)$ *e* $((G',W');M')$ *são isomorfos (na categoria* $\mathcal{C}$*), então*

$$E(G,W,M) = E(G',W',M').$$

Demonstração: Considere $E = \{w_i,\, i \in I\}$ e $E' = \{w_i',\, i \in I\}$ conjuntos de representantes para as G-órbitas de W e as G'-órbitas de W', respectivamente. Uma vez que

$$\mathbb{Z}_2W \overset{Prop.1.2.8}{\simeq} \bigoplus_{w\in E} \mathbb{Z}_2(G/G_w) \text{ e } \mathbb{Z}_2W' \overset{Prop.1.2.8}{\simeq} \bigoplus_{w'\in E'} \mathbb{Z}_2(G'/G_{w'}),$$

pela hipótese do teorema podemos considerar o isomorfismo $\rho : \mathbb{Z}_2W \to \mathbb{Z}_2W'$ definido nos geradores por $\rho(xG_{w_i}) = \alpha(x)G'_{\psi(w_i)}$, cuja inversa $\beta : \mathbb{Z}_2W' \to \mathbb{Z}_2W$ é dada por

$$\beta(yG'_{w_i'}) = \alpha^{-1}(y)G_{\psi^{-1}(w_i)}.$$

Note que $\rho(\Delta) = \Delta'$, onde $\Delta = \ker\varepsilon$ e $\Delta' = \ker\varepsilon'$, sendo $\varepsilon : \mathbb{Z}_2W \to \mathbb{Z}_2$ e $\varepsilon' : \mathbb{Z}_2W' \to \mathbb{Z}_2$ as aplicações aumentação. De fato, se $u \in \Delta \subset \mathbb{Z}_2W$, então

$$u = \sum r_{g_{k_i}} g_{k_i} G_{w_{k_i}};\ r_{g_{k_i}} \in \mathbb{Z}_2,\ r_{g_{k_i}} = 0 \text{ para quase todo } r_{g_{k_i}} \text{ e } \varepsilon(u) = 0, \text{ ou seja}$$

$$u = 1g_{k_1}G_{w_{k_1}} + \ldots + 1g_{k_n}G_{w_{k_n}},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } \varepsilon(u) = 1 + \ldots + 1 = n \cdot 1 = 0,$$

de modo que, n é par. Então,

$$\rho(u) = 1\alpha(g_{k_1})G'_{\psi(w_{k_1})} + \ldots + 1\alpha(g_{k_n})G'_{\psi(w_{k_n})}. \text{ Daí}$$

$$\varepsilon'(\rho(u)) = 1 + \ldots + 1 = n \cdot 1 = 0 \text{ (pois } n \text{ é par).}$$

Portanto, $\rho(\Delta) \subset \Delta'$. Similarmente, tem-se $\Delta' \subset \rho(\Delta)$, de modo que $\Delta' = \rho(\Delta)$. Assim,

$$\bar{\rho} = \rho|_\Delta : \Delta \to \Delta'$$

é também isomorfismo. Dessa forma, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Delta & \xrightarrow{i_G} & \mathbb{Z}_2W & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \bar{\rho}} & & \uparrow{\scriptstyle \rho} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \\
0 & \longrightarrow & \Delta' & \xrightarrow{i_{G'}} & \mathbb{Z}_2W' & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Como $\mathbb{Z}_2$ é $\mathbb{Z}_2$-projetivo, pela Proposição 1.2.2 e pelo Teorema 1.4.5, este diagrama induz o

seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 W, M) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) & \longrightarrow & 0 \quad (1) \\ & & \uparrow{\scriptstyle \phi} & & \uparrow{\scriptstyle (\rho,\phi)^{\#}} & & \uparrow{\scriptstyle (\bar{\rho},\phi)^{\#}} & & \\ 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M') & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 W', M') & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta', M') & \longrightarrow & 0 \quad (2) \end{array}$$

onde $(\rho,\phi)^{\#}(f) = \phi \circ f \circ \rho$ e $(\bar{\rho},\phi)^{\#}(f) = \phi \circ f \circ \bar{\rho}$.

Denotando $Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)$ por X e $Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta', M')$ por X', temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 W, M) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \quad (1) \\ & & \uparrow{\scriptstyle \phi} & & \uparrow{\scriptstyle (\rho,\phi)^{\#}} & & \uparrow{\scriptstyle (\bar{\rho},\phi)^{\#}} & & \\ 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2, M') & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 W', M') & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 \quad (2) \end{array}$$

Seja $F \to \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2 G'$. Observe que $\alpha : G \to G'$ induz a seguinte ação de G em F_i

$$g * x = \alpha(g) \cdot x, \; \forall g \in G \text{ e } x \in F_i.$$

Daí, cada F_i é um $\mathbb{Z}_2 G'$-módulo projetivo e como α é isomorfismo, cada F_i é um $\mathbb{Z}_2 G$-módulo projetivo, ou seja, $F \to \mathbb{Z}_2$ também é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2 G$.

Seja $\tau : F \to F$ a aplicação identidade. Temos que $\tau(g * x) = g * x = \alpha(g) \cdot x = \alpha(g)\tau(x)$.

Aplicando $Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(F, \_)$ à sequência (1) e $Hom_{\mathbb{Z}_2 G'}(F, \_)$ à sequência (2), obtemos o seguinte diagrama comutativo de complexo de cocadeias:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(F, M) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(F, Hom(\mathbb{Z}_2 W, M)) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2 G}(F, X) & \longrightarrow & 0 \quad (1') \\ & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \\ 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2 G'}(F, M') & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2 G'}(F, Hom(\mathbb{Z}_2 W', M')) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}_2 G'}(F, X') & \longrightarrow & 0 \quad (2') \end{array}$$

As sequências (1') e (2') são exatas pois $F \to \mathbb{Z}_2$ é uma resolução $\mathbb{Z}_2 G$-projetiva e $\mathbb{Z}_2 G'$-projetiva (Teorema 1.4.6) e, as aplicações verticais são todas isomorfismos.

Raciocinando como na demonstração da Proposição 4.1.2, obtemos o seguinte diagrama comutativo cujas linhas são dadas pelas sequências exatas longas em cohomologia (Proposição 4.1.2):

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(G;M) & \longrightarrow & H^0(W;M) & \longrightarrow & H^1(G,W;M) & \xrightarrow{J} & H^1(G;M) & \xrightarrow{\text{res } {}^{G}_{W}} & H^1(W;M) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(G';M) & \longrightarrow & H^0(W';M) & \longrightarrow & H^1(G',W';M') & \xrightarrow{J'} & H^1(G';M') & \xrightarrow{\text{res } {}^{G'}_{W'}} & H^1(W';M') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

As aplicações verticais são todas isomorfismos pois são induzidas por isomorfismos, logo

Im $J \simeq$ Im J'. Assim,

$$\begin{aligned} E(G,W,M) &= 1 + \dim \ker \operatorname{res}_W^G \\ &= 1 + \dim \operatorname{Im} J = 1 + \dim \operatorname{Im} J' \\ &= 1 + \dim \ker \operatorname{res}_{W'}^{G'} = E(G',W',M'). \end{aligned}$$

■

5.4 Algumas Propriedades de $E(G,W,M)$

O próximo resultado foi apresentado em [6].

Proposição 5.4.1 *Sejam G um grupo e W um G-conjunto. Considere $E = \{w_i,\, i \in I\}$ um conjunto de representantes para as G-órbitas em W tal que $[G : G_{w_i}] = \infty$, $\forall w_i \in E$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se os $\mathbb{Z}_2$-espaços vetoriais $H^0(G;M)$, $H^0(W;M) := \prod_{i\in I} H^0(G_{w_i};M)$ e $H^1(G,W;M)$ possuem dimensão finita, então*

$$E(G,W,M) = 1 + \dim H^0(G;M) - \dim H^0(W;M) + \dim H^1(G,W;M).$$

Demonstração: Pela Proposição 4.1.2, temos a sequência exata longa dada por

$$0 \to H^0(G;M) \xrightarrow{\chi} H^0(W;M) \xrightarrow{\delta} H^1(G,W;M) \xrightarrow{J} H^1(G;M) \xrightarrow{\operatorname{res}_W^G} \prod_{i\in I} H^1(G_{w_i};M) \to \cdots,$$

da qual obtemos a seguinte sequência exata curta

$$0 \to H^0(G;M) \xrightarrow{\chi} H^0(W;M) \xrightarrow{\delta} H^1(G,W;M) \xrightarrow{J} \operatorname{Im} J \to 0.$$

Temos (como usado na demonstração do Teorema 5.3.1) que,

$$E(G,W,M) = 1 + \dim \ker \operatorname{res}_W^G = 1 + \dim \operatorname{Im} J.$$

Agora, como χ, δ e J são transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita, segue pelo teorema do núcleo e da imagem que:

$$\begin{aligned} \dim H^0(G;M) &= \dim \ker \chi + \dim \operatorname{Im} \chi. \\ \dim H^0(W;M) &= \dim \ker \delta + \dim \operatorname{Im} \delta. \\ \dim H^1(G,W;M) &= \dim \ker J + \dim \operatorname{Im} J. \end{aligned}$$

Além disso, como a sequência anterior é exata, temos

Im $\chi = \ker \delta$, Im $\delta = \ker J$, $\dim \ker \chi = 0$, e $H^0(G;M) \simeq$ Im χ, pois, pela exatidão, χ é injetora.

Logo, tem-se

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Im} J &= \dim H^1(G, W; M) - \dim \ker J \\
&= \dim H^1(G, W; M) - \dim \operatorname{Im} \delta \\
&= \dim H^1(G, W; M) - \dim H^0(W; M) + \dim \ker \delta \\
&= \dim H^1(G, W; M) - \dim H^0(W; M) + \dim \operatorname{Im} \chi \\
&= \dim H^1(G, W; M) - \dim H^0(W; M) + \dim H^0(G; M).
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. ■

Proposição 5.4.2 *Sejam G um grupo, W um G-conjunto, M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W. Suponha que $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in E$. Considere E' um subconjunto de E e $W' = \dot{\bigcup}_{w' \in E'} G(w')$. Então, G atua sobre W' com conjunto de representantes E' e*

$$E(G, W, M) \leq E(G, W', M).$$

Demonstração: Temos que G atua sobre W, logo existe uma aplicação $\phi : G \times W \to W$ que define a G-ação em W. Daí, a restrição $\phi| : G \times W' \to W'$ define uma ação de G sobre W'. Além disso,

$$W' \subset W \text{ e } \{G_{w'},\, w' \in E'\} \subset \{G_w,\, w \in E\},$$

assim, pela Observação 2.4.2,

$$\bigcap_{w \in E} \ker \operatorname{res}^G_{G_w} \subset \bigcap_{w' \in E'} \ker \operatorname{res}^G_{G_{w'}},$$

então,

$$1 + \dim \bigcap_{w \in E} \ker \operatorname{res}^G_{G_w} \leq 1 + \dim \bigcap_{w' \in E'} \ker \operatorname{res}^G_{G_{w'}}.$$

Portanto, da Proposição 5.1.1, segue que $E(G, W, M) \leq E(G, W', M)$. ■

Exemplo 5.4.1 *Sejam $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $W = \mathbb{R}$ com a G-ação (natural) $a^n \cdot w := n + w$, $\forall n \in G$ e $w \in W$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.*

Temos que $E = [0, 1[$ é um conjunto de representantes para as $\mathbb{Z}$-órbitas em $\mathbb{R}$. De fato, para cada $r \in \mathbb{R}$, existe $w \in [0, 1[$ e $n \in \mathbb{Z}$ tal que $r = w + n = a^n \cdot w$, e então

$$G(r) = G(w) = \{w + n,\, n \in \mathbb{Z}\} = w + \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\bigcup_{w \in E} G(w) = \bigcup_{w \in [0,1[} w + \mathbb{Z} = \mathbb{R}.$$

Além disso, para todo $w \in E$,

$$G_w = \{a^n \in G;\, a^n \cdot w = w\} = \{a^n \in \mathbb{Z};\, n + w = w\} = \{1\},$$

(isto é, a G-ação é livre). Logo, $[G : G_w] = [\mathbb{Z} : 1] = |\mathbb{Z}| = \infty$, de modo que $E(\mathbb{Z}, \mathbb{R}, M)$ está bem definido.

Considere, agora,

$$E' = \left[0, \frac{1}{2}\right[\subset E \text{ e}$$

$$W' = \bigcup_{w' \in E'} G(w') = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2} + k, 1 + k\right[\subset \mathbb{R},$$

note que (W' é um $\mathbb{Z}$-conjunto). Pela proposição anterior segue que

$$E(G, W, M) \leq E(G, W', M).$$

De fato, neste caso, vale

$$E(G, \mathbb{R}, M) = E(G, W', M) = 1 + \dim H^1(G; M) = 1 + \dim M_G,$$

como mostra a proposição seguinte.

Proposição 5.4.3 *Sejam G um grupo infinito e W um G-conjunto. Se a G-ação em W é livre, e E é um conjunto de representantes para as G-órbitas em W, então*

$$E(G, W, M) = 1 + \dim H^1(G; M).$$

Demonstração: Como a ação é livre, temos que $G_w = \{g \in G;\, gw = w\} = \{1\}$, $\forall w \in E$ e daí,

$$H^1(G_w, M) = H^1(\{1\}; M) = 0,\ \forall w \in E,$$

logo, $\ker \operatorname{res}_W^G = H^1(G; M)$. Então,

$$E(G, W, M) = 1 + \dim H^1(G; M) \overset{Ex.2.6.1(2)}{=} 1 + \dim M_G.$$

Note que $[G : G_w] = |G| = \infty$, $\forall w \in W$. ■

Observação 5.4.1 *Um resultado análogo ao que acabamos de mostrar foi dado em [6], para $E(G, W, \mathbb{Z}_2)$. Na proposição anterior verificamos que vale o caso mais geral, onde M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo qualquer.*

Exemplo 5.4.2 *Considere $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $W = \mathbb{R}$ com a G-ação $a^n \cdot w = n + w$, dada no Exemplo* 5.4.1 *e $M = \mathbb{Z}_2$ visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial. Então $E(G, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_2) = 2$. De fato,*

vimos que $E = [0,1[$ *é um conjunto de representantes para as* G*-órbitas em* W *e que esta* G*-ação, é livre, de modo que* $G_w = \{1\}$, $\forall w \in E$ *e* $\{G_w\}_{w\in E} = \{\{1\}_{w\in E}\}$. *Daí pela Proposição* 5.4.3, *e o fato que*

$$H^1(G;\mathbb{Z}_2) = H^1(\mathbb{Z};\mathbb{Z}_2) \overset{Ex.2.6.1,\,2.(\mathrm{i})}{=} H^0(\mathbb{Z};\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \,(\textit{a ação de } G \textit{ em } \mathbb{Z}_2 \textit{ é trivial}),$$

segue que

$$E(G,\mathbb{R},\mathbb{Z}_2) = 1 + \dim H^1(G;\mathbb{Z}_2) = 2.$$

Observação 5.4.2 *A demonstração da próxima proposição foi apresentada em* [3], *para par de grupos* (G,S), *onde* G *é um grupo e* S *é um subgrupo de* G *com* $[G:S] = \infty$ *e será adaptada aqui para pares* (G,W).

Proposição 5.4.4 *Sejam* G *um grupo e* W *um* G*-conjunto satisfazendo* $[G:G_w] = \infty$, $\forall w \in W$. *Considere* E *um conjunto de representantes para as* G*-órbitas em* W *e dois* $\mathbb{Z}_2G$*-módulos* N *e* M. *Se existe um* $\mathbb{Z}_2G$*-homomorfismo* $\phi : N \to M$ *tal que a aplicação induzida* $\phi^* : H^1(G;N) \to H^1(G;M)$ *é um monomorfismo, então*

$$E(G,W,N) \leq E(G,W,M).$$

Demonstração: Para cada $w \in E$, o $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo $\phi : N \to M$ induz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^1(G;N) & \xrightarrow{\phi^*} & H^1(G;M) \\ {\scriptstyle \mathrm{res}\,^G_{G_w,N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}\,^G_{G_w,M}} \\ H^1(G_w;N) & \xrightarrow[(id_{G_w},\phi)^*]{} & H^1(G_w;M) \end{array}$$

Seja $\alpha \in \ker \mathrm{res}\,^G_{G_w,N}$. Temos que

$$\begin{aligned} (\mathrm{res}\,^G_{G_w,M} \circ \phi^*)(\alpha) &= (id_{G_w},\phi)^* \circ \mathrm{res}\,^G_{G_w,N}(\alpha) \\ &= (id_{G_w},\phi)^*(0) = 0. \end{aligned}$$

Então, $\phi^*(\alpha) \in \ker \mathrm{res}\,^G_{G_w,M}$ e daí $\phi^*(\ker \mathrm{res}\,^G_{G_w,N}) \subset \ker \mathrm{res}\,^G_{G_w,M}$. Assim

$$\begin{aligned} \bigcap_{w\in E} \ker \mathrm{res}\,^G_{G_w,N} &\overset{\phi^*\ monom.}{\simeq} \phi^*\left(\bigcap_{w\in E} \ker \mathrm{res}\,^G_{G_w,N}\right) \\ &= \bigcap_{w\in E} \phi^*(\ker \mathrm{res}\,^G_{G_w,N}) \subset \bigcap_{w\in E} \ker \mathrm{res}\,^G_{G_w,M}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\dim \bigcap_{w\in E} \mathrm{res}\,^G_{G_w,N} \leq \dim \bigcap_{w\in E} \mathrm{res}\,^G_{G_w,M},$$

e a desigualdade

$$E(G,W,N) \leq E(G,W,M)$$

segue, então, da Proposição 5.1.1. ■

5.5 $E(G,W,\mathbb{Z}_2)$ e Dualidade

Sejam G um grupo, W um G-conjunto, satisfazendo $[G : G_w] = \infty$, para todo w em W e $M = \mathbb{Z}_2$ visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial. Nesta seção apresentamos um resultado para $E(G,W,\mathbb{Z}_2) \overset{not.}{=} E'(G,W)$, quando (G,W) é um par de dualidade e algumas consequências, seguindo [6]. Para tanto, necessitamos da interpretação topológica de (co)homologia de grupos (Proposição 2.7.1) e da seguinte definição:

Definição 5.5.1 *Um espaço topológico Y é **finitamente dominado** se existe um CW complexo finito K, tal que Y é um retrato de K, ou seja, existem aplicações contínuas $i : Y \to K$ e $r : K \to Y$, com $r \circ i = id_Y$.*

Proposição 5.5.1 *Sejam (G,W) um PD^n-par, $E = \{w_i,\, i = 1,\ldots,r\}$ um conjunto de representantes para as G-órbitas em W, com $[G : G_{w_i}] = \infty$, $\forall w_i \in E$, e $\mathcal{S} = \{G_{w_i},\, w_i \in E\}$ a família dos subgrupos de isotropia de G (associada a E). Se G é finitamente apresentado, então $E'(G,W)$ é finito e*

$$E'(G,W) = 2 - r + \dim H_{n-1}(G;\mathbb{Z}_2).$$

Demonstração: Como (G,W) é um PD^n-par, pela Proposição 4.4.3, temos que $(G,\mathcal{S})$ é um PD^n-par com $\mathcal{S} = \{G_{w_i},\, w_i \in E\}$. Daí pela Proposição 4.4.1, G é um D^{n-1}-grupo e, consequentemente, G é do tipo FP (Proposição 2.9.2). Assim, como G é finitamente apresentado, temos que G é um $K(G,1)$-complexo finitamente dominado ([12], VIII. 7.1. p. 205), de modo que $H_*(G;\mathbb{Z}_2) \overset{Prop.2.7.1}{\simeq} H_*(K(G,1);\mathbb{Z}_2)$ é finitamente gerado (veja o Exemplo 2.7.2) $(*)$. Além disso, temos:

$$H^0(G;\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2,\ \prod_{i=1}^{r} H^0(G_{w_i};\mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(G_{w_i};\mathbb{Z}_2) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_2,$$

e por dualidade, $H^1(G,W;\mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-1}(G,\mathbb{Z}_2)$. Logo

$$\dim H^1(G,W;\mathbb{Z}_2) = \dim H_{n-1}(G,\mathbb{Z}_2) < \infty \text{ (por } (*)).$$

Portanto, pela Proposição 5.4.1 para $M = \mathbb{Z}_2$, obtem-se

$$E'(G,W) = 1 + 1 - r + \dim H_{n-1}(G;\mathbb{Z}_2) < \infty.$$

■

Corolário 5.5.1 *Sejam G um grupo, W um G conjunto e $E = \{w_i,\, i = 1, \ldots, r\}$ um conjunto de representantes para as G-órbitas em W tal que $[G : G_{w_i}] = \infty$, $\forall w_i \in E$. Se (G, W) é um PD^n-par e G é finitamente apresentado, então*

$$|E| = r \leq 1 + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2).$$

Demonstração: Pelo teorema anterior,

$$r = 2 + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) - E'(G, W),$$

como $E'(G, W) \geq 1$, o resultado segue. ■

Corolário 5.5.2 *Se $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e existe um G-conjunto W tal que (G, W) é um PD^2-par, com $[G : G_{w_i}] = \infty$, $\forall w_i \in E$, onde $E = \{w_i,\, i = 1, \ldots, r\}$ é um conjunto de representantes para as G-órbitas em W, então $|E| \leq 3$.*

Demonstração: Como $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ é um D^1-grupo (Exemplo 2.9.1), pelo corolário anterior, temos que

$$|E| \leq 1 + \dim H_1(G; \mathbb{Z}_2).$$

Então, o resultado segue do fato que $H^1(G; \mathbb{Z}_2) \overset{Ex.2.7.2}{\simeq} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. ■

5.6 O Invariante $E(G, W, \mathcal{F}_T G)$

Nesta seção apresentamos o $\mathbb{Z}_2 G$-módulo $\mathcal{F}_T G$, o invariante cohomológico para um grupo G, $e(G)$, denominado número de ends de G; para pares de grupo (G, T): $e(G, T)$ e $\widetilde{e}(G, T)$, sendo T um subgrupo de G; verificamos algumas propriedades do invariante $E(G, W, M)$, nos casos particulares em que $M = \mathbb{Z}_2 G$, $M = \mathbb{Z}_2(G/T)$ e $M = \mathcal{F}_T G$, e procuramos obter algumas relações entre tais invariantes.

O $\mathbb{Z}_2 G$-módulo $\mathcal{F}_T G$

Exemplo 5.6.1 *Seja G um grupo. Em $\mathcal{P}(G)$, o conjunto das partes de G, com a operação diferença simétrica, dada por:*

$$A + B := A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B),\ \forall A, B \in \mathcal{P}(G),$$

*temos uma G-**ação natural** dada por*

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathcal{P}(G) & \to & \mathcal{P}(G) \\ (g, A) & \mapsto & g \cdot A = \{g \cdot a;\ a \in A\}. \end{array}$$

Observe que todo elemento de $\mathcal{P}(G)$ tem ordem 2, uma vez que $A + A = \emptyset$. Assim, pode-se dar a $\mathcal{P}(G)$ uma estrutura de $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Além disso, pode-se verificar que os subconjuntos de $\mathcal{P}(G)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}G &:= \{F \subset G;\ F \text{ é finito}\} \subset \mathcal{P}(G),\\
\mathcal{F}_T G &:= \{A \in \mathcal{P}(G);\ A \subset F.T,\ \text{para algum } F \in \mathcal{F}G\},\ \text{sendo } T \text{ um subgrupo de } G,\\
\mathcal{Q}G &:= \{A \subset G;\ A + g \cdot A \in \mathcal{F}G,\ \forall g \in G\} \text{ e}\\
\mathcal{A}_T G &:= \{A \subset G;\ A + g \cdot A \in \mathcal{F}_T G,\ \forall g \in G\}(T \text{ subgrupo de } G),
\end{aligned}$$

onde " $+$ " denota a operação diferença simétrica em $\mathcal{P}(G)$ citada anteriormente, são $\mathbb{Z}_2G$-submódulos de $\mathcal{P}(G)$ com as operações induzidas.

Definição 5.6.1 *Um elemento $A \in \mathcal{P}(G)$ é denominado T-**finito** se existe um subconjunto finito F de G tal que $A \subset F.T$.*

Observação 5.6.1 *Segue da definição anterior que $\mathcal{F}_T G$ é o conjunto de todos os subconjuntos T-finitos de G.*

Seja B um subconjunto de G. Denotemos por

$$\overline{B} = B + \mathcal{F}_T G \in \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T G}.$$

Note que o espaço quociente $\mathcal{P}(G)/\mathcal{F}_T G$ é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a G-ação induzida, dada por, $g \cdot \overline{B} = \overline{g \cdot B}$.

Na proposição seguinte veremos algumas propriedades dos $\mathbb{Z}_2G$-submódulos acima.

Proposição 5.6.1 *Sejam G um grupo, S e T subgrupos de G tais que $T \subset S \subset G$. Temos:*
(i) Se T é finito, então $\mathcal{F}_T G = \mathcal{F}G$.

(ii) $\mathcal{F}_T G \subset \mathcal{A}_T G$.

(iii) Se $[G : T] < \infty$ então $\mathcal{F}_T G = \mathcal{P}(G)$.

(iv) Se $[S : T] < \infty$ então $\mathcal{F}_S G = \mathcal{F}_T G$.

(v) $\left(\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T G}\right)^G = \dfrac{\mathcal{A}_T G}{\mathcal{F}_T G}$, *em particular,* $\dfrac{\mathcal{Q}G}{\mathcal{F}G} = \dfrac{\mathcal{A}_{\{1\}} G}{\mathcal{F}_{\{1\}} G} = \left(\dfrac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}G}\right)^G$.

Demonstração: (i) Claramente $\mathcal{F}G \subset \mathcal{F}_T G$. Agora, se $A \in \mathcal{F}_T G$ então $A \subset F \cdot T$ para algum $F \in \mathcal{F}G$. Como T é finito temos que A é finito, ou seja, $A \in \mathcal{F}G$. Logo, $\mathcal{F}_T G \subset \mathcal{F}G$ e assim,

tem-se a igualdade.

(ii) Seja $B \in \mathcal{F}_T G$. Então, existe um subconjunto finito F de G tal que $B \subset F.T$. Assim, dado $g \in G$, $g \cdot B \subset g \cdot F.T$. Tomemos $F' := g \cdot F$, note que F' é finito. Logo,

$$B + g \cdot B \subset (F \cup F').T \in \mathcal{F}_T G, \, \forall g \in G$$

e consequentemente, $B \in \mathcal{A}_T G$.

(iii) Como $[G : T] < \infty$ temos que G/T possui um número finito de classes laterais distintas, $g_1 T, \ldots, g_k T \in G/T$, e, $G = g_1 T \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} g_k T$. Assim, se $B \in \mathcal{P}(G)$ então $B \subset F.T$, onde $F = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Logo, $B \in \mathcal{F}_T G$ e daí, $\mathcal{P}(G) \subset \mathcal{F}_T G$. Como $\mathcal{F}_T G \subset \mathcal{P}(G)$ (por definição), segue a igualdade.

(iv) Segue, diretamente da definição e da hipótese $T \subset S$, que $\mathcal{F}_T G \subset \mathcal{F}_S G$. Por outro lado, considere $B \in \mathcal{F}_S G$. Daí $B \subset F'.S$ para algum subconjunto finito F' de G. Como $[S : T] < \infty$,

$$S = s_1 T \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} s_k T \subset F''.T,$$

onde $F'' = \{s_1 \ldots s_k\}$. Dessa forma

$$B \subset F'.S \subset F'(F''.T) \subset F.T,$$

onde $F = F'.F''$ é um subconjunto finito de G. Assim, $B \in \mathcal{F}_T G$. Portanto, $\mathcal{F}_S G = \mathcal{F}_T G$.

(v) Temos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T G}\right)^G &= \left\{\overline{B} \in \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T G};\, g \cdot \overline{B} = \overline{B},\, \forall g \in G\right\} \\
&= \left\{\overline{B} \in \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T G};\, \overline{g \cdot B} = \overline{B},\, \forall g \in G\right\} \\
&= \left\{\overline{B} \in \frac{\mathcal{P}(G)}{\mathcal{F}_T G};\, B + g \cdot B \in \mathcal{F}_T G,\, \forall g \in G\right\} = \frac{\mathcal{A}_T G}{\mathcal{F}_T G}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 5.6.2 *Sejam G um grupo e $\mathcal{P}(G)$ o conjunto das partes de G. Temos:*

$$\overline{\mathbb{Z}_2 G} = \mathrm{Coind}\,_{\{1\}}^{G} \mathbb{Z}_2 \simeq \mathcal{P}(G)$$

como $\mathbb{Z}_2 G$-módulos. Além disso, o $\mathbb{Z}_2 G$-submódulo $\mathbb{Z}_2 G \simeq \mathrm{Ind}\,_{\{1\}}^{G} \mathbb{Z}_2$ de $\overline{\mathbb{Z}_2 G}$ é levado por este

isomorfismo no $\mathbb{Z}_2G$-submódulo $\mathcal{F}G$ de $\mathcal{P}(G)$.

Demonstração: Considere

$$\begin{array}{rccl} \rho: & \overline{\mathbb{Z}_2G} = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) & \to & \mathcal{P}(G) \\ & f & \mapsto & \rho(f) := A_f; \quad A_f = \{g \in G;\ f(g^{-1}) = 1\}. \end{array}$$

Temos:

(I) ρ está bem definida, pois

$\forall f, h \in \overline{\mathbb{Z}_2G}$ e $g \in \mathbb{Z}_2G$, $f = h \Rightarrow f(g^{-1}) = h(g^{-1})$. Assim

$f(g^{-1}) = 1 \Leftrightarrow h(g^{-1}) = 1 \Rightarrow A_f = A_h$.

(II) ρ é homomorfismo de grupos. De fato, $\forall f, h \in \overline{\mathbb{Z}_2G}$ e $g \in G$, temos:

- $$\begin{array}{rcl} g \in \rho(f+h) & \Leftrightarrow & g \in A_{f+h} \Leftrightarrow (f+h)(g^{-1}) = 1 \Leftrightarrow f(g^{-1}) + h(g^{-1}) = 1 \\ & \Leftrightarrow & f(g^{-1}) = 0 \text{ e } h(g^{-1}) = 1 \text{ ou } f(g^{-1}) = 1 \text{ e } h(g^{-1}) = 0 \\ & \Leftrightarrow & g \in (A_h \cap (A_f)^c) \cup (A_f \cap (A_h)^c) \Leftrightarrow g \in A_f + A_h \\ & \Leftrightarrow & g \in \rho(f) + \rho(h); \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcl} \forall g' \in G,\ \rho(g' \cdot f) & = & \{\tilde{g} \in G;\ (g' \cdot f)(\tilde{g}^{-1}) = 1\} = \{\tilde{g} \in G;\ f(\tilde{g}^{-1} g') = 1\} \\ & = & \{\tilde{g} \in G;\ f((g')^{-1}\tilde{g})^{-1} = 1\} \overset{g := (g')^{-1}\tilde{g}}{=} \{g'g \in G;\ f(g^{-1}) = 1\} \\ & = & g'\rho(f). \end{array}$$

(III) Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathcal{P}(G) & \to & Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) \\ & A & \mapsto & \psi(A) := f_A; \qquad f_A(g) := \begin{cases} 1, & \text{se} \quad g^{-1} \in A, \\ 0, & \text{se} \quad g^{-1} \notin A. \end{cases} \end{array}$$

ψ está bem definida e é uma inversa de ρ. De fato,

- $\forall f \in \overline{\mathbb{Z}_2G}$, $(\psi \circ \rho)(f) = \psi(A_f) = f_{A_f}$. Mas $f_{A_f} = f$, pois

$$f_{A_f}(g) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad g^{-1} \in A_f, \\ 0, & \text{se} \quad g^{-1} \notin A_f. \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad f(g) = 1, \\ 0, & \text{se} \quad f(g) = 0. \end{cases}$$

Logo, $f_{A_f}(g) = f(g)$, $\forall g \in G$, consequentemente $(\psi \circ \rho)(f) = f$.

- $\forall A \in \mathcal{P}(G)$, $(\rho \circ \psi)(A) = \rho(f_A) = A_{f_A} = \{g \in G;\, f_A(g^{-1}) = 1\} = \{g^{-1} \in G;\, f_A(g) = 1\} = A$, pois $f_A(g) = 1 \Leftrightarrow g^{-1} \in A$.

Com isso, concluímos que ρ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo e portanto

$$\overline{\mathbb{Z}_2G} \simeq \mathcal{P}(G).$$

Agora, defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{Z}_2G & \to & \overline{\mathbb{Z}_2G} \\ & g' & \mapsto & \varphi(g');\ \ \varphi(g')(g) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } g = (g')^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{array} \right. \end{array}$$

e estenda por linearidade.

(i) Temos que φ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos, uma vez que $\varphi(g_0g') = g_0\varphi(g')$, $\forall g_0, g' \in G$. De fato,

$$\varphi(g_0g')(g) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } g = (g_0g')^{-1} = (g')^{-1}g_0^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{array} \right.$$

e, considerando a G-ação no $\mathrm{Coind}_{\{1\}}^{G}\mathbb{Z}_2 = \overline{\mathbb{Z}_2G}$,

$$(g_0\varphi(g'))(g) = \varphi(g')(gg_0) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } gg_0 = (g')^{-1}, \text{ ou seja, se } g = (g')^{-1}g_0^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{array} \right.$$

(ii) φ é um $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo.

De fato, tomemos $u = 1 \cdot g_1 + \ldots + 1 \cdot g_t$ e $u' = 1 \cdot h_1 + \ldots + 1 \cdot h_r \in \mathbb{Z}_2G$ tais que $u \neq u'$. Então, existe g_i, para algum $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $g_i \neq h_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(u)(g_i^{-1}) & = & (1\varphi(g_1) + \ldots + 1\varphi(g_t))(g_i^{-1}) = 1\varphi(g_1)(g_i^{-1}) + \ldots + 1\varphi(g_t)(g_i^{-1}) = 1, \text{ e} \\ \varphi(u')(g_i^{-1}) & = & (1\varphi(h_1) + \ldots + 1\varphi(h_r))(g_i^{-1}) = 1\varphi(h_1)(g_i^{-1}) + \ldots + 1\varphi(h_r)(g_i^{-1}) = 0. \end{array}$$

Portanto, $\varphi(u) \neq \varphi(u')$.

(iii) $\rho(\varphi(\mathbb{Z}_2G)) = \mathcal{F}G$. Temos:

$A \in \rho(\varphi(\mathbb{Z}_2G)) \Rightarrow A = \rho(\varphi(x))$, para algum $x \in \mathbb{Z}_2G$. Mas

$x \in \mathbb{Z}_2G \Rightarrow x = 1 \cdot g_1 + \ldots + 1 \cdot g_s$, com $1 \in \mathbb{Z}_2$, $g_i \in G$ e $g_i \neq g_j$ se $i \neq j$. Assim,

$\varphi(x) = 1 \cdot \varphi(g_1) + \ldots + 1 \cdot \varphi(g_s)$. Usando que

$$\varphi(g_i)(g) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } g = (g_i)^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{array} \right.$$

obtem-se que $\varphi(x)(g^{-1}) = 1\varphi(g_1)(g^{-1}) + \ldots + 1\varphi(g_s)(g^{-1}) = 1$ se, e somente se, $g \in \{g_1, \ldots, g_s\}$. Dessa forma, temos $A = \rho(\varphi(x)) = \{g \in G;\ \varphi(x)(g^{-1}) = 1\} = \{g_1 \ldots g_s\}$, ou seja, $A \in \mathcal{F}G$.

Reciprocamente, seja $A = \{g_1, \ldots, g_s\} \in \mathcal{F}G$. Basta tomar $x = 1 \cdot g_1 + \ldots + 1 \cdot g_k \in \mathbb{Z}_2 G$ e daí $\varphi(x) \in \varphi(\mathbb{Z}_2 G)$. Como

$$\rho(\varphi(x)) = \{g \in G;\ \varphi(x)(g^{-1}) = 1\} = \{g_1, \ldots, g_s\} = A,$$

temos que $A \in \rho(\varphi(\mathbb{Z}_2(G)))$. Portanto, $\mathbb{Z}_2 G \simeq \varphi(\mathbb{Z}_2 G)$ e $\rho(\varphi(\mathbb{Z}_2 G)) = \mathcal{F}G$, de modo que $\mathbb{Z}_2 G$ é levado por ρ em $\mathcal{F}G$. ■

Proposição 5.6.3 *Se G é um grupo e T é um subgrupo finito de G então*

$$\mathbb{Z}_2 G \simeq \mathcal{F}_T G.$$

Demonstração: Este resultado segue diretamente da proposição anterior e da Proposição 5.6.1 (i). ■

Exemplo 5.6.2 [*Aplicação do Lema de Shapiro*] *Sejam G um grupo e $\mathcal{P}(G)$ o conjunto das partes de G. Temos*

$$\begin{aligned} H^n(G; \mathcal{P}(G)) &\overset{Prop.5.6.2}{\simeq} H^n(G; \operatorname{Coind}_{\{1\}}^{G} \mathbb{Z}_2) \\ &\overset{L.Shapiro}{\simeq} H^n(\{1\}; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & se\ n = 0, \\ 0, & se\ n \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposição 5.6.4 *Se G é um grupo e T é um subgrupo de G então*

$$\mathcal{F}_T G \simeq \operatorname{Ind}_{T}^{G} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$$

como $\mathbb{Z}_2 G$-módulos, onde

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{T}^{G} \overline{\mathbb{Z}_2 T} &:= \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T} = \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \operatorname{Coind}_{\{1\}}^{T} \mathbb{Z}_2 \\ &= \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 T, \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

Demonstração: Considere as seguintes aplicações:

$$\operatorname{Ind}_{T}^{G} \overline{\mathbb{Z}_2 T} = \operatorname{Ind}_{T}^{G} \operatorname{Coind}_{\{1\}}^{T} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\vartheta} \operatorname{Coind}_{T}^{G} \operatorname{Coind}_{\{1\}}^{T} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\nu} \operatorname{Coind}_{\{1\}}^{G} \mathbb{Z}_2 = \overline{\mathbb{Z}_2 G} \xrightarrow{\rho} \mathcal{P}(G)$$

onde ϑ e ν são as $\mathbb{Z}_2 G$-aplicações dadas no Lema 2.2.1 (para $S = \{1\}$ e $M = \mathbb{Z}_2$), isto é, se $g_0 \otimes h \in \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 T, \mathbb{Z}_2) = \operatorname{Ind}_{T}^{G} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$, então

$$\vartheta(g_0 \otimes h)(g) = \begin{cases} (gg_0) \cdot h, & \text{se } gg_0 \in T, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e se $f \in \text{Coind}\,_T^G \text{Coind}\,_{\{1\}}^T \mathbb{Z}_2 = Hom_{\mathbb{Z}_2 T}(\mathbb{Z}_2 G, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 T, \mathbb{Z}_2))$,

$$\nu(f)(g) = f(g)(1), \text{ onde } 1 \in \mathbb{Z}_2 T,$$

e ρ é o $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfismo dado na demonstração da Proposição 5.6.2. Como ϑ é monomorfismo e ν é isomorfismo, temos que

$$\text{Ind}\,_T^G \overline{\mathbb{Z}_2 T} = \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$$

é um $\mathbb{Z}_2 G$-submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2 G}$ e $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfo ao $\mathbb{Z}_2 G$-submódulo $\rho((\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T}))$ de $\mathcal{P}(G)$ (via ρ), ou seja,

$$\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T} \simeq \rho((\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T})).$$

Dessa forma, para concluirmos a demonstração, vamos mostrar que

$$\rho((\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T})) = \mathcal{F}_T G. \qquad (1)$$

De fato, temos:

(I)
$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F}_T G &\Leftrightarrow A \subset F \cdot T,\ F \subset G,\ F \text{ finito} \\ &\Leftrightarrow A = g_0 T_0 \cup \ldots \cup g_k T_k;\ g_i \in G,\ T_i \subset T, (i = 1, \ldots, k). \end{aligned}$$

(II) Da mesma maneira que temos o $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfismo $\rho : \overline{\mathbb{Z}_2 G} \to \mathcal{P}(G)$, podemos definir um $\mathbb{Z}_2 T$-isomorfismo (similar) $\bar{\rho} : \overline{\mathbb{Z}_2 T} \to \mathcal{P}(T)$. Assim, considerando a aplicação injetora

$$\begin{array}{rccc} j: & \overline{\mathbb{Z}_2 T} & \to & \overline{\mathbb{Z}_2 G} \\ & \tilde{f} & \mapsto & f; \quad f(g) = \left\{ \begin{array}{cc} \tilde{f}(g), & \text{se } g \in T, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{array} \right. \end{array}$$

obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{Z}_2 T} & \xrightarrow{\ j\ } & \overline{\mathbb{Z}_2 G} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{\rho}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathcal{P}(T) & \hookrightarrow & \mathcal{P}(G) \end{array}$$

(III) $\rho(\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T}) \subset \mathcal{F}_T G$. Com efeito, seja $g_0 \otimes \tilde{f}_0$ um elemento básico de $\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$. Então, $\forall g \in G$,

$$(\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)(g^{-1}) = \left\{ \begin{array}{cc} [(g^{-1} g_0) \cdot \tilde{f}_0](1) = \tilde{f}_0(g^{-1} g_0), & \text{se } g^{-1} g_0 \in T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{array} \right.$$

Daí, pela definição de ρ (dada na demonstração da Proposição 5.6.2),

$$\begin{aligned}
\rho((\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)) &= \{g \in G;\ (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)(g^{-1}) = 1\} \\
&= \{g \in G;\ g^{-1}g_0 \in T \text{ e } \tilde{f}_0(g^{-1}g_0) = 1\} \\
&= \{g \in G;\ g^{-1}g_0 \in T \text{ e } \tilde{f}_0((g_0^{-1}g)^{-1}) = 1\} \\
&= \{g \in G;\ g_0^{-1}g = t \in \bar{\rho}(\tilde{f}_0)\} \\
&= \{g_0 t;\ t \in \bar{\rho}(\tilde{f}_0)\} \\
&= g_0\bar{\rho}(\tilde{f}_0) = g_0 T_0,
\end{aligned}$$

com $T_0 := \bar{\rho}(\tilde{f}_0) \subset T$ (já que $\bar{\rho} : \overline{\mathbb{Z}_2 T} \to \mathcal{P}(T)$), e portanto, $\rho((\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)) \in \mathcal{F}_T G$.

Agora, se $x = g_0 \otimes \tilde{f}_0 + g_1 \otimes \tilde{f}_1 \in \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$ então

$$\begin{aligned}
\rho(\nu \circ \vartheta)(x) &= \{g \in G;\ (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0 + g_1 \otimes \tilde{f}_1)(g^{-1}) = 1\} \\
&= \{g \in G;\ (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)(g^{-1}) + (\nu \circ \vartheta)(g_1 \otimes \tilde{f}_1)(g^{-1}) = 1\} \\
&= \left\{g \in G;\ (\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0)(g^{-1}) = 1 \text{ ou } g \in G;\ (\nu \circ \vartheta)(g_1 \otimes \tilde{f}_1)(g^{-1}) = 1\right\} \\
&= \rho(\nu \circ \vartheta)(g_0 \otimes \tilde{f}_0) \cup \rho(\nu \circ \vartheta)(g_1 \otimes \tilde{f}_1) \\
&= g_0 T_0 \cup g_1 T_1 \in \mathcal{F}_T G,
\end{aligned}$$

com $T_i = \bar{\rho}(\tilde{f}_i) \subset T$ para $i = 0, 1$.

Mais geralmente, se $x = g_0 \otimes \tilde{f}_0 + g_1 \otimes \tilde{f}_1 + \ldots + g_k \otimes \tilde{f}_k \in \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$ então

$$\rho(\nu \circ \vartheta)(x) = g_0 T_0 \cup \ldots \cup g_k T_k \in \mathcal{F}_T G,$$

onde $T_i = \bar{\rho}(\tilde{f}_i) \subset T$ para $i = 0, 1, \ldots, k$. Assim, obtemos a inclusão desejada.

(IV) $\mathcal{F}_T G \subset \rho(\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T})$. De fato, seja $A = g_0 T_0 \cup \ldots \cup g_k T_k \in \mathcal{F}_T G$, $g_i \in G$, $T_i \subset T$, $i = 1, \ldots k$. Então,

$$A = \rho(\nu \circ \vartheta)(g_o \otimes (\bar{\rho})^{-1}(T_0) + \ldots + g_k \otimes (\bar{\rho})^{-1}(T_k)) \in \rho((\nu \circ \vartheta)(\mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T})).$$

De fato, como $T_i \in \mathcal{P}(T)$ para $i = 0, \ldots, k$, temos que $(\bar{\rho})^{-1}(T_i) \in \overline{\mathbb{Z}_2 T}$, $i = 0, \ldots, k$, de modo que $y := g_o \otimes ((\bar{\rho})^{-1}(T_0)) + \ldots + g_k \otimes ((\bar{\rho})^{-1}(T_k)) \in \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \overline{\mathbb{Z}_2 T}$. Considere $\tilde{f}_i := (\bar{\rho})^{-1}(T_i)$. Então, $\bar{\rho}(\tilde{f}_i) = T_i$ e, como em (III), obtem-se,

$$\rho(\nu \circ \vartheta)(y) = \rho(\nu \circ \vartheta)(g_o \otimes ((\bar{\rho})^{-1}(T_0)) + \ldots + g_k \otimes ((\bar{\rho})^{-1}(T_k))) = g_0 T_0 \cup \ldots \cup g_k T_k = A.$$

Assim obtemos a igualdade (1), de modo que

$$\rho \circ \nu \circ \vartheta : \mathrm{Ind}\, {}_T^G\overline{\mathbb{Z}T} \to \mathcal{F}_T G$$

é um isomorfismo, como desejado. ■

Observação 5.6.2 *Como* $\overline{\mathbb{Z}_2 T} \simeq \mathcal{P}(T)$ (*Proposição* 5.6.2)*, segue da proposição anterior que*

$$\mathcal{F}_T G \simeq \mathrm{Ind}\, {}_T^G\mathcal{P}(T).$$

Definição 5.6.2 *Sejam* G *um grupo e* S*,* T *subgrupos de* G*. Dizemos que* S *e* T *são* ***conjugados*** *se existe* $g \in G$ *tal que* $S = gTg^{-1}$*. Neste caso denotamos* S *por* T^g*.*

Proposição 5.6.5 *Sejam* G *um grupo e* T *um subgrupo de* G*. Então*

$$\mathcal{F}_T G \simeq \mathcal{F}_{T^g} G,\ \forall g \in G\,(\textit{como } \mathbb{Z}_2 G - \textit{módulos}).$$

Demonstração: Seja $g \in G$ e considere

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathcal{F}_{T^g} G & \to & \mathcal{F}_T G \\ & A & \mapsto & \sigma(A) := Ag = \{ag;\ a \in A\}. \end{array}$$

- σ está bem definida, pois

  $$A \in \mathcal{F}_{T^g} G \Rightarrow A \subset g_1 T^g \cup \ldots \cup g_k T^g.\ \text{Daí,}$$

  $\sigma(A) \subset \sigma(g_1 T^g \cup \ldots \cup g_k T^g) = (g_1 T^g \cup \ldots \cup g_k T^g)g = g_1 gT \cup \ldots \cup g_k gT = F'T$, $F' = \{g_1 g, \ldots, g_k g\}$ (subconjunto finito de G), isto é, $\sigma(A) \subset \mathcal{F}_T G$.

- σ é homomorfismo de grupos e $\mathbb{Z}_2 G-$isomorfismo, pois para todos elementos A, B de $\mathcal{F}_{T^g} G$ e para todo $g' \in G$, temos:

  $$\sigma(A + B) = (A + B)g = Ag + Bg = \sigma(A) + \sigma(B),\ \text{e}$$

  $$\sigma(g' \cdot A) = (g'A)g = g'(Ag) = g'\sigma(A).$$

  Agora, considere

  $$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{F}_T G & \to & \mathcal{F}_{T^g} G \\ & B & \mapsto & \psi(B) := Bg^{-1}. \end{array}$$

  ψ está bem definida e claramente é uma inversa de σ. De modo que σ é bijetor. Portanto, σ é um $\mathbb{Z}_2 G$-isomorfismo, isto é, $\mathcal{F}_T G \simeq \mathcal{F}_{T^g} G$, como $\mathbb{Z}_2 G -$ módulos. ■

Observação 5.6.3 *Dados um grupo G, um subgrupo T de G e um $\mathbb{Z}_2T$-módulo M, o somando gM de $\operatorname{Ind}_T^G M$ (Proposição 2.2.3 (i)) é fechado sob a ação de T^g, pois*

$$gtg^{-1} \cdot (g \otimes m) = gtg^{-1}g \otimes m = gt \otimes m = g \otimes tm, \, \forall t \in T, \, m \in M.$$

Assim gM é um $\mathbb{Z}_2T^g$-módulo. Em particular, se T é um subgrupo normal em G temos que gM é um $\mathbb{Z}_2T$-módulo.

Lema 5.6.1 *Seja G um grupo. Se T é um subgrupo normal de G, então*

$$g\mathcal{P}(T) \simeq \mathcal{P}(T), \quad \textit{como } \mathbb{Z}_2T - \textit{módulos.}$$

Demonstração: Como na observação anterior temos que $g\mathcal{P}(T)$ é um $\mathbb{Z}_2T$-módulo (com a T-ação dada por $t * (gA) = gtg^{-1} \cdot gA = gtA$, $\forall t \in T$, $A \in \mathcal{P}(T)$). Além disso, $\mathcal{P}(T)$ é um $\mathbb{Z}_2T$-módulo com a ação dada pela multiplicação à esquerda (Exemplo 5.6.1). Considere

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & g\mathcal{P}(T) & \to & \mathcal{P}(T) \\ & g \cdot A & \mapsto & A. \end{array}$$

Note que γ é um $\mathbb{Z}_2T$-homomorfismo, pois, para todo $t \in T$,

$$\gamma(t * gA) = \gamma(gtA) = tA = t\gamma(gA).$$

Além disso, claramente, γ é bijetor e assim, tem-se o $\mathbb{Z}_2T$-isomorfismo

$$g\mathcal{P}(T) \simeq \mathcal{P}(T).$$

■

Número de ends: $e(G)$ e $e(G, T)$

Definição 5.6.3 ([*31*], *p.* 173.) *Dado um grupo G, define-se* (*algebricamente*) ***o número de ends*** *de G, $e(G)$, por:*

$$e(G) := \dim \left(\frac{\mathcal{Q}G}{\mathcal{F}G} \right).$$

Proposição 5.6.6 *Se G é um grupo infinito, então $e(G) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$.*

Demonstração: [31], p. 175. ■

Proposição 5.6.7 *Seja G um grupo. Então*

$$e(G) = 0 \Leftrightarrow G \textit{ é finito.}$$

Demonstração: Vamos assumir que $e(G) = 0$. Suponhamos que G seja infinito, então pela proposição anterior, temos que

$$e(G) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \geq 1,$$

o que é uma contradição. Reciprocamente, se G é finito, então

$$\mathcal{P}(G) = \mathcal{F}G = \mathcal{Q}G,$$

de modo que

$$e(G) = \dim\left(\frac{\mathcal{Q}G}{\mathcal{F}G}\right) = 0.$$

Portanto, o resultado segue. ■

Proposição 5.6.8 *Seja G um grupo. Se G é finitamente gerado então $e(G) = 0$, 1, 2 ou ∞.*

Demonstração: [31], Corolário 5.9 p. 176. ■

Definição 5.6.4 *Dados G um grupo e T um subgrupo de G, define-se o número de ends para o par (G, T), $e(G, T)$, por:*

$$e(G, T) := \dim(\mathcal{P}(G/T)/\mathcal{F}(G/T))^G.$$

O invariante end $\widetilde{e}(G, T)$

A próxima definição foi dada por Kropholler e Roller (vide [23] e [22]).

Definição 5.6.5 *([31], p. 198.) Sejam G um grupo e T um subgrupo de G. Então*

$$\widetilde{e}(G, T) := \dim H^0(G; \mathcal{P}(G)/\mathcal{F}_T G) = \dim(\mathcal{P}(G)/\mathcal{F}_T G)^G.$$

Lema 5.6.2 *Se $[G : T] = \infty$, então $\widetilde{e}(G, T) = 1 + \dim H^1(G; \mathcal{F}_T G)$.*

Demonstração: [22], Lema 2.4. ■

Agora, vamos analisar o invariante $E(G, W, M)$ para certos $\mathbb{Z}_2 G$-módulos M e obter algumas relações entre tais invariantes.

Proposição 5.6.9 *Sejam G um grupo, W um G-conjunto, E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W (com $[G : G_w] = \infty$, para todo $w \in E$) e T um subgrupo qualquer de G tal que $[G : T] < \infty$. Então,*

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = 1.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} H^1(G; \mathcal{F}_T G) &\overset{Obs.5.6.2}{\simeq} H^1(G; \operatorname{Ind}{}_T^G \mathcal{P}(T)) \\ &\overset{Prop.2.2.5}{\simeq} H^1(G; \operatorname{Coind}{}_T^G \mathcal{P}(T)) \\ &\overset{L.Shapiro}{\simeq} H^1(T; \mathcal{P}(T)) \overset{Ex.5.6.2}{=} 0. \end{aligned}$$

Assim, o domínio da aplicação restrição $\operatorname{res}{}^G_{W,\mathcal{F}_T G} : H^1(G; \mathcal{F}_T G) \to \prod_{w \in E} H^1(G_w; \mathcal{F}_T G)$ é nulo, dessa forma $\ker \operatorname{res}{}^G_{W,\mathcal{F}_T G} = 0$ e portanto,

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = 1.$$

■

Proposição 5.6.10 *Sejam G um grupo, W um G-conjunto, E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W (com $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in E$) e S, T subgrupos de G com $T \subset S \subset G$ e $[S : T] < \infty$. Então,*

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathcal{F}_S G).$$

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 5.6.1 (iv). ■

Proposição 5.6.11 *Sejam G um grupo, W um G-conjunto satisfazendo $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in W$, T um subgrupo de G e $g \in G$. Então,*

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathcal{F}_{T^g} G).$$

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 5.6.5, e da invariância de $E(G, W, M)$. ■

O próximo resultado foi apresentado em [7], usando a notação de Bieri-Eckmann.

Proposição 5.6.12 *Sejam (G, W) um par onde G é um grupo e W é um G-conjunto com $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in W$, e T um subgrupo de G com $[G : T] = \infty$. Então,*

$$E(G, W, \mathbb{Z}_2(G/T)) \leq E(G, W, \mathcal{F}_T G).$$

Demonstração: Considere a sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2 T$-módulos

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \simeq \{\emptyset, T\} \to \mathcal{P}(T) \to Q = \frac{\mathcal{P}(T)}{\{\emptyset, T\}} \to 0.$$

Como $\mathbb{Z}_2 G$ é um $\mathbb{Z}_2 T$-módulo livre (Corolário 1.2.1) e todo módulo livre é plano (Definição 1.4.3 e Lema 1.4.2), obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} \mathcal{P}(T) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} Q \to 0$$

a qual induz a sequência exata longa em cohomologia (onde ϕ e π são os homomorfismos induzidos naturalmente da sequência anterior):

$$\begin{aligned} 0 \ &\to \ H^0(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathbb{Z}_2) \to H^0(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T)) \to H^0(G; \operatorname{Ind}_T^G Q) \to \\ &\to \ H^1(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\phi^*} H^1(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T)) \to H^1(G; \operatorname{Ind}_T^G Q) \to \cdots \end{aligned}$$

Como $[G : T] = \infty$, pela Proposição 2.2.6 temos que

$$H^0(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathbb{Z}_2) = 0, \ H^0(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T)) = 0 \text{ e } H^0(G; \operatorname{Ind}_T^G Q) = 0,$$

assim,

$$\phi^* : H^1(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathbb{Z}_2) \to H^1(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T))$$

é um monomorfismo. Então, pela Proposição 5.4.4,

$$E(G, W, \operatorname{Ind}_T^G \mathbb{Z}_2) \leq E(G, W, \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T)),$$

e como

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2(G/T) &\overset{Cor.2.2.1}{\simeq} \operatorname{Ind}_T^G \mathbb{Z}_2, \text{ e} \\ \mathcal{F}_T G &\overset{Obs.5.6.2}{\simeq} \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T), \end{aligned}$$

segue que

$$E(G, W, \mathbb{Z}_2(G/T)) \leq E(G, W, \mathcal{F}_T G).$$

■

Os últimos resultados deste capítulo foram adaptados de resultados dados em [1] e [7].

Proposição 5.6.13 *Sejam G um grupo, W um G-conjunto com $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in W$, e T um subgrupo finito de G. Se G_w é finito para todo w, então*

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) = e(G).$$

Demonstração: Se T é um subgrupo finito de G, então

$$\mathcal{F}_T G \overset{Prop.5.6.1(i)}{=} \mathcal{F} G \overset{Prop.5.6.2}{\simeq} \mathbb{Z}_2 G.$$

Sejam E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W, w um elemento de E e L

um transversal para o conjunto de classes laterais $G_w g$. Temos:

$$\begin{aligned} H^1(G_w; \mathbb{Z}_2 G) &\overset{Cor.2.2.1}{\simeq} H^1(G_w; \operatorname{Ind}_{\{1\}}^{G} \mathbb{Z}_2) \\ &\overset{F.Mackey}{\simeq} H^1(G_w; \bigoplus_{g \in L} \operatorname{Ind}_{\{1\}}^{G_w} g\mathbb{Z}_2) \\ &\overset{Prop.2.3.2(ii)}{\simeq} \bigoplus_{g \in L} H^1(G_w; \operatorname{Ind}_{\{1\}}^{G_w} g\mathbb{Z}_2) \\ &\overset{Prop.2.2.5}{\simeq} \bigoplus_{g \in L} H^1(G_w; \operatorname{Coind}_{\{1\}}^{G_w} g\mathbb{Z}_2) \\ &\overset{L.Shapiro}{\simeq} \bigoplus_{g \in L} H^1(\{1\}; g\mathbb{Z}_2) \overset{Ex.2.6.1(1)}{\simeq} 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{res}_W^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \to \prod_{w \in E} H^1(G_w; \mathbb{Z}_2 G)$$

é a aplicação nula e

$$\ker \operatorname{res}_W^G = H^1(G; \mathbb{Z}_2 G).$$

Daí

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \overset{Prop.5.6.6}{=} e(G).$$

(Note que na última igualdade usamos que G é infinito, uma vez que, por hipótese $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in E$). ■

Proposição 5.6.14 *Sejam G um grupo e W um G-conjunto. Suponha que a ação de G em W é transitiva e considere $E = \{w\}$, $w \in W$, um conjunto de representantes para as G-órbitas em W, sendo $[G : G_w] = \infty$. Se G_w é um subgrupo finitamente gerado e normal em G, então*

$$E(G, W, \mathcal{F}_{G_w} G) = 1 + \dim H^1(G; \mathcal{F}_{G_w} G) = \widetilde{e}(G, G_w).$$

Demonstração: Temos:

$$\begin{aligned} H^1(G_w; \mathcal{F}_{G_w} G) &\overset{Obs.5.6.2}{\simeq} H^1(G_w; \operatorname{Ind}_{G_w}^{G} \mathcal{P}(G_w)) \\ &\overset{Prop.2.2.3}{\simeq} H^1(G_w; \bigoplus_{g \in G/G_w} g\mathcal{P}(G_w)) \\ &\overset{Prop.2.3.2(ii)}{\simeq} \bigoplus_{g \in G/G_w} H^1(G_w; g\mathcal{P}(G_w)) \\ &\overset{Lema\,5.6.1}{\simeq} \bigoplus_{g \in G/G_w} H^1(G_w; \mathcal{P}(G_w)) \overset{Ex.5.6.2}{\simeq} 0. \end{aligned}$$

Assim, como $E = \{w\}$, $\operatorname{res}_W^G : H^1(G; \mathcal{F}_{G_w} G) \to H^1(G_w; \mathcal{F}_{G_w} G)$ é a aplicação nula, donde

segue que $\ker \operatorname{res}_W^G = H^1(G; \mathcal{F}_{G_w} G)$. Portanto,

$$E(G, W, \mathcal{F}_{G_w} G) = 1 + \dim H^1(G; \mathcal{F}_{G_w} G) \overset{Lema\,5.6.2}{=} \widetilde{e}(G, G_w).$$

■

Proposição 5.6.15 *Seja (G, W) um par onde G é um grupo finitamente gerado e W é um G-conjunto satisfazendo $[G : G_w] = \infty$, $\forall w \in W$. Considere E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W e suponha que exista $w_0 \in E$ tal que G_{w_0} é infinito. Sejam E' o subconjunto de E formado pelos elementos w' tal que $G_{w'}$ é infinito e $W' = \dot{\bigcup}_{w' \in E'} G(w')$. Então,*

$$E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) = E(G, W', \mathbb{Z}_2 G).$$

Demonstração: Vimos na demonstração da Proposição 5.4.2 que G atua sobre W' com conjunto de representantes E', além disso, $[G : G_{w'}] = \infty, \forall w' \in E'$. Logo o invariante $E(G, W', M)$ está bem definido para todo $\mathbb{Z}_2 G$-módulo M, em particular para $M = \mathbb{Z}_2 G$.

Se $|G_w| = \infty$, $\forall w \in E$, então $W' = W$ e o resultado é imediato. Vamos supor que exista $w \in E$ de forma que G_w seja finito. Seja I o conjunto de índices tal que $\{G_{w_i},\, i \in I;\, w_i \in E\}$ é o conjunto de todos os G_{w_i} com G_{w_i} finito. Como na demonstração da Proposição 5.6.13 temos que $H^1(G_{w_i}; \mathbb{Z}_2 G) \simeq 0$, para todo $i \in I$, e

$$\operatorname{res}_{G_{w_i}}^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \to H^1(G_{w_i}; \mathbb{Z}_2 G)$$

é a aplicação nula. Donde segue que

$$\ker \operatorname{res}_{G_{w_i}}^G = H^1(G; \mathbb{Z}_2 G),\ \forall G_{w_i} \text{ finito. Assim,}$$

$$\begin{aligned}
E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) &\overset{Prop.5.1.1}{=} 1 + \dim \bigcap_{w \in E} \ker \operatorname{res}_{G_w}^G \\
&= 1 + \dim \left(\left(\bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_{G_{w_i}}^G \right) \bigcap \left(\bigcap_{w' \in E'} \ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^G \right) \right) \\
&= 1 + \dim \left(H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \bigcap \left(\bigcap_{w' \in E'} \ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^G \right) \right) \\
&= 1 + \dim \left(\bigcap_{w' \in E'} \ker \operatorname{res}_{G_{w'}}^G \right) \\
&= E(G, W', \mathbb{Z}_2 G).
\end{aligned}$$

■

Capítulo

6

Decomposição de Grupos e o Invariante $E(G, W, M)$

Neste capítulo abordamos alguns resultados relacionando $E(G, W, M)$, a teoria de invariantes ends e de decomposição de grupos. Nosso ponto de partida é o resultado apresentado em [6] considerando $M = \mathbb{Z}_2$, tratado na seção 6.2.

6.1 Decomposição de Grupos e Invariantes ends

O primeiro resultado que relaciona o conceito de decomposição de grupos com a teoria de ends foi dado por Stallings ([35] e [34]). Tal resultado é conhecido como **Teorema de Estrutura de Stallings** e é um resultado de decomposição sobre um subgrupo finito.

Proposição 6.1.1 [***Teorema de Estrutura de Stallings***] *Seja G um grupo. Se G se decompõe sobre um subgrupo* finito *então $e(G) \geq 2$. Reciprocamente, se G é finitamente gerado e $e(G) \geq 2$ então G se decompõe sobre um subgrupo finito.*

Demonstração: [35], [34] ou [31], p. 180 e p. 182. ■

Scott ([31]), tentou generalizar o resultado de Stallings para grupos que se decompõe sobre subgrupos *infinitos*. Para isso, ele utilizou o número de ends para pares de grupos (G, T), $e(G, T)$, com T subgrupo de G (definido por ele, vide Definição 5.6.4). Ele mostrou o seguinte resultado:

Proposição 6.1.2 *Sejam G um grupo e T um subgrupo (não necessariamente finito) de G. Se G se decompõe sobre T então $e(G, T) \geq 2$.*

Scott esperava mostrar que o resultado era válido nos dois sentidos, no entanto, ele observou que a recíproca é falsa.

Dizemos que dois subgrupos S e T são **comensuráveis** se

$$[S : S \cap T] < \infty \text{ e } [T : S \cap T] < \infty.$$

Kropholler e Roller apresentaram, em [23], uma condição necessária para G se decompor sobre um subgrupo comensurável com S. No caso em que G e S são finitamente gerados, os autores mostraram uma condição necessária e, sob certas condições, suficiente, para G se decompor sobre um subgrupo comensurável com S.

Alguns resultados relacionando decomposição de grupos foram também obtidos considerando $E(G, \mathcal{S}, M)$, para $\mathcal{S}$ uma família de subgrupos de G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. (Veja [9] e [7]).

Observação 6.1.1 *Note que, das Proposições* 3.1.1 *e* 3.1.2 *temos que se G se decompõe sobre T na forma $G = G_1 *_T G_2$, então $[G : G_1] = \infty = [G : G_2]$, e se $G = G_1 *_{T,\theta}$ então $[G : G_1] = \infty$.*

6.2 $E(G, W, \mathbb{Z}_2)$ e Decomposição de Grupos

Teorema 6.2.1 *Seja (G, W) um par onde G é um grupo que se decompõe sobre um subgrupo T de G e W é um G-conjunto. Considere E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W.*
(i) Se $G = G_1 *_T G_2$ e $E = \{w_1, w_2\}$ com $G_{w_i} = G_i$, $i = 1, 2$, então $E'(G, W) = 1$.
(ii) Se $G = G_1 *_{T,\theta}$ e $E = \{w\}$ (isto é, a ação é transitiva) com $G_w = G_1$, então $E'(G, W) = 2$.

Demonstração: (i) Se $G = G_1 *_T G_2$, a Proposição 3.1.3 nos fornece a sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

onde α é dada por $\alpha(gT) = (gG_1, -gG_2) = (gG_1, gG_2)$ e ε é a aplicação aumentação. Então,

$$\Delta = \ker \varepsilon = \operatorname{Im} \alpha \simeq \mathbb{Z}_2(G/T).$$

Assim,

$$\begin{aligned} H^1(G, W; \mathbb{Z}_2) &\simeq H^1(G, \{G_{w_1}, G_{w_2}\}; \mathbb{Z}_2) = H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) \overset{Prop.4.1.1}{\simeq} H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, \mathbb{Z}_2)) \\ &\simeq H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/T), \mathbb{Z}_2)) \overset{Prop.2.2.2(ii)}{\simeq} H^0(G; \operatorname{Coind}_T^G(\operatorname{Res}_T^G \mathbb{Z}_2)) \\ &\overset{L.Shapiro}{\simeq} H^0(T; \mathbb{Z}_2) \overset{Prop.2.3.1}{\simeq} \mathbb{Z}_2^T = \mathbb{Z}_2 \text{ (pois a ação de } G \text{ em } \mathbb{Z}_2 \text{ é trivial).} \end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} H^0(G;\mathbb{Z}_2) &\overset{Prop.2.3.1}{\simeq} \mathbb{Z}_2^G = \mathbb{Z}_2 \text{ e} \\ H^0(G_{w_i},\mathbb{Z}_2) &\overset{Prop.2.3.1}{\simeq} \mathbb{Z}_2^{G_{w_i}} = \mathbb{Z}_2,\ i = 1, 2. \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 5.4.1, segue que

$$\begin{aligned} E'(G,W) &= 1 + \dim H^0(G;\mathbb{Z}_2) - \dim(H^0(G_1;\mathbb{Z}_2) \oplus \dim H^0(G_2;\mathbb{Z}_2)) + \\ &+ \dim H^1(G,\{G_1,G_2\};\mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 2 + 1 = 1. \end{aligned}$$

(ii) Neste caso, como $G = G_1 *_{T,\theta}$, a Proposição 3.1.4 nos fornece a seguinte sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos:

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/T) \overset{\alpha}{\to} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

onde ε é a aplicação aumentação e α é dada por $\alpha(gT) = gG_1 - gp^{-1}G_1$; p é a letra estável de G. De onde segue que $\Delta = \ker\varepsilon \simeq \operatorname{Im}\alpha \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$.

Logo, com raciocínio análogo ao feito em (i) podemos verificar que

$$H^1(G, W; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Daí, como $H^0(G;\mathbb{Z}_2)$ e $H^0(G_1;\mathbb{Z}_2)$ são isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, obtem-se, pela Proposição 5.4.1,

$$E(G, W, \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2.$$

■

6.3 $E(G, W, \mathcal{F}_TG)$ e Decomposição de Grupos

Nesta seção, primeiramente, vamos analisar, nas hipóteses do Teorema 6.2.1, o que ocorre com $E(G, W, \mathcal{F}_TG)$ para T um subgrupo finito de G (Teorema 6.3.1). Notemos que, neste caso, como T é finito, $\mathcal{F}_TG \overset{Prop.5.6.3}{\simeq} \mathbb{Z}_2G$ e assim, $E(G, W, \mathcal{F}_TG) = E(G, W, \mathbb{Z}_2G)$. Depois, apresentamos um resultado considerando T finitamente gerado e normal em G, mas não necessariamente finito. A prova do Teorema 6.3.1 foi adaptada da demonstração apresentada para pares $(G, \mathcal{S})$ dada em [1] e aparecerá em [5].

Teorema 6.3.1 *Seja (G, W) um par onde G é um grupo que se decompõe sobre um subgrupo finito T e W é um G-conjunto. Considere E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W.*
(i) Se $G = G_1 *_T G_2$ e $E = \{w_1, w_2\}$ com $G_{w_1} = G_1$ e $G_{w_2} = G_2$ então

$$E(G, W, \mathcal{F}_TG) = E(G, W, \mathbb{Z}_2G) \geq 2,$$

e é infinito se G_1 e G_2 são infinitos.
(ii) Se $G = G_1 *_{T,\theta}$ e $E = \{w_1\}$ com $G_{w_1} = G_1$ então

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \geq 2,$$

e é infinito se G_1 for infinito.

Demonstração: Observe que, por definição, $E(G, W, M) \geq 1$, para todo M. Assim, para mostrar que $E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \geq 2$, basta mostrar que $E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \neq 1$.

(i) Devemos analisar as seguintes situações:

(I) Primeiro vamos considerar o caso em que G_1 e G_2 são subgrupos finitos de G.
Neste caso, pela Proposição 5.6.13, temos que

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) = e(G).$$

Daí, pelo Teorema de Estrutura de Stallings (Proposição 6.1.1),

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \geq 2.$$

(II) Agora, suponhamos que G_1 é finito e G_2 é infinito e consideremos a sequência de Mayer-Vietoris para $G = G_1 *_T G_2$ e $M = \mathbb{Z}_2 G$ (Teorema 3.1.3):

$$\begin{aligned} 0 \;\to\; & H^0(G; \mathbb{Z}_2 G) \to H^0(G_1; \mathbb{Z}_2 G) \oplus H^0(G_2; \mathbb{Z}_2 G) \overset{(\operatorname{res}^{G_1}_T, -\operatorname{res}^{G_2}_T)}{\to} H^0(T; \mathbb{Z}_2 G) \overset{\delta}{\to} \\ \overset{\delta}{\to}\; & H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \overset{(\operatorname{res}^{G}_{G_1}, \operatorname{res}^{G}_{G_2})}{\to} H^1(G_1; \mathbb{Z}_2 G) \oplus H^1(G_2; \mathbb{Z}_2 G) \to \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

Como G é infinito,

$$H^0(G; \mathbb{Z}_2 G) \overset{Cor.2.2.1}{\simeq} H^0(G; \operatorname{Ind}^{G}_{\{1\}} \mathbb{Z}_2) \overset{Prop.2.3.1}{\simeq} (\operatorname{Ind}^{G}_{\{1\}} \mathbb{Z}_2)^G \overset{Prop.2.2.6}{=} 0.$$

Seja L um transversal para o conjunto de classes laterais $G_2 g$. Como G_2 é infinito, temos:

$$\begin{aligned} H^0(G_2; \mathbb{Z}_2 G) \overset{F.Mackey}{\simeq}\; & H^0(G_2; \bigoplus_{g \in L} \operatorname{Ind}^{G_2}_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2) \overset{Prop.2.3.2(i)}{\simeq} \bigoplus_{g \in L} H^0(G_2; \operatorname{Ind}^{G_2}_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2) \\ \overset{Prop.2.3.1}{\simeq}\; & \bigoplus_{g \in L} (\operatorname{Ind}^{G_2}_{\{1\}} g\mathbb{Z}_2)^{G_2} \overset{Prop.2.2.6}{=} 0. \end{aligned}$$

Dessa forma obtemos de (1), a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to H^0(G_1; \mathbb{Z}_2 G) \overset{\operatorname{res}^{G_1}_T}{\to} H^0(T, \mathbb{Z}_2 G) \overset{\delta}{\to} \operatorname{Im} \delta = \ker(\operatorname{res}^{G}_{G_1}, \operatorname{res}^{G}_{G_2}) \to 0. \tag{2}$$

Se $E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) = 1$, então devemos ter $\ker(\operatorname{res}^G_{G_1}, \operatorname{res}^G_{G_2}) = 0$. Daí, segue de (2), que $\operatorname{res}^{G_1}_T$ é isomorfismo, o que é uma contradição, (pois $\operatorname{res}^{G_1}_T$ não é sobrejetora, como mostrado a seguir). Concluímos então que, neste caso, necessariamente $E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \geq 2$.

Mostremos que res^G_T não é sobrejetora. Temos:

$$\begin{aligned} H^0(G_1; \mathbb{Z}_2 G) &\overset{Prop.2.3.1}{\simeq} (\mathbb{Z}_2 G)^{G_1}, \\ H^0(T; \mathbb{Z}_2 G) &\overset{Prop.2.3.1}{\simeq} (\mathbb{Z}_2 G)^{T}, \end{aligned}$$

e vale a inclusão $(\mathbb{Z}_2 G)^{G_1} \overset{j}{\hookrightarrow} (\mathbb{Z}_2 G)^T$, pois $T \subset G_1$. Assim podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^0(G_1; \mathbb{Z}_2 G) & \xrightarrow{\psi_1} & (\mathbb{Z}_2 G)^{G_1} \\ {\scriptstyle \operatorname{res}^{G_1}_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ H^0(T; \mathbb{Z}_2 G) & \xrightarrow[\psi_2]{} & (\mathbb{Z}_2 G)^T \end{array}$$

onde $\psi_i(f) = f(1)$, $i = 1, 2$ são isomorfismos, $\forall f \in H^0(G_i; \mathbb{Z}_2 G) \subset Hom_{\mathbb{Z}_2 G_i}(F_0; \mathbb{Z}_2 G)$, sendo $F \overset{\varepsilon}{\to} \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2 G$.

Disto segue que $\operatorname{res}^{G_1}_T$ é sobrejetora se, e somente se, j é sobrejetora. Além disso, $\mathbb{Z}_2 G \simeq \mathcal{F} G$ (Proposição 5.6.2). Assim, podemos considerar

$$j : (\mathcal{F}G)^{G_1} \to (\mathcal{F}G)^T,\ j(A) = A,\ \forall A \in (\mathcal{F}G)^{G_1}.$$

Como T é finito e $tT = T$, $\forall t \in T$, segue que $T \in (\mathcal{F}G)^T$. Mas $T \notin (\mathcal{F}G)^{G_1}$. De fato, se $T \in (\mathcal{F}G)^{G_1}$ então $g_1 T = T$, $\forall g_1 \in G_1$. Logo $g_1 \in T$, $\forall g_1 \in G_1$, de modo que $G_1 \subset T$ e daí $G_1 = T$ (pois $T \subset G_1$), o que contradiz a definição de produto livre amalgamado (não trivial) $G = G_1 *_T G_2$ (Definição 3.1.2).

Dessa forma j não é sobrejetora e, consequentemente, $\operatorname{res}^{G_1}_T$ também não é sobrejetora. Concluímos, então, que

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \geq 2.$$

(III) Por fim, vamos supor que G_1 e G_2 são infinitos.

Então, como em (II), temos

$$H^0(G; \mathbb{Z}_2 G) = 0,\ H^0(G_1; \mathbb{Z}_2 G) = 0,\ \text{e}\ H^0(G_2; \mathbb{Z}_2 G) = 0.$$

Daí, a sequência exata longa dada na Proposição 4.1.2 toma a seguinte forma

$$0 \to H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2 G) \overset{J}{\to} H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \overset{\operatorname{res}^G_W}{\to} H^1(G_1; \mathbb{Z}_2 G) \oplus H^1(G_2; \mathbb{Z}_2 G) \to \cdots$$

Uma vez que J é injetora e $\ker \operatorname{res}_W^G = \operatorname{Im} J$, temos

$$\dim H^1(G,W;\mathbb{Z}_2G) = \dim H^1(G,\{G_1,G_2\};\mathbb{Z}_2G) = \dim \operatorname{Im} J = \dim \ker \operatorname{res}_W^G.$$

Mas, pela Proposição 3.1.3, se $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2$ é a aplicação aumentação, então

$$\Delta = \ker \varepsilon \simeq \mathbb{Z}_2(G/T),$$

assim

$$Hom(\Delta,\mathbb{Z}_2G) \simeq Hom(\mathbb{Z}_2(G/T),\mathbb{Z}_2G).$$

Considere L' um transversal para o conjunto de classes laterais Tg, então:

$$\begin{aligned}
H^0(G;Hom(\Delta,\mathbb{Z}_2G)) &\simeq H^0(G;Hom(\mathbb{Z}_2(G/T),\mathbb{Z}_2G)) \\
&\overset{Prop.2.5.2}{\simeq} H^0(T;\mathbb{Z}_2G) \\
&\overset{F.Mackey}{\simeq} H^0(T;\bigoplus_{g\in L'} \operatorname{Ind}_{\{1\}}^{T} g\mathbb{Z}_2) \\
&\overset{Prop.2.3.2(i)}{=} \bigoplus_{g\in L'} H^0(T;\operatorname{Ind}_{\{1\}}^{T} g\mathbb{Z}_2) \\
&\overset{Prop.2.2.5}{\simeq} \bigoplus_{g\in L'} H^0(T;\operatorname{Coind}_{\{1\}}^{T} g\mathbb{Z}_2) \\
&\overset{L.Shapiro}{\simeq} \bigoplus_{g\in L'} H^0(\{1\};g\mathbb{Z}_2) \overset{Ex.2.6.1(1)}{=} \bigoplus_{g\in L'} g\mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Como $H^1(G,W;\mathbb{Z}_2G) \overset{Prop.4.1.1}{\simeq} H^0(G;Hom(\Delta,\mathbb{Z}_2G))$ e L' é infinito, segue que

$$\dim H^1(G,W;\mathbb{Z}_2G) = \infty.$$

Portanto,

$$E(G,W,\mathcal{F}_TG) = E(G,W,\mathbb{Z}_2G) = \infty.$$

(ii) A demonstração deste resultado é análoga à feita em (i) nas situações (I), se G_1 for finito, e (III), se G_1 for infinito. Neste último caso, usa-se a sequência exata longa

$$0 \to H^1(G,G_1;\mathbb{Z}_2G) \xrightarrow{J} H^1(G;\mathbb{Z}_2G) \xrightarrow{\operatorname{res}_W^G} H^1(G_1;\mathbb{Z}_2G) \to \cdots,$$

dada pela Proposição 4.1.2, e o isomorfismo $\Delta \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$ (Proposição 3.1.4). ■

Nosso interesse agora, é relacionar $E(G,W,\mathcal{F}_TG)$ e decomposição de grupos sobre um subgrupo T de G, não necessariamente finito. Nesse sentido, foi possível obter o seguinte

resultado:

Teorema 6.3.2 *Seja (G, W) um par onde G é um grupo e W é um G-conjunto. Considere E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W e T um subgrupo finitamente gerado e normal em G (T não necessariamente finito).*
(i) Se $G = G_1 *_T G_2$, $E = \{w_1, w_2\}$ com $G_{w_i} = G_i$ e $[G_i : T] = \infty$, $i = 1, 2$, então

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = \infty.$$

(ii) Se $G = G_1 *_{T,\theta}$, $E = \{w\}$ (isto é, a ação é transitiva) com $G_w = G_1$ e $[G_1 : T] = \infty$, então

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = \infty.$$

Demonstração: (i) Primeiramente, observe que

$$[G : G_i] \overset{Prop.3.1.1}{=} \infty \text{ e}$$
$$[G : T] = [G : G_i][G_i : T] = \infty.$$

Assim, temos que

$$\begin{array}{rcl} H^0(G; \mathcal{F}_T G) & \overset{Obs.5.6.2}{\simeq} & H^0(G; \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T)) \\ & \overset{Prop.2.3.1}{\simeq} & (\operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T))^G \overset{Prop.2.2.6}{=} 0. \end{array}$$

Considere L um transversal para as classes laterais $G_i g T$. Então,

$$\begin{array}{rcl} H^0(G_i; \mathcal{F}_T G) & \overset{Obs.5.6.2}{\simeq} & H^0(G_i; \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T)) \\ & \overset{F.Mackey}{\simeq} & H^0(G_i; \bigoplus_{g \in L} \operatorname{Ind}_T^{G_i} g\mathcal{P}(T)) \\ & \overset{Lema\,5.6.1}{\simeq} & H^0(G_i; \bigoplus_{g \in L} \operatorname{Ind}_T^{G_i} \mathcal{P}(T)) \\ & \overset{Prop.2.3.2\,(i)}{\simeq} & \bigoplus_{g \in L} H^0(G_i; \operatorname{Ind}_T^{G_i} \mathcal{P}(T)) \\ & \overset{Prop.2.3.1}{\simeq} & \bigoplus_{g \in L} (\operatorname{Ind}_T^{G_i} \mathcal{P}(T))^{G_i} \overset{Prop.2.2.6}{=} 0. \end{array}$$

Assim, $H^0(W; \mathcal{F}_T G) = H^0(G_{w_1}; \mathcal{F}_T G) \oplus H^0(G_{w_2}, \mathcal{F}_T G) = 0$ e a sequência exata longa dada na Proposição 4.1.2 toma a seguinte forma:

$$0 \to H^1(G, W; \mathcal{F}_T G) \overset{J}{\to} H^1(G; \mathcal{F}_T G) \overset{\operatorname{res}_W^G}{\to} H^1(W; \mathcal{F}_T G) \to \cdots$$

Uma vez que J é injetora e $\ker \operatorname{res}_W^G = \operatorname{Im} J$, segue que

$$\dim H^1(G, W; \mathcal{F}_T G) = \dim \operatorname{Im} J = \dim \ker \operatorname{res}_W^G. \qquad (*)$$

Por outro lado, a Proposição 3.1.3 nos fornece a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

onde α é dada por $\alpha(gT) = (gG_1, gG_2)$ e ε é a aplicação aumentação. Assim,
$\Delta = \ker \varepsilon = Im\alpha \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$. Logo,

$$\begin{aligned}
H^1(G, W; \mathcal{F}_T G) &\overset{Teo.4.3.1}{\simeq} H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathcal{F}_T G) \\
&\overset{Prop.4.1.1}{\simeq} H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, \mathcal{F}_T G)) \\
&\simeq H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/T), \mathcal{F}_T G)) \\
&\overset{Prop.2.5.2}{\simeq} H^0(T; \mathcal{F}_T G) \\
&\overset{Obs.5.6.2}{\simeq} H^0(T; \operatorname{Ind}_T^G \mathcal{P}(T)) \\
&\overset{Prop.2.2.3}{\simeq} H^0(T; \bigoplus_{g \in G/T} g\mathcal{P}(T)) \\
&\overset{Prop.2.3.2\,(i)}{\simeq} \bigoplus_{g \in G/T} H^0(T; g\mathcal{P}(T)) \\
&\overset{Lema.5.6.1}{\simeq} \bigoplus_{g \in G/T} H^0(T; \mathcal{P}(T)).
\end{aligned}$$

Mas $H^0(T; \mathcal{P}(T)) \overset{Ex.5.6.2}{\simeq} \mathbb{Z}_2$ e $[G : T] = \infty$, e então $\dim H^1(G, W; \mathcal{F}_T G) = \infty$. Daí por $(*)$ segue que $\dim \ker \operatorname{res}_W^G = \infty$. Portanto,

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = \infty.$$

(ii) Com o mesmo raciocínio de (i), obtemos que

$$H^0(G; \mathcal{F}_T G) = 0 = H^0(G_1; \mathcal{F}_T G) \text{ e } \dim H^1(G, W; \mathcal{F}_T G) = \dim \ker \operatorname{res}_W^G.$$

Além disso, a Proposição 3.1.4 nos fornece a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

onde $\alpha(gT) = gG_1 - gp^{-1}G_1$ (p é a letra estável de G), de modo que

$$\Delta = \ker \varepsilon = \operatorname{Im} \alpha \simeq \mathbb{Z}_2(G/T).$$

Daí, como no caso anterior, concluímos que $\dim H^1(G, W; \mathcal{F}_T G) = H^1(G, \{G_1\}; \mathcal{F}_T G) = \infty$, consequentemente $\dim \ker \operatorname{res}_W^G = \infty$ e, portanto,

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = \infty.$$

■

Observação 6.3.1 *É importante, obviamente, questionar se existe um subgrupo T nas condições do teorema anterior (T finitamente gerado, normal em G com $[G_1 : T] = \infty = [G_2 : T]$). Observamos que Scott e Wall em [31], mostraram o seguinte fato (Teorema 3.11): Se $G = G_1 * G_2$ onde G_1 e G_2 são grupos não triviais e H é um subgrupo finitamente gerado e normal em G, então H é trivial ou H possui índice finito em G. Em seguida, os autores (em [31]), questionaram se existe um resultado análogo, nos casos em que G se decompõe sobre T, $G = G_1 *_T G_2$ ou $G = G_1 *_{T,\theta}$. Claramente, se isso fosse verdade, o nosso resultado não faria sentido, uma vez que, nesse caso, considerando $H = T$ com T subgrupo finitamente gerado, normal em G deveríamos ter T trivial ou $[G, T] = \infty$, e em nosso resultado tem-se $[G : T] = [G : G_1][G_1 : T] = \infty$ (além disso estamos interessados em T infinito, logo não trivial). Entramos em contato, através de e-mail, com um dos autores (Prof. Dr. P. Scott) a respeito desta questão e o mesmo nos sugeriu como obter exemplos de grupos $G = G_1 *_T G_2$, com T finitamente gerado, normal em G satisfazendo $[G_1 : T] = [G_2 : T] = \infty$ (e portanto $[G : T] = \infty$), e argumentou, então, que são necessárias hipóteses mais complexas para se obter, para $G = G_1 *_T G_2$ ou $G = G_1 *_{T,\theta}$, um resultado similar (ao do Teorema 3.11, [31]).*

Segue o exemplo sugerido pelo Prof. Dr. P. Scott. Gostaríamos de registrar nossos agradecimentos ao Prof. Dr. P. Scott, pela pronta atenção e sugestão.

Exemplo 6.3.1 *Considere T um grupo finitamente gerado e G_1 e G_2 dois grupos finitamente gerados que possuem T como subgrupo normal, por exemplo, $G_1 = A \times T$ e $G_2 = B \times T$, onde A e B são grupos quaisquer, infinitos, finitamente gerados (A e B podem ser, por exemplo, grupos cíclicos). Então $[G_1 : T] = \infty = [G_2 : T]$ e T é normal em $G := G_1 *_T G_2$. De fato, considere os transversais à esquerda: T_1 e T_2, de G_1 módulo T e de G_2 módulo T, respectivamente, e seja $g \in G$. Pelo Teorema da Forma Normal (Teorema 3.1.1), temos que*

$$g = a_1 b_1 \dots a_k b_k c;\ a_i \in T_1,\ b_i \in T_2,\ i = 1, \dots, k \ \text{ e } \ c \in T,$$

podendo a_1 ou b_k serem iguais a 1. Dessa forma, temos

$$gT = a_1 b_1 \dots a_k b_k c T.$$

Como T é normal em G_1 e em G_2, segue que

$$g_1 T = T g_1, \forall g_1 \in G_1, \quad e \quad g_2 T = T g_2, \forall g_2 \in G_2.$$

Assim, $a_i T = T a_i$ e $b_i T = T b_i$, $1 \leq i, j \leq k$. Daí, como obviamente $cT = Tc$, tem-se

$$gT = a_1 b_1 \dots a_k b_k (cT) = a_1 b_1 \dots a_k (b_k T) c = \dots = T a_1 b_1 \dots a_k b_k c = Tg.$$

Portanto, T é normal em $G = G_1 *_T G_2$, como queríamos.

Com base no exemplo anterior, apresentamos uma aplicação do Teorema 6.3.2.

Exemplo 6.3.2 *Dado T um grupo finitamente gerado, considere um grupo $G = G_1 *_T G_2$, como no exemplo anterior, e sejam $W = (G/G_1 \times \{0\}) \dot{\cup} (G/G_2 \times \{1\})$ e $\phi : G \times W \to W$, uma aplicação tal que, se $w_1 = (gG_1, 0) \in W$, então, $g' \cdot w_1 = (g' \cdot gG_1, 0)$ e se $w_2 = (gG_2, 1) \in W$, então, $g' \cdot w_2 = (g' \cdot gG_2, 1)$. Temos que ϕ é uma G-ação em W. Agora, se tomamos $w_1 = (1 \cdot G_1, 0)$ e $w_2 = (1 \cdot G_2, 1)$, temos*

$$\begin{aligned} G(w_1) &= \{g \cdot (1 \cdot G_1, 0),\, g \in G\} = \{(g \cdot G_1, 0),\, g \in G\} = G/G_1 \times \{0\}, \\ G(w_2) &= \{g \cdot (1 \cdot G_2, 1),\, g \in G\} = \{(g \cdot G_2, 1),\, g \in G\} = G/G_2 \times \{1\}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$G_{w_1} = \{g \in G,\, g \cdot w_1 = w_1\} = \{g \in G,\, (g \cdot G_1, 0) = (G_1, 0)\} = \{g \in G,\, g \in G_1\} = G_1.$$

Similarmente, $G_{w_2} = G_2$. Portanto, W é um G-conjunto satisfazendo $G_{w_1} = G_1$, $G_{w_2} = G_2$ e $G = G_1 *_T G_2$. Logo, pelo Teorema 6.3.2, $E(G, W, \mathcal{F}_T G) = \infty$.

6.4 $E(G, W, \mathbb{Z}_2(G/T))$ e Decomposição de Grupos

Nesta seção, apresentamos um resultado que caracteriza $E(G, W, \mathbb{Z}_2(G/T))$ quando G se decompõe sobre um subgrupo T de índice infinito em G, dado que $H^0(T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Teorema 6.4.1 *Seja (G, W) um par onde G é um grupo que se decompõe sobre um subgrupo T de G, tal que $[G : T] = \infty$ e W é um G-conjunto. Considere E um conjunto de representantes para as G-órbitas em W e suponha que $H^0(T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2$, então:*

Se $G = G_1 *_T G_2$ e $E = \{w_1, w_2\}$ com $G_{w_i} = G_i$, $i = 1, 2$, ou $G = G_1 *_{T,\theta}$ e $E = \{w\}$ (isto é, a ação é transitiva), tem-se que

$$E(G, W, \mathbb{Z}_2(G/T)) \leq 2.$$

Demonstração: Se $G = G_1 *_T G_2$, então $\Delta = \ker \varepsilon \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)(*)$ (Proposição 3.1.3), onde $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \to \mathbb{Z}_2$ é a aplicação aumentação. Assim,

$$\begin{array}{rcl} H^1(G, W; \mathbb{Z}_2(G/T)) & \overset{Teo.4.3.1}{\simeq} & H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2(G/T)) \\ & \overset{Prop.4.1.1}{\simeq} & H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, \mathbb{Z}_2(G/T)) \\ & \overset{(*)}{\simeq} & H^0(G; Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/T), \mathbb{Z}_2(G/T))) \\ & \overset{Prop.2.2.2\,(ii)}{\simeq} & H^0(G; \mathrm{Coind}\,_T^G(\mathrm{Res}\,_T^G \mathbb{Z}_2(G/T))) \\ & \overset{L.Shapiro}{\simeq} & H^0(T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{\text{hipótese}}{\simeq} \mathbb{Z}_2. \end{array}$$

Além disso,

$$H^0(G; \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{Prop.2.3.1}{\simeq} (\mathrm{Ind}\,_T^G \mathbb{Z}_2(G/T))^G \overset{Prop.2.2.6}{=} 0.$$

Assim a sequência exata longa dada pela Proposição 4.1.2 toma a seguinte forma:

$$0 \to H^0(W; \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{\delta}{\to} H^1(G, W; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2 \overset{J}{\to} H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/T)) \to \cdots$$

Da exatidão da sequência, $\ker \delta = 0$, isto é, δ é monomorfismo, de modo que podemos ver

$$H^0(W; \mathbb{Z}_2(G/T)) = H^0(G_1; \mathbb{Z}_2(G/T)) \oplus H^0(G_2; \mathbb{Z}_2(G/T))$$

como submódulo de $H^1(G, W; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2$. Assim, temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{array}{rcl} H^0(G_i; \mathbb{Z}_2(G/T)) & = & 0,\ i = 1, 2,\ \text{ou} \\ H^0(G_i; \mathbb{Z}_2(G/T)) & = & 0 \text{ e } H^0(G_j; \mathbb{Z}_2(G, T)) \simeq \mathbb{Z}_2,\ i, j \in \{1, 2\},\ i \neq j, \end{array}$$

donde segue que $\dim H^0(G_1; \mathbb{Z}_2(G/T)) + \dim H^0(G_2; \mathbb{Z}_2(G/T))$ assume valores 0 ou 1, ou seja, $\dim H^0(W; \mathbb{Z}_2(G/T)) \leq 1$. Então, pela Proposição 5.4.1 segue que

$$E(G, W; \mathbb{Z}_2(G/T)) = 1 - \dim H^0(W; \mathbb{Z}_2(G/T)) + 1 \leq 2.$$

Se $G = G_1 *_{T,\theta}$, temos $\Delta = \ker \varepsilon \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$ (Proposição 3.1.4), onde $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/G_1) \to \mathbb{Z}_2$ é a aplicação aumentação, daí seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, obtemos que

$$\begin{array}{rcl} H^1(G, W; \mathbb{Z}_2(G/T)) & \simeq & \mathbb{Z}_2, \\ H^0(G; \mathbb{Z}_2(G/T)) & = & 0, \end{array}$$

de modo que a sequência exata dada pela Proposição 4.1.2 toma a seguinte forma:

$$0 \to H^0(W; \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{\delta}{\to} H^1(G, W; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2 \overset{J}{\to} H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/T)) \to \cdots,$$

como δ é monomorfismo, podemos ver $H(W; \mathbb{Z}_2(G/T)) = H^0(G_1; \mathbb{Z}_2(G/T))$ como submódulo de $\mathbb{Z}_2$. Portanto, pela Proposição 5.4.1,

$$E(G, W, \mathbb{Z}_2(G/T)) = 1 - \dim H^0(W; \mathbb{Z}_2(G/T)) + 1 \leq 2.$$

■

Observação 6.4.1 *Se (G, T) é um D^n-par então $H^0(T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2$, como mostrado a seguir. No entanto, se (G, T) é um D^n-par então G não se decompõe sobre T, como mostrado em [2], Corolário 1. Logo, se (G, W) e T satisfazem as hipóteses do teorema anterior, necessariamente (G, T) não é D^n-par.*

Para demonstrar o próximo resultado, nos baseamos em [3], (Proposição 2.10).

Proposição 6.4.1 *Sejam G um grupo e T um subgrupo de G com $[G : T] = \infty$. Se (G, T) é um D^n-par então*

$$H^0(T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Demonstração: Inicialmente, note que se (G, T) é um D^1-par, então pela Proposição 4.4.1, G e T são D^0-grupos (sobre $\mathbb{Z}_2$) logo, são grupos finitos (Proposição 2.9.1), e daí $[G : T] < \infty$. Dessa forma, nas hipóteses deste resultado, tem-se, necessariamente, $n > 1$.

Seja C o módulo dualizante de (G, T). Então,

$$\begin{aligned} H^1(G, T; \mathbb{Z}_2(G/T)) &\overset{Def.4.4.1}{\simeq} H_{n-1}(G; C \otimes \mathbb{Z}_2(G/T)) \\ &\overset{Cor.2.2.1}{\simeq} H_{n-1}(G; \operatorname{Ind}_T^G(C \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ &\overset{L.Shapiro}{\simeq} H_{n-1}(T; C \otimes \mathbb{Z}_2) \\ &\overset{Prop.4.4.1\,(ii)}{\simeq} H^0(T; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Observe também que

$$H^0(G; \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{Prop.2.3.1}{\simeq} (\operatorname{Ind}_T^G)^G \overset{Prop.2.2.6}{=} 0.$$

Assim, a sequência exata longa dada na Proposição 4.2.1 para $\mathcal{S} = \{T\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/T)$ toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(G; \mathbb{Z}_2(G/T)) = 0 \;\to\; & H^0(T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{\delta}{\to} H^1(G, T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2 \overset{J}{\to} \\ \overset{J}{\to} \;& H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{\operatorname{res}_T^G}{\to} H^1(T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \to \cdots \end{aligned}$$

Agora,

$$H^0(T, \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{Prop.2.3.1}{\simeq} (\mathbb{Z}_2(G/T))^T,\ \{0, 1_G T\} \subset (\mathbb{Z}_2(G/T))^T \text{ e } \{0, 1_G T\} \simeq \mathbb{Z}_2,$$

de modo a obter-se

$$\mathbb{Z}_2 \subset (\mathbb{Z}_2(G/T))^T \overset{\delta}{\rightarrowtail} \mathbb{Z}_2.$$

Como δ é monomorfismo, segue que $(\mathbb{Z}_2(G/T))^T \simeq \mathbb{Z}_2$. Portanto,

$$H^0(T; \mathbb{Z}_2(G/T)) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

■

6.5 Algumas Considerações sobre $E(G, W, \mathcal{F}_T G)$ e Decomposição Adaptada de Grupos

Nesta seção apresentamos um resultado sobre decomposição de grupos adaptada a uma família de subgrupos, que foi demonstrado por Andrade e Fanti e apresentada em [5].

Sejam G um grupo e $\mathcal{S} = \{S_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ uma família de subgrupos de G. Swarup, em [36], apresentou o seguinte critério para um grupo G se decompor sobre um subgrupo finito T:

Teorema 6.5.1 *Seja $(G, \mathcal{S})$ um par grupo com G finitamente gerado e $\mathcal{S} = \{S_i,\ i = 1, \ldots, m\}$. Se $\bigcap_{i=1}^{m} \ker \operatorname{res}_{S_i}^{G} \neq 0$ então G se decompõe sobre um subgrupo finito T na forma:*

(a) $G = G_1 *_T G_2$, com cada $S_i \in \mathcal{S}$ conjugado a um subgrupo de G_1 ou G_2, ou
(b) $G = G_1 *_{T,\theta}$, com cada $S_i \in \mathcal{S}$ conjugado a um subgrupo de G_1.

Demonstração: [36], Teorema 1.1. ■

Definição 6.5.1 *Seja (G, W) um par onde G é um grupo e W é um G-conjunto. Uma decomposição*

$$G = G_1 *_T G_2 \quad ou \quad G = G_1 *_{T,\theta}$$

*de G sobre T é denominada W-**adaptada** em T, se T é finito e existe um conjunto finito, E, de representantes para as G-órbitas em W tal que $G_w \subset G_1$ ou $G_w \subset G_2$, para todo $w \in E$. Neste caso, diz-se que o par (G, W) é W-adaptado em T.*

Em [5], os autores apresentaram um resultado que exibe uma condição necessária e suficiente para um par (G, W) ser W-adaptado usando $E(G, W, \mathbb{Z}_2 G)$, (que foi denotado por $\overline{E}(G, W)$). Nossa ideia era analisar esse resultado utilizando $E(G, W, \mathcal{F}_T G)$, porém como (na definição de

decomposição W-adaptada) T é finito e, nesse caso, $\mathbb{Z}_2 G \overset{Prop.5.6.3}{\simeq} \mathcal{F}_T G$, a demonstração se reduz ao caso referido.

Teorema 6.5.2 *Seja (G, W) um par onde G é um grupo e W é um G-conjunto com um número finito de G-órbitas. Então, (G, W) é W-adaptado em T se, e somente se,*

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \geq 2.$$

Demonstração: Considere (G, W) um par W-adaptado em T. Então $G = G_1 *_T G_2$ ou $G = G_1 *_{T,\theta}$ com T finito e existe $E = \{w_1, \ldots, w_n\}$ um conjunto de representantes para as G-órbitas em W tal que $G_{w_i} \subset G_1$ ou $G_{w_i} \subset G_2$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Suponhamos que $G = G_1 *_T G_2$ e consideremos a família $\{H_j\}_{j \in I} = \{G_1, G_2\}$. Pela Proposição 5.1.1, temos que

$$\begin{aligned} E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) &= 1 + \dim \bigcap_{i=1}^{n} \ker \operatorname{res}_{G_{w_i}}^{G} \\ &\overset{Obs.2.4.2}{\geq} 1 + \dim \bigcap_{j \in I} \ker \operatorname{res}_{H_j}^{G} \\ &= 1 + \dim \bigcap_{i=1}^{2} \ker \operatorname{res}_{G_i}^{G}. \end{aligned}$$

Com um raciocínio similar ao feito na demonstração do Teorema 6.3.1 segue que

$$1 + \dim \bigcap_{i=1}^{2} \ker \operatorname{res}_{G_i}^{G} \geq 2.$$

Portanto, $E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \geq 2$. O caso $G = G_1 *_{T,\theta}$ é análogo.

Reciprocamente, suponhamos que $E(G, W, \mathcal{F}_T G) = E(G, W, \mathbb{Z}_2 G) \geq 2$. Uma vez que W é um G-conjunto com um número finito de G-órbitas, podemos considerar $E = \{w_1, \ldots, w_n\}$ um conjunto de representantes para as G-órbitas em W. Seja $\mathcal{S} = \{G_{w_1}, \ldots, G_{w_n}\}$ a família dos subgrupos de isotropia de G. Pela Proposição 5.1.1 temos

$$E(G, W, \mathcal{F}_T G) = 1 + \dim \bigcap_{i=1}^{n} \ker \operatorname{res}_{G_{w_i}}^{G}.$$

Assim, como $E(G, W, \mathcal{F}_T G) \geq 2$, temos $\dim \bigcap_{i=1}^{n} \ker \operatorname{res}_{G_{w_i}}^{G} > 0$, logo

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker \operatorname{res}_{G_{w_i}}^{G} \neq 0,$$

e daí pelo Teorema 6.5.1 (Swarup), segue que G se decompõe sobre um subgrupo finito T, isto é:
(a) $G = G_1 *_T G_2$, e cada $G_{w_i} \in \mathcal{S}$ é conjugado a um subgrupo de G_1 ou G_2, ou seja, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $g_i \in G$ e H_i subgrupo de G_1 ou G_2, tal que $G_{w_i} = g_i^{-1} H_i g_i$, ou
(b) $G = G_1 *_{T,\theta}$, e cada G_{w_i} é conjugado a um subgrupo de G_1. Vamos analisar o caso (a). Notemos que como G_{w_i} é conjugado a um subgrupo de G_1 ou G_2, para cada $w_i \in E$,

$$H_i = g_i G_{w_i} g_i^{-1} = G_{g_i w_i} = \{g \in G;\ g g_i w_i = g_i w_i\}.$$

De fato,

$$h \in H_i \Rightarrow h = g_i g g_i^{-1},$$

onde $g \in G_{w_i} \subset G$ é tal que $g w_i = w_i$. Daí

$$h g_i w_i = g_i g g_i^{-1} g_i w_i = g_i g w_i = g_i w_i. \ (*)$$

Logo, $h \in G_{g_i w_i}$. Por outro lado,

$$h \in G_{g_i w_i} \Rightarrow h \in G \text{ e } h g_i w_i = g_i w_i,$$

mas

$$h = g_i (g_i^{-1} h g_i) g_i^{-1} = g_i u g_i^{-1},$$

onde $u = g_i^{-1} h g_i \in G_{w_i}$, uma vez que $u w_i = g_i^{-1} h g_i w_i = g_i^{-1}(h g_i w_i) \overset{(*)}{=} g_i^{-1} g_i w_i = w_i$. Além disso, $E' := \{v_i = g_i w_i,\ i = 1 \ldots, n\}$ também é um conjunto de representantes para as G-órbitas em W.

Dessa forma, temos que G se decompõe sobre um subgrupo finito T e existe um conjunto E' de representantes para as G-órbitas em W com $G_{v_i} \subset G_1$ ou $G_{v_i} \subset G_2$ para todo $v_i \in E'$. Portanto, (G, W) é W-adaptado em T, como queríamos. O caso (b) é similar. ■

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, M.G.C. **Invariantes relativos e dualidade**. Tese (Doutorado em Matemática), IMECC-UNICAMP, Campinas, 1992.

[2] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; A note about splittings of groups and commensurability under a cohomological point of view. **Algebra and Discrete Mathematics**, 9, n.2, p. 1-10, 2010.

[3] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C. A relative cohomological invariant for pairs of groups. **Manuscripta Math.**, v.83, p. 1-18, 1994.

[4] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C. A remark about amalgamation of groups and index of certain subgroups. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v.23, p. 55-62, 2010.

[5] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C. On Splittings of group adapted to a family of subgroups. In: VII Encontro Regional de Topologia, 2009, Maresias-SP. **Submited**.

[6] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; The cohomological invariant E'(G,W) and some properties. **International Journal of Applied Mathematics**, 25, p. 183-192, 2012.

[7] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; DACCACH, J.A. On certain relative cohomological invariant. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, Bulgária, v. 21, n.3, p. 335-351, 2005.

[8] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; FÊMINA, L.L. Some considerations about relative cohomology of groups and Poincaré duality pairs. **Submitted**.

[9] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; PAPANI, F.M.G. A relative invariant, duality and splitting of groups. **Revista de Matemática e Estatística**, v. 21, n.1, p. 131-141, 2003.

[10] BIERI, R.; Homological dimension of discrete groups. **Queen Mary College Math. Notes**, Londres, 1976.

[11] BIERI, R.; ECKMANN, B. Relative homology and Poincaré duality for Group Pairs. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v.13, p. 277-319, 1978.

[12] BROWN, K.S. **Cohomology of groups**. New York: Springer-Verlag, 1982.

[13] CIOCA, D.M.; **Cohomologia e ends de grupos**, 1997. Dissertação (Mestrado), IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto.

[14] DICKS, W.; DUNWOODY, M. **Groups acting on graphs**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[15] EILENBERG, S. Homology of spaces with operators I, **Trasn. Amer. Math. Soc. 61**, p. 378-417, 1947; errata 62 (1947) 548.

[16] FANTI, E.L.C. **Invariantes cohomológicos e decomposição de grupos**, Tese de Doutorado. ICMCSC - USP, São Carlos, 1992.

[17] FÊMINA, L.L.; **Cohomologia relativa de grupos e dualidade de Poincaré**, 2008. Dissertação (Mestrado), IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto.

[18] HILTON, P.J. **Homological theory** - an introduction to algebraic topology. New York: Cambrige University Press, 1960.

[19] HOPF, H. Enden offener Raüme und unendlicher Gruppen. **Math. Helv.**, v.16, p. 81-100, 1943.

[20] HOUGHTON, C.H. Ends of locally compact groups and their coset spaces, **J. Aust. Math. Soc.**, 17, p. 274-284, 1974.

[21] HU, S.T. **Introduction to homological algebra**. São Francisco: Holden-Day Series in Mathematics, 1968.

[22] KROPHOLLER, P.H.; ROLLER, M.A. Relative ends and duality groups. **Journal off Pure and Appl. Algebra**, 61, p. 197-210, 1989.

[23] KROPHOLLER, P.H.; ROLLER, M.A. Splittings of poincaré duality groups. **J. London Math. Soc**, p. 421-438, 1988.

[24] KROPHOLLER, P.H.; ROLLER, M.A. Splittings of poincaré duality groups III. **J. London Math. Soc**. (2),39 p. 271-284, 1989.

[25] MACLANE, S. **Homology**. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[26] MASSEY, W.S. **Algebraic topology:** An Introduction. New York: Springer-Verlag, 1967.

[27] PAPANI, F.M.G. **Cohomologia de grupos, dualidade e aplicações ao estudo do invariante algébrico** $E(G, S, M)$. 1997. Dissertação (Mestrado), IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto.

[28] RIBES, L. On a cohomology theory for pairs of groups. **Proc. of the A.M.S.**, v.21, p. 230-234, 1969.

[29] ROTMAN, J.J. **An introduction to homological algebra**. 2.ed. New York: Springer, 2008.

[30] SCOTT, G.P. Ends of pairs of groups, **J. Pure Appl. Algebra**, 11, p. 179-198, 1977.

[31] SCOTT, G.P.; WALL, C.T.C. Topological methods in group theory, **London Math. Soc. Lect**, Notes Series 36, Homological Group Theory, p. 137-203, 1979.

[32] SILVEIRA, F.S.M. **Um invariante cohomológico para pares de grupos**. 1997. Dissertação (Mestrado), IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto.

[33] SPECKER, E. Endenverbände van Raüme und Gruppen, **Math. Ann.**, 122, p. 167-174, 1950.

[34] STALLINGS, J.R. **Groups theory and 3-dimensional manifolds**, Yale Univ. Press , 1971.

[35] STALLINGS, J.R. On torsion - free groups with infinitrly many ends, **Ann. Math.** , p. 321-334, 1968.

[36] SWARUP, G.A. Relative version of a theorem of Stallings, **J. Pure Appl. Al. 11**, p. 75-82, 1977.

[37] VICK, J.W. **Homology theory**. New York: Springer, 1994.

Índice Remissivo