

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MILENA SAMPAIO DE OLIVEIRA

Detritos espaciais: análise da ressonância 1:3 e a perturbação lunar

Guaratinguetá

2018

Milena Sampaio de Oliveira

Detritos espaciais: análise da ressonância 1:3 e a perturbação lunar

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física .

Orientador: Prof^o Dr. Silvia Maria Giuliatti Winter

Guaratinguetá
2018

O48d	Oliveira, Milena Sampaio de Detritos espaciais : análise da ressonância 1:3 e a perturbação lunar / Milena Sampaio de Oliveira – Guaratinguetá, 2018. 39 f. : il. Bibliografia : f. 38-39 Trabalho de Graduação em Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018. Orientador: Prof.^a Dr.^a Silvia Maria Giuliatti Winter 1. Ressonância. 2. Detritos espaciais. 3. Difusão .I. Título CDU 543.429.23
------	--

Pâmella Benevides Gonçalves
Bibliotecária/CRB-8/9203

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

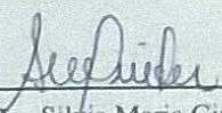
MILENA SAMPAIO DE OLIVEIRA

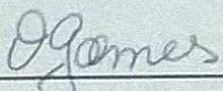
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM
BACHARELADO EM FÍSICA "

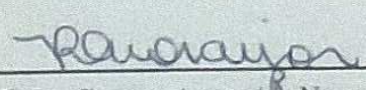
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
BACHARELADO EM FÍSICA

Profº Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Profº Dr. Silvia Maria Giuliatti Winter
Orientador/UNESP-FEG


Profº Dr. Vivian Martins Gomes
UNESP-FEG


Profº Dr. Rosana Aparecida Nogueira de Araujo
UNESP-FEG

Novembro , 2018

DADOS CURRICULARES

MILENA SAMPAIO DE OLIVEIRA

NASCIMENTO 24/11/1996 - Guaratinguetá / SP

FILIAÇÃO Luis Fernando de Oliveira
Nilcimara Sampaio de Oliveira

2014 / 2018 Graduação em Física - Bacharelado em Física
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São Paulo-Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha mãe Nilcimara e ao meu avô José Irineu (In Memoriam) por terem investido em minha educação e proporcionado esse momento. Por sempre terem me apoiado em minhas escolhas e acreditado em mim.

A minha avó Geni, ao meu irmão João Vítor, ao meu pai Luis Fernando e ao meu padrasto José Roberto pelo carinho e por sempre estarem ao meu lado.

Agradeço a minha orientadora Silvia Giuliatti Winter pela orientação, não só nesse projeto, assim como em todos os outros ao longo da graduação. Pela aprendizagem, pela paciência, confiança e até os "puxões de orelha" quando necessários.

Agradeço ao meu namorado João Victor pelo apoio e amizade durante toda a graduação. Pelo amor, cuidado, por sempre estar ao meu lado e acreditar em mim.

Ao pesquisador Marco Muñoz pelo aprendizado e ajuda com o mapa de análise de frequência. A Ma. Jadilene pela imensurável ajuda e paciência, não sei o que seria deste trabalho sem ela.

Aos meus amigos de longa data Larissa, Lis, Marcos Paulo e Samuel pelo carinho, apoio e por sempre estarem ao meu lado.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Proc. 2016/24561-0)

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

“Somos feitos de poeira das estrelas. Somos uma maneira do cosmos conhecer a si mesmo”
Carl Sagan

RESUMO

Neste trabalho foi realizada uma análise do comportamento da região próxima à ressonância 1:3. O sistema admitido é composto pela Terra (corpo principal) e seus coeficientes de achatamento J_2 , J_3 e C_{22} , um conjunto de detritos e a perturbação lunar. Para a análise foi utilizado o integrador numérico Mercury, e para caracterizar a estrutura dinâmica da região foi utilizado o Algoritmo de Transformada de Fourier Modificado por Frequência (FMFT). As integrações foram realizadas para um conjunto de 11011 partículas em um período de tempo de 300 dias. A análise da dinâmica da região e o tempo de difusão das partículas foi obtida através do mapa de difusão. Os resultados mostraram que a região apresentou, de modo geral, predominância de órbitas com comportamento fracamente regular e irregular, de acordo com as definições utilizadas.

PALAVRAS-CHAVE: Ressonância. Detritos Espaciais. Mapa de Difusão.

ABSTRACT

This work analyses the dynamical behavior near the 1 : 3 tesseral resonance. The system is formed by the Earth, and its gravity coefficients J_2 , J_3 and C_{22} , a sample of space debris and the Moon. In order to perform this study we use the Mercury Integrator and the Fast Fourier Transform. The numerical simulations have been performed for a sample of about 11000 particles (space debris) for a time span of 300 days. The analysis of this particular region was obtained through the diffusion map. Our results showed that most of the orbits that the orbits are regular in most of the regions.

KEYWORDS: Resonance. Space Debris. Diffusion Map.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Sistema de Dois Corpos	16
Figura 2	Elementos Orbitais	17
Figura 3	Sistema de três corpos	18
Figura 4	Distância entre dois pontos P e P' em coordenadas esféricas	20
Figura 5	Harmônicos zonais.	23
Figura 6	Harmônicos tesserais.	23
Figura 7	Harmônicos setoriais.	23
Figura 8	Polinômios e funções associadas de Legendre até a ordem 5.	24
Figura 9	Polinômios e funções associadas de Legendre de ordem 5 até 7	24
Figura 10	Condições iniciais representadas em uma grade a vs. e - 11011 partículas	28
Figura 11	Exemplo de arquivo de entrada do programa de análise de frequência. . .	32
Figura 12	Exemplo de arquivo de saída do programa de análise de frequência. . .	32
Figura 13	Mapa de difusão sem a Lua no sistema.	34
Figura 14	Mapa de difusão com a Lua no sistema.	34
Figura 15	Mapa de difusão - INTEGRAL.	36
Figura 16	Mapa de difusão - INTEGRAL (triângulo amarelo (Celletti): $a = 87705$ km; triângulo preto (ESA): $a = 87731.5$ km)	37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cônicas	16
Tabela 2 – Condições iniciais	28
Tabela 3 – Parâmetros utilizados referentes à Terra	28
Tabela 4 – Parâmetros utilizados referentes à Lua (Época: 2000 Jan. 1.50 TT)	29
Tabela 5 – Tempo de difusão das órbitas para o caso sem a Lua no sistema	35
Tabela 6 – Tempo de difusão das órbitas para o caso com a Lua no sistema	35
Tabela 7 – Tempo de difusão das órbitas para cada comportamento - INTEGRAL	36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a	Semieixo maior
AEB	Agência Espacial Brasileira
C_{22}	Coeficiente de achatamento setorial de segunda ordem
e	Excentricidade
ESA	Agência Espacial Europeia
D	Difusão
FMA	Análise do Mapa de Frequência
FMFT	Algoritmo de Transformada de Fourier Modificado por Frequência
GEO	Órbita Geoestacionária
I	Inclinação
ISS	Estação Internacional Espacial
INTEGRAL	Laboratório Internacional de Astrofísica de Raios Gama
J_2	Coeficiente de achatamento zonal de segunda ordem
J_3	Coeficiente de achatamento zonal de terceira ordem
LEO	Órbita Baixa da Terra
LNA	Laboratório Nacional de Astrofísica
LogD	Escala logarítmica de cores
MEO	Órbita Média da Terra
NASA	Agência Espacial Norte Americana
P_n	Polinômios de Legendre
P_n^m	Polinômios Associados de Legendre
t_{Diff}	Tempo de Difusão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	MISSÃO INTEGRAL	14
2	MODELAGEM TEÓRICA	16
2.1	PROBLEMA DE DOIS CORPOS	16
2.2	PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS	17
2.3	POTENCIAL TERRESTRE	19
2.4	RESSONÂNCIA TESSERAL	25
3	DESENVOLVIMENTO	26
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA	26
3.2	INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS	27
4	ANÁLISE DO MAPA DE FREQUÊNCIA	30
4.1	DESCRIÇÃO ANALÍTICA	30
4.1.1	O parâmetro de difusão	32
4.1.2	O mapa de difusão	33
5	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

Os detritos espaciais são objetos que orbitam ao redor da Terra, mas que não desempenham nenhuma função útil. Segundo a Agência Espacial Norte Americana (NASA) (2013) , dos satélites artificiais que estão em órbita, menos de 10% estão ativos, o restante faz parte do lixo espacial, composto desde satélites fora de uso até resíduos de lançamentos de sondas espaciais. Mais de 500 mil peças de resíduos são rastreadas enquanto orbitam a Terra, todas viajando a velocidades de até 17.500 km/h, rápido o suficiente para um pedaço relativamente pequeno de detrito ser capaz de danificar um satélite ou uma nave espacial. Existem muitos milhões de peças de detritos que são tão pequenas que não podem ser rastreadas.

Segundo Rossi (2005) , a região próxima à Terra é dividida em três regiões principais:

- Região LEO (do inglês "Low Earth Orbit"), localizada abaixo de 2000 km, é a região de órbitas baixas, onde objetos de diversos tamanhos podem ser encontrados. É uma região de alta concentração de detritos e utilizada para satélites de sensoriamento remoto e meteorologia;
- Região MEO (do inglês "Medium Earth Orbit"), localizada entre 2000 e 36000 km, é a região de órbitas médias. Nela se encontra a constelação de satélites de navegação;
- Região GEO (do inglês "Geostationary Orbit"), localizada acima de 36000 km de altitude, é a região de órbitas altas. É a região em que se encontra a ressonância 1:1 com o movimento rotacional da Terra, utilizada principalmente por satélites de comunicação e TV.

Em Santos (2007) é possível encontrar esses objetos classificados em três grupos:

- Objetos grandes: objetos que possuem diâmetro maior que 10 centímetros. É possível detectar, localizar e catalogá-los;
- Objetos de risco: objetos que possuem diâmetro entre 1 e 10 centímetros. Não é possível localizar e catalogá-los;
- Restos menores ou micro restos: objetos que possuem diâmetro menor que 1 centímetro.

A população de detritos espaciais aumenta a cada dia, e com isso, aumenta o perigo para todos os veículos espaciais, especialmente para a Estação Espacial Internacional (ISS). Eventualmente ela realiza manobras a fim de evitar colisões, pois os sistemas da ISS são responsáveis por manter seus recursos vitais aos astronautas.

O monitoramento pode ser realizado de duas formas: por métodos ativos ou passivos. O método ativo, como o radar, é mais eficiente e mais caro, pois envolve sistemas de alta potência.

Neste método é possível saber onde o objeto se encontra e sua dimensão com base no tempo em que as ondas levam para serem refletidas, podendo detectar objetos com centímetros de dimensão. O método passivo envolve a observação de objetos por meios de telescópios, esta observação só ocorre quando os objetos refletem a luz solar. O método é limitado pelo tamanho do objeto e pela exigência de que para detectá-lo é necessário que o Sol o ilumine, mas possui eficiência e serve como checagem de objetos que já foram detectados pelo método ativo (AEB, 2018).

No Brasil, o telescópio dedicado ao monitoramento de detritos espaciais foi inaugurado em Abril de 2017, instalado no Observatório Pico dos Dias, em Brazópolis (MG). O Laboratório Nacional de Astrofísica (LNA) informa que já é possível mapear cerca de 500 a 800 objetos por noite.

De acordo com a Agência Espacial Europeia (ESA) (2018), em quase 60 anos de atividades espaciais, mais de 5250 lançamentos foram realizados. Os detritos gerados a partir disso são regularmente rastreados e catalogados pela US Space Surveillance Network, com objetos em órbita LEO de 5 a 10 cm, e objetos em órbita GEO de 30 cm a 1 m. Esta grande quantidade de lixo espacial possui uma massa total maior que 7500 toneladas.

Segundo a Agência Espacial Brasileira (AEB) (2018), a quantidade de detritos tende a aumentar por conta de colisões entre objetos sem função no espaço e do aumento de lançamentos previstos pelo mercado espacial, setor espacial que recebe investimentos privados e agências espaciais estatais, com cerca de 1300 satélites que serão lançados no período entre 2017 e 2020.

Um estudo realizado pela NASA (2013) mostra que em 2013 havia mais de 20000 objetos do tamanho de uma bola de golfe, e mais de 100 milhões de objetos pequenos.

Tendo isso em vista, é de extrema importância obter informações de quais regiões são estáveis. Com o estudo dessas regiões é possível evitar colisões e contribuir para o estudo de normas de segurança e uso do espaço.

1.1 MISSÃO INTEGRAL

Uma das motivações do projeto foi a existência de uma missão espacial explorada na região próxima à ressonância estudada, denominada INTEGRAL (Laboratório Internacional de Astrofísica de Raios Gama).

De acordo com a ESA (2003), o projeto INTEGRAL começou em julho de 1993 e tinha como objetivo a criação de um observatório de alta energia. A espaçonave foi lançada em 17 de Outubro de 2002, uma missão da ESA em cooperação com a Rússia e os Estados Unidos.

O INTEGRAL encontra-se em uma altitude de 87731,5 km, com alta excentricidade no valor de 0,824148, fora dos cinturões de radiação da Terra, região onde ocorrem fenômenos atmosféricos devido a presença de partículas carregadas, fazendo com que os efeitos da radiação de fundo sejam reduzidos. Como a atmosfera da Terra nos protege dos raios gama, são necessários satélites para realizar estudos sobre raios gama de fontes astronômicas.

A missão está fornecendo novas visões sobre diversos objetos como: buracos negros, estrelas de nêutrons, núcleos ativos de galáxias e supernovas. O INTEGRAL também está nos permitindo entender melhor fenômenos muito enérgicos, como a formação de novos elementos químicos e explosões de raios gama.

Neste trabalho, foi analisada a estabilidade da região externa próxima à ressonância 1:3, comensurabilidade entre o movimento de translação do detrito com o movimento rotacional da Terra, utilizando a Análise do Mapa de Frequência (FMA), uma ferramenta desenvolvida por Laskar (1990).

No capítulo 2 é apresentada a modelagem teórica utilizada durante o desenvolvimento do projeto. Os problemas de dois corpos e o problema restrito de três corpos são apresentados brevemente. O potencial terrestre é apresentado em detalhes, dado a importância do mesmo neste trabalho.

No capítulo 3 é apresentado o desenvolvimento do projeto. É descrito quais são os componentes do sistema estudado e suas condições iniciais, o integrador numérico utilizado, as equações do movimento e suas modificações.

No capítulo 4 é apresentada uma descrição do algoritmo de análise de frequência, do parâmetro (D) de difusão e do tempo de difusão. Em seguida, o mapa de difusão é apresentado para os diferentes casos estudados e uma análise dos mesmos é realizada.

Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões dos resultados obtidos.

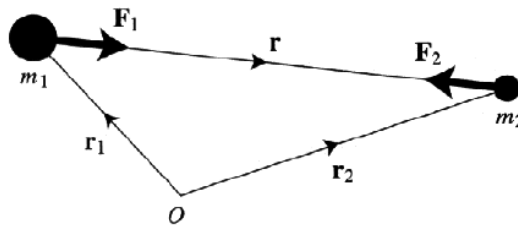
2 MODELAGEM TEÓRICA

2.1 PROBLEMA DE DOIS CORPOS

De acordo com Murray e Dermott (1999) o problema de dois corpos consiste em um sistema formado por dois pontos de massa que interagem entre si através de interações gravitacionais, descritas pela Lei da Gravitação Universal de Newton.

Considera-se o movimento de duas massas m_1 e m_2 com vetores posição $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, respectivamente, em relação a origem O fixada em um espaço inercial. O vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ descreve a posição relativa entre as massas.

Figura 1 – Sistema de Dois Corpos



fonte: Murray (1999).

O movimento da massa m_2 em relação a massa m_1 pode ser descrito por:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \vec{0} \quad (2.1)$$

sendo $\mu = G(m_1 + m_2)$. A equação 2.1 é uma equação diferencial de segunda ordem cuja solução do problema de dois corpos é dada por:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (2.2)$$

A equação 2.2 é a equação geral de uma cônica em coordenadas polares, sendo e a excentricidade, p o semilatus rectum (cordas de uma cônica que são perpendiculares ao eixo principal e passam através de um de seus focos) e a o semi-eixo maior da cônica. Temos quatro cônicas possíveis, mostradas na tabela 1:

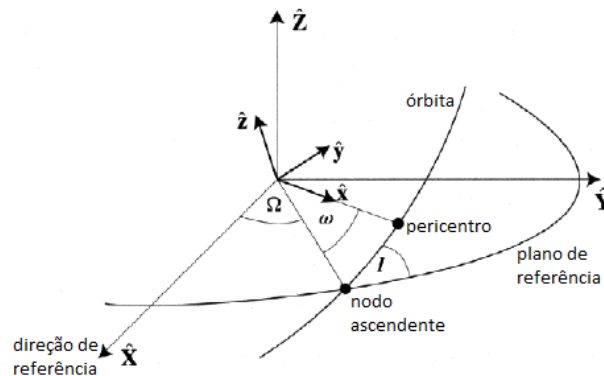
Tabela 1 – Cônicas

Cônica	e	p
Círculo	0	a
Elipse	$0 < e < 1$	$a(1 - e^2)$
Parábola	1	$2q$
Hipérbole	$e > 1$	$a(e^2 - 1)$

fonte: Produção da Própria Autora.

A integração do problema do movimento relativo resulta em seis constantes. Essas constantes são chamadas de elementos orbitais e descrevem a posição da partícula, sendo eles:

Figura 2 – Elementos Orbitais



fonte: Murray (1999).

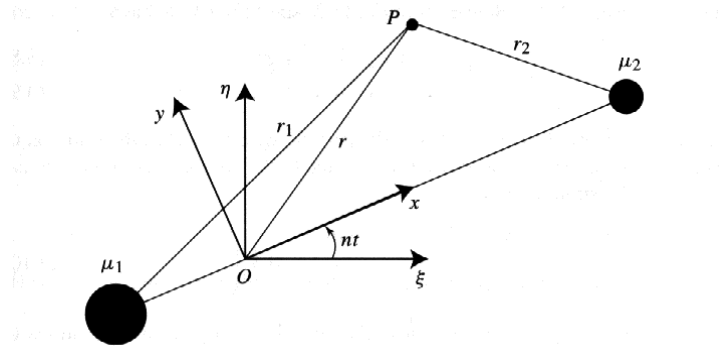
- a : semi-eixo maior, define o tamanho da órbita e seu período de revolução;
- e : excentricidade, define a forma da órbita;
- Ω : longitude do nodo ascendente;
- I : inclinação, junto à Ω define a posição do plano da órbita;
- ω : longitude do pericentro, é medido a partir do nodo e define a orientação da órbita em seu plano;
- τ : tempo da passagem pelo pericentro, junto aos outros elementos, posiciona a partícula na órbita em qualquer tempo.

2.2 PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Segundo Murray e Dermott (1999), o problema circular restrito de três corpos descreve o movimento de um sistema composto por dois corpos de massas m_1 e m_2 orbitando um centro de massa em comum entre eles, e um terceiro corpo de massa desprezível. Os corpos m_1 e m_2 possuem órbitas circulares e exercem força gravitacional sobre o terceiro corpo, enquanto o mesmo não afeta m_1 e m_2 .

O problema de três corpos não possui solução analítica, mas soluções especiais são apresentadas, os chamados pontos de equilíbrio de Lagrange.

Figura 3 – Sistema de três corpos



fonte: Murray (1999).

As equações do movimento do problema em questão são descritas por um sistema inercial de coordenadas (ξ, η, ζ) , com origem no centro de massa do sistema. As equações do movimento que descrevem a dinâmica da partícula P são:

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (2.3)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (2.4)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \quad (2.5)$$

onde

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 \quad (2.6)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2 \quad (2.7)$$

e

$$\mu_1 = 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.8)$$

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.9)$$

É conveniente descrever o movimento da partícula em um referencial girante no qual os corpos m_1 e m_2 se encontram fixos. É possível relacionar as coordenadas do sistema referencial inercial (ξ, η, ζ) com as coordenadas do sistema girante (x, y, z) com uma taxa de rotação

uniforme n . Através de matrizes de rotação, as equações do movimentos podem ser escritas:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right] \quad (2.10)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \quad (2.11)$$

$$\ddot{z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z \quad (2.12)$$

Estas equações também podem ser escritas como:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.14)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2.15)$$

sendo V o potencial do corpo principal do sistema.

No caso estudado, o corpo central, a Terra, é colocado na origem do sistema de coordenadas. Com isso foi possível atribuir a n o valor da taxa de rotação da Terra, necessário para o estudo da ressonância 1:3.

2.3 POTENCIAL TERRESTRE

Um objeto ao redor da Terra está sujeito a força gravitacional exercida pela mesma, porém, a sua não esfericidade faz com que os elementos orbitais do corpo que a orbita variem ao longo do tempo. Pela lei da gravitação universal de Newton, dois corpos com diferentes massas m e M , separados por uma distância r , se atraem com por uma força dada por:

$$\mathbf{F}(r) = \frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.16)$$

onde $G = 6.6720 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ é a constante gravitacional universal, m é a massa de um corpo pontual, M é a massa do corpo principal, e r é a distância entre as duas massas. A força gravitacional pode também ser descrita pelo gradiente do potencial do corpo principal:

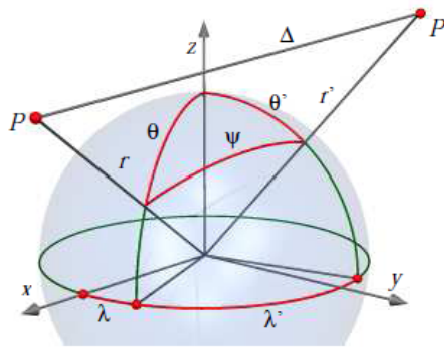
$$\mathbf{F}(r) = m \nabla V \quad (2.17)$$

Ao se estudar um corpo principal com distribuição de massa não uniforme, devemos considerar a atração exercida por cada elemento de massa dM sobre a partícula:

$$V = G \frac{dM}{r} \quad (2.18)$$

De acordo com a figura 4, considera-se agora dois corpos representados por P e P' , localizados em coordenadas esféricas por $P(r, \theta, \lambda)$ e $P'(r', \theta', \lambda')$ e separados por uma distância Δ . Logo, o potencial gravitacional pode ser escrito como:

Figura 4 – Distância entre dois pontos P e P' em coordenadas esféricas



fonte: Kuga et al (2011).

$$V = G \frac{dM}{\Delta} \quad (2.19)$$

A distância Δ entre os dois corpos é dada pela lei dos cossenos, descrita por:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi \quad (2.20)$$

onde Ψ é o ângulo entre r e r' e $\cos \Psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda' - \lambda)$. Podemos escrever:

$$\Delta = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

Fazendo $t = \cos \Psi$ pode-se reescrever a equação 2.21:

$$\Delta = (r^2 + r'^2 - 2rr't)^{\frac{1}{2}} \quad (2.22)$$

Fatorando r :

$$\Delta = r \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) t \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) t \right]^{\frac{-1}{2}} \quad (2.24)$$

Pode-se abrir 2.24 em uma série binomial, supondo $r' < r$:

$$(1+x)^k = \left[1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots \right] \quad (2.25)$$

Para simplificarmos os termos, vamos fazer:

$$u = \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) t \quad (2.26)$$

Expandindo 2.24 temos:

$$\frac{1}{r} \left[(1+u)^{\frac{-1}{2}} \right] = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{15}{48}u^3 + \dots \right] \quad (2.27)$$

Substituindo 2.26 em 2.27:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \left(\frac{r'}{r} \right) t + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^4 + 4 \left(\frac{r'}{r} \right)^2 t^2 - 4 \left(\frac{r'}{r} \right)^3 t \right] \right. \\ \left. - \frac{15}{48} \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^6 - 6 \left(\frac{r'}{r} \right)^5 t + 24 \left(\frac{r'}{r} \right)^4 t^2 - 8 \left(\frac{r'}{r} \right)^3 t^3 \right] + \dots \right\} \quad (2.28) \end{aligned}$$

Fazendo as devidas manipulações e colocando em evidência as potências de $\frac{r'}{r}$ temos:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) t + \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right) \left(\frac{r'}{r} \right)^3 + \dots \right] \quad (2.29)$$

É possível reescrever 2.29 utilizando os polinômios de Legendre:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left[P_0(\cos \Psi) + \frac{r'}{r} P_1(\cos \Psi) + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 P_2(\cos \Psi) + \dots \right] = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \Psi) \quad (2.30)$$

onde $P_n(\cos \Psi)$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ são os polinômios de Legendre. Substituindo a equação 2.30 na equação 2.19, temos:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \Psi) \quad (2.31)$$

Segundo o teorema da adição de Legendre:

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{nm}(\cos \theta') \cos m(\lambda - \lambda) \quad (2.32)$$

sendo P_{nm} os polinômios associados de Legendre e δ_{m0} o delta de Kronecker. Fazendo as devidas substituições e manipulações, podemos escrever:

$$V(r, \Psi, \lambda) = \frac{GM_T}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_T}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \quad (2.33)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} = \frac{(2 - \delta_{m0}) (n-m)!}{a_e^n M} \int_M r'^n P_{nm}(\sin \varphi') \begin{bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{bmatrix} dM \quad (2.34)$$

sendo C_{nm} e S_{nm} os coeficientes harmônicos esféricos, G a constante gravitacional, M_T a massa da Terra, R_T o raio da Terra, r a distância entre o corpo central e a partícula, Ψ a latitude geocêntrica, λ a longitude geocêntrica. As funções associadas de Legendre P_n^m e os polinômios de Legendre P_n são dados por:

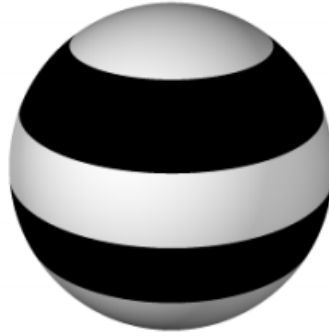
$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (2.35)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.36)$$

Os coeficientes harmônicos esféricos C_{nm} e S_{nm} presentes na expressão do potencial terrestre 2.33 tem como função expressar a forma irregular da distribuição de massa da Terra, a fim de obtermos um modelo adequado do potencial. De acordo com Kuga et al (2011), se $m = 0$, temos os chamados harmônicos zonais, eles dividem a esfera em zonas, como mostra a figura 5. Se $0 < m < n$, temos os harmônicos tesserais. Neste caso, a esfera é dividida em compartimentos nos quais o valor da função é alternada entre positiva e negativa, mostrada na figura 6. E, por fim, se $m = n$, temos os harmônicos setoriais, dividindo a esfera em setores positivos e negativos como mostra a figura 7. As figuras 8 e 9 mostram polinômios e funções associadas de Legendre até a ordem 7.

Xavier (2017) apresenta a expansão da expressão do potencial terrestre até o termo $n = 3$ (2.37).

Figura 5 – Harmônicos zonais.



fonte: Kuga et al (2011).

Figura 6 – Harmônicos tesserais.



fonte: Kuga et al (2011).

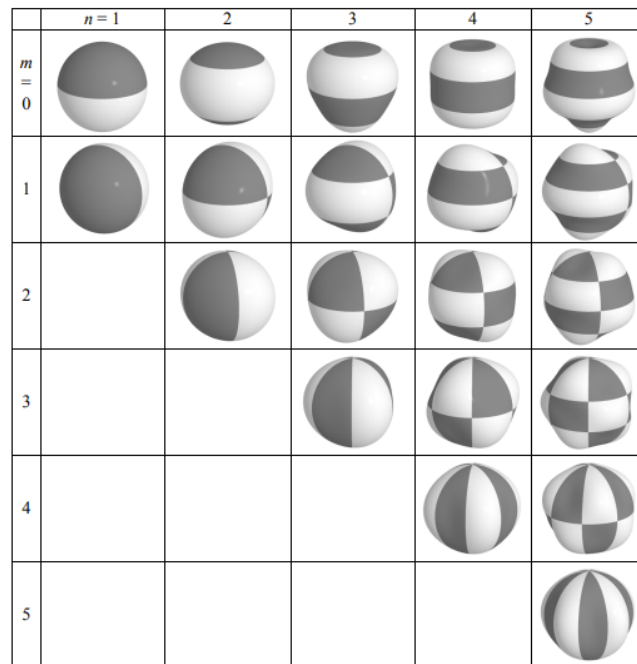
Figura 7 – Harmônicos setoriais.



fonte: Kuga et al (2011).

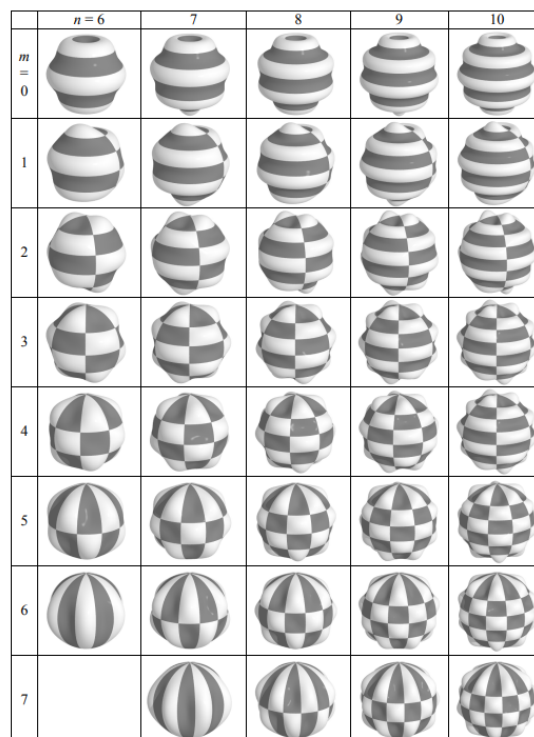
$$\begin{aligned}
 V_3(r, \phi, \lambda) = & \frac{GM_E}{r} + \frac{GM_E}{r} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left[\frac{1}{2} (3 \sin^2 \phi - 1) C_2 \right] \\
 & + \frac{GM_E}{r} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left[3 \cos^2 \phi (C_{22} \cos 2\lambda + S_{22} \sin 2\lambda) \right] \\
 & + \frac{GM_E}{r} \left(\frac{R_E}{r} \right)^3 \left[\frac{1}{2} \sin \phi (5 \sin^2 \phi - 3) C_3 \right] \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Figura 8 – Polinômios e funções associadas de Legendre até a ordem 5.



fonte: Kuga et al (2011).

Figura 9 – Polinômios e funções associadas de Legendre de ordem 5 até 7



fonte: Kuga et al (2011).

De acordo com Rao (1986), os coeficientes $C_{10} = C_{11} = S_{11} = S_{00} = 0$ quando o centro de massa do corpo central coincide com a origem do sistema de coordenadas. O coeficiente zonal

C_{20} reproduz o achatamento nos polos do corpo central. Como esse coeficiente possui um valor positivo, convencionou-se que a ele é dado um valor negativo no equador, fazendo $C_2 = -J_2$.

Passando a expressão 2.37 para coordenadas cartesianas, temos:

$$V_3(x, y, z) = \frac{GM_T}{r} + \frac{GM_T}{r} \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \left[J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2r^2} \right) \right] + \frac{GM_T}{r} \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \left[3C_{22} \frac{(x^2 - y^2)}{r^2} \right] + \frac{GM_T}{r} \left(\frac{R_T}{r} \right)^3 \left[J_3 \frac{z}{2r} \left(3 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \right] \quad (2.38)$$

Neste trabalho utiliza-se o potencial terrestre com os coeficientes zonais J_2 , J_3 e do coeficiente setorial C_{22} .

2.4 RESSONÂNCIA TESSERAL

Em Celletti e Gales (2015) é definido que uma ressonância tesseral ocorre quando há comensurabilidade entre o período orbital do detrito e o período de rotação da Terra, respeitando a seguinte relação:

$$\ell \dot{M} - j \dot{\theta} = 0 \quad j, \ell \in \mathbb{Z} \quad (2.39)$$

onde, no nosso caso, $\dot{\theta}$ é a velocidade angular de rotação da Terra e $\dot{M}$ é o movimento médio do detrito. Se a relação descrita na equação 2.39 for satisfeita, a ressonância tesseral de ordem $j:\ell$ irá existir.

Neste trabalho a ressonância tesseral estudada é a 1:3, isto é, quando a Terra completar um período de rotação o detrito completará 3 voltas ao redor da Terra.

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

O sistema estudado é composto pela Terra (corpo principal) e seus coeficientes de gravidade J_2 , J_3 e C_{22} , um conjunto de detritos localizados em uma região próxima à ressonância 1:3 e a Lua. Considera-se também a velocidade de rotação da Terra, denotada aqui como n . O sistema de referência adotado é não inercial, cuja equações do movimento são descritas em Scheeres e Paskowitz (2006) como:

$$\ddot{x} + 2n\dot{y} - n^2x = -\frac{GM_T R_T^2 x}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{GM_L R_L^2 x}{r^3} \quad (3.1)$$

$$\ddot{y} - 2n\dot{x} - n^2y = -\frac{GM_T R_T^2 y}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{GM_L R_L^2 y}{r^3} \quad (3.2)$$

$$\ddot{z} = -\frac{GM_T R_T^2 z}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{GM_L R_L^2 z}{r^3} \quad (3.3)$$

sendo M_T a massa da Terra, M_L a massa da Lua, R_T o raio equatorial da Terra, R_L o raio equatorial da Lua, r a distância entre a Terra e a partícula, e V o potencial terrestre. O potencial é dado por:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) = & \frac{GM_T}{r} + \frac{GM_T}{r} \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \left[J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2r^2} \right) \right] \\ & + \frac{GM_T}{r} \left(\frac{R_T}{r} \right)^2 \left[3C_{22} \frac{(x^2 - y^2)}{r^2} \right] + \frac{GM_T}{r} \left(\frac{R_T}{r} \right)^3 \left[J_3 \frac{z}{2r} \left(3 - \frac{5z^2}{r^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por simplicidade, assumi-se que $GM_E = \mu$. Derivando o potencial em relação as coordenadas (x, y, z) , descrito na equação 3.4, temos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -2n\dot{y} + n^2x - \frac{\mu R_T^2 x}{r^3} - \frac{\mu R_T^2 x J_2}{2r^5} \left[3 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] + \frac{3\mu R_T^2 C_{22} x}{r^5} \left[2 - \frac{5(x^2 - y^2)}{r^2} \right] \\ & - \frac{\mu R_T^2 J_3 x z}{2r^7} \left[15 - 35 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] + \frac{GM_L R_L^2 x}{r^3} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & 2n\dot{x} + n^2y - \frac{\mu R_T^2 y}{r^3} - \frac{\mu R_T^2 y J_2}{2r^5} \left[3 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] - \frac{3\mu R_T^2 C_{22} y}{r^5} \left[2 - \frac{5(x^2 - y^2)}{r^2} \right] \\ & - \frac{\mu R_T^2 J_3 y z}{2r^7} \left[15 - 35 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] + \frac{GM_L R_L^2 y}{r^3} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu R_T^2 z}{r^3} - \frac{\mu R_T^2 z J_2}{2r^5} \left[9 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] - \frac{15\mu R_T^2 C_{22} z}{r^7} (x^2 - y^2) - \frac{\mu R_T^2 J_3}{2r^5} \left[-3 + 30 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 35 \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right] + \frac{GM_L R_L^2 z}{r^3} \quad (3.7)$$

As simulações foram realizadas através do pacote Mercury (CHAMBERS, 1999), um pacote de software de uso geral para fazer integrações de N-corpos. Ele é projetado para calcular a evolução orbital de objetos que se movem no campo gravitacional de um corpo central.

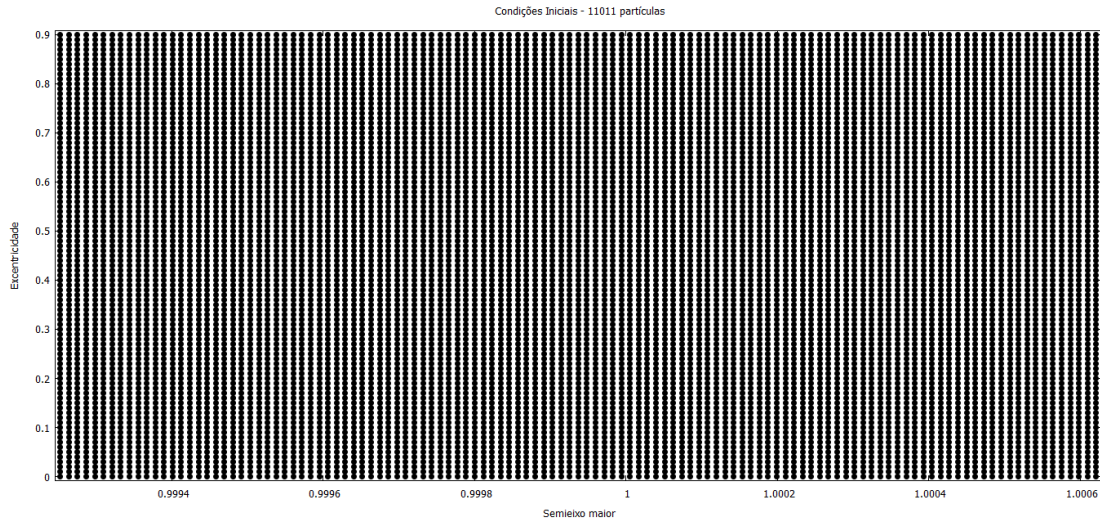
Como o integrador não continha os coeficientes de achatamento J_3 e C_{22} em seu algoritmo, foi necessário a substituição das equações existentes pelas equações descritas em 1, 2 e 3. Além disso, o integrador utiliza um sistema de referência inercial, fazendo com que fosse necessário a inclusão de subrotinas de conversão dos referenciais.

De acordo com Xavier (2017), as implementações das equações do movimento foram realizadas na subrotina MFO_OBL, responsável pelo cálculo da perturbação causada pelo achatamento do corpo principal, e duas subrotinas externas foram adicionadas: MCO_H2AST e MCO_AST2H. A primeira realiza a conversão dos vetores de estado do referencial inercial para o referencial girante. Após a realização das integrações no sistema girante, a segunda subrotina é responsável pela conversão do sistema girante para o sistema inercial, a fim de obtermos dados de saída do programa no referencial inercial. É importante ressaltar que as modificações realizadas não alteram o algoritmo principal do pacote Mercury. A elaboração das subrotinas teve como base as equações 3.10 e 3.11 do livro Murray e Dermott (1999) .

3.2 INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS

Inicialmente os detritos foram distribuídos em uma grade de a versus e (figura 10). Foi considerada uma variação do semieixo maior de 87640 a 87760 km. Na figura 10, a posição 1 equivale ao semieixo maior onde se encontra a ressonância 1:3. De acordo com Celletti e Gales (2015), a ressonância 1:3 é localizada em $a = 87705$ km. Os parâmetros orbitais das partículas foram escolhidos de acordo com Celletti e Gales (2015), de modo que, em trabalhos futuros, seja possível comparar os resultados obtidos.

Na tabela 2 estão detalhadas as condições iniciais definidas para o sistema estudado. Na tabela 3 e 4 são apresentados os valores dos parâmetros relacionados à Terra e à Lua, respectivamente, utilizados nas integrações numéricas.

Figura 10 – Condições iniciais representadas em uma grade a vs. e - 11011 partículas

fonte: Produção da própria autora.

Tabela 2 – Condições iniciais

Símbolo	Valor	Unidade	Nome
a_i	87640	km	Semieixo maior inicial
a_f	87760	km	Semieixo maior final
Δa	1	km	Passo do semieixo maior
e_i	0	Adimensional	Excentricidade inicial
e_f	0.9	Adimensional	Excentricidade final
Δe	10^{-2}	Adimensional	Passo da excentricidade
I	70	Graus	Inclinação
ω	0	Grau	Argumento do pericentro
Ω	0	Grau	Argumento do nodo ascendente
M	0	Grau	Anomalia média

fonte: Produção da própria autora.

Tabela 3 – Parâmetros utilizados referentes à Terra

Símbolo	Valor	Unidade	Nome
J_2	1.0826×10^{-3}	Adimensional	Coefficiente de achatamento zonal de ordem 2
J_3	2.53241×10^{-6}	Adimensional	Coefficiente de achatamento zonal de ordem 3
C_{22}	1.57462×10^{-6}	Adimensional	Coefficiente de achatamento setorial de ordem 2
n	6.28	rad/dias	Velocidade de rotação da Terra

fonte: Celletti et al (2016) .

Foi realizada uma integração de 300 dias. O período de uma partícula no semieixo maior ressonante é de 3 dias, deste modo, o período de integração realizado é suficiente. Após a realização das integrações, os arquivos de saída são utilizados como dados de entrada para a análise do mapa de frequência, descrito no capítulo 4.

Tabela 4 – Parâmetros utilizados referentes à Lua (Época: 2000 Jan. 1.50 TT)

Símbolo	Valor	Unidade	Nome
a	384400	km	Semieixo maior da Lua
e	0.0554	Adimensional	Excentricidade da Lua
I	18.28	Graus	Inclinação da Lua
ω	318.15	Graus	Argumento do pericentro da Lua
Ω	125.08	Graus	Argumento do nodo ascendente da Lua
M	135.27	Graus	Anomalia média da Lua

fonte: NASA (2013).

4 ANÁLISE DO MAPA DE FREQUÊNCIA

Para caracterizar a estrutura dinâmica da região próxima à ressonância 1:3, foi utilizado o método Análise do Mapa de Frequência (FMA). A técnica utilizada foi desenvolvida por Laskar (1990).

De acordo com Laskar (1992), este método é baseado na análise das variações das frequências fundamentais de um sistema integrado numericamente para um curto intervalo de tempo. A partir disso é possível obter uma representação analítica da solução quando regular e detectar se uma órbita é caótica em um determinado período de tempo, além de nos permitir obter uma estimativa do tamanho das zonas caóticas no domínio das frequências.

Em seu trabalho, Laskar, Froeschlé e Celletti apresentam uma comparação do algoritmo de análise de frequência com o método de cálculo do expoente de Lyapunov, método que mede o nível de sensibilidade das trajetórias às pequenas variações nas condições iniciais. Os autores apontam as principais vantagens da técnica, como: para verificar o comportamento de uma órbita não regular, o método precisa de um período de tempo muito mais curto do que o cálculo do Expoente de Lyapunov. Além disso, é preciso apenas uma órbita para fazer o cálculo, e é adequado para o movimento fracamente caótico com qualquer número de graus de liberdade. E, por fim, o método é puramente numérico, o que nos permite usá-lo para uma variedade de problemas.

4.1 DESCRIÇÃO ANALÍTICA

Ao estudarmos um sistema integrável, cuja equações do movimento são solucionadas explicitamente, é possível determinar se o comportamento do mesmo é caótico ou regular através da obtenção das frequências fundamentais do sistema, utilizando o algoritmo de análise de frequência. Pode-se descrever analiticamente o mapa de frequências da seguinte maneira:

Seja um sistema integrável com n graus de liberdade, sua Hamiltoniana é dada por:

$$H(J, \theta) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta) \quad (4.1)$$

onde ε é um parâmetro adimensional que pode assumir valores entre 0 e 1, sendo o primeiro referente à ausência de perturbação e o segundo referente à uma perturbação completa. Já J e θ representam as variáveis de ação e de ângulo, respectivamente.

A Hamiltoniana é reduzida através de transformações canônicas, dependendo apenas das variáveis de ação $H(J, \theta) = H_0(J_i)$ com $j = 1, 2, \dots, n$. A partir disso, as equações do

movimento são representadas por:

$$\dot{J}_i = 0; \quad \dot{\theta}_j = \frac{\partial H_0(J_i)}{\partial(J_i)} = \nu_j(J) \quad (4.2)$$

sendo $\nu_j(J)$ as frequências fundamentais do movimento.

Portanto, as ações são constantes do movimento e $\nu_j(J)$ são frequências fundamentais do movimento que fornecem a quantidade $z_j(t) = z_{j0}e^{i\nu_j t}$ nas variáveis complexas $z_j = J_j e^{i\theta_j}$, sendo $z_{j0} = z_j(0)$.

Neste trabalho, a relação $z'_j = a(t)\exp(i\lambda(t))$ foi utilizada a fim de obtermos as frequências fundamentais do movimento, calculadas através do algoritmo de transformada de Fourier modificado por frequência (FMFT). O termo $a(t)$ representa a evolução temporal do semieixo maior e $\lambda(t)$ representa a evolução temporal da longitude média. O programa e os comandos necessários para a execução podem ser encontrados no endereço <https://www.boulder.swri.edu/davidn/>, página pessoal de David Nesvorný.

Em suma, de acordo com Robutel e Laskar (2001) é possível encontrar uma aproximação quase periódica de um sistema a partir da seguinte relação:

$$z'(t) = \alpha_0 \exp(i\nu_0 t) + \sum_j^N \alpha_j \exp(i\nu_j t) \quad (4.3)$$

As partículas que apresentam movimento regular terão seus valores de semieixo maior e movimento médio próximos dos valores de amplitude e frequência, respectivamente.

Para obtermos as frequências através do algoritmo de análise de frequências é necessário fornecermos para cada partícula do sistema um arquivo de entrada com três colunas, sendo elas: T , X e Y . Os valores de X e Y são calculados através das seguintes relações:

$$X = a \cos \lambda \quad (4.4)$$

$$Y = a \sin \lambda \quad (4.5)$$

onde a é o semieixo maior da partícula, λ é a longitude média e T o tempo de integração.

Na figura 11 é mostrado um exemplo de arquivo de entrada do programa.

Após a realização das simulações numéricas, o programa fornece um arquivo de saída contendo três colunas com os valores da frequência (ν), amplitude (A) e fase (ϕ) de cada partícula. Na figura 12 é mostrado um exemplo de arquivo de saída do programa.

Figura 11 – Exemplo de arquivo de entrada do programa de análise de frequência.

T	X	Y
0	0.0469531032814454	0.0120336408826954
1000	0.0479672216336422	0.0142998220620331
2000	0.0487397462953382	0.0167340949207869
3000	0.0492322880654264	0.0193024273623325
4000	0.0494914285302897	0.021969513024969
5000	0.0494436056416431	0.0246994785860254
6000	0.0491199070834509	0.0274565076090154
7000	0.0485057989065986	0.0302053718828407
8000	0.0476108167152237	0.0329118687610618
9000	0.0464432445690074	0.0355431700589467
10000	0.0450148029404938	0.0380680941374072
11000	0.0433403618653499	0.0404573175011684
12000	0.0414376892641141	0.0426835452679566
13000	0.039327237737894	0.0447216610485628
14000	0.0370319660117889	0.0465488760657974
15000	0.0345771905023913	0.0481448948167462
16000	0.0319904369869743	0.0494921104561207
17000	0.029301300903951	0.0505758376691135
18000	0.0265412687567214	0.051384584520234
19000	0.023743496665487	0.051910358082972
20000	0.0209425216826129	0.0521489920778318
21000	0.0181738913122764	0.0521004787749027
22000	0.015473701032374	0.051769282517413
23000	0.0128780359245372	0.0511646087931917
24000	0.010422319827991	0.0503006011260644
25000	0.00814058303879458	0.049196438368175
26000	0.00606466708623282	0.0478763073075576
27000	0.00422339196401793	0.0463692297893395
28000	0.00264171689698154	0.0447087295792795
29000	0.00133992985793568	0.0429323316513731
30000	0.000332903281531526	0.0410808950338291

fonte: Nesvorný (2017).

Figura 12 – Exemplo de arquivo de saída do programa de análise de frequência.

ν	A	Φ
4.24881629723259	0.0441189999999735	30.6760031483306
28.2206942980347	0.0157500000193111	308.111888087293
3.08951479888228	0.00179999999954783	121.362001280497
52.1925731984448	0.00051600000000224	45.551001768378
27.061375629898	0.000182999824259119	218.721668303444
29.3799920134321	0.000177999659626492	217.420536626282
28.8679402611949	0.000106999156303198	32.6163550779154
27.5734601796556	9.49994479111183e-05	43.7305773955405
5.4070444100214	6.19999984043343e-05	116.983987555663
0.667122798922669	5.80000000130542e-05	74.1160012508621

fonte: Nesvorný (2017).

4.1.1 O parâmetro de difusão

As frequências fundamentais do sistema são calculadas para dois períodos diferentes. Denominamos ν_1 a frequência calculada em um intervalo de tempo de 0 a T , e ν_2 a frequência calculada em um intervalo de tempo de T a $2T$, sendo $2T$ o intervalo total da integração numérica. Quando o movimento é periódico, a variação entre as frequências ν_1 e ν_2 será muito pequena, caracterizando um comportamento regular das órbitas. Mas quando a variação entre as frequências for significativa, teremos um movimento irregular dos corpos, caracterizando um comportamento irregular das órbitas. A difusão (D) é o parâmetro que mede a estabilidade das órbitas do sistema.

De acordo com Gutiérrez e Winter (2017) o parâmetro de difusão, D , de cada partícula nos permite obter uma estimativa da estabilidade das órbitas após um tempo $[T]$ de integração relativamente curto. O valor da difusão pode ser calculado através da relação:

$$D = \frac{|\nu_1 - \nu_2|}{T} \quad (4.6)$$

Valores pequenos de D implicam que a órbita é estável, enquanto valores maiores indicam que a trajetória é instável.

É possível obter uma estimativa do tempo necessário até observarmos uma mudança no movimento médio da partícula, ou o tempo necessário para uma difusão da órbita na direção radial. Para isso pode-se calcular o tempo de difusão t_{Diff} para cada partícula a partir dos valores de D obtidos anteriormente. Para determinar o tempo de difusão das partículas utiliza-se a seguinte relação:

$$t_{Diff} = (DP)^{-1} \quad (4.7)$$

onde P é o período da órbita.

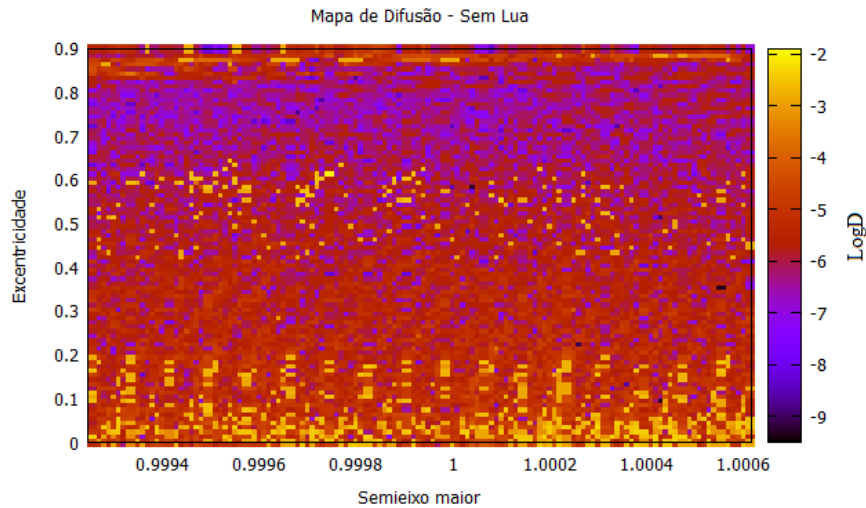
4.1.2 O mapa de difusão

Após se obter o parâmetro de difusão (D) é possível realizar a construção do mapa de difusão. O mapa de difusão irá caracterizar a estrutura dinâmica da região estudada. Constrói-se esse mapa em três dimensões: uma grade de a versus e , e o terceiro eixo uma escala de cores com os valores da difusão referente a cada partícula. Como os números são muito pequenos é conveniente a utilização de uma escala logarítmica para os valores da difusão. Através da escala de cores é possível observar o comportamento de cada partícula. Neste trabalho as seguintes definições serão adotadas:

- Pontos com cores do preto para o roxo: Serão usados para partículas com o valor $\text{Log}D < -7$. São partículas com o valor de difusão muito baixo, portanto cada ponto irá representar partícula com órbita quase periódica.
- Pontos com cores do roxo para o vermelho: Serão usados para partículas com o valor $-7 \leq \text{Log}D \leq -4$. Para esse valor de difusão diremos que as partículas apresentam comportamento fracamente irregular.
- Pontos com cores do vermelho para o amarelo: Serão usados para partículas com o valor $\text{Log}D > -4$. Para esse valor de difusão diremos que as partículas apresentam comportamento fortemente irregular.

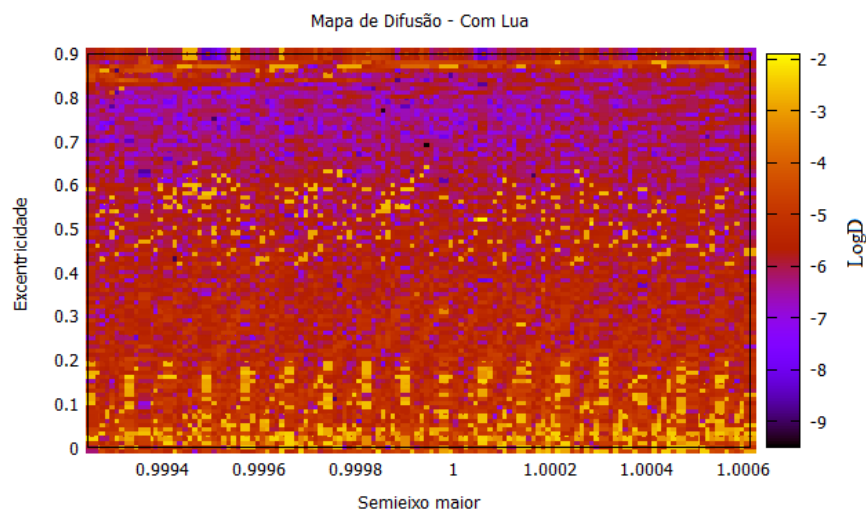
Neste trabalho foram realizadas simulações numéricas para dois casos: sem e com a Lua no sistema. Os mapas de difusão gerados para cada caso são mostrados nas figuras 13 e 14.

Figura 13 – Mapa de difusão sem a Lua no sistema.



fonte: Produção da própria autora.

Figura 14 – Mapa de difusão com a Lua no sistema.



fonte: Produção da própria autora.

Analisando a figura 13 verifica-se a predominância de órbitas com comportamento fracamente e fortemente irregular. Observa-se também que há predominância de órbitas com comportamento regular com valores de excentricidade maior que 0.6. Há também uma concentração de órbitas com comportamento irregular com valores de excentricidade entre 0.8 e 0.9.

Na figura 14 verifica-se que mesmo com a Lua no sistema, ainda há predominância de órbitas com comportamento fracamente e fortemente irregular. Novamente observa-se órbitas com

comportamento regular com valores de excentricidade maior que 0.6, e uma concentração de órbitas com comportamento irregular com valores de excentricidade entre 0.8 e 0.9.

A partir dos valores de difusão obtidos, o tempo de difusão (t_{Diff}) foi calculado para cada partícula e uma média para cada caso e comportamento foi feita, apresentada nas tabelas 5 e 6.

Tabela 5 – Tempo de difusão das órbitas para o caso sem a Lua no sistema

Comportamento	Tempo de difusão	Unidade
Estável	54688	anos
Fracamente Irregular	1094	anos
Fortemente Irregular	299	dias

fonte: Produção da própria autora.

Tabela 6 – Tempo de difusão das órbitas para o caso com a Lua no sistema

Comportamento	Tempo de difusão	Unidade
Estável	53512	anos
Fracamente Irregular	1030	anos
Fortemente Irregular	282	dias

fonte: Produção da própria autora.

Comparando as tabelas 5 e 6 observa-se que o tempo de difusão das partículas com órbitas regulares no caso com a Lua é menor que o tempo de difusão do caso sem a Lua no sistema. Para órbitas com comportamento fracamente irregular e fortemente irregular o tempo de difusão no caso sem a Lua é sutilmente maior que o tempo no caso com a Lua no sistema.

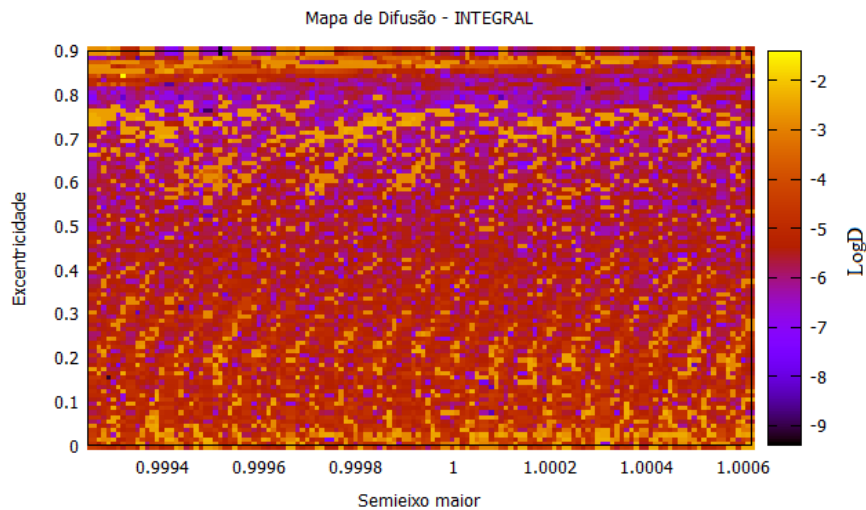
Foi calculado também o tempo de difusão das partículas localizadas no semieixo maior ressonante, $a = 87705$ km. Para partículas localizadas na ressonância 1:3, no caso sem a Lua no sistema, o tempo de difusão é, em média, 8202 anos. Para as partículas no caso com a Lua no sistema, o tempo de difusão é, em média, 6857 anos.

Uma das motivações desse projeto é a missão INTEGRAL, apresentada na seção 1.1 da introdução. De acordo com Celletti e Gales (2015), a missão está localizada exatamente na ressonância 1:3, em $a = 87705$ km, com alta excentricidade no valor de 0.824 e inclinação $I = 52.2$ graus. Porém, de acordo com a ESA (2003) a missão se encontra em 87731.5 km. Como as condições iniciais abrangem ambos os intervalos, os dois casos serão analisados.

O mapa referente à missão INTEGRAL é apresentado na figura 15. De modo geral, a região apresenta predominância de órbitas com comportamento fracamente e fortemente irregular. Foi calculado o tempo de difusão (t_{Diff}) para cada partícula e uma média para cada comportamento

foi feita, apresentada na tabela 7.

Figura 15 – Mapa de difusão - INTEGRAL.



fonte: Produção da própria autora.

Tabela 7 – Tempo de difusão das órbitas para cada comportamento - INTEGRAL

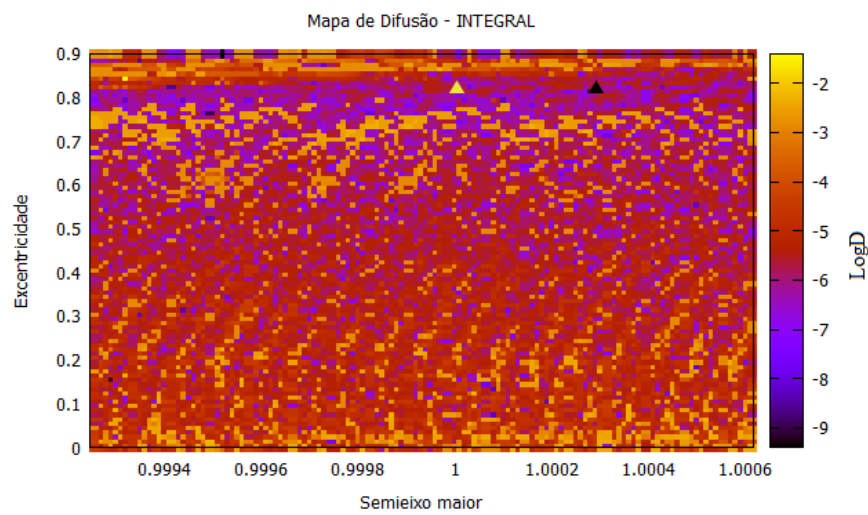
Comportamento	Tempo de difusão	Unidade
Estável	57924	anos
Fracamente Irregular	722	anos
Fortemente Irregular	301	dias

fonte: Produção da própria autora.

Para melhor visualização de onde se encontra a missão, foi destacado dois triângulos no mapa de difusão referente a mesma (figura 16), cada um correspondente a cada caso. O triângulo em amarelo indica onde está localizada a missão de acordo com Celletti e Gales (2015), e o triângulo em preto indica onde está localizada a missão de acordo com a ESA (2003).

O tempo de difusão referente a cada caso foi calculado. Para o semieixo maior da missão de acordo com Celletti, o tempo de difusão é de, aproximadamente, 629 anos. Para o semieixo maior da missão de acordo com a ESA, o tempo de difusão é de, aproximadamente, 1178 anos.

Figura 16 – Mapa de difusão - INTEGRAL (triângulo amarelo (Celletti): $a = 87705$ km; triângulo preto (ESA): $a = 87731.5$ km)



fonte: Produção da própria autora.

5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi o estudo da dinâmica da região próxima à ressonância 1:3 utilizando o mapa de análise de frequência. Aplicamos a técnica para dois casos: com e sem a Lua no sistema. Nossos resultados mostraram que para as diferentes configurações de excentricidade e semieixo maior analisadas, o tempo de difusão de objetos localizados no semieixo ressonante é, aproximadamente, 6857 anos quando considerada a influência lunar, e 8202 anos sem a influência da mesma. A região apresentou, de modo geral, predominância de órbitas com comportamento fracamente e fortemente irregular para ambos os casos estudados, de acordo com a definição utilizada.

Realizamos também um estudo da região onde se encontra a missão INTEGRAL, um telescópio espacial atualmente em operação para a observação de raios gama. Aplicamos a técnica para dois casos: com as condições iniciais apresentadas em Celletti e Gales (2015) e pela ESA (2003). De modo geral, a região apresentou predominância de órbitas com comportamento fracamente e fortemente irregular. Os resultados encontrados estão de acordo com a literatura, uma vez que Celletti e Gales (2015) afirma que a presença da Lua perturba o sistema provocando mudanças drásticas nas ilhas ressonantes. O tempo de difusão referente a cada caso foi calculado. Para o semieixo maior da missão de acordo com Celletti, o tempo de difusão é de, aproximadamente, 631 anos. Para o semieixo maior da missão de acordo com a ESA, o tempo de difusão é de, aproximadamente, 1181 anos. Os resultados encontrados estão de acordo com a literatura, uma vez que a missão INTEGRAL está em operação há 16 anos.

REFERÊNCIAS

- AEB. **Agência Espacial Brasileira se preocupa com impactos gerados por detritos no espaço**. 2018. Disponível em: <<http://www.aeb.gov.br/agencia-espacial-brasileira-se-preocupa-com-impactos-gerados-por-detritos-no-espaco/>>. Acesso em: 18 out. 2018.
- ARANA, J. M. **Introdução à geodésia física**. 2009. Disponível em: <<http://www2.fct.unesp.br/docentes/carto/arana/Agfis.pdf>>. Acesso em: 29 nov. 2018.
- BRIETZKE, E. H. M. **Polinômios de Legendre**. 2017. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/leg1/leg1.html>>. Acesso em: 29 nov. 2018.
- CELLETTI, A.; EFTHYNIPOULOS, C.; GACHET, F.; GALES, C.; PUCACCO, G. Dynamical models and the onset of chaos in space debris. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 90, p. 147–163, 2016.
- CELLETTI A.; GALES, C. On the dynamics of space debris: 1:1 and 2:1 resonances. **Journal of Nonlinear Science**, v. 24, n. 6, p. 1231–1262, 2014.
- CELLETTI A.; GALES, C. A study of the main resonances outside the geostationary ring. **Advances in Space Research**, Oxford, v. 56, p. 388–405, 2015.
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 304, p. 793–799, 1999.
- ESA. **The International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory: 1 year in orbit**. 2003. Disponível em: <<https://www.cosmos.esa.int/documents/332075/1123850/BR-210.pdf>>. Acesso em: 29 nov. 2018.
- ESA. **INTEGRAL: resumo**. 2007. Disponível em: <<http://sci.esa.int/integral/31149-summary/>>. Acesso em: 15 out. 2018.
- ESA. **INTEGRAL: fact sheet**. 2015. Disponível em: <<http://sci.esa.int/integral/47360-fact-sheet/>>. Acesso em: 15 out. 2018.
- ESA. **About space debris**. 2018. Disponível em: <https://www.esa.int/Our_Activities/Operations/Space_Debris/About_space_debris>. Acesso em: 20 out. 2018.
- GUTIÉRREZ M. A.; WINTER, S. Long-term evolution and stability of saturnian small satellites: Aegaeon, methone, anthe and pallene. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 470, n. 3, p. 3750–3764, 2017.
- KUGA, H. K; CARRARA, V; RAO, K. R. **Satélites artificiais: movimento orbital**. 2011. Disponível em: <sid.inpe.br/mtcm19/2011/11.22.18.25-PUD> Acesso em: 29 nov. 2018.
- LASKAR, J. The chaotic motion of the solar system: A numerical the size of the chaotic zones. **Icarus**, San Diego, v. 88, p. 266–291, 1990.
- LASKAR J.; FROESCHLÉ, C. C. A. The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. **Physica D Nonlinear Phenomena**, v. 56, p. 253–269, 1992.

MURRAY C. D; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. Cambridge: Cambridge Press., 1999.

NASA. **Planetary satellite mean orbital parameters**. 2013. Disponível em: <https://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_elem>. Acesso em: 10 nov. 2018.

NASA. **Space debris and human spacecraft**. 2013. Disponível em: <https://www.nasa.gov/mission_pages/station/news/orbital_debris.html>. Acesso em: 07 set. 2018.

NESVORNÝ, D. **Frequency modified Fourier transform**. 2017. Disponível em: <<https://www.boulder.swri.edu/davidn/>>. Acesso em: 07 set. 2018.

PASKOWITZ M, E. S. D. J. Design of science orbits about planetary satellites: application to europa. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, New York, v. 29, n. 5, p. 1147–1158, 2006.

RAO, K. R. **Um estudo dos métodos de perturbação na determinação de órbitas de satélites artificiais de baixa altitude**. 1986. 38 f. Tese (Doutorado em ciência espacial) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1986.

ROBUTEL P.; LASKAR, J. Frequency map and global dynamics in the solar system: Short period dynamics of massless particles. **Icarus**, San Diego, v. 152, p. 4–28, 2001.

ROSSI, A. Population models of space debris. In: IAU COLLOQUIUM, 197. 2004, Belgrado, Sérvia e Montenegro. **Proceedings...** Dynamics of Populations of Planetary Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. p. 427-438.

SANTOS, C. **Estudo da dinâmica de pequenos detritos espaciais e meteoroides**. 2007. 263 f. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2007.

SILVEIRA, N. R. da. **Cálculo recursivo de geopotencial de altíssima ordem e grau para aplicações espaciais**. 2010. Disponível em: <<http://mtc-m16d.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m19/2010/09.21.18.38/doc/Nat\%e1ssia\%20Ramos\%20da\%20Silveira.pdf>>. Acesso em: 15 nov. 2018.

XAVIER, J. **Análise do mapa de frequências aplicada ao estudo de detritos espaciais na ressonância 14:1**. 2017. 56 f. Dissertação (Mestrado em física) — Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2017.