

Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Sobre o Caos de Devaney

Weber Flávio Pereira

Orientador
Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática / Ibilce / Unesp como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas - Área de Concentração: Matemática.

São José do Rio Preto - SP
Dezembro - 2001

"Felicidade é a certeza de
que nossa vida não está
se passando inutilmente".
Eríco Veríssimo

Aos meus pais,
Aparecido e Olinda
Dedico.

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio, pela valiosa orientação.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp - S. J. do Rio Preto, em especial a Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva, pela paciência, formação e estímulo que me passou durante o período como tutora do PET.

Aos meus pais pelo incentivo e segurança que me passaram durante todo esse período.

Aos alunos da Pós-Graduação pelos prazerosos e agradáveis momentos de convívio durante esses anos.

A Juliana pela confiança e apoio durante os momentos difíceis dessa jornada.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A Capes pelo auxílio financeiro.

A Deus por tudo.

Resumo

Neste trabalho estudamos os sistemas dinâmicos caóticos através da definição apresentada por Devaney, composta basicamente de três condições. Investigamos todas as implicações possíveis entre essas condições. Por fim, finalizamos o estudo apresentando uma definição mais sucinta e provamos a sua equivalência com a apresentada por Devaney.

Palavras-chave: Caos, Devaney, Família Quadrática, Sistemas Dinâmicos Discretos.

Abstract

In this work we study the chaotic dynamic systems through the definition presented by Devaney, basically composed of three conditions. We investigate all the possible implications among these conditions. Finally, we finish the study presenting a briefer definition and prove its equivalence to the one presented by Devaney.

Keywords: Chaos, Devaney, Quadratic Family, Discrete Dynamical Systems.

Índice

Introdução	1
1 Conceitos e Resultados Básicos	5
1.1 Equações Discretas e Órbitas	6
1.2 Representação Geométrica das Órbitas	7
1.3 Pontos Fixos Atratores e Repulsores	8
1.4 Pontos Periódicos	12
1.5 Bifurcações	13
1.6 Dinâmica Simbólica	20
1.7 Conjugação	22
1.8 Caos	28
2 Sobre a Definição de Caos	36
2.1 A Definição de Devaney Para Caos	37
2.2 Algumas Implicações	44
2.3 Em Intervalos, Transitividade = Caoticidade	47
2.4 Outra Definição de Caos	55

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar os sistemas dinâmicos caóticos, mais precisamente, obter a definição de sistema dinâmico caótico apresentada por Devaney, composta basicamente de três condições, todas as implicações possíveis entre essas condições. Antes de descrevermos detalhadamente o que iremos estudar, convém fazer um resumo histórico do desenvolvimento dos sistemas dinâmicos nos últimos anos.

A história toda tem início no século XVII, com o aparecimento do Cálculo Diferencial e Integral. Já em meados do século XVIII, surgem os primeiros problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias; o objetivo nessa época era buscar soluções explícitas para tais equações.

Muita teoria nova foi feita nesse período, mas infelizmente, todas as técnicas desenvolvidas para resolver as equações diferenciais foram feitas principalmente para equações diferenciais lineares, algo que na prática não era tão utilizado, pois muitos dos fenômenos da natureza são regidos por equações diferenciais não lineares. Além disso, não era possível obter soluções explícitas de muitas equações diferenciais.

Motivado por este problema, o grande matemático francês Henri Poincaré, por volta do ano de 1881, escreveu, "Memoire Sur Les Courbes Définies Par Une Equation Différentielle", onde se preocupou em descrever por meios de técnicas topológicas e geométricas, todos os comportamentos possíveis dos sistemas. Foi a

partir desse artigo que surgiu a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e com ela uma nova área de pesquisa: os Sistemas Dinâmicos.

Justamente nesse artigo, Poincaré questionou a existência de sistemas com comportamento completamente imprevisíveis; ele havia descoberto o que agora chamamos de "caos".

Um dos objetivos da teoria, é estudar o comportamento dos sistemas dinâmicos, isto é, se é possível prever toda a dinâmica do sistema, se as soluções tendem para uma órbita periódica, ou um ponto singular. Por esse motivo, e pelo questionamento que Poincaré fez sobre os sistemas de comportamento imprevisíveis, muitos matemáticos da época voltaram suas atenções para o estudo de tais sistemas, entre eles, podemos destacar o trabalho desenvolvido pelos matemáticos franceses Pierre Fatou e Gaston Julia em 1920. Eles observaram o comportamento caótico em sistemas de aplicações complexas, e descobriram um conjunto especial, que chamamos atualmente de "conjunto de Julia", mas devido às limitações da época, esse trabalho parou no ano de 1930. Nesse mesmo período, destacamos o trabalho desenvolvido pelo matemático americano G. D. Birkhoff, usando o processo iterativo para compreender o comportamento dinâmico das equações diferenciais, e o trabalho de A. A. Andronov e L. S. Pontryagin, em 1937, introduzindo o conceito básico de Estabilidade Estrutural.

Após esses trabalhos, houve um período onde os sistemas dinâmicos caíram em esquecimento, devido principalmente às limitações computacionais da época. Já no ano de 1960 o matemático americano Stephen Smale recolocou os sistemas dinâmicos em discussão, ao anunciar que havia demonstrado que o comportamento caótico poderia, de fato, ser compreendido e analisado completamente. Ele tinha descoberto a "dinâmica simbólica", ferramenta que usaremos no decorrer deste trabalho. Não

podemos deixar de destacar os trabalhos do matemático brasileiro M. M. Peixoto, no período de 1958 a 1962, provando a densidade de campos de vetores estáveis em superfícies.

Outro fato histórico importante ocorrido nessa época, se deve ao meteorologista americano E. N. Lorenz, o qual descobriu que um simples modelo meteorológico exibia o que chamamos atualmente de "dependência sensitiva das condições iniciais", e com isso, o motivo pelo qual é impossível prever o tempo por um longo período.

Muitos outros importantes pesquisadores contribuíram para o desenvolvimento dos sistemas dinâmicos nessa época, podemos destacar os físicos Mitchell Feigenbaum, Harry Swinney e Jerry Gollub, os matemáticos John Guckenheimer, Robert F. Williams, Hartman, Grobman e I. Kupka.

Para finalizar, o mais recente desenvolvimento dos sistemas dinâmicos se deu graças ao aparecimento dos computadores gráficos. Nesse período podemos destacar os matemáticos Mandelbrot, Adrien Douady, John Hubbard e Dennis Sullivan, entre outros, que conduziram futuros avanços nessa área.

Agora fazemos uma breve descrição deste trabalho que consta de dois capítulos.

No capítulo 1, apresentamos a teoria básica e necessária dos sistemas dinâmicos discretos para obtermos a definição de sistema caótico. Técnicas como análise gráfica, bifurcações de pontos fixos e periódicos, dinâmica simbólica, entre outros. Terminado o capítulo, teremos em mãos a seguinte definição de sistema caótico:

Seja X um espaço métrico. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ é dita caótica em X , se:

- i) f é transitiva;
- ii) O conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X ;
- iii) f possui a dependência sensitiva das condições iniciais.

No capítulo 2, apresentaremos todas as implicações possíveis da definição acima. Mostraremos primeiramente que num espaço métrico qualquer, a condição iii) é dispensável, isto é, se f for transitiva e possuir o conjunto dos pontos periódicos denso em X , então f possui a dependência sensitiva das condições iniciais. Veremos também que esta é a única implicação possível num espaço métrico qualquer, ou seja, quaisquer outras duas condições não implicam na terceira.

Veremos ainda, que se restringirmos a nossa análise a aplicações em intervalos, então basta que a função seja transitiva, e teremos um sistema caótico. Para finalizar, reformularemos as duas primeiras condições topológicas da definição acima em uma única condição, que produz uma simples e breve definição de caos, a saber:

Seja X um espaço métrico. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ é dita caótica em X , se dados U e V , conjuntos abertos não-vazios de X , existe um ponto periódico $p \in U$ e um inteiro não negativo k , tal que $f^k(p) \in V$, isto é, qualquer par de subconjuntos abertos não-vazios de X compartilha uma órbita periódica.

Provaremos a equivalência desta definição com a definição apresentada por Devaney.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Básicos

Neste capítulo iremos trabalhar principalmente com a família de funções quadráticas $Q_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. O valor $c \in \mathbb{R}$ é denominado parâmetro da família.

Desenvolveremos uma teoria para compreendermos o comportamento de todas as órbitas possíveis de um sistema. Começaremos com a definição de equações discretas e órbitas; apresentaremos em seguida a análise gráfica, uma ferramenta bastante útil na visualização dos tipos de órbitas. Introduziremos os pontos fixos atratores e repulsores, e veremos os dois tipos de bifurcações que ocorrem nesses pontos, quando variamos o parâmetro da família. Em seguida, apresentaremos a dinâmica simbólica, uma das mais poderosas ferramentas para compreender o comportamento dos sistemas dinâmicos caóticos. Por fim, introduziremos a noção de caos dada por Devaney [3], apresentando as condições para que um sistema dinâmico seja considerado caótico.

1.1 Equações Discretas e Órbitas

Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e uma aplicação contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Seja a equação definida por:

$$x(n+1) = f(x(n)); \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

A solução para tal problema, com condição inicial $x(0) = x_0$, é dada por $x(n) = f^n(x_0)$, onde f^n é uma n -ésima iterada de f , $f^{n+1} = f(f^n)$ e $f^0 = I$, a aplicação identidade.

Uma equação do tipo (1.1) define um sistema dinâmico discreto sobre \mathbb{R} , que é uma aplicação $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo para todo $n, k \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$:

- i) $\varphi(0; x) = x$;
- ii) $\varphi(n; \varphi(k; x)) = \varphi(n+k; x)$;
- iii) φ é contínua.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, definimos a órbita de x_0 pela f , como sendo a sequência formada pelo ponto x_0 e pelas iteradas de f em x_0 , isto é, $(x_0; f(x_0); f^2(x_0); \dots)$.

Dentre os vários tipos de órbitas, as principais delas são aquelas formadas por pontos fixos, por pontos periódicos e por pontos eventualmente fixos ou eventualmente periódicos.

Um ponto x_0 é dito ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$. Conseqüentemente, teremos $f^n(x_0) = x_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e sua órbita é a sequência constante $(x_0; x_0; \dots)$.

Um ponto x_0 é dito periódico se $f^n(x_0) = x_0$, para algum $n \geq 1$, isto é, se x_0 é ponto fixo da n -ésima iterada de f . O menor natural n no qual isso ocorre é chamado de período da órbita.

Por fim, um ponto x_0 é dito eventualmente fixo (periódico), se ele não é um ponto fixo (periódico), mas algum ponto de sua órbita é fixo (periódico). Por exemplo, o

ponto x_1 é eventualmente x_0 para $f(x) = x^2$, o ponto 0 é um ponto periódico de período 2 para $f(x) = x^2 - 1$ e o ponto 1 é um ponto x_0 para $f(x) = x^3$.

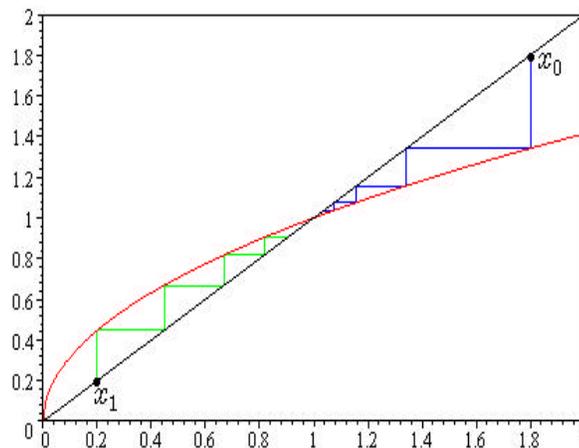
1.2 Representação Geométrica das Órbitas

Introduziremos um processo, chamado análise gráfica, que irá nos auxiliar a compreensão das órbitas das funções reais contínuas de uma variável.

Para isso, considere f uma função real contínua de uma variável e $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto qualquer de seu domínio. Desenhe no mesmo plano o gráfico da f e da função $y = x$. Os pontos de interseção destes gráficos são os pontos fixos de f .

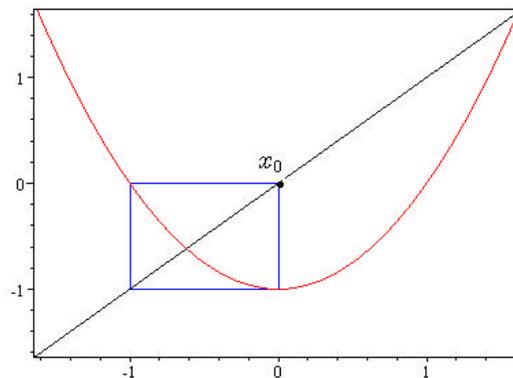
Considere o ponto $(x_0; x_0)$ sobre a reta $y = x$ e a partir deste ponto trace uma linha vertical até interceptar o gráfico de f , no ponto $(x_0; f(x_0))$. A partir deste ponto, trace uma linha horizontal até interceptar a reta $y = x$, no ponto $(f(x_0); f(x_0))$. Repita agora todo o processo para obter o ponto $(f^2(x_0); f^2(x_0))$ e assim continuamente. Obtemos com isso, a órbita de x_0 sobre a diagonal $y = x$.

Exemplo 1.2.1 . Sejam $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 > 1$ e $0 < x_1 < 1$.



Observe na figura que a órbita de x_0 , tende para o ponto $x_0 = 1$, o mesmo acontece com a órbita de x_1 .

Exemplo 1.2.2 . Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $x_0 = 0$.



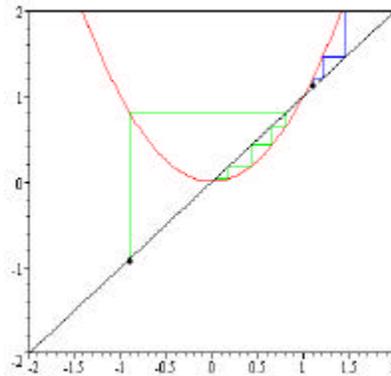
Note que x_0 é um ponto periódico para f de período 2; isso produz um ciclo na análise gráfica.

1.3 Pontos Fixos Atratores e Repulsores

Conforme já falamos, os pontos x_0 representam importantes órbitas de um sistema dinâmico e são classificados em três tipos: atratores, repulsores e neutros.

Definição 1.3.1 . Se x_0 é um ponto fixo para f , dizemos que x_0 é atrator se $|f'(x_0)| < 1$, x_0 é repulsor se $|f'(x_0)| > 1$ e x_0 é neutro se $|f'(x_0)| = 1$.

Exemplo 1.3.1 . Considere $f(x) = x^2$. Os dois pontos fixos são 0 e 1, onde 0 é atrator e 1 é repulsor.



Note que, numa vizinhança do ponto 1, todas as órbitas são repelidas e numa vizinhança do ponto 0, todas as órbitas são atraídas por este ponto. O mesmo não podemos concluir de um ponto fixo neutro, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.3.2 . Considere as funções $f(x) = x$; $g(x) = |x|$ e $h(x) = x - x^2$. Em todos os casos, o ponto 0 é um ponto fixo neutro, mas para qualquer vizinhança deste ponto, f deixa fixo todos os pontos, g deixa todas as órbitas periódicas e para h existem órbitas que são atraídas e outras que são repelidas pelo 0.

Essa situação motiva a seguinte definição:

Definição 1.3.2 . Se x_0 é um ponto fixo neutro para f , e se numa vizinhança de x_0 as órbitas são atraídas por x_0 , dizemos que este é um atrator fraco; caso contrário, se são todas repelidas por x_0 , dizemos que x_0 é um repulsor fraco.

Pontos fixos atratores e repulsores foram definidos usando fortemente o conceito de derivada, mas o que garante que o comportamento ilustrado no Exemplo 1.3.1 se verifica sempre? Para responder tal pergunta temos os seguintes resultados:

Teorema 1.3.1 (Teorema do Ponto Fixo Atrator). Se $f \in C^1$ e se x_0 um ponto fixo atrator de f , então existe um intervalo I contendo x_0 em seu interior satisfazendo a seguinte condição: se $x \in I$, então $f^n(x) \in I$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f^n(x) \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Como x_0 um ponto fixo atrator tem-se que $|f'(x_0)| < 1$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $|f'(x)| < \delta < 1$. Como $f \in C^1$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|f'(x)| < \delta; \quad \forall x \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$$

Sejam $I =]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$ e $p \in I$ um ponto qualquer. Vamos mostrar que $f^n(p) \in I$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f^n(p) \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, se $J_1 = [p; x_0]$ ou $[x_0; p]$ (se $p < x_0$ ou $p > x_0$ respectivamente), $J_1 \subset I$ e pelo Teorema do Valor Médio, existe $c_1 \in J_1$ tal que,

$$\frac{|f(p) - f(x_0)|}{|p - x_0|} = |f'(c_1)| < \delta < 1:$$

Como x_0 um ponto fixo de f ,

$$|f(p) - x_0| < \delta |p - x_0| < |p - x_0| < \epsilon:$$

Logo, $f(p) \in I$.

Aplicando o mesmo raciocínio para os pontos $f(x_0)$ e $f(p)$, temos que existe um subintervalo $J_2 \subset I$ e $c_2 \in J_2$ tal que

$$\frac{|f(f(p)) - f(f(x_0))|}{|f(p) - f(x_0)|} = |f'(c_2)| < \delta < 1:$$

Portanto,

$$|f^2(p) - x_0| < \delta |f(p) - x_0| < \delta^2 |p - x_0| < |p - x_0| < \epsilon:$$

Logo, $f^2(p) \notin I$.

Continuando esse processo, concluímos que

$$f^n(p) \notin I; \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$|f^n(p) - x_0| < \epsilon^n |p - x_0| \neq 0 \text{ quando } n \neq 1;$$

pois $\epsilon < 1$. Logo, $f^n(p) \notin x_0$, quando $n \neq 1$. □

Teorema 1.3.2 (Teorema do Ponto Fixo Repulsor). Se f é de classe C^1 e se x_0 é um ponto fixo repulsor de f , então existe um intervalo I contendo x_0 em seu interior satisfazendo a seguinte condição: se $x \in I$ e $x \neq x_0$, então existe um inteiro $n > 0$ tal que $f^n(x) \notin I$.

Demonstração. Como x_0 é um ponto fixo repulsor de f , então $|f'(x_0)| > 1$. Logo, existe $\epsilon > 1$ tal que $|f'(x_0)| > \epsilon > 1$. Como f' é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|f'(x)| > \epsilon$ para todo $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$:

Sejam $I =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ e $p \in I$ um ponto qualquer, $p \neq x_0$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c_1 \in I$ tal que

$$\frac{|f(p) - f(x_0)|}{|p - x_0|} = |f'(c_1)| > \epsilon:$$

Disso segue que,

$$|f(p) - x_0| > \epsilon |p - x_0|:$$

Se $\epsilon |p - x_0| \geq \delta$, tem-se que $f(p) \notin I$ e acabou a demonstração. Caso contrário, $f(p) \in I$ e aplicando novamente o Teorema do Valor Médio para os pontos $f(p)$ e $f(x_0)$ tem-se,

$$|f^2(p) - x_0| = |f^2(p) - f^2(x_0)| > \epsilon^2 |p - x_0|:$$

Repetindo esse processo teremos a seguinte relação:

$$|f^n(p) - x_0| > \lambda^n |p - x_0|$$

Como $\lambda > 1$, tem-se que a expressão $\lambda^n |p - x_0|$ tende a $+\infty$ quando n tende a $+\infty$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^{n_0} |p - x_0| > \epsilon$ e então $|f^{n_0}(p) - x_0| > \epsilon$. Daí concluímos que $f^{n_0}(p) \notin I$. \square

1.4 Pontos Periódicos

Do mesmo modo que os pontos fixos, os pontos periódicos são classificados como atratores, repulsores ou neutros.

Definição 1.4.1. Um ponto periódico de f de período n é atrator (repulsor) [neutro] se ele é um ponto fixo atrator (repulsor) [neutro] para f^n .

Por exemplo, a função $f(x) = x^2 - 1$ possui os pontos 0 e -1 como periódicos de período 2, e analisando $f^2(x) = x^4 - 2x^2$, vemos que estes pontos são pontos fixos atratores. Com isso, esse 2-ciclo é atrator.

Mediante essa definição, podemos formular a seguinte questão:

Se x_0 é um ponto n -periódico para f , é possível a órbita de x_0 conter alguns pontos fixos atratores e outros repulsores para f^n ?

Para responder essa pergunta, observe que se $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0, \dots)$ é a órbita de x_0 , então pela Regra da Cadeia temos,

$$(f^n)'(x_0) = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \cdots f'(x_1)f'(x_0)$$

e aplicando a Regra da Cadeia para $(f^n)'(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$ concluímos que $(f^n)'(x_0) = (f^n)'(x_1) = \cdots = (f^n)'(x_{n-1})$. Logo, se x_0 é um ponto n -periódico atra-

tor (resp. repulsor) para f , sua órbita é formada apenas por pontos fixos atratores (resp. repulsores) para f^n .

1.5 Bifurcações

Como o próprio nome já diz, bifurcação significa divisão, e o objetivo desta seção é compreender as mudanças que ocorrem nas vizinhanças dos pontos fixos de uma família de funções a um parâmetro, quando o parâmetro varia. Mais precisamente, estaremos considerando funções de duas variáveis da forma $H(x; \mu) = f_\mu(x)$ que para um μ fixo associa a função $f_\mu(x)$.

O estudo dessas bifurcações será feito na família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$. Primeiramente vamos estudar o comportamento dos pontos fixos. Para isso, temos que resolver a equação

$$x^2 + c = x$$

obtendo os pontos fixos

$$p_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

$$p_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Note que se $c > \frac{1}{4}$, então $1 - 4c < 0$ e $Q_c(x)$ não possui nenhum ponto fixo real; se $c = \frac{1}{4}$, então $1 - 4c = 0$ e $Q_c(x)$ possui um único ponto fixo, a saber, $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$; por fim, se $c < \frac{1}{4}$, então $1 - 4c > 0$ e $Q_c(x)$ possui dois pontos fixos distintos.

Feito isso, encontramos a nossa primeira bifurcação ocorrida nos pontos fixos para o valor do parâmetro $c = \frac{1}{4}$; esta bifurcação recebe o nome de sela-nó ou bifurcação tangente.

Vamos analisar agora a dinâmica dos pontos fixos, isto é, quando eles são atratores, repulsores ou neutros. Para isso, devemos estudar os valores de $|JQ_c^0(p_+)|$ e $|JQ_c^0(p_i)|$:

$$Q_c^0(p_+) = 1 + \frac{p_+}{1 - 4c};$$

$$Q_c^0(p_i) = 1 - \frac{p_i}{1 - 4c};$$

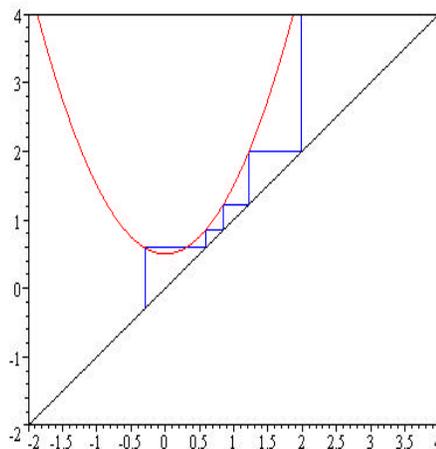
Note que $Q_c^0(p_+) = Q_c^0(p_i) = 1$ se $\frac{p_+}{1 - 4c} = 0$, ou seja, se $c = \frac{1}{4}$. Ainda $Q_c^0(p_+) > 1$ se $\frac{p_+}{1 - 4c} > 0$, ou seja, se $c < \frac{1}{4}$.

Portanto p_+ é ponto fixo neutro se $c = \frac{1}{4}$ e é repulsor se $c < \frac{1}{4}$.

Analisemos agora o ponto fixo p_i . É fácil verificarmos que $|JQ_c^0(p_i)| < 1$ se $\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$. Se $c = \frac{1}{4}$ ou $c = \frac{3}{4}$, então $|JQ_c^0(p_i)| = 1$ e por fim, se $c < \frac{3}{4}$, então $|JQ_c^0(p_i)| > 1$.

Portanto p_i é ponto fixo neutro se $c = \frac{1}{4}$ ou $c = \frac{3}{4}$, é atrator se $\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ e é repulsor se $c < \frac{3}{4}$.

Para finalizar, note que se $c > \frac{1}{4}$, então através de uma análise gráfica, concluímos que todas as órbitas tendem para o infinito.



Com isso, temos demonstrado a seguinte proposição:

Proposição 1.5.1 . Para a família $Q_c(x) = x^2 + c$ concluímos que:

- 1 - Todas as órbitas tendem para o infinito se $c > \frac{1}{4}$;
- 2 - Quando $c = \frac{1}{4}$, Q_c possui um único ponto fixo neutro $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$;
- 3 - Se $c < \frac{1}{4}$, Q_c possui dois pontos fixos p_+ e p_- , o ponto fixo p_+ é sempre repulsor e:

- a) se $\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, então p_- é atrator;
- b) se $c = \frac{3}{4}$, então p_- é neutro;
- c) se $c < \frac{3}{4}$, então p_- é repulsor.

Vamos mostrar agora um segundo tipo de bifurcação que aparece na família quadrática. Essa bifurcação surge nas órbitas, mais precisamente, vamos mostrar o aparecimento de órbitas periódicas para determinados valores do parâmetro.

Observe, através da análise gráfica, que a dinâmica interessante da família quadrática ocorre para valores de $c \in]\frac{3}{4}; \frac{1}{4}[$ e no intervalo $]p_-; p_+[$, pois para valores iniciais fora deste intervalo todas as órbitas tendem para o infinito.

O ponto p_+ é eventualmente fixo pois $Q_c(p_+) = p_+$. Agora, se $\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, então todas as órbitas no intervalo $]p_-; p_+[$ tendem para o ponto fixo atrator p_- . Veremos o que ocorre se $c < \frac{3}{4}$. Sabemos que, para tais valores, o ponto fixo p_- passa de atrator para repulsor e vamos mostrar o aparecimento de pontos de período 2. Para isso, temos que resolver a seguinte equação

$$Q_c^2(x) = x;$$

ou seja,

$$x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0; \quad (1.2)$$

Como os pontos p_+ e p_i são pontos fixos, eles satisfazem a equação (1.2). Logo, fazendo a divisão de (1.2) pela equação $(x - p_+)(x - p_i) = x^2 - x + c$, obtemos a equação

$$x^2 + x + c + 1 = 0 \quad (1.3)$$

Portanto, os pontos fixos de $Q_c^2(x)$ são os pontos p_+ , p_i e as raízes da equação (1.3), que são

$$q_+ = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4c - 3}}{2} \quad \text{e} \quad q_i = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4c - 3}}{2}.$$

Essas raízes são reais se $1 - 4c - 3 \geq 0$, ou seja, se $c \leq \frac{3}{4}$.

Verifiquemos, agora, para quais valores de c os pontos periódicos q_+ e q_i são atratores ou repulsores. Observemos que $Q_c(q_+) = q_i$. Assim, esses dois pontos formam um 2-ciclo. Basta então analisar a expressão $j(Q_c^2)^0(q_+)$.

$$(Q_c^2)^0(q_+) = Q_c^0(q_+)Q_c^0(q_i) = (-1 + \sqrt{1 - 4c - 3})(-1 - \sqrt{1 - 4c - 3}) = 4c + 4.$$

Logo $j(Q_c^2)^0(q_+) < 1$ se, e somente se, $4c + 4 < 1$, ou seja, $\frac{5}{4} < c < \frac{3}{4}$; $j(Q_c^2)^0(q_+) > 1$ se $c < \frac{5}{4}$; por fim, $j(Q_c^2)^0(q_+) = 1$ se $c = \frac{5}{4}$.

Portanto, temos demonstrado a seguinte proposição:

Proposição 1.5.2. Para a família $Q_c(x) = x^2 + c$, concluímos que:

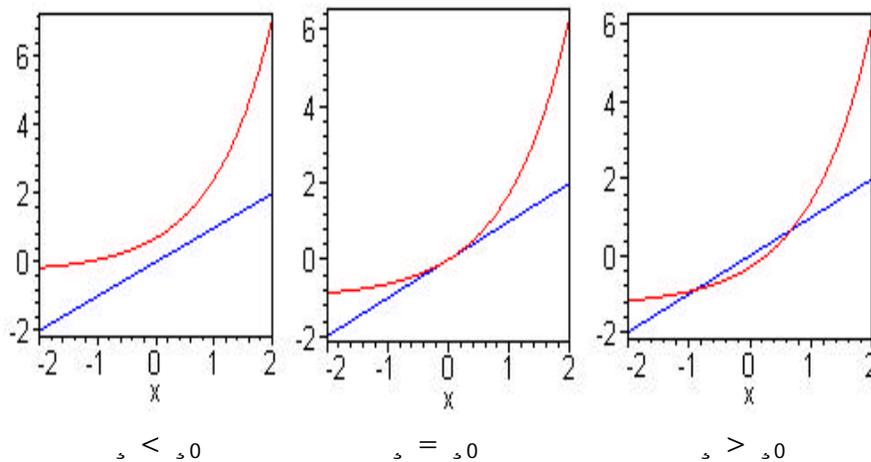
- 1 - Para $\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, Q_c tem um ponto fixo atrator e nenhum 2-ciclo;
- 2 - Para $c = \frac{3}{4}$, Q_c tem um ponto fixo neutro $p_i = q_+$ e nenhum 2-ciclo;
- 3 - Para $\frac{5}{4} < c < \frac{3}{4}$, Q_c tem dois pontos fixos repulsores p_+ e p_i e um 2-ciclo atrator;
- 4 - Para $c = \frac{5}{4}$, Q_c tem dois pontos fixos repulsores p_+ e p_i e um 2-ciclo neutro;
- 5 - Para $c < \frac{5}{4}$, Q_c tem dois pontos fixos repulsores p_+ e p_i e um 2-ciclo repulsor.

A bifurcação descrita acima recebe o nome de bifurcação de duplicação de período. Vamos a seguir dar a definição mais detalhada de como ocorre esses dois tipos de bifurcação. Para isso, vamos considerar uma família qualquer de funções (f_μ) , tal que $f_\mu(x)$ dependa continuamente de μ e x .

Definição 1.5.1 . Uma família de funções (f_μ) sofre uma bifurcação sela-nó (ou tangente) para um valor μ_0 , se existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, e $\epsilon > 0$ tal que:

- 1 - Para $\mu_0 - \epsilon < \mu < \mu_0$ (resp. $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \epsilon$), f_μ não tem ponto fixo no intervalo I ;
- 2 - Para $\mu = \mu_0$, f_μ tem um ponto fixo em I e este ponto fixo é neutro;
- 3 - Para $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \epsilon$ (resp. $\mu_0 - \epsilon < \mu < \mu_0$), f_μ tem dois pontos fixos em I , um atrator e outro repulsor.

Geometricamente,



Definição 1.5.2 . Uma família de funções (f_μ) sofre uma bifurcação de duplicação de período em um valor $\mu = \mu_0$, se existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, e $\epsilon > 0$ tal que:

1 - Para cada μ no intervalo $[\mu_0 - 2; \mu_0 + 2]$, existe um único ponto fixo p_μ para f_μ em I ;

2 - Para $\mu_0 - 2 < \mu < \mu_0$ ($\mu_0 < \mu < \mu_0 + 2$), f_μ não tem ciclos de período dois em I e p_μ é atrator [repulsor];

3 - Para $\mu_0 < \mu < \mu_0 + 2$ ($\mu_0 - 2 < \mu < \mu_0$) existe um único 2-ciclo q^1 e q^2 em I com $f_\mu(q^1) = q^2$. Este 2-ciclo é atrator [repulsor]; entretanto, o ponto fixo p_μ é repulsor [atrator];

4 - Quando $\mu = \mu_0$, temos $q^i = p_{\mu_0}$; $i = 1; 2$.

Exemplo 1.5.1 . Considere a família de funções $E_\mu(x) = e^x + \mu$.

Note que para que tenhamos a diagonal como tangente na família E_μ , é necessário que tomemos $\mu = \mu_0 = -1$, e isso ocorre somente se $x = 0$, pois $E_{-1}(0) = 0$ e $E_{-1}'(0) = 1$. Logo 0 é um ponto fixo neutro para E_{-1} . Para valores de $\mu > -1$, E_μ não possui ponto fixo; já para $\mu < -1$, E_μ possui dois pontos fixos, um atrator e outro repulsor.

Portanto temos uma bifurcação sela-nó em $\mu = -1$.

Exemplo 1.5.2 . Considere a família de funções $f_\mu(x) = \mu x - x^3$.

Os pontos fixos de f_μ são dados resolvendo a equação

$$\mu x - x^3 = x;$$

que nos dá $x = 0$ e $x = \pm \sqrt{\mu - 1}$. Logo, 0 é sempre um ponto fixo e para $\mu > 1$, existem dois outros pontos fixos distintos.

Achemos agora para qual valor de μ ocorre a bifurcação de duplicação de período. Para isso, devemos achar o valor de μ no qual f_μ passa a ter um 2-ciclo.

Note que f_λ é uma função ímpar e se x_0 é tal $f_\lambda(x_0) = -x_0$, então

$$f_\lambda^2(x_0) = f_\lambda(f_\lambda(x_0)) = f_\lambda(-x_0) = -f_\lambda(x_0) = x_0;$$

portanto um 2-ciclo é obtido resolvendo-se a equação $f_\lambda(x) = -x$, obtendo assim $x_1 = \sqrt[2]{\lambda + 1}$; $x_2 = -\sqrt[2]{\lambda + 1}$ para $\lambda > -1$.

Este 2-ciclo é repulsor pois

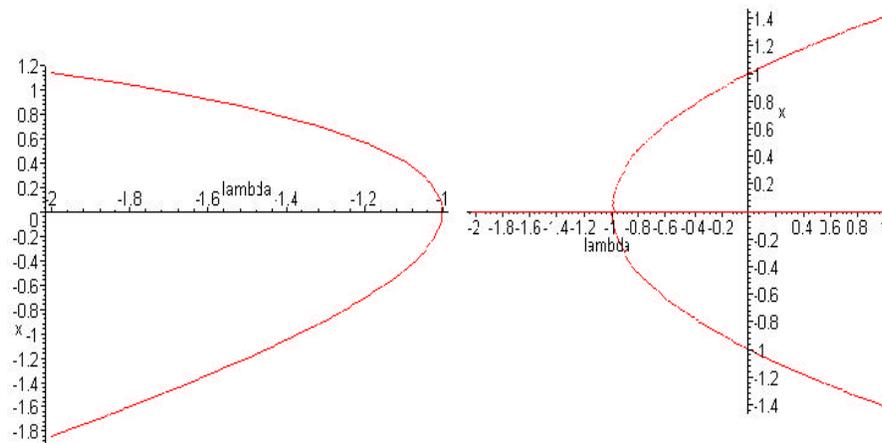
$$(f_\lambda^2)'(\sqrt[2]{\lambda + 1}) = f_\lambda'(\sqrt[2]{\lambda + 1})f_\lambda'(-\sqrt[2]{\lambda + 1}) = (\lambda - 2\sqrt[2]{\lambda + 1})^2 > 1;$$

Além disso, o ponto $x = 0$ é atrator para $-1 < \lambda < 1$ e repulsor para $\lambda < -1$.

Portanto, temos uma bifurcação de duplicação de período em $\lambda = -1$.

Para analisar, introduziremos o diagrama de bifurcação, que consiste em fazermos um gráfico dos valores dos pontos fixos (ou periódicos) em relação a λ .

Por exemplo:



$$E_\lambda(x) = e^x + \lambda$$

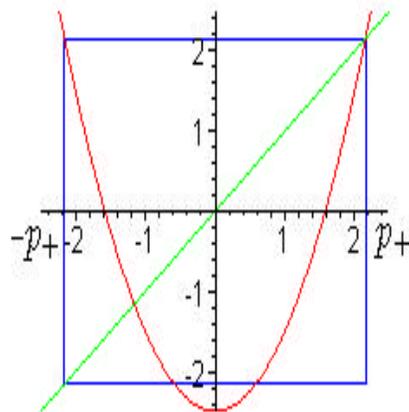
$$f_\lambda(x) = \lambda x - x^3; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

1.6 Dinâmica Simbólica

Dentro da teoria dos sistemas dinâmicos, o objetivo principal é compreender a dinâmica dos sistemas, mas em alguns casos, isto é extremamente difícil. Daí surge a ideia de relacionar dois ou mais sistemas de tal forma que, conhecendo a dinâmica de um deles, todos os demais apresentarão a mesma dinâmica. Ou seja, queremos obter, dentro de todos os sistemas dinâmicos possíveis, uma equivalência entre eles, e esta ideia de equivalência está intimamente relacionada com a ideia de homeomorfismo.

Construiremos a seguir um exemplo de um sistema dinâmico que irá ter a mesma dinâmica que a família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ para determinados valores de c .

Considere $c < \frac{1}{2}$ e o quadrado de vértices $(-p_+, -p_+)$, $(-p_+, p_+)$, (p_+, p_+) e $(p_+, -p_+)$. Observe que existe uma vizinhança A_1 da origem cuja imagem desses pontos pela Q_c deixa o intervalo $I = [-p_+, p_+]$, conforme figura abaixo.



$$p_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

Se x_0 é um valor inicial, com $|x_0| > p_+$ ou $x_0 \notin A_1$, então a sua órbita tende

para $+1$. Especificamente,

$$A_1 = \{x \in I : Q_c(x) \geq 1\}g;$$

O conjunto $I \setminus A_1$ consiste de dois subintervalos I_0 e I_1 fechados.

Se $A_2 = \{x \in I : Q_c(x) \geq 2\}g$; A_2 consiste de dois subintervalos abertos, um contido em I_0 e outro em I_1 e se $x \in A_2$, então a sua órbita tende para $+1$.

Analogamente, denotando por $A_n = \{x \in I : Q_c^{n-1}(x) \geq 1\}g$, se $x \in A_n$, então a sua órbita tende para $+1$.

Note que esse processo consiste em retirar de I os pontos cuja órbita tende para o infinito.

Considere o conjunto $\Sigma = I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Σ não é vazio pois $p_+ \in \Sigma$. (Mais do que isso, pode-se mostrar que Σ é um Conjunto de Cantor para $c < \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{5})$).

Definição 1.6.1. Se $x \in \Sigma$, o itinerário ou percurso de x é uma sequência infinita de 0's e 1's dada por $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, onde $s_i = 0$ se $Q_c^i(x) \in I_0$ ou $s_i = 1$ se $Q_c^i(x) \in I_1$.

Definição 1.6.2. O espaço das seqüências em dois símbolos é o conjunto

$$\mathcal{S} = \{ (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_i = 0 \text{ ou } s_i = 1; i = 0; 1; 2; \dots \}g;$$

Queremos que \mathcal{S} seja um espaço métrico, pois precisamos medir a distância entre duas seqüências. Logo introduzimos em \mathcal{S} a seguinte métrica:

Definição 1.6.3. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ e $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ dois pontos de \mathcal{S} . A distância entre s e t é dada por:

$$d(s; t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Tendo em mãos essa definição, podemos dizer o quanto duas seqüências estão próximas. Para isso, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.6.1 (Teorema da Proximidade). Se $s, t \in \mathbb{S}$ e se $s_i = t_i$ para $i = 0; 1; \dots; n$, então $d(s; t) = \frac{1}{2^n}$. Reciprocamente, se $d(s; t) < \frac{1}{2^n}$, então $s_i = t_i$ para $i = 0; \dots; n$.

Demonstração. Suponhamos que $s_i = t_i$, $i = 0; \dots; n$. Então $|s_i - t_i| = 0$, $i = 0; \dots; n$, daí

$$d(s; t) = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{0}{2^i} = 0 = \frac{1}{2^n}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $d(s; t) < \frac{1}{2^n}$ e que exista $j = 0; \dots; n$ tal que $s_j \neq t_j$. Logo, $|s_j - t_j| = 1$ e então

$$d(s; t) = \sum_{i=0}^j \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \frac{1}{2^j} + \sum_{i=j+1}^n \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{1}{2^j}.$$

Como $j = 0; \dots; n$, tem-se que $\frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$, e portanto $d(s; t) \geq \frac{1}{2^n}$, que é uma contradição. Logo $s_i = t_i$ para $i = 0; \dots; n$. □

1.7 Conjugação

Vamos definir agora em \mathbb{S} uma aplicação que servirá de modelo para a família quadrática.

Definição 1.7.1. A aplicação $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, dada por

$$\varphi(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$$

é chamada aplicação deslocamento.

Teorema 1.7.1 . A aplicação $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ é contínua.

Demonstração. Considere $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \mathbb{S}$ um ponto qualquer e $\epsilon > 0$ dado. Vamos mostrar que φ é contínua em s .

Com efeito, tome n suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ e considere $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Se $t \in \mathbb{S}$ e $d(t; s) < \delta$, então pelo Teorema da Proximidade, $t_i = s_i$, para $i \leq n+1$. Logo,

$$d(\varphi(s); \varphi(t)) = d((s_1 s_2 \dots s_{n+1} s_{n+2} \dots); (s_1 s_2 \dots s_{n+1} t_{n+2} \dots)) \cdot \frac{1}{2^n} < \epsilon. \quad \square$$

Já construímos um sistema modelo para a família quadrática, constituído pelo espaço das sequências em dois símbolos, \mathbb{S} , a função deslocamento φ e obtivemos além disso, uma relação entre \mathbb{S} e \mathbb{R} que é a função itinerário $S : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$. O nosso objetivo agora é mostrar que S é um homeomorfismo, ou seja, que os espaços \mathbb{R} e \mathbb{S} são topologicamente indistinguíveis. Antes de mostrarmos tal resultado temos a seguinte relação:

Proposição 1.7.1 . Se $x \in \mathbb{R}$, então $(S \pm Q_c)(x) = (\varphi \pm S)(x)$.

Demonstração. Se $x \in \mathbb{R}$ é um ponto qualquer com itinerário igual a $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots; s_n \dots)$, então

$$x \in I_{s_0};$$

$$Q_c(x) \in I_{s_1};$$

$$Q_c^2(x) \in I_{s_2};$$

⋮

$$Q_c^n(x) \in I_{s_n};$$

⋮

onde $I_{s_i} = I_0$ ou $I_{s_i} = I_1$, conforme $s_i = 0$ ou $s_i = 1$. Daí o itinerário de $Q_c(x)$ é dado por $S(Q_c(x)) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$. Logo $(S \pm Q_c)(x) = (\varphi \pm S)(x)$. □

A partir da proposição acima podemos obter a seguinte igualdade,

$$S \pm Q_c^n = \frac{3}{4}^n \pm S;$$

e ao mostrarmos que S é um homeomorfismo teremos a relação,

$$Q_c^n \pm S^{-1} = S^{-1} \pm \frac{3}{4}^n;$$

ou seja, S^{-1} transporta toda a dinâmica do sistema $\frac{3}{4}$ para a família quadrática. A aplicação que possui esta propriedade de transformar dois sistemas aparentemente diferentes, em sistemas dinamicamente equivalentes, recebe o nome de conjugação. A seguir, apresentaremos a definição formal de conjugação.

Definição 1.7.2 . Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ duas funções definidas em espaços métricos. Dizemos que f e g são conjugadas, se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \pm f = g \pm h$.

Mostraremos agora que a aplicação $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ é um homeomorfismo, e com isso, mostraremos que dinamicamente o sistema $\frac{3}{4}$ e a família quadrática são indistinguíveis.

Teorema 1.7.2 . Se $c < \frac{\sqrt{5} + 2^{\sqrt{5}}}{4}$ então a aplicação $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ é um homeomorfismo.

Ou, equivalentemente:

Teorema 1.7.3 (Teorema da Conjugação). A aplicação deslocamento $\frac{3}{4} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é conjugada a $Q_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando $c < \frac{\sqrt{5} + 2^{\sqrt{5}}}{4}$.

Demonstração. Vamos mostrar que S é um homeomorfismo.

Injetividade: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$. Suponha que $S(x) = S(y)$, ou seja, $Q_c^n(x)$ e $Q_c^n(y)$ estão no mesmo subintervalo I_0 ou I_1 .

Para chegarmos a uma contradição, precisamos usar o fato de $|jQ_c^0(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$. Mas $Q_c^0(x) = 2x$, daí $|jQ_c^0(x)| = 2$ se, e somente se $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Portanto, para que tenhamos $|jQ_c^0(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$, é necessário que o gráfico de Q_c restrito ao intervalo $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ esteja totalmente fora do quadrado de vértices $(p_+; p_+)$, $(p_+; i p_+)$, $(i p_+; i p_+)$ e $(i p_+; p_+)$.

Para isso, temos que resolver a equação $Q_c(\frac{1}{2}) = i p_+$, obtendo como solução os valores $c_1 = \frac{i-5+2\sqrt{5}}{4}$ e $c_2 = \frac{i-5+2\sqrt{5}}{4}$. Como estamos considerando $c < i/2$, a solução desejada é $c = \frac{i-5+2\sqrt{5}}{4}$. Mas, por hipótese $c < \frac{i-5+2\sqrt{5}}{4}$, portanto $|jQ_c^0(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$. Logo existe $\lambda > 1$ tal que $|jQ_c^0(x)| > \lambda > 1$.

Considere agora o intervalo $[x; y]$. Como Q_c é injetiva em I_0 e I_1 , então, para cada $n \in \mathbb{N}$, Q_c^n aplica esse intervalo injetivamente sobre o intervalo de extremos $Q_c^n(x)$ e $Q_c^n(y)$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x; y]$ temos que,

$$|jQ_c(x) - Q_c(y)| > \lambda |x - y|$$

isto é, o comprimento do intervalo de extremos $Q_c(x)$ e $Q_c(y)$ é maior que o comprimento do intervalo $[x; y]$ multiplicado pela constante λ .

Repetindo esse processo para os intervalos de extremos $Q_c^n(x)$ e $Q_c^n(y)$ concluímos que,

$$|jQ_c^n(x) - Q_c^n(y)| > \lambda^n |x - y|$$

Mas λ^n tende ao infinito, pois $\lambda > 1$, e o intervalo de extremos $Q_c^n(x)$ e $Q_c^n(y)$ está contido em I para todo n . Temos portanto uma contradição, que surgiu de termos suposto que $S(x) = S(y)$. Portanto $S(x) \neq S(y)$ e S é injetiva.

Sobrejetividade: Sejam $J \subset I$ um intervalo fechado e $Q_c^{i,n}(J) = \{x \in I : Q_c^n(x) \in J\}$. Observe que $Q_c^{i,1}(J)$ consiste de dois subintervalos fechados.

Seja $s \in S$ um ponto qualquer, $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$.

Defina $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = \{x \in I : x \in I_{s_0}, Q_c(x) \in I_{s_1}, \dots, Q_c^n(x) \in I_{s_n}\}$. Note que, $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = I_{s_0} \setminus Q_c^{-1}(I_{s_1}) \setminus Q_c^{-2}(I_{s_2}) \setminus \dots \setminus Q_c^{-n}(I_{s_n})$. Daí,

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} &= I_{s_0} \setminus Q_c^{-1}(I_{s_1}) \setminus Q_c^{-1}(Q_c^{-1}(I_{s_2})) \setminus \dots \setminus Q_c^{-1}(Q_c^{-(n-1)}(I_{s_n})) = \\ &= I_{s_0} \setminus Q_c^{-1}(I_{s_1}) \setminus Q_c^{-1}(I_{s_2}) \setminus \dots \setminus Q_c^{-(n-1)}(I_{s_n}) = I_{s_0} \setminus Q_c^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n}); \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que os conjuntos $I_{s_0 s_1 \dots s_i}$ são intervalos fechados para $i = 0, 1, \dots, n$ e encaixados, isto é, $I_{s_0 s_1 \dots s_i} \supset I_{s_0 s_1 \dots s_{i-1}}$ para $i = 1, \dots, n$.

Vamos provisoriamente denotar por $I_{(n)}$, o conjunto I indexado por n 0's ou 1's. Temos que $I_{(1)}$ é um intervalo fechado pois $I_{(1)} = I_0$ ou I_1 . Suponha $I_{(k)}$ um intervalo fechado. Então,

$$I_{(k+1)} = I_{(1)} \setminus Q_c^{-1}(I_{(k)});$$

Como $I_{(k)}$ é um intervalo fechado, $Q_c^{-1}(I_{(k)})$ é constituído de dois intervalos fechados, um em I_0 e outro em I_1 . Então, $I_{(k+1)}$ é um intervalo fechado.

Eles são encaixados pois,

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1} &= I_{s_0} \setminus Q_c^{-1}(I_{s_1}) \supset I_{s_0}; \\ I_{s_0 s_1 s_2} &= I_{s_0} \setminus Q_c^{-1}(I_{s_1}) \setminus Q_c^{-2}(I_{s_2}) = I_{s_0 s_1} \setminus Q_c^{-1}(I_{s_2}) \supset I_{s_0 s_1}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \setminus Q_c^{-1}(I_{s_n}) \supset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}.$$

Portanto $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ não é vazia. Se $x \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, então pela definição $x \in I_{s_0}, Q_c(x) \in I_{s_1}, \dots, Q_c^n(x) \in I_{s_n}$, ou seja, $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots) = s$. Isto prova a

sobrejetividade.

Continuidade de S : Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto qualquer tal que $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ e $\epsilon > 0$ dado. Tome n suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ e considere todos os intervalos fechados $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$, definidos anteriormente, para todas as combinações possíveis de t_0, t_1, \dots, t_n .

Esses intervalos são dois a dois disjuntos. Com efeito, considere $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$ e $I_{k_0 k_1 \dots k_n}$ dois intervalos quaisquer. Se supormos que esses dois intervalos não são disjuntos, porque existe $x \in I_{t_0 t_1 \dots t_n} \cap I_{k_0 k_1 \dots k_n}$. Logo $x \in I_{t_0}$ e $x \in I_{k_0}$, $Q_c(x) \in I_{t_1}$ e $Q_c(x) \in I_{k_1}$, ..., $Q_c^n(x) \in I_{t_n}$ e $Q_c^n(x) \in I_{k_n}$ e então $t_j = k_j$, $j = 0, \dots, n$, e assim $I_{t_0 t_1 \dots t_n} = I_{k_0 k_1 \dots k_n}$.

Como $S(x) = (s_0 s_1 \dots s_n \dots)$, então $x \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$. Logo é possível escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $y \in \mathbb{R}^n$, $|y_j - x_j| < \delta$, e $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$. Então, $d(S(x); S(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Continuidade de S^{-1} : Vamos supor que exista $t \in \mathbb{S}$ no qual S^{-1} não é contínua em t , ou seja, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $t_n \in \mathbb{S}$, onde $d(t_n; t) < \delta$ e $d(S^{-1}(t_n); S^{-1}(t)) \geq \epsilon$.

Daí para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $\delta = \frac{1}{2^n}$. Com isso, teremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in \mathbb{S}$ onde $d(t_n; t) < \frac{1}{2^n}$ e $d(S^{-1}(t_n); S^{-1}(t)) \geq \epsilon$.

Mas $d(t_n; t) < \frac{1}{2^n}$ nos dá que $t_{n_i} = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Logo $Q_c^k(S^{-1}(t))$ e $Q_c^k(S^{-1}(t_n))$ estão no mesmo intervalo I_0 ou I_1 para $k = 0, 1, \dots, n$.

Agora, de modo análogo à demonstração da injetividade, e usando que $|Q_c^k(x)| > \epsilon > 1$, e o Teorema do Valor Médio, concluímos que

$$|Q_c^n(S^{i-1}(t)) - Q_c^n(S^{i-1}(1_n))| > \epsilon^n |S^{i-1}(t) - S^{i-1}(1_n)| > \epsilon^{n^2}.$$

Como ϵ^n tende a infinito e o intervalo de extremos $Q_c^n(S^{i-1}(t))$ e $Q_c^n(S^{i-1}(1_n))$ está contido em I , temos um absurdo, que surgiu da hipótese de existência de um ponto t no qual S^{i-1} não é contínua.

Portanto S^{i-1} é contínua e, com isso, S é um homeomorfismo. \square

1.8 Caos

Muitos sistemas dinâmicos apresentam um comportamento caótico das órbitas, mas que podem ser totalmente compreendidos. A família quadrática, como veremos, é um exemplo desse tipo de sistema. Para que um sistema seja considerado caótico, segundo Devaney [3], é necessário que ele apresente três propriedades. Apresentaremos essas propriedades para a função deslocamento ϕ , e em seguida daremos a definição formal de um sistema caótico.

Considere em S o conjunto formado pelos pontos periódicos de ϕ . Afirmamos que tal conjunto é denso em S .

Com efeito, considere $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in S$ um ponto qualquer e $\epsilon > 0$ dado. Tome $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ e considere o ponto n -periódico para ϕ , $t_n = (s_0 s_1 s_2 \dots s_n s_0 s_1 s_2 \dots s_n s_0 \dots)$. Pelo Teorema da Proximidade, temos que

$$d(s; t_n) < \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Portanto dado um ponto arbitrário s de S , é possível achar um ponto periódico de ϕ , suficientemente próximo de s . Ou seja, o subconjunto de S formado pelos pontos periódicos de ϕ é denso em S .

Uma segunda propriedade que podemos observar em S , é que existe um ponto cuja órbita é densa.

Para ver isso, considere s um ponto formado por n -blocos, $n = 1; 2; \dots$, e em cada bloco colocamos todas as possíveis combinações de 0 's e 1 's, ou seja,

$$s = (01 \ 001 \ 1011 \ 000 \ 001 \ 010 \ 100 \ 011 \dots):$$

Mostremos que a órbita de s é densa em S .

Com efeito, seja $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ um ponto qualquer de S e $\epsilon > 0$ dado. Tome $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ e considere o bloco das $n+1$ primeiras entradas de t , isto é, $t_0 t_1 \dots t_n$. Em algum lugar de s este $(n+1)$ -bloco aparece. Vamos supor que isso ocorra na $(k+1)$ -ésima entrada de s , ou seja, t_0 é o $(k+1)$ -ésimo elemento de s .

Agora aplique k vezes a aplicação deslocamento em s , e então,

$$\sigma^k(s) = (t_0 t_1 \dots t_n s_{n+1} \dots):$$

Pelo Teorema da Proximidade, temos

$$d(\sigma^k(s); t) = d((t_0 t_1 \dots t_n s_{n+1} \dots); (t_0 t_1 \dots t_n t_{n+1} \dots)) \cdot \frac{1}{2^n} < \epsilon:$$

Portanto a órbita de s é densa em S .

O conceito de órbita densa está intimamente relacionado com o conceito de transitividade, que definiremos a seguir.

Definição 1.8.1. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função contínua, onde X é um espaço métrico. Dizemos que f é transitiva, se para quaisquer pares de subconjuntos abertos não vazios U e V de X , existe um inteiro $k \geq 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Observe que se um sistema dinâmico é transitivo, então não é possível decomporlo em dois outros sistemas sem que haja uma interação entre eles. Note também que se um sistema dinâmico possui uma órbita densa, então ele é transitivo. A recíproca dessa afirmação é também verdadeira, mas para ver isso é necessário alguns conceitos de Análise que no momento não estão em nosso contexto.

A última propriedade que ressaltaremos da aplicação deslocamento é a seguinte.

Definição 1.8.2. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função contínua, onde X é um espaço métrico. Dizemos que f depende sensitivamente das condições iniciais, se existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $x \in X$ e V uma vizinhança qualquer de x , existem $y \in V$ e um inteiro $k \geq 0$ tal que $d(f^k(x); f^k(y)) > \epsilon$.

A propriedade acima é uma das mais importantes dentro de um sistema dinâmico caótico, pois ela nos diz que perturbações iniciais bem pequenas, podem futuramente ocasionar erros muito grandes. Isto é extremamente indesejável se tivermos realizando algum tipo de experimento, pois o resultado final pode ser algo que não se aproxime em nada da solução exata.

Tal propriedade foi inicialmente descoberta por Lorenz em 1955 quando realizava experimentos na previsão do tempo. Por ironia, ela que é extremamente fácil de se compreender, é vista dentro dos sistemas dinâmicos como uma propriedade desnecessária, conforme veremos no Capítulo 2.

Exemplo 1.8.1. Considere a família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ para $c < \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{5})$. Este sistema possui a dependência sensitiva das condições iniciais.

Com efeito, tome ϵ menor que o diâmetro de A_1 , onde A_1 é o intervalo entre I_0 e I_1 . Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, e tome $y \in \mathbb{R}$, $y \in x$ tal que $|x - y| < \delta$. Como $x \in y$, então $S(x) \in S(y)$, e com isso, alguma entrada de $S(x)$ é diferente de $S(y)$.

Vamos supor que isso ocorra na n -ésima entrada, isto é, $Q_c^n(x) \in I_0$ e $Q_c^n(y) \in I_1$, ou vice-versa. Logo,

$$|Q_c^n(x) - Q_c^n(y)| > \epsilon.$$

Exemplo 1.8.2 . Considere a função deslocamento \mathcal{H} .

Para mostrar que \mathcal{H} depende sensitivamente das condições iniciais, considere $s \in \mathbb{S}$, $s = (s_0 s_1 \dots)$ um ponto qualquer e $\epsilon > 0$ dado. Tome $0 < \delta < 1$ e n suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} < \delta$ e seja $t \in \mathbb{S}$, $t = (t_0 t_1 \dots)$ com $d(t; s) < \frac{1}{2^n}$ e $t \notin s$. Pelo Teorema da Proximidade, $t_i = s_i$ para $i < n$.

Como $t \notin s$, então existe $k > n$ tal que $t_k \neq s_k$. Logo $\mathcal{H}^k(s)$ e $\mathcal{H}^k(t)$ possuem a primeira entrada distinta, com isso

$$d(\mathcal{H}^k(s); \mathcal{H}^k(t)) = |s_k - t_k| = 1 > \delta.$$

Daremos a seguir a definição de quando um sistema dinâmico é caótico, segundo Devaney [3].

Definição 1.8.3 . Seja $f : X \rightarrow X$ uma função contínua, onde X é um espaço métrico. Dizemos que f é caótica em X se :

- 1 - O conjunto formado pelos pontos periódicos de f é denso em X ;
- 2 - f é transitiva;
- 3 - f depende sensitivamente das condições iniciais.

Tendo em mãos essa definição, e pelo que já fizemos nesta seção, temos demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 1.8.1 . A aplicação deslocamento $\mathcal{H} : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ é um sistema dinâmico caótico.

Mostramos anteriormente que a aplicação $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ é um homeomorfismo para determinados valores de c . Logo, como se esperava, temos um resultado análogo ao teorema acima para a família Q_c .

Lema 1.8.1 . Suponha que $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e sobrejetora, X e Y são espaços métricos e que $D \subset X$ é um subconjunto denso em X . Então $f(D)$ é denso em Y .

Demonstração. Sejam $y \in Y$ um ponto qualquer e $\epsilon > 0$ dado. Queremos encontrar um ponto $z \in f(D)$ tal que $d(y; z) < \epsilon$.

Como f é sobrejetora, considere $x_0 \in X$ a pré-imagem de y em X , isto é, $f(x_0) = y$. Agora f é contínua, logo existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $d(x; x_0) < \delta$, então $d(f(x); f(x_0)) < \epsilon$.

Para esse $\delta > 0$, como D é denso em X , existe $x \in D$ tal que $d(x; x_0) < \delta$. Assim, $f(x) \in f(D)$ e $d(f(x); f(x_0)) < \epsilon$.

Portanto, encontramos $z = f(x) \in f(D)$ a uma distância de $y = f(x_0)$ menor que ϵ . Como y foi tomado arbitrariamente, concluímos a demonstração. \square

Teorema 1.8.2 . Se $c < \frac{(5 + 2\sqrt{5})^2}{4}$, então a função quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ é caótica em \mathbb{R} .

Demonstração. Como já vimos, Q_c depende sensitivamente das condições iniciais. Resta-nos mostrar então a transitividade e a densidade dos pontos periódicos.

Sejam D o conjunto dos pontos periódicos de Q_c e M o conjunto dos pontos periódicos de \mathcal{M} . Sabemos que M é denso em \mathbb{S} . Pelo Lema 1.8.1 tem-se que $S^{-1}(M)$ é denso em \mathbb{R} . Mas S^{-1} leva os pontos periódicos de \mathcal{M} nos pontos periódicos de Q_c , ou seja, $S^{-1}(M) = D$ e então D é denso em \mathbb{R} .

Mostremos agora que Q_c é transitiva. Para isso, vamos mostrar que Q_c possui uma órbita densa em \mathbb{R} .

Com efeito, seja s a órbita densa em \mathbb{S} e $A = \{f^i(s); i = 0; 1; 2; \dots; g\}$. O conjunto A é denso em \mathbb{S} . Logo $S^{i-1}(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ denso em \mathbb{R} . Mas, $S^{i-1}(A)$ é exatamente a órbita do ponto $S^{i-1}(s)$.

Portanto Q_c possui uma órbita densa. \square

Daremos agora outro exemplo de sistema dinâmico caótico.

Considere $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $W(x) = 2|x| - 2$. É possível notar uma semelhança de W com $Q_{1/2}(x) = x^2 - 2$. Ambas possuem dois pontos fixos repulsores, e se $|x| > 2$, então a órbita de x tende a $+\infty$ em ambos os sistemas. Veremos adiante que W é caótica, e através de uma semi-conjugação concluiremos que $Q_{1/2}$ é também caótica.

Investigando o gráfico de $W^n(x)$, podemos observar que ele é formado por 2^n pedaços lineares, cada pedaço com inclinação $\pm 2^n$ e definida num intervalo I de comprimento $\frac{1}{2^{n-1}}$ tal que $W^n(I) = [-2; 2]$.

A partir disso, podemos concluir que W é caótica em $[-2; 2]$.

Com efeito, seja $J \subset [-2; 2]$ um subintervalo qualquer. Pela observação acima, existe $n > 1$ e um subintervalo de J de comprimento $\frac{1}{2^{n-1}}$ no qual W^n aplica este subintervalo sobre $[-2; 2]$. Logo W^n possui um ponto fixo em J , ou seja, W possui um ponto de período n em J . Isso mostra que o conjunto dos pontos periódicos de W é denso em $[-2; 2]$.

Considere agora dois abertos U e O não vazios de $[-2; 2]$. É possível encontrar $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $W^n(U) = [-2; 2]$, ou seja, $W^n(U) \cap O \neq \emptyset$; e então W é transitiva.

Por fim, tome $0 < \epsilon < 2$, $x \in [-2; 2]$ e V uma vizinhança qualquer de x . Existe

$n \geq N$ tal que $W^n(V) = [1/2; 2]$. Logo existe $y \in V$ tal que $|W^n(x) - W^n(y)| > \epsilon$, implicando que W depende sensitivamente das condições iniciais. Portanto W é caótica em $[1/2; 2]$.

Considere agora a função $C(x) = 2 \cos(\frac{1}{2}x)$. Esta função aplica o intervalo $[1/2; 2]$ em si mesmo. Portanto, tomando a imagem pela C dos pontos x e $W(x)$ teremos:

$$C(W(x)) = 2 \cos(\frac{1}{2}W(x)) = 2 \cos(\frac{1}{2}x) = 2 \cos(\frac{1}{2}x) = 2 \cos^2(\frac{1}{4}x) = 4 \cos^2(\frac{1}{4}x) - 2 = 2 \cos^2(\frac{1}{4}x) - 2$$

Logo, temos o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{W} & 2|x| - 2 \\ \downarrow C & & \downarrow C \\ 2 \cos(\frac{1}{2}x) & \xrightarrow{f} & 2 \cos(\frac{1}{2}(2|x| - 2)) \end{array}$$

Observe que a função f que completa o diagrama comutativo é justamente a função quadrática $Q_{1/2}(x) = x^2 - 2$, e então temos $C \circ W = Q_{1/2} \circ C$.

Contudo a função C não é um homeomorfismo. Portanto não podemos dizer que ela é uma conjugação entre W e $Q_{1/2}$, mas o diagrama comutativo acima mostra que ela leva órbitas de W em órbitas de $Q_{1/2}$. Logo C leva ciclos de W em ciclos de $Q_{1/2}$, não necessariamente preservando o período dos ciclos. Contudo como C é contínua e sobrejetora, o Lema 1.8.1 garante que o conjunto dos pontos periódicos de $Q_{1/2}$ é denso no intervalo $[1/2; 2]$.

Concluindo, como para qualquer subintervalo J de $[1/2; 2]$ arbitrariamente pequeno, podemos tomar n de tal forma que $W^n(J) = [1/2; 2]$, o mesmo é verdade para a função $Q_{1/2}$. Isso prova a dependência sensitiva e a transitividade de $Q_{1/2}$.

Portanto $Q_{i,2}$ é contínua no intervalo $[i-2; 2]$.

Uma função que não é um homeomorfismo, mas se comporta de forma análoga a função C acima é chamada de semi-conjugação.

Apresentaremos a seguir a definição de quando que uma função é chamada de semi-conjugação.

Definição 1.8.4 . Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ contínuas onde X e Y são espaços métricos. A aplicação $h : X \rightarrow Y$ é chamada uma semi-conjugação, se h é contínua, sobrejetora, existe n tal que cada ponto de Y é imagem de no máximo n pontos de X e satisfaz $h \circ f = g \circ h$.

Capítulo 2

Sobre a Definição de Caos

Os sistemas dinâmicos caóticos têm sido intensamente estudados, e não existe dentro da matemática uma definição única para esses sistemas.

A definição apresentada no capítulo anterior se deve a Devaney [3], e atualmente é a mais popular e usada. Para recordar, um sistema definido por uma função contínua $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico, é dito caótico em X , se ele satisfaz três propriedades:

- 1 - A função f é transitiva;
- 2 - O conjunto dos pontos periódicos de f é denso no espaço X ;
- 3 - A função f possui a dependência sensível das condições iniciais.

Veremos neste capítulo equivalências possíveis da definição acima. Em seguida, veremos que se restringirmos a função f a intervalos da reta, então basta que ela seja transitiva para termos a sua caoticidade. Terminamos este capítulo dando uma nova definição de sistema dinâmico caótico, e provando a sua equivalência com a definição apresentada por Devaney.

2.1 A Definição de Devaney Para Caos

Conforme falamos anteriormente, não existe uma definição única para sistemas dinâmicos caóticos. Portanto, se considerarmos uma definição qualquer para tais sistemas, podemos formular a seguinte questão.

Sejam X e Y espaços métricos quaisquer e $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $h : X \rightarrow Y$ funções contínuas tais que, f é caótica em X e h é um homeomorfismo. Sob tais condições, podemos afirmar que a função g é caótica em Y ? Ou seja, caoticidade é preservada por conjugação topológica?

Observe que se a sua definição de sistema caótico for formada por propriedades topológicas, então a resposta para essa pergunta é certamente sim. Contudo, se sua definição possui uma propriedade métrica, que nem sempre é preservada por homeomorfismo, então a resposta para sua pergunta pode ser não, conforme veremos.

Considere a definição para sistemas caóticos dada por Devaney. Mostraremos que a transitividade e a densidade dos pontos periódicos são propriedades topológicas, mas a dependência sensitiva nem sempre.

Para isso, considere $f : X \rightarrow X$ um sistema caótico, $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo e $g : Y \rightarrow Y$ uma função contínua.

Note que a seguinte igualdade é verdadeira

$$h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1};$$

ou seja,

$$h^{-1} \circ g^k = f^k \circ h^{-1}; \quad \forall k \geq 0; \quad (2.1)$$

Se D é o conjunto dos pontos periódicos de f , D é denso em X . Como h é contínua e sobrejetora, $h(D)$ é denso em Y , e $h(D)$ é o conjunto dos pontos periódicos de g .

Considere agora U e V dois abertos quaisquer não vazios de Y . Como h é contínua, $h^{-1}(U)$ e $h^{-1}(V)$ são dois abertos não vazios de X . Pela transitividade de f , existe $k \geq 0$ tal que

$$f^k(h^{-1}(U)) \setminus h^{-1}(V) \neq \emptyset ; ;$$

Logo, por (2.1),

$$h^{-1}(g^k(U)) \setminus h^{-1}(V) = h^{-1}(g^k(U) \setminus V) \neq \emptyset ; ;$$

Daí $g^k(U) \setminus V \neq \emptyset ; ;$, ou seja, g é transitiva.

Portanto a densidade dos pontos periódicos e a transitividade são propriedades topológicas. Veremos que a dependência sensível não é.

Para isso, defina $X = (1; 1)$ e $f : X \rightarrow X$ por $f(x) = 2x$. Temos que f depende sensitivamente das condições iniciais, pois

$$|f^n(x) - f^n(y)| = 2^n|x - y|; \quad \forall x, y \in X \quad \text{e} \quad n \geq 0;$$

Considere $Y = \mathbb{R}_+^*$ e $h : X \rightarrow Y$ dada por $h(x) = \log(x)$, com base maior que 1. Note que h é um homeomorfismo, e considere o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & 2x \\ h \circ & & \circ h \\ \log(x) & \xrightarrow{g} & \log(2x) \end{array}$$

A função g que completa o diagrama é a função $g(x) = x + c$, onde $c = \log(2)$. Tal função é contínua e não depende sensitivamente das condições iniciais, pois

$$|g^k(x) - g^k(y)| = |x - y|; \quad \forall x, y \in Y \quad \text{e} \quad k \geq 0;$$

Portanto mostramos que a dependência sensitiva não é uma propriedade topológica.

Observe que o conjunto X que consideramos não é compacto, diferente do conjunto \mathbb{R} considerado no Capítulo 1, no qual a dependência sensitiva era preservada por conjugação topológica.

Veremos a seguir que a dependência sensitiva pode ser considerada uma propriedade topológica se restringirmos a nossa análise a subespaços compactos.

Com efeito, suponha que X é compacto e que f é conjugada a g conforme o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \# & & \# h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Suponha também que f dependa sensitivamente das condições iniciais, com constante de sensitividade igual a \pm .

Seja $D_{\pm} = \{(x_1; x_2) \in X \times X : d(x_1; x_2) \leq \pm g\}$. Como X é compacto, tem-se que $X \times X$ é compacto. Agora D_{\pm} é fechado pois se $(x; y) \in \overline{D_{\pm}}$, então existe uma sequência $((x_n; y_n))$ de elementos de D_{\pm} tal que

$$(x_n; y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x; y) \quad d(x_n; y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(x; y);$$

Como $(x_n; y_n) \in D_{\pm}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $d(x_n; y_n) \leq \pm$ para todo $n \in \mathbb{N}$, daí $d(x; y) \leq \pm$.

Portanto concluímos que $(x; y) \in D_{\pm}$ e que $D_{\pm} \cap (X \times X)$ é fechado. Agora $X \times X$ é compacto, logo D_{\pm} é compacto.

Seja E_{\pm} a imagem de D_{\pm} em $Y \in Y$, dada pela aplicação $\tilde{A} : X \in X \rightarrow Y \in Y$, definida por $\tilde{A}(x; y) = (h(x); h(y))$, onde h é a conjugação topológica do diagrama anterior.

A aplicação \tilde{A} é um homeomorfismo, pois suas funções coordenadas o são. Logo E_{\pm} é compacto em $Y \in Y$.

Considere $4_Y = f(y; y) \in Y \in Y$, isto é, a diagonal em $Y \in Y$, e mostremos que $4_Y \setminus E_{\pm} = \emptyset$.

De fato, suponha que exista um ponto $(x; y) \in 4_Y \setminus E_{\pm}$. Então

$$x = y \quad \text{e} \quad (x; y) = (h(a); h(b)); \quad (a; b) \in D_{\pm}$$

Logo $h(a) = h(b)$ e com isso, $a = b$. Daí $d(a; b) = 0 < \pm$ que é um absurdo, pois $(a; b) \in D_{\pm}$. Portanto $4_Y \setminus E_{\pm} = \emptyset$.

Como E_{\pm} é compacto, existe uma distância mínima positiva entre estes dois conjuntos. Chamaremos essa distância de $\pm_Y > 0$ e mostraremos que g depende sensitivamente das condições iniciais com constante de sensitividade igual a \pm_Y .

Antes disso, considere as seguintes notações:

d a métrica em X ;

\bar{d} a métrica em Y ;

\bar{d} a métrica em $Y \in Y$ dada por $\bar{d}((x; y); (a; b)) = \bar{d}(x; a) + \bar{d}(y; b)$.

Temos também a seguinte relação: $g^k \pm h = h \pm f^k$, ou seja, $g^k = h \pm f^k \pm h^{-1}$.

Tome $y \in Y$ um ponto qualquer, e U uma vizinhança aberta de y . Como h é um homeomorfismo, temos que $y = h(x_0)$, $x_0 \in X$ e $h^{-1}(U)$ é uma vizinhança aberta de x_0 . Agora, f possui a dependência sensitiva com constante igual a \pm . Logo existe $y_0 \in h^{-1}(U)$, $y_0 = h^{-1}(y_1)$ com $y_1 \in U$ e existe um inteiro $k \geq 0$ tal que

$$d(f^k(x_0); f^k(y_0)) > \pm$$

Pela desigualdade acima, concluímos que o ponto $(f^k(x_0); f^k(y_0)) \in D_\pm$. Portanto

$$\begin{aligned} \bar{d}(f^k(x_0); f^k(y_0)) &= d(h(f^k(x_0)); h(f^k(y_0))) = \\ &= d(h \circ f^k \circ h^{-1}(y); h \circ f^k \circ h^{-1}(y_1)) = d(g^k(y); g^k(y_1)) \in E_\pm: \end{aligned}$$

Dado $d(g^k(y); g^k(y_1)) \in \pm_Y$, para qualquer $x \in Y$. Tome $x = g^k(y_1)$, e então teremos

$$\begin{aligned} d(g^k(y); g^k(y_1)); d(g^k(y_1); g^k(y_1)) &= \bar{d}(g^k(y); g^k(y_1)) + \\ &+ \bar{d}(g^k(y_1); g^k(y_1)) = \bar{d}(g^k(y); g^k(y_1)) \in \pm_Y: \end{aligned}$$

Portanto, dado $y \in Y$ e U vizinhança de y , conseguimos $y_1 \in U$ e $k \geq 0$ tal que $\bar{d}(g^k(y); g^k(y_1)) \in \pm_Y$, ou seja, g depende sensitivamente das condições iniciais, conforme queríamos demonstrar.

Isso tudo motiva a apresentar o seguinte teorema envolvendo as condições de caoticidade de um sistema, apresentado em [2].

Teorema 2.1.1 . Se $f : X \rightarrow X$ é uma função contínua num espaço métrico X , tal que f é transitiva e possui o conjunto dos pontos periódicos denso em X , então f depende sensitivamente das condições iniciais.

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$, existe um ponto periódico $q \in X$ cuja órbita está a uma distância maior ou igual a $\frac{\epsilon_0}{2}$ de x .

Com efeito, considere dois pontos periódicos quaisquer q_1 e q_2 com órbitas disjuntas. Denote por ϵ_0 a distância entre estas duas órbitas, isto é, $\epsilon_0 = \min\{d(f^i(q_1); f^j(q_2))\}$, onde i e j são menores que o período de q_1 e q_2

respectivamente. Suponha que $\pm_0 = d(f^{k_1}(q_1); f^{k_2}(q_2))$, e que exista um $x_0 \in X$ tal que a distância desse ponto à órbita de q_1 e q_2 é estritamente menor que $\frac{\pm_0}{2}$.

Daí, se essas distâncias são obtidas com $f^n(q_1)$ e $f^m(q_2)$, respectivamente, então

$$\begin{aligned} \pm_0 &= d(f^{k_1}(q_1); f^{k_2}(q_2)) \cdot d(f^n(q_1); f^m(q_2)) \cdot \\ &\cdot d(f^n(q_1); x_0) + d(x_0; f^m(q_2)) < \frac{\pm_0}{2} + \frac{\pm_0}{2} = \pm_0. \end{aligned}$$

A desigualdade acima nos dá um absurdo, que surgiu de termos suposto que existisse tal ponto x_0 . Logo para todo ponto $x \in X$, ele está a uma distância maior ou igual a $\frac{\pm_0}{2}$ de q_1 ou q_2 .

Mostremos agora que f depende sensitivamente das condições iniciais com constante de sensitividade igual a $\pm = \frac{\pm_0}{8}$.

Seja $x \in X$ um ponto qualquer e N uma vizinhança aberta de x . Tome U uma vizinhança de x da seguinte forma, $U = N \setminus B(x; \pm)$. Como o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X , existe um ponto periódico $p \in U$ de período n .

Pelo que mostramos acima, concluímos que para esse ponto x tomado, existe um ponto periódico $q \in X$ cuja órbita está a uma distância maior ou igual a $4\pm$ de x .

Seja $V = \bigcup_{i=0}^{n-1} f^i(B(f^i(q); \pm))$, onde $f^i(B(f^i(q); \pm)) = \{x \in X : f^i(x) \in B(f^i(q); \pm)\}$.

Note que V é aberto e não vazio, pois ele é formado pela interseção finita de abertos que contêm o ponto q . Usando agora a transitividade da f para os abertos U e V de X , temos que existem $y \in U$ e $k \geq 0$ tal que $f^k(y) \in V$.

Denote por j a parte inteira do número $\frac{k}{n} + 1$, ou seja $\frac{k}{n} + 1 = j + \theta; c$.

Logo $k + n = nj + n(0; c)$, e então $nj - k \leq n$ e $nj - k$ é um número inteiro positivo. Portanto $1 \leq nj - k \leq n$.

Daí,

$$f^{nj}(y) = f^{nj \circ k}(f^k(y)) \in f^{nj \circ k}(V); \text{ pois } f^k(y) \in V;$$

Contudo,

$$\begin{aligned} f^{nj \circ k}(V) &= \bigcap_{i=0}^{n-k} f^{i \circ i} B(f^i(q); \pm) \stackrel{!}{=} \bigcap_{i=0}^{n-k} f^{nj \circ k \circ i} f^{i \circ i} (B(f^i(q); \pm)) \stackrel{!}{=} \\ &= \bigcap_{i=0}^{n-k} f^{i \circ (nj \circ k)} (B(f^{nj \circ k \circ i}(q); \pm)) \stackrel{!}{=} \bigcap_{i=0}^{n-k} f^{nj \circ k \circ i} (f^{i \circ i} (B(f^i(q); \pm))) \stackrel{!}{=} \\ &\quad \bigcap_{i=0}^{n-k} B(f^{nj \circ k \circ i}(q); \pm); \end{aligned}$$

Portanto $f^{nj}(y) \in B(f^{nj \circ k}(q); \pm)$. Agora como $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto de período n , temos que $f^{nj}(p) = p$.

Usando a desigualdade triangular temos,

$$d(x; f^{nj \circ k}(q)) \leq d(x; p) + d(p; f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(y); f^{nj \circ k}(q));$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(y); f^{nj}(p)) &= d(f^{nj}(y); p) \leq d(x; f^{nj \circ k}(q)) + d(x; p) \\ &\leq d(f^{nj}(y); f^{nj \circ k}(q)) + 4\epsilon \leq \epsilon + 4\epsilon = 5\epsilon; \end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade triangular temos,

$$2\epsilon < d(f^{nj}(p); f^{nj}(y)) \leq d(f^{nj}(p); f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x); f^{nj}(y));$$

Logo $d(f^{nj}(x); f^{nj}(p)) > \epsilon$ ou $d(f^{nj}(x); f^{nj}(y)) > \epsilon$.

Portanto concluímos que existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $x \in X$ e N vizinhança de x , ou existem $y \in N$ e $n_j > 0$ tal que $d(f^{n_j}(x); f^{n_j}(y)) > \epsilon$, ou então existem $p \in N$ e $n_j > 0$ tal que $d(f^{n_j}(x); f^{n_j}(p)) > \epsilon$, e isso mostra a dependência sensitiva da função f conforme queríamos mostrar. \square

2.2 Algumas Implicações

O teorema da seção anterior nos diz que a condição (3) da definição de caoticidade é desnecessária dentro dos sistemas dinâmicos caóticos, isto é, para que um sistema num espaço métrico qualquer seja considerado caótico, basta que ele seja transitivo e possua o conjunto dos pontos periódicos denso. Veremos que essa é a única implicação possível, ou seja, quaisquer outras duas condições não implicam a caoticidade do sistema.

Para isso, considere $S^1 = \{e^{i\mu} : 0 \leq \mu < 2\pi\}$, e defina em S^1 a métrica d , dada por,

$$d(e^{i\mu}; e^{i\lambda}) = \min_j |\mu - \lambda_j|$$

Seja $X = S^1 \setminus \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} : k \in \mathbb{Z}\}$, munido com a métrica d .

Note que as raízes n -ésimas da unidade, que são da forma $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, para $0 \leq k < n$, não estão em X , para todo $n \in \mathbb{N}$:

Considere a função $f : X \rightarrow X$ dada por $f(e^{i\mu}) = e^{i2\mu}$. A função f é contínua, pois seja $e^{i\mu} \in X$ um ponto qualquer e $\epsilon > 0$ dado. Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, se $e^{i\lambda} \in X$ e $d(e^{i\mu}; e^{i\lambda}) < \delta$, então $d(f(e^{i\mu}); f(e^{i\lambda})) = d(e^{i2\mu}; e^{i2\lambda}) = 2 \min_j |\mu - \lambda_j| < \epsilon$.

Mostremos que f não possui pontos periódicos em X .

De fato, se $e^{i\mu} \in X$ é um ponto periódico de período n para f , então $e^{i\mu} = f^n(e^{i\mu}) = e^{i2^n\mu}$.

$$\text{Logo, } \cos(\mu) + i \sin(\mu) = \cos(2^n\mu) + i \sin(2^n\mu).$$

Daí,

$$\cos(\mu) = \cos(2^n\mu) \tag{2.2}$$

e

$$\sin(\mu) = \sin(2^n \mu) \quad (2.3)$$

De (2.2) concluímos que $2^n \mu = \mu + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $2^n \mu = j\mu + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Se ocorrer a segunda igualdade, a equação (2.3) não é satisfeita. Portanto concluímos que a única relação que satisfaz (2.2) e (2.3) simultaneamente é

$$2^n \mu = \mu + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}:$$

Da expressão acima, concluímos que $\mu = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$. Como $0 < \mu < 2\pi$, então $0 < \frac{2k\pi}{2^n - 1} < 2\pi$, e a partir disso, temos que $0 < k < 2^n - 1$.

Portanto os pontos periódicos de período n para f são da forma $e^{\frac{2k\pi}{2^n - 1} i}$, $0 < k < 2^n - 1$, ou seja, são as raízes $(2^n - 1)$ -ésimas da unidade. Contudo, tais raízes não estão em X , conforme já observamos. Portanto f não possui pontos periódicos em X .

Mostremos agora que f é transitiva e que depende sensitivamente das condições iniciais.

Para mostrarmos a transitividade, observe que se $e^{i\mu} \in X$ é um ponto qualquer, então as iteradas desse ponto consistem em duplicar o ângulo com relação à iterada anterior. Portanto se U e V são dois abertos não vazios de X , é fácil ver que existe um inteiro $k \geq 0$, tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$; ou seja, f é transitiva.

A dependência sensitiva de f é verdadeira, pois se $e^{i\mu} \in X$ é um ponto qualquer e U é uma vizinhança qualquer deste ponto com $e^{iA} \in U$ e $\mu \in \mathbb{R}$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$d(f^n(e^{i\mu}); f^n(e^{iA})) = d(e^{i2^n \mu}; e^{i2^n A}) = 2^n |\mu - A|$$

Portanto basta tomar $\epsilon = \frac{\delta}{2}$, e teremos a dependência sensitiva.

Com isso, apresentamos um exemplo de uma função que é transitiva e possui a dependência sensitiva, mas que o conjunto dos pontos periódicos não é denso.

É bom observar que pelo fato de $2^n \neq 1$, isso não implica que $d(f^n(e^{i\mu}); f^n(e^{i\lambda})) \neq 1$, porque estamos tomando congruência módulo 2^n .

Daremos agora um exemplo de uma função contínua cujo conjunto dos pontos periódicos é denso e que possui a dependência sensitiva das condições iniciais, mas que não é transitiva.

Considere S^1 e o intervalo $[0; 1]$ munido com suas métricas usuais, e considere o cilindro $Y = S^1 \times [0; 1]$ com a seguinte métrica:

$$d((e^{i\mu_1}; t_1); (e^{i\mu_2}; t_2)) = d(e^{i\mu_1}; e^{i\mu_2}) + d(t_1; t_2) = j\mu_1 - \mu_2j + jt_1 - t_2j$$

Defina $g : Y \rightarrow Y$ por $g(e^{i\mu}; t) = (e^{i2\mu}; t)$. A função g é contínua.

De fato, seja $(e^{i\mu_1}; t_1) \in Y$ um ponto qualquer, e $\epsilon > 0$ dado. Tome $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, e se $(e^{i\mu_2}; t_2) \in Y$ com $d((e^{i\mu_1}; t_1); (e^{i\mu_2}; t_2)) < \delta = \frac{\epsilon}{2}$, então

$$\begin{aligned} d(g(e^{i\mu_1}; t_1); g(e^{i\mu_2}; t_2)) &= d((e^{i2\mu_1}; t_1); (e^{i2\mu_2}; t_2)) = 2j\mu_1 - \mu_2j + jt_1 - t_2j \\ &= 2j\mu_1 - \mu_2j + 2jt_1 - t_2j = 2(j\mu_1 - \mu_2j + jt_1 - t_2j) < 2\delta = \epsilon \end{aligned}$$

Mostremos que g não é transitiva.

Com efeito, sejam $U = S^1 \times [0; \frac{1}{2}[$ e $V = S^1 \times]\frac{1}{2}; 1]$. Note que $U \cap V = \emptyset$; e que $g^n(U) = U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $g^n(U) \cap V = U \cap V = \emptyset$, e então g não é transitiva.

Vamos mostrar agora que o conjunto dos pontos periódicos de g é denso em Y , e que g possui a dependência sensitiva.

Se $(e^{i\mu}; t) \in Y$ é um ponto periódico de período n para g , então $g^n(e^{i\mu}; t) = (e^{i\mu}; t)$, ou seja, $(e^{i2^n\mu}; t) = (e^{i\mu}; t)$. Logo $e^{i2^n\mu} = e^{i\mu}$, e conforme vimos

anteriormente, os pontos que satisfazem tal condição são as raízes $(2^n - 1)$ -ésimas da unidade.

Portanto devemos mostrar que o conjunto $\{e^{\frac{2k\pi}{2^n-1}i} : n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < k < 2^n - 1\} \subset \mathbb{C}$ é denso em Y . Para isso, basta mostrar que o conjunto $\{e^{\frac{2k\pi}{2^n-1}i} : n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < k < 2^n - 1\} \subset \mathbb{C}$ é denso em S^1 .

Considere então U um arco aberto não vazio em S^1 de comprimento ϵ , e tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2\pi}{2^n - 1} < \epsilon$.

Se $e^{\frac{2\pi}{2^n-1}i} \in U$, então com certeza existe um número $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ tal que $e^{\frac{2k\pi}{2^n-1}i} \in U$. Com isso, mostramos que o conjunto formado pelas raízes $(2^n - 1)$ -ésimas da unidade é denso em S^1 .

Para mostrarmos que g depende sensitivamente das condições iniciais, basta tomarmos $\epsilon = \frac{\delta}{2}$.

Dado se $(e^{i\mu}; t) \in Y$ um ponto qualquer, U uma vizinhança qualquer deste ponto e $(e^{i\lambda}; s) \in U$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos,

$$d(g^n(e^{i\mu}; t); g^n(e^{i\lambda}; s)) = d((e^{i2^n\mu}; t); (e^{i2^n\lambda}; s)) = 2^n |\mu - \lambda| + |t - s|$$

Como $2^n \rightarrow \infty$, concluímos que em algum momento a distância acima ficará estritamente maior que ϵ , e com isso temos a dependência sensível da função g .

Analogamente ao exemplo anterior, estamos tomando em Y congruência módulo 2π . Logo o fato de $2^n \rightarrow \infty$, não implica que $d(g^n(e^{i\mu}; t); g^n(e^{i\lambda}; s)) \rightarrow \infty$.

2.3 Em Intervalos, Transitividade = Caoticidade

Conforme vimos nas seções anteriores, num espaço métrico qualquer, as condições (1) e (2) da definição de sistemas dinâmicos caóticos já nos dão a caoticidade do sistema; e essa é a única implicação possível. Agora, se restringirmos a nossa

análise a aplicações em intervalos, obtemos um resultado surpreendente, que é o seguinte teorema apresentado em [8].

Teorema 2.3.1 . Se I é um intervalo, não necessariamente limitado, e $f : I \rightarrow I$ uma aplicação contínua e transitiva, então:

- 1 - O conjunto dos pontos periódicos de f é denso em I ;
- 2 - A função f depende sensitivamente das condições iniciais.

Para demonstrarmos esse teorema, precisamos primeiro da seguinte proposição:

Proposição 2.3.1 . Suponha que I é um intervalo, não necessariamente limitado, e seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação contínua. Se $J \subset I$ é um intervalo que não contém ponto periódico de f e $z, f^m(z) \in J$, com $0 < m < n$, então $z < f^m(z) < f^n(z)$ ou $z > f^m(z) > f^n(z)$.

Demonstração. Suponha que exista $z \in J$, com $z < f^m(z)$ e $f^m(z) > f^n(z)$. Defina a função $g(x) = f^m(x)$.

Temos que $z < g(z)$ e isso implica que

$$z < g(z) < g^{k+1}(z); \quad \forall k \geq 1: \quad (2.4)$$

Com efeito, se $r \geq 1$, é o menor inteiro positivo tal que $z < g^r(z)$ e $g(z) > g^{r+1}(z)$, defina a função $h(x) = g^r(x) - x$. Teremos assim:

$$h(z) = g^r(z) - z > 0 \quad \text{e} \quad h(g(z)) = g^{r+1}(z) - g(z) < 0:$$

Como h é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto $c \in]z; g(z)[\subset J$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, c é um ponto periódico para f de período rm e pertencente a J .

Isso contradiz o fato de J não conter nenhum ponto periódico para f . Portanto a expressão (2.4) é verdadeira.

A partir de (2.4), tome $k + 1 = n - m > 0$ e teremos,

$$z < f^{(n-m)m}(z); \quad (2.5)$$

Supomos inicialmente que $f^m(z) > f^n(z)$. Como $f^n(z) = f^{(n-m)m}(z) = f^{(n-m)}(f^m(z))$, temos $f^m(z) > f^{(n-m)}(f^m(z))$.

Afirmamos: $f^{(n-m)m}(f^m(z)) < f^m(z)$.

Para mostrarmos que a afirmação acima é verdadeira, seja $g(x) = f^{(n-m)}(x)$, e de forma análoga a demonstração da expressão (2.4), temos:

$$f^m(z) > g(f^m(z)) > g^{k+1}(f^m(z)); \quad \forall k \geq 1:$$

Tomando $k + 1 = m$, obtemos que $f^m(z) > g^m(f^m(z))$, ou seja,

$$f^m(z) > f^{(n-m)m}(f^m(z)); \quad (2.6)$$

Para concluir, defina $h(x) = f^{(n-m)m}(x) - x$. A função h é contínua, e por (2.5) e (2.6) temos respectivamente que, $h(z) > 0$ e $h(f^m(z)) < 0$. Novamente pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in]z, f^m(z)[\cap J$ tal que $h(c) = 0$, isto é, $f^{(n-m)m}(c) = c$. Logo $c \in J$, é um ponto $(n-m)m$ periódico para f , o que contradiz o fato de J não possuir ponto periódico para f . Tal contradição surgiu de termos suposto que $f^m(z) > f^n(z)$.

Portanto $z < f^m(z) < f^n(z)$.

Suponha agora que $z > f^m(z)$ e $f^m(z) < f^n(z)$. De modo análogo ao que fizemos acima, concluímos que isso não é possível. Logo se $z > f^m(z)$, então $f^m(z) > f^n(z)$ e temos demonstrado a proposição. \square

Tendo em mãos essa proposição, vamos demonstrar o Teorema 2.3.1.

Demonstração do Teorema 2.3.1:

Se $f : I \rightarrow I$ é uma aplicação contínua e transitiva, queremos mostrar que:

1 - O conjunto dos pontos periódicos de f é denso em I ;

2 - A função f depende sensitivamente das condições iniciais.

Para isso, vamos mostrar apenas o item (1), pois já vimos que se uma função é contínua, transitiva e vale (1), então (2) é também satisfeito.

Suponha então que o conjunto dos pontos periódicos de f não é denso em I . Logo existe um intervalo $J \subset I$ que não contém ponto periódico de f .

Seja x um ponto no interior de J , e N uma vizinhança aberta de x contida em J . Considere E um intervalo aberto tal que $E \subset J \cap N$.

Como f é transitiva, existe $m > 0$ tal que $f^m(N) \setminus E \neq \emptyset$; isto é, existe $y \in N \cap J$ tal que $f^m(y) \in E \cap J \cap N$, daí $y \in f^m(y)$.

A função f^m é contínua, logo existe uma vizinhança aberta U de y contida em J tal que $f^m(U) \setminus U = \emptyset$.

Tome um aberto não vazio $A \subset (f^m(U) \setminus E) \cap J$; isso é possível pois $f^m(U) \setminus E \neq \emptyset$. Aplicando a transitividade de f para os abertos U e A , concluímos que existe $k > 0$ e $z \in A$ tal que $f^k(z) \in U$. Como $z \in A$, tem-se que $z = f^m(z)$ para algum $z \in U \cap J$. Logo $f^k(z) = f^k(f^m(z)) = f^{k+m}(z) \in U$. Chame $n = k + m > m$.

Portanto encontramos $0 < m < n$ com $z, f^n(z) \in U$ e $f^m(z) \notin U$, ou seja, conseguimos três pontos $z, f^m(z)$ e $f^n(z) \in J$ com $0 < m < n$, que não satisfazem as desigualdades da Proposição 2.3.1. Porque se tais pontos satisfizessem as desigualdades da Proposição 2.3.1, então deveríamos ter $f^m(z)$ entre z e $f^n(z)$, mas

como z e $f^n(z) \in U$, temos $f^m(z) \in U$, o que não é verdade.

Essa contradição à Proposição 2.3.1 surgiu de termos suposto que o conjunto dos pontos periódicos de f não era denso em I . Portanto esse conjunto é denso em I e demonstramos o teorema. \square

Uma observação importante, é que essa prova não pode ser generalizada para espaços de dimensão maiores. Isso se deve ao fato de termos usado a Proposição 2.3.1 para demonstrá-la, e nessa proposição foi usado fortemente a relação de ordem de \mathbb{R} , o que não temos em outros espaços de dimensão maiores.

Daremos a seguir exemplos que mostram que em intervalos, a única trivialidade da definição de caos é a apresentada acima, ou seja, daremos exemplos de funções sobre intervalos que satisfazem algumas das condições de caoticidade mas não todas.

Exemplo 2.3.1 . Uma função contínua sobre um intervalo, cujo conjunto dos pontos periódicos é denso, e que não depende sensitivamente das condições iniciais.

Considere $f : I \rightarrow I$ dada por $f(x) = x$. Todos os pontos de f são periódicos de período 1, mas f não depende sensitivamente das condições iniciais, pois para quaisquer pontos $x, y \in I$ e para qualquer inteiro $n \geq 0$, tem-se

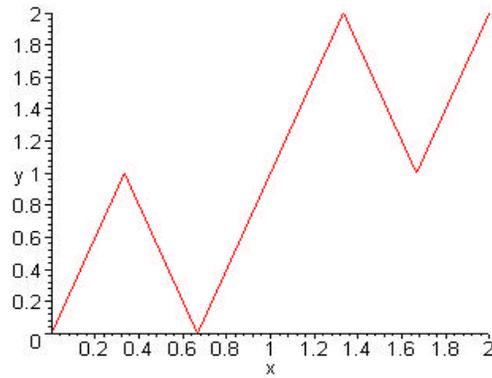
$$|f^n(x) - f^n(y)| = |x - y|$$

Exemplo 2.3.2 . Uma função contínua sobre um intervalo que tem a dependência sensitiva e o conjunto dos pontos periódicos denso, mas que não é transitiva.

Seja $I = \mathbb{R}_+$ e defina $f : I \rightarrow I$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 3x + 2 & \text{se } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \text{se } \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ f(x - 1) + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

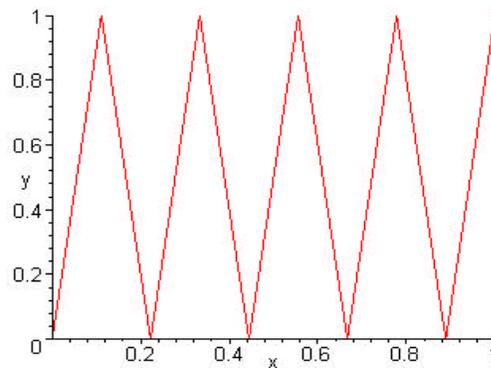
O gráfico de f é dado por:



Calculando $f^2(x)$ no intervalo $[0; 1[$ temos:

$$f^2(x) = \begin{cases} 9x & \text{se } 0 \cdot x < \frac{1}{9} \\ 9x + 2 & \text{se } \frac{1}{9} \cdot x < \frac{2}{9} \\ 9x - 2 & \text{se } \frac{2}{9} \cdot x < \frac{3}{9} \\ 9x + 4 & \text{se } \frac{3}{9} \cdot x < \frac{4}{9} \\ 9x - 4 & \text{se } \frac{4}{9} \cdot x < \frac{5}{9} \\ 9x + 6 & \text{se } \frac{5}{9} \cdot x < \frac{6}{9} \\ 9x - 6 & \text{se } \frac{6}{9} \cdot x < \frac{7}{9} \\ 9x + 8 & \text{se } \frac{7}{9} \cdot x < \frac{8}{9} \\ 9x - 8 & \text{se } \frac{8}{9} \cdot x < 1 \end{cases}$$

O gráfico de f^2 no intervalo $[0; 1[$ é dado por:



Note que os gráficos de f e f^2 no intervalo $[0; 1[$ são formados respectivamente por 3 e 9 pedaços lineares. Cada pedaço com inclinação ≤ 3 e ≤ 9 , contido num subintervalo de comprimento $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ e cuja imagem de cada subintervalo é todo o intervalo $[0; 1[$ ou $]0; 1]$.

Em geral, podemos concluir que o gráfico de f^n é formado por 3^n pedaços lineares. Cada pedaço com inclinação $\leq 3^n$, contido num subintervalo de comprimento $\frac{1}{3^n}$ e cuja imagem de cada subintervalo é todo o intervalo $[0; 1[$ ou $]0; 1]$.

Mediante essa observação, e conforme já vimos no Capítulo 1, concluímos que f depende sensitivamente das condições iniciais e que o conjunto dos pontos periódicos é denso em I .

Agora, f não é transitiva, pois para quaisquer $k; n \in \mathbb{N}$ tem-se $f^k([n; n+1]) = [n; n+1]$. Logo se tomarmos U e V dois abertos com $U \cap \frac{1}{2}[n; n+1]$ e $V \cap \frac{1}{2}[n+1; n+2]$, não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Observações:

1 - No exemplo acima, a hipótese de $I = \mathbb{R}_+$ é essencial, porque se considerarmos $I = [0; 1]$, então f seria transitiva, e portanto caótica, conforme observado no Capítulo 1.

2 - Se considerarmos $I = [0; 2]$, conseguimos um exemplo de uma função num intervalo limitado que tem a dependência sensitiva e o conjunto dos pontos periódicos denso, mas que não é transitiva.

Exemplo 2.3.3 . Uma função contínua sobre um intervalo ilimitado que tem a dependência sensitiva, mas o conjunto dos pontos periódicos não é denso.

Considere $I = \mathbb{R}_+$ e $f : I \rightarrow I$ dada por $f(x) = 2x$.

O único ponto periódico de f é o zero, e f possui a dependência sensitiva, pois para quaisquer $x, y \in I$ e $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$|f^n(x) - f^n(y)| = 2^n |x - y|$$

Exemplo 2.3.4 . Uma função contínua sobre um intervalo limitado que tem a dependência sensitiva, mas o conjunto dos pontos periódicos não é denso.

Considere $I = [0; \frac{3}{4}]$ e $f : I \rightarrow I$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(1-x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Note que o intervalo $[\frac{3}{8}; \frac{3}{4}]$ é invariante pela f , além disso qualquer $x \in]0; \frac{3}{8}[$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in [\frac{3}{8}; \frac{3}{4}]$. Portanto o intervalo $]0; \frac{3}{8}[$ não possui nenhum ponto periódico, e com isso o conjunto dos pontos periódicos de f não é denso em I .

Resta mostrar que f depende sensitivamente das condições iniciais. Para isso, calculemos as expressões de f , f^2 e f^3 (sem se preocupar com o intervalo de definição), e veremos se conseguimos obter alguma relação entre eles.

$$f^2(x) = \begin{cases} (\frac{3}{2})^2 x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ (\frac{3}{2})^2 (\frac{2}{3} - x) & \text{se } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ (\frac{3}{2})^2 (x - \frac{1}{3}) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3} \\ (\frac{3}{2})^2 (1 - x) & \text{se } \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f^3(x) = \begin{cases} (\frac{3}{2})^3 x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{6} \\ (\frac{3}{2})^3 (\frac{4}{9} - x) & \text{se } \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{3} \\ (\frac{3}{2})^3 (x - \frac{2}{9}) & \text{se } \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \\ (\frac{3}{2})^3 (\frac{2}{3} - x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3} \\ (\frac{3}{2})^3 (x - \frac{1}{3}) & \text{se } \frac{2}{3} \leq x < \frac{7}{9} \\ (\frac{3}{2})^3 (\frac{7}{9} - x) & \text{se } \frac{7}{9} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

A partir dessas três expressões, podemos concluir que a expressão de f^k para $k \in \mathbb{N}$, é dado por

$$f^k(x) = \frac{3}{2} \prod_{i=1}^k h_i(x);$$

onde $h_i(x) = x - c_i$ ou $h_i(x) = c_i - x$, com $0 < c_i < 1$ e o número de funções h_i é finito.

Considere $\varepsilon = 0,2$, $x \in [0; \frac{3}{4}]$ um ponto qualquer e N uma vizinhança aberta de x contida em $[0; \frac{3}{4}]$. Se $y \in N$ e $y \neq x$, então para todo k inteiro teremos,

$$|f^k(x) - f^k(y)| = \left| \frac{3}{2} \prod_{i=1}^k h_i(x) - \frac{3}{2} \prod_{i=1}^k h_i(y) \right| = \frac{3}{2} |h_1(x) - h_1(y)|;$$

Como $x, y \in I = [0; \frac{3}{4}]$, temos que $|h_1(x) - h_1(y)|$ é limitado. Além disso, $(\frac{3}{2})^k > 1$, quando $k > 1$.

Portanto existe $k_0 > 0$ tal que

$$|f^{k_0}(x) - f^{k_0}(y)| > \varepsilon;$$

Com isso, provamos que f possui a dependência sensível das condições iniciais.

2.4 Outra Definição de Caos

Vimos até agora todas as implicações possíveis na definição de sistema dinâmico caótico, tanto em intervalos quanto em um espaço métrico qualquer. Consideraremos a seguir um espaço métrico qualquer e introduziremos uma outra definição de caos apresentada em [7]. Esta definição é uma reformulação das duas condições topológicas, a transitividade e a densidade dos pontos periódicos, em uma única condição que produz uma simples e breve definição de caos. Por fim, mostraremos a equivalência entre essas duas definições.

Definição 2.4.1 . Sejam X um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é caótica em X , se dados U e V conjuntos abertos não vazios de X , existem um ponto periódico $p \in U$ e um inteiro não negativo k tal que $f^k(p) \in V$, isto é, qualquer par de subconjuntos abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica.

Usaremos essa definição para dar a caracterização de caos, e mostrar a equivalência com a definição anterior. Para isso, basta mostrar a equivalência dessa definição com a transitividade e a densidade dos pontos periódicos, ou seja, mostraremos a seguinte proposição.

Proposição 2.4.1 . Sejam $f : X \rightarrow X$ contínua e X um espaço métrico. A função f é caótica em X no sentido da Definição 2.4.1 se, e somente se, f é transitiva e o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X .

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X .

Com efeito, pois pela própria definição de caoticidade, cada par de subconjuntos abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica. Logo, cada subconjunto não vazio de X contém um ponto periódico.

A transitividade segue também direto da definição, pois considere U e V dois abertos não vazios de X . Pela definição, existe $p \in U$ periódico e $k \geq 0$ tal que $f^k(p) \in V$.

Reciprocamente, suponha que f seja transitiva e possua o conjunto dos pontos periódicos densos em X , e mostremos que f é caótica em X .

Sejam U e V dois abertos quaisquer não vazios de X . Pela transitividade da f , existe $u \in U$ e $k \geq 0$ tal que $f^k(u) \in V$.

Defina

$$W = f^{i-k}(V) \setminus U:$$

O conjunto W é aberto e não vazio, pois $u \in W$. Além disso,

$$f^k(W) = f^k(f^{i-k}(V) \setminus U) \subset V \setminus f^k(U) \subset V:$$

Como W é um aberto não vazio de X , e o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em X , então existe $p \in W$, periódico para f . Logo $p \in U$ e $f^k(p) \in f^k(W) \subset V$.

Portanto dado dois abertos U e V quaisquer não vazios de X , conseguimos um inteiro $k \geq 0$ e um ponto periódico p tal que $p \in U$ e $f^k(p) \in V$, ou seja, f é caótica. \square

Vamos mostrar agora que qualquer número finito de subconjuntos abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica quando f é caótica.

Proposição 2.4.2. Se X é um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e caótica em X , então qualquer coleção finita de subconjuntos abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica.

Demonstração. Demonstraremos essa proposição por indução no número de subconjuntos abertos da coleção.

Chame de N o número de subconjuntos da coleção.

Se $N = 1$, o resultado segue pela densidade dos pontos periódicos.

Se $N = 2$, o resultado segue pela própria definição de caoticidade.

Suponha então que a proposição é verdadeira para $N = n$, e mostraremos que ela é verdadeira para $N = n + 1$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que a coleção consiste de $n + 1$ subconjuntos disjuntos, pois se não forem disjuntos tomamos a interseção não vazia de dois deles como sendo um único subconjunto, e ficamos com uma coleção de n subconjuntos. Daí, pela hipótese de indução essa nova coleção compartilha uma órbita periódica. Em particular, essa órbita é compartilhada pelos $n + 1$ subconjuntos da coleção inicial.

Tome um subconjunto qualquer dessa coleção e denote por V . Os n subconjuntos restantes, pela hipótese de indução, compartilham uma órbita periódica.

De todas as órbitas periódicas que essa coleção de n subconjuntos compartilham, existe uma de menor período, que denotaremos por m . Note que $m \leq n$.

Desses n subconjuntos, tome um deles e denote por U_0 . Seja $p \in U_0$ o ponto periódico acima de período m . Os $n - 1$ subconjuntos que restaram, denotaremos da seguinte maneira:

O primeiro conjunto atingido pela órbita de p , denotaremos por U_1 . Suponhamos que isso ocorra na k_1 -ésima iterada de f , isto é, $f^{k_1}(p) \in U_1$ e $0 < k_1 < m$. Da mesma forma, o próximo subconjunto atingido pela órbita de p , chamaremos de U_2 . Suponhamos que isso ocorra na k_2 -ésima iterada de f , com $0 < k_1 < k_2 < m$. Pondo $k_0 = 0$ e prosseguindo com esse raciocínio, obtemos $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} < m$ tal que $f^{k_j}(p) \in U_j$, $j = 0; 1; \dots; n - 1$.

Portanto temos a nossa coleção denotada por $\{V; U_0; U_1; \dots; U_{n-1}\}$.

Defina agora uma outra coleção de subconjuntos abertos não vazios de X da seguinte maneira:

Seja

$$W_0 = U_{n-1};$$

Claramente temos que $f^{k_{n-1}}(p) \in W_0$.

Como $k_{n_i 2} < k_{n_i 1}$, considere

$$W_1 = f^{i(k_{n_i 1} k_{n_i 2})}(W_0) \setminus U_{n_i 2};$$

Temos que W_1 é aberto e não vazio pois,

$$f^{k_{n_i 2}}(p) \in U_{n_i 2}$$

e

$$f^{k_{n_i 2}}(p) = f^{i(k_{n_i 1} k_{n_i 2})}(f^{k_{n_i 1}}(p)) \in f^{i(k_{n_i 1} k_{n_i 2})}(W_0);$$

Logo $f^{k_{n_i 2}}(p) \in W_1$, e além disso,

$$W_1 \cap U_{n_i 2} = \emptyset \text{ e } f^{(k_{n_i 1} k_{n_i 2})}(W_1) \cap W_0 = \emptyset;$$

Seja

$$W_2 = f^{i(k_{n_i 2} k_{n_i 3})}(W_1) \setminus U_{n_i 3};$$

De modo análogo, W_2 é um aberto não vazio, $W_2 \cap U_{n_i 3} = \emptyset$ e $f^{(k_{n_i 2} k_{n_i 3})}(W_2) \cap W_1 = \emptyset$.

Continuando esse processo, construímos a seguinte coleção de abertos não vazios de X :

$$W_0 = U_{n_i 1};$$

$$W_i = f^{i(k_{n_i i} k_{n_i (i+1)})}(W_{i-1}) \setminus U_{n_i (i+1)}; \text{ para } i = 1; 2; \dots; n_i - 1;$$

onde

$$W_i \cap U_{n_i (i+1)} = \emptyset \text{ e } f^{(k_{n_i i} k_{n_i (i+1)})}(W_i) \cap W_{i-1} = \emptyset;$$

Devemos encontrar uma órbita periódica que visita a nossa coleção $\{V; U_0; U_1; \dots; U_{n_i 1}\}$. Para isso, considere V e $W_{n_i 1}$. Sabemos que eles compartilham uma órbita periódica, isto é, existe um ponto periódico $p^0 \in V$ e um inteiro positivo q , tal que $f^q(p^0) \in W_{n_i 1}$.

Então temos:

$$p^0 \in V;$$

$$f^q(p^0) = f^{(q+k_0)}(p^0) \in W_{n_i-1} \cap U_0;$$

$$f^{(q+k_1)}(p^0) = f^{(k_{1i}-k_0)}(f^{(q+k_0)}(p^0)) \in f^{(k_{1i}-k_0)}(W_{n_i-1}) \cap W_{n_i-2} \cap U_1;$$

$$f^{(q+k_2)}(p^0) = f^{(k_{2i}-k_1)}(f^{(q+k_1)}(p^0)) \in f^{(k_{2i}-k_1)}(W_{n_i-2}) \cap W_{n_i-3} \cap U_2;$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f^{(q+k_{n_i-1})}(p^0) = f^{(k_{n_i-1i}-k_{n_i-2})}(f^{(q+k_{n_i-2})}(p^0)) \in f^{(k_{n_i-1i}-k_{n_i-2})}(W_1) \cap W_0 \cap U_{n_i-1}.$$

Portanto, encontramos um ponto periódico p^0 cuja órbita visita cada um dos $n + 1$ subconjuntos da coleção. Isso completa a prova da indução, e temos demonstrado a proposição. \square

Corolário 2.4.1. Se X é um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua e caótica em X , então qualquer coleção finita de subconjuntos abertos não vazios de X , compartilha uma infinidade de órbitas periódicas.

Demonstração. Suponha que exista uma coleção finita $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ de subconjuntos abertos não vazios de X , que compartilha apenas um número finito de órbitas periódicas.

Defina por P , o conjunto formado pelos pontos dessas finitas órbitas periódicas. O conjunto P é finito.

Seja $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ uma outra coleção de subconjuntos abertos não vazios de X , definida por $V_i = U_i \setminus P$.

Pela Proposição 2.4.2, (V_i) compartilha uma órbita periódica, e obviamente essa órbita não está em P .

Por outro lado, da forma que definimos (V_i) , essa órbita é também compartilhada pela coleção inicial (U_i) . Isso contradiz o fato de termos tirado inicialmente

de (U_i) o conjunto de todos os pontos de todas as órbitas periódicas que o visitam. Tal contradição surgiu de termos suposto que existisse uma coleção que dividisse apenas um número finito de órbitas periódicas. Isso mostra o corolário. \square

Proposição 2.4.3. Sejam X um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua em X . As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1 - A aplicação f é caótica em X ;
- 2 - A aplicação f é transitiva e o conjunto dos pontos periódicos é denso em X ;
- 3 - Qualquer coleção finita de subconjuntos abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica;
- 4 - Qualquer coleção finita de subconjuntos abertos não vazios de X compartilha infinitas órbitas periódicas.

Demonstração. Já mostramos que 1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3) \Leftrightarrow 4); só nos resta mostrar que 4) \Rightarrow 1).

Suponha então que 4) seja válido. Portanto quaisquer dois subconjuntos abertos não vazios de X compartilham uma órbita periódica, ou seja, f é caótica em X . \square

Bibliografia

- [1] Assaf, D. IV; Gadbois, S.; Deñition of Chaos. Letter in American Mathematical Monthly, 99 (1992), pp. 865.
- [2] Banks, J.; Brooks, J.; Cairns, G.; Davis, G.; Stacey, P.; On Devaney's Deñition of Chaos. American Mathematical Monthly, 99 (1992), pp. 332-334.
- [3] Devaney, R. L.; A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment. Boston University, 1992.
- [4] Devaney, R. L.; An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Boston University, 1992.
- [5] Lima, E. L.; Um Curso de Análise - Volume 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, Rio de Janeiro, 1981.
- [6] Palis Jr., J.; Melo, W.; Introdução aos Sistemas Dinâmicos. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1978.
- [7] Touhey, P.; Yet Another Deñition of Chaos. American Mathematical Monthly, 104 (1997), pp. 411-414.
- [8] Vellekoop, M.; Berglund, R.; On Intervals, Transitivity=Chaos. American Mathematical Monthly, 101 (1994), pp. 353-355.