



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Ana Livia Rodero

Estabilidade estrutural, centros e ciclos limite para
campos de vetores tridimensionais suaves e suaves
por partes com esferas bidimensionais invariantes

São José do Rio Preto
2022

Ana Livia Rodero

Estabilidade estrutural, centros e ciclos limite para
campos de vetores tridimensionais suaves e suaves
por partes com esferas bidimensionais invariantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

Coorientador: Prof. Dr. Joan Torregrosa

Financiadora: FAPESP (Processos 2017/08779-8 e 2019/00440-7) e CAPES

São José do Rio Preto
2022

R688e	Rodero, Ana Livia Estabilidade estrutural, centros e ciclos limite para campos de vetores tridimensionais suaves e suaves por partes com esferas bidimensionais invariantes / Ana Livia Rodero. -- São José do Rio Preto, 2022 185 p. : il. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi Coorientador: Joan Torregrosa 1. Sistemas dinâmicos. 2. Campos de vetores em esferas invariantes. 3. Estabilidade estrutural. 4. Problema do centro-foco. 5. Ciclicidade local. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Ana Livia Rodero

Estabilidade estrutural, centros e ciclos limite para
campos de vetores tridimensionais suaves e suaves
por partes com esferas bidimensionais invariantes

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP (Processos 2017/08779-8 e 2019/00440-7) e CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Joan Torregrosa (coorientador)
Departamento de Matemática - Universidade Autônoma de Barcelona

Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto
Departamento de Matemática - UNESP/Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
Departamento de Matemática - UNESP/Câmpus de São José do Rio Preto

Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Rodrigo Donizete Euzebio
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Goiás

São José do Rio Preto
03 de fevereiro de 2022

*Aos meus pais, Ana e Pedro;
aos meus avós, Ana, Elvira, Manoel e Pedro (in memoriam)
e Celina.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por todo suporte, pelo carinho e amor com o qual fui criada e pela base e raízes que levarei sempre comigo. Em especial, aos meus pais, Ana e Pedro.

Ao Luiz Fernando, pelo apoio e amor de sempre, e também à toda sua família.

Aos doguinhos da casa que contribuíram de forma significativa não destruindo este trabalho.

A todos os meus “amiguinhos” ou “abigos” que sempre se fazem presente (mesmo a distância), proporcionando bons momentos de lazer e descontração, estudo e discussões (nem sempre relevantes), rolês aleatórios, boas conversas e altas risadas. Vocês são parte importante desse processo. Não posso deixar de citar os meus companheiros de salinha e de café (convertida em grupo de whatsapp) André, Cheiene, Eliton, Jarne, Helô, Jéssica, Júnior, Lucas, Otávio, Plínio, Raul, Rodrigo I., Rodrigo B., Yagor e Will. À Milena, Poli e Gabi, pela amizade. A alguns dos amigos que o grupo PET-Matemática me proporcionou, Jamiele, Mayara, Fred, Wender e Giane que fizeram com que eu me sentisse em casa no período em Campinas. Aos membros da MAT011 e agregados, em especial à Bruna, Isa, Juliana, Natália e Wesley. E ao melhor apartamento da região, e suas moradoras, Bruna e Pati. A todos os demais queridos amigos, que eu não citei aqui, obrigada!

Aos meus orientadores, professores Cláudio e Joan, por todos os ensinamentos, correções (que não foram poucas rsrs), dedicação no desenvolvimento deste trabalho, oportunidades e receptividade. Boa parte desta tese se deve a vocês. Muito obrigada. Moltes gràcies.

Estendo meu agradecimento ao professor Marco Antônio que, apesar de não figurar como orientador do trabalho, foi também nosso colaborador e ajudou muito no desenvolvimento de parte dele.

Ao Ibilce pelo acolhimento durante esses longos anos. Em particular, aos professores que fizeram parte da minha formação, direta ou indiretamente. Um agradecimento

especial ao professor Weber, que me orientou durante a graduação e mestrado com bastante dedicação e aos professores Gorete e Adalberto, que foram tutores do PET-Matemática nos anos em que fiz parte do grupo. À UAB e aos amigos feito ali, que foram parte importante no meu desenvolvimento pessoal e profissional. Estendo meu agradecimento a todos os membros do grupo de pesquisa de Sistemas Dinâmicos dessas duas instituições, pelas sugestões, discussões matemáticas, congressos e seminários que participei no período.

Aos funcionários do Ibilce, em particular aos das seções técnicas de pós-graduação, de apoio a pesquisa (staepe), da biblioteca e do RU, pelo ótimo atendimento, por sanarem todas as nossas dúvidas e nos auxiliarem com o que foi preciso. Em especial ao Mauro, à Silvia, ao André, à Eliane e à Luciane.

Aos membros da banca, pela disponibilidade e pelas sugestões.

Agradeço à FAPESP pela concessão das bolsas de pesquisa, sob os processos nº 2017/08779-8 e nº 2019/00440-7, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho: Muito obrigada!

“Sempre teremos ciência, tecnologia, engenharia e matemática conosco. Algumas coisas vão desaparecer, mas sempre haverá ciência, engenharia e tecnologia. E sempre, sempre haverá matemática. Tudo é física e matemática.”

Frase atribuída à Katherine Johnson em [15], 2020 (tradução nossa).

RESUMO

O primeiro objetivo deste trabalho foi estudar problemas relacionados a estabilidade estrutural dentro das classes de campos de vetores suaves por partes e suaves por partes refrativos tridimensionais que admitam integral primeira que deixe invariante todas as esferas bidimensionais centradas na origem. Condições sobre estabilidade e famílias genéricas a um parâmetro na esfera bidimensional foram usadas para provar os resultados que estabelecem as condições necessárias para a estabilidade estrutural dentro destas classes. Além disso, estudamos o problema do centro-foco e de ciclicidade nas classes de campos suaves e suaves por partes tridimensionais que admitam integral primeira que deixe invariante todas as esferas bidimensionais centradas na origem. Provamos que sistemas lineares nessas classes não admitem ciclo limite nas esferas invariantes. Finalmente, obtemos 4 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando de um foco-fraco para sistemas quadráticos (suaves) definido na esfera unitária e também mostramos que existe uma perturbação suave por partes quadrática tal que pelo menos 10 ciclos limite de pequena amplitude bifurcam de um centro quadrático suave nessa esfera.

Palavras-chave: Campos de vetores em esferas invariantes, estabilidade estrutural, integrabilidade, problema do centro-foco, ciclicidade local.

ABSTRACT

The first goal of this work was to study structural stability problems in the classes of piecewise smooth and piecewise smooth refractive vector fields that admit a first integral that leaves invariant any two-dimensional sphere centered at the origin. Stability conditions and generic one-parameter families in the two-dimensional sphere were used to prove the results that establish the necessary conditions for structural stability in these classes. Furthermore, we study the center-focus and the cyclicity problems in the classes of smooth and piecewise smooth vector fields that admit a first integral that leaves invariant any two-dimensional spheres centered at the origin. We prove that linear systems into these classes do not admit limit cycle on invariant spheres. Finally, we obtain 4 small amplitude limit cycles bifurcating from a weak-focus of a (smooth) quadratic system defined on the unit sphere and we also show that there exists a piecewise smooth quadratic perturbation such that at least 10 small amplitude limit cycles bifurcate from a smooth quadratic center on this sphere.

Keywords: Vector fields on invariant spheres, structural stability, integrability, center-focus problem, local cyclicity.

Lista de Figuras

2.1	Regiões de costura (a), deslize (b) e escape (c) para campo de vetores suaves por partes tridimensionais.	34
2.2	Exemplo de pseudo-conexão.	35
2.3	Σ -dobra para campos de vetores suaves por partes bidimensionais.	36
2.4	Pontos de equilíbrio hiperbólicos para o campo deslizante de campos de vetores suaves por partes bidimensionais.	36
2.5	Poli-trajetórias elementares do tipo I e do tipo III.	37
2.6	Exemplos de pseudo-poli-trajetórias fechadas.	38
3.1	Primeiro retorno associado a poli-trajetória fechada do tipo I.	59
3.2	Possível conexão de separatrizes podem surgir no rompimento de uma poli-trajetória do tipo I não elementar.	62
3.3	Poli-trajetória do tipo III contendo um segmento de deslize e um de escape.	63
3.4	Possíveis conexões de separatrizes que podem surgir no rompimento de uma poli-trajetória do tipo III.	64
3.5	Exemplo de poli-trajetória do tipo III.	64
3.6	Poli-trajetória do tipo III contendo uma conexão de dobras.	65
3.7	(a) <i>Buckling bifurcation</i> , (b) <i>sliding-crossing-bifurcation</i> , (c) <i>crossing-crossing-bifurcation</i>	68
3.8	Loop de sela intersectando Σ de forma transversal.	69
3.9	Poli-trajetórias fechadas não elementares do tipo III.	72
3.10	Pseudo-poli-trajetória em campo refrativo.	74
3.11	Pseudo-conexões que não contém segmentos de deslize ou escape.	75
3.12	Pseudo-poli-trajetórias fechadas.	75
4.1	(a) Dobra-dobra visível-invisível; (b) dobra-dobra visível-visível; (c) dobra-dobra invisível-invisível; (d) região de costura.	81
4.2	Pontos de dobra-sela e seus desdobramentos.	83
4.3	Pontos de dobra-nó e seus desdobramentos.	83
4.4	Pontos de dobra-foco e seus desdobramentos.	84

4.5	Dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica e seus desdobramentos, com $\beta < 0$	85
4.6	Pontos de cups-cusp e seus desdobramentos.	86
4.7	(a) Conexão entre dobras-dobras distintas; (b) conexão sela-dobra; (c) Conexão entre duas selas distintas; (d) loop de sela.	90
4.8	Poli-trajetórias fechadas do tipo III.	91
4.9	Função distância para poli-trajetórias fechadas do tipo III.	91
4.10	(a) Órbita periódica tangente à Σ ; (b) poli-trajetória fechada do tipo III conectando separatrizes estáveis e instáveis de uma mesma dobra.	92
4.11	Aplicação de primeiro retorno.	93
4.12	Vizinhança $\mathcal{V}_T$ do Lema 4.33 (Lema 4.34, respectivamente) em (a) ((b), respectivamente).	103
5.1	Extensão de h para campo de vetores que apresenta conexão de separatrizes.	119
6.1	Retrato de fase de (6.12) para $a = 0$ (esquerda) e $a > 0$ (direita).	137
7.1	Comportamento das curvas de nível de $Y \in \mathfrak{X}_1$, com relação a admissibilidade dos pontos de equilíbrio.	161
7.2	Possíveis comportamentos das trajetórias de $Y \in \mathfrak{X}_1$	162
7.3	Possíveis comportamentos das trajetórias de $Y \in \mathfrak{X}_1$ (continuação).	163

Sumário

Sumário	17
1 Introdução	21
2 Resultados preliminares	27
2.1 Campos de vetores suaves	27
2.1.1 Teorema Clássico de Peixoto no plano	29
2.1.2 Teorema Clássico de Peixoto em variedades bidimensionais	30
2.1.3 Espaço de campos de codimensão-1 em variedades bidimensionais sem bordo	31
2.1.4 Espaço de campos de codimensão-1 em variedades bidimensionais com bordo	32
2.2 Campos de vetores suaves por partes	32
2.3 Integrabilidade	42
2.4 Reversibilidade	44
2.5 Análise local a partir de cartas locais	44
3 Análise de elementos de codimensão-1 e de órbitas não trivialmente recorrentes	49
3.1 Introdução	49
3.2 Análise de elementos de codimensão-1	51
3.2.1 Σ -singularidades quase-elementares e colisão de pontos de equilíbrio hiperbólicos com a descontinuidade Σ	51
3.2.2 Poli-trajetória fechada semi-hiperbólica e trajetória fechada tan- gente à descontinuidade Σ	56
3.2.3 Conexão de separatrizes quase-genéricas	66
3.3 Recorrência não trivial	70
4 Campos de vetores suaves por partes refrativos parcialmente integráveis	77
4.1 Introdução	77

4.2	Resultados preliminares	78
4.2.1	Algumas considerações sobre campos de vetores suaves por partes refrativos	79
4.3	Análise local	81
4.3.1	Condições de estabilidade estrutural local para campos de vetores refrativos	81
4.3.2	Análise local de elementos de codimensão-1 para campos de vetores refrativos	82
4.3.3	Conexões de separatrizes e poli-trajetórias	89
4.4	Espaço de campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$	95
4.5	Espaço de campos de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$	100
4.6	Estabilidade estrutural em $\mathfrak{R}$	106
5	Campos de vetores suaves por partes parcialmente integráveis	111
5.1	Introdução	111
5.2	Espaço de campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$	112
5.3	Espaço de campos de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$	116
6	Centros e ciclicidade para campos suaves definidos em esferas	123
6.1	Introdução	123
6.2	Preliminares	126
6.2.1	Introduzindo o problema	126
6.2.2	Constantes de Lyapunov e ciclicidade local	128
6.3	Centros para campos lineares e quadráticos homogêneos	132
6.3.1	Caso linear	133
6.3.2	Caso quadrático homogêneo	134
6.4	Centros e ciclicidade para campos de vetores quadráticos	138
6.4.1	Caracterização de centros	139
6.4.2	Bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude	145
6.4.3	Ciclicidade em campos de vetores complexos	147
7	Centros e ciclicidade para campos suaves por partes definidos em esferas	153
7.1	Introdução	153
7.2	Preliminares	155
7.2.1	Mudança de coordenadas ortogonais e projeção estereográfica.	155
7.2.2	Constantes de Lyapunov e ciclicidade local para campos de vetores planares suaves por partes	156
7.3	Campos de vetores lineares com superfícies invariantes	158
7.3.1	Campos de vetores suave por partes lineares com esferas invariantes	158
7.3.2	Campos de vetores lineares com outras superfícies invariantes	167

7.4	Campos de vetores suaves por partes quadráticos homogêneos e contínuos .	170
7.5	Ciclicidade local para campos de vetores quadráticos em $\mathcal{X}_2$	174
8	Conclusões e trabalhos futuros	179
	Referências	181

1 Introdução

Equações diferenciais e sistemas dinâmicos podem ser utilizados para modelar fenômenos naturais e podemos obter informações sobre isso através das soluções desses sistemas. Uma ferramenta interessante para entender o comportamento das soluções de um sistema dinâmico é a existência de *integrais primeiras*, pois quando existem as trajetórias do campo vetorial permanecem restritas às superfícies de nível dessas funções. Quando trabalhamos com um sistema n -dimensional, dizemos que ele é completamente integrável quando tem $n - 1$ integrais primeiras independentes e as órbitas de um sistema completamente integrável são obtidas apenas intersectando os conjuntos de nível das integrais primeiras. Outros conceitos importantes no entendimento do comportamento das soluções de um sistema diferencial e na classificação de retratos de fase de campos de vetores suaves são os de equivalência topológica (ver Definição 2.1) e estabilidade estrutural (ver Definição 2.3), que buscam responder sob quais hipóteses campos de vetores tem o mesmo comportamento. Nesse sentido, os Teoremas de Peixoto [42, 43] classificam os campos de vetores estruturalmente estáveis em regiões planares e variedades bidimensionais. Além disso, em [47, 51] foram exibidas classificações dos campos de vetores de codimensão-1 definidos em variedades bidimensionais sem e com bordo, respectivamente. Mais detalhes podem ser vistos na Seção 2.1.

Em 1880s o conceito de *ciclo limite* (i.e. órbita periódica isolada) foi introduzido por H. Poincaré e o problema em aberto mais importante relacionado a esse tema foi apresentado por D. Hilbert, em 1900, no *International Congress of Mathematicians - ICM*, em Paris. A segunda parte do décimo sexto problema de Hilbert busca uma estimativa para o número máximo de ciclos limite que um campo vetorial polinomial planar pode ter. Para mais detalhes, indicamos [30].

Nos últimos anos, o comportamento de sistemas dinâmicos suaves por partes também tem sido estudado e uma formulação rigorosa do problema foi dada por Filippov, em [21]. Esta teoria é muito importante em aplicações físicas e biológicas, veja [16] por exemplo.

Nesse sentido, consideramos

$$Y(x, y, z) = \begin{cases} X^+(x, y, z), & z \geq 0, \\ X^-(x, y, z), & z \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

um campo de vetores suave por partes 3-dimensional com região de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z); z = 0\}$. Assumimos que Y pode ser multivaluado em Σ e seguimos as convenções de Filippov nas regiões de escape e deslize. As definições precisas podem ser vistas na Seção 2.2.

No caso suave por partes, assim como no caso suave, a integrabilidade dos campos de vetores $X^\pm$ é uma ferramenta importante para entender o comportamento das trajetórias de $Y = (X^+, X^-)$, na classificação de retratos de fase e também para responder a questões relacionadas com a existência de ciclos limite costurantes (órbita periódica de costura isolada). Veja [39] para mais detalhes.

Outro conceito importante na classificação de retratos de fase de campos de vetores suaves por partes é a Σ -equivalência. Dizemos que dois campos de vetores suaves por partes $Y = (X^+, X^-)$ e $\tilde{Y} = (\tilde{X}^+, \tilde{X}^-)$ são Σ -equivalentes se existe um homeomorfismo h que leva órbitas de Y em órbitas de $\tilde{Y}$ preservando a orientação das órbitas e tal que $h(\Sigma) = \Sigma$. Para mais detalhes, veja Seção 2.2. Nesse sentido, podemos encontrar uma caracterização local dos elementos estruturalmente estáveis e de codimensão-1, para sistemas suaves por partes planares, em [28, 34], por exemplo.

Denotamos por $\mathcal{X}$ a classe dos campos de vetores suaves $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que admitem $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ como integral primeira, munido da topologia C^r . Isso significa que todas as esferas centradas na origem e com raio ρ , $\mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$, são invariantes pelo fluxo de X . Denotamos por $\mathcal{X}_n$ quando as componentes de $X \in \mathcal{X}$ são polinômios de grau n . Também consideramos a classe de campos de vetores suaves por partes dada por (1.1) tais que $X^+, X^- \in \mathcal{X}$. Denotamos esta classe por $\mathfrak{X}$ e por $\mathfrak{X}_n$ quando $X^+, X^- \in \mathcal{X}_n$. Portanto se $Y \in \mathfrak{X}$, então qualquer esfera centrada na origem é invariante pelo fluxo do sistema suave por partes Y . Munimos a classe $\mathfrak{X}$ com a topologia produto de classe C^r , como usual.

Também consideramos o caso em que $Y \in \mathfrak{X}$ é *refrativo*, veja Definição 4.6. Em suma, significa que a primeira derivada de Lie de $f(x, y, z) = z$ nas direções de X e de Y em $p = (x, y, 0) \in \Sigma$ coincidem, conforme definido com mais detalhes na Seção 4.2. A principal motivação para estudar este caso reside em aspectos da Teoria do Controle onde enfatizamos o notável trabalho de I. Ekeland em [19], no qual o principal problema no cálculo clássico de variações foi estudado. Denotamos por $\mathfrak{R}$ o espaço de todos os campos de vetores refrativos $Y = (X^+, X^-)$ em $\mathfrak{X}$ e munimos $\mathfrak{R}$ com a topologia induzida da topologia produto de classe C^r . Para $\lambda > 0$, suficientemente pequeno, consideramos o conjunto $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$ formado por todos os campos de vetores suaves por partes refrativos definidos em $\mathbb{S}_\lambda^2$ tendo $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}_\lambda^2; z = 0\}$ como região de descontinuidade. Note que se $Z \in \mathfrak{R}$, então para cada $\lambda > 0$ a restrição $Z|_{\mathbb{S}_\lambda^2} \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$.

Nossos principais objetivos são:

1. Estudar o problema de estabilidade estrutural e bifurcações de codimensão-1 na classe

$\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Utilizar os resultados obtidos para estudar, localmente, o problema de estabilidade estrutural na classe $\mathfrak{R}$.

2. Estudar o problema de estabilidade estrutural e bifurcações de codimensão-1 na classe $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$.
3. Estudar o problema de centro foco e ciclicidade na classe $\mathcal{X}_n$, $n = 1, 2$.
4. Estudar o problema de centro foco e ciclicidade na classe $\mathfrak{X}_n$, $n = 1, 2$.

A seguir, descrevemos os resultados obtidos. Os enunciados, detalhados, estão no corpo do texto.

No que diz respeito ao primeiro objetivo, buscamos caracterizar os conjuntos $\Sigma_0^{S_\lambda}$ e $\Sigma_1^{S_\lambda}$ dos campos estruturalmente estáveis e de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$ e também buscamos caracterizar um subconjunto $\Sigma_0 \subset \mathfrak{R}$ tendo uma descrição simples e compreensiva de modo que se $Z \in \mathfrak{R}$ é localmente estruturalmente estável, então $Z \in \Sigma_0$. Estabelecemos esse resultado no Teorema 4.1, na Seção 4.6. O Teorema 4.1 não é de caráter global em $\mathbb{R}^3$ mas no desenvolvimento de sua prova precisaremos estabelecer alguns resultados globais envolvendo estabilidade estrutural e bifurcações genéricas de campos de vetores suaves por partes refrativos definidos em uma esfera bidimensional $\mathbb{S}_\lambda^2$, com $\lambda > 0$ finito. Na verdade, lidamos com um campo de vetores suave por partes refrativo tridimensional definido em um conjunto folheado por esferas bidimensionais.

Os seguintes passos devem ser levados em consideração para obtermos o Teorema 4.1. Primeiramente, analisamos os aspectos locais da estabilidade estrutural e das bifurcações de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, nas Seções 4.3.1 e 4.3.2. Depois disso, estudamos os aspectos globais em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, nas Seções 4.4 e 4.5, provando os Teoremas 4.2 e 4.3, que são descritos a seguir. O Teorema 4.2 é uma versão do Teorema de Peixoto sobre $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. O resultado clássico pode ser encontrado em [43], e o Teorema 4.3 é inspirado nos resultados sobre bifurcações genéricas de campos de vetores suaves definidos em variedades bidimensionais, que podem ser encontrados em [47, 51]. Observamos que sistemas refrativos são estruturalmente instáveis no contexto geral de sistemas suaves por partes. Os resultados comentados são baseados em [8].

No que diz respeito ao segundo objetivo, estudamos os conjuntos $\Xi_0^{S_\lambda}$ e $\Xi_1^{S_\lambda}$ dos campos estruturalmente estáveis e de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Os resultados obtidos são detalhados nos Capítulos 3 e 5. A abordagem é semelhante à do objetivo anterior.

No que diz respeito ao terceiro objetivo. Seja $X \in \mathcal{X}_1$ um campo de vetores linear. Logo $\langle x, X(x) \rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e, portanto, X é homogêneo e pode ser escrito na forma

$$X(x; a_1, a_2, a_3) = (-a_1y - a_2z, a_1x - a_3z, a_2x + a_3y), \quad (1.2)$$

com $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. No Capítulo 6 demos uma classificação qualitativa dos pontos de equilíbrio de (1.2), provando que se $p \in \mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$ é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (1.2) em $\mathbb{S}_\rho^2$, então p é um centro. Além disso, o sistema é completamente integrável.

Inspirados pela homogeneidade dos campos de vetores $X \in \mathcal{X}_1$ estudamos e classificamos os pontos de equilíbrio do tipo centro na classe dos campos de vetores quadráticos homogêneos $X \in \mathcal{X}_2^H$. Na Seção 6.3 veremos que o comportamento dos campos lineares e quadráticos homogêneos é o mesmo em todas as esferas invariantes. Essa propriedade não é válida para campos quadráticos não homogêneos. Nesse caso, pela dificuldade do problema, faremos o estudo restrito a esfera unitária $\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, exibindo algumas famílias de centros para campos de vetores $X \in \mathcal{X}_2$ na esfera $\mathbb{S}_1^2$.

Finalmente, analisamos a ciclicidade local das famílias de centros obtidas para $X \in \mathcal{X}_2$ e também de focos-fracos, estudando bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude a partir de um foco-fraco ou de um centro em $\mathbb{S}_1^2$. Nesse sentido, exibimos um sistema quadrático para o qual existem 4 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando do ponto $(0, 1, 0)$, na esfera $\mathbb{S}_1^2$ (no Teorema 6.4). Essa foi a melhor cota obtida. Os resultados comentados são baseados em [10].

No que diz respeito ao quarto objetivo, consideramos, primeiramente, $X \in \mathcal{X}_1$. Como vimos, X é dado por (1.2). Assim, $Y = (X^+, X^-) \in \mathfrak{X}_1$ é um campo de vetores suave por partes 3-dimensional da forma

$$Y(x, y, z) = \begin{cases} X^+(x; a_1^+, a_2^+, a_3^+), & z \geq 0, \\ X^-(x; a_1^-, a_2^-, a_3^-), & z \leq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

com

$$X^\pm(x; a_1^\pm, a_2^\pm, a_3^\pm) = (-a_1^\pm y - a_2^\pm z, a_1^\pm x - a_3^\pm z, a_2^\pm x + a_3^\pm y).$$

No Teorema 7.1 provamos que nenhum campo de vetores suave por partes $Y \in \mathfrak{X}_1$, dado por (1.3) admite ciclos limite na esfera $\mathbb{S}_\rho^2$.

Inspirados pela propriedade de homogeneidade dos campos de vetores lineares em $\mathfrak{X}$, estudamos e fornecemos algumas famílias de centros para os campos de vetores suave por partes homogêneos que sejam contínuos em Σ . Essas famílias são exibidas na Seção 7.4.

Finalmente, também analisamos a ciclicidade local de pontos de equilíbrio do tipo centro em $\mathfrak{X}_2$. Além disso, estudamos bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude a partir de centros e de um foco-fraco, em $\mathbb{S}_1^2$, com perturbações suaves por partes em $\mathfrak{X}_2$. No Teorema 7.2 mostramos que existe ao menos 10 ciclos limite costurantes hiperbólicos na família quadrática $\mathfrak{X}_2$ em $\mathbb{S}_1^2$. Esse foi o maior número de ciclos limite em torno de um ponto de equilíbrio monodrômico na família quadrática $\mathfrak{X}_2$ que encontramos. Os resultados obtidos são baseados em [9].

O Capítulo 8 é dedicado às conclusões e trabalhos futuros.

Os cálculos apresentados neste trabalho foram realizados utilizando o sistema algébrico computacional *Maple*, versão 2018, [40].

2 Resultados preliminares

Neste capítulo apresentamos uma breve recapitulação de alguns dos principais resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias e de sistemas suaves por partes que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Este capítulo é organizado da seguinte maneira. Primeiramente, recordamos a definição de campo de vetores planar e as definições de equivalência e conjugação, na Seção 2.1. Posteriormente, enunciamos o Teorema Clássico de Peixoto e os resultados de Sotomayor e Teixeira sobre bifurcações genéricas em variedades bidimensionais sem bordo e com bordo, respectivamente. Na Seção 2.2 definimos sistema suave por partes e também falamos sobre estabilidade estrutural local e bifurcações de baixa dimensão. Na Seção 2.3 recordamos os conceitos de integrabilidade e na Seção 2.4 o de reversibilidade para campos de vetores suaves e suaves por partes. Por fim, na Seção 2.5, veremos como utilizamos coordenadas locais para trabalhar com campos de vetores definidos em esferas bidimensionais.

No decorrer deste capítulo recordamos alguns resultados já conhecidos de campos de vetores suaves e suaves por partes. Dessa forma, ainda não impusemos que estamos trabalhando nas classes $\mathcal{X}$, $\mathfrak{X}$ ou $\mathfrak{R}$, definidas na Introdução. Por isso, para que não haja confusão com a notação pre-estabelecida, ao longo deste capítulo denotamos por $\Omega^r(M^m)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r definidos em M^m , onde M^m é uma variedade m -dimensional orientável e por $\Omega^r(M^m, f)$ o conjunto dos campos de vetores suaves por partes definidos em M^m e com região de descontinuidade $\Sigma = f^{-1}(0)$.

2.1 Campos de vetores suaves

Seja $U \subset M^m$, aberto, onde M^m é uma variedade m -dimensional e $x \in U$. Um campo de vetores de classe C^r , $r \geq 1$, definido em $U \subset M^m$ é uma aplicação $P : U \rightarrow TM^m$, onde $P(x) = (P_1(x), \dots, P_m(x))$ é de classe C^r . Associado ao campo de vetores P temos um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{x} = P(x), \tag{2.1}$$

onde o ponto indica a derivada de x com relação a variável t e as soluções do sistema (2.1) são curvas diferenciáveis $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ que satisfazem

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = P(\phi(t)).$$

Seja I_x o intervalo maximal da solução ϕ . O conjunto $\{\phi(t), t \in I_x\}$ é chamado de *órbita ou trajetória* de P . Denotamos por $\Omega = \{(t, x); t \in I_x \text{ e } x \in M^m\}$. Então Ω é aberto em $I_x \times M^m$. O *fluxo* de P , $\phi : \Omega \rightarrow M^m$, é definido por $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ e é de classe C^r , para mais detalhes, ver [48].

Dizemos que x é um *ponto de equilíbrio (ou ponto crítico)* de (2.1) quando $P(x) = 0$. Caso contrário x é chamado de *ponto regular*. Além disso, x é um *ponto de equilíbrio hiperbólico* de (2.1) quando todos os autovalores da matriz jacobiana de P em x , $DP(x)$, tem parte real não nula. Dizemos que uma órbita é periódica se existe $T > 0$ tal que $\phi_x(t + T) = \phi_x(t)$ para todo $t \in I_x$, onde I_x denota o intervalo maximal da solução ϕ . O menor $T > 0$ que satisfaz $\phi_x(t + T) = \phi_x(t)$ é o período da órbita. Um *ciclo limite* é uma órbita periódica isolada. Seja γ uma trajetória fechada de P passando por $p \in U$ e S uma *seção transversal* em p . Assim, γ é dita hiperbólica quando a *aplicação de primeiro retorno de Poincaré* definida em S tem ponto de equilíbrio hiperbólico. Para mais detalhes, ver [48].

Uma separatriz (genérica) de P é um arco de trajetória de P cujo conjunto α -limite ou ω -limite é um ponto de sela ou uma trajetória que passa por uma tangência (no caso de M^m ser uma variedade com bordo) visível de P com ∂M^m . Além disso, conexões entre separatrizes de selas hiperbólicas ou tangências quadráticas distintas, conexões entre sela hiperbólica e tangência quadrática ou loop simples (loop de uma sela $p \notin \partial M^m$ tal que $\text{tr}(DP, p) \neq 0$, onde $\text{tr}(DP, p)$ denota o traço da matriz jacobiana de P calculada no ponto p , e que não tangencie ∂M^m) serão chamados de *conexões quase genéricas*.

Definições e resultados importantes como os teoremas de Existência e Unicidade de soluções, do Fluxo Tubular e de Poincaré–Bendixson, por exemplo, podem ser encontrados em [18, 48], por exemplo. A seguir, recordamos as definições de equivalência topológica e conjugação.

Definição 2.1. Sejam P_1 e P_2 campos definidos nos abertos U_1 e U_2 de M^m , respectivamente. Dizemos que P_1 e P_2 são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$ levando órbitas de P_1 em órbitas de P_2 , preservando a orientação do tempo. O homeomorfismo h é chamado de *equivalência topológica*. Quando h é um difeomorfismo de classe C^r , dizemos que P_1 e P_2 são C^r -equivalentes. Em outras palavras, se $p \in U_1$ e $\gamma(x)$ é a órbita orientada de P_1 que passa por x , temos $h(\gamma(x)) = \alpha(h(x))$, onde α é a órbita orientada de P_2 que passa por $h(x)$.

Além da equivalência topológica, temos a definição de conjugação topológica.

Definição 2.2. Sejam $\phi_1 : \Omega_1 \rightarrow M^m$ e $\phi_2 : \Omega_2 \rightarrow M^m$ os fluxos associados aos campos de vetores P_1 e P_2 , respectivamente. Dizemos que P_1 e P_2 são *topologicamente conjugados* se existe um homeomorfismo $h : M^m \rightarrow M^m$ tal que $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$, para todo $(t, x) \in \Omega_1$. O homeomorfismo h é dito uma conjugação topológica entre P_1 e P_2 . Se h for um difeomorfismo de classe C^r , dizemos que P_1 e P_2 são C^r -conjugados e, neste caso, h é dito uma C^r -conjugação entre P_1 e P_2 .

Note que, uma equivalência h leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Além disso, se h for uma conjugação, o período das órbitas periódicas é preservado. Assim, toda conjugação é uma equivalência, mas o contrário não é válido.

Denotamos por $\Omega^r(M^m)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r definidos em M^m munido da norma C^r . A seguir, recordamos as definições de estabilidade estrutural e estabilidade estrutural local.

Definição 2.3. Dizemos que $P \in \Omega^r(M^m)$ é estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \Omega^r(M^m)$, de P , de modo que todo $Q \in \mathcal{B}$ é topologicamente equivalente a P .

Definição 2.4. Dizemos que $P \in \Omega^r(M^m)$ é localmente estruturalmente estável se para todo $p \in M$ existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \Omega^r(M^m)$, de P , e uma vizinhança $V_p \subset M^m$, de p , de modo que todo $Q \in \mathcal{B}$ é topologicamente equivalente a P em V_p .

Note que se P é estruturalmente estável, então P é localmente estruturalmente estável, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, se P admite uma conexão entre duas selas hiperbólicas, então P é localmente estruturalmente estável mas não é estruturalmente estável. Além disso, as definições de estabilidade estrutural exigem equivalência topológica ao invés de conjugação topológica, pois exigir conjugação diminuiria consideravelmente o conjunto dos campos estruturalmente estáveis. Exigir conjugação topológica implicaria que o período das órbitas fechadas correspondentes deveria ser o mesmo, por exemplo. Também por restringir demais o conjunto de campos estruturalmente estáveis, não é pedido que a equivalência topológica seja um difeomorfismo nas Definições 2.3 e 2.4.

2.1.1 Teorema Clássico de Peixoto no plano

Nesta seção relembremos a versão planar do Teorema Clássico de Peixoto, introduzido em [42], que caracteriza os campos de vetores estruturalmente estáveis definidos em uma região $M \subset \mathbb{R}^2$ compacta, conexa e com bordo suave tal que

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \beta(x, y) \geq 0\} \text{ e } \partial M = \beta^{-1}(0), \quad (2.2)$$

onde $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r e 0 é valor regular de β .

Definição 2.5. Chamamos de $\Sigma^r(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores $P \in \Omega^r(M)$ que satisfazem as seguintes condições:

- (i) $\Sigma^r(1)$: todos os pontos de equilíbrio de P são hiperbólicos e estão no interior de M ;
- (ii) $\Sigma^r(2)$: todas as órbitas periódicas de P são hiperbólicas e estão contidas no interior de M ;
- (iii) $\Sigma^r(3)$: qualquer tangência entre uma trajetória de P e ∂M é quadrática;
- (iv) $\Sigma^r(4)$: P não admite conexões de separatrizes de selas, de tangências, nem de sela com tangência.

Teorema 2.6. [42][Teorema de Peixoto em regiões planares]

- (i) $P \in \Omega^r(M)$ é estruturalmente estável em M se, e somente se, $P \in \Sigma^r(M)$, para todo $r \geq 1$.
- (ii) $\Sigma^r(M)$ é aberto e denso em $\Omega^r(M)$, para todo $r \geq 1$.

A demonstração e mais detalhes podem ser encontrados em [42].

2.1.2 Teorema Clássico de Peixoto em variedades bidimensionais

Em [43] foi provado uma versão do Teorema de Peixoto para variedades bi-dimensionais, como segue. Considere M^2 uma variedade bidimensional compacta, conexa e sem bordo.

Definição 2.7. Chamamos de $\Sigma^r(M^2)$ o conjunto de todos os campos de vetores $P \in \Omega^r(M^2)$ que satisfazem as seguintes condições:

- (i) P tem um número finito de pontos de equilíbrio hiperbólicos;
- (ii) os conjuntos α e ω limites de P são triviais;
- (iii) P não admite conexões de separatrizes;
- (iv) P tem um número finito de órbitas periódicas hiperbólicas.

Teorema 2.8. [43][Teorema de Peixoto em variedades bidimensionais]

- (i) $P \in \Omega^r(M^2)$ é estruturalmente estável em $\Omega^r(M^2)$ se, e somente se, $P \in \Sigma^r(M^2)$, para todo $r \geq 1$.
- (ii) $\Sigma^r(M^2)$ é aberto e denso em $\Omega^r(M^2)$, para todo $r \geq 1$.

Estabelecidas as condições sobre estabilidade estrutural de campos de vetores suaves. Sotomayor em [47] e Teixeira em [51] caracterizaram o espaço de bifurcações genéricas em variedades bidimensionais sem bordo e com bordo, respectivamente. A ideia é violar minimamente cada uma das condições de estabilidade estrutural e, quando necessário, impor condições quase-genéricas para a caracterização desses conjuntos, como veremos a seguir.

2.1.3 Espaço de campos de codimensão-1 em variedades bidimensionais sem bordo

Seja M^2 uma variedade bidimensional, compacta e sem bordo. Como anteriormente, denotamos por $\Omega^r(M^2)$ o espaço de campos de vetores definidos em M^2 munido da topologia C^r e $\Sigma^r(M^2)$ como na Definição 2.7. Seja $\Omega_1^r(M^2) = \Omega^r(M^2) \setminus \Sigma^r(M^2)$.

Dado $P \in \Omega_1^r$, seja $\mathcal{B}$ uma vizinhança de P em $\Omega_1^r(M^2)$, na topologia induzida e seja $C(\mathcal{B}, P)$ a componente conexa de $\mathcal{B}$ que contém P . Chamamos de *topologia intrínseca* de $\Omega_1^r(M^2)$ a topologia na qual os conjuntos $C(\mathcal{B}, P)$ sejam os abertos fundamentais. E consideramos $\Omega_1^r(M^2)$ munido ora com a topologia intrínseca, ora com a topologia induzida. Sempre indicaremos quando utilizarmos a topologia intrínseca. O próximo teorema descreve a subvariedade $\Sigma_1^r(M^2) \subset \Omega_1^r(M^2)$ dos campos de vetores de codimensão-1 de maneira simples, isto é, violando minimamente cada uma das condições dadas no Teorema 2.8.

Teorema 2.9. [47] *Existe uma subvariedade $\Sigma_1^r(M^2) \subset \Omega_1^r(M^2)$ de codimensão-1 e classe C^{r-1} satisfazendo:*

- (i) $\Sigma_1^r(M^2)$ tem uma descrição simples;
- (ii) $\Sigma_1^r(M^2)$ é denso em $\Omega_1^r(M^2)$;
- (iii) dado $P \in \Sigma_1^r(M^2)$, existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \Sigma_1^r(M^2)$ de P , munido da topologia intrínseca, tal que todo Q em $\mathcal{B}$ é topologicamente equivalente a P .

Como dito anteriormente, descrever $\Sigma_1^r(M^2)$ de maneira simples consiste em violar minimamente cada uma das condições dadas no Teorema 2.8. Nesse caso, como M^2 não tem bordo, isso significa, a grosso modo, que $P \in \Sigma_1^r(M^2)$ pode ter um único ponto de equilíbrio semi-estável, ou uma única órbita periódica semi-estável ou uma única conexão de separatrizes quase-genérica. Mais detalhes podem ser vistos em [47]. Ressaltamos que o uso da topologia intrínseca se faz necessário, para termos estabilidade estrutural em $\Sigma_1^r(M^2) \subset \Omega_1^r(M^2)$, visto que, quando uma órbita semi-estável Γ é simultaneamente α e ω -limite de separatrizes de selas s_1 e s_2 , o rompimento de Γ pode criar uma conexão entre as separatrizes instáveis e estáveis dessas selas. Falaremos disso com mais detalhes no Capítulo 3. Assim, a ressalva quanto a topologia utilizada em $\Omega_1^r(M^2)$ é bastante

importante pois, por ser mais fina (isto é, ter mais abertos), a topologia intrínseca é capaz de separar as vizinhanças onde pode ocorrer acumulação de elementos de codimensão-1, o que não ocorre com a topologia induzida.

2.1.4 Espaço de campos de codimensão-1 em variedades bidimensionais com bordo

Seja N^2 uma variedade bidimensional compacta e com bordo suave. Como anteriormente, denotamos por $\Omega^r(N^2)$ o espaço de campos de vetores definidos em N^2 e munido da topologia C^r . Novamente, denotamos por $\Omega_1^r(N^2) = \Omega^r(N^2) \setminus \Sigma^r(N^2)$.

Teorema 2.10. [51] *Existe uma subvariedade $\Sigma_1^r(N^2) \subset \Omega_1^r(N^2)$ de codimensão-1 e classe C^{r-1} satisfazendo:*

- (i) $\Sigma_1^r(N^2)$ tem uma descrição simples;
- (ii) $\Sigma_1^r(N^2)$ é denso em $\Omega_1^r(N^2)$;
- (iii) dado $P \in \Sigma_1^r(N^2)$, existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \Sigma_1^r(N^2)$ de P , munido da topologia intrínseca, tal que todo Q em $\mathcal{B}$ é topologicamente equivalente a P .

Como na seção anterior, descrever $\Sigma_1^r(N^2)$ de maneira simples consiste em violar minimamente cada uma das condições dadas no Teorema 2.8. Nesse caso, como N^2 tem bordo suave, isso significa, a grosso modo, que $P \in \Sigma_1^r(N^2)$ pode ter um único ponto de equilíbrio semi-estável, ou uma única órbita periódica semi-estável ou uma única conexão de separatrizes quase-genérica ou uma tangência cúbica de uma trajetória de P com o bordo ∂N^2 de N^2 , ou uma única órbita periódica estável que tangencia o bordo ∂N^2 de N^2 . Mais detalhes podem ser vistos em [51].

2.2 Campos de vetores suaves por partes

Nesta seção recordamos as definições de campos de vetores suaves por partes, seguindo as convenções de Filippov, introduzidas em [21].

Considere M^m uma variedade m -dimensional, orientável, compacta e sem bordo e $x \in M^m$. Sejam $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r e 0 um valor regular de f . Dessa forma, $\Sigma = f^{-1}(0) = \{x \in M^m; f(x) = 0\}$ é uma subvariedade mergulhada em M^m de codimensão-1. Chamamos de $\Sigma^+ = f^{-1}([0, +\infty))$, $\Sigma^- = f^{-1}((-\infty, 0])$ e definimos o campo de vetores suaves por partes com descontinuidade Σ por

$$Y(x) = \begin{cases} X^+(x), & x \in \Sigma^+, \\ X^-(x), & x \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $X^\pm$ são campos de vetores de classe C^r definidos em $\Sigma^\pm$. Chamamos de $\Omega^r(M^m, f)$ o espaço de campos definidos por (2.3). Dessa forma, podemos considerar $\Omega^r(M^m, f) = \Omega^r(M^m) \times \Omega^r(M^m)$, munido da topologia produto.

Os pontos de equilíbrio de X^+ e X^- situados em Σ^+ e Σ^- , respectivamente, são chamados de *pontos de equilíbrio (ou pontos críticos) admissíveis* ou, simplesmente, *pontos de equilíbrio* de (2.3). Por outro lado, os pontos de equilíbrio de X^+ e X^- situados em Σ^- e Σ^+ , respectivamente, são chamados de *pontos de equilíbrio não-admissíveis* de (2.3).

A derivada de Lie de f na direção de $X^\pm$ no ponto $p \in \Sigma$ é definida por

$$X^\pm f(p) = X^\pm(p) \cdot \nabla f(p),$$

onde ∇f denota o vetor gradiente de f . As derivadas de Lie de ordem superior são definidas, sucessivamente, por

$$(X^\pm)^n f(p) = X^\pm(p) \cdot \nabla (X^\pm)^{n-1} f(p), \quad n \geq 2.$$

Dizemos que Y é refrativo (em Σ) quando $X^+f(p) = X^-f(p)$ para todo $p \in \Sigma$. Campos refrativos foram estudados em [19, 52], por exemplo, e serão abordados no Capítulo 4.

No que segue, recordamos as definições de pontos de tangência e conjuntos de tangências de (2.3). Dizemos que p é uma *dobra (ou tangência quadrática)* de (2.3) se $X^+(p) \neq 0, X^-(p) \neq 0, X^+f(p) = 0, (X^+)^2f(p) \neq 0$ e $X^-f(p) \neq 0$ (ou $X^-f(p) = 0, (X^-)^2f(p) \neq 0$ e $X^+f(p) \neq 0$), isto é, se um dos campos de vetores $X^\pm$ tangencia Σ em p enquanto o outro campo de vetores é transversal a Σ em p . De forma recursiva, dizemos que $p \in \Sigma$ é uma tangência de ordem n de (2.3) se $X^+(p) \neq 0, X^-(p) \neq 0, X^+f(p) = 0, \dots, (X^+)^{n-1}f(p) = 0, (X^+)^nf(p) \neq 0$, para $n \geq 2$ e $X^-f(p) \neq 0$ (ou $X^-f(p) = 0, \dots, (X^-)^{n-1}f(p) = 0, (X^-)^nf(p) \neq 0$, para $n \geq 2$, e $X^+f(p) \neq 0$).

Dizemos que p é uma *dobra-dobra* quando $X^+(p) \neq 0, X^-(p) \neq 0, X^+f(p) = 0, X^-f(p) = 0, (X^+)^2f(p) \neq 0$ e $(X^-)^2f(p) \neq 0$. De modo análogo, podemos definir tangência dupla de ordem superior.

O conjunto de tangência de $X^\pm$ com Σ é definido por $S_{X^\pm} = \{p \in \Sigma; X^\pm f(p) = 0\}$ e o conjunto de tangência de (2.3) com Σ por $S_Y = S_{X^+} \cup S_{X^-}$.

Seguindo as terminologias de Filippov, consideramos em Σ as seguintes regiões:

- Região de costura: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma; X^+f(p)X^-f(p) > 0\}$,
- Região de deslize: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma; X^+f(p) < 0, X^-f(p) > 0\}$,
- Região de escape: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma; X^+f(p) > 0, X^-f(p) < 0\}$.

Definimos o *campo de vetores deslizante (ou de Filippov)* $F_Y(p)$, de (2.3), em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$ por

$$F_Y(p) = \frac{1}{X^-f(p) - X^+f(p)} \left(X^-f(p)X^+(p) - X^+f(p)X^-(p) \right). \quad (2.4)$$

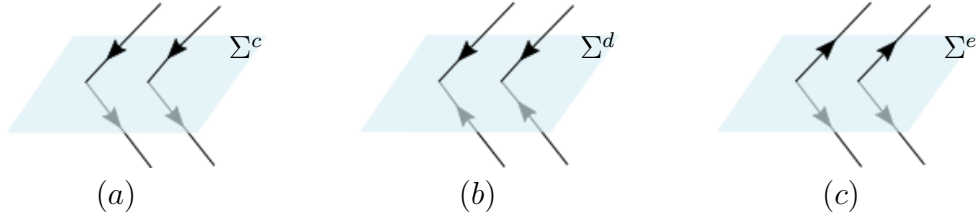


Figura 2.1: Regiões de costura (a), deslize (b) e escape (c) para campo de vetores suaves por partes tridimensionais.

Note que Σ é a união disjunta de $\Sigma^c \cup \Sigma^s \cup \Sigma^e \cup S_Y$. Além disso, se $p \in \Sigma^c$ ambos $X^\pm(p)$ apontam na mesma direção em p e a órbita de (2.3) é dada pela concatenação das órbitas de X^+ e de X^- em p (seguindo orientação adequada dos fluxos de X^+ e X^-). Por outro lado, quando $p \in \Sigma \setminus \Sigma^c$ o fluxo de (2.3) pode ser multivaluado e qualquer possível trajetória de X^+ , X^- ou F_Y passando por p (seguindo orientação adequada dos fluxos de X^+ , X^- e F_Y) é considerada como uma órbita de Y por p .

Assim como para campos de vetores suaves, dizemos que um ponto $p \in \Sigma$ é *regular* do campo (2.3) se $p \in \Sigma^c$ ou se $p \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$ e $F_Y(p) \neq 0$. Quando $p \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$ e $F_Y(p) = 0$, dizemos que p é um *ponto de equilíbrio do campo de Filippov* (2.4). Note que, $p \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$ é um ponto de equilíbrio de (2.4) se, e somente se, $X^+(p)$ e $X^-(p)$ são paralelos. Dizemos que p é um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo de Filippov quando p é um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo de vetores $(m-1)$ -dimensional (2.4).

Definição 2.11. Uma curva γ composta por arcos regulares de trajetórias de X^+ em Σ^+ ou X^- em Σ^- ou de F_Y em Σ é uma *poli-trajetória* de $Y = (X^+, X^-)$ se γ contém arcos de pelo menos dois entre os campos X^+ , X^- ou F_Y ou é composta por arcos de F_Y , respeitando-se o sentido do tempo nos arcos de trajetória.

Observação 2.12. O que chamamos de poli-trajetórias também recebe o nome, em outros textos, de *órbita mista* e quando uma trajetória só intersecta a região de descontinuidade em pontos de costura também recebe o nome de *órbita costurante*. Além disso, quando o sentido das trajetórias não é respeitado γ é chamada de *pseudo-órbita* ou *pseudo-poli-trajetória*.

A seguir recordamos a definição de separatriz para campos de vetores suaves por partes. Certos de que não haverá confusão, utilizamos a mesma nomenclatura utilizada para campos de vetores suaves.

Definição 2.13. Uma separatriz genérica de (2.3) é um arco de trajetória de X^+ , X^- ou do campo de Filippov (2.4) cujo conjunto α -limite ou ω -limite é um ponto de sela de $X^\pm$ ou um ponto de equilíbrio de F_Y ou uma trajetória que passa por uma dobra visível de Y . Além disso, conexões entre separatrizes de selas hiperbólicas distintas de $X^\pm$ que não estejam sobre Σ ou de selas hiperbólicas de F_Y , conexões entre tangências quadráticas,



Figura 2.2: Exemplo de pseudo-conexão.

conexões entre sela hiperbólica e tangência quadrática, ou loop simples (loop de uma sela $p \notin \Sigma$ tal que $\text{tr}(DX^+(p)) \neq 0$, se $p \in \Sigma^+$ ou $\text{tr}(DX^-(p)) \neq 0$, se $p \in \Sigma^-$ e que não tangencie Σ) serão chamados de *conexões quase genéricas*. Uma pseudo-conexão se dá quando o sentido das trajetórias que conectam as separatrizes não é respeitado.

Seguindo a abordagem de [28, 34] recordamos as definições de Σ -equivalência e equivalência topológica entre dois campos de vetores suaves por partes.

Definição 2.14. Dizemos que dois campos de vetores suaves por partes Y e $\tilde{Y}$, definidos em M^m e com descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$, são Σ -equivalentes se existir um homeomorfismo que preserve orientação do tempo $h : M^m \rightarrow M^m$ que leva órbitas de Y em órbitas de $\tilde{Y}$ e tal que $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$.

Note que a Σ -equivalência preserva a região de costura. Além disso, por preservar todas as trajetórias de Y , uma Σ -equivalência também preserva pseudo-poli-trajetórias. Para campos de vetores suaves por partes também é possível definir equivalência topológica, como segue.

Definição 2.15. Dizemos que dois campos de vetores suaves por partes Y e $\tilde{Y}$, definidos em abertos M^m e com descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$, são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo que preserve orientação do tempo $h : M^m \rightarrow M^m$ e que leva órbitas de Y em órbitas de $\tilde{Y}$.

É claro que uma Σ -equivalência é também uma equivalência topológica. Mas a recíproca não é verdadeira. Uma discussão mais detalhada sobre as diferenças entre as duas definições pode ser encontrada em [28]. Neste trabalho utilizaremos o conceito de Σ -equivalência.

Definição 2.16. Dizemos que um campo de vetores suave por partes Y , definido em M^m e com descontinuidade $\Sigma = f^{-1}(0)$, é localmente estruturalmente estável em $p \in M^m$ se existe uma vizinhança $V \subset M^m$, com $p \in V$, e uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \Omega^r(M^m, f)$, de Y , tal que para todo $\tilde{Y} \in \mathcal{V}$ existe uma Σ -equivalência $h_{\tilde{Y}} : V \rightarrow V$ levando trajetórias de $Y|_V$ em trajetórias de $\tilde{Y}|_V$.

Definição 2.17. Dizemos que um campo de vetores suave por partes Y , definido em M^m e com descontinuidade $\Sigma = f^{-1}(0)$, é estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \Omega^r(M^m, f)$, de Y , tal que todo campo de vetores $\tilde{Y} \in \mathcal{V}$ é Σ -equivalente a Y .

Daqui em diante, recordaremos algumas definições para campos de vetores suaves por partes definidos em uma variedade bidimensional, isto é, consideramos (2.3) definido em M^2 e seguimos a nomenclatura estabelecida em [49].

Primeiramente, note que quando o campo de vetores (2.3) está definido em uma variedade bidimensional, isto é, quando $m = 2$, a descontinuidade Σ é unidimensional, nesse caso, para que p seja um ponto de equilíbrio hiperbólico de F_Y basta checar que $F'_Y(p) \neq 0$ ou, equivalentemente, que $d(\det[X^+, X^-]_{|\Sigma})(p) \neq 0$. Nesse caso, dizemos que p é uma sela de F_Y quando $p \in \Sigma^d$ ($p \in \Sigma^e$) e $F'_Y(p) > 0$ ($F'_Y(p) < 0$, respectivamente). Caso contrário dizemos que p é um nó de F_Y .

Definição 2.18. Seja $Y = (X^+, X^-)$ definido em uma variedade bidimensional M^2 . Dizemos que $p \in \Sigma$ é uma Σ -singularidade elementar de Y se p é uma Σ -dobra de Y , ou p é um ponto de equilíbrio hiperbólico de F_Y .

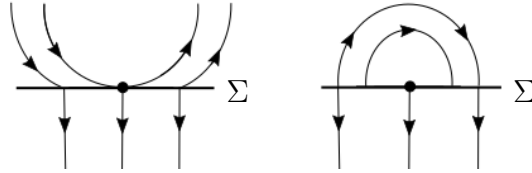


Figura 2.3: Σ -dobra para campos de vetores suaves por partes bidimensionais.

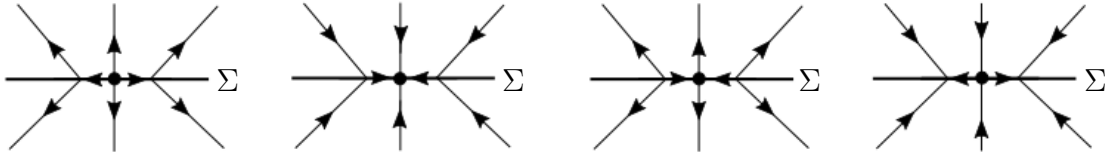


Figura 2.4: Pontos de equilíbrio hiperbólicos para o campo deslizante de campos de vetores suaves por partes bidimensionais.

Definição 2.19. Seja γ uma poli-trajetória fechada de $Y = (X^+, X^-)$, definido em M^2 . Dizemos que:

- (i) γ é do tipo I se γ encontra Σ apenas em pontos de costura;
- (ii) γ é do tipo II se $\gamma = \Sigma$;
- (iii) γ é do tipo III se γ contém ao menos uma dobra de Y .

Note que, γ é uma poli-trajetória fechada do tipo II se, e somente se, Σ é fechada e $\Sigma = \Sigma^d$ ou $\Sigma = \Sigma^e$.

Definição 2.20. Seja γ uma poli-trajetória fechada de $Y = (X^+, X^-)$, definido em M^2 . Dizemos que γ é elementar se a transição de arcos de trajetórias de X^+ para X^- é feita por pontos de costura e a transição de arcos de trajetórias de X^+ ou de X^- para arcos de F_Y é feita através de dobras ou de pontos regulares de arcos de escape ou deslize respeitando os sentidos das trajetórias e, além disso, uma das seguintes condições é satisfeita:

- (i) γ é do tipo I e $\pi'(q) \neq 1$ para algum $q \in \gamma \cap \Sigma$, onde π é aplicação de primeiro retorno da poli-trajetória fechada;
- (ii) γ é do tipo II;
- (iii) γ é do tipo III, e contém ao menos um arco de trajetória de F_Y . Se γ possuir mais de um arco de trajetória de F_Y , então todos os arcos devem ser do mesmo tipo (isto é, ou todos arcos de deslize ou todos arcos de escape). Além disso, não existe $p \in \gamma \cap \Sigma$ de modo que p seja um ponto de tangência e $\gamma \cap (p - \delta, p + \delta) = \emptyset$ para $\delta > 0$.

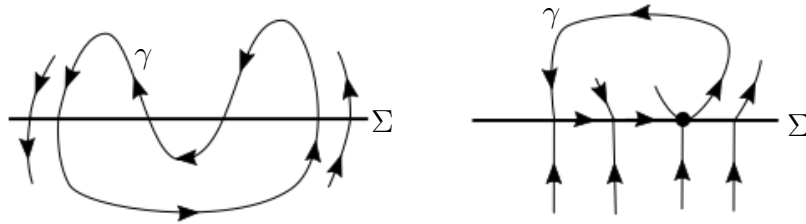


Figura 2.5: Poli-trajetórias elementares do tipo I e do tipo III.

Observação 2.21. As imposições do item (iii) da Definição 2.20 visam assegurar que γ não conecta duas separatrizes de dobra. Isso porque, caso γ conecte um segmento de escape a um de deslize, certamente conectará duas dobras distintas. O mesmo ocorre quando além de conter um segmento de deslize ou de escape γ tangência Σ em um ponto p tal que $(p - \delta, p + \delta) \cap \gamma = \emptyset$, para algum $\delta > 0$.

Observação 2.22. Uma poli-trajetória fechada do tipo I elementar também é chamada de ciclo limite costurante.

Observação 2.23. Mesmo nos segmentos $\Sigma^s \cup \Sigma^e \subset \Sigma$ é possível considerar a aplicação de primeiro retorno e a mesma condição genérica precisa ser imposta tanto para dobra-dobras quanto para pseudo-poli-trajetórias fechadas que conectem segmentos de escape e de deslize mas não contenham segmentos do campo deslizante. Nestes casos a aplicação de primeiro retorno não tem nenhum significado dinâmico mas esses objetos, que correspondem a pontos fixos de π são preservados por Σ -equivalências. Para poli-trajetórias do tipo III nós não falamos em primeiro retorno, devido a presença de uma dobra na poli-trajetória.

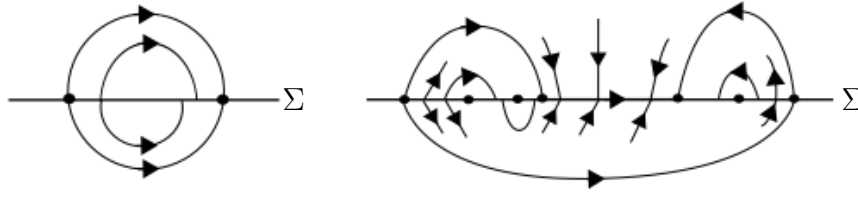


Figura 2.6: Exemplos de pseudo-poli-trajetórias fechadas.

Porém, também é possível que pseudo-poli-trajetórias se formem como as poli-trajetórias do tipo III, isto é, passando por pontos de dobra e contendo segmentos do campo deslizante e de modo que a transição de arcos de trajetórias de X^+ e X^- não siga a orientação natural do fluxo. Nesse caso também não há significado dinâmico para esse tipo de objeto (que, claramente, não são bem orientados) mas eles são preservados por Σ -equivalência assim como as poli-trajetórias do tipo III. Por fim, pseudo-poli-trajetórias podem se formar contendo segmentos de escape e/ou deslize, sem conter pontos de dobra. Dizemos que γ é uma pseudo-poli-trajetória fechada elementar se ela conectar segmentos de deslize e escape, não contiver segmentos do campo deslizante e o primeiro retorno associado for hiperbólico ou se ela passar por um ponto de dobra ou segmento deslizante e não conectar separatrizes. Esses casos serão abordados na Seção 3.3.

No que segue, vamos recordar alguns resultados locais para campos de vetores suaves por partes definidos em abertos do plano. Pelo que veremos na Seção 2.5, tal análise pode ser generalizada para uma análise local para campos de vetores definidos em variedades bidimensionais.

Seguindo a notação estabelecida no início da seção, consideramos $U \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança da origem, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r de modo que 0 seja um valor regular de f , $\Sigma = \{(x, y) \in U; y = 0\}$ e um campo de vetores suave por partes $Y = (X^+, X^-) \in \Omega^r(U, f)$. Primeiramente, recordamos a seguinte proposição.

Proposição 2.24. [28] Considere dois campos de vetores $Y = (X^+, X^-)$ e $\tilde{Y} = (\tilde{X}^+, \tilde{X}^-)$ definidos em abertos U e $\tilde{U}$ do plano com descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente. Seja $h : U \rightarrow \tilde{U}$ um difeomorfismo satisfazendo:

- (i) h é uma conjugação topológica entre X^+ definido em $\Sigma^+ \subset U$ e $\tilde{X}^+$ definido em $\tilde{\Sigma}^+ \subset \tilde{U}$;
- (ii) h é uma conjugação topológica entre X^- definido em $\Sigma^- \subset U$ e $\tilde{X}^-$ definido em $\tilde{\Sigma}^- \subset \tilde{U}$.

Então h também é uma conjugação entre os campos de Filippov F_Y e $F_{\tilde{Y}}$ e, portanto, h é uma equivalência topológica entre Y e $\tilde{Y}$.

Observação 2.25. *Todas as equivalências topológicas construídas utilizando a proposição anterior são também Σ -equivalências, como pode ser visto em [28].*

A seguir, recordamos as formas normais que foram estabelecidas em [28], para campos de vetores suaves por partes planares $Y = (X^+, X^-)$ definidos em uma vizinhança da origem quando $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto regular ou uma Σ -singularidade elementar de Y .

Proposição 2.26. [28] *Seja $Y = (X^+, X^-)$ um campo de vetores suave por partes definido em um aberto do $\mathbb{R}^2$ contendo a origem.*

(i) *Se $(0, 0) \in \Sigma^c$, então em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Y é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Y}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}^+(x, y) = (0, 1), & y \geq 0, \\ \tilde{X}^-(x, y) = (0, 1), & y \leq 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança $\tilde{U}$ de $(0, 0)$. Além disso, Y é topologicamente equivalente ao campo de vetores $\bar{Y} = (0, 1)$, que é um campo de vetores suave.

(ii) *Se $(0, 0) \in \Sigma^d$ e $X^+(0, 0)$ não é paralelo a $X^-(0, 0)$, então em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Y é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Y}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}^+(x, y) = (1, -1), & y \geq 0, \\ \tilde{X}^-(x, y) = (1, 1), & y \leq 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança $\tilde{U}$ de $(0, 0)$.

(iii) *Se $(0, 0) \in \Sigma^e$ e $X^+(0, 0)$ não é paralelo a $X^-(0, 0)$, então em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Y é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Y}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}^+(x, y) = (1, 1), & y \geq 0, \\ \tilde{X}^-(x, y) = (1, -1), & y \leq 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança $\tilde{U}$ de $(0, 0)$.

Quando $(0, 0) \in \Sigma$ é uma Σ -singularidade elementar, temos:

Proposição 2.27. [28] *Seja $Y = (X^+, X^-)$ um campo de vetores suave por partes definido em um aberto do $\mathbb{R}^2$ contendo a origem.*

(i) *Se $(0, 0) \in \Sigma$ é uma tangência quadrática de X^+ com Σ enquanto X^- é transversal à Σ , então em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Y é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Y}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}^+(x, y) = (1, ax), & y \geq 0, \\ \tilde{X}^-(x, y) = (0, b), & y \leq 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança $\tilde{U}$ de $(0,0)$, onde temos $a = \text{sgn}((X^+)^2 f)(0,0)$ e $b = \text{sgn}(X^- f(0,0))$.

(ii) Se $(0,0) \in \Sigma^d \cup \Sigma^e$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico do campo de Filippov F_Y , então em uma vizinhança de U de $(0,0)$, Y é Σ -equivalente à forma normal

$$\tilde{Y}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}^+(x, y) = (ax, b), & y \geq 0, \\ \tilde{X}^-(x, y) = (ax, -b), & y \leq 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança $\tilde{U}$ de $(0,0)$, com $a = \text{sgn}(F'_Z(0,0))$ e $b = \text{sgn}(X^+ f(0,0))$.

Agora podemos enunciar o seguinte resultado, sobre estabilidade estrutural local em $\Omega^r(U, f)$.

Teorema 2.28. [28] Seja $Y = (X^+, X^-) \in \Omega^r(U, f)$ um campo de vetores suave por partes definido em uma vizinhança U da origem $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Se $(0,0) \in \Sigma = f^{-1}(0)$ é um ponto regular ou uma Σ -singularidade elementar de F_Y então Y é localmente estruturalmente estável e localmente Σ -estruturalmente estável.

Em [28, 34] também foi feita uma análise local dos elementos de codimensão-1 e dois para campos de vetores suaves por partes. Abordaremos o tema no Capítulo 3.

A seguir, recordamos brevemente a regularização de Sotomayor–Teixeira, introduzida em [50], para podermos recordar os resultados obtidos em [49]. Tais resultados estabelecem condições sobre as quais a regularização de Sotomayor–Teixeira, de campos de vetores suaves por partes definidos em regiões compactas do $\mathbb{R}^2$, seja estruturalmente estável.

Definição 2.29. Uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é uma função de transição se

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -1], \\ 1, & t \in [1, \infty), \end{cases}$$

e $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in (-1, 1)$.

Definição 2.30. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r de modo que 0 seja um valor regular de f . Seja $Y = (X^+, X^-) \in \Omega^r(U, f)$ um campo de vetores suave por partes e φ uma função de transição. Uma φ_ε -regularização de Y é uma família indexada pelo parâmetro ε , para $\varepsilon > 0$, de campos de vetores $Y_\varepsilon \in \Omega^r(U)$, definida por

$$Y_\varepsilon(p) = (1 - \varphi_\varepsilon)(f(p))X^-(p) + \varphi_\varepsilon(f(p))X^+(p)$$

onde $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t/\varepsilon)$.

Em [49] foi definida a seguinte classe de campos de vetores suaves por partes em um compacto planar M satisfazendo (2.2), isto é, com M da seguinte forma

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \beta(x, y) \geq 0\} \text{ e } \partial M = \beta^{-1}(0),$$

onde $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r e 0 é valor regular de β .

Definição 2.31. Chamamos de $G^r(M)$ o conjunto de campos de vetores suaves por partes $Y = (X^+, X^-) \in \Omega^r(M, f)$ tal que $X^+_{|\Sigma^+} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$, $X^-_{|\Sigma^-} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$ e que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $G^r(1)$: Toda Σ -singularidade de Y é elementar e não pertence a ∂M ;
- (ii) $G^r(2)$: Toda poli-trajetória de Y é elementar e não tem pontos de ∂M ;
- (iii) $G^r(3)$: Para cada $p \in \Sigma \cap \partial M$, $X^+\beta(p)X^-\beta(p) \neq 0$, e quando esta expressão é negativa, então $X^+\beta(p)Yf(p) - X^+f(p)X^-\beta(p) \neq 0$;
- (iv) $G^r(4)$: Y não possui conexões de sela nem de tangências. Se $p \in \Sigma \cap \partial M$, $X^+\beta(p)X^-\beta(p) < 0$ e $X^+\beta(p)Yf(p) - X^+f(p)X^-\beta(p) > 0$, então a trajetória passando por p não contém nenhuma separatriz nem um ponto $p_1 \neq p \in \Sigma \cap \partial M$ com $X^+\beta(p_1)X^-\beta(p_1) < 0$ e $X^+\beta(p_1)X^-f(p_1) - X^+f(p_1)X^-\beta(p_1) > 0$.

Observamos que as condições de $G^r(3)$ serão responsáveis pelas tangências dos campos regularizados, para $\varepsilon > 0$ pequeno, serem no máximo quadráticas e também por garantir que $X^\pm$ não serão tangentes ao bordo de M em pontos $p \in \partial M \cap \Sigma$. Além disso, a condição dada em $G^r(4)$ garantirá que os campos regularizados não terão conexões de separatrizes. Mais detalhes podem ser vistos em [49].

O seguinte resultado, apresentado em [49], garante que sob algumas condições os conjuntos apresentados na definição de $G^r(M)$ quando regularizados segundo a regularização de Sotomayor–Teixeira, que foi introduzida em [50], são estruturalmente estáveis.

Proposição 2.32. [49]

- (i) Seja $Y = (X^+, X^-) \in G^r(1)$, $r \geq 1$. Então, dada uma função de transição φ , existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $Y_\varepsilon \in \Sigma^r(1)$.
- (ii) Seja $Y = (X^+, X^-) \in G^r(2) \cap G^r(4)$, $r \geq 1$. Então, dada uma função de transição φ , existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $Y_\varepsilon \in \Sigma^r(2)$.
- (iii) Seja $Y = (X^+, X^-) \in G^r(3)$, $r \geq 1$. Então, dada uma função de transição φ , existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $Y_\varepsilon \in \Sigma^r(3)$.
- (iv) Seja $Y = (X^+, X^-) \in G^r(2) \cap G^r(3) \cap G^r(4)$, $r \geq 1$. Então, dada uma função de transição φ , existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $Y_\varepsilon \in \Sigma^r(4)$.

Teorema 2.33. [49] O conjunto $G^r(M)$, $r \geq 1$, é aberto e denso em $\Omega^r(M, f)$.

2.3 Integrabilidade

Seja $P : \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^m$ tal que $P(x) = (P_1(x), \dots, P_m(x))$, onde $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{F}^m$ e P_i , $i = 1, \dots, m$, são polinômios nas variáveis x_i com coeficientes em $\mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ indica o corpo dos reais ($\mathbb{R}$) ou dos complexos ($\mathbb{C}$). Seja n o máximo entre os graus de P_i , $i = 1, \dots, m$ e considere o sistema diferencial m -dimensional

$$\dot{x} = P(x). \quad (2.5)$$

Dizemos que (2.5) é *integrável* em um aberto $U \subset \mathbb{F}^m$ se existe uma função analítica $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, não constante, tal que

$$\langle P(x), \nabla H(x) \rangle = \sum_{i=1}^m P_i(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) = 0,$$

em U . Nesse caso, H é chamada de *integral primeira*. Além disso, P é dito *completamente integrável* se possui $m - 1$ integrais primeiras linearmente independentes. Em [20] foi provado que qualquer sistema linear m -dimensional tem $m - 1$ integrais primeiras linearmente independentes e, por isso, todo sistema linear m -dimensional é completamente integrável.

Note que, a integrabilidade implica que se pode obter as trajetórias de um sistema apenas intersectando os conjuntos de nível dessas integrais primeiras, veja [18] para mais detalhes. Observe que quando consideramos um campo de vetores suave por partes $Y = (X^+, X^-)$, pedir que X^+ e X^- sejam integráveis com integrais primeiras h^+ e h^- , respectivamente, não garante que as trajetórias de Y estejam contidas nos conjuntos de níveis dessas integrais, pois isso não é suficiente para entender o comportamento do campo de Filippov. Porém, isso acontece quando $h^+ = h^-$.

No que segue, definimos alguns objetos que se relacionam com integrabilidade a partir da Teoria de Integrabilidade de Darboux, para campos de vetores bidimensionais, que veremos ao final desta seção. Considerando $m = 2$ em (2.5) obtemos o sistema planar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= P_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dizemos que uma função analítica, e não identicamente nula, $R : U \subset \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}$ é um *fator integrante* de (2.6) se

$$P_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial R}{\partial x_2} = - \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} \right) R.$$

Dizemos que uma função analítica, e não identicamente nula, $V : U \subset \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}$ é um

fator integrante inverso de (2.6) se

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} \right) V.$$

Observe que a partir de um fator integrante R , do campo de vetores (2.6), construímos uma integral primeira H , de (2.6), dada por

$$H(x_1, x_2) = \int R(x_1, x_2) P_1(x_1, x_2) dx_2 + h(x_1),$$

onde $h(x_1)$ é escolhido de modo que $\frac{\partial H}{\partial x_1} = -R P_2$.

Além disso, V é um fator integrante inverso em $U \subset \mathbb{F}^2$ se, e somente se, $R = 1/V$ é um fator integrante em $U \setminus \{(x_1, x_2) \in U; V(x_1, x_2) = 0\}$.

Seja $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ uma função não identicamente nula. Dizemos que $f(x_1, x_2) = 0$ é uma *curva algébrica invariante* de (2.6) se existe um *cofator* $K \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ satisfazendo

$$P f = P_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = K f. \quad (2.7)$$

O nível zero de f recebe o nome de curva algébrica invariante pois a equação (2.7) implica que o vetor gradiente de f é ortogonal ao campo de vetores (2.6) e, portanto, o fluxo de (2.6) é tangente a curva $f(x_1, x_2) = 0$. Logo, essa curva é formada por trajetórias do campo de vetores. Note também que se o grau do sistema $P = (P_1, P_2)$ é m então o cofator K tem grau máximo $m - 1$.

A seguir definimos *fator exponencial*, que é um outro objeto que também satisfaz (2.7). Seja $g, h \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ tais que g, h são relativamente primas em $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ ou $h \equiv 1$. A função $\exp(g/h)$ é chamada de *fator exponencial* de (2.6) se existir um *cofator* $K \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ de grau máximo $m - 1$ satisfazendo

$$P \left(\exp \left(\frac{g}{h} \right) \right) = K \exp \left(\frac{g}{h} \right).$$

Como $\exp(g/h)$ é sempre não nulo o fator exponencial não define uma curva invariante para o campo de vetores (2.6).

A *Teoria de Integrabilidade de Darboux* para sistemas polinomiais nos fornece algumas condições sob as quais a existência de curvas algébricas invariantes, fatores integrantes, fatores integrantes inversos e fatores exponenciais garantem que o campo de vetores é integrável. No que segue recordamos parte da teoria que será utilizada neste trabalho e ressaltamos que mais detalhes e a demonstração de tais resultados podem ser encontrados em [18, 53].

Teorema 2.34. *Suponha que o campo de vetores (2.6) tenha grau m e admita p curvas algébricas invariantes irreduzíveis $f_i = 0$, com cofatores K_i , $i = 1, \dots, p$ e q fatores*

exponenciais $\exp(g_j/h_j)$ com cofatores K_{p+j} , $j = 1, \dots, q$. Então, existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos e tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j K_{p+j} = 0$ se, e somente se, a função

$$f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \left(\frac{g_1}{h_1} \right) \right)^{\mu_1} \cdots \left(\exp \left(\frac{g_q}{h_q} \right) \right)^{\mu_q} \quad (2.8)$$

é uma integral primeira para o sistema (2.6). Além disso, (2.8) é um fator integrante inverso para o sistema (2.6) se, e somente se, existem $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ não todos nulos e tais que $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j K_{p+j} = \text{div}(P_1, P_2)$.

Observe que f_i e $\exp(g_j/h_j)$ podem ser funções complexas mas quando o sistema (2.5) é real a expressão (2.8) também é real. Para mais detalhes, ver [18].

2.4 Reversibilidade

Dizemos que o sistema (2.5) é ϕ -reversível em $U \subset \mathbb{R}^m$ se existir uma involução, de classe C^r , $\phi : U \rightarrow U$, isto é, ϕ satisfaz $\phi \circ \phi = Id$, de modo que $\text{Fix}(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^m; \phi(x) = x\}$ e

$$D\phi \circ P = -P \circ \phi$$

onde $D\phi$ indica a matriz jacobiana de ϕ com relação as variáveis x . Observe que se um sistema é ϕ -reversível então os pontos de equilíbrio sobre $\text{Fix}(\phi)$ não são atratores nem repulsores. Para mais detalhes sobre sistemas reversíveis indicamos [35]. Essa é a reversibilidade clássica, que usaremos em todo o trabalho. Ressaltamos que conceito de reversibilidade foi generalizado em [2].

Também podemos definir reversibilidade para campos de vetores suaves por partes. Utilizando a notação estabelecida acima, dizemos que (2.3) é ϕ -reversível se $\text{Fix}(\phi) \subset \Sigma^c$ e $D\phi \circ Y = -Y \circ \phi$, onde ϕ é uma involução de classe C^r definida em $\mathbb{R}^m$. Para mais detalhes, ver [32].

Note que, tanto campos de vetores suaves quanto campos de vetores suaves por partes apresentam certa simetria quando são reversíveis.

2.5 Análise local para campos de vetores definidos em variedades bidimensionais a partir de cartas locais

Nesta seção explicamos como utilizamos cartas locais para aplicar os resultados já obtidos para campos de vetores planares como ferramentas do nosso estudo. Por simplicidade, e por ser o objeto de estudo dos demais capítulos, vamos considerar campos de

vetores definidos em esferas bidimensionais $\mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$, com $\rho > 0$.

Seguindo a notação das seções anteriores, denotamos por $\Omega^r(\mathbb{S}_\rho^2)$ o espaço dos campos de vetores de classe C^r definidos em $\mathbb{S}_\rho^2$, com $r > 1$. Seja $f : \mathbb{S}_\rho^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$. Logo f é de classe C^∞ e 0 é um valor regular de f . Considere $\Omega^r(\mathbb{S}_\rho^2, f)$ o espaço dos campos de vetores suaves por partes definidos em $\mathbb{S}_\rho^2$ com região de descontinuidade $\Sigma = f^{-1}(0)$, definidos por

$$Y(x) = \begin{cases} X^+(x), & f(x) \geq 0, \\ X^-(x), & f(x) \leq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

com $X^+, X^- \in \Omega^r(\mathbb{S}_\rho^2)$ e munimos $\Omega^r(\mathbb{S}_\rho^2, f)$ com a topologia produto. Também denotamos por $\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; f(x) \geq 0\}$, $\Sigma^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2; f(x) \leq 0\}$.

Para uma primeira análise local, precisamos das seguintes definições. No que segue, por simplicidade, denotamos $\mathbb{S}_\rho^2 = \mathbb{S}^2$ para ρ fixo e arbitrário.

Como $\mathbb{S}^2$ é uma variedade orientável podemos escolher um atlas máximo coerente, digamos $\mathcal{A}$, de classe C^r , $r \geq 1$, isto é, podemos escolher $\mathcal{A}$ de forma que as mudanças de coordenadas tenham determinante jacobiano positivo para toda carta em $\mathcal{A}$. Sempre trabalhamos com cartas locais de um mesmo atlas $\mathcal{A}$.

Dado $X \in \Omega^r(\mathbb{S}^2)$ definimos, localmente, com o auxílio da carta local $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, $\varphi \in \mathcal{A}$, o campo de vetores projetado

$$\Phi_X(x) = d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} \circ X \circ \varphi(x). \quad (2.10)$$

Chamamos (2.10) de campo de vetores (suave) projetado.

Considere $Y = (X^+, X^-) \in \Omega^r(\mathbb{S}^2, f)$ com descontinuidade Σ , como definido na Seção 2.2. Como $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{S}^2$ é difeomorfismo local então $\varphi^{-1}(\Sigma \cap \varphi(U)) = \Phi_\Sigma$ é uma curva contida em U que é fechada se, e somente se, $\Sigma \subset \varphi(U)$. Além disso, como 0 é valor regular de f também o é de $f \circ \varphi$. Com isso, definimos, $\Phi_\Sigma = (f \circ \varphi)^{-1}(0) = \varphi^{-1}(\Sigma \cap \varphi(U))$.

Dessa forma, podemos definir um campo $\Phi_Y = (\Phi_{X^+}, \Phi_{X^-})$ com descontinuidade Φ_Σ a partir do campo $Y = (X^+, X^-)$ e de uma carta local $\varphi \in \mathcal{A}$. Isto é, podemos considerar

$$\Phi_Y(x) = \begin{cases} \Phi_{X^+}(x) = d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} \circ X^+ \circ \varphi(x), & (f \circ \varphi)(x) \geq 0, \\ \Phi_{X^-}(x) = d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} \circ X^- \circ \varphi(x), & (f \circ \varphi)(x) \leq 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

com $X^+, X^- \in \Omega^r(\mathbb{S}^2)$. Chamamos (2.11) de *campo de vetores suave por partes projetado* mesmo que a carta local φ não seja uma das projeções estereográficas. Observe que se $\varphi(x) \notin \Sigma$ podemos diminuir U de forma que $\varphi(U) \cap \Sigma = \emptyset$. Nesse caso consideramos apenas Φ_{X^+} ou Φ_{X^-} conforme $\varphi(U) \subset \Sigma^+$ ou $\varphi(U) \subset \Sigma^-$.

A seguir, veremos que as definições dadas na Seção 2.2 não dependem da parametri-

zação escolhida. O intuito desta seção é formalizar o uso de coordenadas locais que serão utilizados no restante do trabalho.

Primeiramente, vejamos que as definições referentes a campos suaves não dependem da parametrização escolhida.

Lema 2.35. *Seja $X \in \Omega^r(\mathbb{S}^2)$. O campo $\Phi_X = d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} \circ X \circ \varphi(x)$ não depende da parametrização φ , no seguinte sentido: Se $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{S}^2$ e $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{S}^2$ são parametrizações em $p \in \mathbb{S}^2$ com $\varphi(0) = p = \psi(0)$, então $\Phi_X(x) = d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} \circ X \circ \varphi(x)$ e $\Psi_X(x) = d\psi_{\psi(x)}^{-1} \circ X \circ \psi(x)$ são C^r -conjugados em $U \cap V$.*

Demonstração. Considere $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ duas parametrizações com $\varphi(0) = p = \psi(0)$. Assim, $\varphi^{-1} \circ \psi : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ é a mudança de coordenadas e, como escolhemos um atlas coerente, $d(\varphi^{-1} \circ \psi)$ tem determinante jacobiano positivo. Logo,

$$\Phi_X \circ (\varphi^{-1} \circ \psi) = d\varphi^{-1} \circ X \circ \psi = d(\varphi^{-1} \circ \psi) \circ \Psi_X. \quad (2.12)$$

Como $\varphi^{-1} \circ \psi$ é um difeomorfismo de classe C^r que satisfaz (2.12), os campos Φ_X e Ψ_X são C^r -conjugados. $\square$

Observe que, da equação (2.12) podemos escrever

$$\Phi_X = d(\varphi^{-1} \circ \psi) \circ \Psi_X \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1},$$

e

$$\Psi_X = d(\psi^{-1} \circ \varphi) \circ \Phi_X \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1}.$$

Logo, pela Proposição 2.24, seguirá que dado $Y = (X^+, X^-)$, $p \in \Sigma$ e duas cartas locais φ e ψ em p , então os campos projetados Φ_Y e Ψ_Y , definidos em (2.11), são Σ -equivalentes.

Lema 2.36. *(i) p é ponto regular de $X \in \Omega^r(\mathbb{S}^2)$ se, e somente se, existir uma parametrização $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $\varphi(q) = p$ e q é ponto regular de Φ_X .*

(ii) p é ponto de equilíbrio de $X \in \Omega^r(\mathbb{S}^2)$ se, e somente se, existir uma parametrização $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $\varphi(q) = p$ e q é ponto de equilíbrio de Φ_X . Além disso, p é ponto de equilíbrio hiperbólico se q for hiperbólico.

As afirmações não dependem da parametrização.

Demonstração. Observe que p é ponto regular (de equilíbrio) de X se, e somente se, $q = \varphi^{-1}(p)$ é ponto regular (de equilíbrio) de Φ_X , pois $\Phi_X(q) = d\varphi^{-1} \circ X \circ \varphi(q)$ com $d\varphi^{-1}$ isomorfismo. De modo análogo concluímos que p é hiperbólico se, e somente se, q é hiperbólico. O Lema 2.35 garante que esses fatos não dependem da parametrização escolhida. $\square$

A seguir, veremos como as trajetórias do campos $X \in \Omega^r(\mathbb{S}^2)$ e do campo projetado Φ_X se relacionam.

Seja $X \in \Omega^r(\mathbb{S}^2)$ e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{S}^2$ uma parametrização de modo que $\Gamma(t)$, $t \in I$, seja uma trajetória de X , com $\Gamma(t) \in \varphi(U)$ para todo $t \in I$. Como Γ é uma trajetória de X , então $d\Gamma/dt = X(\Gamma(t))$. Assim, $\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ \Gamma(t)$ também é uma trajetória de Φ_X , pois

$$\Phi_X(\gamma(t)) = (d\varphi_{\Gamma(t)}^{-1} \circ X \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \Gamma(t)) = d\varphi_{\Gamma(t)}^{-1} \circ X \circ \Gamma(t)$$

e

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1} \circ \Gamma)(t) = d\varphi_{\Gamma(t)}^{-1} \frac{d\Gamma}{dt} = d\varphi_{\Gamma(t)}^{-1} \circ X \circ \Gamma(t).$$

Logo, $d\gamma/dt = \Phi_X(\gamma(t))$.

Com isso obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.37. *Seja $X \in \Omega^r(\mathbb{S}^2)$.*

- (i) $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$ é uma trajetória fechada de X se, e somente se, existir uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $\Gamma(t) \subset \varphi(U)$, para todo t e $\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ \Gamma(t)$ é uma trajetória fechada de Φ_X .
- (ii) Γ é um ciclo limite para X se, e somente se, γ for um ciclo limite para Φ_X . Além disso, Γ será hiperbólico se, e somente se, γ for hiperbólico.

As afirmações acima não dependem da parametrização escolhida.

Demonstração. Suponha que Γ seja uma trajetória fechada de X e que existam duas parametrizações $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ tal que $\Gamma(t) \subset \varphi(U) \cap \psi(V)$, para todo t . Considere $\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ \Gamma(t)$ e $\alpha(t) = \psi^{-1} \circ \Gamma(t)$.

Como $\Gamma(t)$ é fechada, existe $T > 0$ tal que $\Gamma(0) = \Gamma(T)$. Como φ e ψ são cartas locais, então γ e α também são trajetórias fechadas de Φ_X e Ψ_X , respectivamente.

Como φ é carta local se Γ é uma trajetória isolada, então γ também será. Vale o mesmo para α . Para ver que a hiperbolicidade dos ciclos é preservada basta considerar seções transversais a Γ e suas respectivas projeções.

O Lema 2.38 garante que a afirmação não depende da parametrização escolhida. $\square$

A seguir, veremos que as definições referentes a campos de vetores suave por partes não dependem da parametrização escolhida. Como o contato entre curvas é preservado por difeomorfismo (veja [17], para mais detalhes), obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.38. *Seja $Y = (X^+, X^-) \in \Omega^r(\mathbb{S}^2, f)$. Então:*

- (i) $p \in \Sigma$ é um ponto de costura de Y se, e somente se, existir uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $q \in U$, $\varphi(q) = p$, e $q \in \Phi_\Sigma$ é um ponto de costura para Φ_Y ;

- (ii) $p \in \Sigma$ é um ponto de deslize de Y se, e somente se, existir uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $q \in U$, $\varphi(q) = p$, e $q \in \Phi_\Sigma$ é um ponto de deslize para Φ_Y ;
- (iii) $p \in \Sigma$ é um ponto de escape de Y se, e somente se, existir uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $q \in U$, $\varphi(q) = p$, e $q \in \Phi_\Sigma$ é um ponto de escape para Φ_Y ;
- (iv) $p \in \Sigma$ é um ponto de tangência quadrática (de ordem superior) de Y com Σ se, e somente se, existir uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $q \in U$, $\varphi(q) = p$, e $q \in \Phi_\Sigma$ um ponto de tangência quadrática (de ordem superior, respectivamente) de Φ_Y com Φ_Σ ;
- (v) $p \in \Sigma$ é um ponto de tangência dupla quadrática (de ordem superior) de Y com Σ se, e somente se, existir uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $q \in U$, $\varphi(q) = p$, e $q \in \Phi_\Sigma$ um ponto de tangência dupla quadrática (de ordem superior, respectivamente) de Φ_Y com Φ_Σ .

As conclusões dos itens acima não dependem da parametrização escolhida.

Lema 2.39. $p \in \Sigma$ é ponto de equilíbrio de F_Y se existir uma parametrização $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $\varphi(q) = p$ e q é ponto de equilíbrio de F_{Φ_Y} . Além disso, $p \in \Sigma$ é dito hiperbólico se q for hiperbólico. A afirmação não depende da parametrização escolhida.

Demonstração. Se $p \in \Sigma$ é um ponto de equilíbrio de Y então $X^+f(p)X^-f(p) < 0$ e o conjunto $\{X^+(p), X^-(p)\}$ é linearmente dependente. Como contato entre curvas e conjuntos linearmente dependentes são preservados por difeomorfismo, segue que $q = \varphi(p)$ será ponto de equilíbrio de $\Phi_Y(p)$. A hiperbolicidade segue como no Lema 2.36. O Lema 2.38 garante que a afirmação não depende da parametrização escolhida. $\square$

Como já vimos que dobra e ponto de equilíbrio hiperbólico de F_Y não dependem da parametrização então Σ -singularidade elementar, como na Definição 2.18, também não depende.

Observação 2.40. *Procedendo como nos lemas anteriores, vemos que é indiferente considerar separatrizes genéricas ou quase-genéricas e poli-trajetórias definidas em uma variedade bidimensional ou em um aberto do plano. Isso implica que podemos redigir lemas semelhantes aos enunciados acima, para poli-trajetórias. Não o faremos aqui, para evitar repetições. Em particular, o caso das poli-trajetórias elementares do tipo I, pode ser analisado de modo análogo ao de ciclo limite para campos suaves, como no Lema 2.37.*

Observação 2.41. *Note que a análise anterior continua válida quando consideramos uma variedade bidimensional, compacta, conexa e orientável. Nos limitamos, acima, a definir e provar os resultados para a esfera bidimensional, que será utilizado no restante do trabalho.*

3 Análise de elementos de codimensão-1 e de órbitas não trivialmente recorrentes

3.1 Introdução

Denotamos por $\mathfrak{X}$ a classe dos campos de vetores suaves por partes definidos em $\mathbb{R}^3$, com região de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\} = f^{-1}(0)$, com $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$, que admitem $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ como integral primeira. Isso implica que todas as esferas bidimensionais centradas na origem são invariantes pelo fluxo dos campos de vetores em $\mathfrak{X}$. Denotamos por $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ a restrição desses campos à esfera bidimensional de raio $\lambda > 0$ finito e, como na Seção 2.2, denotamos por $\Sigma^+ = f^{-1}([0, +\infty))$ e $\Sigma^- = f^{-1}((-\infty, 0])$. Munimos $\mathfrak{X}$ com a topologia produto de classe C^r , como usual.

Neste capítulo apresentamos a análise local dos elementos de codimensão-1 que podem aparecer em campos de vetores suaves por partes no conjunto $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Para evitar o uso excessivo de super índices, consideramos campos $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ em todo o capítulo. Note que, por se tratar de uma análise local, levando em conta os resultados obtidos na Seção 2.5, podemos trabalhar com coordenadas locais $\{x_1, x_2\}$, isto é, analisar o problema planar. Dessa forma, as expressões do campo de Filippov e dos primeiros retornos apresentadas no capítulo são para os campos projetados. No Capítulo 5.3 faremos uma análise global dos elementos de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$.

Ressaltamos que uma análise minuciosa dos diagramas de bifurcação foi apresentada em [28, 34]. O objetivo deste capítulo é ver que, sob certas condições genéricas, os elementos de codimensão-1 retratados em [28, 34] formam uma subvariedade de codimensão-1 no conjunto de sistema de Filippov definidos em S_λ^2 . Essas condições genéricas foram apresentadas nos trabalhos citados. Porém, em geral, os detalhes envolvendo a prova de que, de fato, temos uma subvariedade de codimensão-1 não foram exibidos. Em [36] foi demonstrado que, sob certas condições genéricas, os sistemas de Filippov planares que possuem uma singularidade do tipo dobra-dobra são uma subvariedade de codimensão-1

no conjunto de sistema planares de Filippov. Neste trabalho também foram exibidos os desdobramentos versais das mesmas singularidades.

Como vimos na Seção 2.2, em [28] uma classificação local dos elementos estruturalmente estáveis foi exibida. Além disso, podemos ver em [28, 34] que os elementos de codimensão-1 local de $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ podem ser classificados em:

- (i) dobra-dobra;
- (ii) cúspide-regular;
- (iii) $p \in \Sigma$ é ponto de equilíbrio hiperbólico de X (Y) enquanto Y (X , respectivamente) é transversal à Σ em p ;
- (iv) o campo de Filippov F_Z tem um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico.

Também em [28, 34] alguns casos de codimensão-1 global foram exibidos envolvendo órbitas periódicas e conexões de separatrizes, que podem ocorrer em tempo finito (como no caso de conexões entre Σ -singularidades do tipo sela ou entre dobras, por exemplo). Em [28] também foi observado que os elementos globais de codimensão-1 em sistemas de Filippov podem ser considerados como casos particulares de conexões de separatrizes e, portanto, esses objetos podem ser tratados seguindo a abordagem de [47, 51]. As conexões de separatrizes podem ser classificadas dependendo dos pontos de chegada e partida que dão origem a essas conexões que devem ser pontos de equilíbrio hiperbólicos de X ou de Y do tipo sela, pontos de equilíbrio hiperbólicos do campo de Filippov do tipo sela, ou nó, ou dobras. Note que, conexões envolvendo pontos de equilíbrio não hiperbólicos ou tangência de ordem superior gerariam elementos de codimensão maior do que um. Ainda em [28], algumas bifurcações de codimensão dois locais e globais foram exibidas. Em particular, no diagrama de bifurcação de elementos de codimensão dois aparecem os elementos de codimensão um citados acima e que serão retratados no que segue.

Seja $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$. De maneira natural, elementos de codimensão-1 de X ou de Y contidos em Σ^+ ou Σ^- permanecem de codimensão-1. É o caso, por exemplo, de pontos de equilíbrio do tipo Hopf ou sela-nó e órbitas fechadas semi-estáveis. Para mais detalhes, ver [47, 51]. Além disso, assumindo algumas condições quase-genéricas, que serão explicadas caso-a-caso no decorrer do capítulo, um ponto de equilíbrio hiperbólico de X ou de Y que esteja sobre Σ ou uma órbita fechada hiperbólica de X ou de Y que tangencie Σ também serão elementos de codimensão-1, assim como pontos de equilíbrio semi-estáveis do campo de Filippov. Nos primeiros dois casos as demonstrações são baseadas nas demonstrações de colisão de singularidade ou órbita periódica com o bordo de uma variedade bidimensional, dadas em [51], enquanto no último caso, na demonstração dada para campos unidimensionais. Aqui, nos restringimos a uma ideia da demonstração e a mostrar, quando necessário, as adaptações feitas.

Também analisamos os casos de poli-trajetórias fechadas do tipo I e III não genéricas, loops ou conexões de separatrizes envolvendo Σ . Temos quatro casos especiais para considerar. O primeiro surge quando há separatrizes de selas que espiralam por ambos os lados de um ciclo semi-estável ou de uma poli-trajetória do tipo I com $\pi'(q) = 1$ e $\pi''(q) = d''(q) \neq 0$, com $q \in \Sigma \cap \gamma$, onde $d(q) = \pi(q) - q$ é a função distância. O segundo quando há separatrizes de selas cujo α ou ω -limite é um loop-simples (envolvendo Σ ou não). O terceiro quando, na região limitada por uma poli-trajetória do tipo III não genérica existe uma sela. Finalmente, o quarto caso especial surge quando uma trajetória fechada hiperbólica e tangente à Σ de modo quadrático é α ou ω -limite de separatrizes de selas ou dobras. Nesses casos, podem surgir conexões de selas ou de sela com dobra, quando as poli-trajetórias e/ou conexão de separatrizes se rompem. Para os casos que não envolvem Σ , ver [47], os demais casos serão analisados a seguir utilizando argumentos semelhantes aos utilizadas nas referências citadas.

3.2 Análise de elementos de codimensão-1

3.2.1 Σ -singularidades quase-elementares e colisão de pontos de equilíbrio hiperbólicos com a descontinuidade Σ

Nesta subseção abordamos os casos em que o campo de Filippov F_Z , definido em $\Sigma^d \cup \Sigma^e$, tem um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico, que Z possui uma dobra-dobra elementar ou ainda que X (Y , respectivamente) tem um ponto de equilíbrio hiperbólico $p \in \Sigma$ enquanto Y (X , respectivamente) é transversal à descontinuidade Σ . Mostramos que, sob condições quase-genéricas, os campos com esse tipo de elementos formam uma subvariedade de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$.

Lema 3.1. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ tal que F_{Z_0} possui um ponto de equilíbrio $p \in \Sigma$ do tipo sela-nó, isto é, $F_{Z_0}(p) = 0$, $F'_{Z_0}(p) = 0$ e $F''_{Z_0}(p) \neq 0$ e $X_0(p) \neq 0$, $Y_0(p) \neq 0$, $X_0 f(p) \neq 0$ e $Y_0 f(p) \neq 0$. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui um ponto de equilíbrio do tipo sela-nó de F_Z em uma vizinhança de p . Além disso, $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \cup h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ é localmente estruturalmente estável.*

Demonstração. Observe que p está no interior de um segmento de deslize ou de escape. Dessa forma, a transversalidade de X_0 e de Y_0 em relação a Σ em uma vizinhança de p_0 garantem a existência de vizinhanças $\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, de Z_0 , e $W_p = U_p \cap V_p$, de p_0 , tais que para todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ os campos de vetores X e Y são transversais à Σ em W_p .

Assim, podemos fixar nossas atenções ao comportamento do campo de Filippov, F_Z , definido para $Z \in \mathcal{B}$ em W_p . Por ser unidimensional, a Teoria Clássica nos dá o resultado desejado. $\square$

Ressaltamos que o resultado a seguir pode ser encontrado em [36]. Essa bifurcação também foi estudada em [28] com o nome de *dobra-dobra genérica*, onde as condições quase-genéricas foram exibidas, e em [34] onde foram utilizadas as siglas *VV*, *VI* e *II* para distingui-las conforme a visibilidade das tangências envolvidas.

Definição 3.2. Seja $p \in \Sigma$ uma dobra-dobra de $Z \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Dizemos que p é uma dobra-dobra quase-genérica (ou elementar) se satisfaz uma das seguintes condições:

- (A) $p \in \Sigma$ é uma dobra-dobra visível-visível (ou dobra-dobra hiperbólica) de $Z \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$.
- (B) $p \in \Sigma$ é uma dobra-dobra visível-invisível (ou dobra-dobra parabólica) de $Z \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Note que, $p \in \partial\Sigma^d \cap \partial\Sigma^e$ ou $p \in \partial\Sigma^c$, dependendo da orientação de X e Y . No primeiro caso, o campo F_Z está definido em ambos os lados da dobra-dobra e é dado por

$$F_Z(x) = \beta + \mathcal{O}(x),$$

com $\beta \in \mathbb{R}$. Assim, a condição para que p seja uma dobra-dobra visível-invisível (ou invisível-visível) quase-genérica é $\beta \neq 0$.

- (C) $p \in \Sigma$ é uma dobra-dobra invisível-invisível (ou dobra-dobra elíptica) de $Z \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Note que, $p \in \partial\Sigma^d \cap \partial\Sigma^e$ ou $p \in \partial\Sigma^c$. Em ambos os casos há um primeiro retorno definido em uma vizinhança de p , induzido pelas involuções associadas ao fluxo dos campos de vetores X e Y , que são dadas por

$$\begin{aligned}\phi_X(x) &= -x + \alpha_X x^2 - \alpha_Y^2 x^3 + \mathcal{O}_4(x), \\ \phi_Y(x) &= -x + \alpha_Y x^2 - \alpha_X^2 x^3 + \mathcal{O}_4(x),\end{aligned}$$

com $\alpha_X, \alpha_Y \in \mathbb{R}$. Assim, para $x < 0$ suficientemente pequeno, temos definido um primeiro retorno

$$\phi_Z(x) = \phi_Y \circ \phi_X(x) = x + (\alpha_Y - \alpha_X)x^2 + (\alpha_Y - \alpha_X)^2 x^3 + \mathcal{O}_4(x),$$

e, portanto, pedimos que $\alpha_Y - \alpha_X \neq 0$, para que p seja uma dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica. A condição $\alpha_Y - \alpha_X \neq 0$ também é chamada de *Condição (G)*. Ela é responsável por garantir que o primeiro retorno ϕ_Z é hiperbólico e que, portanto, não existe trajetórias fechadas em uma vizinhança da dobra-dobra, no desdobramento da mesma, além da criada pela bifurcação pseudo-Hopf. Quando $\alpha_Y - \alpha_X = 0$, o primeiro retorno é da forma

$$\phi_Z(x) = x + \beta x^4 + \mathcal{O}_5(x),$$

nesse caso, lidamos com uma dobra-dobra de codimensão maior ou igual a dois. Para mais detalhes, ver [28, 36].

Lema 3.3. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e $p_0 = (0, 0)$ uma dobra-dobra quase-genérica (ou elementar) de Z_0 . Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tais que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$, todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui uma dobra-dobra do mesmo tipo de Z_0 e $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \cup h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ é localmente estruturalmente estável.*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ e $p_0 \in \Sigma$ uma dobra-dobra elementar de Z_0 . Logo, $X_0 f(p_0) = 0 = Y_0 f(p_0)$ e uma das condições dadas na Definição 3.2 é satisfeita. Sem perda de generalidade, podemos supor que, localmente, $\Sigma = f^{-1}(0)$ com $f(x, y) = y$. Quando necessário, escreveremos $X_0 = (X_1, X_2)$ e $Y_0 = (Y_1, Y_2)$. Observe que, no caso invisível-invisível, a Condição (G) garante que não há trajetórias fechadas em uma vizinhança da dobra-dobra, além da criada pela bifurcação pseudo-Hopf, com isso, não fará falta distinguir o tipo de dobra-dobra para construir a função h .

Considerando a tangência do campo Y com Σ , defina $g_Y : \mathfrak{X}^{S_\lambda} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_Y(Z, p) = Yf(p)$. Logo, $g_Y(Z_0, p_0) = 0$. Por hipótese, $Y_0^2 f(p_0) = Y_0(p_0) \nabla(Y_0 f)(p_0) = Y_0(p_0) \nabla Y_2(p_0) \neq 0$ e, portanto, $\frac{\partial g}{\partial p}(p_0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, com $Z_0 \in \mathcal{B}$, um aberto $U \subset \Sigma$, com $p_0 \in U$, e uma função $G : \mathcal{B} \rightarrow U$, $G \in C^{r-1}$, com $g_Y(Z, p) = 0$ se, e somente se, $G(Z) = p$.

Definimos $h(Z) = Xf(G(Z))$. Logo, $h(Z_0) = 0$ e, além disso, $Z \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ tem uma dobra-dobra se, e somente se, $h(Z) = 0$.

Mostremos que $dh(Z_0) \neq 0$. Para isso, localmente, podemos considerar $\Sigma = f^{-1}(0) = y = 0$ e $g(Z_0) = p_0 = (0, 0)$. Considere uma *bump function* $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_1(0, 0) = 1$ e $\text{supp}(g_1) \subset V_\delta(0, 0)$, $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Seja $V = (V_1, V_2)$ com $V_1 = (0, g_1)$ e $V_2 = (0, 0)$. Definimos

$$Z_\lambda = Z_0 + \lambda V = \begin{cases} X_\lambda = X_0 + \lambda V_1, & y \geq 0, \\ Y_\lambda = Y_0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$dh_{Z_0}(V) = \frac{d}{d\lambda} h(Z_0 + \lambda V)|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} (X_2 + \lambda g_1)(0, 0) = 1.$$

Portanto, h é de classe C^{r-1} , $h(Z_0) = 0$ e $dh_{Z_0} \neq 0$. □

O próximo caso também foi estudado em [34] com o nome de *tangência dupla*. A sigla *DT* também foi utilizada.

Lema 3.4. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ possui uma tangência cúbica (cúspide) de X_0 (Y_0 , respectivamente) em $p \in \Sigma$ e que Y_0 (X_0 , respectivamente) seja transversal à Σ em uma vizinhança de p . Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui uma cúspide em uma vizinhança de p . Além disso $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \cup h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ é localmente estruturalmente estável.*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ e $p_0 \in \Sigma$ tal que $X_0(p_0) \neq 0$, $X_0 f(p_0) = 0$, $X_0^2 f(p_0) = 0$, $X_0^3 f(p_0) \neq 0$ e $Y_0(p_0) \neq 0$, $Y_0 f(p_0) \neq 0$. Quando necessário, escreveremos $X_0 = (X_1, X_2)$ e $Y_0 = (Y_1, Y_2)$.

Considere a função $g_X : \mathfrak{X}^{S_\lambda} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_X(Z, p) = Xf(p)$. Logo, por hipótese, $g(Z_0, p_0) = 0$, $\frac{dg_X}{dp}(Z_0, p_0) = 0$ e $\frac{d^2 g_X}{dp^2}(Z_0, p_0) \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, com $Z_0 \in \mathcal{B}$, um aberto $U \subset \Sigma$, com $p_0 \in U$, e uma função $G_X : \mathcal{B} \rightarrow U$, $G_X \in C^{r-1}$, com $\frac{dg_X}{dp}(Z, p) = 0$ se, e somente se, $G_X(Z) = p$. Diminuindo $\mathcal{B}$ e U , se necessário, a transversalidade entre Y_0 e Σ nos permite supor que todo $Y \in \mathcal{B}$ é também transversal à Σ em U .

Assumindo $\frac{d^2 g_X}{dp^2}(Z, p) > 0$, o outro caso é análogo, segue que $G_X(Z)$ é o mínimo da função $g_X(p) = g_X(Z, G_X(Z))$. Logo, se $g_X(Z, G_X(Z)) > 0$ o campo X é transversal à Σ em U , se $g_X(Z, G_X(Z)) = 0$ temos uma cúspide em $G_X(Z)$ e se $g_X(Z, G_X(Z)) < 0$, existem $p_1 < G_X(Z) < p_2$ tais que $g_X(Z, p_1) = 0 = g_X(Z, p_2)$ e $\frac{dg_X}{dp}(Z, p_1) \neq 0$, $\frac{dg_X}{dp}(Z, p_2) \neq 0$.

Definimos $h(Z) = g_X(Z, G_X(Z))$. Assim, $h(Z_0) = 0$ e, além disso, $dh_{Z_0} \neq 0$, como na Teoria Clássica [51]. $\square$

A seguir estudaremos o caso em que $Z = (X, Y)$ tem uma colisão de ponto de equilíbrio hiperbólico de X ou de Y com a descontinuidade Σ . Podemos ter três tipos distintos de pontos de equilíbrio sobre Σ : sela, foco e nó. Em todos os casos precisamos de condições genéricas adicionais para que a bifurcação seja de codimensão-1. Essas bifurcações foram estudadas em [34], com os nomes de *boundary-saddle*, *boundary-focus* e *boundary-node*, com as siglas *BS*, *BF* e *BN*. Também foram estudadas em [28] onde as condições genéricas, que descreveremos a seguir, foram exibidas.

Definição 3.5. Seja $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e $p \in \Sigma$ um ponto de equilíbrio de X ou de Y . Observe que, sem perda de generalidade, podemos supor $p = (0, 0)$ e $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$, já que a análise a seguir é local. Dizemos que p é quase-genérico se satisfaz uma das seguintes condições.

- (A) Seja $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e $p \in \Sigma$ uma sela hiperbólica de X (Y , respectivamente) enquanto Y (X , respectivamente) é transversal à Σ em uma vizinhança de p . Além disso, suponhamos que os auto-espacos da sela sejam transversais à descontinuidade Σ . Note que, $p \in (\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^d)$ ou $p \in (\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e)$ e, portanto, o campo de Filippov F_Z está definido à direita ou à esquerda de p . Nesse caso, temos

$$F_Z(x) = \alpha x + \mathcal{O}_2(x), \quad (3.1)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, a segunda condição para que p seja quase-genérico é que $\alpha \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos um ponto de equilíbrio semi-hiperbólico do campo de Filippov estendido, F_Z . Além disso, o valor de α determina a estabilidade do ponto de equilíbrio de F_Z . Por fim, pedimos que em $p \in \Sigma$ o auto-espaço da sela e o

campo de vetores Y sejam transversais. Isso implica que não existe conexões entre as separatrizes da sela e do ponto de equilíbrio de F_Z no desdobramento. O não cumprimento dessas condições pode acarretar em bifurcações de codimensão maior. Exemplos disso podem ser encontrados em [28].

- (B) Seja $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e $p \in \Sigma$ um foco hiperbólico de X (Y , respectivamente) enquanto Y (X , respectivamente) é transversal à Σ em uma vizinhança de p . Além disso, como no caso de colisão de uma sela com a descontinuidade, temos $p \in (\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^d)$ ou $p \in (\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e)$ e, portanto, o campo de Filippov F_Z está definido à direita ou à esquerda de p e é dado por (3.1), com $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, temos que impor $\alpha \neq 0$ como condição quase-genérica. Como última condição, não há conexão da tangência, originada pelo deslocamento do foco, com o ponto de equilíbrio do campo de Filippov no desdobramento. Como nos casos anteriores, o não cumprimento dessas condições pode acarretar em bifurcações de codimensão maior.
- (C) Seja $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e $p \in \Sigma$ um nó hiperbólico de X (Y , respectivamente) enquanto Y (X , respectivamente) é transversal à Σ em uma vizinhança de p . Além disso, os auto-valores do nó tem que ser distintos em p e os auto-espacos devem ser transversais à Σ . Note que, como no caso de colisão de uma sela com a descontinuidade, temos $p \in (\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^d)$ ou $p \in (\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e)$ e, portanto, o campo de Filippov F_Z está definido à direita ou à esquerda de p e é dado por (3.1), com $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, temos que impor $\alpha \neq 0$ como condição quase-genérica. Como nos casos anteriores, o não cumprimento dessas condições pode acarretar em bifurcações de codimensão maior.

Lema 3.6. *Suponhamos que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ possui um equilíbrio hiperbólico p de X_0 (Y_0 , respectivamente) em Σ , satisfazendo a condição quase-genérica (A), (B) ou (C) dadas na Definição 3.5. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui uma singularidade do mesmo tipo da de Z_0 em Σ . Além disso $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \cup h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ é localmente estruturalmente estável.*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ e $p_0 \in \Sigma$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de X_0 satisfazendo uma das condições quase-genéricas (A), (B) ou (C) da Definição 3.5. O caso em que p_0 é ponto de equilíbrio de Y_0 é análogo.

A hiperbolicidade de p_0 e a transversalidade de Y_0 em relação a Σ em uma vizinhança de p_0 garantem a existência de vizinhanças $\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, de Z_0 , e $W_p = U_p \cap V_p$, de p_0 , tais que para todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ existe um ponto de equilíbrio hiperbólico $q_1 = (a_Z, b_Z)$ de X em W_p cujos auto-espacos sejam transversais à Σ e Y seja transversal à Σ em W_p . Além disso, as condições dadas na Definição 3.5 garantem que, caso o campo de Filippov esteja definido e possua um ponto de equilíbrio ele será hiperbólico.

Com isso, definimos

$$\begin{aligned} h : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\rightarrow h(Z) = b_Z. \end{aligned}$$

Logo, $h(Z_0) = 0$ e $h^{-1}(0)$ é o conjunto de campos de vetores $Z = (X, Y)$ de modo que X possui um ponto de equilíbrio hiperbólico em Σ . Além disso, se $b_Z > 0$ ($b_Z < 0$), então $(a_Z, b_Z) \in \Sigma^+$ ($(a_Z, b_Z) \in \Sigma^-$) e, portanto, q_1 é um ponto de equilíbrio admissível (não-admissível) de $Z \in \mathcal{B}$. Concluimos a prova pois $dh_{Z_0} \neq 0$ como na Teoria Clássica (ver [51]). $\square$

3.2.2 Poli-trajetória fechada semi-hiperbólica e trajetória fechada tangente à descontinuidade Σ

Nesta subseção abordamos os casos em que o campo $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ possui uma poli-trajetória do tipo I ou III semi-hiperbólica e também que X (Y , respectivamente) possui uma trajetória fechada hiperbólica e tangente a $p \in \Sigma$ enquanto Y (X , respectivamente) é transversal à descontinuidade Σ em uma vizinhança de p , mostrando que em todos os casos, sob condições quase-genéricas, os campos com esse tipo de elementos formam uma subvariedade de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$.

Observe que, como mencionado anteriormente, por se tratar de uma análise em uma vizinhança da poli-trajetória de $Z = (X, Y)$ ou da trajetória fechada de X ou Y podemos usar cartas locais e trabalhar com coordenadas cartesianas em todos os resultados desta seção.

No seguinte lema mostramos como adaptar a construção da coroa que existe em torno de trajetórias fechadas hiperbólicas, que pode ser vista em [42, 48], para poli-trajetória fechada elementar do tipo I. Com pequenas adaptações, essa construção também será utilizada para estudar poli-trajetórias fechadas do tipo I com primeiro retorno não hiperbólico.

Lema 3.7. *Seja γ uma poli-trajetória elementar do tipo I de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ tal que $\pi'(q) \neq 1$ para algum $q \in \gamma \cap \Sigma$. Então, existem vizinhanças $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e C_γ de γ em $\mathbb{S}_\lambda^2$, de modo que ∂C_γ é a união disjunta de duas curvas C_1 e C_2 transversais a todo $Z \in \mathcal{B}$. Além disso, todo $Z \in \mathcal{B}$ possui uma poli-trajetória fechada elementar do tipo I em C_γ com a mesma estabilidade de γ . Portanto, Z_0 é localmente estruturalmente estável em C_γ .*

Demonstração. Por hipótese, γ é uma trajetória fechada elementar do tipo I com $\pi'(q) \neq 1$ para algum $q \in \gamma \cap \Sigma$, onde π é o primeiro retorno associado a γ , como na Definição 2.20. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\pi'(q) < 1$ e assim $d'(q) < 0$, onde $d(p) = \pi(p) - p$ denota a aplicação distância.

Considere $Z_\theta = (X_\theta, Y_\theta)$ o campo de vetores obtido a partir de $Z_0 = (X_0, Y_0)$ após uma rotação de ângulo θ dos campos X_0 e Y_0 , isto é,

$$X_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot X_0,$$

e

$$Y_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot Y_0.$$

Denote por $\pi_\theta(x)$ a aplicação de primeiro retorno do campo Z_θ , definida em Σ . A partir de π_θ , defina

$$\begin{aligned} d_\theta : \mathbb{R} \times \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ (\theta, x) &\mapsto d(\theta, x) = \pi_\theta(x) - x, \end{aligned}$$

a distância associada a Z_θ .

Temos $d_0(0, q) = d(q) = 0$ e $d'_0(0, q) = d'(q) \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem $U \subset \mathbb{R} \times \Sigma$ aberto com $(0, q) \in U$, $V \subset \mathbb{R}$ aberto com $0 \in V$ e $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^{r-1} tal que $\phi(0) = q$, $(\theta, \phi(\theta)) \in U$ e $d_\theta(\theta, \phi(\theta)) = 0$ para todo $\theta \in V$.

Tome $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Assim, para todo θ com $|\theta| < \varepsilon$ existe $q_\theta = \phi(\theta) \in \Sigma$ de modo que $d(\theta, q_\theta) = 0$. Isto é, Z_θ tem uma órbita periódica que chamaremos de γ_θ . Note que, $\gamma_\theta \rightarrow \gamma$ quando $\theta \rightarrow 0$.

Afirmção: $\gamma_\theta \cap \gamma = \emptyset$ para todo θ com $|\theta| < \varepsilon$.

Como Z_θ é construído a partir de Z_0 por uma rotação de ângulo θ , com θ suficientemente pequeno, as trajetórias de Z_θ e Z_0 são sempre distintas e, portanto, se existir interseção entre as trajetórias de Z_0 e de Z_θ , essa se dará de forma transversal. Assim, se $\gamma \cap \gamma_\theta \neq \emptyset$, como ambas são curvas fechadas segue, pelo Teorema da Curva de Jordan e pela unicidade das soluções (já que γ_θ intersecta Σ apenas em pontos de costura) que as curvas se intersectam em pelo menos dois pontos.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\gamma \cap \Sigma = \{p_1, p_2\}$ e supor que $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(\pi) = p_2$, $\gamma|_{[0, \pi]} \subset \Sigma^+$ e $\gamma|_{[\pi, 2\pi]} \subset \Sigma^-$. O caso geral é análogo.

Defina

$$\begin{aligned} g : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = \left\langle \frac{Z_0^\perp(\gamma(t))}{\|Z_0^\perp(\gamma(t))\|}, \frac{Z_\theta(\gamma(t))}{\|Z_\theta(\gamma(t))\|} \right\rangle, \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$, já que estamos trabalhando com cartas

locais. Assim, como $Z_0 = (X_0, Y_0)$, então

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = \left\langle \frac{X_0^\perp(\gamma(t))}{\|X_0^\perp(\gamma(t))\|}, \frac{X_\theta(\gamma(t))}{\|X_\theta(\gamma(t))\|} \right\rangle, & t \in [0, \pi], \\ g_2(t) = \left\langle \frac{Y_0^\perp(\gamma(t))}{\|Y_0^\perp(\gamma(t))\|}, \frac{Y_\theta(\gamma(t))}{\|Y_\theta(\gamma(t))\|} \right\rangle, & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Então, para todo $t \in [0, 2\pi]$, $g(t) = \cos \alpha$, com $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$. Portanto (3.2) é constante. Por outro lado, como as curvas se intersectam em pelo menos dois pontos, digamos $\gamma(t_1) = \gamma_\theta(t_1)$ e $\gamma(t_2) = \gamma_\theta(t_2)$ segue que $\alpha = \angle(Z_0^\perp(\gamma(t_1)), Z_\theta(\gamma(t_1))) > \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \angle(Z_0^\perp(\gamma(t_2)), Z_\theta(\gamma(t_2))) < \frac{\pi}{2}$ (ou $\alpha = \angle(Z_0^\perp(\gamma(t_1)), Z_\theta(\gamma(t_1))) < \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \angle(Z_0^\perp(\gamma(t_2)), Z_\theta(\gamma(t_2))) > \frac{\pi}{2}$), onde $\angle(u, v)$ denota o ângulo entre u e v . Portanto, $g(t_1)$ e $g(t_2)$ tem sinais diferentes nesses pontos o que contradiz o fato de (3.2) ser constante.

Logo, $\gamma_\theta \cap \gamma = \emptyset$ para todo θ com $|\theta| < \varepsilon$.

Com isso, podemos escolher $\theta_1 < 0 < \theta_2$ com $|\theta_i| < \varepsilon$, $i = 1, 2$ de modo que γ_{θ_1} e γ_{θ_2} delimitem uma coroa em torno de γ . Chamaremos essa coroa de C_γ .

Além disso, como Z_0 tem um número finito de singularidades, podemos supor que Z_0 não se anula em C_γ , diminuindo θ_1 e θ_2 , caso seja necessário.

Assim, existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}^{\mathbb{S}^\lambda}$ de Z_0 tal que as trajetórias de todo $Z \in \mathcal{B}$ cortam γ_{θ_1} e γ_{θ_2} transversalmente e no mesmo sentido que Z_0 . Além disso, como Z_0 não se anula em C_γ , $Z \in \mathcal{B}$ também não se anulará, diminuindo $\mathcal{B}$, se necessário.

Note que os zeros de π são isolados e $C_\gamma \cap \Sigma \subset \Sigma^c$. Logo, pelo Teorema de Poincaré–Bendixson [6] todo $Z \in \mathcal{B}$ terá uma única trajetória fechada em C_γ com a mesma estabilidade de γ .

Além disso, dado $Z \in \mathcal{B}$ a Σ -equivalência entre Z e Z_0 é construída por razão de comprimento de arco considerando Σ como seção transversal, assim como no Teorema de Peixoto (ver [42]). $\square$

No caso das poli-trajetórias fechadas elementares do tipo II vizinhanças análogas também existem. Basta observar que os arcos de escape ou deslize e o fato de os campos X_0 e Y_0 serem linearmente independentes em todo ponto $p \in \Sigma$ (hipótese que garante a não existência de Σ -singularidades) serão preservados para campos em uma vizinhança $\mathcal{B}$ de $Z_0 = (X_0, Y_0)$. Nesse caso, seguindo as notações do Lema 3.7, podemos tomar C_γ de modo que $\partial C_\gamma = C_{\varepsilon^+} \cup C_{\varepsilon^-}$, onde $C_{\varepsilon^\pm} = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}_\lambda^2; z = \pm \varepsilon\}$. Além disso, no caso de Z_0 admitir poli-trajetórias elementares do tipo III as dobras e a existência de segmentos de deslize ou escape também são preservadas para campos em uma vizinhança de Z_0 . Como comentamos anteriormente, a análise local de bifurcação de codimensão-1 recai sobre a análise de conexão de separatrizes e, por isso, as demonstrações são inspiradas nas demonstrações de [7, 47] que envolvem esses elementos.

Lema 3.8. *Seja γ uma poli-trajetória fechada do tipo I de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ com $\pi'(p_0) = 1$ e $\pi''(p_0) \neq 0$ para $p_0 \in \gamma \cap \Sigma$. Então, existem vizinhanças $\mathcal{B}$ em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ de Z_0 e C_γ em $\mathbb{S}_\lambda^2$ de γ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tais que ∂C_γ é a união disjunta de duas curvas C_1 e C_2 transversais a todo $Z \in \mathcal{B}$. Além disso, $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui uma poli-trajetória do tipo I nas mesmas hipóteses de γ . Ademais, $h^{-1}(\mathbb{R}_-)$ é estruturalmente estável e admite duas poli-trajetórias fechadas elementares do tipo I em C_γ e $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ pode admitir conexões de separatrizes a menos que γ não seja simultaneamente α e ω -limite de separatrizes de sela ou dobra.*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$, γ uma poli-trajetória fechada do tipo I de Z_0 e $p_0 \in \Sigma \cap \gamma$ com $\pi'(p_0) = 1$. Quando necessário, escreveremos $Z_0 = (X_0, Y_0)$ com $X_0 = (X_1, X_2)$ e $Y_0 = (Y_1, Y_2)$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $\gamma \cap \Sigma = \{p_0, p_1\}$ e $\pi = \pi_Y \circ \pi_X$, onde π_X e π_Y denotam as aplicações de semi-retorno definidas em $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \Sigma$. O caso em que $\gamma \cap \Sigma = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $n \geq 2$, é análogo. Além disso, por hipótese, temos $\pi(p_0) = p_0$, $\pi'(p_0) = 1$ e $\pi''(p_0) \neq 0$ e assumimos, também sem perda de generalidade, que $\pi''(p_0) > 0$.

Seja S uma seção transversal local a X_0 em $s_0 \in \gamma$, de modo que $S \subset \Sigma^+$. Podemos escrever $\pi_X = \pi_1 \circ \pi_3$, diminuindo Σ_1, Σ_2 e S , se necessário, com $\pi_3 : \Sigma_1 \rightarrow S$ e $\pi_1 : S \rightarrow \Sigma_2$, como na Figura 3.1. Chamando $s_0 = \pi_3(p_0) = \pi_1^{-1}(p_1)$, temos $\pi_3 \circ \pi_Y \circ \pi_1(s_0) = s_0$, $(\pi_3 \circ \pi_Y \circ \pi_1)'(s_0) = 1$ e $(\pi_3 \circ \pi_Y \circ \pi_1)''(s_0) \neq 0$.

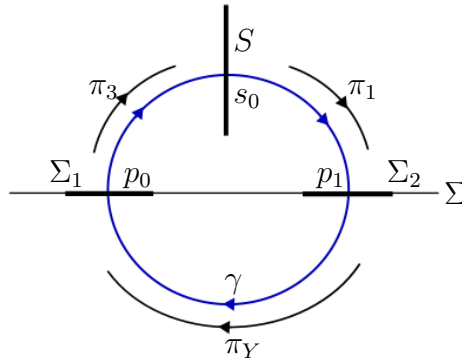


Figura 3.1: Primeiro retorno associado a poli-trajetória fechada do tipo I.

Definimos $d_S : \mathcal{B} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda} \times S \rightarrow \mathbb{R}$ por $d_S(Z, s) = \pi_S(Z, s) - s$, com $\pi_S = \pi_3 \circ \pi_Y \circ \pi_1$. Dessa forma, temos $d_S(Z_0, s_0) = 0$, $d'_S(Z_0, s_0) = \pi'_S(s_0) - 1 = 0$ e $d''_S(Z_0, s_0) \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, com $Z_0 \in \mathcal{B}_0$, um aberto $U \subset S$, com $s_0 \in U$, e uma função $G : \mathcal{B}_0 \rightarrow U$, $G \in C^{r-1}$, $G(Z) = s$ tais que $d'(Z, s) = 0$ se, e somente se, $s = G(Z)$. Definimos $h(Z) = d(Z, G(Z))$, com $Z \in \mathcal{B}_0$ e omitimos o índice S da função distância d_S para simplificar a notação. Logo, $h(Z_0, s_0) = 0$.

De forma análoga ao feito no Lema 3.7, construímos uma coroa C_γ em torno de γ , onde ∂C_γ é a união disjunta de duas curvas C_1 e C_2 transversais a todo $Z \in \mathcal{B}_0$ e de modo que o fluxo de Z_0 entra em C_γ por C_1 e sai de C_γ por C_2 . Como assumimos $\pi''(p_0) > 0$ segue que $\frac{\partial^2 d}{\partial s^2}(Z, s) > 0$, para todo $(Z, s) \in \mathcal{B}_0 \times U_1$, com $U_1 \subset U \cap C_\gamma$. Dessa forma, temos $\frac{\partial d}{\partial s}(Z, s) = 0$ e $\frac{\partial^2 d}{\partial s^2}(Z, s) > 0$ e, portanto, $h(Z) = d(Z, G(Z))$ é o mínimo da função $d_Z(s) = \pi_Z(s) - s$, para $s \in U_1$. Com isso, concluímos que π_Z tem um ponto fixo $G(Z)$ se, e somente se, $h(Z) = 0$. Se $h(Z) > 0$ segue que π não tem pontos fixos e se $h(Z) < 0$ então π tem dois pontos fixos. Dessa forma, todo $Z \in h^{-1}(0)$ tem uma poli trajetória fechada do tipo I γ_Z , em C_γ , de modo que dado $p \in \gamma_Z \cap \Sigma$ temos $\pi'(p) = 1$. Além disso, $h^{-1}(\mathbb{R}_-)$ admite duas poli-trajetórias fechadas com primeiro retorno hiperbólico e $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ não admite poli-trajetória fechada em C_γ .

Para provar que $dh_{Z_0} \neq 0$, como s_0 é um ponto regular de X , pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um sistema de coordenadas $\{x_1, x_2\}$ no qual $X_0 = (1, 0)$, em uma vizinhança de s_0 com $x_1(s_0) = x_2(s_0) = 0$.

Considere $S_{-\delta} = \{(-\delta, u); -\delta < u < \delta\}$ e $S_\delta = \{(\delta, u); -\delta < u < \delta\}$, com δ suficientemente pequeno.

Nas coordenadas $\{x_1, x_2\}$, escrevendo $G(Z_0) = (G_1(Z_0), G_2(Z_0))$, temos

$$h(Z_0) = d(Z_0, G(Z_0)) = x_2(\pi_S(Z_0, G_2(Z_0))) - x_2(G_2(Z_0)).$$

Seja $\phi_{X_0}(t, x)$ o fluxo do campo X_0 , passando por $x \in \Sigma^+$ no tempo t . Observe que, $\phi_{X_0}(t, (-\delta, u)) = (-\delta + t, u)$. Para δ suficientemente pequeno, considerando $s_{-\delta} = \pi_{S_{-\delta}}(Z_0, G(Z_0))$ temos

$$x_2(\pi_S(G(Z_0))) = x_2(\phi_{Z_0}(T(Z_0, s_{-\delta}), s_{-\delta})),$$

onde T é o tempo de retorno de $S_{-\delta}$ a S . Logo,

$$h(Z_0) = x_2(\phi_{Z_0}(T(Z_0, s_{-\delta}), s_{-\delta})) - x_2(G_2(Z_0)).$$

Defina, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma *bump function* tal que $g(-\delta, 0) = 1$ e $\text{supp}(g) \subset V_{\frac{\delta}{4}}(-\delta, 0)$. Seja $V = (V_1, V_2)$ com $V_1 = (0, g)$ e $V_2 = (0, 0)$. Considere

$$Z_\lambda = Z_0 + \lambda V = \begin{cases} X_\lambda = X_0 + \lambda V, & z \geq 0, \\ Y_\lambda = Y_0, & z \leq 0. \end{cases}$$

Dessa forma, na vizinhança dada pelo fluxo tubular, temos $X_\lambda = (1, \lambda g)$ e

$$\begin{aligned} dh_{Z_0}(V) &= \frac{d}{d\lambda} h(Z_0 + \lambda V)|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} (x_2(\phi_{Z_\lambda}(T(Z_\lambda, s_{-\delta}), s_{-\delta})) - x_2(G(Z_\lambda))) = \\ &\quad \frac{d}{d\lambda} (x_2(\phi_{Z_\lambda}(T(X_\lambda, s_{-\delta}), s_{-\delta}))). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Note que a solução de $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, 0)$ que passa por $s_{-\delta} = (-\delta, 0)$ em $t = 0$ é $(x(t), y(t)) = (t - \delta, 0)$. A solução de $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, \lambda g(x, y))$ que passa por $(-\delta, 0)$ em $t = 0$ satisfaz $x(t) = t - \delta$ e, portanto, $y(t)$ é a solução de

$$\dot{y}(t) = \lambda g(t - \delta, y), y(0) = 0. \quad (3.4)$$

Como $T(Z_\lambda, s_{-\delta}) = \delta$ para todo λ , então $x_2(\phi_{Z_\lambda}(T(Z_\lambda, s_{-\delta}), s_{-\delta})) = y(\delta)$, onde y é solução de (3.4). Expandindo $y(t)$ em λ , obtemos $y(t) = y_0(t) + \lambda y_1(t) + \mathcal{O}_2(\lambda)$, com $y_0(0) = 0$ e $y_1(0) = 0$. Além disso, $y'(t) = y'_0(t) + \lambda y'_1(t) + \mathcal{O}_2(\lambda)$ e, por outro lado, $\lambda g(t - \delta, y(t)) = \lambda g(t - \delta, y_0(t)) + \mathcal{O}_2(\lambda)$. Comparando termo a termo em λ , obtemos

$$\lambda g(t - \delta, y(t)) = \lambda g(t - \delta, y_0(t))$$

o que implica, $y'_0(t) = 0$, $y'_1(t) = g(t - \delta, y_0(t))$. De $y'_0(t) = 0$, $y_0(0) = 0$, concluímos que $y_0(t) \equiv 0$ e de $y'_1(t) = g(t - \delta, 0)$, $y_1(0) = 0$ concluímos que $y_1(t) = \int_0^t g(s - \delta, 0) ds$. Substituindo em (3.3) e usando que g é uma *bump function*, obtemos

$$dh_{Z_0}(V) = \frac{d}{d\lambda} y(\delta)|_{\lambda=0} = y_1(\delta) = \int_0^\delta g(s - \delta, 0) ds \neq 0.$$

Portanto, h é de classe C^{r-1} e tal que $h(Z_0) = 0$ e $dh_{Z_0} \neq 0$. Assim, resta mostrar que $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ pode admitir conexões de separatrizes a menos que γ não seja simultaneamente α e ω -limite de separatrizes de sela ou dobra.

Como vimos, as trajetórias de Z_0 cortam o bordo da coroa C_γ , $\partial C_\gamma = C_1 \cup C_2$, de modo transversal. E, sem perda de generalidade, podemos supor que Z_0 aponta para o interior de C_γ sobre C_1 e para o exterior de C_γ sobre C_2 , como na Figura 3.2. Além disso, quando $h(Z) > 0$ o campo Z não tem poli-trajetória fechada em C_γ . Nesse caso, o fluxo de Z entra em C_γ por C_1 e sai por C_2 e, portanto, define uma aplicação $\eta_Z : C_1 \rightarrow C_2$.

A seguir, vamos supor que a poli-trajetória quase-genérica γ , de Z_0 , seja simultaneamente α e ω -limite de separatrizes de sela ou dobra para vermos que, sob essas condições, quando $h(Z) > 0$ o campo Z pode admitir conexões de separatrizes. Nesse caso, sejam $\omega_1(Z), \dots, \omega_l(Z)$ os extremos dos arcos de ω -limite de separatrizes de selas ou tangências de Z que cortam C_1 e $\alpha_1(Z), \dots, \alpha_k(Z)$ os extremos dos arcos de α -limite de separatrizes de selas ou tangências de Z que cortam C_2 . Assim, pelos pontos ω_i, α_j , $i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, k$ passam separatrizes de selas e de tangências.

Denotamos por $\Sigma_1^{S_\lambda}(d_1, k\alpha, l\omega)$ o conjunto para os quais a poli-trajetória fechada é α -limite de k e ω -limite de l separatrizes de selas ou tangências. Note que, Z é localmente estruturalmente estável se, e somente se, $\alpha_Z(\omega_i(Z)) \neq \alpha_j(Z)$ para todo i, j e isso sempre ocorre quando $k \cdot l = 0$.

Afirmção: Se $k \cdot l > 0$ existem campos Z , com $h(Z)$ suficientemente pequeno, tais que $\eta_Z(\omega_i(Z)) = \alpha_j(Z)$, para algum par (i, j) , $i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, k$.

Considere $k = 1$, $l = 1$ e $p_1 \in \gamma \cap \Sigma$ como inicialmente. Como $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ é seção transversal para $Z_0 \in h^{-1}(0)$, considere as sequências $\phi(t_n)$ e $\psi(t_m)$, definidas pelas ‘batidas’ do fluxo de Z em Σ_2 passando por α_1 e ω_1 , respectivamente. Logo, $\phi(t_n)$ ($\psi(t_m)$, respectivamente) é uma sequência monótona crescente (decrecente, respectivamente) e $\phi(t_n) \rightarrow p_1$ ($\psi(t_m) \rightarrow p_1$, respectivamente).

Como vimos anteriormente, quando $h(Z) > 0$ o campo Z não tem poli-trajetória fechada em C_γ . Nesse caso, o fluxo de Z entra em C_γ por C_1 e sai por C_2 e, portanto, define uma aplicação $\eta_Z : C_1 \rightarrow C_2$. Dessa forma, as sequências $\phi(t_n)$ e $\psi(t_m)$ passam a estar definidas em Σ_2 e não estão mais limitadas superiormente (inferiamente), por p_1 .

Se existirem tempos t_n, t_m de modo que $\phi(t_n) = \psi(t_m)$, Z admitirá uma conexão de separatrizes. Fixe α_1 e, portanto, $\psi(t_m)$. Sejam q_1, q_2 as sela e/ou dobras que geram ω_i e α_i , respectivamente. Considere uma perturbação local em uma vizinhança C_{q_1} de q_1 . Mais especificamente, considere uma rotação do campo inicial por um ângulo θ como perturbação. Seja a_1 o ponto onde a separatriz de q_1 , que inicialmente se aproximava de γ , corta ∂C_{q_1} . Como γ era α e ω -limite de q_1 e q_2 então, existem $\varepsilon > 0$, suficientemente pequenos, tais que para $h(Z) = \varepsilon$ a trajetória passando por q_2 corta ∂C_{q_1} . Seja a_2 esse ponto. A rotação em C_{q_1} gera uma perturbação nos pontos a_1 e, para uma sequência de ângulos θ_i teremos $a_1 = a_2$ e, portanto, conexões de separatrizes.

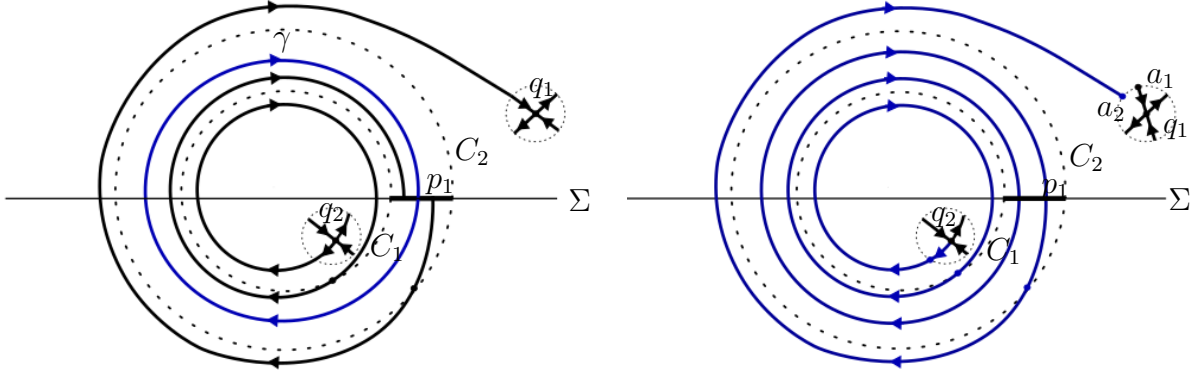


Figura 3.2: Possível conexão de separatrizes podem surgir no rompimento de uma poli-trajetória do tipo I não elementar.

Com isso concluímos que $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ pode admitir conexões de separatrizes quando γ é α ou ω -limite de separatrizes de sela ou dobra.

Observe que, se $\min\{k, l\} > 1$ não é claro que podemos produzir duas conexões simultâneas com esse tipo de perturbação. $\square$

Observação 3.9. *Como comentamos na Observação 2.23 do Capítulo 2, os mesmos argumentos se aplicam a pseudo-poli-trajetórias do tipo I.*

A seguir, analisamos os dois casos envolvendo poli-trajetórias fechadas do tipo III. Note que, as imposições da Definição 2.20 asseguram que se γ é uma poli-trajetória fechada elementar do tipo III, então γ é localmente estruturalmente estável.

Lema 3.10. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e γ uma poli-trajetória fechada do tipo III de Z_0 que possui todos os arcos de deslize e apenas um de escape (ou todos os arcos de escape e um de deslize). Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ de Z_0 e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui uma poli-trajetória do tipo III nas mesmas hipóteses de γ . Além disso, considere S uma seção transversal local de Z_0 em $p \in \gamma$, com p no segmento de trajetória que une as duas dobras de γ . Então, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ($h^{-1}(\mathbb{R}_-)$) pode admitir conexões de separatrizes a menos que nenhuma separatriz de sela corte a seção transversal local S .*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ e γ uma poli-trajetória fechada do tipo III de Z_0 , que contém todos os arcos de deslize e apenas um de escape (ou todos os arcos de escape e apenas um de deslize). Dessa forma γ possui uma conexão de tangências e, portanto, construímos h como no caso de conexões de tangência da Teoria Clássica, ver [51]. Quando a conexão de dobras que forma a poli-trajetória γ se rompe apenas uma das separatrizes de dobras que formavam a conexão permanecerá na região inicialmente limitada por γ .

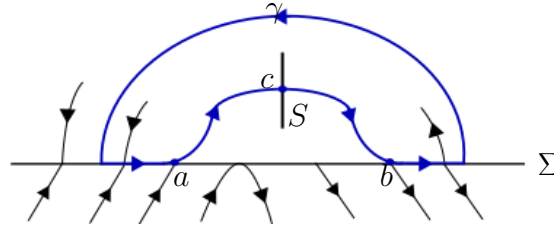


Figura 3.3: Poli-trajetória do tipo III contendo um segmento de deslize e um de escape.

Chamamos de a e b as dobras que aparecem em γ e c um ponto da trajetória que conecta a e b que escolhemos arbitrariamente. Sem perda de generalidade, podemos supor a e b são dobras de X e que $c \in \Sigma^+$. Por c existe uma seção transversal S , do campo X , inteiramente contida em Σ^+ .

Pela continuidade do fluxo, quando $h(Z) \neq 0$, o fluxo de X que passa por a (b) corta S em $\tilde{a}$ ($\tilde{b}$, respectivamente), com $\tilde{a} \neq \tilde{b}$. Podemos estabelecer uma relação de ordem em S e supor, sem perda de generalidade, que quando $h^{-1}(Z) > 0$, temos $\tilde{a} > c > \tilde{b}$, como na Figura 3.4. Nos fixaremos nesse caso, os demais são análogos.

Diminuindo S , se necessário, pela continuidade do fluxo de X a trajetória passando por $\tilde{b}$ corta Σ em tempo finito.

Resta provar que se $Z \in h^{-1}(\mathbb{R}_+) \cup h^{-1}(\mathbb{R}_-)$, então Z pode admitir conexão de separatrizes a menos que nenhuma separatriz de sela corte a seção transversal local S .

Seja s_1 uma sela de X contida na região inicialmente limitada pela poli-trajetória γ e suponha que uma separatriz de s_1 corte S em $\tilde{s}_1$. Considerando uma perturbação local em uma vizinhança de s_1 , mais especificamente, uma rotação por ângulo θ . Assim como no

lema anterior, é possível escolher θ de modo que $\tilde{s}_1 = \tilde{a}$. Portanto, existem perturbações para as quais temos uma conexão sela-dobra, que surge após o rompimento de γ .

De modo análogo, seja s_2 uma sela de X ou de Y contida no exterior da região inicialmente limitada pela trajetória γ e suponha que uma separatriz de s_2 corte S em $\tilde{s}_2$. Considerando uma perturbação local em uma vizinhança de s_2 , mais especificamente, uma rotação por ângulo θ . Assim como acima, é possível escolher θ de modo que $\tilde{s}_2 = \tilde{b}$. Portanto, existem perturbações para as quais temos uma conexão sela-dobra, que surge após o rompimento de γ . $\square$

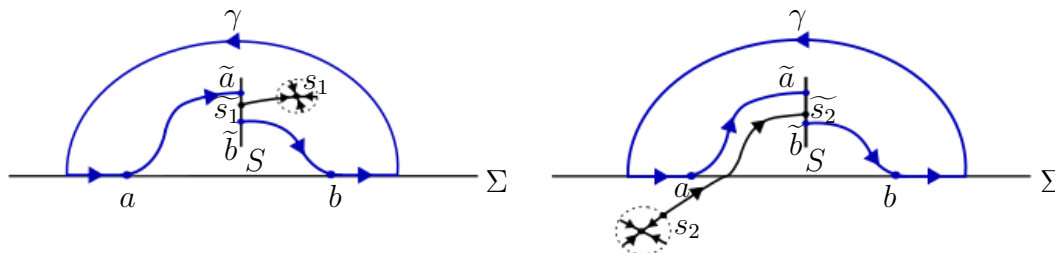


Figura 3.4: Possíveis conexões de separatrizes que podem surgir no rompimento de uma poli-trajetória do tipo III.

Note que, quando temos uma poli-trajetória do tipo III não elementar temos conexão de dobras, já que as trajetórias entram em arcos de escape apenas por pontos de dobras e saem de pontos de delizes apenas por pontos de dobras, como já comentamos. Mas, além disso, a poli-trajetória se forma pois um arco de trajetória saindo de um ponto regular de F_Z retorna ao segmento de deslize, em um ponto regular de F_Z , em tempo finito. A continuidade dos fluxos de X e Y garantem que, nesse caso, existe um contínuo de órbitas periódicas do tipo III. Todas as órbitas desse contínuo compartilham da mesma conexão de dobras e, por isso, quando rompemos a conexão, rompemos o contínuo de poli-trajetórias do tipo III. Outro exemplo clássico disso foi dado em [28], e exibimos na próxima figura.

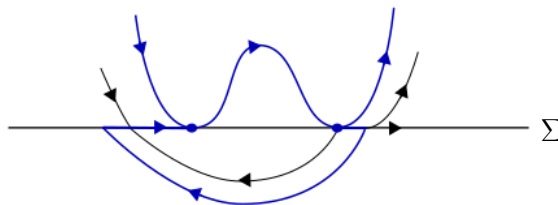


Figura 3.5: Exemplo de poli-trajetória do tipo III.

O próximo caso foi abordado em [28], na seção que trata de conexões heteroclínicas de dobras, pois, como já vimos, os casos de bifurcações globais podem ser vistos como casos

de conexões de separatrizes. A prova do Lema 3.11 é análoga a anterior e, por isso, será omitida.

Lema 3.11. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e γ uma poli-trajetória fechada do tipo III de Z_0 com todos os arcos de deslize ou escape e que possui uma conexão de tangências. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ de Z_0 e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui uma poli-trajetória do tipo III nas mesmas hipóteses de γ . Além disso, considere S uma seção transversal local de Z em $p \in \gamma$, com p no segmento de trajetória que une as duas dobras de γ . Então, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ($h^{-1}(\mathbb{R}_-)$) pode admitir conexões de separatrizes a menos que nenhuma separatriz de sela corte a seção transversal local S .*

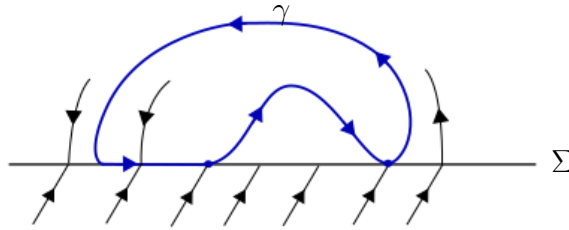


Figura 3.6: Poli-trajetória do tipo III contendo uma conexão de dobras.

O próximo caso foi estudado em [34] com o nome de *touching bifurcation* ou *grazing bifurcation* com as siglas TC_1 e TC_2 . Também foi abordado em [28], na seção que trata de conexões homoclínicas de dobras, pois, como já vimos, os casos de bifurcações globais podem ser vistos como casos de conexões de separatrizes.

Lema 3.12. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ tal que X_0 (Y_0) possui uma trajetória fechada hiperbólica γ_0 tangenciando Σ de forma quadrática em um único ponto $p \in \Sigma \cap \gamma_0$ e que $X_0 f(q) \neq 0$ para todo q em uma vizinhança de p . Além disso, suponha que Y_0 (X_0 , respectivamente) seja transversal à Σ em uma vizinhança de p . Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ de Z_0 e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tais que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $Z \in h^{-1}(0)$ se, e somente se, Z possui uma trajetória fechada hiperbólica tangenciando Σ e seguindo as mesmas hipóteses enunciadas. Além disso, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ou $h^{-1}(\mathbb{R}_-)$ admite poli-trajetórias elementares do tipo III. Ademais, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ (ou $h^{-1}(\mathbb{R}_-)$) pode admitir conexões de separatrizes a menos que a trajetória fechada γ não seja α ou ω -limite de separatrizes de sela ou de dobra.*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ e γ_0 uma trajetória fechada hiperbólica de X_0 que tangencia Σ de forma quadrática em um único ponto $p \in \Sigma \cap \gamma_0$. Suponha também que exista uma vizinhança W_p , de p , tal que X_0 e Y_0 não se anulam em W_p , que $X_0 f(q) \neq 0$ para todo $q \in W_p \setminus \{p\}$ e que Y_0 seja transversal à Σ em W_p . Então, existe uma vizinhança

$\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, de Z_0 , de modo que todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ é tal que X admite uma única trajetória fechada hiperbólica γ passando por $q \in W_p \cap \Sigma$, com a mesma estabilidade que γ_0 . Além disso, para todo $q \in W_p \cap \Sigma$ temos $X(q)Y(q) \neq 0$ e $Yf(q) \neq 0$.

Note que γ corta $L = \{Xf = 0\}$ em um ponto $p_\gamma = (a_Z, b_Z)$ e, quando $b_Z = 0$, γ tangencia Σ . Dessa forma, definimos,

$$\begin{aligned} h : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\rightarrow h(Z) = b_Z. \end{aligned}$$

Então, $h(Z_0) = 0$ e $Z \in h^{-1}(0)$ se, e somente se, satisfaz as hipóteses enunciadas. Além disso, $dh_{Z_0} \neq 0$ como na Teoria Clássica (ver [51]). Suponhamos que γ_0 tangencia Σ em p_0 e que dada V_{p_0} , uma vizinhança de p_0 , então $V_{p_0} \setminus \{p_0\} \cap \Sigma \subset \Sigma^c \cup \Sigma^d$. Note que, supondo γ_0 atratora então, se $h(Z) > 0$ segue que X possui uma trajetória fechada hiperbólica contida em Σ^+ , enquanto que se $h(Z) < 0$, a dependência sensitiva com relação as condições iniciais de X garante que a trajetória passando pelo ponto de tangência p retorna ao segmento de deslize e, portanto, Z possui uma poli-trajetória fechada elementar do tipo II. Por outro lado, supondo γ_0 repulsora então, se $h(Z) > 0$ segue que X possui uma trajetória fechada hiperbólica contida em Σ^+ e Z possui uma poli-trajetória fechada elementar do tipo II enquanto que se $h(Z) < 0$, Z não possui trajetória fechada em uma vizinhança de γ_0 . O caso em que $V_{p_0} \setminus \{p_0\} \cap \Sigma \subset \Sigma^c \cup \Sigma^e$ é análogo.

A prova de que $h^{-1}(\mathbb{R}_-)$ ($h^{-1}(\mathbb{R}_+)$) é localmente estruturalmente estável enquanto $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ($h^{-1}(\mathbb{R}_-)$, respectivamente) pode admitir conexão de separatrizes a menos que a trajetória fechada γ_0 não seja α ou ω -limite de separatrizes de sela ou dobra é análoga a da do Lema 3.8.

Note que o caso em que γ é uma trajetória fechada hiperbólica de Y_0 , tangente em $p_0 \in \Sigma$ e X_0 é transversal à Σ em uma vizinhança de p_0 é análogo. $\square$

3.2.3 Conexão de separatrizes quase-genéricas

Os casos abordados no próximo lema foram tratados em [28] e em [34] nas seções de conexões homoclínicas e heteroclínicas. Quando envolvem equilíbrio do campo de Filippov, F_Z , essas conexões também foram chamadas, nas referências citadas, de pseudo-homoclínicas ou pseudo-heteroclínicas.

Lema 3.13. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ possui uma conexão heteroclínica entre selas hiperbólicas ou tangências quadráticas ou entre sela hiperbólica e tangência quadrática que não dá origem a uma poli-trajetória fechada. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$, e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui uma conexão do mesmo tipo de Z_0 . Além disso, $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \cup h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ não admite conexões de separatrizes.*

Nesse caso, podem ocorrer conexões heteroclínicas do tipo dobra-dobra, sela-sela, sela-dobra. Essas conexões podem ou não envolver Σ . Em todos os casos a demonstração é análoga ao caso clássico e, por isso, serão omitidas. Para mais detalhes ver [47, 51].

Lema 3.14. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ possui uma conexão heteroclínica entre pontos de equilíbrio elementares de F_Z , ou entre pontos de equilíbrio hiperbólicos de F_Z e tangência quadrática, ou entre pontos de equilíbrio elementares de F_Z e selas hiperbólicas de X ou Y . Suponha que essa conexão não dá origem a uma poli-trajetória fechada. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$, e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui uma conexão do mesmo tipo de Z_0 . Além disso, $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \cup h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ não admite conexões de separatrizes.*

Nesse caso, podem ocorrer conexões de separatrizes de sela ou dobra com uma separatriz de pontos de equilíbrio elementares de F_Z ou conexões entre dois pontos de equilíbrio elementares de F_Z . Em todos os casos a demonstração é análoga ao caso clássico.

Observação 3.15. *Note que algumas configurações de conexão envolvendo tangências podem dar origem a poli-trajetórias do tipo III em seu desdobramento, como vimos no Lema 3.12. Além disso, é possível que a concatenação de órbitas de $Z = (X, Y)$ seja fechada e de modo que a transição entre as trajetórias de X e Y se dê por pontos de tangência, como na Figura 3.7. Quando a transição da concatenação se dá por pontos de tangência, não usaremos o termos poli-trajetória e sim, poli-ciclo não localmente estruturalmente estável. O próximo lema mostra que, sob condições genéricas, esses elementos são de codimensão-1. Esses casos foram estudados em [34] com os nomes de return to a invisible tangent point (buckling bifurcation) e return to a visible tangent point (sliding-crossing bifurcation e crossing-crossing bifurcation) com as siglas SC e CC. Veja Figura 3.7. Também foi abordado em [28], na seção que trata de conexões homoclínicas de dobras pois, como já vimos, os casos de bifurcações globais podem ser vistos como casos de conexões de separatrizes. Em [22], condições genéricas sobre o primeiro retorno que pode ser definido em uma vizinhança de poli-ciclos para o caso CC foram exibidas, mais precisamente pede-se que o primeiro retorno seja hiperbólico no segmento de costura onde está definido. Além disso, neste mesmo trabalho, foi mostrado que no desdobramento de CC uma poli-trajetória fechada do tipo I não coexiste com uma poli-trajetória fechada do tipo III, como exibido no caso CC_2 de [34].*

Lema 3.16. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e γ um poli-ciclo não localmente estruturalmente estável de Z_0 que possui todos os arcos de deslize ou escape e de modo que a trajetória retorne a Σ em um ponto de tangência quadrática (ou dobra) visível ou invisível p . Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui um poli-ciclo nas mesmas hipóteses de γ . Além disso, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ($h^{-1}(\mathbb{R}_-)$) pode admitir conexões de separatrizes a menos que nenhuma separatriz de sela corte a seção transversal Σ em uma vizinhança de p .*

Lema 3.17. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e γ um poli-ciclo não localmente estruturalmente estável de Z_0 que não possui arcos de deslize nem de escape e de modo que a trajetória retorne a Σ em um ponto de tangência quadrática (ou dobra) visível (caso CC). Além disso, suponha que o primeiro retorno definido à direita (ou à esquerda) do ponto de dobra seja hiperbólico. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui um poli-ciclo nas mesmas hipóteses de γ . Além disso, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ ($h^{-1}(\mathbb{R}_-)$) pode admitir conexões de separatrizes a menos que γ não seja α ou ω -limite de nenhuma separatriz de sela ou dobra.*

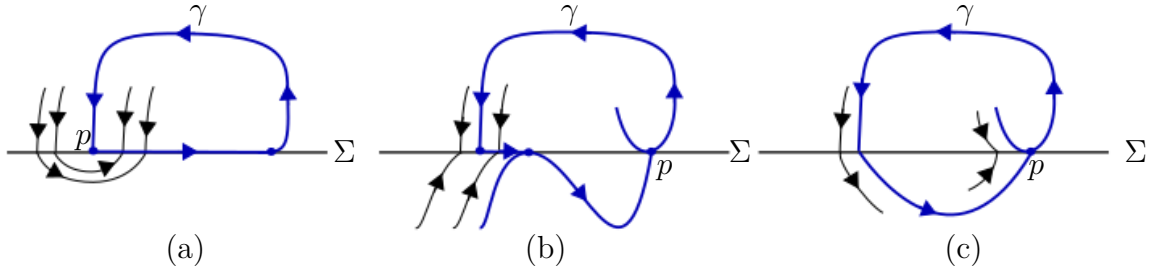


Figura 3.7: (a) *Buckling bifurcation*, (b) *sliding-crossing-bifurcation*, (c) *crossing-crossing-bifurcation*.

Finalizamos a seção com o caso em que o campo $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ é tal que X_0 ou Y_0 possui uma sela hiperbólica que dá origem a um loop que não tangencia Σ .

Definição 3.18. *Seja $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e p uma sela de X (ou de Y). Uma conexão cujos conjuntos α e ω -limite coincidem com o ponto de sela p é chamada de loop. Dizemos que um loop é simples quando p é uma sela hiperbólica que não está em Σ , $\text{tr}(DX, p) \neq 0$ (ou $\text{tr}(DY, p) \neq 0$, respectivamente), onde $\text{tr}(DX, p)$ ($\text{tr}(DY, p)$) denota o traço da matriz jacobiana de X (Y , respectivamente) em p . Além disso, caso o loop intersecte Σ , a intersecção se dá de forma transversal.*

Lema 3.19. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ possui um loop de sela simples. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$, e todo $Z \in h^{-1}(0)$ possui um loop de sela simples. Além disso, $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \subset \Sigma_0^{S_\lambda}$ e $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$, pode admitir conexão de separatrizes a menos que o loop não seja α ou ω -limite de separatrizes de sela ou dobra.*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$, γ um loop de sela de Z_0 e p a sela que dá origem ao loop. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $p \in \Sigma^+$ é uma sela de X_0 . Assim como os casos anteriores, a demonstração é análoga ao caso clássico, levando em consideração as seguintes observações.

Como $p \notin \Sigma$, pelo Lema 4.3 de [47], podemos tomar uma vizinhança de V_p , de p , de modo que $V_p \cap \Sigma = \emptyset$ e ∂V_p seja uma curva diferenciável. Existe uma vizinhança $\mathcal{B}$

de Z_0 tal que todo $Z \in \mathcal{B}$ tem uma sela em V_p e que as separatrizes estáveis (instáveis) de p cortam ∂V_p em dois pontos $s_i(X)$ e $u_i(X)$, $i = 1, 2$, respectivamente. Além disso, existem arcos fechados S_i (U_i , respectivamente) de modo que $s_i(X) \in S_i$, $u_i(X) \in U_i$ e as trajetórias de X_0 são transversais a V_p em S_i (U_i , respectivamente).

Os pontos $s_i(X)$ ($u_i(X)$, respectivamente) dividem os arcos S_i (U_i , respectivamente) em dois arcos fechados S_i^1 e S_i^2 com $S_i^1 \cap S_i^2 = s_i(X)$ e $S_i^1 \cup S_i^2 = S_i$. Se necessário, diminuimos S_i para que toda trajetória que entre em V_p , passando por $x \in S_i^j \setminus \{s_i\}$ saia de V_p passando por $k^{ij}(x) \in U_i \setminus \{u_i\}$, como na Figura 3.8. Assim, temos definida uma aplicação $k^{ij} : S_i^j \rightarrow U_j$, que é contínua.

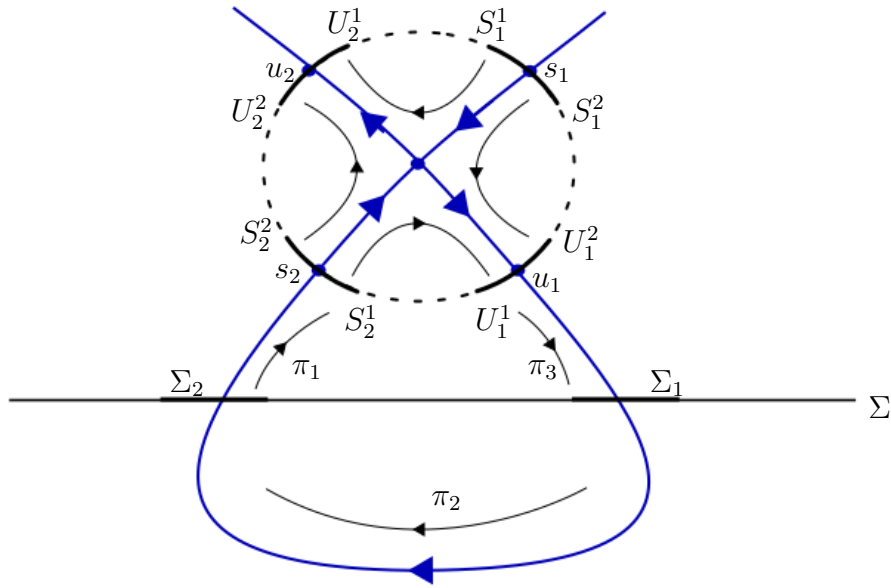


Figura 3.8: Loop de sela intersectando Σ de forma transversal.

Suponhamos que o loop seja formado pela conexão das separatrizes de u_1 e s_2 e considere $\pi : U_i^1 \rightarrow S_j^1$, definido pelo fluxo. No caso em que $\gamma \cap \Sigma \neq \emptyset$, consideramos $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3$, com $\pi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, $\pi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ e $\pi_3 : U_1 \rightarrow \Sigma_2$ onde $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \Sigma^c$ e $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, como na Figura 3.8.

Observe que π é diferenciável, pois cada um de seus fatores (no caso descrito acima) será diferenciável. Com essas considerações, a conclusão da demonstração é análoga ao caso clássico e pode ser encontrada em [47].

A prova de que $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \subset \Sigma_0^{S_\lambda}$ e $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$, pode admitir conexão de separatrizes a menos que o loop não seja α ou ω -limite de separatrizes de sela ou dobra é análoga ao que foi feito na prova do Lema 3.8. $\square$

Observação 3.20. Como comentamos no Capítulo 2, os mesmos argumentos se aplicam a pseudo-conexões que não envolvem segmentos de deslize e/ou escape.

3.3 Recorrência não trivial

Nesta seção recordamos a definição de órbita recorrente e órbita não-trivialmente recorrente. No nosso caso não é restritivo assumir que os campos de vetores que trabalhamos possuem apenas um número finito de pontos de equilíbrio, Σ -singularidades e tangências e que não são topologicamente transitivos visto que campos de vetores topologicamente transitivos apresentam, necessariamente, conexão de separatrizes (ver [33]). Dessa forma, podemos utilizar cartas locais e trabalhar com campos definidos em abertos do plano. No que segue veremos que um campo suave por partes definido em um aberto do $\mathbb{R}^2$ que possui órbita não trivialmente recorrente não é estruturalmente estável. Iniciamos a seção recordando algumas definições e resultados.

Definição 3.21. Uma trajetória maximal $\gamma_Z(t; p_0)$ é uma trajetória global que não pode ser estendida a nenhuma outra trajetória global adicionando trajetórias locais. Isto é, se $\tilde{\gamma}_Z$ é uma trajetória global contendo γ_Z então $\tilde{\gamma}_Z = \gamma_Z$. Nesse caso, chamamos $I = (\tau^-(p_0), \tau^+(p_0))$ de intervalo maximal da solução γ_Z , onde $\tau^\pm = \lim_{i \rightarrow \pm\infty} t_i$. Uma trajetória é positivamente (negativamente, respectivamente) maximal se $i \in \mathbb{N}$ ($i \in -\mathbb{N}$, respectivamente). Observe que, pode ocorrer $\tau^\pm(p_0) = \pm\infty$.

Definição 3.22. Considere uma trajetória maximal passando por p_0 , $\gamma_Z(t; p_0)$. O conjunto $\omega(\gamma_Z(t; p_0)) = \{q \in V; \exists (t_n) \text{ satisfazendo } \gamma_Z(t_n; p_0) \rightarrow q \text{ com } t_n \rightarrow \tau^+(p_0) \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$ ($\alpha(\gamma_Z(t; p_0)) = \{q \in V; \exists (t_n) \text{ satisfazendo } \gamma_Z(t_n; p_0) \rightarrow q \text{ com } t_n \rightarrow \tau^-(p_0) \text{ quando } n \rightarrow -\infty\}$) é chamado de ω -limite (α -limite, respectivamente) de $\gamma_Z(t; p_0)$. O ω -limite (α -limite, respectivamente) de um ponto p é a união dos ω -limite (α -limite, respectivamente) de todas as trajetórias maximais que passem por p .

Definição 3.23. Dizemos que p é recorrente se $p \in \omega(\gamma_Z(p))$ ou $p \in \alpha(\gamma_Z(p))$ para alguma trajetória maximal de Z passando por p . Dizemos que p é trivialmente recorrente quando p é ponto de equilíbrio de X , de Y ou de F_Z , quando p é uma dobra-dobra invisível-invisível, quando $\gamma_Z(p)$ é uma trajetória fechada ou uma poli-trajetória fechada do tipo I, ou ainda quando $\gamma_Z(p)$ é uma poli-trajetória fechada elementar do tipo II ou III, para uma concatenação fixada. Caso contrário, dizemos que p é não-trivialmente recorrente.

Note que, se p é não trivialmente recorrente então $\gamma_Z(p)$ não contém pontos de equilíbrio de X , Y ou F_Z pois isso implica que $\omega(\gamma_Z(p))$ (ou $\alpha(\gamma_Z(p))$, respectivamente) seja esse ponto de equilíbrio e, portanto, $p \notin \omega(\gamma_Z(p))$ ($p \notin \alpha(\gamma_Z(p))$, respectivamente).

Observação 3.24. Sabemos que campos de vetores suaves por partes admitem órbitas não-trivialmente recorrentes, como na Figura 3.3. O intuito da seção é ver que, sob algumas condições, quando esse tipo de órbita existir o campo de vetores possuirá uma conexão de separatrizes. A abordagem é baseada em [44].

Recorde que, dado $Z = (X, Y)$ um campo de vetores suave por partes definido em um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\gamma_Z(p)$ uma trajetória maximal de Z passando por p , o Teorema de Poincaré–Bendixson (ver [6]) garante que se $\gamma_Z(p)$ está contida em uma região compacta K que, por sua vez, está contida em um subconjunto invariante por Z , de modo que $K \cap \Sigma \subset (\Sigma^d \cup \Sigma^e)^c$, e Z tem um número finito de tangências e pontos de equilíbrio em K então os conjuntos ω -limite de $\gamma_Z(p)$ são: (i) pontos de equilíbrio de X ou de Y ; (ii) órbitas periódicas de X ou de Y ; (iii) um grafo de X ou de Y ; (iv) uma poli-trajetória fechada (chamada de pseudo-ciclo no trabalho citado); (v) um grafo do campo Z (chamado de pseudo-grafo no trabalho citado); (vi) uma dobra-dobra invisível-invisível. Logo, nesse caso, não há órbitas não trivialmente recorrentes.

Note que se $\gamma_Z(p)$ é um poli-ciclo não estruturalmente estável (ver Figura 3.7(c)) então $\gamma_Z(p)$ não está nas hipóteses do Teorema de Poincaré–Bendixson pois qualquer vizinhança de $\gamma_Z(p)$ intersecta segmentos de deslize ou escape. Nesse caso, $\gamma_Z(p)$ contém ao menos uma conexão de dobras.

Agora, considere $Z = (X, Y)$ um campo de vetores suave por partes definido em $\mathbb{R}^2$. Seja $\gamma_Z(p)$ uma trajetória de Z passando por p com $p \in \omega(\gamma_Z(p))$ e suponha que $\gamma_Z(p)$ esteja contida em um compacto K invariante por Z . Primeiramente, note que se $\gamma_Z(p) \cap \Sigma = \emptyset$, então $\gamma_Z(p) \subset \Sigma^+$ ou $\gamma_Z(p) \subset \Sigma^-$. Nesse caso, se $\gamma_Z(p)$ for recorrente ela será trivialmente-recorrente. Além disso, se $\gamma_Z(p) \cap \Sigma \subset \Sigma^c$ então, diminuindo K , se necessário, podemos supor que $K \cap \Sigma \subset (\Sigma^d \cup \Sigma^e)^c$. Esse caso recai sobre o Teorema de Poincaré–Bendixson dado em [6] e, portanto, $\gamma_Z(p)$ é trivialmente recorrente.

Suponha então que $\gamma_Z(p) \cap \Sigma \subset (\Sigma^d \cup \Sigma^e)^c$ mas não existe um compacto K , invariante por Z , de modo que $K \subset (\Sigma^d \cup \Sigma^e)^c$. Se $\gamma_Z(p)$ for fechada, por não passar por segmentos de deslize ou escape segue que $\gamma_Z(p)$ será um poli-ciclo (ver Figura 3.7(c)) ou uma trajetória fechada de X ou de Y tangente à Σ . Dessa forma, $\gamma_Z(p)$ possui ao menos uma conexão de dobras. Caso $\gamma_Z(p)$ não seja fechada nem possua conexões de dobras então para tempo futuro (ou passado) $\gamma_Z(p) \cap \Sigma \subset \Sigma^c$. Portanto, há unicidade de trajetórias para tempo futuro (ou passado) e, novamente, recaímos sobre o Teorema de Poincaré–Bendixson que garantirá que $\gamma_Z(p)$ é trivialmente recorrente.

A seguinte proposição garante que, se p é um ponto não trivialmente recorrente de $Z = (X, Y)$ e $\gamma_Z(p)$ é uma órbita passando por p que intersecta Σ em segmentos de deslize ou de escape então $\gamma_Z(p)$ possui ao menos uma conexão de separatrizes. A abordagem é baseada em [44].

Ressaltamos que para o nosso propósito não é restritivo supor que $Z = (X, Y)$ tem um número finito pontos de equilíbrio e de dobras, todos elementares. Dessa forma, também haverá um número finito de segmentos de deslize e escape em Σ .

Proposição 3.25. *Suponha que $Z = (X, Y)$ possui um número finito de pontos de equilíbrio e de dobras, todos elementares. Seja p um ponto não trivialmente recorrente de $Z = (X, Y)$ e $\gamma_Z(p)$ uma órbita passando por p tal que $\omega(\gamma_Z(p)) \cap (\Sigma^d \cup \Sigma^e) \neq \emptyset$. Então*

$\gamma_Z(p)$ conecta separatrizes de dobras e, portanto, não é localmente estruturalmente estável.

Demonstração. Seja p um ponto não trivialmente recorrente de $Z = (X, Y)$ e $\gamma_Z(p)$ uma trajetória de Z passando por p (a concatenação está fixada) tal que $p \in \omega(\gamma_Z(p))$. Então, p não é ponto de equilíbrio de X , Y ou F_Z , p não é uma dobra-dobra invisível-invisível de Z e $\gamma_Z(p)$ não é uma trajetória fechada nem uma poli-trajetória fechada elementar do tipo I, II ou III. Por hipótese $\omega(\gamma_Z(p)) \cap (\Sigma^e \cup \Sigma^d) \neq \emptyset$.

Passo 1: Se $\gamma_Z(p) \cap \Sigma^d \neq \emptyset$ e $\gamma_Z(p) \cap \Sigma^e \neq \emptyset$, então $\gamma_Z(p)$ contém ao menos uma conexão de dobras. De fato, basta observar que $\gamma_Z(p)$ só sai de um segmento de deslize por uma dobra e só entra em um segmento de escape por uma dobra.

Logo, resta analisar os casos em que $\gamma_Z(p) \cap \Sigma \subset (\Sigma^d \cup \Sigma^e)$ ou $\gamma_Z(p) \cap \Sigma \subset (\Sigma^e \cup \Sigma^c)$.

Passo 2: Se $\gamma_Z(p) \cap \Sigma \subset (\Sigma^c \cup \Sigma^d)$ então $\gamma_Z(p)$ contém ao menos uma conexão de dobras. De fato: note que, nesse caso há unicidade de trajetória para tempo futuro pois ao passar por um segmento de deslize a trajetória só sairá do mesmo por um ponto de dobra. Seja V_p uma vizinhança de p . Por ser recorrente, $\gamma_Z(p)$ retorna a V_p infinitas vezes. A unicidade da trajetória para tempo futuro junto com a dependência sensitiva com relação as condições iniciais das trajetórias de $X|_{\Sigma^+}$ e de $Y|_{\Sigma^-}$ garantem que, decorrido tempo $t > 0$, $\gamma_Z(p)$ retorna ao segmento de deslize. Seja q esse ponto (como na Figura 3.9(a)). Dessa forma, Z admite uma poli-trajetória fechada do tipo III, $\Gamma_Z(q)$, passando por q . Observe que se $p \notin \Gamma_Z(q)$ então p não é recorrente, visto que, nesse caso, diminuindo V_p temos $V_p \cap \Gamma_Z(q) = \emptyset$. Se $p \in \Gamma_Z(q)$, como estamos supondo que p é não-trivialmente recorrente, segue que $\Gamma_Z(q)$ não é elementar e, portanto, deve conter uma conexão de dobras, como nas Figuras 3.3, 3.6 e 3.7 (a) e (b).

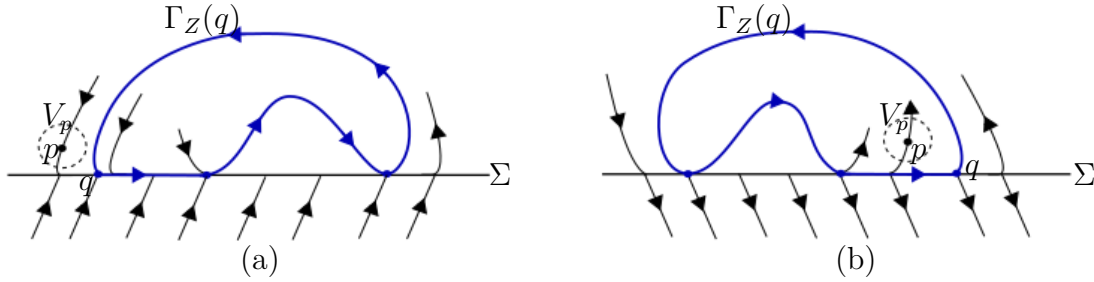


Figura 3.9: Poli-trajetórias fechadas não elementares do tipo III.

Passo 3: Se $\gamma_Z(p) \cap \Sigma \subset (\Sigma^e \cup \Sigma^c)$ então $\gamma_Z(p)$ contém ao menos uma conexão de dobras. De fato: nesse caso há unicidade da trajetória para tempo passado pois a trajetória só entrará em um segmento de escape por um ponto de dobra. Seja V_p uma vizinhança de p . Por ser recorrente, $\gamma_Z(p)$ retorna a V_p infinitas vezes. A unicidade da trajetória para tempo passado junto com a dependência sensitiva com relação as condições iniciais das trajetórias de $X|_{\Sigma^+}$ e de $Y|_{\Sigma^-}$ garantem que, decorrido tempo $t < 0$, $\gamma_Z(p)$ retorna ao segmento de escape. Seja $q \in \Sigma^e$ esse ponto (como na Figura 3.9(b)). Dessa forma, Z admite uma poli-trajetória fechada do tipo III, $\Gamma_Z(q)$, passando por q . Observe que se $p \notin \Gamma_Z(q)$ então p não é recorrente, visto que, nesse caso, diminuindo V_p temos

$V_p \cap \Gamma_Z(q) = \emptyset$. Se $p \in \Gamma_Z(q)$, como estamos supondo que p é não-trivialmente recorrente, segue que $\Gamma_Z(q)$ não é elementar e, portanto, deve conter uma conexão de dobras.

Os passos 1, 2 e 3 concluem a prova. $\square$

Apesar de não haver nenhum sentido dinâmico, as definições 3.21, 3.22 e 3.23 podem ser adaptadas para pseudo-poli-trajetórias, apenas considerando que a concatenação pode não seguir o sentido natural dos fluxos de X , Y ou do campo de Filippov F_Z . Como vimos no Lema 3.3, pseudo-poli-trajetórias fechadas foram abordadas em [36]. O assunto também foi abordado em [28, 44].

Recorde que, pela Definição 3.23, dizemos que p é trivialmente recorrente quando p é ponto de equilíbrio de X , de Y ou de F_Z , quando p é uma dobra-dobra invisível-invisível, quando $\gamma_Z(p)$ é uma trajetória fechada ou uma poli-trajetória fechada do tipo I, ou ainda quando $\gamma_Z(p)$ é uma poli-trajetória fechada elementar do tipo II ou III, para uma concatenação fixada. Dessa forma, no que segue, diremos que uma pseudo-órbita passando por p é trivialmente recorrente quando p é ponto de equilíbrio de X , de Y ou de F_Z , quando p é uma dobra-dobra invisível-invisível, quando $\gamma_Z(p)$ é uma trajetória fechada ou uma pseudo-poli-trajetória fechada que conecta segmentos de deslize e escape mas não contém segmentos do campo deslizante (como na Figura 3.12(a)), para uma concatenação fixada. Caso contrário dizemos que a pseudo-órbita é não-trivialmente recorrente.

A seguir observamos que a refração junto com a não existência de conexões de separatrizes implica na não existência de pseudo-conexões e de pseudo-órbitas não-trivialmente recorrentes. Por esse motivo, o entendimento completo do campo refrativo não requer uma discussão sobre pseudo-trajetórias e, portanto, não há necessidade de abordar esse tipo de objeto no Capítulo 4.

Note que a não existência de segmentos de deslize e escape para campos refrativos (isto é, quando $Xf(p) = Yf(p)$ para todo $p \in \Sigma$) implica que uma trajetória só poderia seguir por uma orientação “inversa” em um ponto de tangência dupla (de ordem par) ou de singularidade-tangência ou de singularidade-singularidade quando o contato das trajetórias de X e de Y com Σ forem visíveis. Isso porque, nesse caso o campo de Filippov não está definido em nenhum ponto de Σ e há unicidade de trajetórias que passem apenas por pontos de costura, logo não faz sentido “inverter” a orientação natural de uma trajetória em um ponto de costura, já que não há mais de uma opção de concatenação (ver Figura 3.10).

Isso implica que após inverter a orientação uma vez a órbita terá apenas duas opções: (i) seguir a partir desse ponto sempre no sentido contrário da órbita original; (ii) se conectar com outro ponto de tangência ou singularidade onde poderá, a depender da visibilidade da tangência, alterar novamente sua orientação. Observe que o último caso implica, obrigatoriamente, em uma conexão de tangências. Essa propriedade pode ser vista na Figura 3.10, nesse caso, invertendo a orientação natural da trajetória entre p_1 e

p_2 , no ponto p_2 nós devemos seguir até p_3 ainda com orientação contrária. Já no ponto p_3 podemos seguir com orientação invertida ou voltar a orientação natural da trajetória. O mesmo argumento implica que uma pseudo-conexão de sela com dobra-dobra implicaria, obrigatoriamente, em uma conexão de sela com dobra-dobra e pseudo-conexões passando apenas por segmento de costuras não existem.

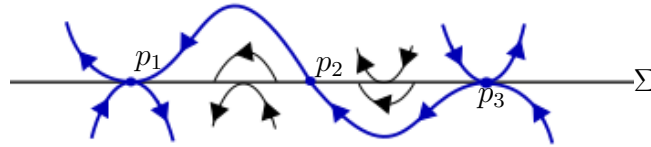


Figura 3.10: Pseudo-poli-trajetória em campo refrativo.

Dessa forma, a imposição da não existência de conexões em campos refrativos implica também na não existência de pseudo-conexões. Como vimos, isso implica que, após inverter a orientação uma vez, a órbita seguirá, a partir desse ponto, sempre em direção contrária da órbita original. Nesse caso, após decorrido tempo $t > 0$ a trajetória segue o fluxo de Z com orientação trocada, passando por Σ apenas em pontos de costura e, portanto, recaímos sobre as condições do Teorema de Poincaré–Bendixson e os conjuntos limites serão os já conhecidos do mesmo resultado.

Para campos de vetores suaves por partes que admitem segmentos de deslize e escape a discussão acima não é válida e esse tipo de elemento deve ser levado em consideração. No entanto, note que as pseudo-conexões que não contenham segmentos de deslize ou escape podem ser rompidas da mesma forma que as conexões (com o uso de bump-functions) e os primeiros retornos associados a pseudo-poli-trajetórias, por serem difeomorfismos, também podem ser analisados de forma análoga quando a pseudo-poli-trajetória não contém segmentos de deslize ou escape, portanto, os lemas das Seções 3.2.2 e 3.2.3 podem ser facilmente adaptados a esse tipo de objeto. Assim, um melhor entendimento das pseudo-poli-trajetórias se dará a partir de um entendimento do comportamento de pseudo-poli-trajetórias fechadas que contenham segmentos de deslize e/ou escape e de pseudo-poli-trajetórias não trivialmente recorrentes. Note que, o fato de uma pseudo-poli-trajetória fechada conter segmentos de deslize e escape não implica, diretamente, em uma conexão de dobras, como no caso de conexões entre esses segmentos, visto que, uma pseudo-poli-trajetória pode sair ou entrar em um segmento de deslize ou escape por qualquer ponto. Além disso, tais objetos podem existir mesmo quando as trajetórias (seguindo a orientação natural do fluxo) só apresentem comportamento genérico.

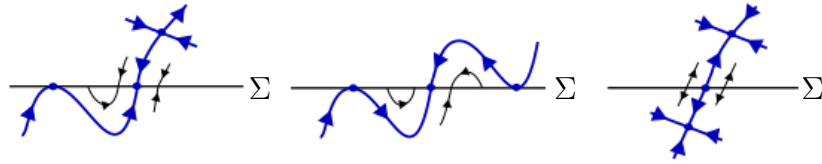


Figura 3.11: Pseudo-conexões que não contém segmentos de deslize ou escape.

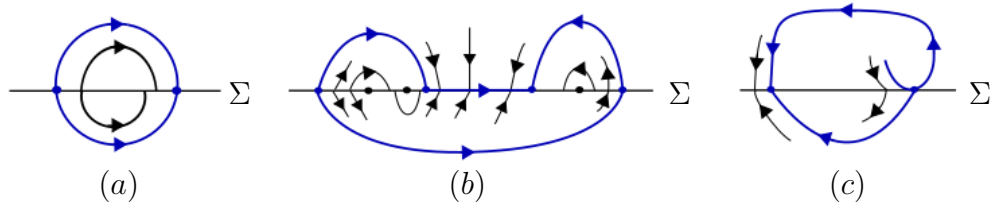


Figura 3.12: Pseudo-poli-trajetórias fechadas.

4 Campos de vetores suaves por partes refrativos parcialmente integráveis

4.1 Introdução

Como anteriormente, denotamos por $\mathfrak{X}$ o conjunto dos campos de vetores suaves por partes definidos em $\mathbb{R}^3$, com região de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\} = f^{-1}(0)$, com $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$, e que admitem $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ como integral primeira. Isso implica que todas as esferas bidimensionais centradas na origem são invariantes pelo fluxo dos campos de vetores em $\mathfrak{X}$. Denotamos por $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ a restrição desses campos à esfera bidimensional de raio $\lambda > 0$ finito. Além disso, denotamos por $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, respectivamente) o conjunto dos $Z \in \mathfrak{X}$ ($Z \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, respectivamente) que sejam refrativos. Como $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{X}$, munimos $\mathfrak{R}$ com a topologia induzida da topologia produto. Para evitar o uso excessivo de super índices, consideraremos campos de vetores suaves por partes $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ em todo o capítulo. Como na Seção 2.2, denotamos por $\Sigma^+ = f^{-1}([0, +\infty))$ e $\Sigma^- = f^{-1}((-\infty, 0])$.

Nosso principal objetivo é estabelecer condições de estabilidade estrutural para campos de vetores suaves por partes refrativos (veja Definição 4.6). Nesse sentido, caracterizamos o conjunto $\Sigma_0 \subset \mathfrak{R}$, na Seção 4.6, provando o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *Existe um subconjunto $\Sigma_0 \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{X}$ satisfazendo:*

- (1) Σ_0 tem uma descrição simples;
- (2) se $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}$ é estruturalmente estável, então $Z \in \Sigma_0$.

A descrição de Σ_0 é estabelecida na Seção 4.6, mais precisamente, na Definição 4.25. Para provarmos o Teorema 4.1, os seguintes passos devem ser seguidos. Primeiramente analisamos os aspectos locais de estabilidade estrutural e bifurcações de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, nas Seções 4.3.1 e 4.3.2. Em seguida, estudamos aspectos globais de estabilidade

estrutural e bifurcações de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, nas Seções 4.4 e 4.5, caracterizamos os conjuntos $\Sigma_0^{S_\lambda}$ e $\Sigma_1^{S_\lambda}$ e provamos os seguintes teoremas.

Teorema 4.2. *Existe $\Sigma_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{R}^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ satisfazendo:*

- (1) $\Sigma_0^{S_\lambda}$ tem uma descrição simples;
- (2) $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ é estruturalmente estável se, e somente se, $Z \in \Sigma_0^{S_\lambda}$;
- (3) $\Sigma_0^{S_\lambda}$ é aberto e denso em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$.

Teorema 4.3. *Existe uma subvariedade de codimensão-1, $\Sigma_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{R}^{S_\lambda}$, satisfazendo:*

- (1) $\Sigma_1^{S_\lambda}$ tem uma descrição simples;
- (2) para todo $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Sigma_1^{S_\lambda}$, existe uma vizinhança $\mathcal{B}(Z_0) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}$ tal que $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ é Σ -equivalente a Z_0 na topologia intrínseca de $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R} \setminus \Sigma_0^{S_\lambda}$. Portanto $\Sigma_1^{S_\lambda}$ é aberto nessa topologia;
- (3) $\Sigma_1^{S_\lambda}$ é denso em $\mathfrak{R}_1$.

Observação 4.4. *Usamos a topologia intrínseca no item (2) do Teorema 4.3 porque ela é mais fina (tem mais conjuntos abertos) do que a topologia ambiente, como vimos na Seção 2.1.4. Dessa forma, ela é capaz de separar as vizinhanças onde pode ocorrer acumulação de elementos de codimensão-1, o que não ocorre com a topologia induzida.*

O Teorema 4.2 é uma versão do Teorema de Peixoto sobre $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. O resultado clássico pode ser encontrado em [43], e o Teorema 4.3 é inspirado nos resultados sobre bifurcações genéricas de campos vetoriais suaves definidos em variedades bidimensionais, que podem ser encontrados em [47, 51]. É importante ressaltar que sistemas refrativos são instáveis no contexto geral de sistemas suaves por partes.

Observação 4.5. *Este capítulo é baseado em [8]. Para manter a notação deste trabalho, há algumas divergências entre a notação do capítulo e da referência citada.*

4.2 Resultados preliminares

Como vimos na Seção 2.1, em [42] foi dada uma classificação dos campos de vetores suaves estruturalmente estáveis definidos em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$. Em [43] este resultado foi estendido para variedades bidimensionais. Em [47] foi dada uma classificação dos campos de vetores suaves de codimensão-1 em variedades bidimensionais sem bordo. Essa classificação foi estendida para variedades com bordo em [51]. Os resultados obtidos e as ferramentas utilizadas nestes trabalhos serão muito úteis no que segue.

4.2.1 Algumas considerações sobre campos de vetores suaves por partes refrativos

Primeiramente, recordamos a definição de campo de vetores suave por partes refrativo, já introduzida na Seção 2.2.

Definição 4.6. Um campo de vetores suave por partes $Z = (X, Y)$ é dito *refrativo* (em Σ) se $Xf(p) = Yf(p)$, para todo $p \in \Sigma$.

Dessa forma, se $Z = (X, Y)$ é refrativo, então Σ é composta apenas por regiões de costura, pontos de equilíbrio de X ou de Y ou pontos de tangência. Além disso, as linhas de tangência de X e Y coincidem, isto é, $S_X = S_Y$. Enfatizamos que campos refrativos não admitem segmentos de escape nem de deslize.

Observação 4.7. Observe que, se $Z = (X, Y)$ é um campo de vetores suave por partes refrativo, então $Xf(p) - Yf(p) = 0$, para todo p em Σ . Essa condição garante que $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{X}$ é uma variedade (de Banach). Isso torna possível falarmos de espaço de campos de codimensão-1 em $\mathfrak{R}$.

Seja $Z = (X, Y)$ um campo de vetores refrativo. O próximo lema garante que dado $p \in \Sigma$ se $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$, então o contato de $X(p)$ e de $Y(p)$ com Σ , em p , é da mesma ordem.

Lema 4.8. Seja $Z = (X, Y)$ um campo de vetores suave por partes refrativo e $p \in \Sigma$ tal que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$. Se p é uma tangência dupla de Z , então a ordem do contato entre as trajetórias de X e de Y com Σ em p coincidem em p . Em outras palavras, se existe $n > 1$ tal que $Xf(p) = \dots = X^{n-1}f(p) = 0$ e $X^n f(p) \neq 0$, então $Yf(p) = \dots = Y^{n-1}f(p) = 0$ e $Y^n f(p) \neq 0$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos considerar a expansão de $Z = (X, Y)$, escrevendo

$$X = \left(\sum_{i+j=0}^n a_{i,j} x^i y^j, \sum_{i+j=0}^n b_{i,j} x^i y^j \right), \quad Y = \left(\sum_{i+j=0}^n c_{i,j} x^i y^j, \sum_{i+j=0}^n d_{i,j} x^i y^j \right),$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e que $\Sigma = \{(x, y); y = 0\}$ é a região de descontinuidade. Seja $p = (0, 0) \in \Sigma$ um ponto de tangência dupla. Então $b_{0,0} = d_{0,0} = 0$. Como $X(0, 0) \neq 0$ e $Y(0, 0) \neq 0$, então $a_{0,0} \neq 0, c_{0,0} \neq 0$. Com essas observações, a prova segue facilmente. $\square$

Por não termos regiões de escape e deslize, alguns objetos de codimensão-1 em $\mathfrak{X}$ são estáveis em $\mathfrak{R}$. O mesmo ocorre com elementos de codimensão 2 em $\mathfrak{X}$ que são de codimensão-1 em $\mathfrak{R}$. Por isso, a seguir, pontuamos algumas diferenças entre campos de vetores suaves por partes e campos de vetores suaves por partes refrativos.

Como vimos na Definição 3.2, se $p \in \Sigma$ é uma dobra-dobra invisível-invisível (ou dobra-dobra elíptica) de $Z = (X, Y)$, há um primeiro retorno, definido em uma vizinhança de p , induzido pelas involuções associadas ao fluxo dos campos de vetores projetados, definidos a partir de X e Y , que são dadas por

$$\begin{aligned}\phi_X(x) &= -x + \alpha_X x^2 - \alpha_Y^2 x^3 + \mathcal{O}_4(x), \\ \phi_Y(x) &= -x + \alpha_Y x^2 - \alpha_X^2 x^3 + \mathcal{O}_4(x),\end{aligned}$$

com $\alpha_X, \alpha_Y \in \mathbb{R}$. Assim, para $x < 0$ suficientemente pequeno, temos definido um primeiro retorno

$$\phi_Z(x) = \phi_Y \circ \phi_X(x) = x + (\alpha_Y - \alpha_X)x^2 + (\alpha_Y - \alpha_X)^2 x^3 + \beta x^4 + \mathcal{O}_5(x). \quad (4.1)$$

A condição $\alpha_Y - \alpha_X \neq 0$ também é chamada de *Condição (G)*.

Definição 4.9. Seja $Z = (X, Y)$ um campo de vetores suaves por partes refrativo. Dizemos que $p \in \Sigma$ é uma dobra-dobra genérica se p é visível-visível (ou hiperbólica), visível-invisível (ou parabólica) ou invisível-invisível (ou elíptica) e satisfaz a Condição (G). Se $p \in \Sigma$ é invisível-invisível com $\alpha_Y - \alpha_X = 0$, então o primeiro retorno definido em (4.1) é da forma

$$\phi_Z(x) = x + \beta x^4 + \mathcal{O}_5(x),$$

e dizemos que p é uma dobra-dobra quase-genérica de Z quando $\beta \neq 0$.

Na Seção 2.2, introduzimos a noção de tangência dupla quadrática e de ordem superior. Em particular, quando p é uma tangência dupla de ordem 3, isto é, quando $Xf(p) = 0$, $Yf(p) = 0$, $X^2f(p) = 0$, $Y^2f(p) = 0$, $X^3f(p) \neq 0$ e $Y^3f(p) \neq 0$, dizemos que $p \in \Sigma$ é uma *cusp-cusp*.

Definição 4.10. Dizemos que $p \in \Sigma$ é um ponto de equilíbrio-dobra (dobra-equilíbrio, respectivamente) de $Z = (X, Y)$ se p é um ponto de equilíbrio de X (Y , respectivamente) e também uma dobra de Y (X , respectivamente). Quando p é uma sela de X (Y , respectivamente) e também uma dobra de Y (X , respectivamente) dizemos que p é um ponto de sela-dobra (dobra-sela, respectivamente). Quando p é um nó de X (Y , respectivamente) e também uma dobra de Y (X , respectivamente) dizemos que p é um ponto de nó-dobra (dobra-nó, respectivamente). Quando p é um foco de X (Y , respectivamente) e também uma dobra de Y (X , respectivamente) dizemos que p é um ponto de foco-dobra (dobra-foco, respectivamente).

Seja $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}$. Como na Definição 2.19, dizemos que uma poli-trajetória γ de Z é uma poli-trajetória fechada do tipo I se γ cruza Σ apenas em pontos de costura e que γ é uma poli-trajetória fechada do tipo III se γ contém ao menos um ponto de dobra de Z . Além disso, dizemos que uma poli-trajetória fechada γ de $Z = (X, Y)$ é elementar (ou

genérica) se γ é do tipo I e o primeiro retorno $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$, associado a γ satisfaz $\pi'(p) \neq 1$, para $p \in \Sigma \cap \gamma$. Também dizemos que γ é uma poli-trajetória do tipo I quase-genérica de $Z \in \mathfrak{R}$ se $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ com $\pi'(p) = 1$ e $\pi''(p) \neq 0$, para todo $p \in \Sigma \cap \gamma$. Note que, se γ é uma poli-trajetória fechada do tipo III de $Z \in \mathfrak{R}$, então γ tem uma conexão de dobras. Por isso, em $\mathfrak{R}$ apenas as poli-trajetórias fechadas do tipo I serão elementares. Além disso, no caso refrativo, não existem poli-trajetórias do tipo II, já que $\Sigma = \Sigma^c \cup S_Z$.

Os conceitos de Σ -equivalência, estabilidade estrutural e estabilidade estrutural local dados nas Definições 2.14, 2.16 e 2.17, da Seção 2.2, podem ser facilmente adaptados aos espaços $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$.

4.3 Análise local de singularidades estruturalmente estáveis e de codimensão-1 para campos de vetores refrativos

Observação 4.11. *Observe que algumas cartas locais preservam a propriedade refrativa. É o caso, por exemplo, da projeção estereográfica nos planos $\{x = \pm\rho\}$ ou $\{y = \pm\rho\}$ e também das coordenadas esféricas. Portanto, na análise local sempre usamos uma dessas cartas locais que preservam a propriedade refrativa para trabalharmos com sistemas planares.*

4.3.1 Condições de estabilidade estrutural local para campos de vetores refrativos

Seja $\mathfrak{R}(0)$ o espaço dos campos de vetores suaves por partes refrativos $Z = (X, Y)$ definidos em uma vizinhança da origem $0 \in \mathbb{R}^2$, com descontinuidade $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$. Em [52] podemos ver os detalhes da classificação de campos vetoriais suaves por partes refrativos localmente estruturalmente estáveis em $\mathfrak{R}(0)$. Relembramos o resultado a seguir.

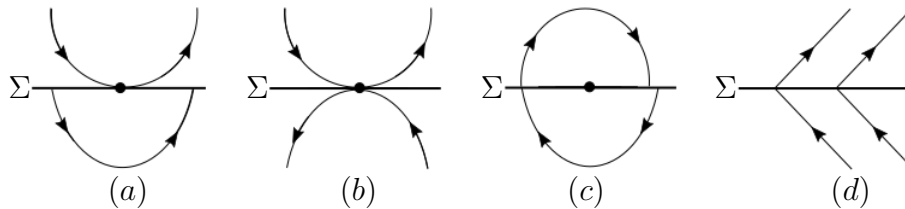


Figura 4.1: (a) Dobra-dobra visível-invisível; (b) dobra-dobra visível-visível; (c) dobra-dobra invisível-invisível; (d) região de costura.

Proposição 4.12. [52] *A origem $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ de $Z \in \mathfrak{R}(0)$ é uma dobra-dobra genérica se, e somente se:*

(a) $(0,0)$ é uma dobra-dobra visível-invisível. Nesse caso, sua forma normal é dada por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (1, x), & y \leq 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança U de $(0,0)$. Ver Figura 4.1(a).

(b) $(0,0)$ é uma dobra-dobra visível-visível. Nesse caso, sua forma normal é dada por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (-1, x), & y \leq 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança U de $(0,0)$. Ver Figura 4.1(b).

(c) $(0,0)$ é uma dobra-dobra invisível-invisível. Nesse caso, sua forma normal é dada por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = (1, -x), & y \geq 0, \\ Y(x, y) = (-1 + x, -x), & y \leq 0, \end{cases}$$

definida em uma vizinhança U de $(0,0)$. Ver Figura 4.1(c).

Teorema 4.13. [52] $Z = (X, Y)$ é localmente estruturalmente estável em $\mathfrak{R}(0)$ se, e somente se, $0 \in \Sigma$ é um ponto de costura ou uma dobra-dobra genérica de $Z \in \mathfrak{R}(0)$.

Após relembrar tais resultados, estamos em posição de proceder à classificação local dos elementos de codimensão-1 para campos de vetores refrativos.

4.3.2 Análise local de elementos de codimensão-1 para campos de vetores refrativos

Seja $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ um campo de vetores refrativo e $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$, em coordenadas locais. Supondo que X tem um ponto de equilíbrio em $p \in \Sigma$, então $X_2(p) = Y_2(p) = 0$. Dessa forma, $Xf(p) = Yf(p) = 0$. Portanto, se $Z = (X, Y)$ é refrativo e $p \in \Sigma$ é um ponto de equilíbrio de X , então p também é um ponto de equilíbrio ou uma dobra de Y . Os três tipos de pontos de dobra-equilíbrio (ou equilíbrio-dobra) dados na Definição 4.10 podem aparecer nos campos de vetores suaves por partes refrativos de codimensão-1, como veremos a seguir. Observe que, uma dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica (segundo a Definição 4.9) e um ponto de cusp-cusp quase-genérico também são elementos de codimensão-1. A seguir, descrevemos cada um deles e suas condições quase-genéricas. Depois disso, provamos que esses elementos são todos de codimensão-1 e terminamos esta seção com alguns exemplos.

- (a) **Ponto de dobra-sela.** Seja $p_0 = (0, 0)$ um ponto de dobra-sela de $Z = (X, Y)$. Nesse caso, precisamos impor algumas condições quase-genéricas. Primeiro, a sela é um ponto de equilíbrio hiperbólico isolado de Y e seus auto-espacos são transversais à Σ . Se o ponto de dobra de X for invisível, precisamos de mais duas condições. A dobra invisível-invisível que pode aparecer no diagrama de bifurcação é genérica e não há autoconexão de separatrizes de sela. O não cumprimento dessas condições leva a bifurcações locais de codimensão de ordem superior.

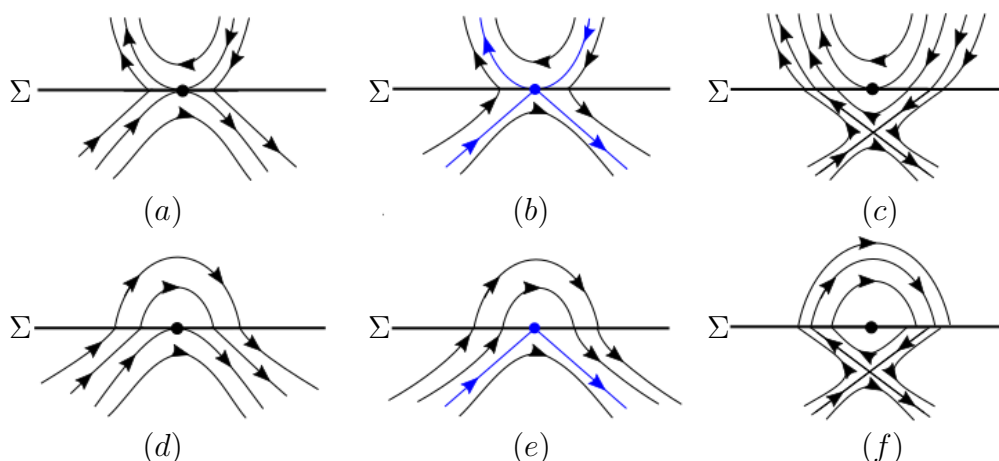


Figura 4.2: Pontos de dobra-sela e seus desdobramentos.

- (b) **Ponto de dobra-nó.** Seja $p_0 = (0, 0)$ um ponto de dobra-nó de $Z = (X, Y)$. Nesse caso, precisamos impor algumas condições quase-genéricas. Primeiro, o nó é um ponto de equilíbrio hiperbólico isolado de Y e seus auto-espacos são transversais à Σ . Se o ponto de dobra de X for invisível, precisamos impor que a dobra-dobra invisível-invisível que pode aparecer no diagrama de bifurcação seja genérica. O não cumprimento dessas condições leva a bifurcações locais de codimensão de ordem superior.

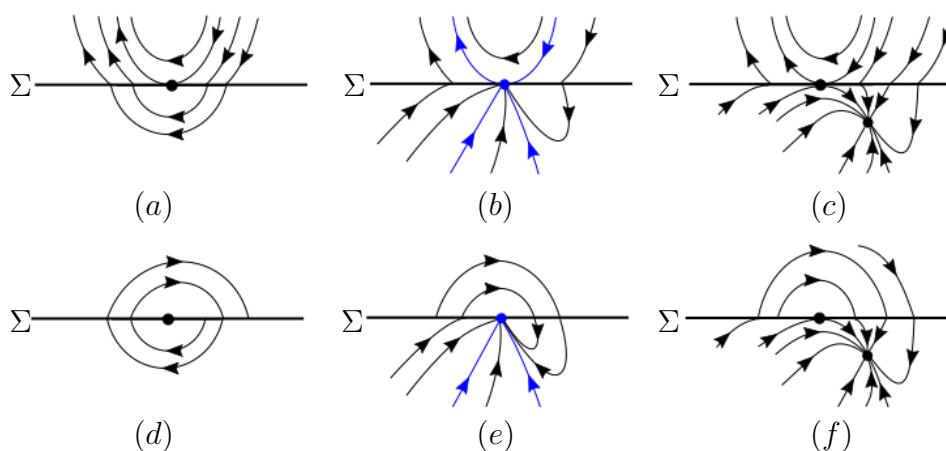


Figura 4.3: Pontos de dobra-nó e seus desdobramentos.

- (c) **Ponto de dobra-foco.** Seja $p_0 = (0,0)$ um ponto de dobra-foco de $Z = (X, Y)$. Nesse caso, precisamos impor algumas condições quase-genéricas. Primeiro, o foco é um ponto de equilíbrio hiperbólico isolado de Y , isso significa que o traço e o determinante de $DY(p_0)$ são diferentes de zero e positivos, respectivamente. Se o ponto de dobra de X for invisível, precisamos de mais duas condições. A dobra-dobra invisível-invisível que existe quando $p_0 \in \Sigma$ é genérica, assim como a dobra-dobra invisível-invisível que aparece no diagrama de bifurcação. O não cumprimento dessas condições leva a bifurcações locais de codimensão de ordem superior.

Observação 4.14. Se $p_0 = (0,0) \in \Sigma$ é do tipo dobra-foco para $Z = (X, Y)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} X(x, y) &= (a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \mathcal{O}_2(x, y), b_{10}x + b_{01}y + \mathcal{O}_2(x, y)), \\ Y(x, y) &= (c_{10}x - c_{01}y + \mathcal{O}_2(x, y), c_{01}x + c_{10}y + \mathcal{O}_2(x, y)), \end{aligned}$$

onde $a_{00}, b_{10} \neq 0$ e $c_{01}, c_{10} \neq 0$.

Assim, para x_0 suficientemente pequeno, o primeiro retorno é da forma

$$\phi_Z(x_0) = \exp(c_{10}\pi/c_{01})x_0 + \mathcal{O}_2(x_0).$$

Então, nesse caso, a dobra-dobra invisível-invisível, que existe em p_0 quando p_0 é simultaneamente um foco para X e uma dobra invisível para Y , tem a mesma estabilidade do foco.

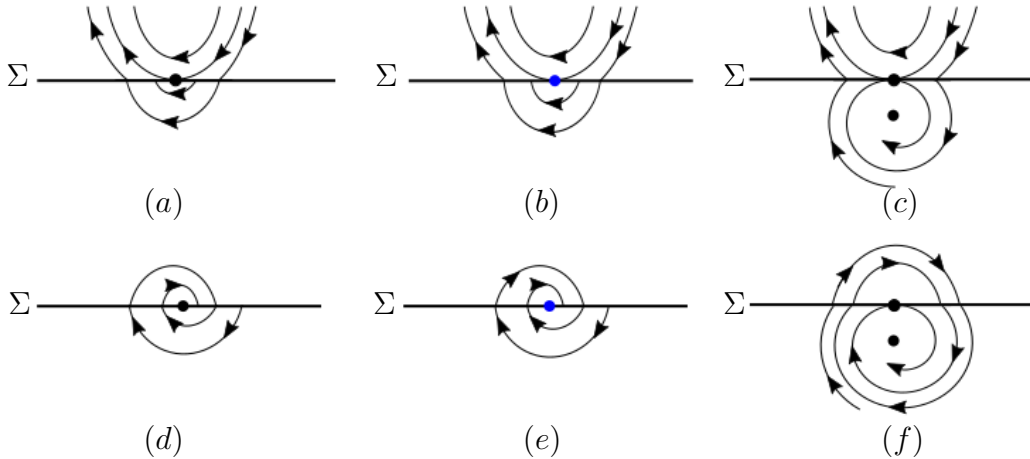


Figura 4.4: Pontos de dobra-foco e seus desdobramentos.

- (d) **Dobra-dobra quase-genérica (para campos de vetores refrativos).** Seja $p_0 = (0,0)$ uma dobra-dobra de $Z = (X, Y)$. Nesse caso, precisamos impor que o primeiro retorno é escrito da forma

$$\phi_Z(x_0) = x_0 + \alpha x_0^2 - \alpha^2 x_0^3 + \beta x_0^4 + \mathcal{O}_5(x_0)$$

com $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. O não cumprimento dessas condições leva a bifurcações locais em codimensões de ordem superior.

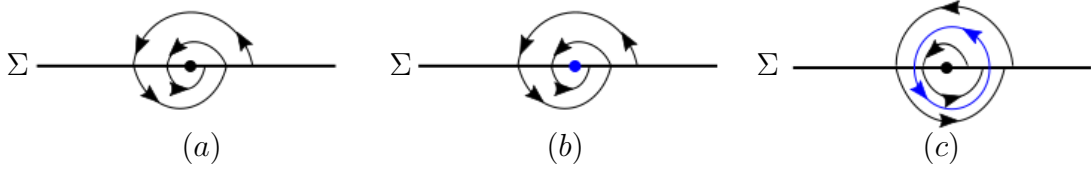


Figura 4.5: Dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica e seus desdobramentos, com $\beta < 0$.

(e) **Cusp-cusp quase-genérica.** Seja $p_0 = (0, 0)$ uma cusp-cusp de $Z = (X, Y)$. Note que, podemos assumir

$$\begin{aligned} X(x, y) &= (a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \mathcal{O}_2(x, y), \\ &\quad b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \mathcal{O}_3(x, y)), \\ Y(x, y) &= (c_{00} + c_{10}x - c_{01}y + \mathcal{O}_2(x, y), \\ &\quad d_{01}y + d_{20}x^2 + d_{11}xy + d_{02}y^2 + \mathcal{O}_3(x, y)). \end{aligned}$$

com $a_{00}, c_{00}, b_{20}, d_{20} \neq 0$. Quando necessário escrevemos $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$. Neste caso, vamos impor que X e Y sejam transversais à Σ em uma vizinhança de $\Sigma \setminus \{p_0\}$.

Existem quatro tipos de comportamento em uma vizinhança de p_0 , que dependem do tipo de inflexão das trajetórias de X e Y em $p_0 \in \Sigma$. Estudamos apenas dois deles porque os outros dois são análogos.

No primeiro caso, quando $a_{00}c_{00} > 0$, existem duas dobras parabólicas no desdobramento da cusp-cusp. Portanto, não precisamos de condições adicionais quase-genéricas além da transversalidade de X e Y em uma vizinhança de $\Sigma \setminus \{p_0\}$, já citada.

No segundo caso, quando $a_{00}c_{00} < 0$, existe uma dobra-dobra invisível-invisível e uma vivível-visível no desdobramento da cusp-cusp. Portanto, além da transversalidade de X e Y em uma vizinhança de $\Sigma \setminus \{p_0\}$, precisamos impor que essa dobra-dobra invisível-invisível seja genérica e que não há uma autoconexão entre as separatrizes da dobra hiperbólica. O não cumprimento dessas condições leva a bifurcações locais de codimensão de ordem superior.

Com os próximos lemas, provamos que os elementos discutidos acima são todos de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$.

Lema 4.15. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ tal que todos os equilíbrios de X_0 e Y_0 são hiperbólicos e não estão em Σ , exceto um deles, p_0 . A refração garante que p_0 é um ponto*

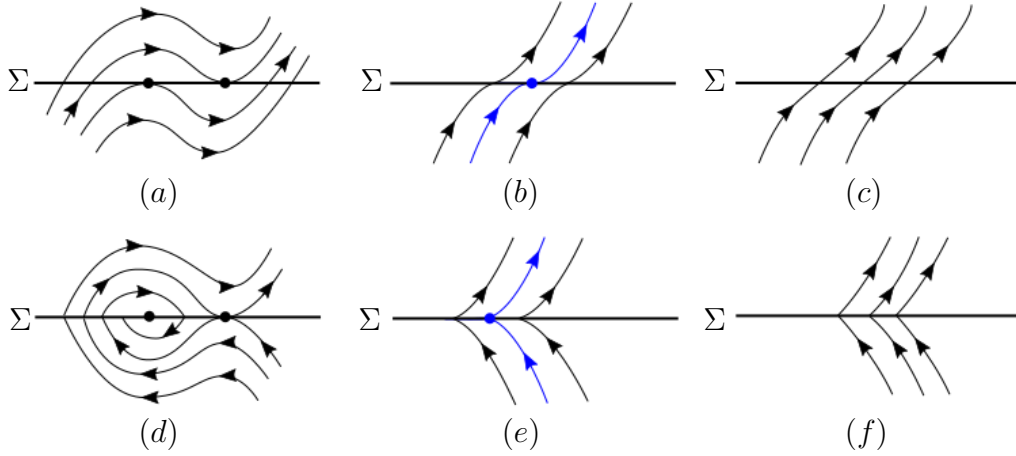


Figura 4.6: Pontos de cups-cusp e seus desdobramentos.

de dobra-equilíbrio (equilíbrio-dobra, respectivamente) de Z_0 . Além disso, consideramos as condições quase-genéricas impostas na Seção 4.3.2. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, $Z \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ tem um ponto de dobra-equilíbrio (equilíbrio-dobra, respectivamente) do mesmo tipo de Z_0 .

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ e $p_0 \in \Sigma$ uma sela hiperbólica de X_0 e uma dobra de Y_0 . Os outros casos são análogos. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ de Z_0 e $W_p = U_p \cap V_p$ de p_0 tais que para todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ existe uma sela hiperbólica $q_1 = (a_Z, b_Z)$ de X e uma dobra $q_2 = (f_Z, 0)$ de Y em W_p com $\text{sgn}(Y^2 f(q_2)) = \text{sgn}(Y_0^2 f(p))$. A refração garante que $X_2(x, 0) = Y_2(x, 0)$ para todo $(x, 0) \in \Sigma$ e então $(f_Z, 0)$ é uma dobra-dobra de Z . Como q_1 e q_2 são os únicos pontos de equilíbrio e dobra-dobra de Z em W_p , $b_Z = 0$ implica $a_Z = f_Z$. Nesse caso, Z tem uma sela-dobra em $(f_Z, 0)$.

Considere

$$\begin{aligned} h : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\rightarrow h(Z) = b_Z. \end{aligned}$$

Logo, $h^{-1}(0)$ é o conjunto dos campos de vetores refrativos $Z \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ tendo uma sela-dobra em W_p . Além disso, se $b_Z > 0$ ($b_Z < 0$) então $(a_Z, b_Z) \in \Sigma^+$ ($(a_Z, b_Z) \in \Sigma^-$, respectivamente) e então a sela é um ponto de equilíbrio admissível (não-admissível, respectivamente) de $Z \in \mathcal{B}$. A prova termina pois $dh_{Z_0} \neq 0$ como no caso Clássico (para mais detalhes, veja [51]). $\square$

Lema 4.16. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ e $p_0 = (0, 0)$ a única dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica de Z_0 . Além disso, suponha que em uma vizinhança de p_0 o primeiro retorno (4.1) seja da forma $\phi_{Z_0}(x_0) = x_0 + \beta x_0^4 + \mathcal{O}_5(x_0)$, com $\beta \neq 0$. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z tem uma dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica.*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ e $p_0 \in \Sigma$ uma dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica. Então $X_0 f(p_0) = 0 = Y_0 f(p_0)$, $X_0^2 f(p_0) > 0$, $Y_0^2 f(p_0) < 0$ e a aplicação de primeiro retorno associada a dobra-dobra é da forma

$$\phi_{Z_0}(x) = \phi_Y \circ \phi_X(x) = x + \alpha x^2 - \alpha^2 x^3 + \beta x^4 + \mathcal{O}_5(x).$$

com $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$.

A propriedade de refração, junto com o Teorema da Função Implícita, garantem a existência de vizinhanças $\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ de Z_0 e $W_p = U_p \cap V_p$ de p_0 tal que para todo $Z \in \mathcal{W}$ existe uma única dobra-dobra invisível-invisível em W_p . Então uma pequena perturbação de Z_0 , em W_p , pode alterar apenas a aplicação de primeiro retorno ϕ_{Z_0} . A hipótese $\beta > 0$ ($\beta < 0$) garante que existe apenas uma poli-trajetória fechada do tipo I quando $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$, respectivamente), que nasce como na bifurcação clássica de Hopf, já que a refração garante que não exista segmento de escape ou deslize e, portanto, uma bifurcação do tipo pseudo-Hopf não pode ocorrer.

Com isso, a prova segue utilizando a expressão do primeiro retorno e argumento semelhante ao utilizado no Lema 3.3. $\square$

A prova do próximo lema é análoga ao do Lema 3.4, utilizando a propriedade de refração, como no Lema 4.15 e, por isso, será omitida.

Lema 4.17. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ possui um único ponto de cusp-cusp $p_0 \in \Sigma$. Além disso, considere as condições quase-genéricas dadas na Seção 4.3.2. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z possui um único ponto de cusp-cusp em Σ , do mesmo tipo que Z_0 .*

No que segue, mostramos alguns modelos de elementos de codimensão-1 para campos de vetores refrativos e seus desdobramentos. Apesar desses modelos não serem, necessariamente, formas normais eles são representantes de algumas delas.

(a) *Dobra-dobra quase-genérica.* Seja $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$, com $X_\lambda(x, y) = (-1 - \lambda x, x + y^2)$ e $Y_\lambda(x, y) = (1, x)$. Então $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$ tem uma dobra-dobra invisível-invisível na origem, para todo λ . Para $x_0 \in \Sigma$, temos

$$\phi_{Z_\lambda}(x_0) = x_0 + \frac{2}{3}\lambda x_0^2 + \frac{4}{9}\lambda^2 x_0^3 + \left(\frac{4}{3} + \frac{16}{27}\lambda^3\right)x_0^4 + \mathcal{O}_5(x_0),$$

então Z_0 tem uma dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica na origem e Z_λ tem uma dobra-dobra invisível-invisível genérica quando $\lambda \neq 0$. Além disso, quando $\lambda = 0$ temos $\beta = 4/3 > 0$ e então a dobra-dobra quase-genérica é repulsora. Quando $\lambda < 0$ a estabilidade da dobra-dobra muda de repulsora para atratora e uma poli-trajetória

fechada do tipo I (também chamado de ciclo limite costurante) de pequena amplitude nasce. Quando $\lambda > 0$ a origem é uma dobra-dobra genérica (repulsora).

(b) *Cusp-cusp quase-genérica (ou simples)*. Vamos distinguir dois casos.

(b₁) Seja $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$, com $X_\lambda(x, y) = (1, x^2 + \lambda)$ e $Y_\lambda(x, y) = (1, x^2 + \lambda)$. Então Z_0 tem uma cusp-cusp em $p = (0, 0) \in \Sigma$, Z_λ é transversal à Σ em uma vizinhança de p quando $\lambda > 0$, e Z_λ tem duas dobras-dobras visível-invisível em $(\pm\sqrt{\lambda}, 0)$ quando $\lambda < 0$.

(b₂) Seja $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$, com $X_\lambda(x, y) = (1 + x, x^2 + \lambda)$ e $Y_\lambda(x, y) = (-1, x^2 + \lambda)$. Nesse caso, $Z_0(x, y)$ tem uma cusp-cusp em $p = (0, 0) \in \Sigma$, Z_λ é transversal à Σ quando $\lambda > 0$ e Z_λ tem uma dobra-dobra visível-visível em $(-\sqrt{-\lambda}, 0)$ e uma dobra-dobra invisível-invisível em $(\sqrt{-\lambda}, 0)$ quando $\lambda < 0$. Nesse caso, a aplicação de primeiro retorno é

$$\phi_{Z_\lambda}(x_0) = x_0 + \frac{2}{-3 + 3\sqrt{-\lambda}}x_0^2 + \mathcal{O}_3(x_0).$$

Portanto, a dobra-dobra invisível-invisível é genérica.

(c) *Ponto de dobra-sela quase-genérico*. Seja $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$, com $X_\lambda(x, y) = (1, -x)$ e $Y_\lambda(x, y) = (x - y + \lambda, -x)$. Então $Z_0(x, y)$ tem uma dobra-sela em $p = (0, 0) \in \Sigma$. Note que λ controla a distância entre a sela de $Y_\lambda(x, y)$, $P = (0, \lambda)$, e a descontinuidade Σ . Portanto P é admissível para $\lambda < 0$ e não-admissível para $\lambda > 0$. Além disso, escolhemos X_λ e Y_λ de modo que a dobra-dobra que aparece quando $\lambda \neq 0$ é dada por $F = (0, 0)$ e é invisível-visível quando $\lambda > 0$ e invisível-invisível quando $\lambda < 0$. No último caso, temos

$$\phi_{Z_\lambda}(x_0) = x_0 + \frac{2}{3\lambda}x_0^2 + \frac{4}{9\lambda^2}x_0^3 + \mathcal{O}_4(x_0),$$

então a dobra-dobra invisível-invisível é genérica.

(d) *Ponto de dobra-foco quase-genérico*. Seja $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$, com $X_\lambda(x, y) = (1, -x)$ e $Y_\lambda(x, y) = (x + y - \lambda, -x + y)$. Então $Z_0(x, y)$ tem uma dobra-foco em $p = (0, 0) \in \Sigma$. Como vimos na Seção 4.3.2, $(0, 0)$ tem a mesma estabilidade do foco que, nesse caso, é repulsor. Note que, λ controla a distância entre o foco $P = (\lambda/2, \lambda/2)$ e a descontinuidade Σ . Portanto, P é admissível quando $\lambda < 0$ e não-admissível quando $\lambda > 0$. Além disso, escolhemos X_λ e Y_λ de modo que a dobra-dobra que aparece quando $\lambda \neq 0$ é dada por $F = (0, 0)$ e é invisível-visível quando $\lambda < 0$ e invisível-invisível quando $\lambda > 0$. No último caso,

$$\phi_{Z_\lambda}(x_0) = x_0 - \frac{4}{3\lambda}x_0^2 + \frac{16}{9\lambda^2}x_0^3 + \mathcal{O}_4(x_0).$$

Portanto, como $x_0 < 0$, a dobra-dobra invisível-invisível é genérica, com estabilidade igual a inicial (da dobra-foco).

- (e) *Ponto de dobra-nó quase-genérico.* Seja $Z_\lambda = (X_\lambda, Y_\lambda)$, com $X_\lambda(x, y) = (1, -x)$ e $Y_\lambda(x, y) = (3x + y + \lambda, -x)$. Então $Z_0(x, y)$ tem uma dobra-nó em $(0, 0) = p \in \Sigma$. Quando $\lambda \neq 0$ podemos ver que λ controla a distância entre o nó de $Y_\lambda(x, y)$, $P = (0, -\lambda)$, e a descontinuidade Σ . Portanto P é admissível quando $\lambda > 0$ e não-admissível quando $\lambda < 0$. Além disso, escolhamos X_λ e Y_λ de modo que a dobra-dobra que aparece quando $\lambda \neq 0$ é dada por $F = (0, 0)$ e é invisível-visível quando $\lambda > 0$ e invisível-invisível quando $\lambda < 0$. No último caso,

$$\phi_{Z_\lambda}(x_0) = x_0 + \frac{2}{\lambda}x_0^2 + \frac{4}{\lambda^2}x_0^3 + \mathcal{O}_4(x_0).$$

Portanto, a dobra-dobra invisível-invisível é genérica.

4.3.3 Conexões de separatrizes e poli-trajetórias

Nesta seção lidaremos com conexões de separatrizes quase-genéricas e poli-trajetórias. Pela similaridade com as provas exibidas no Capítulo 3, algumas das demonstrações serão omitidas.

Lema 4.18. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ possui uma única conexão heteroclínica entre dobras-dobras genéricas, que não dá origem a uma poli-trajetória fechada. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z tem uma única conexão heteroclínica entre dobras-dobras.*

Lema 4.19. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ possui uma única conexão heteroclínica entre uma sela hiperbólica, com auto-espacos transversais à Σ , e uma dobra-dobra genérica. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$ e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z tem uma única conexão heteroclínica entre sela e dobra-dobra.*

Lema 4.20. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ possui uma única conexão entre selas hiperbólicas que não estejam em Σ e com auto-espacos transversais à Σ . No caso de ser um loop (conexão homoclínica) o loop é simples. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z tem uma única conexão de selas, nas mesmas hipóteses da conexão de Z_0 . Ademais, no caso em que $Z_0 \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ possui um loop simples, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ pode admitir conexão de separatrizes a menos que o loop não seja α ou ω -limite de separatrizes de sela ou dobra enquanto $h^{-1}(\mathbb{R}_-) \subset \Sigma_0^{S_\lambda}$ admite uma trajetória ou poli-trajetória fechada elementar.*

As provas dos lemas anteriores são análogas as utilizadas na Teoria Clássica [47, 51] com as adaptações já mostradas nas Proposições 3.13 e 3.19 e, por isso, serão omitidas.

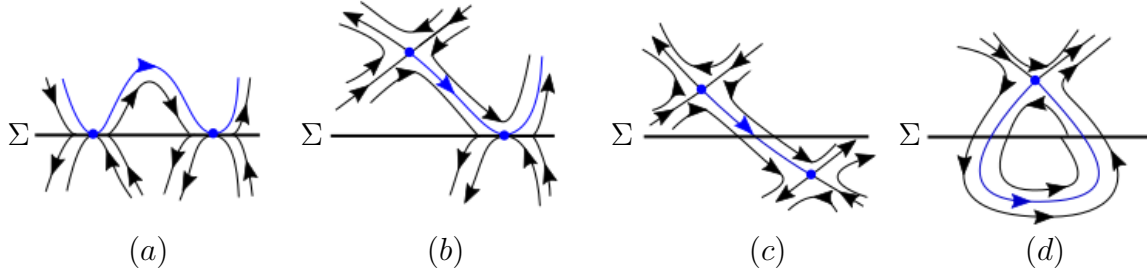


Figura 4.7: (a) Conexão entre dobras-dobras distintas; (b) conexão sela-dobra; (c) Conexão entre duas selas distintas; (d) loop de sela.

Lema 4.21. *Seja γ_0 uma poli-trajetória fechada do tipo I de $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ com $\pi'(q) = 1$ e $\pi''(q) \neq 0$ para todo $q \in \Sigma \cap \gamma_0$, onde π denota a aplicação de primeiro retorno. Então, existem vizinhanças $\mathcal{B} \subset \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ de Z_0 , e C_γ de γ_0 , e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z tem uma poli-trajetória fechada do tipo I nas mesmas hipóteses de γ_0 em C_γ . Ademais, $h^{-1}(\mathbb{R}_-)$ é estruturalmente estável e admite duas poli-trajetórias fechadas elementares do tipo I em C_γ e $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ pode admitir conexões de separatrizes a menos que γ_0 não seja simultaneamente α e ω -limite de separatrizes de sela ou dobra.*

Observe que o Lema 3.7 é válido para campos refrativos. Basta considerarmos a restrição da vizinhança de campos construídas na demonstração do mesmo ao espaço de campos refrativos. Dessa forma, a prova do lema anterior é análoga ao do Lema 3.8.

No próximo lema, lidamos com poli-trajetórias fechadas do tipo III que passam, necessariamente, por uma dobra-dobra visível-visível e que envolvam a conexão de separatrizes dos campos X e Y . Este objeto também é conhecido como *two-fold cycle* na literatura e foram estudados, sem a hipótese de refração, em [41]. Note que, para campos não refrativos tais objetos são de codimensão-2. Em sistemas refrativos, podem ter duas formas distintas (ver Figura 4.8) e, como observado em [41], para ambos podemos definir uma aplicação de primeiro retorno em um intervalo semi-fechado $[0, \delta)$ contido em $\Sigma \cap \text{int}(\gamma)$ e $\Sigma \cap \text{ext}(\gamma)$, respectivamente. A seguir, mostramos a construção para o caso exibido na Figura 4.8(a). O caso da Figura 4.8(b), ou com outras orientações, são análogos. Esta análise é baseada na apresentada em [41] para o mesmo objeto no caso não refrativo.

Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ possui uma poli-trajetória fechada do tipo III Γ e seja p_0 a dobra-dobra genérica que dá origem a Γ . Seja V_p uma vizinhança de p_0 tal que p_0 seja a única dobra-dobra de Z_0 em V_p . Pela propriedade refrativa temos $(V_p \setminus \{p_0\}) \cap \Sigma \subset \Sigma^c$. Estas hipóteses e a dependência contínua das soluções de X_0 e Y_0 das condições iniciais, garantem que existe um anel V_Γ , em torno de Γ , tal que todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ tem um ponto de dobra-dobra $p_Z \in V_p \cap V_\Gamma$. Ademais, a trajetória

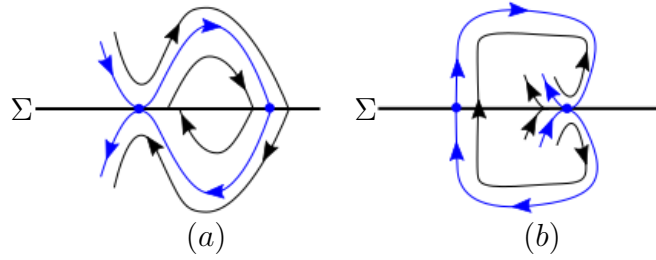


Figura 4.8: Poli-trajetórias fechadas do tipo III.

de X (Y , respectivamente) começando em p_Z encontra Σ transversalmente em q_X (q_Y , respectivamente) quando olhamos a variação positiva (negativa) do tempo, e as trajetórias de X e Y conectando p_Z a q_X e q_Y , respectivamente, estão ambas contidas em V_Γ . A seguir adaptamos a construção dada em [41], adicionando a propriedade refrativa.

Seja $\Sigma_{+\varepsilon} = \{(x, \varepsilon), x \in \mathbb{R}\}$ e $\Sigma_{-\varepsilon} = \{(x, -\varepsilon), x \in \mathbb{R}\}$. Considere duas funções de transição $\rho_1 : [0, \delta) \rightarrow \Sigma_{+\varepsilon}$ e $\mu_1 : [0, \delta) \rightarrow \Sigma_{-\varepsilon}$ dadas por $\rho_1(x) = p^+ + l_1(Z)x + \mathcal{O}_3(x)$ e $\mu_1(x) = p^- + k_1(Z)x + \mathcal{O}_3(x)$ com $l_1(Z), k_1(Z) > 0$, onde $(p^\pm, \pm\varepsilon) \in \Sigma_{\pm\varepsilon}$ denotam a primeira interseção da trajetória passando por $(x, 0)$, onde $0 \leq x < \delta$, com $\Sigma_{\pm\varepsilon}$.

Como a trajetória de X passando por p_Z cruza Σ transversalmente para tempo positivo, temos definido um difeomorfismo $\rho_2 : \rho_1([0, \delta)) \rightarrow \Sigma$, que pode ser estendido numa vizinhança de p^+ como $\rho_2(x) = q_X + l_2(Z)(x - p^+) + \mathcal{O}_2((x - p^+))$, com $l_2(Z) < 0$. Da mesma forma, como a trajetória de Y passando por p_Z cruza Σ para tempo negativo, temos definido um difeomorfismo $\mu_2 : \mu_1([0, \delta)) \rightarrow \Sigma$, que pode ser estendido em uma vizinhança de p^- como $\mu_2(x) = q_Y + k_2(Z)(x - p^-) + \mathcal{O}_2((x - p^-))$, com $k_2(Z) < 0$. Logo, diminuindo $\mathcal{B}$ e V_Γ , se necessário, para cada $Z \in \mathcal{B}$, é possível definir uma função distância

$$\begin{aligned} f_z(x) &= \rho_2 \circ \rho_1(x) - \mu_2 \circ \mu_1(x) = \\ &= (q_X - q_Y) + (l_1(Z)l_2(Z) - k_1(Z)k_2(Z))x^2 + \mathcal{O}_3(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Logo, $f_{Z_0} = Mx^2 + \mathcal{O}_3(x)$, onde $M = l_1(Z_0)l_2(Z_0) - k_1(Z_0)k_2(Z_0)$. Portanto, assumimos a condição quase-genérica $M \neq 0$ para esse tipo de poli-trajetória.

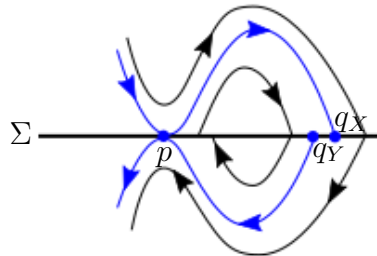


Figura 4.9: Função distância para poli-trajetórias fechadas do tipo III.

Lema 4.22. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ possui uma poli-trajetória fechada Γ_0 do tipo III, que passa por uma dobra-dobra visível-visível, com $f_{Z_0}(x) = Mx^2 + \mathcal{O}_3(x)$, onde $M \neq 0$. Então, existem vizinhanças $\mathcal{B} \subset \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ de Z_0 , e V_Γ de Γ_0 , e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z tem uma poli-trajetória do tipo III do mesmo tipo que Z_0 em V_Γ . Ademais, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$ é estruturalmente estável e admite uma poli-trajetória fechada elementar do tipo I em V_Γ e $h^{-1}(\mathbb{R}_-)$ pode admitir conexões de separatrizes a menos que Γ não seja α ou ω -limite de separatrizes de sela ou dobra.*

Demonstração. Seguindo a notação estabelecida acima, sem perda de generalidade, podemos supor $M = (l_1(Z_0)l_2(Z_0) - k_1(Z_0)k_2(Z_0)) < 0$. Isso implica que a poli-trajetória fechada do tipo III é repulsora.

Considere $h(Z) = q_X - q_Y$. Então, $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z tem uma poli-trajetória fechada do tipo III. Além disso, se $h(Z) < 0$, não existe poli-trajetória do tipo I no anel V_Γ e se $h(Z) > 0$, existe uma poli-trajetória repulsora do tipo I no anel V_Γ . A prova desse fato é análoga a exibida em [41]. A prova termina mostrando que $dh_{Z_0} \neq 0$.

Para isso, considere a curva $\mathcal{Z}(\lambda) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ tal que $\mathcal{Z}(0) = Z_0$ e $h(\mathcal{Z}(\lambda)) = (q_X - q_Y) + \lambda$. Portanto, para $V \in \mathcal{Z}(\lambda)$ temos,

$$dh_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z}'(0)) = \frac{d}{d\lambda} h(\mathcal{Z}(\lambda))|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h(\mathcal{Z}(\lambda)) - h(Z)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0.$$

□

A seguir lidaremos com campos de vetores $Z = (X, Y)$ que possuem uma órbita periódica hiperbólica de X ou de Y tangente à Σ em um ponto de dobra-dobra. Note que, esse é um tipo de poli-trajetória do tipo III. Esse tipo de objeto foi estudado em [25], sem a hipótese de refração. Note que, para campos não refrativos esse objeto é de codimensão-2.

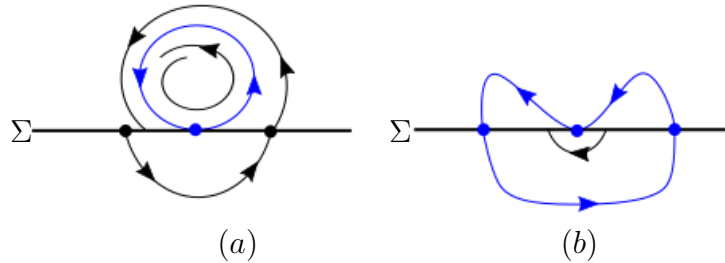


Figura 4.10: (a) Órbita periódica tangente à Σ ; (b) poli-trajetória fechada do tipo III conectando separatrizes estáveis e instáveis de uma mesma dobra.

Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ e suponha que X_0 possui uma trajetória fechada hiperbólica Γ_0 genericamente tangente à Σ em $p \in \Sigma$. Isto é, $p \in \Gamma_0 \cap \Sigma$ é uma dobra-dobra genérica de Z_0 . Essas hipóteses garantem a existência de vizinhanças $\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ de Z_0 e $W_p = U_p \cap V_p$

de p tal que para todo $X \in \mathcal{U}$ existe uma única trajetória fechada hiperbólica Γ de X passando por $p \in U_p$ (com a mesma estabilidade de Γ_0) e uma única dobra-dobra $q \in W_p$ de Z com $Y^2 f(q) = Y_0^2 f(p_0)$.

Seja Γ a trajetória fechada hiperbólica de $X \in \mathcal{U}$ e $(f_Z, 0) \in W_p$ o ponto de dobra de Y , respectivamente. Note que, Γ cruza $L = \{Xf = 0\}$ em um ponto $p_\Gamma = (a_Z, b_Z)$. Quando $b_Z = 0$ a refração garante que $a_Z = f_Z$ e, nesse caso, Γ é tangente à Σ no ponto de dobra-dobra $(f_Z, 0)$.

Então, definimos

$$\begin{aligned} h : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\rightarrow h(Z) = b_Z. \end{aligned} \tag{4.3}$$

É fácil ver que $h^{-1}(0)$ é o conjunto de campos de vetores refrativos que possuem uma trajetória fechada tangenciando Σ , de modo genérico.

Inicialmente teríamos que considerar dois casos, o em que Γ tangencia Σ em um ponto de dobra-dobra visível-visível e o que Γ tangencia Σ em um ponto de dobra-dobra visível-invisível, para impor, se necessário, outras condições quase-genéricas para esse tipo de poli-trajetória do tipo III. É fácil ver que a refração e a hiperbolicidade de Γ_0 são condições suficientes quando consideramos que $p_0 \in \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra visível-visível, já que não existe segmento de escape ou deslize em Σ .

Quando $p_0 \in \Gamma_0 \cap \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra visível-invisível, fazendo uma mudança de coordenadas, se necessário, podemos assumir que a aplicação de semi-retorno associado à dobra invisível de Y_0 é dado por $\pi_{Y_0}(x) = -x + \mathcal{O}_2(x)$, para $x \in (-\varepsilon_1, 0)$, com $\varepsilon_1 > 0$.

O primeiro retorno e a função distância associados a esse tipo de poli-trajetória, sem a hipótese de refração, foram calculados em [25]. A seguir adaptamos a construção dada em [25], adicionando a propriedade refrativa.

Considere as seções transversais da forma $\sigma^u = \{(x, \varepsilon), x \in \mathbb{R}_+\}$ e $\sigma^s = \{(x, \varepsilon), x \in \mathbb{R}_-\}$, com ε suficientemente pequeno. Assim, para todo $Z \in \mathcal{B}$, o fluxo de X induz uma aplicação $\rho_X : \sigma^u \rightarrow \sigma^s$, e também define duas funções de transição, $T_-^{X_0} : \Sigma \rightarrow \sigma^s$ e $T_+^{X_0} : \Sigma \rightarrow \sigma^u$. Além disso, o fluxo de Y induz uma aplicação $\rho_Y : \Sigma \rightarrow \Sigma$, como na Figura 4.11. Com uma análise semelhante a descrita no caso anterior, e já

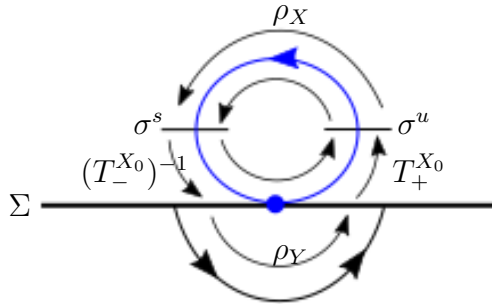


Figura 4.11: Aplicação de primeiro retorno.

impondo a refração, utilizando as funções de transição e as aplicações induzidas pelos fluxos de X e de Y é possível escrever a aplicação de primeiro retorno e também a função distância associada a esse tipo de trajetória que é da forma $f_Z(x) = (T_+^X \circ \rho_Y)(x) - ((\rho_X)^{-1} \circ T_-^X)(x)$. Expandindo todas as aplicações envolvidas, como em [25], obtemos

$$f_Z(x) = \beta(Z) + M(Z)x^2 + \mathcal{O}_3(x), \quad (4.4)$$

com $\beta(Z_0) = 0$. Em [25] também foi provado que $M(Z_0) \neq 0$ sempre que Γ_0 for hiperbólica, além disso, $M(Z_0) < 0$ ($M(Z_0) > 0$) se Γ_0 é atratora (repulsora, respectivamente). Assim, $f_{Z_0}(x) = Mx^2 + \mathcal{O}_3(x)$, com $M \neq 0$.

Isso implica que a função distância é sempre hiperbólica e, portanto, a hiperbolicidade é mantida quando consideramos pequenas perturbações de Z_0 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Logo, considerando $Z = (X, Y)$ na vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 descrita acima e h definida por (4.3). Se $h(Z) > 0$, então X tem uma trajetória fechada hiperbólica contida em Σ^+ . Se $h(Z) = 0$, então X tem uma trajetória fechada hiperbólica genericamente tangente à Σ . Finalmente, se $h(Z_0) < 0$, há uma poli-trajetória fechada do tipo I, em $\mathcal{V}_\Gamma$, com a mesma estabilidade de Γ_0 .

O segundo motivo que nos permite não distinguir o tipo de dobra-dobra em que Γ tangencia Σ é que uma pequena perturbação do campo não pode gerar uma dobra-dobra invisível-invisível em seu desdobramento.

Portanto, no próximo lema, não precisamos distinguir o tipo de dobra-dobra em que a trajetória de X_0 é tangente à Σ , pois não é necessário impor condições quase-genéricas adicionais em nenhum dos casos.

Lema 4.23. *Suponha que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ possui uma órbita periódica hiperbólica genericamente tangente à Σ . Então, existe uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 e uma função $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} tal que $h(Z_0) = 0$, $dh_{Z_0} \neq 0$ e $h(Z) = 0$ se, e somente se, Z tem uma órbita periódica genericamente tangente à Σ , nas mesmas hipóteses de Z_0 .*

Com as considerações acima, a prova do lema é análoga ao do Lema 3.12. Além disso, seguindo a notação acima, note que $h^{-1}(\mathbb{R}_-)$ pode ter conexões de separatrizes a menos que a trajetória fechada de Z_0 não seja α ou ω -limite de separatrizes de sela ou tangências, como no caso do Lema 4.21 e no lema citado.

Observação 4.24. *Os casos de poli-trajetórias fechadas do tipo III que passam por um ponto de dobra-dobra visível-invisível ou visível-visível e que a conexão envolva apenas separatrizes da dobra de X_0 ou de Y_0 , mas cruzem Σ em pontos de costura (como na Figura 4.10(b)), podem ser estudados de modo análogo ao visto acima. Impondo que o primeiro retorno (ou a função distância) seja hiperbólico, como condição quase-genérica, quando a dobra-dobra for visível-invisível. Para mais detalhes, ver [25].*

4.4 Espaço de campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$

Inspirados pelo Teorema de Peixoto, definimos o seguinte subconjunto de $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, para $\lambda > 0$ fixo e arbitrário.

Definição 4.25. Dizemos que $Z = (X, Y) \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

- (a) todos os equilíbrios de X e de Y são hiperbólicos e não estão em Σ ;
- (b) todas as órbitas periódicas de X e de Y são hiperbólicas e não tangenciam Σ ;
- (c) todas as poli-trajetórias são elementares;
- (d) todas as dobras-dobras são genéricas;
- (e) Z não possui conexões de separatrizes;
- (f) Z não possui órbita não trivialmente recorrente.

Observação 4.26. Como vimos na Seção 3.3, as únicas possibilidades de recorrência não trivial em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$ são as poli-trajetórias fechadas não elementares do tipo III. Assim, a não existência de conexões de separatrizes implica na não existência de órbitas não trivialmente recorrentes em $\Sigma_0^{S_\lambda}$.

O principal objetivo desta seção é provar o Teorema 4.2. A seguir, usamos a notação $X|_{\Sigma^+} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$ ($Y|_{\Sigma^-} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$, respectivamente) quando $X|_{\Sigma^+}$ ($Y|_{\Sigma^-}$, respectivamente) é estruturalmente estável.

Lema 4.27. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ tal que $X_0|_{\Sigma^+} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$, $Y_0|_{\Sigma^-} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$. Suponhamos também que $X_0 f(p) Y_0 f(p) > 0$, para todo $p \in \Sigma$, e que Z_0 não admita conexão de separatrizes nem órbitas não trivialmente recorrentes. Então Z_0 é estruturalmente estável.

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ nas hipóteses enunciadas. A continuidade das propriedades de Z_0 com relação ao campo Z_0 garante que existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ de Z_0 tal que todo $Z \in \mathcal{B}$ tenha os mesmos tipos de pontos de equilíbrio que Z_0 e satisfaça todas as hipóteses do lema.

Dado $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ considere ψ_{X_0} , ψ_X , ψ_{Y_0} e ψ_Y os fluxos de X_0 , X , Y_0 e Y , respectivamente.

Seja $p \in \Sigma = f^{-1}(0)$ então $f(\psi_{X_0}(0, p)) = 0$. Além disso, $\nabla f(p) \neq 0$ e $\frac{d}{dt}(\psi_{X_0}(0, p)) = X_0(p) \neq 0$. Dessa forma, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança $V_0 \subset \mathbb{S}^2$ de p e uma função $t : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\psi_{X_0}(t(q), q)) = 0$, para todo $q \in V_0 \cap \Sigma^+$, isto é, $\psi_{X_0}(t(q), q) \in \Sigma$. Analogamente, existe uma vizinhança $V_1 \subset \mathbb{S}^2$ de p e uma função $t : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\psi_{Y_0}(t(q), q)) = 0$, para todo $q \in V_1 \cap \Sigma^-$, isto é, $\psi_{Y_0}(t(q), q) \in \Sigma$.

Tome $\varepsilon_p > 0$ tal que $B(p, \varepsilon_p) \subset V_0 \cap V_1$. Como X_0 e Y_0 possuem um número finito de pontos de equilíbrio podemos supor, sem perda de generalidade, que X_0 e Y_0 não se anulam em $B(p, \varepsilon_p)$.

Observe que a construção acima é válida para todo $p \in \Sigma$. Assim, $\bigcup_{p \in \Sigma} B(p, \varepsilon_p)$ é uma cobertura aberta para Σ , que é compacta. Logo, existem $\{p_1, \dots, p_k\}$ tais que $\Sigma \subset \bigcup_{i=1}^k B(p_i, \varepsilon_{p_i})$ e essa cobertura admite número de Lebesgue δ . Assim, para todo $p \in \Sigma$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ de modo que $B(p, \delta) \subset B(p_i, \varepsilon_i)$. Disso concluímos que $\delta \leq \varepsilon_i$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e, portanto, obtemos uma coroa C_δ em torno de Σ onde podemos aplicar o Teorema da Função Implícita, como acima, e onde os campos X_0 e Y_0 não se anulam.

Considere $\frac{\delta}{2} = \varepsilon$ e chame $\Sigma_{\pm\varepsilon} = f^{-1}(\pm\varepsilon)$. Diminuindo ε e $\mathcal{B}$, se necessário, para todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ existem tempos T_i , $i = 1, \dots, 4$ tais que

$$\psi_X(T_1(q), q) \in \Sigma \text{ e } \psi_X(T_2(q), q) \in \Sigma_{+\varepsilon}, q \in \Sigma^+ \cap C_\varepsilon$$

e

$$\psi_Y(T_3(q), q) \in \Sigma \text{ e } \psi_Y(T_4(q), q) \in \Sigma_{-\varepsilon}, q \in \Sigma^- \cap C_\varepsilon.$$

Sejam $s_i^{X_0}$ e $s_j^{Y_0}$ as selas de X_0 e Y_0 , respectivamente. Como todo $p \in \Sigma$ é ponto de costura para Z_0 , sobre Σ marcamos apenas os pontos onde as separatrizes estáveis e instáveis de $s_i^{X_0}$ e $s_j^{Y_0}$ cruzam Σ . Lembrando que, por hipótese, Z_0 não admite conexão de separatrizes e, portanto, os pontos onde $s_i^{X_0}$ e $s_j^{Y_0}$ cruzam Σ nunca coincidem. Esses pontos delimitam arcos sobre Σ e os extremos desses arcos variam continuamente com Z_0 . Dessa forma é possível fazer uma correspondência biunívoca entre eles e seus correspondentes para $Z \in \mathcal{B}$ de modo que podemos estender essa correspondência para toda a Σ . Denotaremos essa extensão por h .

Vamos estender h a C_ε utilizando comprimento de arco. Para isso consideramos $u \in C_\varepsilon \cap \Sigma^+$. Seja $\gamma_0(u)$ a trajetória de X_0 que passa por u . Como vimos $\gamma_0(u)$ intersecta Σ e $\Sigma_{+\varepsilon}$ e assim chamamos $u_1 = \gamma_0(u) \cap \Sigma$ e $u_2 = \gamma_0(u) \cap \Sigma_{+\varepsilon}$. Seja $v_1 = h(u_1) \in \Sigma$ e $\gamma(v_1)$ a trajetória de X que passa por v_1 , logo $\gamma(v_1)$ intersecta Σ e $\Sigma_{+\varepsilon}$ e assim chamamos $v_2 = \gamma(v_1) \cap \Sigma_{+\varepsilon}$. Para $u \in C_\varepsilon \cap \Sigma^+$ definimos $h(u) = v$ com $v \in \gamma(v_1) \cap \Sigma^+$ satisfazendo

$$\frac{|uu_1|}{|u_1u_2|} = \frac{|vv_1|}{|v_1v_2|}$$

É claro que $h(u_2) = v_2$. Logo h leva $\Sigma_{+\varepsilon}$ em $\Sigma_{+\varepsilon}$.

De modo análogo estendemos h a $C_\varepsilon \cap \Sigma^-$.

Logo, temos h definida no fecho de C_ε , $\overline{C_\varepsilon}$, e pela forma como construímos tal extensão, segue que h é homeomorfismo e leva trajetórias de Z_0 em trajetórias de Z em $\overline{C_\varepsilon}$.

Observe que as trajetórias de X_0 e Y_0 cortam $\Sigma_{+\varepsilon}$ e $\Sigma_{-\varepsilon}$ transversalmente. Além disso, por hipótese, $X_0|_{\Sigma^+} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$ e $Y_0|_{\Sigma^-} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$. Com isso estendemos h utilizando

o Teorema de Peixoto em $\mathbb{S}^2 \setminus \overline{C_\varepsilon}$.

Portanto, para todo $Z \in \mathcal{B}$ temos construído um homeomorfismo

$$h_Z : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

que leva trajetórias de Z_0 em trajetórias de Z preservando orientação do tempo.

Logo, Z_0 é estruturalmente estável. $\square$

Lema 4.28. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ tal que $X_{0|_{\Sigma^+}} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$, $Y_{0|_{\Sigma^-}} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$. Além disso, suponha que as dobras-dobras de Z_0 sejam todas genéricas e que Z_0 não tenha conexões de separatrizes, poli-trajetórias fechadas nem órbitas não trivialmente recorrentes. Então Z_0 é estruturalmente estável.*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ nas hipóteses enunciadas. A continuidade das propriedades de Z_0 , o Teorema da Função Implícita e a propriedade de abertura de $\Sigma^r(\Sigma^\pm)$ garantem que existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ de Z_0 , suficientemente pequena, de modo que todo $Z \in \mathcal{B}$ satisfaz as hipóteses enunciadas e possui os mesmos elementos críticos e pontos de dobra-dobra que Z_0 .

Em coordenadas locais, seja $p_0 = (0, 0)$ um ponto de dobra-dobra genérico de Z_0 . Pelo Teorema 4.13 Z_0 é localmente estruturalmente estável em uma vizinhança V_{p_0} de p_0 . Assim, diminuindo $\mathcal{B}$, se necessário, podemos supor que todo $Z \in \mathcal{B}$ é localmente Σ -equivalente a Z_0 em V_{p_0} . Isso significa que existe um homeomorfismo h tal que $h(\Sigma) = \Sigma$ e que leva trajetórias de Z_0 em trajetórias de Z em V_p , preservando a orientação do tempo, para todo $Z \in \mathcal{B}$. Além disso, a Proposição 4.12 fornece as formas normais dessas singularidades.

Ainda em coordenadas locais, seja $p_0 = (0, 0)$ um ponto de dobra-dobra genérico de Z_0 . Seja $V_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^2 - k < 0\}$, para $k > 0$. Portanto, ∂V_k é uma curva fechada ao redor da origem. Usando as formas normais fornecidas no Teorema 4.12, é fácil verificar que o contato entre Z_0 e ∂V_k é transversal, exceto em um número finito de pontos onde o contato é quadrático, independente do tipo de ponto de dobra-dobra genérico dentro de V_k . Além disso, ∂V_k cruza Σ transversalmente. Observe que podemos fixar k_0 pequeno o suficiente para que $\overline{V}_{k_0} \subset V_{p_0}$, e então cada $Z \in \mathcal{B}$ é Σ -equivalente a Z_0 em $\overline{V}_{k_0}$. Se houver outros pontos de dobra-dobra genéricos $p_i \neq p_0$, $i = 1, \dots, n$ repetimos o processo em uma vizinhança V_{p_i} de p_i e construímos como vizinhanças V_{k_i} como antes.

Seja $\overline{V} = \overline{V}_{k_0} \cup \overline{V}_{k_1} \cup \dots \cup \overline{V}_{k_n}$. Como Z_0 também é localmente estruturalmente estável em todos os pontos $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \overline{V}$ e $\Sigma \cap (\mathbb{S}^2 \setminus \overline{V}) \subset \Sigma^c$ construímos a vizinhança C_ε como no Lema 4.27. As trajetórias passando por $\partial V_{k_i} \cap \Sigma$ e $\partial V_{k_i} \cap \partial C_\varepsilon$, com $i = 1, \dots, n$, devem ser consideradas separatrizes e, portanto, não devem se conectar com selas ou dobras de Z_0 . Diminuindo V_k e ε , se necessário, não é restritivo supor que isso não ocorre. Assim, estendemos a equivalência dada em $\overline{V}$ para $\overline{C_\varepsilon}$ de uma maneira semelhante ao

mostrado no lema anterior. Concluimos a prova usando o Teorema Clássico de Peixoto em $\mathbb{S}^2 \setminus (\overline{C}_\varepsilon \cup \overline{V})$. □

Lema 4.29. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ tal que $X_{0|_{\Sigma^+}} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$, $Y_{0|_{\Sigma^-}} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$. Além disso, suponha que todas as dobra-dobras de Z_0 sejam genéricas, que Z_0 não tenha conexões de separatrizes nem órbitas não trivialmente recorrentes e que Z_0 tenha um número finito de poli-trajetórias fechadas elementares do tipo I. Então Z_0 é estruturalmente estável*

Demonstração. Seja $Z_0 = (X_0, Y_0)$ nas hipóteses enunciadas. A continuidade das propriedades de Z_0 , o Teorema da Função Implícita e a propriedade de abertura de $\Sigma^r(\Sigma^\pm)$ garantem que existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ de Z_0 , suficientemente pequena, de modo que todo $Z \in \mathcal{B}$ satisfaz as hipóteses deste lema e possui os mesmos elementos críticos e pontos de dobra-dobra e poli-trajetórias fechadas que Z_0 .

Seja γ_0 uma poli-trajetória fechada elementar do tipo I de Z_0 , e $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a aplicação de primeiro retorno associada a γ_0 . Sem perda de generalidade, assumamos que $\pi'(q) < 1$ para $q \in \Sigma \cap \gamma_0$. Como no Lema 3.7, Z_0 é localmente estruturalmente estável em um anel V_{γ_0} em torno de γ_0 . Suponha que $\partial V_{\gamma_0} = C_1 \cup C_2$ como no lema citado. Assim, todas as trajetórias de Z_0 cruzam ∂V_{γ_0} entrando transversalmente em V_{γ_0} . Logo, existe um homeomorfismo h que preserva a orientação do tempo e que leva trajetórias de Z_0 em trajetórias de Z , em $\overline{V}_{\gamma_0}$, para todo $Z \in \mathcal{B}$. Se houver outras poli-trajetórias fechadas elementares do tipo I γ_i , $i = 1, \dots, n$, repetimos o processo em uma vizinhança V_{γ_i} de γ_i .

Observe que podemos construir o anel C_ε em torno de Σ , como no Lema 4.28, já que $\Sigma = \Sigma^c \cup \{p_1, \dots, p_m\}$ onde p_i são pontos de dobra-dobra genérica para todo $i = 1, \dots, m$. Assim como no Lema 4.28, as trajetórias passando por $\partial V_{\gamma_i} \cap \Sigma$ e $\partial V_{\gamma_i} \cap \partial C_\varepsilon$, com $i = 1, \dots, n$, devem ser consideradas separatrizes e, portanto, não devem se conectar com selas ou dobras de Z_0 . Diminuindo V_{γ_i} e ε , se necessário, não é restritivo supor que isso não ocorre. Estendemos a equivalência h definida em $\overline{V} = \overline{V}_{\gamma_0} \cup \overline{V}_{\gamma_1} \cup \dots \cup \overline{V}_{\gamma_n}$ para $\overline{C}_\varepsilon$ com o mesmo argumento usado nos Lemas 4.27 e 4.28 e concluimos a prova usando o Teorema Clássico de Peixoto fora de $\overline{C}_\varepsilon \cup \overline{V}$. □

Proposição 4.30. *$Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ é estruturalmente estável se, e somente se, $Z \in \Sigma_0^{S_\lambda}$.*

Demonstração. Se $Z = (X, Y) \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ não tem poli-trajetórias fechadas, $X_{|_{\Sigma^+}}, Y_{|_{\Sigma^-}} \in \Sigma^r$ e toda dobra-dobra de Z é genérica, então pelos Lemas 4.27 e 4.28, Z é estruturalmente estável. Se $Z \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ e Z admite poli-trajetórias elementares do tipo I, concluimos a prova usando o Lema 4.29.

Por outro lado, suponha $Z \notin \Sigma_0^{S_\lambda}$. Portanto, Z não satisfaz algumas das afirmações da Definição 4.25. Se Z tem qualquer ponto de equilíbrio ou órbita periódica não hiperbólica e que não tangencie Σ , então Z não é estruturalmente estável como na Teoria Clássica

[42, 43]. Assim, dos itens (a) e (b) resta analisar os casos em que X ou Y tem um ponto de equilíbrio em Σ ou que uma trajetória fechada de X ou Y tangencie Σ . Usando os lemas da Seção 4.3.2 e também a Observação 4.26, concluímos a prova para esses dois casos e também para os demais enunciados. $\square$

A seguir provamos que $\Sigma_0^{S_\lambda}$ é denso em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, seguindo os passos da prova do caso suave, dada em [43].

Proposição 4.31. $\Sigma_0^{S_\lambda}$ é denso em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$.

Demonstração. Como vimos, existem cartas locais, como a projeção estereográfica, que preservam a propriedade refrativa. Portanto, quando lidamos com perturbações locais, sempre usamos este tipo de coordenadas locais.

Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Primeiramente, usando perturbações locais, Z_0 pode ser aproximado por um campo de vetores suaves por partes refrativo $Z_1 = (X_1, Y_1)$ de modo que X_1 e Y_1 tenha um número finito de pontos de equilíbrio hiperbólicos (nenhum deles em Σ). Além disso, podemos assumir que X_1 e Y_1 não tenham trajetórias fechadas tangentes à Σ . A refração garante que Z_1 tem apenas pontos de costura ou tangências duplas em Σ . Dessa forma, usando novas perturbações locais, se necessário, Z_1 pode ser aproximado por $Z_2 = (X_2, Y_2)$ que, além das propriedades de Z_1 só tenha dobras-dobras genéricas e em número finito como tangências duplas.

Recorde que o Teorema de Poincaré–Bendixson ([6]) garante que os conjuntos limite de Z_2 são pontos de equilíbrio de X_2 ou de Y_2 ; trajetórias fechadas de X_2 ou de Y_2 ; grafos de X_2 ou Y_2 ; poli-trajetórias de Z_2 ; grafos de Z_2 ; ou dobra-dobras invisível-invisível. Dessa forma, as únicas possibilidades de recorrência não trivial são as poli-trajetórias fechadas do tipo III não genéricas que serão tratadas a seguir. Como vimos acima, X_2 e Y_2 tem apenas um número finito de pontos de equilíbrio e Z_2 tem apenas um número finito de dobras-dobras. Então Z_2 tem no máximo um número finito de grafos de X_2 , Y_2 ou Z_2 . Com o mesmo argumento do Lema 4.21, Z_2 pode ser aproximado por um sistema Z_3 que não tenha grafos de X_3 , Y_3 ou Z_3 como conjunto limite. Além disso, Z_3 não tem mais pontos de equilíbrio que Z_2 e esse processo não cria novas conexões de separatrizes. Portanto, o sistema Z_3 tem um número finito de pontos de equilíbrio e dobras-dobras, que são elementares e seus conjuntos-limite são pontos de equilíbrio de X_3 ou de Y_3 , ou órbitas periódicas de X_3 ou Y_3 ou poli-trajetórias fechadas ou pontos de dobra-dobra invisível-invisível.

Caso Z_3 possua alguma conexão de separatrizes de sela e/ou dobras que, novamente, pela finitude desses pontos de equilíbrio aparecem em número finito, Z_3 pode ser aproximado por um sistema Z_4 que além de possuir as propriedades de Z_3 não admite conexões de separatrizes. Observe que, ao romper todas as conexões de separatrizes eliminamos as poli-trajetórias do tipo III (que, necessariamente, admitem esse tipo de conexão). Por isso, no que segue, lidaremos apenas com poli-trajetórias do tipo I.

Caso os conjuntos limite de Z_4 sejam trajetórias fechadas não-hiperbólicas ou poli-trajetórias fechadas do tipo I não-elementares, Z_4 será aproximado por um campo de vetores refrativo Z_5 que tenha apenas trajetórias fechadas hiperbólicas e poli-trajetórias fechadas elementares. Note que, esse processo pode criar novas trajetórias fechadas hiperbólicas e poli-trajetórias fechadas elementares e também podem surgir novas conexões de separatrizes (isso pode ocorrer quando uma (poli)-trajetória fechada é α e ω -limite de separatrizes de selas e dobras, por exemplo, como vimos no Lema 4.21). No último caso, repetimos o processo realizado para obter Z_4 a partir de Z_3 , e obtemos um novo sistema, Z_6 que, além de todas as propriedades de Z_5 , não tenha conexão de separatrizes. Observe que, esse passo não cria novas singularidades, tangências, trajetórias fechadas nem poli-trajetórias fechadas.

Observe que, a aplicação de primeiro retorno de Poincaré π , definido em Σ , associado a uma poli-trajetória fechada do tipo I de Z_6 é um difeomorfismo. Logo, assim como no caso contínuo, ou as trajetórias fechadas e poli-trajetórias fechadas do tipo I de Z_6 aparecem em um número finito ou existe um contínuo de trajetórias fechadas ou poli-trajetórias fechadas. Se Z_6 tem um contínuo de trajetórias fechadas ou poli-trajetórias fechadas do tipo I, ele pode ser aproximado por um sistema Z_7 tendo apenas um número finito de trajetórias fechadas isoladas e poli-trajetórias fechadas do tipo I. Esta etapa não cria nem novas conexões de separatrizes, nem novos pontos de equilíbrio, mas novas trajetórias fechadas não hiperbólicas ou poli-trajetórias fechadas não elementares podem surgir. Se Z_7 tem trajetórias fechadas não hiperbólicas ou novas poli-trajetórias fechadas não elementares, repetimos o processo para obter Z_5 a partir de Z_4 , obtendo um novo campo de vetores refrativo $Z_8 \in \Sigma_0^{S_\lambda}$, segundo a Definição 4.25, o que conclui a prova. $\square$

Com esses resultados podemos concluir a prova do Teorema 4.2.

Prova do Teorema 4.2. O item (2) é imediato da Proposição 4.30. A abertura é uma consequência imediata do item (2) e a densidade segue pela Proposição 4.31. $\square$

4.5 Espaço de campos de codimensão-1 em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$

Agora, consideramos o espaço de bifurcação de $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$,

$$\mathfrak{R}_1^{S_\lambda} = \mathfrak{R}^{S_\lambda} \setminus \Sigma_0^{S_\lambda}.$$

A seguir, caracterizamos o conjunto de bifurcação de codimensão-1, $\Sigma_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Como de costume, essa caracterização é baseada em certas questões envolvendo campos de vetores não estruturalmente estáveis com condições quase-genéricas. Isso significa que as condições impostas na definição de $\Sigma_0^{S_\lambda}$ são minimamente violadas, mas condições quase-genéricas são consideradas.

Definição 4.32. Considere:

- (a) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(a_1)$ se todos os pontos de equilíbrio de X e de Y são hiperbólicos exceto um deles, que é uma sela-nó ou um ponto de equilíbrio de Hopf. Nenhum deles está em Σ . Além disso, as condições (b), (c), (d), (e) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas.
- (b) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(a_2)$ se Z possui um único ponto de equilíbrio-dobra (ou dobra-equilíbrio) $p \in \Sigma$, satisfazendo as condições quase-genéricas dadas na Seção 4.3.2. Além disso, as condições (b), (c), (d), (e) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas.
- (c) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(b_1)$ se todas as órbitas periódicas de X e Y são hiperbólicas, exceto uma delas que é do tipo sela-nó. Nenhuma delas é tangente à Σ . Além disso, as condições (a), (c), (d), (e) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas. Quando necessário, vamos distinguir o subconjunto $\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(b_1) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(b_1)$ formado pelos campos de vetores refrativos $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(b_1)$ para os quais a trajetória fechada não é simultaneamente α e ω -limite de separatrizes de sela ou de órbitas tangentes à Σ .
- (d) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(b_2)$ se todas as órbitas fechadas são hiperbólicas e apenas uma delas é genericamente tangente à Σ . Além disso, as condições (a), (c), (d), (e) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas. Quando necessário, vamos distinguir o subconjunto $\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(b_2) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(b_2)$ formado por todos os campos de vetores refrativos $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(b_2)$ para os quais a trajetória fechada não é α nem ω -limite de separatrizes de sela ou de outras órbitas tangentes à Σ .
- (e) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(c_1)$ se todos as poli-trajetórias de Z são elementares exceto uma, γ , do tipo I tal que $\pi'(q) = 1$ e $\pi''(q) = d''(q) \neq 0$, para todo $q \in \Sigma \cap \gamma$. Além disso, as condições (a), (b), (d), (e) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas. Quando necessário, vamos distinguir o subconjunto $\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(c_1) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(c_1)$ formado pelos campos de vetores refrativos $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(c_1)$ para os quais a poli-trajetória do tipo I não é simultaneamente α e ω -limite de separatrizes de selas nem de órbitas tangentes à Σ .
- (f) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(c_2)$ se todas as poli-trajetórias de Z são elementares, exceto uma delas, que é quase-genérica do tipo III e passa por apenas uma dobra-dobra. Além disso, as condições (a), (b), (d), (e) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas. Quando necessário, vamos distinguir o subconjunto $\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(c_2) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(c_2)$ formado pelos campos de vetores refrativos $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(c_2)$ para os quais a poli-trajetória do tipo III não é α nem ω -limite de separatrizes de selas nem de outras órbitas tangentes à Σ .
- (g) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(d_1)$ se todos os pontos de tangência dupla são dobras-dobras genéricas exceto uma delas que é uma dobra-dobra quase-genérica. Além disso, as condições (a), (b), (c), (e) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas.

- (h) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(d_2)$ se todos os pontos de tangência dupla são dobras-dobras genéricas exceto uma delas que é uma cusp-cusp quase-genérica (ou simples). Além disso, as condições (a), (b), (c), (e) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas.
- (i) $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(e)$ se existe apenas uma conexão quase-generica de separatrizes que não dê origem a uma poli-trajetória (esses casos foram analisados anteriormente). Além disso, as condições (a), (b), (c), (d) e (f) da Definição 4.25 são satisfeitas. Vamos distinguir os diferentes tipos de conexões de separatrizes quase-genéricas. Dizemos que $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(ss) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(e)$ quando Z admite uma conexão entre duas selas distintas, $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(sl) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(e)$ quando Z admite um loop simples, $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(fs) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(e)$ quando Z admite uma conexão entre dobra e sela e $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(ff) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(e)$ quando Z admite uma conexão entre duas dobras. Quando necessário, vamos distinguir o subconjunto $\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(e) \subset \Sigma_1^{S_\lambda}(e)$ formado pelos campos refrativos $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}(e)$ para os quais o loop simples (quando exista) não é α nem ω -limite de separatrizes de selas nem de outras órbitas tangentes à Σ .

Definimos os seguintes subconjuntos de $\mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$,

$$\Sigma_1^{S_\lambda} = \Sigma_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(a_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(b_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(c_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e),$$

e,

$$\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda} = \Sigma_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(a_2) \cup \tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(b_2) \cup \tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(c_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_2) \cup \tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}(e).$$

No que segue, provamos o Teorema 4.3. Note que os Lemas 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 garantem que $\Sigma_1^{S_\lambda}$ é uma subvariedade de codimensão-1 de $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Os mesmos lemas fornecem as vizinhanças $\mathcal{B}(Z)$ da segunda afirmação do Teorema 4.3 em que podemos construir a Σ -equivalência usando, na maioria dos casos, o mesmos argumentos dos Lemas 4.27, 4.28 e 4.29. Assim, mostramos apenas a prova da afirmação (2) para dois casos especiais nos Lemas 4.33 e 4.34. Isso implica que $\Sigma_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ é um conjunto aberto. Concluímos a seção mostrando que $\Sigma_1^{S_\lambda}$ é denso com a Proposição 4.35, que conclui a prova do Teorema 4.3.

Lema 4.33. *Para todo $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(b_2)$, existe uma vizinhança $\mathcal{B}(Z_0)$ em $\Sigma_1^{S_\lambda}(b_2)$ tal que todo $Z \in \mathcal{B}$ é Σ -equivalente a Z_0 (na topologia intrínseca de $\mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$).*

Demonstração. Descrevemos a construção apenas no caso em que X_0 tenha uma trajetória fechada atratora, Γ_0 , tangente à Σ em $p = (0, 0)$ que também é um ponto de dobra invisível para Y_0 e fixamos a orientação da Figura 4.12(a).

No Lema 4.23 vimos que existem vizinhanças $\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ de Z_0 e $W_p = U_p \cap V_p$ de p tal que para todo $X \in \mathcal{U}$ existe uma única trajetória hiperbólica fechada Γ de X

passando por $p \in U$ do mesmo tipo que Γ_0 e um único ponto de dobra $q \in V_p$ de Y com $Y^2 f(q) = Y_0^2 f(p_0)$. A propriedade refrativa garante que $p = q$. Fazendo uma mudança de coordenadas, se necessário, podemos assumir que a aplicação de semi-retorno associado à dobra invisível de Y_0 é dado por $\pi_{Y_0}(x) = -x + \mathcal{O}_2(x)$, para $x \in (-\varepsilon_1, 0)$ com $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno.

Como Γ_0 é uma trajetória fechada atratora de X_0 , existe um anel V_Γ , em torno de Γ tal que toda trajetória de X_0 cruza $\partial V_\Gamma = C_1 \cup C_2$ entrando transversalmente em V_Γ . Diminuindo V_Γ , se necessário, podemos supor que a função distância (4.4) esteja definida em $V_\Gamma \cap \sigma^u$, onde σ^u é a seção transversal utilizada na construção de (4.4).

Agora, seja γ_Y a trajetória de Y_0 passando por $q_\varepsilon = (\varepsilon, 0) \in \Sigma \cap C_2$. Então γ_Y cruza Σ no ponto $q_{-\varepsilon} = (-\varepsilon, 0)$ para tempo negativo. Considere a trajetória de X_0 passando por $q_{-\varepsilon}$. Ela cruza V_Γ no ponto q para tempo negativo como na Figura 4.12(a). Portanto, consideramos $\mathcal{V}_\Gamma$ limitado por esses dois segmentos de trajetórias, pelo arco $\widehat{q, q_\varepsilon} \subset C_2$ e por C_1 .

Podemos definir, de forma análoga, a vizinhança $\mathcal{V}_\Gamma$, para todo $Z \in \mathcal{B}$. Em $\mathcal{V}_\Gamma$ considere a Σ -equivalência construída a partir da aplicação de primeiro retorno e da ferramenta de comprimento de arco. Fora de $\mathcal{V}_\Gamma$ estendemos a Σ -equivalência com as mesmas ferramentas utilizadas lemas dados na Seção 4.4 e o Teorema Clássico de Peixoto. $\square$

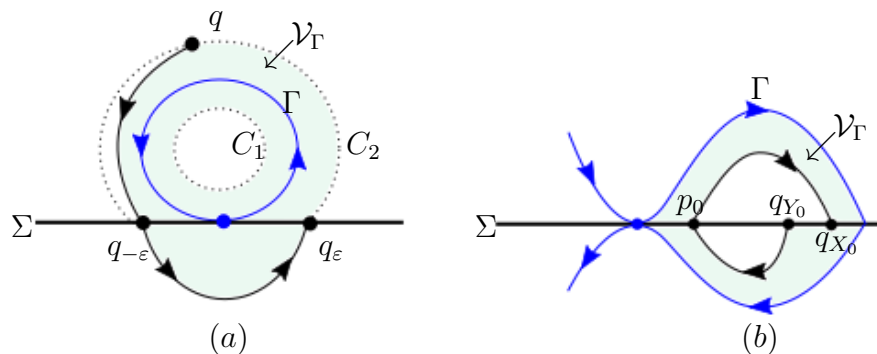


Figura 4.12: Vizinhança $\mathcal{V}_\Gamma$ do Lema 4.33 (Lema 4.34, respectivamente) em (a) ((b), respectivamente).

Lema 4.34. *Para todo $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Sigma_1^{S_\lambda}(c_2)$, existe uma vizinhança $\mathcal{B}(Z_0)$ em $\Sigma_1^{S_\lambda}(c_2)$ tal que todo $Z \in \mathcal{B}$ é Σ -equivalente a Z_0 (na topologia intrínseca de $\mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$).*

Demonstração. Seja Γ uma poli-trajetória genérica do tipo III de Z_0 . Na prova do Lema 4.22, vimos que existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \mathfrak{R}$ de Z_0 tal que para todo $Z \in \mathcal{B}$ podemos definir uma função distância (4.2) para todo $x \in [0, \delta]$. Sem perda de generalidade, assumimos que $f_{Z_0}(x) = Mx^2 + \mathcal{O}_3(x)$ com $M > 0$. Isso significa que Γ é atratora.

Seja $p_0 \in (0, \delta)$. A trajetória de X_0 (Y_0) passando por p_0 cruza Σ transversalmente para tempo positivo (negativo, respectivamente) no ponto q_{X_0} (q_{Y_0} , respectivamente.).

Considere $Z_\theta = (X_\theta, Y_\theta)$, obtido pela rotação de ângulo θ de Z_0 , como no Lema 3.7. A transversalidade implica que para $\theta \in [0, 2\pi)$, suficientemente pequeno, as trajetórias de X_θ (Y_θ) passando por p_0 também cruzam Σ transversalmente para tempo positivo (negativo, respectivamente) no ponto q_{X_θ} (q_{Y_θ} , respectivamente.).

Considere $\mathcal{V}_1$ a vizinhança delimitada pela poli-trajetória Γ e por C_1 onde C_1 é a união dos arcos de trajetória de X_θ e Y_θ passando por p_0 e pelo segmento $[q_{X_\theta}, q_{Y_\theta}] \subset \Sigma^c$ como na Figura 4.12(b).

Note que as trajetórias de Z_0 cruzam C_1 transversalmente e diminuindo $\mathcal{B}$, se necessário, isso também ocorre para todo $Z \in \mathcal{B}$. Além disso, as trajetórias de Z_0 sempre cruzam C_1 entrando $\mathcal{V}_1$, já que assumimos que Γ é uma trajetória atratora.

Dessa forma, construímos a Σ -equivalência em $\mathcal{V}_1$ usando a aplicação de primeiro retorno dada no Lema 4.22 e comprimento de arco. Fora de $\mathcal{V}_1$ estendemos a Σ -equivalência como nos lemas exibidos na Seção 4.4 e no Teorema Clássico de Peixoto. $\square$

A densidade de $\Sigma_1^{S_\lambda}$ segue da seguinte proposição.

Proposição 4.35. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) *Seja $\Sigma_1^0(a_1)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tais que X ou Y tenham pontos de equilíbrios não hiperbólicos em $\mathbb{S}_\lambda^2 \setminus \Sigma$. Então $\Sigma_1^{S_\lambda}(a_1)$ é denso em $\Sigma_1^0(a_1)$.*
- (b) *Seja $\Sigma_1^0(b_1)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tais que X ou Y tenha trajetórias fechadas não hiperbólicas em $\mathbb{S}_\lambda^2 \setminus \Sigma$. Então $\Sigma_1^0(b_1) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$, onde $\text{Ad}(B)$ denota o conjunto dos pontos aderentes de B .*
- (c) *Seja $\Sigma_1^0(a_2)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tais que Z tenha pontos de equilíbrio-dobra. Então $\Sigma_1^0(a_2) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(a_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_1))$.*
- (d) *Seja $\Sigma_1^0(b_2)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tais que X ou Y tenha trajetórias fechadas tangentes à Σ . Então $\Sigma_1^0(b_2) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(b_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.*
- (e) *Seja $\Sigma_1^0(e_1)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tendo conexões de separatrizes de selas. Então $\Sigma_1^0(e_1) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.*
- (f) *Seja $\Sigma_1^0(c_1)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tendo poli-trajetórias fechadas do tipo I não elementares. Então $\Sigma_1^0(c_1) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.*
- (g) *Seja $\Sigma_1^0(c_2)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tendo poli-trajetórias fechadas do tipo III não genéricas. Então $\Sigma_1^0(c_2) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(c_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.*
- (h) *Seja $\Sigma_1^0(d_1)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tendo pontos de dobra-dobra não genéricos. Então $\Sigma_1^{S_\lambda}(d_1)$ é denso em $\Sigma_1^0(d_1)$.*

- (i) Seja $\Sigma_1^0(d_2)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tendo pontos de tangência dupla de ordem superior (≥ 4). Então $\Sigma_1^0(d_2) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(c_2) \Sigma_1^{S_\lambda}(d_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_2))$.
- (j) Seja $\Sigma_1^0(e_2)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tendo conexões de tangências que não dão origem a poli-trajetórias fechadas do tipo III. Então $\Sigma_1^0(e_2) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(d_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.
- (k) Seja $\Sigma_1^0(e_3)$ o espaço dos campos de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ tendo conexões entre sela e dobra. Então $\Sigma_1^0(e_3) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.

Demonstração. Para o item (a), considere $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^0(a_1)$, $p_0 \in \Sigma^+$ um ponto de equilíbrio não hiperbólico de X e V_0 uma vizinhança de p_0 tal que $V_0 \subset \Sigma^+$ e p_0 seja o único ponto de equilíbrio de X em V_0 . Com uma perturbação local de Z em V_0 , obtemos Z_1 tendo um único ponto de equilíbrio quase genérico $p_1 \in V_0$. Lembre-se de que todos os elementos críticos não genéricos de $Z \in \Sigma_1^0(a_1)$ são pontos de equilíbrio não hiperbólicos em $\mathbb{S}_\lambda^2 \setminus \Sigma$. Assim, com outras perturbações locais obtemos Z_2 tal que todos os pontos de equilíbrio de Z_2 são hiperbólicos exceto p_1 , que é quase-genérico. Note que, como todos os pontos de equilíbrio de X e de Y estão em $\mathbb{S}_\lambda^2 \setminus \Sigma$ as perturbações locais não quebram a propriedade refrativa. Portanto, $Z_2 \in \Sigma_1^{S_\lambda}(a_1)$.

O item (b) é análogo ao anterior, apenas observando que, quando $Z = (X, Y)$ admitir uma trajetória fechada não hiperbólica que for simultaneamente α e ω -limite de separatrizes de selas ou dobras então Z poderá ser aproximado por campos de vetores que apresentam conexões, com argumento análogo ao utilizado no Lema 3.8. Assim, concluímos que $\Sigma_1^0(b_1) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.

No item (c) considere $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^0(a_2)$ e $p_0 \in \Sigma$ um ponto de equilíbrio de X e uma tangência de Y . Ao menos dois casos podem ser considerados. Primeiro, se $p_0 \in \Sigma$ é um equilíbrio-dobra quase-genérico de Z então Z pode ser aproximado por um campo Z_1 , de modo que o único ponto de equilíbrio-dobra de Z_1 seja p_0 . Logo, $Z_1 \in \Sigma_1^{S_\lambda}(a_2)$. Por outro lado, se $p_0 \in \Sigma$ não é um ponto de equilíbrio-dobra quase-genérico considere V_0 uma vizinhança de p_0 . Procedendo como em (a), Z pode ser aproximado por Z_1 de modo que Z_1 tenha um único ponto de equilíbrio semi-hiperbólico em $V_p \setminus \Sigma$ e uma única tangência dupla genérica em V_0 ou de modo que Z_1 tenha uma dobra-dobra invisível-invisível quase-genérica em V_0 . Caso Z_1 possua outros pontos de equilíbrio em Σ , utilizando outras perturbações locais Z_1 pode ser aproximado por Z_2 de modo que todos os elementos críticos de Z_2 em $\mathbb{S}_\lambda^2 \setminus V_0$ sejam genéricos. Logo $Z_2 \in \Sigma_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(a_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_1)$. Assim, concluímos que $\Sigma_1^0(a_2) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(a_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_1))$.

O item (d) é análogo ao (b) apenas observando que, quando $Z = (X, Y)$ admitir uma trajetória fechada não hiperbólica que for α ou ω -limite de separatrizes de selas ou dobras então Z poderá ser aproximado por campos de vetores que apresentam conexões,

com argumento análogo ao utilizado no Lema 3.8. Assim, concluímos que $\Sigma_1^0(b_2) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(b_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.

Para o item (g), considere $Z = (X, Y) \in \Sigma_1^0(c_2)$ e Γ uma poli-trajetória fechada do tipo III não genérica que passe por uma dobra-dobra visível-visível. Ao menos dois casos devem ser analisados. Quando o ponto de tangência dupla que dá origem a Γ é uma dobra-dobra visível-visível, pelo Lema 4.22 podemos definir uma aplicação de primeiro retorno em uma vizinhança $\mathcal{V}_\Gamma$ de Γ da forma $f_Z = Mx^2 + \mathcal{O}_3(x)$. Assim, se $M = 0$ com uma pequena e adequada perturbação de Z , podemos obter Z_1 com uma poli-trajetória quase-genérica do tipo III em uma vizinhança $\mathcal{B}(Z)$. Também podemos fazer uma perturbação de Z que rompa a conexão que dá origem à poli-trajetória Γ . Nesse caso, obtemos um campo vetorial Z_1 com uma poli-trajetória fechada do tipo I quase-genérica ou com uma conexão de separatriz em $\mathcal{B}(Z)$. Além disso, se o ponto de tangência dupla que dá origem a Γ é de ordem superior usamos o Lema 4.8 e que cada tangência de ordem superior pode ser aproximada por uma de ordem inferior, para aproximar este ponto de tangência dupla de ordem superior por uma cusp-cusp. Assim, concluímos que $\Sigma_1^0(c_2) \subset \text{Ad}(\Sigma_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(c_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(d_2) \cup \Sigma_1^{S_\lambda}(e))$.

As provas dos outros itens seguem de modo análogo e, por isso, serão omitidas. $\square$

Note que $\mathfrak{R}_1^{S_\lambda} = \Sigma_1^0(a_1) \cup \Sigma_1^0(a_2) \cup \Sigma_1^0(b_1) \cup \Sigma_1^0(b_2) \cup \Sigma_1^0(c_1) \cup \Sigma_1^0(c_2) \cup \Sigma_1^0(d_1) \cup \Sigma_1^0(d_2) \cup \Sigma_1^0(e_1) \cup \Sigma_1^0(e_2) \cup \Sigma_1^0(e_3)$ e portanto, da Proposição 4.35 qualquer $Z \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ pode ser aproximado por $\tilde{Z} \in \Sigma_1^{S_\lambda}$, o que prova a densidade de $\Sigma_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$. Enfatizamos que, como $Z \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ pode ter codimensão alta, é possível aproximar Z de diferentes maneiras. Como o objetivo é mostrar que dado $Z \in \mathfrak{R}_1^{S_\lambda}$ existe $\tilde{Z} \in \Sigma_1^{S_\lambda}$ suficientemente próximo de Z não é necessário mostrar todas as possibilidades de aproximação.

Teorema 4.36. *Existe uma subvariedade de codimensão-1, $\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (1) *Para todo $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}$ existe uma vizinhança $\mathcal{B}(Z_0) \in \tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}$, tal que todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ é Σ -equivalente a Z_0 na topologia induzida de $\mathfrak{R}_1$. Portanto, $\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}$ é aberto em $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$ nessa topologia.*
- (2) *$\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}$ é denso em $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$.*

A prova do Teorema 4.36 é análoga a do Teorema 4.3, apenas considerando a topologia induzida, ao invés da topologia intrínseca, já que nesse caso, estamos lidando com $\tilde{\Sigma}_1^{S_\lambda}$. Por ser análoga, a prova será omitida.

4.6 Estabilidade estrutural em $\mathfrak{R}$

O objetivo principal desta seção é estabelecer condições para a estabilidade estrutural local de campos de vetores no espaço $\mathfrak{R}$, que serão enunciadas a seguir. Ressaltamos que

a Definição 4.25 do conjunto $\Sigma_0 \subset \mathfrak{X}$, a demonstração do Lema 4.41 e do Teorema 4.1 foram inspiradas em resultados similares para campos de vetores reversíveis com esferas invariantes que podem ser vistos em [7].

Apesar do Teorema 4.1 ter caráter local em $\mathbb{R}^3$, utilizamos as análises globais dadas nas Seções 4.4 e 4.5 como ferramentas para atingi-lo. Veremos, inicialmente, como o uso de coordenadas esféricas nos permite, de forma natural, enxergar um campo de vetores $Z = (X, Y) \in \mathfrak{R}$ como uma família a um parâmetro de campos de vetores $Z_\lambda \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$.

Na esfera $\mathbb{S}_\lambda^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2\}$, as coordenadas esféricas são dadas por

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos \theta \sin \phi, \\ y &= \lambda \sin \theta \sin \phi, \\ z &= \lambda \cos \phi, \end{aligned}$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$ e $\lambda > 0$ fixo. Nessas coordenadas podemos escrever os campos de vetores

$$\begin{aligned} X(\theta, \phi) &= (\Theta_1(\theta, \phi), \Phi_1(\theta, \phi)), \\ Y(\theta, \phi) &= (\Theta_2(\theta, \phi), \Phi_2(\theta, \phi)), \end{aligned}$$

e a descontinuidade $\Sigma = \{(\theta, \phi); \phi = \pi/2\}$. Assim, o campo de vetores suaves por partes $Z : \mathbb{S}_\lambda^2 \rightarrow T\mathbb{S}_\lambda^2$ é dado da seguinte forma

$$Z(\theta, \phi) = \begin{cases} X(\theta, \phi), & 0 \leq \phi \leq \pi/2, \\ Y(\theta, \phi), & \pi/2 \leq \phi \leq \pi. \end{cases}$$

Dado $I = (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ um intervalo em $\mathbb{R}$ com ε suficientemente pequeno, podemos definir uma família a um parâmetro de campos de vetores suaves por partes em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$,

$$Z_\mu : I \times \mathbb{S}_\lambda^2 \rightarrow T\mathbb{S}_\lambda^2$$

escrevendo

$$Z_\mu(\mu, \theta, \phi) = (X_\mu(\mu, \theta, \phi), Y_\mu(\mu, \theta, \phi)). \quad (4.5)$$

com $X(\mu, \theta, \phi)$ e $Y(\mu, \theta, \phi)$ de classe C^r e tais que $Z_\mu \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$ para todo $\mu \in I$.

Também podemos considerar coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^3$. Para isso, basta variar o parâmetro ρ , associado ao raio da esfera, anteriormente fixado em $\rho = \lambda$, isto é, basta considerar

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \sin \phi, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \phi, \\ z &= \rho \cos \phi, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$ e $\rho \geq 0$.

Nessas coordenadas podemos escrever os campos de vetores

$$\begin{aligned} X(\rho, \theta, \phi) &= (R_1(\rho, \theta, \phi), \Theta_1(\rho, \theta, \phi), \Phi_1(\rho, \theta, \phi)), \\ Y(\rho, \theta, \phi) &= (R_2(\rho, \theta, \phi), \Theta_2(\rho, \theta, \phi), \Phi_2(\rho, \theta, \phi)), \end{aligned} \quad (4.7)$$

e a descontinuidade $\Sigma = \{(\rho, \theta, \phi); \phi = \pi/2\}$. Assim, o campo de vetores suaves por partes $Z : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com descontinuidade Σ é dado por

$$Z(\rho, \theta, \phi) = \begin{cases} X(\rho, \theta, \phi), & 0 \leq \phi \leq \pi/2, \\ Y(\rho, \theta, \phi), & \pi/2 \leq \phi \leq \pi. \end{cases} \quad (4.8)$$

É fácil ver que quando consideramos as coordenadas esféricas dadas em (4.6), se todas as esferas são invariantes pelo fluxo de Z , isto é, se $Z \in \mathfrak{R}$, então $R_i(\rho, \theta, \phi) \equiv 0$, $i = 1, 2$ em (4.8).

Fixada essa notação, observe que podemos estabelecer uma correspondência entre uma família a um parâmetro $Z_\mu \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$, de campos de vetores em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, com $\mu \in I$, e um único campo de vetores $Z : V_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{R}^3 \in \mathfrak{R}$, onde V_{λ_0} é uma vizinhança tubular de $\mathbb{S}_{\lambda_0}^2$ dada por

$$V_{\lambda_0} = \{(\mu, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3; \mu \in I, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Para isso, para cada $Z_\mu(\mu, \theta, \phi) = (X_\mu(\mu, \theta, \phi), Y_\mu(\mu, \theta, \phi))$, como definido em (4.5) nós consideramos $Z(\mu, \theta, \phi) = (X(\mu, \theta, \phi), Y(\mu, \theta, \phi))$, como definido em (4.8) onde X e Y são definidos como em (4.7) e $R_i(\mu, \phi, \theta) \equiv 0$, $i = 1, 2$.

Com isso, consideramos $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}$ e denotamos por Z_λ a restrição de Z a esfera de raio λ , isto é, $Z_\lambda = Z|_{\mathbb{S}_\lambda^2}$ e mais, utilizando o que descrevemos acima, dado um campo de vetores $Z \in \mathfrak{R}$ nós o consideramos como uma família a um parâmetro de campos de vetores $Z_\lambda \in \mathfrak{R}^{S_\lambda}$.

Observação 4.37. Considere h como nos lemas da Seção 4.3.2, que definem $\Sigma_1^{S_\lambda}$ como subvariedade de codimensão-1 de $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Como vimos todo campo $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda}$ pode ser visto como uma família a 1-parâmetro de campos de vetores transversais à $\Sigma_1^{S_\lambda}$, já que $dh_Z \neq 0$ para todo $Z \in \Sigma_1^{S_\lambda} = h^{-1}(0)$. Essa transversalidade implica em estabilidade estrutural local para campos em $\mathfrak{R}$ (isto é, para campos tridimensionais) visto como famílias a um parâmetro de campos de vetores em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Além disso, como $\Sigma_0^{S_\lambda} \cap \Sigma_1^{S_\lambda} = \emptyset$ segue que $Z \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ também pode ser visto como uma família a 1-parâmetro de campos de vetores transversais à $\Sigma_1^{S_\lambda}$.

A seguir recordamos as definições de Σ -equivalência e estabilidade estrutural e definimos o conjunto $\Sigma_0 \subset \mathfrak{R}$, seguindo a abordagem de [28] e já comentadas na Seção 2.2.

Definição 4.38. Dizemos que dois campos de vetores Z e $\tilde{Z}$, em $\mathfrak{R}$, definidos em abertos U e $\tilde{U}$ do $\mathbb{R}^3$ e com descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente, são Σ -equivalentes se existe

um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$, com $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$, que leva trajetórias de Z em trajetórias de $\tilde{Z}$ preservando orientação do tempo.

Definição 4.39. Dizemos que $Z \in \mathfrak{R}$ é localmente estruturalmente estável se para todo $p \in \mathbb{R}^3$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de Z em $\mathfrak{R}$ e uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^3$ de p tal que todo campo de vetores $\tilde{Z} \in \mathcal{V}$ é Σ -equivalente a Z em U .

Definição 4.40. Dizemos que $Z = (X, Y) \in \Sigma_0 \subset \mathfrak{R}$ se, e somente se, para cada λ_0 , existe uma vizinhança V_{λ_0} de λ_0 satisfazendo uma das seguintes condições:

- (a) $Z_\lambda \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ para todo $\lambda \in V_{\lambda_0}$.
- (b) $Z_{\lambda_0} \in \Sigma_1^{S_{\lambda_0}}$ e $Z_\lambda \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ para todo $\lambda \in V_{\lambda_0} \setminus \{\lambda_0\}$.
- (c) $Z_{\lambda_0} \in \Sigma_1^{S_{\lambda_0}}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda_0}}(b_2)$, existe uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_{\lambda_0}$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ com $\lambda_n \neq \lambda_0$ e $Z_{\lambda_n} \in \Sigma_1^{S_{\lambda_n}}(ss) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda_n}}(fs) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda_n}}(ff)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $Z_\lambda \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ para todo $\lambda \in V_{\lambda_0} \setminus \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$.
- (d) $Z_{\lambda_0} \in \Sigma_1^{S_{\lambda_0}}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda_0}}(c_2)$, existe uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_{\lambda_0}$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ com $\lambda_n \neq \lambda_0$ e $Z_{\lambda_n} \in \Sigma_1^{S_{\lambda_n}}(ss) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda_n}}(fs) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda_n}}(ff)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $Z_\lambda \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ para todo $\lambda \in V_{\lambda_0} \setminus \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$.
- (e) $Z_{\lambda_0} \in \Sigma_1^{S_{\lambda_0}}(sl)$, existe uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V_{\lambda_0}$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ com $\lambda_n \neq \lambda_0$ e $Z_{\lambda_n} \in \Sigma_1^{S_{\lambda_n}}(ss) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda_n}}(fs)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $Z_\lambda \in \Sigma_0^{S_\lambda}$ para todo $\lambda \in V_{\lambda_0} \setminus \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$.

O próximo lema foi demonstrado em [7] e será utilizado na demonstração do Teorema 4.1.

Lema 4.41. Se dois campos de vetores $Z = (X, Y), \tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \mathfrak{R}$ são Σ -equivalentes, então para cada λ existe $\mu = \mu(\lambda)$ tal que os campos $Z_\lambda : \mathbb{S}_\lambda^2 \rightarrow TS_\lambda^2$ e $\tilde{Z}_{\mu(\lambda)} : \mathbb{S}_{\mu(\lambda)}^2 \rightarrow T\mathbb{S}_{\mu(\lambda)}^2$ também são Σ -equivalentes em $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. A correspondência $\lambda \rightarrow \mu(\lambda)$ é uma função contínua.

Demonstração. Seja h a Σ -equivalência que leva trajetória de $Z \in \mathfrak{R}$ em trajetória de $\tilde{Z} \in \mathfrak{R}$. Pela definição de $\mathfrak{R}$, toda esfera $\mathbb{S}_\lambda^2$ é invariante pelo fluxo de Z e de $\tilde{Z}$. Assim, para cada $\lambda > 0$ a restrição $h_\lambda = h|_{\mathbb{S}_\lambda^2} : \mathbb{S}_\lambda^2 \rightarrow \mathbb{S}_{\mu(\lambda)}^2$ é uma Σ -equivalência entre Z_λ e $\tilde{Z}_{\mu(\lambda)}$. $\square$

Com esses resultados podemos provar o Teorema 4.1. A prova desse Teorema é inspirada na prova do Teorema C, de [7].

Demonstração do Teorema 4.1. Seja $Z \in \mathfrak{R} \setminus \Sigma_0$. Observe que, negando a afirmação (a) da Definição 4.40, se existir um único $\lambda_1 \in V_{\lambda_0}$ de modo que $Z_{\lambda_0} \notin \Sigma_0^{S_{\lambda_0}}$ mas $Z_{\lambda_0} \in \Sigma_1^{S_{\lambda_0}}$, então diminuindo V_{λ_0} , se necessário, recaímos sobre o caso (b) da Definição 4.40. Por isso, temos apenas dois casos a considerar.

- (1) Existe λ_0 tal que $Z_{\lambda_0} \notin \Sigma_0^{S_{\lambda_0}} \cup \Sigma_1^{S_{\lambda_0}}$.
- (2) Existe $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, $Z_{\lambda_n} \in \Sigma_1^{S_{\lambda}}(ss) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}(sf) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}(ff)$ para todo n e $Z_{\lambda_0} \notin \Sigma_1^{S_{\lambda}}(b_1) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}(b_2) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}(c_1) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}(c_2) \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}(sl)$.

O caso (2) implica que $Z_{\lambda_0} \notin \Sigma_0^{S_{\lambda}} \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}$ e, portanto, só precisamos analisar o caso (1). Logo, no que segue, vamos supor que $Z_{\lambda_0} \notin \Sigma_0^{S_{\lambda}} \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}$.

Seja $\mathcal{U} \subset \mathfrak{R}$ uma vizinhança de Z . Podemos assumir que $\mathcal{U} = \mathcal{V} \times \mathcal{B}$ com $\mathcal{B}$ uma vizinhança de Z_{λ_0} em $\mathfrak{R}^{S_{\lambda}}$ e $\mathcal{V}$ uma vizinhança de λ_0 . Como $Z_{\lambda_0} \notin \Sigma_0^{S_{\lambda}} \cup \Sigma_1^{S_{\lambda}}$ e $\Sigma_0^{S_{\lambda}}$ é denso em $\mathfrak{R}^{S_{\lambda}}$, pela Proposição 4.35, existe $\tilde{Z}_{\lambda_0} \in \mathcal{B} \cap \Sigma_0^{S_{\lambda}}$.

Observe que o campo de vetores $\tilde{Z}_{\lambda_0}$ pode ser estendido ao campo de vetores $\tilde{Z} \in \mathcal{U} \subset \mathfrak{R}$. Como $\tilde{Z}_{\lambda_0}$ é estruturalmente estável em $\mathfrak{R}^{S_{\lambda_0}}$, existe $\varepsilon_0 \geq 0$ e uma vizinhança tubular $V_{\lambda_0} = \{(\lambda, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3; \lambda_0 - \varepsilon_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$ de $\mathbb{S}_{\lambda_0}^2$ tal que $\tilde{Z}_{\lambda}$ é Σ -equivalente a $\tilde{Z}_{\lambda_0}$, para todo $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$. Pelo Lema 4.41, $\tilde{Z}$ não é Σ -equivalente a Z em $\mathfrak{R}$, já que Z_{λ_0} não é Σ -equivalente a $\tilde{Z}_{\lambda_0}$ em $\mathfrak{R}^{S_{\lambda_0}}$. Portanto, $Z \notin \mathfrak{R} \setminus \Sigma_0$ implica que Z não é estruturalmente estável em $\mathfrak{R}$. $\square$

Observação 4.42. A outra implicação do Teorema 4.1 requer mais estudos, pois envolve a construção de uma Σ -equivalência global entre famílias de campos vetoriais $Z \in \Sigma_0$. Outra questão interessante, para um trabalho futuro, é estudar a densidade de $\Sigma_0 \subset \mathfrak{R}$.

Exemplo 4.43. Considere o campo de vetores suave por partes $Z = (X, Y)$ com $X(x, y, z) = (-y - xy - xz, x + x^2 - yz, x^2 + y^2)$ e $Y(x, y, z) = (-y - xz - y^2 + yz, x + xy - xz - yz, x^2 + y^2)$ e descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$. Note que $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ é uma integral primeira para ambos X e Y e que Z é refrativo, já que $Xf = Yf = x^2 + y^2$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Portanto, $Z \in \mathfrak{R}$ e toda esfera centrada na origem é invariante pelo fluxo de Z . Além disso, os únicos pontos de equilíbrio admissíveis de X (de Y , respectivamente) na esfera de raio λ é $p_X = (0, 0, \lambda)$ ($p_Y = (0, 0, -\lambda)$, respectivamente) que é um ponto de equilíbrio hiperbólico atrator (repulsor, respectivamente), para $\lambda > 0$. Nesse caso, $\Sigma = \Sigma^c$ e o fato de que X e Y são transversais a toda circunferência paralela a Σ junto com as informações dos seus pontos de equilíbrio garantem que, em cada esfera $\mathbb{S}_{\lambda}^2$, o ω -limite (α -limite, respectivamente) de toda trajetória regular é o ponto p_X (p_Y , respectivamente). Dessa forma o campo de vetores $Z = (X, Y)$ restrito a cada esfera $\mathbb{S}_{\lambda}^2$, com $\lambda > 0$, pertence ao conjunto $\Sigma_0^{S_{\lambda}} \subset \mathfrak{R}^{S_{\lambda}}$ e então Z pertence ao conjunto $\Sigma_0 \subset \mathfrak{R}$.

5 Campos de vetores suaves por partes parcialmente integráveis

5.1 Introdução

Como nos capítulos anteriores, denotamos por $\mathfrak{X}$ o conjunto dos campos de vetores suaves por partes definidos em $\mathbb{R}^3$, com região de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\} = f^{-1}(0)$, com $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$, e que admitem $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ como integral primeira. Isso implica que todas as esferas bidimensionais centradas na origem são invariantes pelo fluxo dos campos de vetores em $\mathfrak{X}$. Denotamos por $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ a restrição desses campos à esfera bidimensional de raio $\lambda > 0$ finito. Além disso, denotamos por $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}^{S_\lambda}$, respectivamente) o conjunto dos $Z \in \mathfrak{X}$ ($Z \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, respectivamente) que sejam refrativos. Para evitar o uso excessivo de super índices, consideraremos campos $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ em todo o capítulo. Como na Seção 2.2, denotamos por $\Sigma^+ = f^{-1}([0, +\infty))$ e $\Sigma^- = f^{-1}((-\infty, 0])$.

A abordagem deste capítulo é semelhante a usada no Capítulo 4. Recorde que os aspectos locais de estabilidade estrutural e bifurcações de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$, foram analisados nas Seções 2.2 e 3.2. Vamos estudar os aspectos globais de estabilidade estrutural e bifurcações de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Na Seção 5.2 recordamos a caracterização do conjunto $\Xi_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, de campos estruturalmente estáveis, que pode ser vista em [44], no seguinte resultado.

Teorema 5.1. *Existe um subconjunto $\Xi_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ tal que:*

- (1) $\Xi_0^{S_\lambda}$ tem uma descrição simples;
- (2) $Z = (X, Y) \in \Xi_0^{S_\lambda}$ é estruturalmente estável;
- (3) $\Xi_0^{S_\lambda}$ é aberto.

E na Seção 5.3 caracterizamos o conjunto $\Xi_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, de bifurcação de codimensão-1, no seguinte resultado.

Teorema 5.2. *Existe uma subvariedade de codimensão-1, $\Xi_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, tal que:*

- (1) $\Xi_1^{S_\lambda}$ tem uma descrição simples;
- (2) Para todo $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi_1^{S_\lambda}$ existe uma vizinhança $\mathcal{B}(Z_0) \subset \Xi_1^{S_\lambda}$, munido da topologia intrínseca, tal que todo $Z = (X, Y) \in \mathcal{B}$ é Σ -equivalente a Z_0 . Portanto, $\Xi_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ é aberto nessa topologia.

Observação 5.3. Novamente, usamos a topologia intrínseca no item (2) do Teorema 5.2 porque ela é mais fina (tem mais conjuntos abertos) do que a topologia ambiente.

O Teorema 5.1 é inspirado no Teorema de Peixoto, que pode ser visto em [43], e o Teorema 5.2 é inspirado nos resultados sobre bifurcações genéricas de campos vetoriais suaves definidos em variedades bidimensionais, que podem ser encontrados em [47, 51]. Note que os resultados deste capítulo são semelhantes aos exibidos no Capítulo 4 considerando, agora, as classes $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ ao invés de $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$. Por conta disso, algumas das demonstrações do capítulo serão omitidas, já que, serão análogas às exibidas anteriormente, no Capítulo 4.

5.2 Espaço de campos estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$

O objetivo desta seção é caracterizar os campos de vetores suaves por partes definidos na esfera $\mathbb{S}_\lambda^2$ com o equador $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}_\lambda^2; z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}_\lambda^2; x^2 + y^2 = \lambda^2\}$ como região de descontinuidade. Dessa forma, $\Sigma = f^{-1}(0)$ onde $f(x, y, z) = z$. No Capítulo 2 introduzimos as definições utilizadas no trabalho por meio de cartas locais e provamos que elas independem da carta escolhida. Então, assim como nos capítulos anteriores, quando se tratar de uma análise local, trabalharemos com coordenadas locais $\{x_1, x_2\}$. Além disso, como nas seções anteriores, por simplicidade, denotamos $\mathbb{S}_\lambda^2 = \mathbb{S}^2$, para $\lambda \neq 0$ fixo e arbitrário.

Os conceitos de Σ -equivalência, estabilidade estrutural e estabilidade estrutural local dados nas Definições 2.14, 2.16, 2.17, da Seção 2.2 podem ser facilmente adaptados aos espaços $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Vale ressaltar, novamente, que todo campo $Z \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ estruturalmente estável é também localmente estruturalmente estável, mas a recíproca não é verdadeira. Além disso, a classificação das Σ -singularidades localmente estruturalmente estáveis foi exibida em [28], como vimos no Capítulo 2.

Observação 5.4. A seguir, definiremos o conjunto dos campos de vetores suaves por partes definidos em $\mathbb{S}^2$, $\Xi_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$, que são estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Com uma abordagem semelhante, em [4], foi exibido um conjunto de campos de vetores suaves por partes estruturalmente estáveis, definidos em uma variedade m -dimensional M , orientável, compacta e sem bordo, cuja região de descontinuidade $K \subset M$ é um 1-complexo

finito, de modo que os ângulos formados entre as arestas de K , nos vértices de K , sejam sempre não nulos. Em [4] as componentes conexas de $M \setminus K$ são chamadas de G_i , $i = 1, \dots, n$ e em cada $\overline{G_i}$ define-se um campo vetorial suave Z_i e denota-se o campo suave por partes Z , definido em M por $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$. Seguindo as convenções de Filippov, define-se as regiões de costura, deslize e escape em K . A diferença entre as abordagens se dá pois em [4] o segmento de deslize é considerado como uma órbita singular do campo suave por partes Z . O princípio é utilizar de concatenações o menor número de vezes possível, na formação de uma órbita de Z . Dessa forma, M é decomposta em uma união disjunta de trajetórias de Z . Note que, com essa abordagem, não se considera trajetórias do tipo III, poli-ciclos nem pseudo-poli-trajetórias. Apesar de obter resultados semelhantes aos que exibiremos nesta seção, os detalhes das construções das Σ -equivalências não são exibidos em [4]. Ressaltamos ainda que, apesar da diferença entre as definições de trajetórias, a ideia da construção das Σ -equivalências deve ser a mesma. Além disso, em [4] é necessário entender o comportamento de Z numa vizinhança dos vértices de K . No nosso caso, como Σ é o equador de $\mathbb{S}^2$, não nos deparamos com essa questão. Em [44] a estabilidade estrutural de campos suaves por partes definidos em variedades bidimensionais compactas e sem bordo também foi estudada, exibindo a construção das Σ -equivalências para esses casos. Como observado em [44] e na Seção 3.3, a discussão sobre órbitas e pseudo-órbitas não trivialmente recorrentes ainda não é suficiente para obtermos a recíproca do item (2) do Teorema 5.1 nem para provarmos a densidade de $\Xi_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Por isso, os resultados são mais fracos que os apresentados no Capítulo 4. Tendo apontado as semelhanças e divergências entre o que será mostrado nesta seção e o que foi feito nos trabalhos [4, 44] seguimos com a definição de $\Xi_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$.

A fim de evitar a existência de pseudo-poli-trajetórias que contenham segmentos de escape e deslize, restringimos a existência de poli-trajetórias fechadas do tipo III no conjunto $\Xi_0^{S_\lambda}$ definido a seguir. Recorde que, dizemos que p é trivialmente recorrente quando p é ponto de equilíbrio de X , de Y ou de F_Z , quando p é uma dobra-dobra invisível-invisível, quando $\gamma_Z(p)$ é uma trajetória fechada ou uma poli-trajetória fechada do tipo I, ou ainda quando $\gamma_Z(p)$ é uma poli-trajetória fechada elementar do tipo II ou III, para uma concatenação fixada. Além disso, dizemos que uma pseudo-órbita passando por p é trivialmente recorrente quando p é ponto de equilíbrio de X , de Y ou de F_Z , quando p é uma dobra-dobra invisível-invisível, quando $\gamma_Z(p)$ é uma trajetória fechada ou uma pseudo-poli-trajetória fechada que conecta segmentos de deslize e escape mas não contém segmentos do campo deslizante (como na Figura 3.12(a)), para uma concatenação fixada.

Definição 5.5. Dizemos que $Z = (X, Y) \in \Xi_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ se, e somente se, Z satisfaz as seguintes condições:

- (a) Todos os pontos equilíbrios de X e de Y são hiperbólicos e não estão em Σ ;
- (b) Todas as órbitas periódicas de X e de Y são hiperbólicas e não tangenciam Σ ;

- (c) Todas as Σ -singularidades são elementares;
- (d) Todas as poli-trajetórias fechadas de Z são elementares do tipo I ou II. E todas as pseudo-poli-trajetórias fechadas de Z são elementares e não contêm segmentos deslizantes;
- (e) Z não possui conexão nem pseudo-conexão de separatrizes.
- (f) Z não possui órbita nem pseudo-órbita não trivialmente recorrente.

Observe que, as imposições de (a) a (e) da Definição 5.5 implicam, pela Proposição 3.25, na não existência de órbitas não trivialmente recorrentes. Novamente, ressaltamos que tal implicação não é válida para pseudo-órbitas. Ademais, como vimos no Capítulo 3, a falta de um entendimento completo sobre pseudo-poli-trajetórias não nos permite concluir a recíproca dos itens (2) dos Teoremas 5.1 e 5.2, já que, para isso, precisaríamos de um entendimento completo da estabilidade estrutural global na presença de pseudo-poli-trajetórias fechadas ou pseudo-trajetórias recorrentes que contenham segmentos de deslize e/ou escape já que tais objetos podem existir mesmo quando as trajetórias (que seguem orientação natural do fluxo) só apresentem comportamento genérico e que uma Σ -equivalência deve preservá-los mas ainda são desconhecidas todas as suas condições genéricas.

Como no Capítulo 4, denotamos por $\Sigma^r(\mathbb{S}^2)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r e estruturalmente estáveis definidos em $\mathbb{S}^2$ e por $\Sigma^r(\Sigma^\pm)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r e estruturalmente estáveis definidos em $\Sigma^\pm$. Pelos itens (a), (b), (e) e (f) da Definição 5.5, segue que se $Z \in \Xi_0^{S_\lambda}$, então $X|_{\Sigma^+} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$ e $Y|_{\Sigma^-} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$.

Como citado na Observação 5.4, o Teorema 5.1 é inspirado em [4, 43]. O resultado e sua demonstração também podem ser vistos em [44]. Visando seguir a mesma abordagem estabelecida no Capítulo 4, no decorrer desta seção mostraremos o item (2) do Teorema 5.1 com o auxílio de alguns lemas. Note que a condição de abertura do conjunto $\Xi_0^{S_\lambda}$ é imediata do item (2). Observe que os itens (a) e (b) da Definição 5.5 garantem que se $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi_0^{S_\lambda}$, então Z_0 é localmente estruturalmente estável em todo $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \Sigma$. Além disso, o Lema 4.27 é válido para campos $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ satisfazendo $X_0|_{\Sigma^+} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$, $Y_0|_{\Sigma^-} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$ e $X_0 f(p) Y_0 f(p) > 0$.

A prova dos próximos lemas serão omitidas pois são análogas às dos Lemas 4.27, 4.28 e 4.29, respectivamente, apenas considerando $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ equivalência topológica entre os campos de Filippov F_{Z_0} e F_Z para Z em uma vizinhança $\mathcal{B}$ de Z_0 , quando Z_0 admitir segmentos de escape e deslize e vizinhanças das dobras (ao invés de dobras-dobras). Além disso, a prova para o caso de poli-trajetórias fechadas do tipo I e de pseudo-poli-trajetórias elementares que conectem segmentos de deslize e escape mas não contenham segmentos do campo deslizante e tenham primeiro retorno hiperbólico é análoga à do Lema 4.29, visto que, nesses casos, construímos C_γ como no Lema 3.7.

Lema 5.6. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ tal que $X_{0|_{\Sigma^+}} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$, $Y_{0|_{\Sigma^-}} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$. Suponhamos também que Z_0 não admita conexão nem pseudo-conexão de separatrizes, órbitas nem pseudo-órbitas não trivialmente recorrentes, que $X_0 f(p) Y_0 f(p) < 0$ para todo $p \in \Sigma$ e que F_{Z_0} seja estruturalmente estável em Σ . Então Z_0 é estruturalmente estável.*

Lema 5.7. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ tal que $X_{0|_{\Sigma^+}} \in \Sigma^r(\Sigma^+)$, $Y_{0|_{\Sigma^-}} \in \Sigma^r(\Sigma^-)$. Suponhamos também que os pontos de dobra sejam quadráticos, que o campo de Filippov $F_{Z_0}(p)$ seja localmente estruturalmente estável em Σ sempre que $X_0 f(p) Y_0 f(p) < 0$, que Z_0 não admita conexão nem pseudo-conexão de separatrizes, órbitas nem pseudo-órbitas não trivialmente recorrentes e que Z_0 não admita poli-trajetórias fechadas. Nessas condições Z_0 é estruturalmente estável.*

Lema 5.8. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ tal que $X_{0|_{\Sigma^+}} \in \Sigma^r$, $Y_{0|_{\Sigma^-}} \in \Sigma^r$. Suponhamos também que o campo de Filippov $F_{Z_0}(p)$ seja localmente estruturalmente estável em Σ sempre que $X_0 f(p) Y_0 f(p) < 0$, que os pontos de dobra sejam quadráticos, que Z_0 não admita conexão nem pseudo-conexão de separatrizes, órbitas nem pseudo-órbitas não trivialmente recorrentes e que Z_0 admita poli-trajetórias fechadas elementares do tipo I ou pseudo-poli-trajetórias fechadas elementares conectando segmentos de deslize e escape que não contenham segmentos do campo deslizante. Nessas condições Z_0 é estruturalmente estável.*

Proposição 5.9. *$Z \in \Xi_0^{S_\lambda}$ é estruturalmente estável.*

Demonstração. Se $Z = (X, Y) \in \Xi_0^{S_\lambda}$, então $X_{|_{\Sigma^+}}, Y_{|_{\Sigma^-}} \in \Sigma^r(\Sigma^\pm)$ e todas as Σ -singularidades são elementares, isto é, Σ -dobras de Z ou pontos de equilíbrio hiperbólicos de F_Z . Por ser unidimensional e só ter pontos de equilíbrio hiperbólicos F_Z será localmente estruturalmente estável nas regiões de Σ onde estiver definido. Além disso, a mudança entre as regiões de costura, deslize e escape serão em pontos de dobras regulares.

Logo, se $Z \in \Xi_0^{S_\lambda}$ não possui poli-trajetórias fechadas segue, pelo Lema 5.7, que Z é estruturalmente estável. Se $Z \in \Xi_0^{S_\lambda}$ e $\gamma = \Sigma$ é uma poli-trajetória elementar do tipo II de Z , então $X f(p) Y f(p) \neq 0$ para todo $p \in \gamma$, logo $\Sigma = \Sigma^d$ ou $\Sigma = \Sigma^e$, já que $X f(p) Y f(p)$ não troca de sinal. Como $\Sigma = \gamma$ é uma trajetória fechada de Z , então F_Z não possui singularidades e, portanto, é localmente estruturalmente estável para todo $p \in \Sigma$. Assim, pelo Lema 5.6, segue que Z é estruturalmente estável. Por fim, se $Z \in \Xi_0^{S_\lambda}$ e possui poli-trajetórias fechadas elementares do tipo I ou pseudo-poli-trajetórias elementares que não contenham segmentos de deslize ou escape, então, pelo Lema 5.8, segue que Z é estruturalmente estável. $\square$

Como dito anteriormente, a falta de um completo entendimento sobre as pseudo-órbitas não trivialmente recorrentes de $Z = (X, Y) \in \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ não nos permite concluir a volta da Proposição 5.9 nem afirmar que $\Xi_0^{S_\lambda}$ é denso em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Porém, assim como essa restrição não impede uma caracterização de $\Xi_0^{S_\lambda}$, ela também não nos impede de caracterizar $\Xi_1^{S_\lambda}$, como veremos na próxima seção.

5.3 Espaço de campos de codimensão-1 em $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$

Nesta seção, consideramos o conjunto de bifurcação de $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$,

$$\mathfrak{X}_1^{S_\lambda} = \mathfrak{X}^{S_\lambda} \setminus \Xi_0^{S_\lambda}.$$

A seguir, caracterizamos o conjunto das bifurcações de codimensão-1, $\Xi_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$. Como na Seção 4.5 e nos trabalhos [47, 51], esta caracterização é baseada na violação mínima das condições impostas na Definição 5.5 e na suposição de condições quase-genéricas.

Como usual, consideramos $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$ munido com a topologia produto e podemos considerar, de forma natural, $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ munido da topologia induzida. Vimos no Capítulo 3 que há casos em que elementos de codimensão-1 se acumulam em elementos de codimensão-1. É o que ocorre, por exemplo, com trajetórias fechadas semi-hiperbólicas que sejam, ao mesmo tempo, α e ω -limite de separatrizes de selas. Esse fenômeno já foi observado em [47, 51] e no Lema 3.8. Por isso, dado $Z \in \mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$ e $\mathcal{B}$ uma vizinhança de Z na topologia induzida, seja $C(Z, \mathcal{B})$ a componente conexa de $\mathcal{B}$ que contém Z . Recorde que chamamos de topologia intrínseca a topologia na qual os conjuntos $C(Z, \mathcal{B})$ sejam os abertos fundamentais e consideramos $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$ munido com a topologia intrínseca. A ressalva quanto a topologia utilizada em $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$ é bastante importante pois, por ser mais fina, a topologia intrínseca é capaz de separar as vizinhanças onde pode ocorrer acumulação de elementos de codimensão-1, o que não ocorre com a topologia induzida. Levando isso em consideração, e recordando que a análise local de codimensão-1 foi feita no Capítulo 3, definimos os seguintes subconjuntos de $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$.

Definição 5.10. Dizemos que:

- (a) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(a_1)$ se todos os equilíbrios de $Z = (X, Y)$ são hiperbólicos exceto um ponto p_1 que é ou uma sela-nó ou um equilíbrio de Hopf. Nenhum equilíbrio está em Σ . Além disso, as condições (b), (c), (d), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (b) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(a_2)$ se todos os equilíbrios de Z são hiperbólicos e não estão sobre Σ com exceção de um deles, digamos $p_1 \in \Sigma$, que é quase genérico, seguindo a Definição 3.5. As condições (b), (c), (d), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (c) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(b_1)$ se todas as órbitas fechadas são hiperbólicas exceto uma que é do tipo sela-nó. Nenhuma delas tangencia Σ . Além disso, as condições (a), (c), (d), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (d) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(b_2)$ se todas as órbitas fechadas são hiperbólicas e não tangenciam Σ exceto uma delas que é genericamente tangente (tangência quadrática) à Σ . Além disso, as condições (a), (c), (d), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.

- (e) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(c_1)$ se todas as Σ -singularidades são elementares exceto uma que é uma sela-nó. Além disso, as condições (a), (b), (d), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (f) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(c_2)$ se todas as tangências de Z são elementares exceto uma delas, digamos $p \in \Sigma$ que é uma cúspide de X (Y) enquanto Y (X , respectivamente) é transversal à Σ em uma vizinhança de p . Além disso, as condições (a), (b), (d), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (g) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(c_3)$ se todas as tangências de Z são elementares exceto uma que é dobra-dobra quase-genérica, seguindo a Definição 3.2. Além disso, as condições (a), (b), (d), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (h) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(d_1)$ se todas as poli-trajetórias de Z são elementares exceto uma, digamos γ , do tipo I, tal que $\pi'(q) = 1$ e $\pi''(q) = d''(q) \neq 0$, para $q \in \Sigma \cap \gamma$. Além disso, as condições (a), (b), (c), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (i) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(d_2)$ se todas as poli-trajetórias de Z são elementares exceto um único poli-ciclo não localmente estruturalmente estável que não possui segmentos de deslize nem de escape e cuja trajetória retorne a Σ por uma dobra visível $p \in \Sigma$ e com primeiro retorno hiperbólico definido à direita ou à esquerda do ponto de dobra. Além disso, as condições (a), (b), (c), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (j) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(e)$ se existe uma única conexão de separatrizes, que é quase-genérica (incluindo conexões com equilíbrios do campo de Filippov F_Z). Além disso, as condições (a), (b), (c), (d) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas. Quando for necessário diferenciar os tipos de conexões quasi-geréricas, diremos que $Z \in \Xi_1^{S_\lambda}(ss) \subset \Xi_1^{S_\lambda}(e)$ quando admite conexão de selas distintas, $Z \in \Xi_1^{S_\lambda}(l) \subset \Xi_1^{S_\lambda}(e)$ quando admite um loop simples, $Z \in \Xi_1^{S_\lambda}(sd) \subset \Xi_1^{S_\lambda}(e)$ quando Z admite uma conexão de sela com dobra e $Z \in \Xi_1^{S_\lambda}(dd) \subset \Xi_1^{S_\lambda}(e)$ quando Z admite uma conexão de dobras.
- (k) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(pc_1)$ se existe uma única pseudo-conexão de separatrizes que não gera uma pseudo-poli-trajetória fechada. Além disso, as condições (a), (b), (c), (d) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (l) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(pc_2)$ se existe uma única pseudo-poli-trajetória γ fechada que conecta segmentos de deslize e de escape mas não contenha segmentos do campo deslizante e tal que $\pi'(q) = 1$ e $\pi''(q) = d''(q) \neq 0$, para $q \in \Sigma \cap \gamma$. Além disso, as condições (a), (b), (c), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.
- (m) $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}(pc_3)$ se existe uma única pseudo-poli-trajetória γ fechada que contenha um ponto de dobra visível mas não contenha segmentos do campo deslizante

e com primeiro retorno hiperbólico definido à direita ou à esquerda do ponto de dobra. Além disso, as condições (a), (b), (c), (e) e (f) da Definição 5.5 são satisfeitas.

Finalmente, definimos:

$$\Xi_1^{S_\lambda} = \Xi_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(a_2) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(b_1) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(b_2) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(c_2) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(c_3) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(d_1) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(d_2) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(e) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(pc_1) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(pc_2) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(pc_3).$$

Os lemas apresentados no Capítulo 3 garantem que $\Xi_1^{S_\lambda}$ é uma subvariedade de codimensão-1 de $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$. Os mesmos lemas também nos dão as vizinhanças $\mathcal{B}(Z)$ nas quais podemos construir a Σ -equivalência do item (2) que, na maioria dos casos, usam os mesmos argumentos dos Lemas 4.27, 4.28, 4.29 da Seção 4.4 e também dos Lemas 5.6, 5.7, e 5.8, da Seção 5.2. No Lemma 5.11 nós exibimos alguns detalhes do item (2) que são distintos dos já vistos anteriormente e indicamos as semelhanças nos demais casos. A abertura de $\Xi_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$ é imediata do item (2).

Lema 5.11. *Se $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}$, então Z é estruturalmente estável em $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$.*

Demonstração. Lembramos que $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda} = \mathfrak{X}^{S_\lambda} \setminus \Xi_0$ e, portanto, consideramos vizinhanças nesse conjunto.

Se $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi_1^{S_\lambda}(a_1) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(b_1)$, então Z_0 é estruturalmente estável em $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$, pois esses dois casos não envolvem Σ e, portanto, a afirmação segue como Teoria Clássica (ver [47, 51]). Além disso, o caso $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(b_2)$ também pode ser analisado como o caso de colisão de trajetória fechada com o bordo da Teoria Clássica levando em consideração possíveis segmentos de escape ou deslize que existam numa vizinhança de p . Se $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(a_2) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(c_1) \cup \Xi_1^{S_\lambda}(c_2)$ seja $p \in \Sigma$ um ponto de equilíbrio de X_0 ou de Y_0 , uma sela-nó do campo de Filippov F_{Z_0} ou uma cúspide de Z_0 com Σ . As condições quase-genéricas exibidas no Capítulo 3 garantem que existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ de Z_0 e V_p de p de modo que todo $Z \in \mathcal{B}$ tem as mesmas propriedades de Z_0 em V_p . Assim construímos a Σ -equivalência h entre Z_0 e Z como nos Lemas de 5.6 a 5.8, a depender dos outros elementos de Z_0 , apenas considerando a trajetória passando por p como uma separatriz. Se $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(c_3)$ as condições quase-genéricas dadas na Definição 3.2 garantem que a construção é análoga a do Lema 4.28, levando, novamente, em consideração os segmentos de escape ou deslize que existem numa vizinhança da dobra-dobra. Se $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(d_1)$, então Z_0 admite uma única poli-trajetória fechada γ do tipo I de Z_0 , tal que $\pi'(q) = 1$ e $\pi''(q) = d''(q) \neq 0$, para $q \in \Sigma \cap \gamma$. O Lema 3.8 garante que existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ de Z_0 e uma coroa C_γ em torno da poli-trajetória fechada γ de modo que ∂C_γ é a união disjunta de duas curvas C_1 e C_2 transversais a todo $Z \in \mathcal{B}$. Além disso, todo $Z \in \mathcal{B}$ possui uma poli-trajetória fechada do tipo I do mesmo tipo que γ contida no interior de C_γ . Assim, construímos a Σ -equivalência h entre Z_0 e Z como no Lema 4.29. Se $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(d_2)$, considerando $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$ a vizinhança de Z_0 dada no Lema 3.17, a construção é análoga a do Lema 4.34.

Por fim, ilustramos a construção para o caso em que $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(e)$. Nesse caso, temos que considerar conexões de selas (incluindo equilíbrios do campo de Filippov) distintas e loops simples, conexões de sela com dobra ou entre duas dobras. Como vimos nos Lemas 3.13, 3.14 e 3.19 existe uma vizinhança $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ de Z_0 tal que todo $Z \in \mathcal{B}$ possui uma conexão do mesmo tipo que Z_0 . A seguir, detalharemos a construção de h no caso de conexões entre uma sela e uma dobra. Os outros são análogos. O caso do loop simples também pode ser visto em [47], pois é análogo ao caso Clássico considerando, se necessário, Σ como seção transversal.

Assim, consideramos $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Xi_1^{S_\lambda}(sd)$ tal que Z_0 admite uma conexão entre uma sela hiperbólica $s_1 \in \Sigma^+$ do campo X_0 e uma dobra visível p_1 também do campo X_0 . Seja $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$ a vizinhança de Z_0 dada no Lema 3.13.

Considerando esses pontos e as demais separatrizes de Z_0 construímos a coroa C_ε , em torno de Σ , como nos Lemas 5.7 e 5.8, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $s_1 \notin C_\varepsilon$. Seja $Z \in \mathcal{B}$ e sejam p_2 e s_2 a tangência e sela de Z . A partir daqui, construímos h em C_ε como nos Lemas 5.7 e 5.8. O ponto q_1 em que a conexão da sela s_1 com a tangência p_1 cruza $\Sigma_{+\varepsilon} = f^{-1}(\varepsilon)$ será levado no ponto que satisfaz o mesmo para o campo Z , pois a construção leva a órbita passando por p_1 na órbita passando por p_2 . Note que, ∂C_ε está nas hipóteses do Teorema de Peixoto e, portanto, estendemos h nas regiões $\mathbb{S}^2 \setminus C_\varepsilon$ utilizando o Teorema citado. Portanto, para todo $Z \in \mathcal{B}$ temos construído um homeomorfismo $h_Z : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que leva trajetórias de Z_0 em trajetórias de Z preservando orientação do tempo. Assim, Z_0 é estruturalmente estável em $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$.

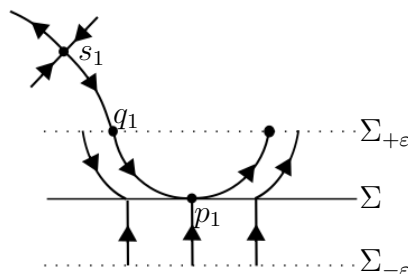


Figura 5.1: Extensão de h para campo de vetores que apresenta conexão de separatrizes.

Se $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(pc_1)$, então Z admite uma pseudo-conexão que não dá origem a uma pseudo-poli-trajetória fechada (como na Figura 3.11). Esse caso é análogo ao caso de conexões. Se $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(pc_2)$, então Z_0 admite uma pseudo-poli-trajetória fechada elementar conectando segmentos de escape e deslize e que não contém segmentos do campo deslizante (como na Figura 3.12(a)). Esse caso pode ser analisado utilizando os mesmos argumentos utilizados no caso em que $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(d_1)$. Por fim, se $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(pc_3)$, então Z admite uma pseudo-poli-trajetória fechada elementar contendo uma dobra visível e que não contém segmentos do campo deslizante (como na Figura 3.12(c)). Esse caso pode ser analisado com os mesmos argumentos utilizados no caso em que $Z_0 \in \Xi_1^{S_\lambda}(d_2)$.

Portanto, se $Z = (X, Y) \in \Xi_1^{S_\lambda}$, então Z é estruturalmente estável em $\mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$. $\square$

Com um entendimento completo do comportamento das pseudo-poli-trajetórias que contenham segmentos de deslize ou de escape seríamos capazes de estudar a densidade dos conjuntos $\Xi_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}$ e $\Xi_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}_1^{S_\lambda}$ de modo análogo ao feito no Capítulo 4. E, com isso, seria possível caracterizar, como na Definição 4.40, o conjunto $\Xi_0 \subset \mathfrak{X}$.

Assim como no Capítulo 4, poderíamos definir o conjunto $\tilde{\Xi}_1^{S_\lambda}$, eliminando as possíveis acumulações de elementos de codimensão-1 que ocorrem em $\Xi_1^{S_\lambda}$, provando um Teorema análogo ao Teorema 5.2, utilizando a topologia induzida, como fizemos no Teorema 4.36. Não o faremos aqui, para evitar repetições.

Finalizamos o capítulo com alguns exemplos.

Exemplo 5.12. Considere o campo de vetores suave por partes $Z = (X, Y)$ com $X(x, y, z) = (-y - xz, x - yz, x^2 + y^2)$ e $Y(x, y, z) = (-y - xy + xz + yz, x + x^2 - xz + yz, -x^2 - y^2)$. Note que $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ é uma integral primeira para ambos X e Y e, portanto, $Z \in \mathfrak{X}$ e toda esfera centrada na origem é invariante pelo fluxo de Z . Além disso, o único ponto de equilíbrio admissível de X (de Y , respectivamente) na esfera de raio λ é $p_X = (0, 0, \lambda)$ ($p_Y = (0, 0, -\lambda)$, respectivamente) e ambos são pontos de equilíbrio atratores hiperbólicos, para $\lambda > 0$. Além disso, se $\lambda < 2$, $\Sigma = \Sigma^e$ e o campo de Filippov $F_Z(p)$ é não nulo para todo $p \in \Sigma$ e, nesse caso, Σ é uma trajetória fechada elementar do tipo II. Quando $\lambda = 2$ existe um único $p \in \Sigma$ tal que $F_Z(p) = 0$, $F'_Z(p) = 0$ e $F''_Z(p) \neq 0$ enquanto para $\lambda > 2$ existem dois pontos de equilíbrio hiperbólicos, $p_1 \neq p_2$, de $F_Z(p)$. Dessa forma, há uma bifurcação do tipo sela-nó em Σ . Além disso, o fato de X e Y serem transversais a toda circunferência paralela a Σ junto com as informações dos seus pontos de equilíbrio garantem que, em cada esfera $\mathbb{S}_\lambda^2$, o ω -limite de toda trajetória regular iniciando no hemisfério norte (sul) é o ponto p_X (p_Y , respectivamente) enquanto o α -limite de qualquer trajetória regular é Σ^e . Nesse caso também não há pseudo-conexão nem pseudo-órbita não trivialmente recorrente. Dessa forma o campo de vetores $Z = (X, Y)$ restrito a cada esfera $\mathbb{S}_\lambda^2$, com $\lambda \neq 2$, pertence ao conjunto $\Xi_0^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$ e $Z = (X, Y)$ restrito à esfera $\mathbb{S}_2^2$ pertence ao conjunto $\Xi_1^{S_\lambda} \subset \mathfrak{X}^{S_\lambda}$.

Exemplo 5.13. Considere o campo de vetores suave por partes $Z = (X, Y)$ com $X(x, y, z) = (x^2z - z^2, 0, -x^3 + xz)$ e $Y(x, y, z) = (-y - xy + xz + yz, x + x^2 - xz + yz, -x^2 - y^2)$. Note que $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ é uma integral primeira para ambos X e Y . Portanto, $Z \in \mathfrak{X}$ e toda esfera centrada na origem é invariante pelo fluxo de Z . Como vimos no exemplo anterior, o único ponto de equilíbrio admissível de Y na esfera de raio λ é $p_Y = (0, 0, -\lambda)$. Além disso, X tem uma reta de singularidades da forma $\{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\}$ e, portanto, X tem dois pontos de equilíbrio da forma $(0, \pm\sqrt{\lambda}, 0)$ sobre a descontinuidade Σ , em toda esfera de raio $\lambda > 0$. Com isso podemos concluir que $Z_\lambda \notin \Xi_0^{S_\lambda} \cup \Xi_1^{S_\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.

A fim de ilustrar o desdobramento de uma singularidade do tipo sela-nó, para campos de vetores suaves por partes com esferas invariantes, exibimos o seguinte exemplo. Resaltamos que o campo do exemplo não está nas classes estudadas já que o mesmo não está bem definido no plano $\{z = 0\}$.

Exemplo 5.14. Considere o campo de vetores $X(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 - x^2, y, -\frac{x}{z}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1 - x^2) - \frac{y^2}{z})$. Note que $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ é uma integral primeira para X e, portanto, toda esfera centrada na origem é invariante pelo fluxo de X . Note também que X não está bem definido em uma vizinhança do plano $z = 0$ e que as convenções de Filippov não se aplicam se considerarmos $Z = (X, X)$ nesse exemplo. Foquemos nossa atenção para o comportamento de X restrito ao hemisfério norte. A outra análise é análoga. Nesse caso, os únicos pontos de equilíbrio de X na esfera de raio λ são da forma $(\pm\sqrt{\lambda - 1}, 0, \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1})$. Portanto, não há pontos de equilíbrio na esfera de raio $\lambda < 1$, $(0, 0, 1)$ é o único ponto de equilíbrio na esfera de raio 1 e existem dois pontos de equilíbrio nas esferas de raio $\lambda > 1$. Usando projeção estereográfica é fácil ver que $(0, 0, 1)$ é um ponto do tipo sela-nó enquanto, nas esferas de raio $\lambda > 1$, coexistem um ponto de sela e um ponto do tipo nó. Com esse exemplo, conseguimos enxergar a família a 1-parâmetro da bifurcação sela-nó nas esferas invariantes pelo campo X com raios próximos a $\lambda = 1$.

Nos Capítulos 6 e 7 estudamos os problemas de centro-foco para campos de vetores nas classes $\mathcal{X}^{S_\lambda}$, $\mathfrak{R}^{S_\lambda}$ e $\mathfrak{X}^{S_\lambda}$. Dessa forma, obtemos condições e exemplos de campos não estruturalmente estáveis em todas essas classes.

6 Centros e ciclicidade para campos de vetores suaves definidos em esferas invariantes

6.1 Introdução

Neste capítulo, vamos trabalhar com campos de vetores na classe $\mathcal{X}$ dos campos de vetores suaves definidos em $\mathbb{R}^3$ e que admitem a integral primeira $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Quando restringirmos a classe aos campos de vetores de grau n , denotaremos por $\mathcal{X}_n$ e quando restringirmos a classe aos campos de vetores homogêneos de grau n denotaremos por $\mathcal{X}_n^H$. O objetivo do capítulo é estudar os problemas do centro-foco e de ciclicidade na classe $\mathcal{X}$. Esses problemas estão fortemente relacionados ao estudo e definição de *ciclo limite* (ou seja, órbita periódica isolada) para campos de vetores polinomiais planares dada por H. Poincaré, nos anos de 1880. No final do século XIX, D. Hilbert apresentou uma lista de 23 problemas no *International Congress of Mathematicians*, em Paris. A segunda parte do décimo sexto problema dessa lista, o famoso 16º Problema de Hilbert, consiste em exibir uma estimativa para o número máximo dos ciclos limite que um campo de vetores polinomial planar pode ter. Esse problema permanece em aberto. Mais detalhes sobre a história do 16º problema de Hilbert, pode ser encontrada na interessante pesquisa escrita por Y. Ilyashenko em [31].

A estratégia utilizada aqui é considerar a restrição do sistema diferencial a uma das esferas bidimensionais invariantes por X e utilizar a projeção estereográfica para realizar a análise local utilizando as ferramentas já conhecidas e geralmente utilizadas na abordagem desse tipo de problema para sistemas planares. A seguir, descrevemos os resultados obtidos.

Seja $X \in \mathcal{X}_1$ um campo de vetores linear. Logo $\langle x, X(x) \rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$ e, portanto, X é homogêneo e pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -a_1y - a_2z, \\
\dot{y} &= a_1x - a_3z, \\
\dot{z} &= a_2x + a_3y.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

O próximo resultado nos dá uma classificação qualitativa dos pontos de equilíbrio de (6.1).

Teorema 6.1. *Seja $p \in \mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$ um ponto de equilíbrio isolado do sistema (6.1) em $\mathbb{S}_\rho^2$. Então p é do tipo centro. Além disso, o sistema é completamente integrável.*

Como vimos acima, se $X \in \mathcal{X}$ é linear então X é homogêneo. Dessa forma $\mathcal{X}_1^H = \mathcal{X}_1$. Inspirados por essa propriedade estudamos e classificamos os pontos de equilíbrio do tipo centro na classe dos campos de vetores quadráticos homogêneos $X \in \mathcal{X}_2^H$. Na Seção 6.3 provaremos que, sem perda de generalidade, $X \in \mathcal{X}_2^H$ pode ser escrito na seguinte forma canônica

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -a_4xy - a_5xz - (a_6 + a_7)yz - a_8z^2, \\
\dot{y} &= a_4x^2 + a_6xz - a_9z^2, \\
\dot{z} &= a_5x^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Note que um dos pontos de equilíbrio de (6.2) já está alocado em $(0, 1, 0)$. O próximo teorema classifica os pontos de equilíbrio do tipo centro de (6.2).

Teorema 6.2. *O ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ do sistema (6.2) é um centro não degenerado se, e somente se, $a_7 \neq 0$, $a_4 = a_9$, e $a_4a_5a_8a_9 + a_5a_6a_7a_8 + a_5^2a_7a_9 + a_5a_8a_9^2 - a_7a_8^2a_9 = 0$.*

Na Seção 6.3 veremos que o comportamento dos campos lineares e quadráticos homogêneos é o mesmo em todas as esferas invariantes. Essa propriedade não é válida para campos quadráticos não homogêneos em geral. Nesse caso, pela dificuldade do problema, faremos o estudo restrito à esfera unitária $\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Observe que, sem perda de generalidade, um campo de vetores $X \in \mathcal{X}_2$ se escreve na seguinte forma canônica

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -a_1y - a_2z - a_4xy - a_{10}y^2 - a_5xz - (a_6 + a_7)yz - a_8z^2, \\
\dot{y} &= a_1x - a_3z + a_4x^2 + a_{10}xy + a_6xz - a_{11}yz - a_9z^2, \\
\dot{z} &= a_2x + a_3y + a_5x^2 + a_7xy + a_{11}y^2 + a_8xz + a_9yz.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

O próximo resultado nos dá algumas famílias de centros para o sistema (6.3). Na Seção 6.4 explicamos porque restringimos nossa análise assumindo $a_9 = 0$ e $a_2 + a_7 = 1$. Com essas hipóteses, a monodromia em uma vizinhança de $(0, 1, 0)$ é garantida quando $w^2 = a_6 + 1 > 0$ e podemos estudar apenas o caso $w > 0$, sem perda de generalidade.

Teorema 6.3. *O sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_1y - (1 - a_7)z - a_4xy + a_1y^2 - a_5xz + (1 - a_7 - w^2)yz - a_8z^2, \\ \dot{y} &= a_1x + a_{11}z + a_4x^2 - a_1xy + (w^2 - 1)xz - a_{11}yz, \\ \dot{z} &= (1 - a_7)x - a_{11}y + a_5x^2 + a_7xy + a_{11}y^2 + a_8xz,\end{aligned}\tag{6.4}$$

tem um centro no ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ se $a_4 = 0$ e uma das seguintes condições é satisfeita:

(a) $w = 1, a_1a_5 + a_8a_{11} = 0;$

(b) $a_1 = 0, a_8 = 0;$

(c) $a_5 = 0, a_{11} = 0;$

(d) $a_1 = a_8, a_5 = -a_{11};$

(e) $w \neq 1, a_1 = \frac{w^2 - 1}{w^2 + 1}a_8, a_5 = \frac{w^2 + 1}{w^2 - 1}a_{11}, a_7 = \frac{1}{w^2 + 1} - \frac{1}{(w^2 + 1)}a_8^2 - \frac{w^2 + 1}{(w^2 - 1)^2}a_{11}^2.$

Acreditamos que o resultado acima nos dá, genericamente, uma classificação de centros completa. Na Seção 6.4 checamos esse fato para $w \in \{1/2, 2, 3\}$, mas sem fixar algum valor para w as expressões necessárias para finalizarmos a prova são muito grandes e, por isso, não conseguimos finalizar os cálculos.

Finalmente, analisamos a ciclicidade local das famílias dadas no Teorema 6.3 e de focos-fracos estudando bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude a partir de um foco-fraco ou de um centro em $\mathbb{S}_1^2$. O próximo resultado é a melhor cota que obtivemos para o número de ciclos limite de pequena amplitude na família quadrática $\mathcal{X}_2$.

Teorema 6.4. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\alpha y + \frac{9}{20}z - xz - 2\alpha y^2 - \frac{89}{20}yz - \alpha z^2, \\ \dot{y} &= -2\alpha x + 2z + 2\alpha xy + 3xz - 2yz, \\ \dot{z} &= -\frac{9}{20}x - 2y + x^2 + \frac{29}{20}xy + \alpha xz + 2y^2.\end{aligned}\tag{6.5}$$

O ponto de equilíbrio $p = (0, 1, 0)$ de (6.5) é um centro se $\alpha = 0$. Por outro lado, p é um foco-fraco de ordem 4 se $\alpha = \pm\sqrt{857/488}$, ou de ordem 3 se $\alpha \notin A := \{0, \pm\sqrt{857/488}\}$. Além disso, se $\alpha = \pm\sqrt{857/488}$ ($\alpha \notin A$) existem 4 (3, respectivamente) ciclos limite de pequena amplitude, em $\mathbb{S}_1^2$, bifurcando de p , considerando uma perturbação de (6.5) na família (6.4).

Observação 6.5. Note que próximo a família de centros do sistema (6.5) (quando $\alpha = 0$) existem apenas focos-fracos de ordem 3. Consequentemente, a ciclicidade dessa família é 3.

O Teorema 6.1 mostra que existe alguma semelhança entre o caso linear em $\mathbb{R}^2$ e o caso linear em $\mathbb{S}_\rho^2$, pois em ambos os casos não existem ciclos limite. Por outro lado, campos em $\mathcal{X}_1$ só admitem singularidades do tipo centro enquanto campos lineares definidos em $\mathbb{R}^2$ podem ter diferentes tipos de pontos de equilíbrio. Em relação aos campos quadráticos, Bautin ([3]) provou que existem no máximo 3 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando de um ponto de equilíbrio monodrômico e, neste trabalho, exibimos um foco-fraco de ordem 4, do qual bifurcam 4 ciclos limite de pequena amplitude em $\mathbb{S}_1^2$. Logo, temos pelo menos um ciclo limite a mais, para campos de vetores quadráticos, do que no caso planar.

Outra diferença é obtida considerando o caso com coeficientes complexos. Neste caso, provamos que a ciclicidade local (complexa) da família de centros dada no item (e) do Teorema 6.3 é pelo menos 6, com perturbação na família (6.4). O fato da ciclicidade ser maior quando considerados coeficientes complexos pode explicar as dificuldades que encontramos para buscar campos de vetores com ciclicidade elevada no estudo dos coeficientes reais, bem como na classificação do centro.

Recordaremos alguns conceitos e resultados sobre a projeção estereográfica e constantes de Lyapunov na Seção 6.2. Na Seção 6.3 estudamos os casos linear e quadrático homogêneo e provamos os Teoremas 6.1 e 6.2. Na Seção 6.4 estudamos o problema de centro e ciclicidade local para $X \in \mathcal{X}_2$ e demonstramos os Teoremas 6.3 e 6.4. Finalizamos o capítulo estudando uma família com coeficientes complexos.

Observação 6.6. *Os resultados mostrados neste capítulo são baseados em [10]. Para manter a notação deste trabalho, há algumas divergências entre a notação do capítulo e da referência citada.*

6.2 Preliminares

Esta seção é dedicada ao estudo dos conceitos e técnicas que serão utilizados na prova dos resultados do capítulo. Primeiramente introduzimos o problema e explicamos como utilizamos a projeção estereográfica para demonstrar nossos resultados principais utilizando técnicas já conhecidas para campos de vetores planares. Também recordamos como o cálculo das constantes de Lyapunov é feito para, finalmente, estudarmos o problema de centro-foco e ciclicidade para sistemas polinomiais em $\mathcal{X}$.

6.2.1 Introduzindo o problema

Como nos capítulos anteriores, consideramos o campo de vetores $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e o sistema $\dot{x} = X(x)$ associado a ele. Neste capítulo estudaremos campos suaves que satisfaçam $\langle x, X(x) \rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Isso significa que X tem uma integral primeira da forma $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e, portanto, todas as esferas centradas na

origem e de raio $\rho > 0$, $\mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$, são invariantes pelo fluxo de X . Seguimos denotando essa classe de campos de vetores por $\mathcal{X}$ e por $\mathcal{X}_n$ quando restringimos a classe aos campos polinomiais de grau n .

Os próximos lemas mostram que uma mudança de coordenadas ortogonais mantem todas as esferas invariantes e que não é restritivo assumir que um dos pontos de equilíbrio de $X \in \mathcal{X}$, que sempre existe para campos suaves definidos na esfera, é o ponto $(0, \rho, 0)$.

Lema 6.7. *Seja M uma matriz ortogonal. Se $X \in \mathcal{X}$ então $M \cdot X(M^t \cdot y) \in \mathcal{X}$.*

Demonstração. Aplicando uma mudança ortogonal de coordenadas $y = M \cdot x$, no sistema diferencial $\dot{x} = X(x)$, obtemos o sistema

$$\dot{y} = M \cdot \dot{x} = M \cdot X(x) = M \cdot X(M^t \cdot y) = Y(y),$$

pois $M^{-1} = M^t$. Além disso,

$$\langle y, Y(y) \rangle = \langle M \cdot x, M \cdot X(M^t \cdot y) \rangle = (M \cdot x)^t \cdot M \cdot X(M^t \cdot y) = x^t \cdot X(x) = \langle x, X(x) \rangle = 0$$

para todo $y \in \mathbb{R}^3$, o que conclui a prova. $\square$

Lema 6.8. *Podemos assumir, sem perda de generalidade, que um dos pontos de equilíbrio de $X \in \mathcal{X}$ é $(0, \rho, 0)$.*

Demonstração. Seja $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}_\rho^2$ um ponto de equilíbrio de X . Dessa forma, $X(p) = 0$ e $\|p\| = \rho > 0$. Considere o vetor unitário $v = (x_0/\rho, y_0/\rho, z_0/\rho)$ e o plano

$$\Gamma = \left\{ (x, y, z) : \frac{xx_0}{\rho} + \frac{yy_0}{\rho} + \frac{zz_0}{\rho} = 0 \right\},$$

passando pela origem e perpendicular ao vetor v . Note que a intersecção desse plano com a esfera unitária $\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma circunferência e seja $u = \left(0, -z_0/\sqrt{y_0^2 + z_0^2}, y_0/\sqrt{y_0^2 + z_0^2}\right)$ um vetor unitário nessa circunferência. Com isso temos uma nova base ortogonal $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$, onde w é obtido pelo produto vetorial de u e v . Seja M a matriz de mudança de base entre a base canônica e $\mathcal{B}$. Então M é uma matriz ortogonal e a mudança de coordenadas definida por M leva o ponto $p = (x_0, y_0, z_0)$ no ponto $(0, \rho, 0)$. Note que o Lema 6.7 garante que o novo campo de vetores continua pertencendo à classe $\mathcal{X}$. $\square$

Utilizando a projeção estereográfica com respeito à antípoda de $(0, \rho, 0)$ podemos considerar o campo planar ao invés do 3-dimensional definido na esfera. Seja $\mathbf{p} : \mathbb{S}_\rho^2 \setminus \{(0, -\rho, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica no plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \rho\}$ dada por

$$\mathbf{p}(x, y, z) = \left(\frac{2\rho x}{y + \rho}, \frac{2\rho z}{y + \rho} \right).$$

Seja Y o campo de vetores definido com o auxílio da projeção, isto é,

$$Y(u) = d\mathbf{p}_{\mathbf{p}^{-1}(x)} \circ X \circ \mathbf{p}^{-1}(u), \quad (6.6)$$

onde $X = X|_{\mathbb{S}_\rho^2}$ e $\mathbf{p}(x) = u$. Neste capítulo sempre que falarmos de campos de vetores projetados, estaremos nos referindo ao campo obtido utilizando a projeção estereográfica, isto é, ao campo (6.6).

Como vimos na Seção 2.5, $\mathbf{p}$ preserva curvas fechadas e contato entre curvas no seu domínio de definição. Além disso, dizemos que $p \in \mathbb{S}_\rho^2$ é um ponto de equilíbrio do tipo centro de $X|_{\mathbb{S}_\rho^2}$ se $\mathbf{p}(p) = q$ e q é um ponto de equilíbrio do tipo centro do sistema $Y(u)$ definido a partir de (6.6).

Existem outros tipos de projeções, além da estereográfica, que podemos utilizar para projetar um campo de vetores tridimensional em um plano, como a projeção central, por exemplo. Campos de vetores definidos na esfera, também foram estudados em [37, 38] mas os objetivos dos trabalhos são diferentes. Em particular, esses trabalhos abordam quando os círculos máximos são invariantes para os campos de vetores considerados. Algumas das propriedades acima são usadas, mas sem prová-las.

6.2.2 Constantes de Lyapunov e ciclicidade local

Nesta seção recordaremos os conceitos e os algoritmos usados para estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio do tipo centro-foco não degenerado que tem sua parte linear escrita na forma de Jordan, como no seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta y + \sum_{k=2}^n P_k(x, y), \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y + \sum_{k=2}^n Q_k(x, y), \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde P_k e Q_k são polinômios homogêneos de grau k nas variáveis x e y . A condição $\beta \neq 0$ implica que o ponto de equilíbrio é não-degenerado enquanto $\beta = 0$ recai sobre os casos degenerados. O sistema (6.7) pode ser escrito em coordenadas polares $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mathcal{R}(r, \theta), \\ \dot{\theta} &= \beta + \Theta(r, \theta), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{R}$ e Θ são polinômios em r e polinômios trigonométricos em $\cos \theta$ e $\sin \theta$. Podemos remover a dependência do tempo e considerar a variação do raio r com relação ao ângulo θ dada pela equação diferencial unidimensional

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\mathcal{R}(r, \theta)}{\beta + \Theta(r, \theta)} = R(r, \theta), \quad (6.8)$$

que é bem definida em uma vizinhança da origem.

Seja $r(\theta, r_0)$ uma solução de (6.8) satisfazendo

$$r(0, r_0) = r_0.$$

Se $\alpha \neq 0$, pelo Teorema de Grobman-Hartman concluímos que $(0, 0)$ é um foco hiperbólico e, além disso, o sinal de α indica a estabilidade da origem que será atratora (repulsora) conforme $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$, respectivamente). Quando $\alpha = 0$ a estabilidade depende dos termos de ordem superiores. Para estudar o segundo caso, expandimos a solução r_0 em série de Taylor, para r_0 suficientemente pequeno, e obtemos

$$r(\theta, r_0) = r_0 + \sum_{k=2}^{\infty} r_k(\theta) r_0^k,$$

com $r_k(0) = 0$, para todo $k \geq 2$. Definimos a *aplicação de primeiro retorno de Poincaré* avaliando a solução da equação acima em $\theta = 2\pi$,

$$\Pi(r_0) = r(2\pi, r_0).$$

Como a solução de (6.7) gira em torno da origem a estabilidade desse ponto de equilíbrio depende do sinal da *função distância*

$$\Delta(r) = \Pi(r_0) - r_0,$$

definida para r_0 suficientemente pequeno. Um resultado conhecido, que pode ser encontrado em [1], garante que se existir k tal que $\Delta'(0) = \dots = \Delta^{(k-1)}(0) = 0$ e $\Delta^{(k)}(0) \neq 0$ então k é um número inteiro ímpar e assim podemos escrever $k = 2K + 1$, para $K \geq 0$. Chamamos de *K-ésima constante de Lyapunov*

$$L_K = r_{2K+1}(2\pi) = \frac{\Delta^{(2K+1)}(r_0)}{(2K+1)!}$$

quando $L_1 = \dots = L_{K-1} = 0$ e $L_K \neq 0$ e dizemos que a origem é um *foco-fraco* de ordem K se existir $K \geq 1$ tal que $L_K \neq 0$, caso contrário dizemos que a origem é um centro.

O método descrito acima é devido a Lyapunov e mais detalhes podem ser encontrados em [1, 18], por exemplo. Há um método alternativo ao descrito, também bastante conhecido, devido a Poincaré, que pode ser aplicado para estudar a estabilidade da origem de (6.7) quando $\alpha = 0$. Antes de explicá-lo, recordemos a definição de Função de Lyapunov e de Função de Lyapunov estrita para campos de vetores planares.

Considere um sistemas de equações diferenciais definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ que contém a origem e seu sistema associado X . Seja $V : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Considere as seguintes condições:

- (a) $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ para todo $x \in U \setminus \{0\}$;
- (b) $XV \leq 0$ em U , onde $XV = \langle X, \nabla V \rangle$ e ∇V indica o vetor gradiente de V ;
- (c) $XV < 0$ em $U \setminus \{0\}$.

Dizemos que V é uma *Função de Lyapunov* (*estrita*, respectivamente), se V satisfaz as condições (a) e (b) ((a), (b) e (c), respectivamente).

A existência de uma Função de Lyapunov estrita para o sistema (6.7) garante que a origem é um foco estável para o mesmo. O método de Poincaré consiste em procurar por uma função $H(x, y) = x^2 + y^2 + \mathcal{O}_3(x, y)$ que satisfaça

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} = \sum_{k=2}^{\infty} h_{2k} r^{2k},$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$. O primeiro coeficiente não nulo de $\dot{H}$, que sempre tem subíndice par e, portanto, pode ser escrito como h_{2K} é chamado de *valor focal*. Nesse caso H atua como uma função de Lyapunov para o sistema (6.7).

Um resultado conhecido garante que os coeficientes h_{2K+2} e L_{2K+1} diferem apenas por uma constante multiplicativa não nula e, pelo Teorema de Poincaré–Lyapunov a origem é um centro do sistema (6.7) se, e somente se, $h_{2K} = 0$ para todo K , isto é, se e somente se, o sistema (6.7) admite uma integral primeira analítica. Note que a série de Taylor de $H(x, y) = x^2 + y^2 + \mathcal{O}_3(x, y)$ converge para uma integral primeira analítica pois o sistema é analítico. Para mais detalhes, ver [1, 18, 46].

Computacionalmente, é melhor considerarmos o segundo método em coordenadas complexas $z = x + iy$. Nesse caso, se $\alpha = 0$ o sistema (6.7) se escreve como

$$\dot{z} = R(z, \bar{z}) = iz + \sum_{k=2}^n R_k(z, \bar{z}),$$

onde $R_k(z, \bar{z})$ são polinômios homogêneos de grau k em z e $\bar{z}$. Como (6.7) tem coeficientes reais segue que a segunda equação é conjugada da primeira e, portanto, só precisamos escrever a primeira equação. Nesse caso, $H(z, \bar{z}) = z\bar{z} + \mathcal{O}_3(z, \bar{z})$ e assim

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H} = \dot{z} \frac{\partial H}{\partial z} + \dot{\bar{z}} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \sum_{k=2}^{\infty} g_k (z\bar{z})^{2k}.$$

Logo, os valores focais são os coeficientes g_k .

Como citamos acima, as constantes de Lyapunov e os valores focais diferem apenas por uma constante multiplicativa não nula. Além disso, esses objetos são polinômios nos coeficientes de P_k e Q_k e cada L_K é definida apenas quando $L_j = 0$ para todo $j < K$. Por isso, nesse trabalho, independente do método usado no cálculo denotaremos as constantes

de Lyapunov ou valores focais por L_k . Para mais detalhes sobre o problema do centro-foco e problemas relacionados, indicamos [1, 45].

A *bifurcação de Hopf* clássica ocorre para α próximo de 0, onde α determina o sinal do traço da matriz jacobiana de (6.7), e quando a primeira constante de Lyapunov é não nula para $\alpha = 0$. Se $L_1 > 0$ ($L_1 < 0$) a origem é repulsora (atratora, respectivamente) e um ciclo limite de pequena amplitude, repulsor (atrator, respectivamente), bifurca da origem para valores de $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$) suficientemente pequeno enquanto a origem se torna hiperbólica repulsora (atratora, respectivamente) para valores de $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$, respectivamente).

A bifurcação de Hopf degenerada ocorre quando os ciclos limite de pequena amplitude bifurcam de um foco-fraco de ordem superior, isto é, quando a primeira constante de Lyapunov não nula é L_K para $K > 1$. Sabemos que no máximo K ciclos limite de pequena amplitude bifurcam de um foco-fraco de ordem K , com perturbações analíticas [1, 46], mas o desdobramento pode não ser completo quando restringimos as perturbações a uma família de polinômios de um grau fixo. Como estamos interessados em trabalhar com perturbações polinomiais, ao invés de estudarmos os desdobramentos de um foco-fraco de ordem alta, estudaremos bifurcações de Hopf degeneradas a partir de centros, utilizando uma aplicação interessante do Teorema da Função Implícita dada por Chicone e Jacobs em [13] que também pode ser encontrada em [29]. Apresentaremos a abordagem dada por Christopher [14], que usa a expansão de Taylor de primeira ordem das constantes de Lyapunov, com relação aos parâmetros de perturbação, para estudar tal problema.

Teorema 6.9 ([14]). *Seja p um ponto na variedade central de modo que as primeiras k constantes de Lyapunov $L_1, \dots, L_k$ tenham parte linear independentes (com relação a expansão em série de Taylor de L_i em p). Então p está em uma componente da variedade central de codimensão ao menos k e existem bifurcações locais que produzem k ciclos limite de pequena amplitude a partir de p . Se, além disso, p está em uma componente da variedade central de codimensão k , então p é um ponto suave dessa variedade, e a ciclicidade do centro para o valor do parâmetro p é exatamente k . No último caso, k também é a ciclicidade de um ponto genérico nesta componente da variedade central.*

Demonstração. Seja p um ponto na variedade central e denote por $L_1, \dots, L_k$ as k primeiras constantes de Lyapunov calculadas nesse ponto. Fazendo $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_m)$, onde ε_i são parâmetros perturbativos e $m > k$, podemos escrever

$$L_i(\varepsilon) = L_i^{[1]}(\varepsilon) + \mathcal{O}_2(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, m,$$

onde $L_i^{[1]}$ denota a parte linear da expansão em série de Taylor de L_i com relação ao parâmetro perturbativo ε . Por hipótese, as primeiras k constantes tem parte linear $L_i^{[1]}$, $i = 1, \dots, k$, linearmente independentes e, além disso, como p está na variedade central,

temos $L_i^{[1]}(0) = 0$ para $i = 1, \dots, k$. Logo, existe uma mudança de coordenadas que nos permite escrever

$$L_i(\varepsilon) = \varepsilon_i + \mathcal{O}_2(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, k.$$

Pelo Teorema da Função Implícita obtemos

$$L_i = \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

E, portanto, os primeiros k coeficientes da aplicação de primeiro retorno são linearmente independentes. Dessa forma, quando o traço α é nulo obtemos $k-1$ ciclos limite bifurcando de p . Quando adicionamos o parâmetro α , relacionado ao traço, obtemos mais um ciclo limite, pela Bifurcação de Hopf Clássica. Logo, sob as condições enunciadas existem k ciclos limite bifurcando de p . $\square$

Note que, o Teorema acima prova a existência de uma curva, no espaço de parâmetros, de focos-fracos de ordem k que bifurcam k ciclos limite e esse é o máximo número de ciclos limite que surgem próximos a essa curva. Para mais detalhes, ver [14, 46].

Em [14] há também um resultado sobre bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude usando ordens superiores das séries de Taylor das constantes de Lyapunov. Esses estudos de ordem superiores também podem ser encontrados em [24, 27]. Aqui, nos limitamos a explicar os estudos de primeira ordem, pois não obtivemos melhores resultados utilizando ordem superior.

6.3 Centros para campos lineares e quadráticos homogêneos

Nesta seção classificaremos os tipos de singularidades que sistemas lineares $X \in \mathcal{X}$ podem ter, provando o Teorema 6.1. Como já comentamos anteriormente, quando $X \in \mathcal{X}$ é linear então X é homogêneo. Inspirados por esse fato estudamos os centros em $\mathcal{X}_2^H$, que são classificados no Teorema 6.2. Antes de provar esses resultados apresentamos alguns lemas técnicos sobre sistemas homogêneos com esferas invariantes que serão utilizados nas demonstrações dos principais teoremas da seção.

Lema 6.10. *A propriedade de homogeneidade é invariante por transformação ortogonal de coordenadas.*

Demonstração. A prova segue diretamente da prova do Lema 6.7, pois transformações ortogonais preservam a propriedade homogênea. $\square$

Lema 6.11. *Seja $X \in \mathcal{X}^H$. O retrato de fase em cada esfera é topologicamente equivalente ao sistema restrito à esfera de raio 1. Além disso, X tem uma linha de pontos de equilíbrio passando pela origem*

Demonstração. A prova segue apenas fazendo uma mudança de coordenadas $y = x/\rho$ e, se necessário, uma reparametrização do tempo. $\square$

Segue pelo lema acima que se $X \in \mathcal{X}$ é um campo de vetores homogêneo, a existência de um ponto de equilíbrio em uma das esferas invariantes é transformado, por continuidade, usando uma dilatação. Essa propriedade não é válida para um campo de vetores $X \in \mathcal{X}$ qualquer, nem mesmo quando consideramos apenas sistemas quadráticos na família $\mathcal{X}_2$.

Lema 6.12. *Seja $X \in \mathcal{X}^H$. Então o sistema projetado (6.6) é homogêneo se, e somente se, X é linear.*

Demonstração. Primeiramente estudamos o sistema projetado $X \in \mathcal{X}_1^H$ definido em (6.1). Pelo Lema 6.8 podemos supor que qualquer ponto de equilíbrio pode ser alocado em $(0, \rho, 0)$. Isso implica que $a_1 = a_3 = 0$. Logo, o sistema (6.1) pode ser escrito na forma

$$(X_1, X_2, X_3) = (-a_2 z, 0, a_2 x)$$

e o sistema projetado (6.6) é

$$(Y_1, Y_2) = (-a_2 v, a_2 u), \quad (6.9)$$

que também é linear.

Terminamos a prova exibindo um sistema $X \in \mathcal{X}_2^H$ de modo que o sistema projetado associado a ele não é quadrático homogêneo. Na prova do Teorema 6.2 analisamos o caso geral, aqui exibiremos um sistema particular (6.2) com $a_4 = a_7 = 1$ e $a_5 = a_6 = a_8 = a_9 = 0$. Nesse caso o sistema projetado associado (6.6) é o sistema cúbico

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -4u - 4v - u^3 + u^2v + uv^2 + v^3, \\ \dot{v} &= 4u - u^3 - 2u^2v - uv^2, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. $\square$

6.3.1 Caso linear

Recorde que se $X \in \mathcal{X}_1$, então X pode ser escrito na forma canônica (6.1). No que segue provamos o Teorema 6.1.

Prova do Teorema 6.1. Pelo Lema 6.11 todas as esferas são equivalentes. Logo, podemos restringir o estudo a esfera de raio $\rho = 1$. A prova segue diretamente do Lema 6.12, pois quando o ponto de equilíbrio é isolado, isto é, quando $a_2 \neq 0$, o sistema projetado (6.9) tem um centro na origem, que é o centro canônico.

Note que $H_2(x, y, z) = a_3x - a_2y + a_1z - k$ é uma segunda integral primeira para o campo. Como $H_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ é uma integral primeira para todo campo $X \in \mathcal{X}$, segue que o campo é completamente integrável. Dessa forma, a posição relativa entre planos e esferas nos permite entender, completamente, o retrato de fase de um campo linear $X \in \mathcal{X}_1$. $\square$

6.3.2 Caso quadrático homogêneo

O próximo lema técnico garante que podemos assumir que o ponto de equilíbrio é alocado em $(0, 1, 0)$. Assim trabalhamos apenas com sistemas definidos em $\mathbb{S}_1^2$. Em seguida, demonstramos o Teorema 6.2.

Lema 6.13. *A forma canônica do sistema $X \in \mathcal{X}_2^H$ é a dada em (6.2).*

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{X}_2^H$, isto é, X é um sistema quadrático homogêneo e satisfaz $\langle x, X(x) \rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Isso implica que X pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_4xy - a_5xz - (a_6 + a_7)yz - a_8z^2, \\ \dot{y} &= a_4x^2 + a_{10}xy + a_6xz + a_{11}yz - a_9z^2, \\ \dot{z} &= a_5x^2 + a_7xy + a_8xz + a_{11}y^2 + a_9yz.\end{aligned}$$

Além disso, pelos Lemas 6.8 e 6.10, podemos assumir que $(0, \rho, 0)$ é um ponto de equilíbrio de X na esfera invariante de raio ρ , para isso assumimos $a_{10} = a_{11} = 0$ e obtemos o sistema (6.2). $\square$

Prova do Teorema 6.2. Usando o Lema 6.13, podemos considerar o sistema (6.2) restrito à esfera $\mathbb{S}_1^2$ e o sistema projetado Y associado a ele dado pela equação (6.6), que é escrito na forma,

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -4a_4u - (4a_6 + 4a_7)v - 4a_5uv - 4a_8v^2 - a_4u^3 - (a_6 - a_7)u^2v + (a_4 + 2a_9)uv^2 \\ &\quad + (a_6 + a_7)v^3, \\ \dot{v} &= 4a_7u + 4a_9v + 4a_5u^2 + 4a_8uv - a_7u^3 - (2a_4 + a_9)u^2v - (2a_6 + a_7)uv^2 + a_9v^3.\end{aligned}$$

Vamos restringir nossa atenção ao ponto de equilíbrio de (6.2) que podemos supor estar na origem após a projeção. Esse ponto de equilíbrio será do tipo centro-foco não-degenerado se a matriz jacobiana J associada ao sistema projetado Y tiver traço zero e determinante positivo na origem. É fácil ver que isso ocorre se, e somente se, $a_4 - a_9 = 0$ e $a_6a_7 + a_7^2 - a_9^2 > 0$. Então, assumindo essas hipóteses temos um foco-fraco na origem e, escrevendo $w^2 = a_6a_7 + a_7^2 - a_9^2$, o sistema projetado Y é da forma

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -4a_4u - 4\varrho v - 4a_5uv - 4a_8v^2 - a_4u^3 - (\varrho - 2a_7)u^2v + (a_4 + 2a_9)uv^2 + \varrho v^3, \\ \dot{v} &= 4a_7u + 4a_9v + 4a_5u^2 + 4a_8uv - a_7u^3 - (2a_4 + a_9)u^2v - (2\varrho - a_7)uv^2 + a_9v^3,\end{aligned}\tag{6.10}$$

com $\varrho = (w^2 + a_4 a_9)/a_7$. O traço e o determinante da matriz jacobiana do sistema (6.10) são $-4(a_4 - a_9)$ e $16w^2$, respectivamente. Logo, quando $a_4 \neq a_9$ a origem é um foco hiperbólico do sistema (6.10). Assim, $a_4 - a_9 = 0$ é a primeira condição para termos um foco-fraco na origem. No último caso, como explicamos na Seção 6.2.2, a estabilidade depende do cálculo das constantes de Lyapunov do sistema (6.10). Nesse caso, precisamos calcular apenas a primeira constante,

$$L_1 = \frac{16(a_7^2 + a_9^2 + w^2)C}{3(a_9^2 + w^2)^2},$$

com $C = -a_5^2 a_7 a_9 + a_5 a_7^2 a_8 - a_5 a_8 a_9^2 - a_5 a_8 w^2 + a_7 a_8^2 a_9$. Como $w \neq 0$, a condição $C = 0$ é necessária para ter um centro na origem. Substituindo $w^2 = a_6 a_7 + a_7^2 - a_9^2$ na expressão de C , dada anteriormente, obtemos a expressão do enunciado.

A prova termina mostrando que as condições $a_7 \neq 0$, $a_4 = a_9$ e $C = 0$ garantem que o sistema (6.2) é reversível com respeito a uma reta passando pela origem. Provaremos esse fato mostrando que existe um ângulo φ de modo que a mudança de coordenadas

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (\cos \varphi u - \sin \varphi v, \sin \varphi u + \cos \varphi v) \quad (6.11)$$

transforma o campo de vetores (6.10) em um campo $Y_\varphi(\hat{u}, \hat{v})$ que é reversível com relação ao eixo- $\hat{v}$, isto é, que seu retrato de fase é invariante por reflexões com respeito a esse eixo na direção do tempo. Mais especificamente, o sistema é invariante com respeito a mudança de coordenadas $(\hat{u}, \hat{v}, t) \mapsto (-\hat{u}, \hat{v}, -t)$, onde t é a variável tempo. Como vimos na Seção 2.4 se um sistema é reversível com relação a uma reta, então os pontos de equilíbrio sobre essa reta, se existirem, não são atratores nem repulsores. Essa propriedade somada a monodromia garantirá que temos um centro na origem.

Usando a parametrização racional das funções seno e cosseno,

$$\sin \varphi = \frac{2\tau}{1 + \tau^2} \text{ e } \cos \varphi = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2},$$

o sistema $Y_\varphi(\hat{u}, \hat{v})$ é reversível com relação ao eixo $\hat{v}$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_7(\tau^2 + 1)^2} \left((4 + \hat{u}^2 - 3\hat{v}^2)f_1(\tau)\hat{u} + 4a_7(\tau^2 + 1)f_2(\tau)\hat{u}\hat{v} \right) &\equiv 0, \\ \frac{1}{a_7(\tau^2 + 1)^2} \left((4 - 3\hat{u}^2 + \hat{v}^2)f_1(\tau)\hat{v} + 4a_7(\tau^2 + 1)f_2(\tau)\hat{u}^2 \right) &\equiv 0, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= -a_7 a_9 \tau^4 + 2(a_7^2 - a_9^2 - w^2)\tau^3 + 6a_7 a_9 \tau^2 - 2(a_7^2 - a_9^2 - w^2)\tau - a_7 a_9, \\ f_2(\tau) &= a_5 \tau^2 + 2a_8 \tau - a_5. \end{aligned}$$

Assim, para concluir a prova precisamos checar se os polinômios $f_1(\tau)$ e $f_2(\tau)$ possuem raízes em comum. Para isso, observe que $f_2(\tau)$ é identicamente nula quando $a_5 = a_8 = 0$ e, caso contrário, sempre tem raízes reais simples. Calculando a resultante entre $f_1(\tau)$ e $f_2(\tau)$ com respeito a τ obtemos

$$\text{res}(f_1, f_2, \tau) = 16C^2.$$

Logo, o sistema de equações $\{f_1(\tau) = f_2(\tau) = 0\}$ tem solução apenas quando $C = 0$. Para concluir precisamos provar que ao menos uma das soluções do sistema $\{f_1(\tau) = f_2(\tau) = 0\}$ é real. Se $a_9 \neq 0$, como $a_7 \neq 0$, o sistema tem solução real pois $f_1(0)f_1(1) = -(a_7a_9)^2 < 0$. Se $a_9 = 0$, segue que $C = a_5a_8(a_7^2 - w^2)$ e $f_1(\tau) = 2(a_7^2 - w^2)\tau(\tau^2 - 1)$. Precisamos analisar três casos. Se $a_5 = 0$, então $\tau = 0$ é uma solução real e se $a_8 = 0$, então $\tau = 1$ é uma solução real. Por fim, se $a_7 = \pm w$, então $f_1(\tau) \equiv 0$ e a prova termina pois $f_2(\tau)$ sempre tem raiz real.

Logo, sob as hipóteses enunciadas o sistema $Y_\varphi(\hat{u}, \hat{v})$ é reversível com relação ao eixo $\hat{v}$ e, portanto, a origem é um centro. $\square$

Como vimos nos Lemas 6.8 e 6.11, quando $X \in \mathcal{X}^H$ sempre existe uma linha de pontos de equilíbrio passando pelos pontos $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$. Isso significa que o sistema projetado (6.6) sempre tem um ponto de equilíbrio na origem e outro no infinito, nesse caso.

Observe que se o grau do sistema $X \in \mathcal{X}^H$ é um número ímpar n , então o sistema X é invariante pela mudança de coordenadas $(x, y, z, t) \mapsto (-x, -y, -z, t)$ que leva o ponto $(0, 1, 0)$ em $(0, -1, 0)$. Por outro lado, quando n é um número par, o sistema X é invariante pela mudança de coordenadas $(x, y, z, t) \mapsto (-x, -y, -z, -t)$. Assim, se a origem é um centro do sistema (6.10), o infinito também será um centro que gira na mesma (oposta) direção da origem quando n é ímpar (par, respectivamente). Essa propriedade pode ser vista para campos de vetores lineares no Teorema 6.1 pois o único retrato de fase do sistema projetado é um centro global. Para campos de vetores em $\mathcal{X}_2^H$ os centros do sistemas projetados, localizados na origem e no infinito, dados no Teorema 6.2, giram em direções opostas e podemos ter diferentes retratos de fase, a depender dos coeficientes do campo.

A classificação dos retratos de fase de sistemas planares cúbicos reversíveis que possuem centros na origem e no infinito que giram na mesma direção pode ser encontrada em [12]. Na Figura 6.1 exibimos o retrato de fase da família cúbica (6.12), proveniente da projeção de um sistema $X \in \mathcal{X}_2^H$, estudada na Proposição 6.14. Observe que, como o sistema é reversível com relação ao eixo u então a origem e o infinito são simultaneamente centros que giram em direções opostas. Para alguns coeficientes em particular, essa família também exhibe uma simetria em relação ao eixo v .

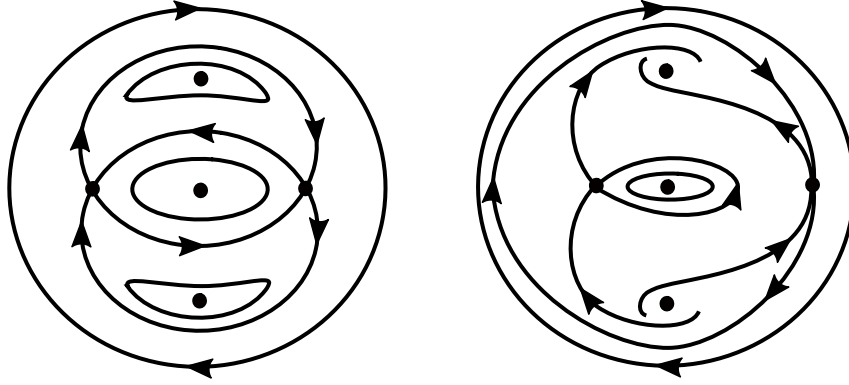


Figura 6.1: Retrato de fase de (6.12) para $a = 0$ (esquerda) e $a > 0$ (direita).

Proposição 6.14. *O sistema*

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -8v - 4auv - u^2v + 2v^3, \\ \dot{v} &= 2u + 4au^2 - \frac{7}{2}uv^2 - \frac{1}{2}u^3,\end{aligned}\tag{6.12}$$

tem, simultaneamente, um centro na origem e outro no infinito para todo a . Esses centros giram em direções opostas e os únicos retratos de fase possíveis para essa família são os exibidos na Figura 6.1.

Demonstração. Note que o sistema (6.12) é obtido de (6.10) fazendo $a_5 = a$, $a_7 = 1/2$, $a_8 = a_9 = 0$, e $w = 1$. Assim, pelo Teorema 6.2, a origem é um centro. Como vimos acima, pela simetria do sistema tridimensional em $\mathbb{R}^3$, o infinito também é um centro que gira na direção oposta ao centro na origem. Podemos assumir que $a > 0$, fazendo a mudança de coordenadas $(u, v) \mapsto (-u, -v)$, se necessário. É fácil ver que o sistema (6.12) é reversível com relação ao eixo- u e quando $a = 0$ ele também é reversível com relação ao eixo- v .

Os pontos de equilíbrio do sistema (6.12) são $(0, 0)$, $A_{\pm} = (4a \pm 2\sqrt{4a^2 + 1}, 0)$ e $B_{\pm} = (0, \pm 2)$. Seja J a matriz jacobiana do sistema (6.12). Concluímos que os pontos de equilíbrio $A_{\pm}$ são selas, pois estão sobre a reta de reversibilidade e o determinante da matriz jacobiana J nesses pontos é $-48(2a\sqrt{4a^2 + 1} \pm 4a^2 \pm 1)^2 < 0$. A matriz J tem determinante positivo nos pontos de equilíbrio $B_{\pm}$ e, portanto, a estabilidade desses pontos é determinada pelo sinal do traço de J , que é $\mp 8a$. Dessa forma, quando $a > 0$, B_+ é atrator e B_- é repulsor. Quando $a = 0$ a reversibilidade com relação ao eixo- v garante que B_+ e B_- são centros. Nesse caso o sistema é integrável, com integral primeira

$$H(u, v) = \frac{u^2 + 4v^2}{(u^2 + v^2 + 4)^2}.$$

Como a derivada de Lie

$$\dot{u} \frac{\partial H}{\partial u} + \dot{v} \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{24au^4v}{(u^2 + v^2 + 4)^2}$$

é sempre positiva (negativa, respectivamente) quando $v > 0$ ($v < 0$, respectivamente), H é uma função de Lyapunov para o sistema (6.12) em $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ ($\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v < 0\}$, respectivamente). Isso implica que se $a \neq 0$, não existe órbita periódica completamente contida nos semi-planos $v > 0$ e $v < 0$. Essa propriedade somada com a simetria dada pela reversibilidade e com o retrato de fase local de cada ponto de equilíbrio nos dá o retrato de fase global descrito na Figura 6.1 para $a = 0$ (esquerda) e $a > 0$ (direita). $\square$

6.4 Centros e ciclicidade para campos de vetores quadráticos

Nesta seção estudaremos os campos de vetores quadráticos descritos em (6.3). Provaremos os Teoremas 6.3 e 6.4, que são os resultados principais deste capítulo. Primeiramente mostraremos alguns resultados de classificação de centros e, em seguida, alguns resultados sobre a ciclicidade desses centros.

O próximo exemplo nos mostra que o comportamento qualitativo do campo $X \in \mathcal{X}_2$ pode ser completamente diferente quando olhamos a sua restrição a esferas de raios distintos. Em particular, o número de pontos de equilíbrio pode depender da esfera invariante que consideramos.

Exemplo 6.15. O sistema quadrático tridimensional

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (-xz - yz - z^2 - z, -z^2, x^2 + xy + xz + yz + x),$$

tem todas as esferas invariantes e seus pontos de equilíbrio são $p_{\pm} = (0, \pm\rho, 0)$ e $\{x + y + 1 = z = 0\}$. Logo, além dos pontos $p_{\pm}$ existem outros dois pontos de equilíbrio nas esferas de raio $\rho > 1/\sqrt{2}$ ou mais um na esfera de raio $\rho = 1/\sqrt{2}$.

O exemplo acima mostra que o número de pontos de equilíbrio decresce de 4 para 2 dependendo da posição relativa da reta $x + y + 1 = z = 0$ e da esfera $\mathbb{S}_{\rho}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$, mais precisamente, quando a reta $x + y + 1 = 0$ intersecta a esfera $\mathbb{S}_{\rho}^2$ temos 4 pontos de equilíbrio sobre $\mathbb{S}_{\rho}^2$, quando a reta tangencia $\mathbb{S}_{\rho}^2$ temos 3 pontos de equilíbrio e quando $\mathbb{S}_{\rho}^2 \cap \{x + y + 1 = z = 0\} = \emptyset$ existem apenas dois pontos de equilíbrio sobre $\mathbb{S}_{\rho}^2$.

Nesta seção estamos interessados na existência de órbitas periódicas e ciclos limite sobre as esferas invariantes. Pelo exemplo anterior, podemos ver que o comportamento do campo de vetores $X \in \mathcal{X}_2$ pode ser completamente diferente quando olhamos a restrição de X a esferas de raio distintos e, por isso, restringimos nosso estudo à esfera de raio $\rho = 1$, $\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2 = 1\}$. Como já vimos anteriormente, podemos supor,

sem perda de generalidade, que $(0, 1, 0)$ é um ponto de equilíbrio de $X \in \mathcal{X}$. Esse fato, força as condições $a_{10} + a_1 = 0$ e $a_3 + a_{11} = 0$ em (6.3), que se escreve como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_1y - a_2z - a_4yx + a_1y^2 - a_5zx + (-a_6 - a_7)zy - a_8z^2, \\ \dot{y} &= a_1x + a_{11}z + a_4x^2 - a_1yx + a_6zx - a_{11}zy - a_9z^2, \\ \dot{z} &= a_2x - a_{11}y + a_5x^2 + a_7yx + a_{11}y^2 + a_8zx + a_9zy.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Note que $(0, -1, 0)$ é um ponto de equilíbrio de (6.13) se, e somente se, $a_1 = a_{11} = 0$. Logo, em contraste com o caso homogêneo, não existe uma reta de pontos de equilíbrio passando pelos pontos $(0, \pm 1, 0)$ para todo $X \in \mathcal{X}_2$.

6.4.1 Caracterização de centros

Para que o ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ seja monodrômico precisamos de algumas condições extras sobre o sistema projetado Y , que é obtido aplicando a transformação dada em (6.6) no sistema (6.13). Denotamos a matriz jacobiana associada ao sistema Y , avaliada na origem, por J . Assim, a origem será uma singularidade monodrômica se, e somente se, o traço de J for nulo e seu determinante positivo. É fácil ver que isso ocorre quando $a_4 = a_9$ e $a_2a_6 + a_6a_7 + 2a_2a_7 + a_2^2 + a_7^2 - a_9^2 > 0$. Devido ao grande número de parâmetros envolvidos nas condições que garantem a monodromia da origem, adicionaremos duas condições extras: $a_9 = 0$ e $a_2 + a_7 = 1$. Nesse caso, o sistema projetado Y terá um foco-fraco na origem se, e somente se, $a_4 = 0$ e $a_6 + 1 > 0$. Além disso, quando o traço de J é zero, J está na forma normal de Jordan. Escrevendo $w^2 = a_6 + 1$, para garantir que o determinante de J seja positivo, quando $w \neq 0$, obtemos o sistema (6.4). Após uma reparametrização do tempo o sistema projetado Y se escreve como

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{a_4}{w}u - v - \frac{a_1}{2}u^2 - \frac{a_5}{w}uv - \frac{a_1 + 2a_8}{2w^2}v^2 - \frac{a_4w}{4}u^3 + \frac{2a_7 - w^2}{4}u^2v \\ &\quad + \frac{a_4}{4w}uv^2 + \frac{w^2 + 2a_7 - 2}{4w^2}v^3 - \frac{a_1w^2}{8}u^4 - \frac{a_{11}w}{4}u^3v - \frac{a_{11}}{4w}uv^3 + \frac{a_1}{8w^2}v^4, \\ \dot{v} &= u + \frac{(2a_5 - a_{11})w}{2}u^2 + a_8uv - \frac{a_{11}}{2w}v^2 - \frac{(2a_7 - 1)w^2}{4}u^3 - \frac{a_4w}{2}u^2v \\ &\quad - \frac{2w^2 + 2a_7 - 3}{4}uv^2 + \frac{w^3a_{11}}{8}u^4 - \frac{w^2a_1}{4}u^3v - \frac{a_1}{4}uv^3 - \frac{a_{11}}{8w}v^4.\end{aligned}\tag{6.14}$$

O próximo resultado mostra que quando fixamos $w = 1$, o problema de centro-foco pode ser completamente resolvido. A prova do caso (a) do Teorema 6.3 segue diretamente da próxima proposição.

Proposição 6.16. *Considere o sistema (6.4) com $w = 1$. Então $(0, 1, 0)$ é um centro se, e somente se, $a_4 = 0$ e $a_1a_5 + a_8a_{11} = 0$.*

Demonstração. Como a propriedade é local, trabalharemos com o sistema projetado (6.14). É fácil ver que se $a_4 \neq 0$ então $(0, 0)$ é um foco hiperbólico, já que esse coe-

ficiente determina o sinal do traço da matriz jacobiana J . Logo, $a_4 = 0$ é a primeira condição de centro para esse caso.

Para obter a próxima condição de centro, utilizamos o algoritmo descrito na Seção 6.2.2 para calcular as constantes de Lyapunov desse campo. Exibimos as três primeiras constantes a seguir

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{2}{3}(a_1a_5 + a_8a_{11}), \\ L_2 &= \frac{1}{15}(a_1a_5 + a_8a_{11})(3a_1^2 - 6a_1a_8 + a_5^2 - 18a_5a_{11} + 51a_{11}^2 - 7a_8^2 - 6a_7), \\ L_3 &= -\frac{1}{630}(a_1a_5 + a_8a_{11})(3a_1^4 - 6a_1^3a_8 + 195a_1^2a_5^2 - 858a_1^2a_5a_{11} - 186a_1^2a_{11}^2 \\ &\quad + 543a_1^2a_8^2 + 478a_1a_5^2a_8 - 832a_1a_5a_8a_{11} - 7182a_1a_8a_{11}^2 + 798a_1a_8^3 - 18a_5^4 \\ &\quad + 242a_5^3a_{11} - 509a_5^2a_{11}^2 + 72a_5^2a_8^2 - 6242a_5a_{11}^3 + 2146a_5a_8a_{11}^2 + 14267a_{11}^4 \\ &\quad - 8041a_8^2a_{11}^2 + 282a_8^4 - 276a_1^2a_7 + 600a_1a_7a_8 - 84a_5^2a_7 + 1752a_5a_7a_{11} \\ &\quad - 6276a_7a_{11}^2 + 516a_7a_8^2 - 108a_1^2 - 324a_1a_8 + 24a_5^2 - 324a_5a_{11} + 540a_{11}^2 \\ &\quad + 144a_7^2 - 168a_8^2 - 72a_7). \end{aligned}$$

Portanto, uma condição necessária para que a origem seja um centro é que $a_1a_5 + a_8a_{11} = 0$.

O próximo passo é provar que essas duas condições garantem que o sistema projetado é reversível com respeito a uma reta que passa pela origem. Faremos isso utilizando a mesma ideia da prova do Teorema 6.2. Para isso, consideramos a transformação (6.11) e a parametrização racional das funções seno e cosseno $\sin \varphi = \frac{2\tau}{1+\tau^2}$ e $\cos \varphi = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$. É fácil ver que, após a transformação (6.11), quando $a_4 = 0$ o campo de vetores é invariante pela transformação $(\hat{u}, \hat{v}, t) \mapsto (-\hat{u}, \hat{v}, -t)$, se, e somente se,

$$\begin{aligned} \hat{u}\hat{v}((\hat{u}^2 + \hat{v}^2)f_1(\tau) - 4f_2(\tau)) &\equiv 0, \\ (\hat{u}^2 + \hat{v}^2)(\hat{u}^2 - \hat{v}^2 - 4)f_1(\tau) - 8f_2(\tau)\hat{u}^2 &\equiv 0, \end{aligned}$$

onde $f_1(\tau) = -a_{11}\tau^2 + 2a_1\tau + a_{11}$ e $f_2(\tau) = a_5\tau^2 + 2a_8\tau - a_5$.

A prova termina pois, quando $a_1a_5 + a_{11}a_8 = 0$, o sistema $\{f_1(\tau), f_2(\tau)\}$ sempre tem solução real, que definirá a reta de reversibilidade. $\square$

A seguir demonstramos os demais itens do Teorema 6.3.

Prova do Teorema 6.3. Como nos casos anteriores, trabalharemos com o sistema projetado (6.14). O objetivo é provar que, sob as hipóteses enunciadas, a origem é um centro para esse sistema. Primeiramente, assumimos $a_4 = 0$ pois, caso contrário, a origem é um foco hiperbólico.

O caso (a) segue diretamente do Teorema 6.16. Os casos (b) e (c) seguem pois, sob essas hipóteses, o sistema (6.14) é reversível com relação aos eixos u e v , respectiva-

mente. Para ver isso, basta considerar as involuções $\phi(u, v) = (u, -v)$ e $\phi(u, v) = (-u, v)$, respectivamente.

O caso (d) segue pois o sistema (6.14) é Darboux-integrável, com a seguinte integral primeira racional

$$H(u, v) = \frac{(a_{11}wu - a_8v - 2a_7 + 1)(w^2u^2 + v^2) - (w^2 - 1)v^2 - 4(a_7 - 1)}{(w^2u^2 + v^2 + 4)^2}.$$

A seguir, finalizamos a prova mostrando que o sistema do caso (e) também é Darboux-integrável, exibindo um fator integrante inverso.

Primeiramente, observamos que o sistema (6.14) tem quatro retas algébricas invariantes. Denotamos por $Y = (Y_1, Y_2)$ o sistema projetado, por $F = au + bv + 1$ as retas invariantes que estamos buscando e por K os respectivos cofatores. Como o sistema projetado Y tem grau 4 os cofatores K serão polinômios de grau no máximo 3. Escrevendo

$$Y_1 \frac{\partial F}{\partial u} + Y_2 \frac{\partial F}{\partial v} = F K,$$

obtemos quatro possíveis pares de valores $(a, b) \neq 0$ que dependem das raízes (que podem ser complexas) do polinômio

$$p_A(Z) = Z^4 + A_3Z^3 + A_2Z^2 + A_1Z + A_0 \quad (6.15)$$

onde $A_0 = \frac{(w^2-1)^2}{16(w^2+1)^2}$, $A_1 = \frac{w^2-1}{2(w^2+1)^2}a_8$, $A_2 = \frac{1}{(w^2-1)^2}a_{11}^2 + \frac{1}{(w^2+1)^2}a_8^2 - \frac{w^2-1}{2(w^2+1)}$ e $A_3 = \frac{-2}{w^2+1}a_8$.

Note que, se z_1 e z_2 são raízes de (6.15) então $z_3 = \frac{1-w^2}{4z_1(w^2+1)}$ e $z_4 = \frac{1-w^2}{4z_2(w^2+1)}$ também são. Logo, temos uma fatoração completa do polinômio $p_A(Z) = \prod_{i=1}^4 (Z - z_i)$. Além disso, como estamos assumindo que todos os coeficientes de (6.14) são reais, então $z_2 = \bar{z}_1$ e $z_4 = \bar{z}_3$.

Assim, escrevendo os coeficientes do sistema (6.14) $a_{11} = \frac{i(z_1-z_2)(w^2-1)(4z_1z_2(w^2+1)+w^2-1)}{8z_1z_2(w^2+1)}$ e $a_8 = \frac{(z_1+z_2)(4z_1z_2(w^2+1)-w^2+1)}{8z_1z_2}$ em termos das raízes z_1 e z_2 , de (6.15), podemos escrever as quatro retas invariantes e seus respectivos cofatores da seguinte forma

$$F_1 = 1 + i z_1 w u + z_1 v,$$

$$F_2 = 1 - i z_2 w u + z_2 v,$$

$$F_3 = 1 - \frac{(w^2 - 1)(v + i w u)}{4(w^2 + 1)z_1},$$

$$F_4 = 1 - \frac{(w^2 - 1)(v - i w u)}{4(w^2 + 1)z_2},$$

e

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{32z_2w(w^2+1)}((-w^3+w)u + i((w^2-1)v - 4z_1(w^2+1))) \\
&\quad w^2(4z_2^2(w^2+1) - w^2+1)u^2 + (4z_2^2(w^2+1) - w^2+1)v^2 + 8z_2w^2v + 8iz_2wu), \\
K_2 &= \frac{1}{32z_1w(w^2+1)}((w^3-w)u + i((w^2-1)v - 4z_2(w^2+1))) \\
&\quad (w^2(-4z_1^2(w^2+1) + w^2-1)u^2 - (4z_1^2(w^2+1) - w^2+1)v^2 - 8z_1w^2v + 8iz_1wu), \\
K_3 &= \frac{(-z_1wu + i(z_1v+1))(w^2-1)}{z_1((-w^3+w)u + i((w^2-1)v - 4z_1(w^2+1)))}K_1, \\
K_4 &= \frac{(z_2wu + i(z_2v+1))(w^2-1)}{z_2((w^3-w)u + i((w^2-1)v - 4z_2(w^2+1)))}K_2.
\end{aligned}$$

A prova termina utilizando a teoria de integrabilidade de Darboux (ver Seção 2.3), que garante que $\prod_{i=1}^4 F_i^{\lambda_i}$ é um fator integrante inverso para o sistema pois

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{4w^2z_1^2 + 2w^2 + 4z_1^2 - 2}{4w^2z_1^2 + w^2 + 4z_1^2 - 1}, & \lambda_2 &= \frac{4w^2z_2^2 + 2w^2 + 4z_2^2 - 2}{4w^2z_2^2 + w^2 + 4z_2^2 - 1}, \\
\lambda_3 &= \frac{8w^2z_1^2 + w^2 + 8z_1^2 - 1}{4w^2z_1^2 + w^2 + 4z_1^2 - 1}, & \lambda_4 &= \frac{8w^2z_2^2 + w^2 + 8z_2^2 - 1}{4w^2z_2^2 + w^2 + 4z_2^2 - 1},
\end{aligned}$$

não são todos nulos e satisfazem

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i K_i = \operatorname{div}(Y_1, Y_2).$$

□

Observação 6.17. Note que a prova do item (e) do Teorema 6.3 é válida quando os coeficientes do sistema (6.3) (ou do sistema projetado (6.14)) são complexos. Nesse caso, não há relação entre as raízes z_1 e z_2 e z_3 e z_4 .

Na proposição seguinte mostramos que se fixarmos alguns valores de w concluímos que não existe outros centros diferentes dos exibidos no Teorema 6.3. Como as expressões que aparecem na prova são extremamente grandes concluímos o resultado apenas para valores fixos de w .

Proposição 6.18. *Considere o sistema (6.3) com $w \in \{1/2, 2, 3\}$. Então, $(0, 1, 0)$ é um centro se, e somente se, $a_4 = 0$ e alguma das condições (b), (c), (d) ou (e) do Teorema 6.3 é satisfeita.*

Demonstração. Pela prova do Teorema 6.3, sabemos que todas as famílias detalhadas no enunciado são centros. Portanto, precisamos checar que essas são as únicas famílias de centros quando $w \in \{1/2, 2, 3\}$. A seguir, apresentamos apenas a prova para $w = 2$, os outros casos são análogos. Computamos um número suficiente de constantes de Lyapunov

para o sistema (6.14) (seis, para esse caso), como fizemos na Proposição 6.16, usando o método explicado na Seção 6.2.2. Denotaremos por

$$\mathcal{S}_L = \{L_1 = L_2 = \cdots = L_6 = 0\}$$

o sistema de equações que precisamos resolver. A primeira constante de Lyapunov se escreve como

$$L_1 = -a_1 \frac{37a_5 - 15a_{11}}{48} + a_8 \frac{15a_5 - 11a_{11}}{24}.$$

Claramente, L_1 se anula quando $a_1 = a_8 = 0$, que é a família (b) do Teorema 6.3 e, portanto, temos centros nesse caso. Então, se necessário, assumimos que a_1 e a_8 não se anulam simultaneamente. A mesma conclusão segue para $a_5 = a_{11} = 0$ (Família (c)). Consequentemente, temos duas possibilidades $a_1 = 15a_5 - 11a_{11} = 0$ ou $a_8 = \frac{a_1(37a_5 - 15a_{11})}{2(15a_5 - 11a_{11})}$.

O primeiro caso segue computando a próxima constante de Lyapunov usando que a_5 e a_8 não se anulam, de outra forma obtemos as famílias já estudadas. De $L_2 = 0$ obtemos

$$a_7 = -\frac{507a_5^2 + 1452a_8^2 + 15367}{13915}$$

e, portanto,

$$L_i = a_5 a_8 \mathcal{L}_i(a_5, a_8),$$

para $i = 3, 4, 5$, com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= \frac{1}{1908389929600} (68228004a_5^4 + 184785513a_5^2a_8^2 - 30394716a_8^4 \\ &\quad - 5448627096a_5^2 - 7769846931a_8^2 - 250664168700), \\ \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{24038471188044544} (1314916911360a_5^6 + 3765797544960a_5^4a_8^2 \\ &\quad - 108564125235500a_5^4 - 169714935832475a_5^2a_8^2 - 3991537309763256a_5^2 \\ &\quad + 948481941316569a_8^2 + 35336997480290484), \\ \mathcal{L}_5 &= -\frac{1}{81871502397230894711906443373681009678107} (225a_5^2 - 363) \\ &\quad (1924917767861968950857260957051155a_5^6 \\ &\quad - 179433213567577705247078403436812234a_5^4 \\ &\quad + 73905495678552235437090058987858838171a_5^2 \\ &\quad + 1077889062980802829040903234824657808392). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{L}_i$ são polinômios de grau 4, 6 e 8, respectivamente. Não obtemos outras famílias de centros nesse caso pois o sistema de equações $\{\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_5 = 0\}$ se reduz a $\{225a_5^2 - 363 = 225a_8^2 + 9408 = 0\}$, que não tem solução real.

Para o segundo caso, assumimos que $a_8 = \frac{a_1(37a_5 - 15a_{11})}{2(15a_5 - 11a_{11})}$ e $15a_5 - 11a_{11} \neq 0$. Sob essas hipóteses temos $L_1 = 0$ e

$$\begin{aligned} L_2 = & \frac{a_1(a_5 + a_{11})}{320(15a_5 - 11a_{11})^3} \left(196(2a_5 - a_{11})(8a_5 - 5a_{11})(42a_5 - 23a_{11})a_1^2 \right. \\ & + (672a_5^3 - 1124a_5^2a_{11} + 624a_5a_{11}^2 - 115a_{11}^3 - 543a_5 + 576a_{11})(15a_5 - 11a_{11})^2 \\ & \left. + 15(106a_5 - 67a_{11})(15a_5 - 11a_{11})^2a_7 \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Quando $106a_5 - 67a_{11} = 0$, o numerador da expressão acima é um fator racional não nulo, que se escreve como $a_1a_5^4(1149184a_1^2 + 33856a_5^2 + 59367025)$ e, portanto, não obtemos nenhuma nova família de centros quando L_2 se anula. Quando $a_5 + a_{11} = 0$ obtemos $a_1 = a_8$ que é a família (d) do Teorema 6.3. Portanto, no que segue, escrevemos a_7 , usando (6.16), como uma função racional de (a_1, a_5, a_{11}) . As próximas constantes de Lyapunov se escrevem como

$$L_i = \frac{a_1(a_5 + a_{11})(3a_5 - 5a_{11})\mathcal{L}_i(a_1, a_5, a_{11})}{(106a_5 - 67a_{11})^{i-1}(15a_5 - 11a_{11})^{2i-1}} \quad (6.17)$$

para $i = 3, 4, 5, 6$, onde $\mathcal{L}_i$ são polinômios com coeficientes racionais de grau $5(i - 1)$ e 50, 120, 235, 406 monômios, respectivamente. Não exibiremos as expressões de $\mathcal{L}_i$, $i = 3, \dots, 6$ por conta do tamanho.

Observe que os fatores comuns das expressões de L_i , com $i = 3, \dots, 6$ dados em (6.17) representam as já citadas famílias dos itens (b), (d) e (e) do Teorema 6.3. Então, finalizamos a prova checando que os demais fatores de $\mathcal{L}_i$ não se anulam simultaneamente nos dando novas famílias de centros. Para isso, calculamos alguns cruzamentos de resultantes entre $\mathcal{L}_i$, com $i = 3, 4, 5, 6$, e provamos que as únicas novas possibilidades de raízes comuns ocorrem para valores complexos.

Primeiramente, removemos o parâmetro a_1 calculando o cruzamento das resultantes com respeito a esse fator, obtendo $R_k = \text{res}(\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_{k+3}, a_1)$, para $k = 1, 2, 3$, que são polinômios em (a_5, a_{11}) de graus 30, 40, e 50, respectivamente, que se decompõem em alguns fatores irredutíveis com potências naturais. Como as multiplicidades não são relevantes para essa análise podemos desconsiderá-las, definindo $\hat{R}_k$ com os mesmos fatores que R_k , mas todos com multiplicidade um. Não exibiremos $\hat{R}_k$, $k = 1, 2, 3$, por conta do tamanho desses polinômios. O fator comum entre $\hat{R}_k$, $k = 1, 2, 3$, é

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_b = & (1200a_5^2 - 1110a_5a_{11} + 225a_{11}^2 - 169)(2a_5 - a_{11})(11a_5 - 9a_{11}) \\ & (8a_5 - 5a_{11})(5a_5 + a_{11})(15a_5 - 11a_{11})(106a_5 - 67a_{11}). \end{aligned}$$

A análise de cada fator em $\hat{\mathcal{L}}_b$ segue como detalhada anteriormente para $15a_5 - 11a_{11} = 0$ ou $106a_5 - 67a_{11} = 0$. Quando $2a_5 - a_{11} = 0$, $11a_5 - 9a_{11} = 0$, $8a_5 - 5a_{11} = 0$ ou $5a_5 + a_{11} = 0$, sempre obtemos a família (c) do Teorema 6.3. A seguir detalharemos a análise da condição $1200a_5^2 - 1110a_5a_{11} + 225a_{11}^2 - 169 = 0$. Assumindo $1200a_5^2 -$

$1110a_5a_{11} + 225a_{11}^2 - 169 = 0$, as novas possíveis soluções reais do sistema $\mathcal{S}_L$ devem satisfazer $a_1^2 = (\pm 19712a_5\sqrt{a_5^2 + 1} - 20288a_5^2 - 7744)/225$ e $a_{11} = (37a_5 \pm 13\sqrt{a_5^2 + 1})/15$, mas como $\pm 19712a_5\sqrt{a_5^2 + 1} - 20288a_5^2 - 7744 \leq 0$ para cada a_5 e estamos assumindo $a_1 \neq 0$ não há novas família de centros nesse caso.

Portanto, assumimos $\hat{\mathcal{L}}_b \neq 0$ e fazemos $\tilde{R}_i = \hat{R}_i/\hat{\mathcal{L}}_b$. Fazendo um novo cruzamento de resultantes, removemos o parâmetro a_5 , escrevendo $R_{12} = \text{res}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, a_5)$ e $R_{13} = \text{res}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_3, a_5)$ com isso obtemos dois polinômios em a_{11} de graus 353 e 479, respectivamente. Como antes, definimos $\hat{R}_{12}$ e $\hat{R}_{13}$ deixando apenas um fator, se houver multiplicidade maior que um, após a fatoração irredutível. Aqui, o fator comum é

$$\hat{\mathcal{L}}_c = a_{11}(10443a_{11}^2 + 6875)(48a_{11}^2 + 1331)(1375a_{11}^2 - 81)(5125a_{11}^2 - 507)(15a_{11}^2 - 1).$$

Como $a_{11} = 0$ é a única possibilidade de solução real do sistema $\mathcal{S}_L$, que nos dá, novamente, a Família (c) do Teorema 6.3, assumimos que $\hat{\mathcal{L}}_c \neq 0$.

A prova termina pois a última resultante $R_{123} = \text{res}(\hat{R}_{12}/\hat{\mathcal{L}}_c, \hat{R}_{13}/\hat{\mathcal{L}}_c, a_{11})$ é um número racional não nulo. O que garante que não há mais raízes de $\mathcal{S}_L$ a serem analisadas. $\square$

Tentando concluir o caso geral, ou seja, provar que sem fixar w as únicas famílias de centros são aquelas descritas no Teorema 6.3, seguimos o mesmo esquema que na prova anterior, mas adicionando a próxima constante de Lyapunov, L_7 , de (6.6). Os primeiros passos seguem facilmente. De $L_1 = 0$ e $L_2 = 0$, escrevemos a_8 e a_7 como funções racionais de (a_1, a_5, a_{11}, w) e definimos as funções $\mathcal{L}_i(a_1, a_5, a_{11}, w)$, depois de remover todos os fatores comuns como em (6.17). As primeiras resultantes, $R_k = \text{res}(\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_{k+3}, a_1)$, para $k = 1, \dots, 4$, são polinômios com coeficientes racionais em (a_5, a_{11}, w) de graus 119, 163, 207, e 251, e os próximos cruzamentos de resultantes $R_{1k} = \text{res}(\tilde{R}_1, \tilde{R}_k, a_5)$, para $k = 2, 3, 4$ são polinômios de graus 2.454, 3.438, e 4.422, respectivamente, em (a_{11}, w) . Infelizmente, não podemos concluir a prova do caso geral, pois não conseguimos obter os seguintes cruzamentos de resultantes (removendo a_{11}) R_{123} , R_{124} e o último (removendo w) R_{1234} , por causa do enorme custo computacional para fazer todos esses cálculos. Por conta do tamanho dos polinômios citados, não os exibiremos.

6.4.2 Bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude

Como em muitos problemas envolvendo bifurcação de Hopf, a ciclicidade de centros é usualmente menor que a ciclicidade de alguns sistemas especiais que possuem um foco-fraco de ordem alta. Este também é o caso na família $\mathcal{X}_2$. O Teorema 6.4 nos dá um foco-fraco de ordem 4, que é mais alta que a ciclicidade das famílias de centros estudadas no Teorema 6.3, onde a maior ciclicidade local foi encontrada na família (e). As outras famílias de centro possuem ciclicidade mais baixa.

Proposição 6.19. *Considere o sistema (6.4) satisfazendo as condições (e) do Teorema 6.3. Então, existe uma pequena perturbação em $\mathcal{X}_2$ de modo que pelo menos 3 ciclos limite de pequena amplitude bifurcam do ponto equilíbrio $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$.*

Demonstração. Consideramos os coeficientes $(a_1, a_5, a_7, a_8, a_{11}, w)$ satisfazendo o Teorema 6.3.(e) e a perturbação

$$(a_1, a_5, a_7, a_8, a_{11}, w) = (a_1 + \varepsilon_1, a_5 + \varepsilon_2, a_7 + \varepsilon_3, a_8 + \varepsilon_4, a_{11} + \varepsilon_5, w + \varepsilon_6)$$

no sistema projetado (6.14). Denotamos $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$, e as constantes de Lyapunov do sistema perturbado por $L_i(\varepsilon)$. Essas constantes foram calculadas utilizando o método explicado na Seção 6.2.2.

Como a origem é um centro para o sistema não perturbado então $L_i(0) = 0$, para todo i . Escrevendo

$$L_i(\varepsilon) = L_i^{[1]}(\varepsilon) + \mathcal{O}_2(\varepsilon),$$

a prova termina pois a parte linear das primeiras três constantes de Lyapunov tem rank 3 com respeito à ε . Assim, adicionando o parâmetro do traço e usando o Teorema (6.9), ou o Teorema da Função Implícita, obtemos 3 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando da origem. $\square$

Observação 6.20. Observamos que não obtemos mais ciclos limite com o estudo de ordem 1 das constantes de Lyapunov pois o rank não aumenta quando consideramos mais constantes. Além disso, o estudo de ordem superior também não nos garante a existência de mais ciclos limite de pequena amplitude.

Antes de demonstrarmos o Teorema 6.4 observamos que o sistema (6.5) é obtido de (6.4) fazendo $a_1 = -2\alpha, a_4 = 0, a_5 = 1, a_7 = 29/20, a_8 = \alpha, a_{11} = 2$ e $w = 2$.

Prova do Teorema 6.4. Como nas demonstrações anteriores, trabalharemos com o sistema projetado (6.14) obtido do sistema tridimensional com esferas invariantes (6.5). Fazendo o cálculo das constantes de Lyapunov, utilizando o método exposto na Seção 6.2.2, obtemos

$$\begin{aligned} L_1 &= 0, \\ L_2 &= 0, \\ L_3 &= \frac{248832\alpha(488\alpha^2 - 857)}{5}, \\ L_4 &= \frac{-5971968\alpha(361920\alpha^4 + 513328\alpha^2 - 3529237)}{5}. \end{aligned}$$

Note que $L_3 = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pm\sqrt{857/488}$. Se $\alpha = 0$, temos um centro pois estamos nas hipóteses da Família (b) do Teorema 6.3. Se $\alpha = \pm\sqrt{857/488}$, como $L_4 = 6717957338234880\alpha/3721 \neq 0$, a origem é um foco-fraco de ordem 4. Caso

contrário, temos um foco-fraco de ordem 3 na origem. Agora, considere a perturbação parcial $a_1 = -2\alpha + \varepsilon_1$, $a_7 = 29/20 + \varepsilon_2$, e $a_8 = \alpha + \varepsilon_3$. Os outros parâmetros permanecem inalterados. Computando os primeiros termos da série de Taylor das constantes de Lyapunov escrevemos $L_i(\varepsilon) = L_i^{[1]}(\varepsilon) + \mathcal{O}_2(\varepsilon)$, onde $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_3)$, e

$$\begin{aligned} L_1^{[1]}(\varepsilon) &= -7\varepsilon_1 - 14\varepsilon_3, \\ L_2^{[1]}(\varepsilon) &= \frac{48}{5}(2920\alpha^2 + 3809)\varepsilon_1 - 51840\alpha\varepsilon_2 + \frac{24}{5}(2920\alpha^2 + 3809)\varepsilon_3, \\ L_3^{[1]}(\varepsilon) &= \frac{248832}{5}\alpha(488\alpha^2 - 857) - \frac{72}{5}(3886080\alpha^4 - 1845344\alpha^2 - 380679)\varepsilon_1 \\ &\quad + 62208\alpha(2272\alpha^2 + 1909)\varepsilon_2 - \frac{36}{5}(3886080\alpha^4 + 3214240\alpha^2 - 3342471)\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Se $\alpha = \pm\sqrt{857/488}$ já vimos que $L_3^{[1]}(0) = 0$. Logo, como a matriz 3×3 formada pelos coeficientes de $(L_1^{[1]}, L_2^{[1]}, L_3^{[1]})$ com respeito a $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ tem rank 3 obtemos, usando o Teorema da Função Implícita e adicionando o parâmetro do traço, 4 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando da origem do sistema (6.5). A prova termina considerando $\varepsilon_3 = 0$ e checando que a matriz formada pelos coeficientes de $(L_1^{[1]}, L_2^{[1]})$ com respeito a $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tem rank 2. Assim, com o mesmo argumento do caso anterior, concluímos que existem 3 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando da origem do sistema (6.5) quando $\alpha \notin \{0, \pm\sqrt{857/488}\}$. $\square$

6.4.3 Ciclicidade em campos de vetores complexos

Em geral, estudamos a ciclicidade de campos de vetores com coeficientes no corpo dos reais. Porém, como isso pode ser estudado a partir dos zeros de um polinômio, também podemos abordar o mesmo problema para campos de vetores com coeficientes complexos ou, até mesmo, para soluções complexas das constantes de Lyapunov. Contudo, soluções complexas não nos dão focos-fracos ou centros. Note que, a existência de soluções complexas aumenta a dificuldade do problema de classificação de centros e, algumas vezes, esses fatores complexos exigem que calculemos mais constantes de Lyapunov para conseguirmos resolver o problema. Observamos que em quase todas as provas das seções anteriores, existem soluções complexas cujas ordens dos respectivos “focos-fracos” são maiores do que as associadas às soluções reais. Por isso é tão importante checar se as soluções são reais nos teoremas de centro e/ou ciclicidade. Além disso, os desdobramentos desses “focos-fracos” podem ter zeros simples que chamaremos de *ciclos limite complexos* em paralelo a nomenclatura utilizada para soluções reais. Enfatizamos que os ciclos limite complexos não tem a mesma interpretação geométrica dos reais. O objetivo do último resultado é descrever este fenômeno em nosso problema mostrando porque um estudo cuidadoso é muito importante para distinguir a existência ou não de centros (reais), como foi feito na Proposição 6.18, ou qual é a ordem (real) mais alta de foco-fraco. Em particular,

mostramos a existência de seis ciclos limite (complexos) em uma vizinhança da origem para a família (e) no Teorema 6.3 em vez dos três que aparecem quando consideramos o problema no corpo dos reais, na Proposição 6.19. Note que não encontramos mais nenhum ponto na variedade central correspondente com mais de 3 ciclos limite (reais). Na verdade, os três ciclos limite aparecem genericamente até uma análise de primeira ordem. Aqui, ao invés de estudar uma ordem superior, usamos a técnica detalhada em [24] que explica que a ciclicidade local muda quando movemos os coeficientes dentro da variedade central. Esta técnica nos permite aumentar o número de ciclos limite (complexos), mas não os reais.

Proposição 6.21. *Considere o sistema (6.4) com $a_1 = \frac{w^2 - 1}{w^2 + 1}a_8, a_5 = \frac{w^2 + 1}{w^2 - 1}a_{11}$ e $a_7 = \frac{1}{w^2 + 1} - \frac{1}{(w^2 + 1)}a_8^2 - \frac{w^2 + 1}{(w^2 - 1)^2}a_{11}^2$ para todo (a_8, a_{11}, w) fixos e tais que $w^2 \neq 1$, e $a_8a_{11} \neq 0$. Então, $p = (0, 1, 0)$ é um centro e existem $(\hat{a}_8, \hat{a}_{11}, \hat{w}) \in \mathbb{C}^3$ e perturbações complexas na classe $\mathcal{X}_2$ de modo que pelo menos 6 ciclos limite complexos de pequena amplitude bifurcam de p .*

Demonstração. A propriedade de centro segue diretamente do item (e) do Teorema 6.3, pois a prova não muda se considerarmos os coeficientes do campo complexos.

Nessa demonstração, trabalharemos com o sistema projetado (perturbado) (6.14) que corresponde ao sistema (6.4) com coeficientes $(a_1 + \varepsilon_1, a_5 + \varepsilon_2, a_7 + \varepsilon_3, a_8 + \varepsilon_4, a_{11} + \varepsilon_5, w + \varepsilon_6)$ ao invés de $(a_1, a_5, a_7, a_8, a_{11}, w)$. Calculamos as primeiras 6 constantes de Lyapunov de (6.14) utilizando o método explicado na Seção 6.2.2. Fazendo $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)$, escrevemos

$$L_k(\varepsilon) = L_k^{[1]}(\varepsilon) + \mathcal{O}_2(\varepsilon),$$

com $k = 1, \dots, 6$, onde a $L_k^{[1]}(\varepsilon)$ denota a primeira ordem da série de Taylor das constantes de Lyapunov.

A propriedade de centro garante que $L_k(0) = L_k^{[1]}(0) = 0$ para todo k . Além disso, a matriz 3×6 gerada pelos coeficientes de $(L_1^{[1]}(\varepsilon), L_2^{[1]}(\varepsilon), L_3^{[1]}(\varepsilon))$ com respeito a ε tem rank 3 assim como a matriz 6×6 obtida utilizando a parte linear das 6 primeiras constantes de Lyapunov. Logo, adicionando o parâmetro do traço, o estudo de primeira ordem garante a existência de 3 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando de p em $\mathbb{S}_1^2$, usando o Teorema 6.9.

Daqui em diante usaremos o Teorema da Função Implícita de uma maneira diferente da usual para provar a afirmação feita no enunciado. Seguiremos de perto os passos desenvolvidos em [24].

Considerando apenas as primeiras duas, ao invés de três, constantes de Lyapunov, fazemos uma mudança de coordenadas analíticas no espaço de parâmetros. A mudança leva $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ em (u_1, u_2) de modo que $L_1 = u_1$ e $L_2 = u_2$. Nas novas coordenadas, assumimos $u_1 = u_2 = 0$ para continuarmos a análise. Note que, como consideramos apenas os

termos de primeira ordem, assumir $u_1 = u_2 = 0$ é equivalente a obter $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ a partir de $\{L_1^{[1]} = L_2^{[1]} = 0\}$. Assim, escrevemos

$$L_k^{[1]} = \frac{a_8 a_{11} M_k(a_8, a_{11}, w)}{w^{4k-7}(w^2 + 1)^{2k-3}(w^2 - 1)^{2k-2} N(a_8, a_{11}, w)} U_3(a_8, a_{11}, w, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6),$$

para $k = 3, \dots, 6$, onde

$$\begin{aligned} U_3 &= -(w^2 + 1)^2(w^2 - 1)^3 \varepsilon_3 - 2a_8(w^2 + 1)(w^2 - 1)^3 \varepsilon_4 - 2a_{11}(w^2 - 1)(w^2 + 1)^3 \varepsilon_5 \\ &\quad + 2w((w^2 + 3)(w^2 + 1)^2 a_{11}^2 + (w^2 - 1)^3 a_8^2 - (w^2 - 1)^3) \varepsilon_6, \\ N &= (2(6w^6 + 25w^4 + 20w^2 + 5))(w^2 - 1)^3 a_8^2 + 2w^2(10w^8 + 49w^6 + 81w^4 + 43w^2 \\ &\quad + 9)(w^2 + 1)^2 a_{11}^2 - 3w^2(w^2 - 1)^3(w^2 + 1)^4 \end{aligned}$$

e M_k são polinômios com coeficientes racionais de grau 30, 46, 62, 78 com 74, 185, 369, 640 monômios, respectivamente. A seguir mostramos apenas M_3 , por causa do tamanho.

$$\begin{aligned} M_3 &= -(3w^{12} + 30w^{10} - 51w^8 + 420w^6 + 749w^4 + 350w^2 + 35)(w^2 + 1)^4 a_8^4 \\ &\quad - (35w^{16} + 350w^{14} + 752w^{12} + 450w^{10} - 102w^8 + 450w^6 + 752w^4 + 350w^2 \\ &\quad + 35)(w^4 - 1)^2 a_8^2 a_{11}^2 - w^4(35w^{12} + 350w^{10} + 749w^8 + 420w^6 - 51w^4 \\ &\quad + 30w^2 + 3)(w^2 + 1)^4 a_{11}^4 - (6w^{16} + 60w^{14} - 3w^{12} + 390w^{10} + 1799w^8 \\ &\quad + 2240w^6 + 1267w^4 + 350w^2 + 35)(w^2 - 1)^4 a_8^2 - w^4(35w^{16} + 350w^{14} \\ &\quad + 1267w^{12} + 2240w^{10} + 1799w^8 + 390w^6 - 3w^4 + 60w^2 + 6)(w^4 - 1)^2 a_{11}^2 \\ &\quad - 3w^4(w^4 + 8w^2 + 1)(w^2 + 1)^4(w^2 - 1)^6. \end{aligned}$$

Como $a_8 a_{11} \neq 0$ e $w^2 \neq 1$, podemos fazer $\varepsilon_3 = u_3$ isolando ε_3 a partir da equação $u_3 = U_3$. Claramente, quando M_3 é diferente de zero a matriz obtida pela parte linear das constantes de Lyapunov tem rank 3 e, portanto, não obtemos nenhum novo ciclo limite de pequena amplitude, até primeira ordem, pois a condição de centro garante que L_k se anula quando $L_3 = 0$.

Para terminar a prova precisamos checar que existem valores $\eta = (\hat{a}_8, \hat{a}_{11}, \hat{w}) \in \mathbb{C}^3$ de modo que $M_3(\eta) = M_4(\eta) = M_5(\eta) = 0$, $M_6(\eta) \neq 0$, $N(\eta) \neq 0$, e que o determinante da matriz jacobiana $\mathcal{J}$, de (M_3, M_4, M_5) não se anula em η . Desse modo, para cada solução transversal η existe uma vizinhança suficientemente pequena onde o Teorema da Função Implícita nos permite escrever, para $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$,

$$L_k = \hat{v}_k u_3 + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{L}_{k,i}(\hat{v}_3, \hat{v}_4, \hat{v}_5) u_3^i, \text{ com } k = 3, 4, 5,$$

e

$$L_6 = \tilde{v}_6 u_3 + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{L}_{6,i}(\hat{v}_3, \hat{v}_4, \hat{v}_5) u_3^i,$$

com $\tilde{v}_6 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\tilde{L}_{k,i}$ funções analíticas.

Utilizamos o Teorema da Função Implícita novamente no próximo passo, dividindo cada equação por u_3 , escrevemos $L_k = v_k u_3$ para $k = 3, 4, 5$. Finalmente, para u_3 suficientemente pequeno, temos um foco-fraco (complexo) de ordem 6 de onde bifurcam 6 ciclos limite complexos de pequena amplitude. Devemos usar o parâmetro do traço junto com u_1, u_2 para ter um desdobramento versal.

Finalizamos a demonstração mostrando que existe $\eta = (\hat{a}_8, \hat{a}_{11}, \hat{w}) \in \mathbb{C}^3$ de modo que $M_3(\eta) = M_4(\eta) = M_5(\eta) = 0$, $M_6(\eta) \neq 0$, $N(\eta) \neq 0$, e que a intersecção dessas variedades é transversal. Seguindo o esquema detalhado na prova da Proposição 6.18, calculamos o cruzamento das resultantes $R_4 = \text{res}(M_3, M_4, a_8)$ e $R_5 = \text{res}(M_3, M_5, a_8)$ e removendo os fatores comuns, obtemos que um dos fatores de $R_{45} = \text{res}(\hat{R}_4, \hat{R}_5, a_{11})$ é o polinômio

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(w) = & 2358125w^{36} + 21253750w^{34} + 74700325w^{32} + 418209680w^{30} \\ & + 2696915172w^{28} + 11471299432w^{26} + 32469933620w^{24} \\ & + 65296240368w^{22} + 97631971158w^{20} + 111336439620w^{18} \\ & + 97631971158w^{16} + 65296240368w^{14} + 32469933620w^{12} \\ & + 11471299432w^{10} + 2696915172w^8 + 418209680w^6 \\ & + 74700325w^4 + 21253750w^2 + 2358125, \end{aligned}$$

que tem grau 18 em w^2 e, portanto, não tem raízes reais. Além disso, as soluções de

$$\{M_3(a_8, a_{11}, w) = M_4(a_8, a_{11}, w) = M_5(a_8, a_{11}, w) = \mathfrak{r}(w) = 0\}$$

podem ser escritas como $\eta = (\hat{a}_8, \hat{a}_{11}, \hat{w}) = (\gamma/393216, \beta/393216, \alpha)$ com $\mathfrak{r}(\alpha) = 0$ e

$$\begin{aligned} \gamma^2 = & (-2109840270437897288946799375\alpha^{34} - 17713873005809414028007091875\alpha^{32} \\ & - 55845814488941782868405995600\alpha^{30} - 339226787759422100359736546240\alpha^{28} \\ & - 2202132815857798644636420812396\alpha^{26} - 8895632031878776983832830622252\alpha^{24} \\ & - 23501844430016397280367284455712\alpha^{22} - 43681378432973931255571646316816\alpha^{20} \\ & - 59799471686092166179474533669890\alpha^{18} - 61675400652851000448826407685450\alpha^{16} \\ & - 47993652204362508680940846437904\alpha^{14} - 27604081780746071222684026969568\alpha^{12} \\ & - 11207519567177779180170267397628\alpha^{10} - 2966440603081008995602043288284\alpha^8 \\ & - 468074157329937609377913199360\alpha^6 - 66069795390963180008678824400\alpha^4 \\ & - 24129993592921092989446394375\alpha^2 - 3181668269212383369855156875) \\ & /9396192821225170, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta^2 = & (40248036412021566334043770625\alpha^{34} + 348148658927405932769817170625\alpha^{32} \\ & + 1139390577520977495682159181200\alpha^{30} + 6652155763250716876027785442080\alpha^{28} \\ & + 43419594803251066283846291084532\alpha^{26} + 178700034808562373265475821347460\alpha^{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 480531845343567179492990058264000\alpha^{22} + 906984466960916743690778969263248\alpha^{20} \\
& + 1258033583163550539675725186999550\alpha^{18} + 1313015179221532924371751690040910\alpha^{16} \\
& + 1033425110388324368012929243720848\alpha^{14} + 601374377745001674638591851302720\alpha^{12} \\
& + 247291049686230857389940010207140\alpha^{10} + 66539552467687537839070855101012\alpha^8 \\
& + 10700521536131995853057121609120\alpha^6 + 1483387556836472011860839676560\alpha^4 \\
& + 538998995971563271556998588905\alpha^2 + 69737060750810475560536625305) \\
& /32886674874288095.
\end{aligned}$$

Usando as relações acima, podemos verificar que para cada raiz α do polinômio $\mathbf{r}$ temos que $M_3(\eta)$, $M_4(\eta)$, e $M_5(\eta)$ se anulam enquanto $M_6(\eta) = \mathbf{r}_1(\alpha)$, $N(\eta) = \mathbf{r}_2(\alpha)$, e $\mathcal{J}(\eta) = \alpha\beta\gamma\mathbf{r}_3(\alpha)$ não, já que para $i = 1, 2, 3$, os polinômios $\mathbf{r}_i(\alpha)$ tem grau 17 em α^2 com coeficientes racionais e resultante não nula com o polinômio $\mathbf{r}$.

Com isso concluímos que existem 6 ciclos limite complexos de pequena amplitude bifurcando de p em $\mathbb{S}_1^2$. $\square$

Observamos que, na prova acima, os coeficientes de M_3 com respeito a (a_8, a_{11}) são negativos para todo $w \in \mathbb{R}$, então o mecanismo de bifurcação descrito não fornece mais do que os três ciclos limite reais da Proposição 6.19.

7 Centros e ciclicidade para campos de vetores suaves por partes lineares e quadráticos definidos em esferas invariantes

7.1 Introdução

Neste capítulo consideramos campos de vetores suaves por partes 3-dimensionais com descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, isto é

$$Y(x, y, z) = \begin{cases} X^+(x, y, z), & z \geq 0, \\ X^-(x, y, z), & z \leq 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Como nos capítulos precedentes, seguimos as convenções de Filippov, introduzidas em [21], na região de descontinuidade Σ , onde Y pode ser bi-valorado.

Como anteriormente, denotamos por $\mathcal{X}$ a classe dos campos de vetores suaves $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que admitem $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ como integral primeira, munido da topologia C^r . Isso significa que todas as esferas centradas na origem com raio ρ , $\mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$, são invariantes pelo fluxo de X . Denotamos por $\mathcal{X}_n$ quando os componentes de $X \in \mathcal{X}$ são polinômios de grau n . Consideramos também a classe dos campos de vetores suaves por partes definidos por (7.1) tais que $X^+, X^- \in \mathcal{X}$. Denotamos essa classe por $\mathfrak{X}$ e por $\mathfrak{X}_n$ quando $X^+, X^- \in \mathcal{X}_n$. Portanto, se $Y \in \mathfrak{X}$ então qualquer esfera centrada na origem é invariante pelo fluxo do sistema suave por partes Y . Munimos $\mathfrak{X}$ com a topologia produto de classe C^r , como usual.

Primeiro consideramos o caso linear. Seja $X \in \mathcal{X}_1$. Então, como vimos no Capítulo 6, X é homogêneo e pode ser escrito na forma (6.1). Portanto, todo $Y = (X^+, X^-) \in \mathfrak{X}_1$ é

um campo de vetores suave por partes 3-dimensional na forma

$$Y(x, y, z) = \begin{cases} X^+(x; a_1^+, a_2^+, a_3^+), & z \geq 0, \\ X^-(x; a_1^-, a_2^-, a_3^-), & z \leq 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

com

$$X^\pm(x; a_1^\pm, a_2^\pm, a_3^\pm) = (-a_1^\pm y - a_2^\pm z, a_1^\pm x - a_3^\pm z, a_2^\pm x + a_3^\pm y), \quad (7.3)$$

onde, $x = (x, y, z)$. O primeiro resultado é o seguinte.

Teorema 7.1. *Nenhum campo de vetores suave por partes $Y \in \mathfrak{X}_1$, dado por (7.2), admite ciclos limite na esfera $\mathbb{S}_\rho^2$.*

Provamos o Teorema 7.1 na Seção 7.3. Também estudamos campos de vetores lineares por partes com outras superfícies invariantes para mostrar como o comportamento do campo de vetores (7.1), com $X^\pm$ linear, pode ser completamente diferente quando mudamos as superfícies que são invariantes pelo fluxo de $X^\pm$. Em particular, na Seção 7.3.2 mostramos que com hiperboloides invariantes podemos ter selas como pontos de equilíbrio.

Inspirados pela propriedade de homogeneidade dos campos de vetores lineares em $\mathfrak{X}$, estudamos e fornecemos algumas famílias de centros para campos de vetores suaves por partes quadráticos homogêneos e contínuos. Essas famílias são exibidas na Seção 7.4. Também mostramos um sistema em $\mathfrak{X}_2^H$ com um foco-fraco de segunda ordem no ponto $(0, \rho, 0)$ a partir do qual 2 ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude bifurcam em $\mathbb{S}_1^2$ com uma perturbação em $\mathfrak{X}_2^H$, mostrando uma diferença importante entre campos de vetores suaves por partes lineares e quadráticos homogêneos em $\mathfrak{X}$. Também há uma diferença quando comparamos campos de vetores suaves por partes quadráticos homogêneos definidos na esfera $\mathbb{S}_1^2$ e em $\mathbb{R}^2$. Para ver essa diferença, lembre-se de que qualquer campo de vetores quadrático homogêneo definido em $\mathbb{R}^2$ é reversível em relação à origem e, por isso, não possui um ponto de equilíbrio do tipo centro (ver [5]). Portanto, não podemos considerar o mesmo problema para campos de vetores suaves por partes quadráticos homogêneos no plano.

Por fim, também analisamos a ciclicidade local dos pontos de equilíbrio do tipo centro em $\mathcal{X}_2$, estudando bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude de centros e de um foco-fraco em $\mathbb{S}_1^2$ com perturbações suave por partes em $\mathfrak{X}_2$. O próximo resultado fornece o maior número de ciclos limite em torno de um ponto de equilíbrio monodrômico na família quadrática $\mathfrak{X}_2$ que encontramos.

Teorema 7.2. *Existe ao menos 10 ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude na família quadrática $\mathfrak{X}_2$ em $\mathbb{S}_1^2$.*

O resultado acima fornece uma boa cota inferior de ciclos limite bifurcando de um centro suave com perturbação suave por partes em relação ao número de parâmetros livres que temos, que são 14.

Observação 7.3. *Neste capítulo utilizaremos o termo ciclo limite costurante ou órbita periódica costurante, ao invés de poli-trajetória do tipo I, por ser mais utilizado na literatura, quando se trata de bifurcações a partir de um ponto de equilíbrio monodrômico. Além disso, nos teoremas de bifurcações, lidaremos apenas com esse tipo de trajetória fechada.*

Observação 7.4. *Este capítulo é baseado em [9]. Para manter a notação deste trabalho, há algumas divergências entre a notação do capítulo e da referência citada.*

7.2 Preliminares

Nesta seção, relembremos alguns conceitos clássicos e técnicas de bifurcação que serão usadas nas provas dos resultados do capítulo. Como o problema do centro-foco e a ciclicidade local serão estudados projetando cada campo de vetores 2-dimensional definido nas esferas invariantes em um plano, lembramos algumas definições usuais e o algoritmo utilizado no cálculo das constantes de Lyapunov para campos de vetores suaves por partes planares, que é uma extensão do algoritmo apresentado na Seção 6.2.2.

7.2.1 Mudança de coordenadas ortogonais e projeção estereográfica.

Como vimos na Seção 6.2.1, uma mudança de coordenadas é ortogonal quando a matriz dela é ortogonal, ou seja, se M for esta matriz ela deve satisfazer $M^t = M^{-1}$. Pelos Lemas 6.7 e 6.8, este tipo de mudança de coordenadas mantém todas as esferas invariantes e com isso podemos assumir que o ponto de equilíbrio de um campo de vetores suave, que sempre existe em cada esfera invariante $\mathbb{S}_\rho^2$, pode estar localizado em qualquer ponto (x_0, y_0, z_0) que escolhermos. Observe que, quando consideramos campos de vetores suaves por partes em esferas invariantes, este tipo de mudança de coordenadas (em toda a esfera) nos permite assumir que algum ponto de equilíbrio do campo de vetores de Filippov ou algum ponto de dobra pode ser localizado em qualquer ponto $(x_0, y_0, 0) \in \Sigma$.

Assim como no Capítulo 6, utilizaremos projeções estereográficas com respeito ao ponto $(0, -\rho, 0)$ para estudar comportamentos locais. Isso nos permite considerar campos de vetores planares ao invés de 3-dimensionais restritos a esferas. A seguir, definimos o campo de vetores suave por partes projetado. Seja $\mathbf{p} : \mathbb{S}_\rho^2 \setminus \{(0, -\rho, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica no plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \rho\}$ dada por $\mathbf{p}(x, y, z) = 2\rho(x, z)/(y + \rho)$. Como na Seção 6.2, definimos o campo de vetores projetado associado a $X \in \mathcal{X}$ por

$$\mathcal{P}_X(u) = d\mathbf{p}_{\mathbf{p}^{-1}(u)} \circ X \circ \mathbf{p}^{-1}(u),$$

onde $X = X|_{\mathbb{S}_\rho^2}$, $u = (u, v)$ e $\mathbf{p}(x) = u$. Note que esta projeção estereográfica leva o conjunto de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ do campo de vetores suave por

partes $Y \in \mathfrak{X}$ em $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v = 0\}$. Portanto, a projeção $\mathcal{P}_Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de (7.1) é da forma

$$\mathcal{P}_Y(u) = \begin{cases} \mathcal{P}_{X^+}(u), & v \geq 0, \\ \mathcal{P}_{X^-}(u), & v \leq 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

onde $X^\pm = X|_{\mathbb{S}_\rho^\pm}^\pm$, $u = (u, v)$. Note que $\mathbf{p}$ preserva curvas fechadas e contato entre curvas no seu domínio de definição. Assim, dizemos que $p \in \mathbb{S}_\rho^2$ é um ponto de equilíbrio monodrômico de (7.1) se $q = \mathbf{p}(p)$ é um ponto de equilíbrio monodrômico de (7.4).

7.2.2 Constantes de Lyapunov e ciclicidade local para campos de vetores planares suaves por partes

Na Seção 6.2.2 recordamos os conceitos e algoritmos utilizados para calcular constantes de Lyapunov para campos de vetores suaves. Nesta seção, recordaremos um dos algoritmos utilizados para estudar estabilidade de um ponto de equilíbrio monodrômico de um campo de vetores suave por partes planar da forma

$$Y(x, y) = \begin{cases} X^+(x, y), & y \geq 0, \\ X^-(x, y), & y \leq 0, \end{cases} \quad (7.5)$$

quando $X^\pm$ tem um ponto de equilíbrio monodrômico não degenerado na origem. Isto é,

$$X^\pm(x, y) = \left(\alpha^\pm x - \beta^\pm y + \sum_{k=2}^n P_k^\pm(x, y), \beta^\pm x + \alpha^\pm y + \sum_{k=2}^n Q_k^\pm(x, y) \right),$$

com $P_k^\pm$ e $Q_k^\pm$ polinômios homogêneos de grau k nas variáveis x e y . Assumimos que ambos tem parte linear na forma canônica de Jordan. Como nos capítulos anteriores, as trajetórias de Y em $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ são definidas seguindo as convenções de Filippov. A condição $\beta^\pm \neq 0$ implica que a origem é não degenerada para ambos $X^\pm$. O sistema (7.5) pode ser escrito em coordenadas polares $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ como

$$\begin{cases} \dot{r} = R^+(r, \theta), & \theta \in [0, \pi], \\ \dot{r} = R^-(r, \theta), & \theta \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

onde o ponto indica a derivada com respeito a θ .

Seja $r^\pm(\theta, r_0)$ a solução $\dot{r} = R^\pm(r, \theta)$ satisfazendo $r^\pm(0, r_0) = r_0$, com $r_0 > 0$ suficientemente pequeno. Quando $\alpha^\pm = 0$, expandimos a solução em série de Taylor escrevendo

$$r^\pm(\theta, r_0) = r_0 + \sum_{k=2}^{\infty} r_k^\pm(\theta) r_0^k,$$

com $r_k^\pm(0) = 0$, para todo $k \geq 2$, e com r^+ definido para $\theta \in [0, \pi]$ e r^- definido para

$\theta \in [\pi, 2\pi]$. Assim, as *aplicações de primeiro retorno de Poincaré* são definidas por

$$\Pi^+(r_0) = r^+(\pi, r_0),$$

$$\tilde{\Pi}^-(r_0) = r^-(-\pi, r_0),$$

onde $\tilde{\Pi}^-$ denota a inversa de Π^- já que ambos $r^\pm$ estão definidos com a condição inicial $\theta = 0$ e $r_0 > 0$ suficientemente pequeno. A *função distância* é dada por

$$\Delta(r_0) = \tilde{\Pi}^-(r_0) - \Pi^+(r_0),$$

para r_0 suficientemente pequeno. Se existe k tal que $\Delta'(0) = \dots = \Delta^{(k-1)}(0) = 0$ e $\Delta^{(k)}(0) \neq 0$ definimos a k -ésima *constante de Lyapunov* por $L_k = \Delta^{(k)}(0)/k!$ quando $L_1 = \dots = L_{k-1} = 0$ e $L_k \neq 0$. Nesse caso, dizemos que a origem do sistema (7.5) é um foco-fraco de ordem k se existe $k \geq 1$ tal que $L_k \neq 0$ caso contrário, dizemos que a origem é um centro. Para mais detalhes, ver [1, 23]. Como vimos na Seção 6.2.2, no caso suave a primeira constante de Lyapunov não nula sempre tem subíndice ímpar mas no caso suave por partes essa propriedade não é verdadeira.

Recorde que, para campos de vetores analíticos, a *bifurcação de Hopf* clássica ocorre perto de $\alpha = 0$ e quando a primeira constante de Lyapunov é não nula para $\alpha = 0$. A bifurcação de Hopf degenerada ocorre quando os ciclos limite de pequena amplitude bifurcam de um foco-fraco de ordem superior. Usamos a mesma nomenclatura para campos de vetores suaves por partes. Além disso, para campos de vetores suaves por partes, podemos obter mais um ciclo limite quando se pode adicionar um segmento de deslize ou de escape usando os parâmetros perturbativos. Esse fenômeno é conhecido como bifurcação *pseudo-Hopf*. Para mais detalhes, indicamos [11, 28, 34]. Observe que a bifurcação pseudo-Hopf não ocorre quando lidamos com perturbações contínuas ou refrativas porque, nesse caso, nunca temos um segmento de deslize ou de escape em Σ , como vimos na Seção 4.2.

Como estamos interessados em perturbações polinomiais de centros de um sistema suave por partes, podemos usar o Teorema da Função Implícita para obter ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude em uma vizinhança da origem de (7.5). Nesse caso, como no analítico, por estarmos perturbando um centro, as expressões de L_k são polinômios que se anulam quando o parâmetro perturbativo vale zero. Dessa forma, podemos calcular a série de Taylor de $L_2, \dots, L_l$ com relação aos parâmetros perturbativos. Denotamos por $L_i^{[1]}$, $i = 2, \dots, l$ as suas partes lineares. Consequentemente, se a matriz $[L_2^{[1]}, \dots, L_l^{[1]}]$ tem rank $l - 1$, o Teorema da Função Implícita junto com o parâmetro do traço e a bifurcação pseudo-Hopf fornece l ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude em uma vizinhança da origem.

Também podemos estudar bifurcações de ciclos limite de pequena amplitude para campos de vetores suave por partes usando o *método de Melnikov*. Esse método também

é usado para estudar bifurcações globais que ocorrem perto de *loops* homoclínicos ou heteroclínicos ou perto de famílias a um parâmetro de órbitas periódicas. Em particular, a primeira Função de Melnikov e a primeira ordem das constantes de Lyapunov estão relacionadas e sabemos que se depois de perturbar um centro o rank da matriz definida pelos coeficientes de $[L_2^{[1]}, \dots, L_m^{[1]}]$, em relação aos parâmetros perturbativos, é $l - 1$, onde $m > l$, então existem l ciclos limite costurantes hiperbólicos bifurcando a partir desse centro, quando também usamos os parâmetros relacionados ao traço e ao segmento deslizando. Para mais detalhes, veja [26].

7.3 Campos de vetores suaves e suaves por partes lineares com superfícies invariantes

Nesta seção, estudamos alguns casos de campos de vetores suaves e suaves por partes lineares com superfícies invariantes. Primeiramente, estudamos o caso com esferas invariantes e notamos que ele pode ser visto como um subcaso daquele com elipsóides invariantes. Depois disso, estudamos os casos com o cone e hiperboloides (ao longo do eixo x) invariantes. Terminamos a seção com o caso em que temos cilindros invariantes.

7.3.1 Campos de vetores suave por partes lineares com esferas invariantes

Seja $X \in \mathcal{X}_1$. Como vimos no Capítulo 6, X se escreve na forma (6.1). Também vimos que se $p \in \mathbb{S}_\rho^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$ é um ponto de equilíbrio de (6.1) então, p é um centro; qualquer $X \in \mathcal{X}_1$ é completamente integrável, tendo as duas seguintes integrais primeiras $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $\widetilde{H}(x, y, z) = a_3x - a_2y + a_1z$; $X \in \mathcal{X}_1$ tem apenas dois pontos de equilíbrios isolados do tipo centro em cada esfera $\mathbb{S}_\rho^2$, que são antípodas um do outro; e o sistema (6.1) é invariante por mudanças de coordenadas $(x, y, z, t) \mapsto (-x, -y, -z, t)$. Agora consideramos a classe dos campos de vetores suave por partes 3-dimensionais $Y = (X^+, X^-) \in \mathfrak{X}_1$ dados por (7.2), com região de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Recorde que $\Sigma = f^{-1}(0)$ com $f(x, y, z) = z$.

Note que o ponto de equilíbrio dos sistemas lineares $X^\pm$ definidos por (7.3) são $(0, 0, \rho)$ se, e somente se, $a_2^\pm = a_3^\pm = 0$. Nesse caso, as segundas integrais primeiras de $X^\pm$ são da forma $\widetilde{H}^\pm(x, y, z) = a_1^\pm z$, o que implica que Σ é invariante pelo fluxo de $X^\pm$ e que $(0, 0, \pm\rho)$ são os únicos pontos de equilíbrio de $X^\pm$ em cada esfera. Por conta disso, no que segue assumimos que $(a_2^\pm)^2 + (a_3^\pm)^2 \neq 0$. Fazemos todos os cálculos assumindo que $a_3^\pm \neq 0$, o caso $a_2^\pm \neq 0$ é análogo. Com isso, os pontos de equilíbrios de $X^\pm$ são da forma $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -(a_2^\pm/a_3^\pm)x, z = (a_1^\pm/a_3^\pm)x\}$. Portanto, eles estão na região

de descontinuidade Σ se, e somente se, $a_1^\pm = 0$. Como ambos, $X^\pm$, tem dois pontos de equilíbrio do tipo centro em cada esfera, se $a_1^\pm \neq 0$ concluímos que o campo de vetores $X^\pm$ tem um ponto de equilíbrio admissível e outro não admissível.

Agora vamos estudar o comportamento das retas de tangência de $X^\pm$, quando $(a_2^\pm)^2 + (a_3^\pm)^2 \neq 0$. Para isso, note que a primeira derivada de Lie de f na direção de $X^\pm$ é da forma $X^\pm f(x, y) = X^\pm \nabla f(x, y) = a_2^\pm x + a_3^\pm y$. Então, as retas de tangência de $X^\pm$ com Σ são dadas por $S_{X^\pm} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -(a_2^\pm/a_3^\pm)x, z = 0\}$. Assim, as retas de tangência intersectam as esferas $\mathbb{S}_\rho^2$ nos pontos

$$(x, y, z) = \left(\rho a_3^\pm / \sqrt{(a_2^\pm)^2 + (a_3^\pm)^2}, \rho a_2^\pm / \sqrt{(a_2^\pm)^2 + (a_3^\pm)^2}, 0 \right)$$

e nos seus antipodais. Logo, temos dois pontos de dobra de $X^\pm$ em $\mathbb{S}_\rho^2$, para todo $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$. Calculando a segunda derivada de Lie de f , em direção a $X^\pm$, nos pontos de tangência $(x, -(a_2^\pm/a_3^\pm)x, 0)$ obtemos

$$(X^\pm)^2 f(x, -(a_2^\pm/a_3^\pm)x, 0) = a_1^\pm x((a_2^\pm)^2 + (a_3^\pm)^2)/a_3^\pm.$$

Logo, os pontos são de tangências quadráticas, um visível e o outro invisível, a menos que $a_1^\pm = 0$. Note também que, quando $S_{X^+} = S_{X^-}$ temos duas dobras-dobras de $Y = (X^+, X^-)$ em cada esfera e isso ocorre se, e somente se, $a_2^+ a_3^- = a_2^- a_3^+$.

É importante notar que a simetria do problema garante que se um ponto de equilíbrio de X^+ ou de X^- está em Σ , então o outro também estará. Além disso, se um ponto de equilíbrio de X^+ coincidir com uma tangência ou ponto de equilíbrio de X^- , o outro também coincidirá. Ademais, a mudança de coordenadas $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ nos permite trocar o comportamento dos hemisférios norte e sul e, por isso, podemos fixar o comportamento em um deles na análise feita a seguir.

Como vimos na Seção 7.2, podemos definir o campo de vetores projetado associado a (7.2), usando (7.4), que é da forma

$$\mathcal{P}_Y(u, v) = \begin{cases} \mathcal{P}_{X^+}(u, v), & v \geq 0, \\ \mathcal{P}_{X^-}(u, v), & v \leq 0, \end{cases}$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{X^\pm}(u, v) = & \left(-4\rho^2 a_1^\pm - 4\rho a_2^\pm v - a_1^\pm u^2 + 2a_3^\pm uv + a_1^\pm v^2, \right. \\ & \left. 4\rho^2 a_3^\pm + 4\rho a_2^\pm u - a_3^\pm u^2 - 2a_1^\pm uv + a_3^\pm v^2 \right). \end{aligned}$$

O campo de vetores de Filippov projetado é 1-dimensional e está bem definido nos pontos $(u, 0)$ que satisfazem $(\mathcal{P}_{X^+} f)(\mathcal{P}_{X^-} f)(u) = (4\rho^2 a_3^+ + 4\rho a_2^+ u - a_3^+ u^2)(4\rho^2 a_3^- + 4\rho a_2^- u -$

$a_3^- u^2) < 0$. Nesse caso, temos

$$F_Y(u) = \frac{(4\rho^2 + u^2) \left((a_1^- a_3^+ - a_1^+ a_3^-) u^2 + 4\rho(a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+) u + 4\rho^2(a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+) \right)}{(a_3^- - a_3^+) u^2 + 4\rho(a_2^+ - a_2^-) u + 4\rho^2(a_3^+ - a_3^-)}. \quad (7.6)$$

Antes de começar com a prova da Teorema 7.1 resumimos seus pontos-chave, fornecendo depois os lemas técnicos necessários para concluí-la.

Usando as duas integrais primeiras de $X^\pm$ provamos, no Lema 7.5, que com respeito à admissibilidade dos pontos de equilíbrio de Y , os possíveis comportamentos para as curvas de nível de (7.2), na esfera $\mathbb{S}_\rho^2$, são os da Figura 7.1, onde indicamos os pontos de tangência com pontos azuis, os pontos de equilíbrio de $X^\pm$ em Σ com pontos vermelhos e quando os pontos de tangência e de equilíbrio de $X^\pm$ coincidem indicamos com pontos rosas. Em seguida, estudamos o comportamento do campo de vetores de Filippov, F_Y , dado por (7.6). Note que, (7.6) não é definido quando Σ é uma trajetória de X^+ ou de X^- . No Lema 7.7 concluímos que se os pontos de equilíbrio de ambos $X^\pm$ estão em Σ ($a_1^+ = a_1^- = 0$) ou se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $X^+ = \lambda X^-$, então o campo de vetores de Filippov (7.6) é identicamente nulo. No Lema 7.9 provamos que (7.6) tem dois pontos de equilíbrio $r_{1,2}$ se, e somente se, $a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+ \neq 0$, $a_1^+ a_1^- < 0$ e $a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+ \neq 0$. Nesse caso, os pontos de equilíbrio $r_{1,2}$ têm a mesma estabilidade (1-dimensional) e são estáveis (instáveis) se $(a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+)(a_1^+ - a_1^-) > 0$ (< 0 , respectivamente). Além disso, (7.6) pode ter pontos de equilíbrio isolados apenas quando os segmentos de deslize e de escape são delimitados por dois pontos de tangência do mesmo tipo, caso contrário, ambos os campos de vetores X^+ e X^- apontam para a mesma direção. Ademais, (7.6) não tem pontos de equilíbrio isolados quando $Y \in \mathfrak{X}_1$ tem pontos de dobra-dobra ou os pontos de equilíbrio de X^+ ou X^- estão em Σ .

Agora, mudando a orientação do tempo do campo de vetores suave por partes (7.2), se necessário, podemos fixar uma orientação para o campo de vetores $X|_{\mathbb{S}_\rho^2}$ em $\Sigma^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}_\rho^2 : z \leq 0\}$ e escolher duas diferentes para $X|_{\mathbb{S}_\rho^2}$ em $\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}_\rho^2 : z \geq 0\}$. Fazendo isso na Figura 7.1 obtemos possíveis comportamentos para as trajetórias do sistema (7.2) na esfera $\mathbb{S}_\rho^2$, com relação à admissibilidade dos pontos de equilíbrio de Y , que são aqueles nas Figuras 7.2 e 7.3, onde representamos Σ por um segmento cinza quando a convenção de Filippov não se aplica, por segmentos azuis, rosas e pretos, em Σ , as regiões de escape, deslize e costura, respectivamente, e usamos as mesmas cores usadas na Figura 7.1 para pontos de tangência e equilíbrio em Σ . Note que, nas Figuras 7.2 e 7.3 não distinguimos os casos em que é possível ter conexões ou pseudo-conexões, já que diferenciar todos esses casos não fará falta para a prova da não existência de ciclo limite.

Com esta análise concluímos que o sistema (7.2) não tem nenhum tipo de ciclo limite na esfera $\mathbb{S}_\rho^2$. Assim, a prova do Teorema 7.1 segue.

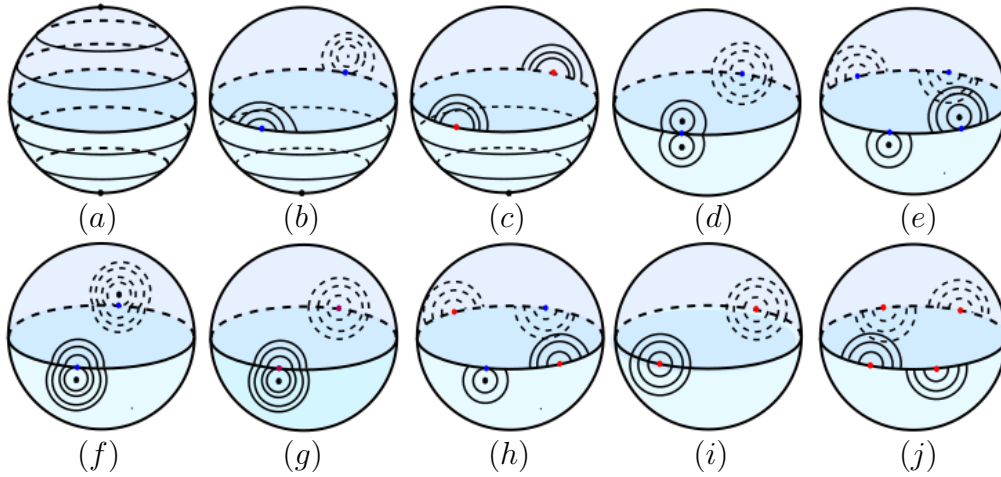


Figura 7.1: Comportamento das curvas de nível de $Y \in \mathfrak{X}_1$, com relação a admissibilidade dos pontos de equilíbrio.

No que segue, provamos todos os resultados necessários para completar a demonstração da Teorema 7.1.

Primeiramente, seguindo a abordagem introduzida em [39], usamos as integrais primeiras $H(x, y, z)$ e $\widetilde{H}^\pm(x, y, z)$ de (7.3) para definir uma aplicação distância, em Σ , como a seguir. Com essa aplicação distância podemos entender o comportamento das curvas de nível de $\widetilde{H}^\pm$ em $\mathbb{S}_\rho^2$ e como esses níveis interagem com o conjunto de descontinuidade Σ . Isso nos permite entender o comportamento das trajetórias de (7.3) em cada esfera $\mathbb{S}_\rho^2$ e, em particular, ver se algum sistema (7.2) admite ciclo limite costurante em $\mathbb{S}_\rho^2$. Como vimos anteriormente, $a_2^\pm = a_3^\pm = 0$ implica que Σ é invariante pelo fluxo de (7.3). Portanto, nesse caso, não podemos definir uma aplicação distância usando $\widetilde{H}^\pm$. Por isso, no que segue, assumimos que $(a_2^\pm)^2 + (a_3^\pm)^2 \neq 0$. Fazemos todos os cálculos assumindo que $a_3^\pm \neq 0$ e o caso $a_2^\pm \neq 0$ é análogo.

Seja $p = (x_0, y_0, 0) \in \Sigma \cap \mathbb{S}_\rho^2$. Então existe $k^\pm$ tal que $\widetilde{H}^\pm(p) = k^\pm$. A aplicação de semi-retorno $\pi^\pm(p) = q^\pm = (x_1^\pm, y_1^\pm, 0)$ satisfaz $H(q^\pm) = \rho^2$, $\widetilde{H}^+(q^+) = a_3^+ x_1^+ - a_2^+ y_1^+ = k^+$ e $\widetilde{H}^-(q^-) = a_3^- x_1^- - a_2^- y_1^- = k^-$. Assim, resolvendo os sistemas de equações

$$\{H(q^+) = \rho^2, \widetilde{H}^+(q^+) = k^+\}, \{H(q^-) = \rho^2, \widetilde{H}^-(q^-) = k^-\},$$

obtemos as soluções

$$q^\pm = \left(-\frac{((a_2^\pm)^2 - (a_3^\pm)^2)x_0 + 2a_2^\pm a_3^\pm y_0}{(a_2^\pm)^2 + (a_3^\pm)^2}, \frac{((a_2^\pm)^2 - (a_3^\pm)^2)y_0 - 2a_2^\pm a_3^\pm x_0}{(a_2^\pm)^2 + (a_3^\pm)^2}, 0 \right).$$

Então, a aplicação distância, $d(p) = \pi^+(p) - \pi^-(p) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, é da forma

$$d(p) = \left(2(a_2^- a_3^+ - a_3^- a_2^+)((a_2^- a_3^+ + a_2^+ a_3^-)x_0 - (a_2^- a_2^+ - a_3^- a_3^+)y_0), \right. \\ \left. - 2(a_2^- a_3^+ - a_3^- a_2^+)((a_2^- a_2^+ - a_3^- a_3^+)x_0 + (a_2^- a_3^+ + a_2^+ a_3^-)y_0), 0 \right).$$

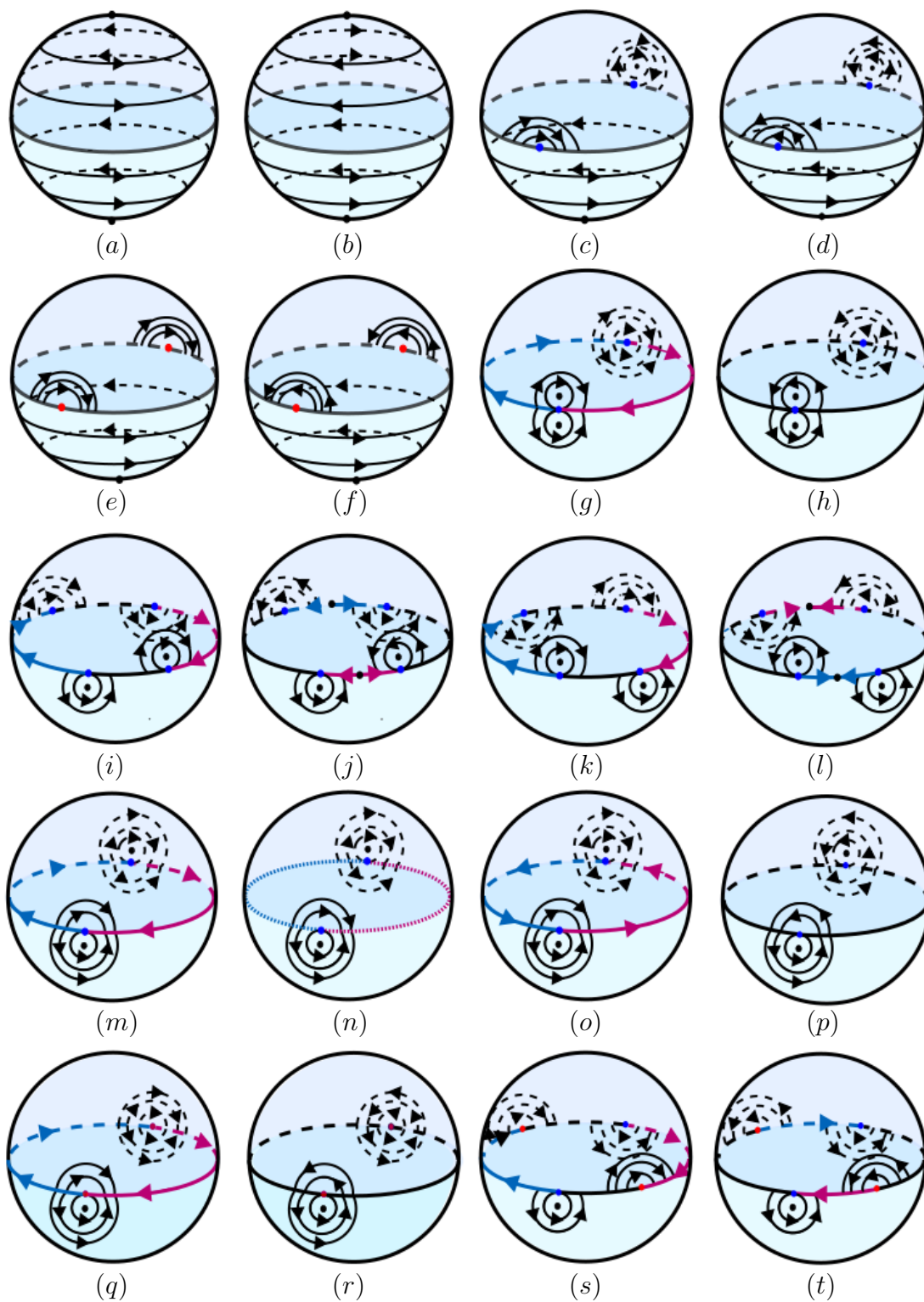


Figura 7.2: Possíveis comportamentos das trajetórias de $Y \in \mathfrak{X}_1$.

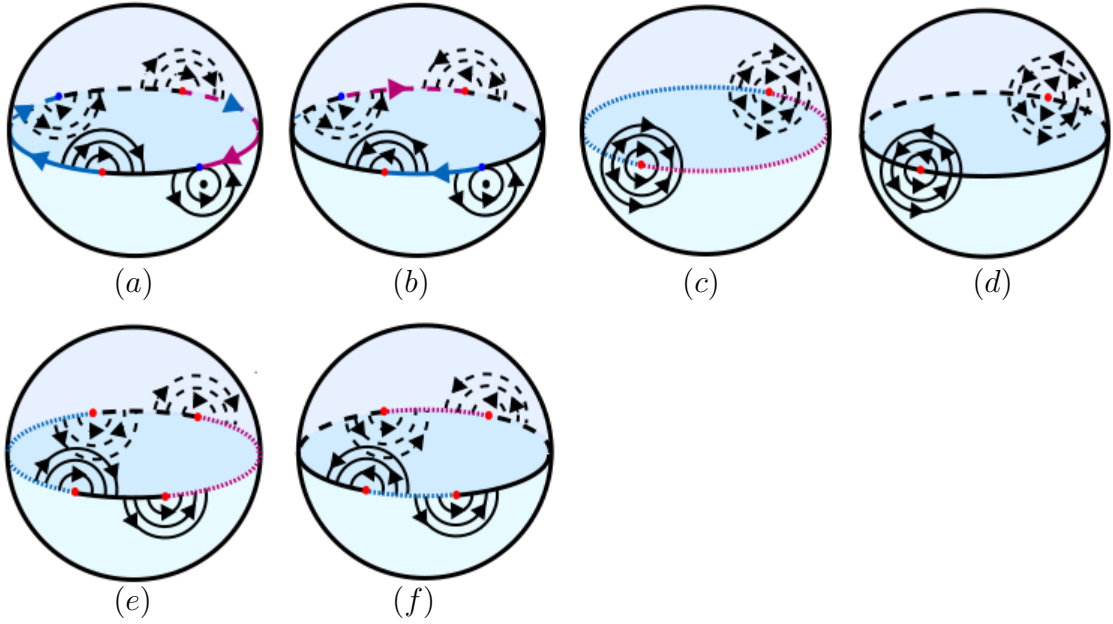


Figura 7.3: Possíveis comportamentos das trajetórias de $Y \in \mathfrak{X}_1$ (continuação).

Consequentemente, a aplicação distância $d(p)$ é identicamente nula se, e somente se, $a_2^+ a_3^- = a_2^- a_3^+$. Portanto, ou todas as trajetórias costurantes de (7.2), em $\mathbb{S}_\rho^2$ são fechadas ou nenhuma delas é.

Agora, juntando as informações sobre as posições dos pontos de equilíbrio em cada esfera $\mathbb{S}_\rho^2$ com a propriedade da aplicação distância que vimos acima, podemos classificar os possíveis comportamentos das curvas invariantes de (7.2) em $\mathbb{S}_\rho^2$, com relação à admissibilidade dos pontos de equilíbrio de Y .

Lema 7.5. *Com relação à admissibilidade dos pontos de equilíbrio, os comportamentos das curvas de nível de (7.2) na esfera $\mathbb{S}_\rho^2$ são mostrados na Figura 7.1.*

Demonstração. Seja $Y = (X^+, X^-) \in \mathfrak{X}_1$. Denote por $p_i^\pm$ e $q_i^\pm$, com $i = 1, 2$ os pontos de equilíbrio e de tangência de $X^\pm$, respectivamente. A seguir, assumimos que $p_1^\pm = (x_0, y_0, z_0)$ são tais que $z_0 \geq 0$ e $p_2^\pm = (x_0, y_0, z_0)$ são tais que $z_0 \leq 0$. Os possíveis comportamentos das curvas de nível de $Y \in \mathfrak{X}_1$ em $\mathbb{S}_\rho^2$ são mostrados na Figura 7.1, onde representamos por pontos azuis, vermelhos e rosas, os pontos de tangência, de equilíbrio de $X^\pm$ em Σ e a coincidência de pontos de tangência e de equilíbrio de $X^\pm$, respectivamente. Dividimos a análise em três casos, dependendo da posição dos pontos de equilíbrio de X^- em relação a Σ .

Primeiramente, se $p_1^- = (0, 0, \rho)$ e $p_2^- = -p_1^-$ as trajetórias de X^- em $\mathbb{S}_\rho^2$ são paralelas a Σ . O mesmo ocorre quando $p_1^+ = (0, 0, \rho)$ e $p_2^+ = -p_1^+$. Se $p_i^\pm = (x_0, y_0, z_0)$, $i = 1, 2$, são tais que $z_0 \neq \pm\rho$ e $z_0 \neq 0$, então temos um centro admissível e um não-admissível para X^+ e, portanto, dois pontos de tangência, $q_i^+ \in \Sigma$, $i = 1, 2$, um visível e outro invisível. Finalmente, se $p_i^+ = (x_0, y_0, 0)$, $i = 1, 2$, os dois pontos de equilíbrio de X^+ estão em Σ .

As curvas invariantes desses casos são mostradas nas Figuras 7.1 (a) – (c).

Agora consideramos o caso em que $p_i^- = (x_0, y_0, z_0)$, $i = 1, 2$, com $z_0 \neq 0$ e $z_0 \neq \rho$. Então, temos um centro admissível e um não admissível para X^- e, portanto, dois pontos de tangência, $q_i^- \in \Sigma$, $i = 1, 2$, um visível e um invisível, respectivamente. Aqui, como já consideramos o caso em que as trajetórias de X^- são paralelas a Σ , usando a mudança de coordenadas $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ explicada anteriormente, só precisamos considerar os dois comportamentos de X^+ descritos a seguir. Se $p_i^+ = (x_0, y_0, z_0)$, $i = 1, 2$, são tais que $z_0 \neq \rho$ e $z_0 \neq 0$, então X^+ tem um centro admissível e um não-admissível, portanto, dois pontos de tangência $q_i^+ \in \Sigma$, $i = 1, 2$, um visível e um invisível, respectivamente. Portanto, temos três novos comportamentos globais dependendo da posição relativa de $q_i^\pm$, $i = 1, 2$ que ocorrem quando $q_1^+ = q_1^-$ e $q_2^+ = q_2^-$, quando eles não coincidem e quando $q_1^+ = q_2^-$ e $q_2^+ = q_1^-$. Finalmente, se $p_i^+ = (x_0, y_0, 0)$, $i = 1, 2$, os dois pontos de equilíbrio de X^+ estão em Σ e temos dois novos comportamentos globais dependendo das posições desses pontos de equilíbrio, ou seja, quando $p_i^+ = q_i^-$ ou $p_i^+ \neq q_i^-$, $i = 1, 2$. Mostramos as curvas invariantes desses casos nas Figuras 7.1 (d) – (h).

Concluimos a análise considerando o caso em que os dois centros de X^- , em $\mathbb{S}_\rho^2$, estão em Σ , isso significa que $p_i^- = (x_0, y_0, 0)$, $i = 1, 2$. Usando a mudança de coordenadas $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$, podemos nos restringir ao caso em que os dois pontos de equilíbrio de X^+ , p_i^+ para $i = 1, 2$, também estão em Σ . Aqui temos dois novos comportamentos globais dependendo das posições desses pontos de equilíbrio, quando $p_i^+ = p_i^-$ ou $p_i^+ \neq p_i^-$. Mostramos as curvas invariantes desses casos nas Figuras 7.1(i) – (j). $\square$

Observação 7.6. *Vimos que os pontos de tangência de $X^\pm$ são antípodas um do outro. Portanto, as retas de tangência $S_{X^\pm}$ de $X^\pm$ estão contidas no plano $z = 0$ e passam pela origem. Observe que, quando essas retas de tangência são perpendiculares, Y admite uma conexão de tangências, isso porque as trajetórias de $X^\pm$ estão restritas às curvas de nível de $\tilde{H}^\pm$, em $\mathbb{S}_\rho^2$. Dessa forma, a depender da posição relativa das retas de tangência, o comportamento ilustrado nas Figuras 7.2(e), (h) e (j) não são únicos. Mas, para o nosso objetivo não é restritivo não diferenciar os casos em que há ou não conexões.*

Como na análise acima, consideramos apenas as curvas de nível de $X^\pm$, não levamos em consideração o comportamento do campo de vetores de Filippov, F_Y , definido nos segmentos de deslize e escape. Nos lemas a seguir descrevemos o comportamento de F_Y usando o campo de vetores de Filippov projetado (7.6) associado a (7.2) por ser 1-dimensional.

Lema 7.7. *O campo de Filippov (7.6) está bem definido quando $(\mathcal{P}_{X^+}f)(\mathcal{P}_{X^-}f) < 0$. Nesse caso, segue que (7.6) é identicamente nulo se, e somente se, $a_1^- a_3^+ - a_1^+ a_3^- = 0$ e $a_1^- a_2^+ - a_1^+ a_2^- = 0$.*

Demonstração. A prova segue pois (7.6) é uma função racional com numerador identica-

mente nulo se, e somente se,

$$(a_1^- a_3^+ - a_1^+ a_3^-)u^2 + 4\rho(a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+)u + 4\rho^2(a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+) \equiv 0.$$

□

Observação 7.8. *Primeiramente, note que $a_2^+ = a_2^- = 0$ e $a_3^+ = a_3^- = 0$ implicam que $a_1^- a_3^+ - a_1^+ a_3^- = 0$ e $a_1^- a_2^+ - a_1^+ a_2^- = 0$ mas, nesse caso, $(\mathcal{P}_{X^+}f)(\mathcal{P}_{X^-}f)$ é identicamente nulo e então $F_Y(u)$ não está definido para esses valores de coeficientes. Além disso, $a_1^+ = a_1^- = 0$ implica que $a_1^- a_3^+ - a_1^+ a_3^- = 0$ e $a_1^- a_2^+ - a_1^+ a_2^- = 0$, então F_Y é identicamente nulo quando os pontos de equilíbrio de ambos X^+ e X^- estão em Σ . Finalmente, quando $(a_1^+)^2 + (a_1^-)^2 \neq 0$, as condições $a_1^- a_3^+ - a_1^+ a_3^- = 0$ e $a_1^- a_2^+ - a_1^+ a_2^- = 0$ implicam que $a_2^- a_3^+ - a_3^- a_2^+ = 0$ e então X^+ e X^- são múltiplos um do outro, o que significa que os pontos de equilíbrio e as linhas de tangência de X^+ e X^- coincidem. Então, $F_Y \equiv 0$ se, e somente se, os pontos de equilíbrio de ambos X^+ e X^- estão em Σ ou X^+ e X^- são múltiplos um do outro.*

Note que quando $a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+ \neq 0$, o campo de vetores de Filippov projetado (7.6) tem no máximo duas raízes dadas por

$$r_{1,2} = \frac{2\rho\left((a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+) \pm \sqrt{(a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+)^2 + (a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+)^2}\right)}{a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+} \quad (7.7)$$

se $(\mathcal{P}_{X^+}f)(\mathcal{P}_{X^-}f)(r_{1,2}) < 0$. Note que, $(\mathcal{P}_{X^+}f)(\mathcal{P}_{X^-}f)(r_{1,2}) > 0$ significa que X^+ e X^- são paralelos em um ponto de costura e então F_Y não é definido nesse ponto. Por outro lado, quando $a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+ = 0$ o campo de vetores de Filippov projetado tem uma única possível raiz real na origem. A simetria do problema garante que a outra raiz esteja situada no infinito. Podemos evitar esse caso supondo que $(0,0)$ não é um ponto de equilíbrio de (7.6) fazendo a mesma mudança ortogonal de coordenadas que leva $(0, \rho, 0)$ em (x_0, y_0, z_0) com $y_0 \neq \rho$ em X^+ e X^- , como foi comentado na Seção 7.2.1. Portanto, sem perda de generalidade, analisamos apenas o caso $a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+ \neq 0$ e estudamos a estabilidade dos pontos de equilíbrio do campo de vetores de Filippov, quando existem.

Lema 7.9. *O campo de Filippov (7.6) está bem definido quando $(\mathcal{P}_{X^+}f)(\mathcal{P}_{X^-}f) < 0$. Nesse caso, (7.6) tem dois pontos de equilíbrio $r_{1,2}$ definidos em (7.7) se, e somente se, $a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+ \neq 0$, $a_1^+ a_1^- < 0$ e $a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+ \neq 0$. Os pontos de equilíbrio $r_{1,2}$ tem a mesma estabilidade (1-dimensional) e, além disso, são estáveis (instáveis) se $(a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+)(a_1^+ - a_1^-) > 0$ (< 0 , respectivamente).*

Demonstração. Como vimos anteriormente, quando $a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+ \neq 0$, o campo de vetores de Filippov projetado tem, no máximo, duas raízes reais $r_{1,2}$ dadas em (7.7). Note que

$$(\mathcal{P}_{X^+}f)(\mathcal{P}_{X^-}f)(r_{1,2}) = \frac{64\rho^4 a_1^+ a_1^- (a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+)^2}{(a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+)^4} \left(\sqrt{(a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+)^2 + (a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+)^2} \pm (a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+) \right)^2.$$

Como assumimos $a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+ \neq 0$, então $\sqrt{(a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+)^2 + (a_1^+ a_3^- - a_1^- a_3^+)^2} \pm (a_1^+ a_2^- - a_1^- a_2^+)$ é sempre não nulo. Consequentemente, o campo de vetores de Filippov projetado F_Y é definido em $r_{1,2}$ se, e somente se, $a_1^+ a_1^- < 0$ e $a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+ \neq 0$. Dessa forma, quando os pontos de equilíbrio de X^+ e X^- estão em Σ e quando os pontos de tangência de X^+ e X^- coincidem, F_Y não tem pontos de equilíbrio isolados.

Estudamos a estabilidade desses pontos de equilíbrio quando $a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+ \neq 0$ e $a_1^+ a_1^- < 0$. Como $4\rho^2 + u^2$ é um fator positivo de (7.6), podemos estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio de $F_Y(u)/(4\rho^2 + u^2)$. Nesse caso, a derivada com respeito a u é da forma

$$-\frac{4\rho(4\rho^2 + u^2)(a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+)(a_1^+ - a_1^-)}{((a_3^- - a_3^+)u^2 + 4\rho(a_2^+ - a_2^-)u + 4\rho^2(a_3^+ - a_3^-))^2},$$

e, portanto, é não nula para todo u . Então, r_1 e r_2 tem a mesma estabilidade, que depende do sinal de $(a_2^+ a_3^- - a_2^- a_3^+)(a_1^+ - a_1^-)$. $\square$

Observação 7.10. *Como vimos acima, (7.6) não é definido quando Σ é uma trajetória de X^+ ou X^- e não possui pontos de equilíbrio isolados quando Y tem pontos de dobra-dobra nem quando os pontos de equilíbrio de X^+ ou X^- estão em Σ . Além disso, o campo vetores de Filippov (7.6) pode ter pontos de equilíbrio apenas quando os segmentos de deslize e escape são delimitados por dois pontos de tangência do mesmo tipo, caso contrário, os campos de vetores X^+ e X^- apontam na mesma direção.*

Agora, mudando a orientação do tempo de (7.2), se necessário, podemos fixar uma orientação do tempo para X^- e escolher duas diferentes para X^+ . Portanto, quando adicionamos uma orientação na Figura 7.1, obtemos os comportamentos que são representados nas Figuras 7.2 e 7.3. Note que, as figuras não levam em conta conexões ou pseudo-conexões, pois esses elementos não influenciam na existência de ciclos limites, para esse caso, já que, a disposição dos pontos de equilíbrio admissíveis, não admissíveis e dos pontos de tangência, junto com o fato de Y ser completamente integrável e com a propriedade da aplicação distância não ter zeros isolados é suficiente para vermos que, a não existência de ciclos limites em $\mathbb{S}_\rho^2$ não está relacionada a existência de conexões.

Com esta análise concluímos que o sistema (7.2) não tem nenhum tipo de ciclo limite na esfera $\mathbb{S}_\rho^2$, que era o objetivo da Seção. Assim, a prova do Teorema 7.1 segue. Como um trabalho futuro, gostaríamos de classificar todos os possíveis retratos de fase do sistema (7.2), módulo Σ -equivalência.

7.3.2 Campos de vetores lineares com outras superfícies invariantes

Nesta seção, estudamos dois casos diferentes de campos de vetores suaves por partes lineares com superfícies invariantes. A ideia é mostrar como o comportamento do campo de vetores (7.1) pode ser completamente diferente quando mudamos as superfícies invariantes pelo fluxo de campos dos vetores suaves $X^\pm$. Em particular, mostramos que com hiperboloides invariantes podemos ter selas como pontos de equilíbrio e com cilindros invariantes o sistema não é necessariamente homogêneo com uma segunda integral primeira linear.

Em primeiro lugar, veremos que podemos considerar o caso linear com esferas invariantes como um caso particular de campos de vetores lineares $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com integral primeira

$$H_\xi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, isto é, com elipsoides invariantes.

Seja $\xi_\rho^2 = H_\xi^{-1}(\rho^2)$. Se existir $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que ξ_ρ^2 é uma superfície invariante para o sistema linear X então também existe um cofator K tal que $XH_\xi = KH_\xi$. Nesse caso, concluímos que o cofator K é nulo e, portanto, H_ξ é uma integral primeira de X e todos os elipsoides ξ_ρ^2 são invariantes pelo fluxo de X . O sistema linear X com elipsoides invariantes é também homogêneo e pode ser escrito na forma

$$X_\xi(x; b_1, b_2, b_3) = \left(-\frac{a^2 b_1}{b^2} y - \frac{a^2 b_2}{c^2} z, b_1 x - \frac{b^2 b_3}{c^2} z, b_2 x + b_3 y \right), \quad (7.8)$$

onde $x = (x, y, z)$. Note que quando $a = b = c = 1$ estamos no caso com esferas invariantes centradas na origem.

Proposição 7.11. *O campo de vetores (7.8) é completamente integrável. Além disso, se $p \in \xi_\rho^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2\}$ é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (7.9) em ξ_ρ^2 , então p é um centro.*

Demonstração. Note que $\widetilde{H}_\xi(x, y, z) = b_3 b^2 x - b_2 a^2 y + a^2 b_1 z$ também é uma integral primeira para o sistema (7.8). Portanto, (7.8) é completamente integrável e, dessa forma, podemos obter suas trajetórias pela intersecção dos conjuntos de níveis de H_ξ e $\widetilde{H}_\xi$. Como $\widetilde{H}_\xi$ define um plano, concluímos que se $p \in \xi_\rho^2$ é um ponto de equilíbrio isolado de (7.8), então p é um centro. $\square$

Como na Seção 7.3.1, consideramos a classe de campos de vetores suave por partes 3-dimensionais (7.1), com região de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, $X^+ = X_\xi^+$

e $X^- = X_\xi^-$, onde $X_\xi^\pm$ são definidos por

$$X_\xi^\pm(x; b_1^\pm, b_2^\pm, b_3^\pm) = \left(-\frac{a^2 b_1^\pm}{b^2} y - \frac{a^2 b_2^\pm}{c^2} z, b_1^\pm x - \frac{b^2 b_3^\pm}{c^2} z, b_2^\pm x + b_3^\pm y \right).$$

Todos os resultados da Seção 7.3.1, incluindo o Teorema 7.1, podem ser facilmente adaptados a este caso. Para evitar repetições vamos omitir os detalhes.

Agora consideramos um campo de vetores linear $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e a função $H_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_{\mathcal{H}}(x, y, z) = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Considere $\mathcal{H}_\rho^2 = H_{\mathcal{H}}^{-1}(\rho)$. Note que $\mathcal{H}_0^2$ é um cone quadrático, $\mathcal{H}_\rho^2$ é um hiperboloide de uma folha quando $\rho > 0$ e $\mathcal{H}_\rho^2$ é um hiperboloide de duas folhas quando $\rho < 0$. Além disso, como X tem grau $m = 1$ e o grau do cofator é sempre menor ou igual a $m - 1$, se existir um cofator K tal que $XH_{\mathcal{H}} = KH_{\mathcal{H}}$, então $K \in \mathbb{R}$ e o sistema linear X se escreve na forma

$$X_{\mathcal{H}}(x; b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{K}{2a^2 b^2 c^2} x + \frac{a^2 b_1}{b^2} y + \frac{a^2 b_2}{c^2} z, b_1 x + \frac{K}{2a^2 b^2 c^2} y - \frac{b^2 b_3}{c^2} z, b_2 x + b_3 y + \frac{K}{2a^2 b^2 c^2} z \right). \quad (7.9)$$

Então, quando $K \neq 0$ o cone quadrático $\mathcal{H}_0^2$ é o único nível de $H_{\mathcal{H}}$ que é invariante por (7.9). Por outro lado, quando $K = 0$ (7.9) se escreve na forma simplificada

$$X_{\mathcal{H}}(x; b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{a^2 b_1}{b^2} y + \frac{a^2 b_2}{c^2} z, b_1 x - \frac{b^2 b_3}{c^2} z, b_2 x + b_3 y \right), \quad (7.10)$$

e concluímos que $H_{\mathcal{H}}$ é uma integral primeira para (7.10) e então todos os hiperboloides de uma e duas folhas e também o cone centrados na origem são invariantes pelo fluxo de (7.10). A prova do próximo resultado é imediata.

Proposição 7.12. *O campo de vetores (7.10) é completamente integrável com segunda integral primeira linear $\widetilde{H}_{\mathcal{H}}(x, y, z) = b^2 b_3 x + a^2 b_2 y - a^2 b_1 z$.*

Observe que, como os níveis de $\widetilde{H}_{\mathcal{H}}$ são planos, concluímos que se $p \in \mathcal{H}_\rho^2$ é um ponto de equilíbrio isolado de (7.10), então p é uma sela ou um centro por causa da posição relativa entre os planos e hiperboloides ou entre os planos e o cone.

Agora, consideramos a classe de campos de vetores suave por partes 3-dimensionais dados por (7.1), com região de descontinuidade $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, onde $X^+ = X_{\mathcal{H}}^+$ e $X^- = X_{\mathcal{H}}^-$ admitem a integral primeira $H_{\mathcal{H}}(x, y, z) = -x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$.

Dessa forma, $X_{\mathcal{H}}^{\pm}$ são definidos por

$$X_{\mathcal{H}}^{\pm}(x; b_1^{\pm}, b_2^{\pm}, b_3^{\pm}) = \left(\frac{a^2 b_1^{\pm}}{b^2} y + \frac{a^2 b_2^{\pm}}{c^2} z, b_1^{\pm} x - \frac{b^2 b_3^{\pm}}{c^2} z, b_2^{\pm} x + b_3^{\pm} y \right).$$

Nesse caso, como $X_{\mathcal{H}}^{\pm}$ também tem duas integrais primeiras, é possível construir uma função distância como na seção anterior e estudar como os níveis destas segundas integrais primeiras interagem com o conjunto de descontinuidade Σ em $\mathcal{H}_{\rho}^2$. Acreditamos que pode ser possível estudar bifurcações de ciclos limite que surjam de um anel de período para certas configurações do campo de vetores suaves por partes restrito a $\mathcal{H}_{\rho}^2$ e também o problema de ciclicidade para os pontos de equilíbrio que sejam centros. Não o faremos aqui porque está fora do escopo deste capítulo que visa estudar a ciclicidade local de pontos de equilíbrio do tipo centro-foco em esferas 2-dimensionais.

Terminamos esta seção com um exemplo que mostra que não é verdade que todos os sistemas lineares $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com uma integral primeira quadrática admitem uma segunda integral primeira linear. Para isso, considere $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $H_C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H_C(x, y, z) = a^2 z^2 + b^2 y^2,$$

com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Seja $\mathcal{C}_{\rho}^2 = H_C^{-1}(\rho^2)$. Portanto, $\mathcal{C}_0^2$ é a reta $\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{C}_{\rho}^2$ é um cilindro quando $\rho > 0$.

Se existir um cofator $K \in \mathbb{R}$ tal que $XH_C = KH_C$, concluímos que $\rho = 0$ ou $K = 0$. Quando $\rho = 0$, apenas a reta $\mathcal{C}_0^2$ é invariante e quando $K = 0$ todos os cilindros $\mathcal{C}_{\rho}^2$, $\rho > 0$, e também a reta $\mathcal{C}_0^2$ são invariantes pelo fluxo de X . Nesse caso, o sistema linear se escreve na forma

$$X_C(x; b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = \left(b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z, b_4 z, -\frac{b^2 b_4}{a^2} y \right). \quad (7.11)$$

Considere uma função linear $\widetilde{H}_C(x, y, z) = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4$. Então $\widetilde{H}_C$ é uma integral primeira para o sistema genérico (7.11) se, e somente se, $X_C \widetilde{H}_C = 0$. Isso ocorre apenas quando $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, ou $b_1 = 0, b_2 = b^2 b_4 \alpha_3 / (a^2 \alpha_1)$ e $b_3 = -b_4 \alpha_2 / \alpha_1$, ou $b_4 = 0$ e $\alpha_1 = 0$. Como uma integral primeira é uma função não constante concluímos que, genericamente, o sistema (7.11) não admite outra integral primeira, como nos casos anteriores. Note que, como X_C é linear, X é completamente integrável (veja [20]) e então X admite uma segunda integral primeira. Aqui observamos apenas que não admite, genericamente, uma segunda integral primeira linear.

7.4 Centros e ciclos limite para campos de vetores suaves por partes quadráticos homogêneos e contínuos

Nesta seção, inspirado na propriedade de homogeneidade de campos de vetores lineares com esferas invariantes, estudamos o problema de centro-foco para campos de vetores suaves por partes quadráticos homogêneos em $\mathfrak{X}_2^H$. Devido à dificuldade do problema, restringimos nossa atenção à classe de campos de vetores homogêneos contínuos e damos algumas famílias de centros na Proposição 7.13. Mesmo com esta restrição, na Proposição 7.15 exibimos um sistema em $\mathfrak{X}_2^H$ com um foco-fraco de terceira ordem no ponto $(0, 1, 0)$, a partir do qual 2 ciclos limite costurantes de pequena amplitude bifurcam em $\mathbb{S}_1^2$ com uma perturbação contínua em $\mathfrak{X}_2^H$. Observe que, com uma perturbação contínua não podemos produzir um segmento deslizante e, portanto, é natural que não alcancemos o limite superior máximo para o número de ciclos limite de pequena amplitude que podem bifurcar de um foco-fraco genérico de terceira ordem. Além disso, nesta seção consideramos apenas a perturbação em $\mathfrak{X}_2^H$ e, na próxima seção, lidaremos com uma perturbação quadrática geral em $\mathfrak{X}_2$.

Seja $X \in \mathcal{X}_2^H$ um campo de vetores quadrático homogêneo. Como vimos na Seção 6.3, fazendo uma mudança de coordenadas ortogonais podemos assumir, sem perda de generalidade, que $(0, \rho, 0) \in \mathbb{S}_\rho^2$ é um ponto de equilíbrio de $X \in \mathcal{X}_2$ e com isso, podemos escrever X da forma (6.2). Reescrevemos (6.2), abaixo, para facilitar a leitura.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_4xy - a_5xz - (a_6 + a_7)yz - a_8z^2, \\ \dot{y} &= a_4x^2 + a_6xz - a_9z^2, \\ \dot{z} &= a_5x^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz.\end{aligned}$$

Restringimos nossa atenção ao ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ de (6.2) que está localizado na origem após a projeção do campo restrito a esfera $\mathbb{S}_1^2$. Dessa forma, como vimos na Seção 6.3 $(0, 1, 0)$ é do tipo centro-foco não degenerado se, e somente se, $a_4 - a_9 = 0$ e $a_6a_7 + a_7^2 - a_9^2 > 0$. Além disso, também assumimos $a_7 \neq 0$, caso contrário, $a_6a_7 + a_7^2 - a_9^2 = -a_9^2 \leq 0$. Portanto, nessas condições, temos um foco-fraco em $(0, 1, 0)$. Escrevendo $w^2 = a_6a_7 + a_7^2 - a_9^2$, e $\varrho = (w^2 + a_4a_9)/a_7$ o sistema projetado $\mathcal{P}_X(u, v)$ é da forma (6.10). Reescrevemos o sistema (6.10) abaixo, para facilitar a leitura.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -4a_4u - 4\varrho v - 4a_5uv - 4a_8v^2 - a_4u^3 - (\varrho - 2a_7)u^2v + (a_4 + 2a_9)uv^2 + \varrho v^3, \\ \dot{v} &= 4a_7u + 4a_9v + 4a_5u^2 + 4a_8uv - a_7u^3 - (2a_4 + a_9)u^2v - (2\varrho - a_7)uv^2 + a_9v^3.\end{aligned}$$

Nessas condições, o Teorema 6.2 garante que $(0, 1, 0)$ é um centro não degenerado de (6.2) se, e somente se, $a_7 \neq 0$, $a_4 = a_9$, e $a_4a_5a_8a_9 + a_5a_6a_7a_8 + a_5^2a_7a_9 + a_5a_8a_9^2 - a_7a_8^2a_9 = 0$.

Estamos interessados no problema de centro-foco que aparece naturalmente para o sistema suave por partes

$$Y(x, y, z) = \begin{cases} X^+(x, y, z), & z \geq 0, \\ X^-(x, y, z), & z \leq 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

onde obtemos $X^\pm$ tomando $a_i = a_i^\pm$ em (6.2), quando assumimos que $p = (0, 1, 0) \in \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ é do tipo centro-foco para X^+ e X^- . Como comentamos anteriormente, por conta do número de parâmetros livres, assumiremos que (7.12) é contínuo mas não necessariamente diferenciável na região de descontinuidade Σ . Note que o sistema (7.12) e o sistema projetado associado $\mathcal{P}_Y = (\mathcal{P}_{X^+}, \mathcal{P}_{X^-})$, onde $\mathcal{P}_{X^\pm}$ são obtidos fazendo $a_i = a_i^\pm$ em (6.10) são contínuos na região de descontinuidade Σ se, e somente se, $a_4^- = a_4^+$, $a_5^- = a_5^+$, e $a_7^- = a_7^+$. No que segue, assumimos essas condições.

Como estamos interessados em exibir algumas famílias de centros para esta família de campos de vetores suaves por partes, usamos o método explicado na Seção 7.2.2, para calcular as constantes de Lyapunov para o sistema projetado $\mathcal{P}_Y$. Para fazer isso, precisamos considerar $\mathcal{P}_{X^\pm}$ na forma canônica de Jordan.

Observe que a mudança de coordenadas $\{u = v, v = (cu + dv)/w\}$, onde $c = 4a_7$ e $d = 4a_9$ coloca (6.10) em sua forma canônica de Jordan

$$\begin{aligned} \dot{u} = v &+ \frac{a_9(a_5a_9 - a_7a_8)}{wa_7^2}u^2 - \frac{(2a_5a_9 - a_7a_8)}{a_7^2}uv + \frac{a_5w}{a_7^2}v^2 + \frac{wa_9}{2a_7^2}u^3 \\ &+ \frac{(a_7^2 + a_9^2 - 2w^2)}{4a_7^2}u^2v - \frac{w^2}{4a_7^2}v^3, \\ \dot{v} = -u &+ \frac{(a_5a_9 - a_7a_8)(a_7^2 + a_9^2)}{a_7^2w^2}u^2 - \frac{(a_5a_7^2 + 2a_5a_9^2 - a_7a_8a_9)}{wa_7^2}uv \\ &+ \frac{a_5a_9}{a_7^2}v^2 + \frac{(a_7^2 + a_9^2)}{4a_7^2}u^3 + \frac{(2a_7^2 + 2a_9^2 - w^2)}{4a_7^2}uv^2 - \frac{wa_9}{2a_7^2}v^3. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Não fizemos uma reparametrização em (7.13) porque não foi possível eliminar um parâmetro. Observe que, a mudança de coordenadas $\{u = v, v = (cu + dv)/w^\pm\}$ coloca $\mathcal{P}_{X^\pm}$ na forma canônica e também coloca o conjunto de descontinuidade $\Sigma = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v = 0\}$ em $\tilde{\Sigma} = \{(u, v); u = 0, v = cu/w^\pm\}$. Consequentemente, após esta mudança de coordenadas, lidamos com o sistema suave por partes

$$\mathcal{P}_Y(u, v) = \begin{cases} \mathcal{P}_{X^+}(u, v), & u \geq 0, \\ \mathcal{P}_{X^-}(u, v), & u \leq 0, \end{cases} \quad (7.14)$$

onde $\mathcal{P}_{X^\pm}$ são obtidos fazendo $a_i = a_i^\pm$ in (7.13) e então, em coordenadas polares, (7.14) é escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{r} = R^+(r, \theta), & \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \dot{r} = R^-(r, \theta), & \theta \in [-3\pi/2, -\pi/2]. \end{cases}$$

Portanto, usamos a técnica mostrada na Seção 7.2.2 após uma rotação por ângulo $\pi/2$, para calcular as constantes de Lyapunov de (7.14). Observe que após a mudança de coordenadas $\{u = v, v = (cu + dv)/w^\pm\}$ o conjunto de descontinuidade de (7.14), $\tilde{\Sigma} = \{(u, v); u = 0, v = cu/w^\pm\}$, é parametrizado de duas maneiras diferentes quando $w^+ \neq w^-$ e então a condição de continuidade deve ser considerada antes de fazer essa mudança e também levamos essa diferença em consideração ao calcular as constantes de Lyapunov.

A seguir, damos algumas famílias de centros para o campo de vetores suaves por partes (7.12). Alguns desses centros aparecem em uma família de campos de vetores reversíveis com relação a uma reta (veja a definição na Seção 2.4).

Proposição 7.13. *O sistema suave por partes contínuo (7.12) tem um centro no ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ se $a_7^\pm \neq 0$, $a_4^\pm = a_9^\pm$ e uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (a) $a_8^- = -a_8^+$, $a_9^- = 0$, e $w^+ = w^-$;
- (b) $a_7^- = \pm w^-$, $a_9^- = 0$, e $w^+ = w^-$;
- (c) $a_8^+ = a_8^-$, $-(a_5^-)^2 a_7^- a_9^- + a_5^- (a_7^-)^2 a_8^- - a_5^- a_8^- (a_9^-)^2 - a_5^- a_8^- w^2 + a_7^- (a_8^-)^2 a_9^- = 0$, e $w^+ = w^-$;
- (d) $a_5^- = 0$ e $a_9^- = 0$.

Demonstração. No caso (a) o campo de vetores suave por partes contínuo projetado $\mathcal{P}_Y = (\mathcal{P}_{X^+}, \mathcal{P}_{X^-})$ é reversível em relação ao conjunto de descontinuidade. Para ver isso, basta considerar a involução $\phi(u, v) = (-u, v)$. O caso (b) segue pois, em coordenadas polares, temos $dr/dt = 0$ para ambos $\mathcal{P}_{X^\pm}$, o que implica que a aplicação distância definida em Σ , em uma vizinhança da origem, é identicamente nula. No caso (c), o campo de vetores $\mathcal{P}_Y$ é suave e satisfaz a condição dada no Teorema 6.2. Finalmente, o caso (d) segue porque ambos $\mathcal{P}_{X^\pm}$ são reversíveis com relação ao eixo u , nesse caso basta considerar a involução $\phi(u, v) = (u, -v)$, e então a aplicação distância definida em Σ , em uma vizinhança da origem, é nula. O que conclui a prova. $\square$

Se $w^+ = w^-$ a mudança de coordenadas que coloca o sistema (6.10) na forma canônica de Jordan (7.13) é a mesma para X^+ e X^- e então a parametrização de $\tilde{\Sigma}$ coincide depois desta mudança de coordenadas. Nesse caso, as únicas famílias de centros possíveis para (7.12) são as fornecidas nos itens (a)-(d) da Proposição 7.13.

Proposição 7.14. *O sistema suave por partes contínuo (7.12) com $w^+ = w^-$ tem um centro no ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ se, e somente se, $a_7^\pm \neq 0$, $a_4^\pm = a_9^\pm$ e uma das condições (a), (b), (c) ou (d) da Proposição 7.13 é satisfeita.*

Demonstração. Para simplificar a notação da demonstração, eliminamos o sobrescrito $\pm$ quando os coeficientes correspondentes de X^+ e X^- são iguais. Portanto, consideramos

$w^+ = w^- = w$, $a_4^+ = a_4^- = a_4$, $a_5^+ = a_5^- = a_5$, $a_7^+ = a_7^- = a_7$ e $a_9^+ = a_9^- = a_9$. Pela Proposição 7.13 sabemos que todas as famílias detalhadas nos itens (a), (b), (c) e (d) são famílias de centros. Consequentemente, só precisamos verificar que essas são as únicas famílias quando $w^+ = w^- = w$. Para fazer isso, calculamos quatro constantes de Lyapunov usando o método explicado na Seção 7.2.2 para o sistema (7.14), com as hipóteses adicionais desse caso, obtendo

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{2}{3wa_7} a_9(a_8^+ - a_8^-), \\ L_3 &= \frac{\pi}{8w^3 a_7^3} \left(2a_5^2 a_7 a_9 (a_7^2 + a_9^2 + w^2) - a_5(a_7^4 a_8^+ - 2a_8^+ a_9^4 - 4a_8^+ a_9^2 w^2 \right. \\ &\quad \left. - (a_8^+ + a_8^-)w^4) - 2a_7 a_9(a_7^2(a_8^+)^2 + (a_8^-)^2 a_9^2 + (a_8^+)^2 w^2) \right), \\ L_4 &= \frac{4}{45a_7^4 w^5} a_5((a_8^+)^2 - (a_8^-)^2)(a_7^2 - w^2)(4a_7^4 + 3a_7^2 w^2 + 2w^4), \\ L_5 &= \frac{\pi}{12w^3 a_7^3} (a_5^2 + (a_8^+)^2 - w^2) \left(2a_5^2 a_7 a_9 - a_5 a_7^2 a_8^+ - a_5 a_7^2 a_8^- \right. \\ &\quad \left. + 2a_5 a_8^+ a_9^2 + a_5 a_8^+ w^2 + a_5 a_8^- w^2 - 2a_7(a_8^+)^2 a_9 \right). \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações $\mathcal{S}_L = \{L_2 = \dots = L_5 = 0\}$ obtemos as soluções reais dadas nas famílias (a)-(d) da Proposição 7.13 e mais quatro soluções complexas dadas por $\left\{ a_5 = \pm \sqrt{-(a_8^-)^2 + w^2}, a_7 = \pm i \sqrt{a_9^2 + w^2}, a_8^+ = a_8^- \right\}$ e $\{a_7 = \pm i a_9, a_8^+ = a_8^-, w = 0\}$. Isso conclui a prova pois estamos interessados em famílias de centros reais e com $w \neq 0$. $\square$

Na próxima proposição exibimos um sistema em $\mathfrak{X}_2^H$ com um foco-fraco de terceira ordem no ponto $(0, 1, 0)$ a partir do qual 2 ciclos limite costurantes de pequena amplitude bifurcam em $\mathbb{S}_1^2$ com uma perturbação contínua em $\mathfrak{X}_2^H$.

Proposição 7.15. *Considere o sistema (7.12) com $a_5^- = 1, a_7^- = 1, a_8^+ = 3, a_8^- = 1, a_9^- = 0$, e $w^+ = w^- = 2$. Então, o ponto de equilíbrio $p = (0, 1, 0)$ é um foco-fraco de terceira ordem e existem 2 ciclos limite de pequena amplitude bifurcando de p , em $\mathbb{S}_1^2$, com uma perturbação contínua em $\mathfrak{X}_2^H$.*

Demonstração. Usando as expressões de L_i , $i = 2, \dots, 5$ dadas na proposição acima, concluímos que, para esses valores de parâmetros, temos $L_2 = 0$ e $L_3 = 15\pi/16 \neq 0$. Portanto, adicionando o parâmetro do traço obtemos 2 ciclos limite costurantes de pequena amplitude bifurcando do ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$. $\square$

Enfatizamos que, quando lidamos com uma perturbação contínua, não temos o parâmetro de deslize para obter a cota superior máxima para o número de ciclos limite costurantes de pequena amplitude que bifurcam de um centro ou foco-fraco, como explicamos na seção 7.2.2. Por causa disso, o número máximo de ciclos limite que podemos obter bifurcando do foco-fraco de terceira ordem, na última proposição, é 2.

7.5 Ciclicidade local para campos de vetores quadráticos em $\mathcal{X}_2$ com perturbação suave por partes em $\mathfrak{X}$

Nesta seção, estudamos a ciclicidade local de centros e de um foco-fraco de campos de vetores suaves quadráticos, com perturbações suaves por partes em $\mathfrak{X}_2$. Os casos de perturbações contínuas ou refrativas também são analisados. Mostramos os resultados obtidos nas Proposições 7.16 e 7.17. A prova do Teorema 7.2 segue diretamente da Proposição 7.17 (c).

Seja $X \in \mathcal{X}_2$. Como vimos na Seção 6.4 o comportamento do sistema X pode ser totalmente diferente em dois níveis diferentes de esferas invariantes. Portanto, restringimos nossa análise à esfera unitária $\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Neste caso, qualquer $X \in \mathcal{X}_2$ pode ser escrito na forma (6.3). Reescrevemos (6.3) a seguir, para facilitar a leitura.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_1y - a_2z - a_4xy - a_5xz - a_{10}y^2 - (a_6 + a_7)yz - a_8z^2, \\ \dot{y} &= a_1x - a_3z + a_4x^2 + a_{10}xy + a_6xz - a_{11}yz - a_9z^2, \\ \dot{z} &= a_2x + a_3y + a_5x^2 + a_7xy + a_8xz + a_{11}y^2 + a_9yz.\end{aligned}$$

Como vimos na Seção 6.4, $(0, 1, 0)$ é um ponto de equilíbrio de (6.3) se, e somente se, $a_1 + a_{10} = 0$ e $a_3 + a_{11} = 0$. Assumimos essas condições, no que segue, para que a origem seja um ponto de equilíbrio do campo de vetores projetado $\mathcal{P}_X$ associado a X . Além disso, como vimos na Seção 6.4, após assumirmos duas condições extras $a_9 = 0$ e $a_2 + a_7 = 1$, a origem será um ponto de equilíbrio do tipo centro-foco não degenerado para $\mathcal{P}_X$ se, e somente se, $a_4 = 0$ e $a_6 + 1 > 0$. Escrevendo $a_4 = 0$ e $w^2 = a_6 + 1$, com $w \neq 0$, obtemos o sistema (6.4). Reescrevemos (6.4) a seguir, para facilitar a leitura.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_1y - (1 - a_7)z - a_5xz + a_{10}y^2 + (1 - a_7 - w^2)yz - a_8z^2, \\ \dot{y} &= a_1x + a_{11}z - a_{10}xy + (w^2 - 1)xz - a_{11}yz, \\ \dot{z} &= (1 - a_7)x - a_{11}y + a_5x^2 + a_7xy + a_8xz + a_{11}y^2.\end{aligned}$$

Após uma reparametrização no tempo e a mudança de coordenadas $u = wu$ o sistema

projetado obtido de (6.4), já assumindo $a_4 = 0$, é

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v - \frac{a_1}{2}u^2 - \frac{a_5}{w}uv - \frac{a_1 + 2a_8}{2w^2}v^2 + \frac{2a_7 - w^2}{4}u^2v \\ &\quad + \frac{w^2 + 2a_7 - 2}{4w^2}v^3 - \frac{a_1w^2}{8}u^4 - \frac{a_{11}w}{4}u^3v - \frac{a_{11}}{4w}uv^3 + \frac{a_1}{8w^2}v^4, \\ \dot{v} &= u + \frac{(2a_5 - a_{11})w}{2}u^2 + a_8uv - \frac{a_{11}}{2w}v^2 - \frac{(2a_7 - 1)w^2}{4}u^3 \\ &\quad - \frac{2w^2 + 2a_7 - 3}{4}uv^2 + \frac{w^3a_{11}}{8}u^4 - \frac{w^2a_1}{4}u^3v - \frac{a_1}{4}uv^3 - \frac{a_{11}}{8w}v^4. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Nos itens (a) e (b) da Proposição 7.17, mostramos que com uma perturbação contínua (refrativa, respectivamente) em $\mathfrak{X}_2$ obtemos 5 (6, respectivamente) ciclos limite costurantes bifurcando de um centro na família de centros (e) do Teorema 6.3. Além disso, quando consideramos uma perturbação suave por partes geral quadrática em $\mathfrak{X}_2$ obtemos 10 ciclos limite, como veremos no item (c) da Proposição 7.17, que é, de fato, o Teorema 7.2. Também exibimos uma perturbação suave por partes quadrática do foco-fraco do sistema (6.5), em $(0, 1, 0)$, na Proposição 7.16.

A seguir, descrevemos como serão as perturbações suaves por partes de $X \in \mathcal{X}_2$ consideradas e quais são as condições que deixam essa perturbação contínua ou refrativa. Seja $X = X(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in \mathcal{X}_2$ dado por (6.4) onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e $\mathbf{a} = (a_1, a_5, a_7, a_8, a_{11}, w)$. Denotando $\mathbf{a} + \varepsilon^\pm = (a_1 + \varepsilon_1^\pm, \dots, w + \varepsilon_6^\pm)$ consideramos uma perturbação suave por partes de X definida por

$$Y(\mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{cases} X(\mathbf{x}; \mathbf{a} + \varepsilon^+), & z \geq 0, \\ X(\mathbf{x}; \mathbf{a} + \varepsilon^-), & z \leq 0, \end{cases} \quad (7.16)$$

e o campo de vetores projetado associado, definida por (7.4), que é da forma

$$\mathcal{P}_Y(\mathbf{u}, \varepsilon) = \begin{cases} \mathcal{P}_X(\mathbf{u}; \mathbf{a} + \varepsilon^+), & v \geq 0, \\ \mathcal{P}_X(\mathbf{u}; \mathbf{a} + \varepsilon^-), & v \leq 0, \end{cases} \quad (7.17)$$

onde $\mathbf{u} = (u, v)$ e $\mathcal{P}_X(\mathbf{u}, 0)$ é dado por (7.15).

Assim, quando $\varepsilon = 0$ temos os sistemas analíticos não perturbados (6.4) e (7.15). Seguindo a mesma ideia da última seção, diremos que a perturbação do campo de vetores $X \in \mathcal{X}_2$ é contínua (refrativa) se (7.16) é contínuo (refrativo, respectivamente) no conjunto de descontinuidade. Com um cálculo direto, vemos que (7.16) é contínuo (refrativo, respectivamente) se, e somente se, $\varepsilon_i^+ = \varepsilon_i^-$, para $i = 1, 2, 3, 5$ ($\varepsilon_i^+ = \varepsilon_i^-$, para $i = 2, 3, 5$, respectivamente).

Observe que a origem está no limite de dois segmentos de costura do sistema perturbado (7.17), bem como do não perturbado. Isso porque assumimos que a origem é um ponto de equilíbrio do tipo centro para o sistema não perturbado e os parâmetros

perturbativos não alteram a parte linear do campo. Se assumirmos $a_3 = -a_{11} + \varepsilon_7$ ao invés de $a_3 = -a_{11}$, podemos criar um segmento de deslize em uma vizinhança da origem pois, neste caso, o sistema projetado é da forma

$$\left(-\frac{a_4}{w}u - v + \mathcal{O}_2(u, v), \frac{\varepsilon_7}{w} + u + \mathcal{O}_2(u, v) \right).$$

Assim, também usamos o parâmetro perturbativo ε_7 quando lidamos com uma perturbação suave por partes em vez de contínuas ou refrativas, para obter mais um ciclo limite costurante de pequena amplitude criando um segmento deslizante e usando a bifurcação de pseudo-Hopf, como foi explicado na Seção 7.2.

Com essas considerações podemos enunciar e provar os últimos resultados.

Proposição 7.16. *Considere o sistema (6.5). Então, para $\alpha = \pm\sqrt{857/488}$ existe uma perturbação suave por partes em $\mathfrak{X}_2$ tal que ao menos 9 ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude bifurcam do ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$.*

Demonstração. Seja $\alpha = \pm\sqrt{857/488}$. No Teorema 6.4 vimos que (6.5) é obtido de (6.4) fazendo $a_1 = -2\alpha, a_4 = 0, a_5 = 1, a_7 = 29/20, a_8 = \alpha, a_{11} = 2$, e $w = 2$. Além disso, $p = (0, 1, 0)$ é um foco-fraco de ordem 4 e existe uma perturbação suave, na família $\mathcal{X}_2$, para a qual 4 ciclos limite de pequena amplitude bifurcam de p em $\mathbb{S}_1^2$.

Agora consideramos uma perturbação suave por partes

$$(a_1^\pm, a_5^\pm, a_7^\pm, a_8^\pm, a_{11}^\pm, w^\pm) = (-2\alpha + \varepsilon_1^\pm, 1 + \varepsilon_2^\pm, 29/20 + \varepsilon_3^\pm, \alpha + \varepsilon_4^\pm, 2 + \varepsilon_5^\pm, 2 + \varepsilon_6^\pm)$$

no sistema suave por partes projetado (7.15). Como vimos anteriormente, consideramos o conjunto de descontinuidade $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v = 0\}$ do sistema projetado e os parâmetros perturbativos $\varepsilon^+ = (\varepsilon_1^+, \dots, \varepsilon_6^+)$ para $v > 0$ e $\varepsilon^- = (\varepsilon_1^-, \dots, \varepsilon_6^-)$ para $v < 0$. Denotamos por $L_i(\varepsilon)$, com $\varepsilon = (\varepsilon_1^+, \dots, \varepsilon_6^+, \varepsilon_1^-, \dots, \varepsilon_6^-)$, a constante de Lyapunov correspondente. Usando o método explicado na Seção 7.2.2 computamos a série de Taylor das constantes de Lyapunov até primeira ordem com respeito a ε , $L_i^{[1]}(\varepsilon)$, e escrevemos

$$L_i(\varepsilon) = L_i^{[1]}(\varepsilon) + \mathcal{O}_2(\varepsilon).$$

Obtemos $L_2^{[1]}(0) = \dots = L_8^{[1]}(0) = 0$ e $L_9^{[1]}(0) \neq 0$. Portanto, como a matriz formada pelos coeficientes $(L_2^{[1]}, \dots, L_8^{[1]})$ com respeito a ε tem rank 7 considerando também o parâmetro do traço e usando o Teorema da Função Implícita obtemos oito ciclos limite costurantes hiperbólicos. Finalmente, adicionando o parâmetro do deslize obtemos o nono ciclo limite costurante hiperbólico de pequena amplitude, concluindo a prova. $\square$

Proposição 7.17. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{4}{5}y - \frac{13}{8}z - \frac{5}{2}xz + \frac{4}{5}y^2 - \frac{59}{8}yz - z^2, \\ \dot{y} &= \frac{4}{5}x + 2z - \frac{4}{5}xy + 8xz - 2yz, \\ \dot{z} &= \frac{13}{8}x - 2y + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{8}xy + xz + 2y^2.\end{aligned}\tag{7.18}$$

- (a) *Existe uma perturbação contínua de (7.18) em $\mathfrak{X}_2$ tal que ao menos 5 ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude bifurcam do ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$.*
- (b) *Existe uma perturbação refrativa de (7.18) em $\mathfrak{X}_2$ tal que ao menos 6 ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude bifurcam do ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$.*
- (c) *Existe uma perturbação suave por partes de (7.18) em $\mathfrak{X}_2$ tal que ao menos 10 ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude bifurcam do ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$.*

Demonstração. Observe que o sistema (7.18) é obtido fazendo $a_1 = 4/5, a_4 = 0, a_5 = 5/2, a_7 = -5/8, a_8 = 1, a_{11} = 2$, e $w = 3$ em (6.4) e, portanto, pertence a família (e) do Teorema 6.3. Logo, $(0, 1, 0)$ é um centro de (7.18). Além disso, pela Proposição 6.19, existe uma perturbação suave na família $\mathcal{X}_2$ para a qual ao menos 3 ciclos limite de pequena amplitude bifurcam do ponto de equilíbrio $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$.

Agora consideramos a perturbação suave por partes

$$(a_1, a_5, a_7, a_8, a_{11}, w) = (4/5 + \varepsilon_1^\pm, 5/2 + \varepsilon_2^\pm, -5/8 + \varepsilon_3^\pm, 1 + \varepsilon_4^\pm, 2 + \varepsilon_5^\pm, 3 + \varepsilon_6^\pm)$$

no sistema projetado (7.15). Como anteriormente, consideramos o conjunto de descontinuidade $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v = 0\}$ do sistema projetado e os parâmetros perturbativos $\varepsilon^+ = (\varepsilon_1^+, \dots, \varepsilon_6^+)$ para $v > 0$ e $\varepsilon^- = (\varepsilon_1^-, \dots, \varepsilon_6^-)$ para $v < 0$. Denotamos $L_i(\varepsilon)$, com $\varepsilon = (\varepsilon_1^+, \dots, \varepsilon_6^+, \varepsilon_1^-, \dots, \varepsilon_6^-)$, as constantes de Lyapunov correspondentes. Como vimos, quando $\varepsilon = 0$ a origem é um centro e, portanto, $L_i(0) = 0$ para todo i . Usando o método visto na Seção 7.2.2, computamos a série de Taylor das constantes de Lyapunov até primeira ordem, $L_i^{[1]}(\varepsilon)$, com respeito a ε , e escrevemos

$$L_i(\varepsilon) = L_i^{[1]}(\varepsilon) + \mathcal{O}_2(\varepsilon).$$

No caso (a) ((b)) consideramos uma perturbação contínua (refrativa, respectivamente) desse centro. Como explicado anteriormente, isso implica que $\varepsilon_i^+ = \varepsilon_i^-$, para $i = 1, 2, 3, 5$ ($\varepsilon_i^+ = -\varepsilon_i^-$, para $i = 2, 3, 5$, respectivamente). Assim, a matriz formada pelos coeficientes de

$(L_2^{[1]}, \dots, L_7^{[1]})$ com respeito a ε tem rank 5 (6, respectivamente). Adicionando o parâmetro do traço e utilizando a Teoria de Melnikov, como explicado na Seção 7.2.2, obtemos 5, (6, respectivamente) ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude bifurcando de $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$.

Finalmente, no caso (c) a prova segue pois a matriz formada pelos coeficientes de $(L_2^{[1]}, \dots, L_{12}^{[1]})$ com respeito a ε tem rank 9, então, adicionando o parâmetro do traço e usando a Teoria de Melnikov, como explicado na Seção 7.2.2, obtemos 9 ciclos limite costurantes hiperbólicos de pequena amplitude bifurcando de $(0, 1, 0)$ em $\mathbb{S}_1^2$. Adicionando o parâmetro do deslize obtemos mais um ciclo limite, utilizando a bifurcação de pseudo-Hopf, o que finaliza a demonstração. $\square$

8 Conclusões e trabalhos futuros

No Capítulo 4 estendemos os resultados de Peixoto [42, 43] para campos de vetores suaves por partes refrativos definidos em esferas bidimensionais, no Teorema 4.2. Também caracterizamos, no Teorema 4.3, o conjunto de codimensão-1 para tais sistemas. Esses resultados foram fundamentais para obtermos o Teorema 4.1, isto é, para exibirmos condições necessárias para que campos de vetores suaves por partes refrativos sejam estruturalmente estáveis na classe de campos parcialmente integráveis $\mathfrak{R}$, com a integral primeira $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. A volta do Teorema 4.1 é um objetivo mais difícil de ser alcançado. Isso porque, mesmo se pedirmos que $Z \in \Sigma_0^{S^\lambda}$, para todo $\lambda > 0$, não é imediato que conseguimos estender a Σ -equivalência para abertos de $\mathbb{R}^3$, mesmo se trabalharmos em abertos do $\mathbb{R}^3$ que não contenham a origem. Outra questão em aberto é a densidade do conjunto Σ_0 . Além disso, ressaltamos que o Teorema 4.1 não tem caráter global em $\mathbb{R}^3$ e, dessa forma, a discussão não engloba o infinito nem a origem do $\mathbb{R}^3$.

No Capítulo 3 estudamos bifurcações locais de codimensão-1 no espaço $\mathfrak{X}$ e órbitas não trivialmente recorrentes. No Capítulo 5 obtemos respostas sobre a caracterização do espaço de campos estruturalmente estáveis e de codimensão-1, nos Teoremas 5.1 e 5.2. A volta do item (2) dos Teoremas 5.1 e 5.2 requer um melhor entendimento do comportamento das pseudo-poli-trajetórias fechadas e pseudo-poli-trajetórias recorrentes.

No Capítulo 6 consideramos campos de vetores na classe $\mathcal{X}$. O Teorema 6.1 nos dá uma classificação geral dos campos lineares nessa classe. Além disso, classificamos os centros em $\mathcal{X}_2^H$ e exibimos famílias de centros para campos em $\mathcal{X}_2$. Infelizmente, não pudemos concluir a recíproca do Teorema 6.3 por causa do enorme custo computacional para fazer todos os cálculos necessários. A Proposição 6.19 e o Teorema 6.5 fornecem as melhores cotas que obtivemos perturbando um centro (3 ciclos limite) e um foco-fraco (4 ciclos limite, respectivamente) na família $\mathfrak{X}_2$. Vimos também que campos de vetores homogêneos nessa família apresentam comportamento semelhante em todas as esferas. Isso não ocorre para campos quadráticos. Então uma pergunta interessante é entender como o comportamento do campo varia quando consideramos o raio como um parâmetro.

No Capítulo 7, provamos que campos na classe $X \in \mathfrak{X}_1$ não possuem ciclos limite nas esferas invariantes. Além disso, perturbando as famílias de centros exibidas no Capítulo 6 com perturbação suave por partes provamos que existe $X \in \mathcal{X}_2$ que admite ao menos 10

ciclos limite costurantes na esfera $\mathbb{S}_1^2$. Essa é uma boa cota de ciclos limite na família $\mathcal{X}_2$, em relação ao número de parâmetros livres. Além disso, como observamos na Seção 7.3.2 o problema de centros ciclicidade para sistemas suaves e suaves por partes pode ser estudado para campos tridimensionais com hiperboloides ou outras superfícies invariantes, utilizando técnicas semelhantes as utilizadas neste trabalho.

Referências

- [1] ANDRONOV, A. A., LEONTOVICH, E. A., GORDON, I. I., AND MAĬER, A. G. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont.; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1971. Translated from the Russian.
- [2] BASTOS, J. L. R., BUZZI, C. A., AND TORREGROSA, J. Orbitally symmetric systems with applications to planar centers. *Communications on Pure & Applied Analysis* 20, 10 (2021), 3319–3346.
- [3] BAUTIN, N. N. On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type. *American Math. Soc. Translation 1954*, 100 (1954), 19.
- [4] BROUCKE, M. E., PUGH, C. C., AND SIMIĆ, S. N. Structural stability of piecewise smooth systems. *Comput. Appl. Math.* 20, 1-2 (2001), 51–89.
- [5] BUZZI, C. A. Generic one-parameter families of reversible vector fields. In *Real and complex singularities*, vol. 412 of *Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000, pp. 202–214.
- [6] BUZZI, C. A., CARVALHO, T., AND EUZÉBIO, R. D. On Poincaré-Bendixson theorem and non-trivial minimal sets in planar nonsmooth vector fields. *Publicacions Matemàtiques* 62, 1 (2018), 113–131.
- [7] BUZZI, C. A., ROBERTO, L. A. F., AND TEIXEIRA, M. A. Stability conditions for reversible and partially integrable systems. *Port. Math.* 78, 1 (2021), 43–63.
- [8] BUZZI, C. A., RODERO, A. L., AND TEIXEIRA, M. A. Stability conditions for piecewise refractive vector fields partially integrable. Preprint, December 2021.
- [9] BUZZI, C. A., RODERO, A. L., AND TORREGROSA, J. Centers and limit cycles for piecewise linear and quadratic vector fields on invariant spheres. Preprint, October 2021.

-
- [10] BUZZI, C. A., RODERO, A. L., AND TORREGROSA, J. Centers and limit cycles of vector fields defined on invariant spheres. *Journal of Nonlinear Science* 31 (2021), 92, 28.
 - [11] CASTILLO, J., LLIBRE, J., AND VERDUZCO, F. The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems. *Nonlinear Dynamics* 90, 3 (2017), 1829–1840.
 - [12] CAUBERGH, M., LLIBRE, J., AND TORREGROSA, J. Global phase portraits of some reversible cubic centers with collinear or infinitely many singularities. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22, 11 (2012), 1250273, 20.
 - [13] CHICONE, C., AND JACOBS, M. Bifurcation of critical periods for plane vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* 312, 2 (1989), 433–486.
 - [14] CHRISTOPHER, C. Estimating limit cycle bifurcations from centers. In *Differential equations with symbolic computation. Trends in Mathematics*. Birkhäuser Basel, 2005, pp. 23–35.
 - [15] DEISS, H. S. Katherine Johnson: A lifetime of STEM. *National Aeronautics and Space Administration (NASA)*. Available on <https://www.nasa.gov/audience/foreducators/a-lifetime-of-stem.html>, 2020. Online. Accessed in November 12, 2021.
 - [16] DI BERNARDO, M., BUDD, C. J., CHAMPNEYS, A. R., AND KOWALCZYK, P. *Piecewise-smooth dynamical systems. Theory and applications*, vol. 163 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, London, 2008.
 - [17] DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, Rio de Janeiro, 6^a ed, 2014.
 - [18] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., AND ARTÉS, J. C. *Qualitative theory of planar differential systems*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
 - [19] EKELAND, I. Discontinuités de champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 47 (1977), 5–32.
 - [20] FALCONI, M., AND LLIBRE, J. $n-1$ independent first integrals for linear differential systems in $\mathbf{R}^n$ and $\mathbf{C}^n$. *Qualitative theory of dynamical systems* 4 (2004), 233–254.
 - [21] FILIPPOV, A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. 18 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Springer, Dordrecht, 1988. Originally published in Russian.

-
- [22] FREIRE, E., PONCE, E., AND TORRES, F. On the critical crossing cycle bifurcation in planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations* 259, 12 (2015), 7086–7107.
- [23] GASULL, A., AND TORREGROSA, J. Center-focus problem for discontinuous planar differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13, 7 (2003), 1755–1765.
- [24] GINÉ, J., GOUVEIA, L. F., AND TORREGROSA, J. Lower bounds for the local cyclicity for families of centers. *Journal of Differential Equations* 275 (2021), 309–331.
- [25] GOMIDE, O. M. L. *On stability conditions for Filippov and hamiltonian systems*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, 2019.
- [26] GOUVEIA, L. F., AND TORREGROSA, J. The local cyclicity problem. Melnikov method using Lyapunov constants. Preprint, March 2020.
- [27] GOUVEIA, L. F., AND TORREGROSA, J. Lower bounds for the local cyclicity of centers using high order developments and parallelization. *Journal of Differential Equations* 271 (2021), 447–479.
- [28] GUARDIA, M., SEARA, T. M., AND TEIXEIRA, M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations* 250, 4 (2011), 1967–2023.
- [29] HAN, M. Liapunov constants and Hopf cyclicity of Liénard systems. *Ann. Differential Equations* 15, 2 (1999), 113–126.
- [30] ILIEV, I. D. The number of limit cycles due to polynomial perturbations of the harmonic oscillator. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 127, 2 (1999), 317–322.
- [31] ILYASHENKO, Y. Centennial history of Hilbert’s 16th problem. *Bulletin of the American Mathematical Society* 39, 3 (2002), 301–354.
- [32] JACQUEMARD, A., AND TEIXEIRA, M. A. Invariant varieties of discontinuous vector fields. *Nonlinearity* 18 (2005), 21–43.
- [33] JUCÁ, J. D. S. *Conjuntos limite e transitividade de campos vetoriais suaves por partes em variedades Riemannianas bi-dimensionais*. PhD thesis, Universidade Federal de Goiás. Instituto de Matemática e Estatística, 2020.

-
- [34] KUZNETSOV, Y. A., RINALDI, S., AND GRAGNANI, A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13, 8 (2003), 2157–2188.
 - [35] LAMB, J. S. W., AND ROBERTS, J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 112, 1-2 (1998), 1–39. Proceedings of the Workshop on Time-Reversal Symmetry in Dynamical Systems.
 - [36] LARROSA, J. F. *Generic bifurcation in planar Filippov systems*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2015.
 - [37] LLIBRE, J., AND PESSOA, C. Homogeneous polynomial vector fields of degree 2 on the 2-dimensional sphere. *Extracta Mathematicae* 21, 2 (2006), 167–190.
 - [38] LLIBRE, J., AND PESSOA, C. Invariant circles for homogeneous polynomial vector fields on the 2-dimensional sphere. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* 55 (2006), 63–81.
 - [39] LLIBRE, J., AND TEIXEIRA, M. A. Periodic orbits of continuous and discontinuous piecewise linear differential systems via first integrals. *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences* 12 (2018), 121–135.
 - [40] MAPLESOFT, A DIVISION OF WATERLOO MAPLE INC. Maple.
 - [41] NOVAES, D. D., TEIXEIRA, M. A., AND ZELI, I. O. The generic unfolding of a codimension-two connection to a two-fold singularity of planar Filippov systems. *Nonlinearity* 31, 5 (2018), 2083–2104.
 - [42] PEIXOTO, M. C., AND PEIXOTO, M. M. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 31, 2 (1959), 135–160.
 - [43] PEIXOTO, M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* 1, 2 (1962), 101–120.
 - [44] QUISPE, J. E. A. *Estabilidade estrutural de campos de vetores suave por partes*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2014.
 - [45] ROMANOVSKI, V. G., AND SHAFER, D. S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach*. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2009.
 - [46] ROUSSARIE, R. *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert’s sixteenth problem*, vol. 164 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

-
- [47] SOTOMAYOR, J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 43 (1974), 5–46.
 - [48] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, vol. 11 of *Projeto Euclides*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
 - [49] SOTOMAYOR, J., AND MACHADO, A. L. F. Structurally stable discontinuous vector fields in the plane. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* 3, 37 (2002), 227–250.
 - [50] SOTOMAYOR, J., AND TEIXEIRA, M. A. Regularization of discontinuous vector fields. In *International Conference on Differential Equations (Equadiff 95), Lisboa, 1995*. World Scientific, pp. 207–223.
 - [51] TEIXEIRA, M. A. Generic bifurcation in manifolds with boundary. *Journal of Differential Equations* 25, 1 (1977), 65–89.
 - [52] TEIXEIRA, M. A. Generic singularities of discontinuous vector fields. *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 53, 2 (1981), 257–260.
 - [53] ZHANG, X. *Integrability of dynamical systems: algebra and analysis*, vol. 47 of *Developments in Mathematics*. Springer, Singapore, 2017.