



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Sobre o Teorema da Alfândega

Débora Cristina Lopes dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-  
Graduação em Matemática como requisito  
parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli

2014

514 Santos, Débora Cristina Lopes dos  
S237s Sobre o Teorema da Alfândega / Débora Cristina Lopes  
dos Santos. - Rio Claro, 2015  
43 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Elíris Cristina Rizziolli

1. Topologia. 2. Geometria. 3. Teorema do Valor  
Intermediário. 4. Espaços conexos. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP  
Campus de Rio Claro/SP

# TERMO DE APROVAÇÃO

Débora Cristina Lopes dos Santos  
SOBRE O TEOREMA DA ALFÂNDEGA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli  
Orientadora

Prof. Dr. Estaner Claro Romão  
EEL/USP/Lorena(SP)

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato  
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

**Rio Claro, dezembro 2014**

*A Deus, minha família, amigos, colegas de trabalho, a todos os professores que passaram pela minha vida, principalmente à minha orientadora, força, incentivo, companheirismo e amizade. Sem eles nada disso seria possível.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades. Um agradecimento especial à minha amiga e orientadora, Profa. Dra. Eliris Cristina Rizzioli, que acreditou na proposta desta pesquisa e jamais poupou esforços no sentido de me ajudar a realizá-la. Obrigada! À minha família, em especial, meu pai, minha mãe, meu irmão e minha avó, os quais amo muito, pelo carinho, paciência e incentivo. Ao meu namorado, Felipe de Moraes Carvalho, companheiro que sempre acreditou em mim e ajudou para que eu pudesse alcançar meus sonhos. Estou certa de que não mediram esforços em nenhuma etapa, portanto, essa vitória é deles também. À Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, em especial, ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Universitária do Campus de Rio Claro, pela oportunidade de crescimento à minha carreira profissional através do Mestrado. Às professoras da Banca Examinadora da qualificação pelas sugestões apresentadas. Aos demais professores do programa de Pós-Graduação em Matemática. Aos meus companheiros de viagem, pelas conversas nas horas difíceis e alegres, pelo incentivo e pela ajuda pessoal e acadêmica no decorrer do curso. Às amigas Aline, Mariana, e ao amigo Edilson, companheiros de estudos de longa data. Por último, mas não menos importante, agradeço a todo corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática do campus da UNESP de São José do Rio Preto, em especial às professoras doutoras Ermínia de Lourdes Campello Fanti e Rita de Cássia Pavani Lamas, orientadoras de Iniciação à Docência, que me ensinaram muito ao longo dos estágios que percorremos juntas. E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho. Muito obrigado a todos!

*Aprendi que se depende sempre, de tanta muita diferente gente. Toda pessoa sempre é marca das lições diárias de outras tantas pessoas. É tão bonito quando a gente entende que a gente é tanta gente, onde quer que a gente vá. É tão bonito quando a gente sente que nunca está sozinho por muito mais que pense estar... Gonzaguinha.*

# Resumo

Neste trabalho tratamos do Teorema da Alfândega e aplicações. Para o desenvolvimento deste estudo fez-se necessário explorar elementos da Topologia, entre estes destacamos Espaço Conexo. Além dos prerequisites para enunciar e demonstrar o Teorema da Alfândega, também estudamos o Teorema do Valor Intermediário e aplicações interessantes deste. Finalizamos o corpo desta dissertação elucidando duas aplicações do Teorema da Alfândega em dois contextos diferentes.

**Palavras-chave:** Geometria e Topologia, Espaços Conexos, Teorema da Alfândega, Teorema do Valor Intermediário.

# Abstract

In this dissertation we discuss the Theorem of Customs and its applications, among which we underline the theorem of intermediate value. Therefore, we had to remind some information such as the basic language of topology and connectivity, so we could reach our main objective, the of Customs Theorem. We intend to show the importance of this theorem that unfolds in many applications.

**Keywords:** Geometry and Topology, Connected Space, Customs Theorem, Intermediate Value Theorem.

# Sumário

|          |                                              |           |
|----------|----------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                            | <b>9</b>  |
| <b>2</b> | <b>Linguagem Básica de Topologia</b>         | <b>10</b> |
| 2.1      | Elementos de Espaços Métricos . . . . .      | 10        |
| 2.2      | Conjuntos Aberto e Fechado . . . . .         | 19        |
| 2.3      | Função Contínua . . . . .                    | 26        |
| <b>3</b> | <b>Conexidade</b>                            | <b>31</b> |
| <b>4</b> | <b>Sobre o Teorema da Alfândega</b>          | <b>35</b> |
| <b>5</b> | <b>Aplicações do Teorema da Alfândega</b>    | <b>38</b> |
| 5.1      | Aplicação em Geometria Diferencial . . . . . | 38        |
| 5.1.1    | Demonstração do teorema 5.1 . . . . .        | 39        |
| 5.2      | Aplicação em Sistemas Dinâmicos . . . . .    | 40        |
| 5.2.1    | Demonstração do teorema 5.2 . . . . .        | 41        |
| <b>6</b> | <b>Considerações Finais</b>                  | <b>43</b> |
|          | <b>Referências</b>                           | <b>44</b> |

# 1 Introdução

Neste trabalho tratamos do Teorema da Alfândega e aplicações. Para o desenvolvimento deste estudo fez-se necessário explorar elementos da Topologia, entre estes destacamos Espaço Conexo.

A escolha deste tema para desenvolver uma dissertação de mestrado deste programa se fez quando pensamos em elaborar um material para nortear o estudo inicial da disciplina Espaços Métricos, inserida nas grades curriculares dos melhores cursos de graduação em Matemática.

Além dos prerequisites para enunciar e demonstrar o Teorema da Alfândega, também estudamos o Teorema do Valor Intermediário e aplicações interessantes deste. Finalizamos o corpo desta dissertação elucidando duas aplicações do Teorema da Alfândega em dois contextos diferentes, a saber, da Geometria Diferencial com o estudo sobre Convexidade de Superfície e de Sistemas Dinâmicos com o tópico Estabilidade de Conjuntos Invariantes. Além da presente Introdução esta dissertação contém mais quatro capítulos. Com efeito, no segundo capítulo abordamos elementos básicos sobre espaços métricos entre estes destacamos a definição de Função Contínua. Preservamos o capítulo 3 para tratarmos da Conexidade de um espaço métrico já que este é o fio condutor enunciado como da demonstração do Teorema da Alfândega. Enunciamos e demonstramos o Teorema da Alfândega no quarto capítulo, o qual é finalizado com a demonstração do Teorema do Valor Intermediário visto como corolário do Teorema da Alfândega, e aplicações pertinentes a este. Outras aplicações do Teorema da Alfândega são apresentadas no capítulo 5, com o qual encerramos esta dissertação.

## 2 Linguagem Básica de Topologia

Iniciaremos o nosso trabalho, com definições de topologia, a saber, elementos básicos sobre espaços métricos, conjuntos abertos e fechados e destacando a definição de função contínua, e sua caracterização em termos de conjunto aberto.

### 2.1 Elementos de Espaços Métricos

**Definição 2.1.** *Dado um conjunto  $M$  não vazio chamamos de métrica uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par  $(x, y) \in M \times M$  um número real denotado por  $d(x, y)$ , chamado distância de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes propriedades:  $\forall x, y, z \in M$*

(d1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;

(d2) Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ ;

(d3)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

(d4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

A propriedade d4 é conhecida como “Desigualdade triangular”. No caso,  $M = \mathbb{R}$  e  $d(x, y) = |x - y|$ , se os pontos  $x, y, z$  não forem colineares, a medida de um dos lados do triângulo formado por esses pontos nunca excede a soma das medidas dos outros dois, justificando assim o motivo do nome a esta propriedade.

**Definição 2.2.** *Um espaço métrico é um par  $(M, d)$ , em que  $M$  é um conjunto não vazio qualquer e  $d$  é uma métrica em  $M$ .*

*Os elementos de um espaço métrico podem ser de qualquer natureza: pontos, matrizes, funções, números, vetores, entre outros, porém, sempre os chamaremos de pontos do espaço métrico.*

**Exemplo 2.1.** Seja  $M$  um conjunto não vazio qualquer, a aplicação  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$  é uma métrica, pois as propriedades d1 a d4 são satisfeitas. Com efeito,

(d1) Se  $d(x, x) = 0$ , por definição de  $d$ ,  $x = y$  e reciprocamente, se  $x = y$ ,  $d(x, x) = 0$

(d2)  $d(x, y) > 0$ , se  $x \neq y$ . Já que  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$ .

Logo  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ .

(d3)  $d(x, y) = d(y, x)$ , pois, se  $x = y$  temos que  $d(x, y) = 0 = d(y, x)$ . Por outro lado, se  $x \neq y$  temos que  $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ . Portanto,  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$ .

(d4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall z \in M$ .

Analisemos por casos:

\* Se  $x = y = z$  temos que  $d(x, z) = d(x, y) = d(y, z) = 0$ . Logo  $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) = 0$ .

\* Se  $x = y \neq z$  temos que  $d(x, z) = 1, d(x, y) = 0$  e  $d(y, z) = 1$ . Assim  $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) = 1$ .

\* Se  $x \neq y = z$  temos que  $d(x, z) = 1, d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 0$ . Dessa forma  $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z) = 1$ .

\* Se  $x = z \neq y$  temos que  $d(x, z) = 0, d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 1$ .

Logo  $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$ , pois  $0 < 2$ .

\* Se  $x \neq y \neq z$  temos que  $d(x, z) = 1, d(x, y) = 1$  e  $d(y, z) = 1$ .

Assim  $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$ , pois  $1 < 2$ .

Tal métrica é denominada *Métrica zero-um*.

**Exemplo 2.2.** Se  $(M, d)$  é um espaço métrico, todo subconjunto  $S \subset M$  pode ser um espaço métrico, basta considerar a restrição de  $d$  a  $S \times S$ , isto é, basta tomar a mesma métrica do espaço  $(M, d)$  para os elementos de  $S$ . Chamamos  $S$  de subespaço de  $M$  e a métrica de  $S$  diz-se induzida por  $M$ , denotada por  $d_S$ .

**Exemplo 2.3.** O par  $(\mathbb{R}, d)$ , em que  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é a função modular como

$d(x, y) = |x - y|$  é um espaço métrico e esta métrica é conhecida como métrica usual da reta.

Verifiquemos as quatro condições necessárias para que  $d$  seja métrica.

(d1)  $d(x, x) = 0$ . De fato, pela definição de  $d$  temos que  $d(x, y) = |x - y|$ , logo  $d(x, x) = |x - x| = 0$ .

(d2) Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ . Pois, sabemos que  $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ , resta mostrar que  $(x - y) \neq 0$ . Para tanto observe que,  $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow 0 \neq x - y \leq |x - y| \Rightarrow 0 \neq |x - y|$ .

(d3)  $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ .

(d4) Para mostrar que  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , primeiro relembremos a desigualdade triangular para módulo de números reais, a saber:  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , com efeito,  $(|a + b|)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a^2| + |2ab| + |b^2| = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$ . Ou seja,  $(|a + b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2 \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$ . Com isto temos  $d(x, z) = |x - z| = |x + (y - y) + z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$ .

**Exemplo 2.4.** Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são  $n$ -uplas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  em que cada uma das  $n$  coordenadas  $x_i$  é um número real.

Ou seja,  $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Há três maneiras usuais de se definir a distância (ou seja, uma métrica) entre dois pontos em  $\mathbb{R}^n$ .

A saber, dados  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , quaisquer, definimos as seguintes aplicações de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ :

1.  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$
2.  $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$
3.  $d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$

Verifiquemos que  $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definidas acima são métricas.

Para tanto, sejam  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  e  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ , quaisquer.

Analisemos primeiramente a aplicação  $d$ :

d1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x = y$ .

d2)  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ . Primeiramente, se  $x = (x_1, \dots, x_n) \neq y = (y_1, \dots, y_n)$  existe pelo menos um índice  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x_j \neq y_j$ , isto é,  $x_j - y_j \neq 0$ , consequentemente  $(x_j - y_j)^2 \neq 0$  e então  $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \neq 0$ . Já que esta é uma somatória de parcelas não negativas e com pelo menos uma destas diferente de zero.

Desta forma,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

d3)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = d(y, x).$$

d4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . Esta desigualdade será demonstrada mais adiante na observação 2.1.

Verifiquemos agora  $d'$ .

$$d1) d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow$$

$$|x_i - y_i| = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x = y.$$

$$d2) d'(x, y) > 0 \text{ se } x \neq y.$$

A definição de  $d'$  nos diz que  $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$ , por se tratar de módulo, temos que  $d'(x, y) \geq 0$ , no entanto se tomarmos  $x \neq y$ , teremos que  $d'(x, y) > 0$ , já que para algum  $1 \leq i \leq n$  temos  $|x_i - y_i| > 0$ .

$$d3) d'(x, y) = d'(y, x).$$

Pela definição de módulo temos que  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$  para qualquer  $1 \leq i \leq n$  logo  $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n| = d'(y, x)$ .

$$d4) d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z).$$

$$\begin{aligned} d'(x, z) &= |x_1 - z_1| + \dots + |x_n - z_n| = |x_1 - z_1 + y_1 - y_1| + \dots + |x_n - z_n + y_n - y_n| = \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + \dots + |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_1 - z_1| + \\ &+ |x_1 - z_1| + \dots + |y_n - z_n|, d'(x, y) \leq d'(x, y) + d'(y, z). \end{aligned}$$

Finalmente estudemos as propriedades para  $d''$ .

$$d1) d''(x, y) = 0 \Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x = y.$$

$$d2) d''(x, y) > 0 \text{ se } x \neq y.$$

Como  $x \neq y$ , existe pelo menos um índice  $i = 1, \dots, n$  tal que  $x_i \neq y_i$ , isto é,  $|x_i - y_i| > 0$ .

Logo, como  $d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ , o maior desses valores será sempre maior ou igual a zero, ou seja,  $d''(x, y) > 0$ .

$$d3) d''(x, y) = d''(y, x).$$

$$\text{Pois, } d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - x_i|\} = d''(y, x).$$

$$d4) d''(x, z) \leq d''(x, y) + d''(y, z).$$

Com efeito, sabemos que  $|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

$$\text{Consequentemente, } \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\}.$$

$$\text{Mas, } \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - z_i|\}.$$

$$\text{Logo, } d''(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - z_i|\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - z_i|\} = d''(x, y) + d''(y, z).$$

$$\text{Portanto, } d''(x, z) \leq d''(x, y) + d''(y, z).$$

**Definição 2.3.** *Seja  $E$  um espaço vetorial real. Uma norma em  $E$  é uma função real  $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada vetor  $x \in E$  um número real  $\|x\|$ , chamado norma de  $x$ , de modo que satisfaça as seguintes condições:  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .*

$$N_1) \text{ Se } x \neq 0 \text{ então } \|x\| \neq 0;$$

$$N_2) \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|;$$

$$N_3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Observe que tais condições implicam duas interessantes propriedades, a saber;  
 $\forall x \in \mathbb{E}, \|x\| = \|-x\|$  e  $\|x\| \geq 0$ .

**Definição 2.4.** Um espaço normado é um par  $(E, \|\cdot\|)$  em que  $E$  é um espaço vetorial real e  $\|\cdot\|$  é uma norma em  $E$ .

**Exemplo 2.5.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|'), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|'')$  em que  $\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ ;

$\|x\|' = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ;  $\|x\|'' = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$  são exemplos de espaços normados.

Todo espaço vetorial normado  $(E, \|\cdot\|)$  torna-se um espaço métrico via a aplicação  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Esta métrica diz-se *proveniente da norma*  $\|\cdot\|$ .

Por exemplo as métricas  $d, d'$  e  $d''$  são provenientes das normas  $\|\cdot\|, \|\cdot\|', \|\cdot\|''$  respectivamente.

Nota-se que, num espaço vetorial normado, tem-se  $\|x\| = d(x, 0)$ , isto é, a norma de  $x$  é a distância de  $x$  até a origem.

**Definição 2.5.** Seja  $E$  um espaço vetorial real. Um produto interno é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado de vetores  $x, y \in E$  um número real  $\langle x, y \rangle$ , chamado de produto interno de  $x$  por  $y$ , de modo a serem cumpridas as condições abaixo:  $\forall x, x', y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$P_1) \langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle;$$

$$P_2) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle;$$

$$P_3) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

$$P_4) x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0.$$

Observe que a partir de um produto interno é possível definir uma norma. Com efeito, seja  $x \in E$ , a aplicação  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  é uma norma. Antes de demonstrar esta afirmação vejamos o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

**Demonstração.**

Se  $x = 0$ , então  $|\langle 0, y \rangle| = \|0\| \cdot \|y\|$ ;

Se  $x \neq 0$  defina  $\lambda = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|^2}$ .

Veja que o vetor  $z := y - \lambda x$  é tal que  $\langle z, x \rangle = 0$  pois:

$$\begin{aligned} \langle z, x \rangle &= \langle y - \lambda x, x \rangle = \langle y, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle = \langle y, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|^2} \cdot \|x\|^2 = \langle y, x \rangle \\ &- \langle x, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Em particular temos } y &= z + \lambda x, \text{ daí: } \|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \langle z + \lambda x, z + \lambda x \rangle = \\ &\langle z, z \rangle + 2\lambda \langle z, x \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle = \|z\|^2 + 2\lambda \cdot 0 + \lambda^2 \|x\|^2 = \|z\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ou seja, } \|y\|^2 = \|z\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2.$$

$$\text{Consequentemente, } \lambda^2 \|x\|^2 \leq \|y\|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \left(\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|^2}\right)^2 \cdot \|x\|^2 &\leq \|y\|^2 \Rightarrow \frac{(\langle x, y \rangle)^2}{(\|x\|)^2} \leq \|y\|^2 \Rightarrow (\langle x, y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

■

**Lema 2.1.** Se  $(E, \langle, \rangle)$  é um espaço com produto interno, então a aplicação de  $E$  em  $\mathbb{R}$  dada por  $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$  é uma norma.

**Demonstração.**

$$\text{Denote } \sqrt{\langle x, x \rangle} := \|x\|$$

$$1 - \text{Se } x \neq 0 \text{ então } \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ e portanto } \|x\| \neq 0.$$

$$2 - \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 - \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \text{ Com efeito, } (\|x + y\|)^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle \\ &+ 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = (\|x\|)^2 + 2\langle x, y \rangle + (\|y\|)^2 \leq (\|x\|)^2 + 2\|x\|\|y\| + (\|y\|)^2 = \\ &(\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ou seja,}$$

$$(\|x + y\|)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$

■

**Observação 2.1.** Com este Lema podemos finalmente demonstrar que  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  em que  $d$  é a métrica  $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ .

Para tanto tomemos em  $\mathbb{R}^n$  o produto interno

$$\langle a, b \rangle := \left[ \sum_{i=1}^n (a_i b_i) \right], \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Desta maneira segue que } d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Assim, pela desigualdade triangular de norma temos

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Veja que esta relação só foi possível pois esta métrica é proveniente de um produto interno.

**Observação 2.2.** Sejam  $(M, d_M)$  e  $(N, d_N)$  espaços métricos. O produto cartesiano  $M \times N$  é, como conjunto, formado pelos pares ordenados  $z = (x, y)$ , em que  $x \in M$  e  $y \in N$ . Podemos dotar o produto  $M \times N$  de uma métrica, definindo a distância de  $z = (x, y)$  a  $z' = (x', y')$  como sendo:

$$\begin{aligned}
d'(z, z') &= d_M(x, x') + d_N(y, y'), & \text{ou} \\
d''(z, z') &= \max\{d_M(x, x'), d_N(y, y')\}, & \text{ou} \\
d(z, z') &= \sqrt{d_M(x, x')^2 + d_N(y, y')^2}.
\end{aligned}$$

De modo geral, sejam  $M_1, M_2, \dots, M_n$  espaços métricos cujas métricas indicaremos com o mesmo símbolo  $d$ , o produto cartesiano  $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  é o conjunto das listas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde  $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$ . Tornamos  $M$  um espaço métrico munindo-o com uma qualquer das três métricas abaixo:

$$\begin{aligned}
d''(x, y) &= \max\{d_{M_1}(x_1, y_1), \dots, d_{M_n}(x_n, y_n)\}, \\
d'(x, y) &= d_{M_1}(x_1, y_1) + \dots + d_{M_n}(x_n, y_n), \\
d(x, y) &= \sqrt{d_{M_1}(x_1, y_1)^2 + \dots + d_{M_n}(x_n, y_n)^2}.
\end{aligned}$$

A noção de bola é fundamental ao estudo da topologia de espaços métricos.

**Definição 2.6.** *Sejam  $a$  um ponto no espaço métrico  $M$  e um número real  $r > 0$ .*

*A bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B(a, r)$  dos pontos de  $M$  cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $r$ . Ou seja,*

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

*A bola fechada de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $B[a, r]$ , tal que*

$$B[a, r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

*A esfera de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto  $S(a, r)$ , em que*

$$S(a, r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Observemos que  $B[a, r] = B(a, r) \cup S(a, r)$ ,  $B[a, r] = B(a, r) \cap S(a, r) = \emptyset$ .

Quando a métrica  $d$  provém de uma norma no espaço vetorial  $E$ , podemos escrever: bem como

$$B(a, r) = \{x \in E; |x - a| < r\};$$

$$B[a, r] = \{x \in E; |x - a| \leq r\};$$

$$S(a, r) = \{x \in E; |x - a| = r\}.$$

Observe que sendo  $X$  um subespaço do espaço métrico  $M$ ,  $a \in X$  e  $r > 0$ , seja  $B_x(a; r)$  a bola de centro  $a$  e raio  $r$ , relativamente à métrica induzida em  $X$ . Note que  $B_x(a; r) = B(a, r) \cap X$ , em que  $B(a, r)$  é a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  no espaço  $M$ . Do mesmo modo,  $B_x[a; r] = B[a, r] \cap X$  e  $S_x(a; r) = S(a, r) \cap X$ .

**Exemplo 2.6.** Se  $M$  é um espaço métrico munido da métrica do zero-um então, para todo  $a \in M$ , tem-se  $B(a, r) = B[a, r] = M$  se  $r > 1$ . Enquanto  $B(a, r) = B[a, r] = \{a\}$  se  $r < 1$ . Ainda  $B(a; 1) = \{a\}$  e  $B[a; 1] = M$ . Além disso,  $S(a, r) = \emptyset$  se  $r \neq 1$ , enquanto  $S(a; 1) = M - \{a\}$ .

**Exemplo 2.7.** Com a métrica usual da reta, para todo  $a \in \mathbb{R}$  e todo  $r > 0$ , a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o intervalo aberto  $(a - r, a + r)$ . Analogamente,  $B[a, r]$  é o intervalo fechado  $[a - r, a + r]$  e a esfera  $S(a, r)$  tem apenas dois pontos, a saber,  $a - r$  e  $a + r$ . Pois se focarmos inicialmente a bola aberta centrada em  $a$  e raio  $r$ , pela métrica da reta temos que  $d(a, x) = |x - a|$ , logo  $d(a, x) < r \Rightarrow |x - a| < r$  o que equivale a dizer que  $-r < x - a < r$ , ou seja,  $a - r < x < a + r$ . De forma análoga demonstramos que  $B[a, r] = [a - r, a + r]$ , já que pela definição de bola fechada temos que  $d(a, x) \leq r$  o que implica que  $|x - a| \leq r \Rightarrow -r \leq x - a \leq r \Rightarrow a - r \leq x \leq a + r$ .

Trabalhando agora com a definição de esfera, como  $x \in S(a, r) \Leftrightarrow d(a, x) = r$ , chegamos que  $|x - a| = r \Rightarrow x - a = r$  ou  $x - a = -r \Rightarrow x = a + r$  e  $x = a - r$ .

**Exemplo 2.8.** Vejamos como fica as bolas abertas munindo  $\mathbb{R}^2$  com as métricas  $d, d', d''$  respectivamente. Para tanto sejam  $a = (a_1, a_2), b = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , quaisquer.

**Métrica  $d$ .** Pela definição da métrica  $d$ , temos que  $d(a, b) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}$ .

Dessa forma, pensando na bola aberta centrada em  $a$  e raio  $r$ , temos que para que  $b$  pertença a essa bola é necessário e suficiente que  $d(a, b) < r$ . Logo  $\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r$ .

Elevando ambos os lados dessa igualdade ao quadrado chegamos que  $|(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2| < r^2$  e como  $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2$  resulta em um valor positivo, temos que  $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2$  que é exatamente o interior de uma circunferência de centro em  $a$  e raio  $r$ .

**Métrica  $d'$ .** Trabalhando com a métrica  $d'$ , temos que dado um  $r > 0$ ,  $B(a, r)$  é o conjunto dos pontos tais que  $d'(a, b) < r$ . Assim  $|x - a_1| + |y - a_2| < r$  o que é exatamente o interior de um quadrado centrado em  $a$ , lados de medida  $2r$  e diagonais paralelas aos eixos.

**Métrica  $d''$ .** Utilizando a métrica  $d''$ , uma bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  é o conjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^2$  tais que  $\max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} < r$ , ou seja, o maior valor entre  $|x - a_1|$  e  $|y - a_2|$  é menor do que  $r$ , o que implica que  $|x - a_1| < r$  e  $|y - a_2| < r$  resultando no interior de um quadrado cujo lados são paralelos aos eixos e medem  $2r$ .

**Exemplo 2.9.** No produto cartesiano  $M = M_1 \times \dots \times M_n$ , tomemos a métrica  $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(x_i, y_i)\}$ . Então as bolas em  $M$  são produtos cartesianos de bolas nos fatores  $M_i$ :

$$B(a, r) = B(a_1; r) \times \dots \times (a_n; r)$$

$$B[a, r] = B[a_1; r] \times \dots \times B[a_n; r],$$

em que  $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$ .

**Definição 2.7.** *Seja  $M$  um espaço métrico. Um ponto  $a \in M$  chama-se um ponto isolado de  $M$  quando ele é uma bola aberta em  $M$ , ou seja, quando existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) = \{a\}$ . Isto significa que, além do ponto  $a$ , não existem outros pontos de  $M$  a uma distância de  $a$  inferior a  $r$ . Assim, dizer que um ponto  $a \in M$  não é isolado significa, afirmar que para todo  $r > 0$  pode-se encontrar um ponto  $x \in M$  tal que  $0 < d(a, x) < r$ .*

**Exemplo 2.10.** Seja  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  o conjunto dos inteiros com a métrica induzida pela métrica usual da reta. Todo ponto  $n \in \mathbb{Z}$  é isolado, pois tomando  $r \leq 1$  vemos que se  $x \in \mathbb{Z}$  e tal que  $x \in B(n, r)$  então temos:  $|x - n| < r$  e portanto  $x = n$ . Por outro lado  $\bar{P} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$  ainda com a métrica usual da reta temos que o ponto 0 não é um ponto isolado em  $\bar{P}$ .

De fato, para qualquer  $r > 0$ , como  $\mathbb{R}$  é arquimediano, sabemos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{n} < r$ , assim sabemos que  $\frac{1}{n}$  é um ponto da bola  $B(0, r)$  diferente de seu centro 0.

Porém podemos afirmar que todo ponto  $\frac{1}{n}$  é um ponto isolado em  $\bar{P}$ .

Sabemos que o ponto mais próximo de  $\frac{1}{n}$  é  $\frac{1}{n+1}$  e como a métrica definida é a métrica usual da reta, temos que a distância de  $\frac{1}{n}$  a  $\frac{1}{n+1}$  é:

$$d(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| = |\frac{n+1-n}{n(n+1)}| = |\frac{1}{n(n+1)}| = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Então se tomarmos  $0 < r < \frac{1}{n(n+1)}$ , temos que a bola aberta  $B(\frac{1}{n}, r)$  possui, de fato, apenas seu centro  $\frac{1}{n}$ .

Em particular, no subespaço  $P = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ , todo ponto é isolado.

Um espaço métrico  $M$  chama-se *discreto* quando todo ponto de  $M$  é isolado, ou seja, para qualquer ponto  $a \in M$  existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) = \{a\}$ , por exemplo, um espaço com a métrica zero-um é discreto, pois tomando  $r \leq 1$  temos que para qualquer ponto  $a \in M$ ,  $d(a, x) < r$  se  $x = a$  pois  $d(a, a) = 0$ . Os exemplos anteriores,  $\mathbb{Z}$  e  $P$ , são espaços discretos.

Um subconjunto  $X \subset M$  chama-se *discreto* quando o subespaço  $X$  (métrica induzida) é discreto. Isto significa que para cada  $x \in X$  existe uma bola aberta  $B(x, r)$  tal que  $X \cap B(x, r) = \{x\}$ , ou seja  $B_X(x, r) = \{x\}$ .

**Proposição 2.1.** *Dados os pontos  $a \neq b$  num espaço métrico  $M$ , sejam  $r > 0$  e  $s > 0$  tais que  $r + s < d(a, b)$ . Então as bolas abertas  $B(a, r)$  e  $B(b, s)$  são disjuntas.*

**Demonstração.** Se existisse algum ponto  $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$  teríamos:

$$d(a, x) < r \text{ e } d(b, x) < s, \text{ então}$$

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(b, x) < r + s \leq d(a, b).$$

Ou seja,  $d(a, b) < d(a, b)$ , o que é um absurdo. O absurdo foi supor a existência de um ponto  $x \in B(a, r) \cap B(b; s)$ .

Portanto,  $B(a, r) \cap B(b; x) = \emptyset$ .

■

**Corolário 2.1.** *Se  $r + s < d(a, b)$  então as bolas fechadas  $B[a, r]$  e  $B[b, s]$  são disjuntas.*

**Demonstração.** Note que se existisse  $x \in B[a, r] \cap B[b, s]$  teríamos  $d(a, x) \leq r$  e  $d(b, x) \leq s$ , então  $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq r + s < d(a, b)$ , ou seja,  $d(a, b) < d(a, b)$ , o que é um absurdo, logo não existe o ponto  $x \in B[a, r] \cap B[b, s]$ .

■

## 2.2 Conjuntos Aberto e Fechado

**Definição 2.8.** *Seja  $X$  um subconjunto não vazio de um espaço métrico  $M$ . Um ponto  $a \in X$  diz-se ponto interior a  $X$  quando este é o centro de alguma bola aberta inteiramente contida em  $X$ , isto é, quando existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset X$ .*

*Denota-se  $\text{int}X$  o conjunto formado pelos pontos interiores de  $X$ .*

Veja que se  $b \in X$  não é ponto interior de  $X$  então qualquer bola aberta de centro em  $b$  contém pontos que não pertencem a  $X$ .

**Definição 2.9.** *A fronteira de  $X$  em  $M$ ,  $\partial X$  é o conjunto formado pelos pontos  $b \in M$  tais que toda bola de centro em  $b$  contém pelo menos um ponto de  $X$  e um ponto do conjunto complementar de  $X$  em  $M$ ,  $M - X$ .*

*Ou seja,  $\partial X \cap M \neq \emptyset$  e  $\partial X \cap (M - X) \neq \emptyset$ .*

**Observação 2.3.** Toda bola contém seu centro  $b$  o qual pertence a  $X$  ou a  $M - X$ . Desta maneira, para mostrar que  $b \in \partial X$  basta, quando  $b \in X$ , provar que toda bola aberta de centro  $b$  contém pontos em  $M - X$ , ou se  $b \in M - X$ , provar que toda bola aberta de centro em  $b$  contém pontos em  $X$ .

**Exemplo 2.11.** O interior do intervalo  $[0, 1]$  em  $\mathbb{R}$  é o intervalo  $(0, 1)$  e sua fronteira é o conjunto formado pelos pontos 0 e 1.

De fato, para qualquer  $a \in (0, 1)$ , tomando  $r = \min \{a, 1 - a\}$  temos que  $(a - r, a + r) \subset [0, 1]$ , ou seja, todo ponto no intervalo  $(0, 1)$  é ponto interior do conjunto  $[0, 1]$ . Enquanto que os pontos 0 e 1 estão na fronteira, já que qualquer bola aberta de centro em 0 ou em 1 necessariamente contém pontos de  $\mathbb{R} - [0, 1]$ . Por exemplo, uma bola de centro em 0 contém números reais negativos, os quais evidentemente não estão contidos em  $[0, 1]$ ; por outro lado, uma bola de centro em 1 contém números reais maiores que 1, os quais não pertencem ao intervalo  $[0, 1]$ .

**Observação 2.4.** Seja  $X$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Dado um ponto  $c \in M$ , qualquer, há três possibilidades:

1.  $c \in \text{int}X$ , ou seja, existe uma bola aberta de centro em  $c$  inteiramente contida em  $X$ ;
2.  $c \in \text{int}(M - X)$ , ou seja, existe uma bola aberta de centro em  $c$  inteiramente contida em  $M - X$ ;
3.  $c \in \partial X$ , ou seja, toda bola aberta de centro em  $c$  contém pontos de  $X$  e de  $M - X$ .

Logo, todo conjunto  $X$  determina a decomposição do espaço métrico onde está inserido, como reunião de três subconjuntos dois a dois disjuntos. A saber,

$$M = \text{int}X \cup \partial X \cup \text{int}(M - X).$$

Desta decomposição segue que  $\partial X = \partial(M - X)$ . Por exemplo, se  $M = \mathbb{R}$  e  $X = [0, 1)$  temos  $\mathbb{R} = (0, 1) \cup \{0, 1\} \cup Y$  em que  $Y = \text{int}(\mathbb{R} - [0, 1)) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ .

**Definição 2.10.** Um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $M$  diz-se aberto em  $M$  quando todos os pontos são interiores, isto é,  $\text{int}A = A$ .

Veja que  $A \subset M$  é aberto se, e somente se,  $A \cap \partial A = \emptyset$ . Com efeito, se  $A \subset M$  é aberto temos que qualquer ponto de  $A$  pertence ao interior de  $A$ , assim não existem pontos pertencentes a fronteira de  $A$ , portanto  $A \cap \partial A = \text{int}A \cap \partial A = \emptyset$ .

Por outro lado, se  $A \cap \partial A = \emptyset$ , temos que dado qualquer ponto de  $A$ , ele não pertence a  $A$  e à fronteira de  $A$  ao mesmo tempo, assim ele pertence apenas a  $A$ , logo temos uma bola aberta de centro em  $x$  inteiramente contida em  $A$ , assim todo  $x \in A$  é ponto interior de  $A$ , então  $\text{int}A = A$ , ou seja,  $A$  é um conjunto aberto.

**Proposição 2.2.** Em qualquer espaço métrico  $M$ , uma bola aberta  $B(a, r)$  é um conjunto aberto.

**Demonstração.** Seja  $x \in B(a, r)$ , qualquer. Queremos mostrar que existe um raio  $s > 0$  tal que  $B(x, s) \subset B(a, r)$ . Para tanto, defina  $s := r - d(a, x)$ , note que  $s$  é um número real positivo já que  $d(a, x) < r$ . Veja que  $B(x, s) \subset B(a, r)$ , pois se  $y \in B(x, s)$  então  $d(x, y) < s$  e portanto  $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r$ , ou sejam  $d(a, y) < r$ . Logo  $y \in B(a, r)$ . ■

**Corolário 2.2.** Para todo  $X \subset M$ ,  $\text{int}X$  é aberto em  $M$ .

**Demonstração.** Seja  $a \in \text{int}X$ , qualquer, queremos mostrar que existe uma bola de centro em  $a$  inteiramente contida em  $\text{int}X$ . Como  $a \in \text{int}X$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset X$ . Provemos que  $B(a, r) \subset \text{int}X$ . Com efeito, seja  $x \in B(a, r)$  qualquer, uma vez que  $B(a, r)$  é um conjunto aberto existe  $s > 0$  tal que  $B(x, s) \subset B(a, r) \subset X$ , ou seja,  $B(x, s) \subset X$ , consequentemente  $x$  é ponto interior de  $X$ , isto é,  $x \in \text{int}X$ . ■

**Corolário 2.3.** Se  $A$  é aberto e  $A \subset X$  então  $A \subset \text{int}X$ . Neste sentido,  $\text{int}X$  é o maior aberto contido em  $X$ .

**Demonstração.** Sejam  $A \subset X$  aberto e  $a \in A$ . Então existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A$ , como  $A \subset X$ , temos que  $B(a, r) \subset X$ , ou seja, para qualquer  $a \in A$  é possível encontrar uma bola de centro em  $a$  e raio  $r$  contida em  $X$ , ou seja  $a \in \text{int}X$ . Portanto  $A \subset \text{int}X$ . ■

**Exemplo 2.12.** Veja que o espaço métrico  $M$  é aberto em  $M$  já que qualquer bola aberta de  $M$  está contida em  $M$ . Também note que a propriedade “ $X$  é aberto” é relativa, ou seja, depende do espaço métrico  $M$  em que  $X$  está contido:  $X$  é sempre aberto no próprio espaço  $X$  e o  $\emptyset$  é aberto em qualquer espaço métrico. Para um exemplo menos trivial, o conjunto  $X = [0, 1)$  é um subconjunto aberto do espaço métrico  $M = [0, 1]$  já que cada intervalo do tipo  $[0, \xi)$ , com  $0 < \xi < 1$  é uma bola aberta de centro 0 em  $M = [0, 1]$ . No entanto,  $[0, 1]$  não é aberto na reta  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.13.** Em todo espaço métrico  $M$ , o conjunto complementar de uma bola fechada  $B[a, r]$  em  $M$ ,  $M - B[a, r]$  é aberto.

De fato, seja  $c \in A := M - B[a, r]$ , qualquer. Uma vez que  $c \notin B[a, r]$  segue que  $d(a, c) > r$ , deste maneira existe  $s > 0$  tal que  $r + s < d(a, c)$ . Logo as bolas fechadas  $B[a, r]$  e  $B[c, s]$  são tais que  $B[a, r] \cap B[c, s] = \emptyset$ .

Consequentemente,  $B(c, s) \subset B[c, s] \subset M - B[a, r]$ , isto é,  $c \in \text{int}A$  e e portanto  $A$  é um conjunto aberto.

**Exemplo 2.14.** Em um espaço métrico  $M$  o conjunto complementar de todo conjunto unitário  $\{a\}$  é um subconjunto aberto, pois, seja  $b \in M - \{a\}$  qualquer, então a bola aberta  $B(b, r)$  com  $r = d(a, b)$  só contém pontos de  $M - \{a\}$ , já que  $a \neq b$ . Assim, a bola  $B(b, r)$  está inteiramente contida em  $M - \{a\}$ , ou seja,  $b$  é um ponto interior de  $M - \{a\}$ .

De modo geral, se  $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_i \in F$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , o seu complementar  $M - F$  é aberto em  $M$ , pois se  $b \in M - F$ , então a bola aberta  $B(b, r)$  com  $r = \min\{d(a_1, b), d(a_2, b), \dots, d(a_n, b)\}$  não contém elemento de  $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , assim  $B(b, r)$  está inteiramente contida em  $M - F$ , ou seja,  $b$  é ponto interior de  $M - F$ .

**Exemplo 2.15.** Todo intervalo aberto limitado  $(a, b)$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$ , já que todo intervalo aberto limitado  $(a, b)$  é a bola aberta de centro em  $\frac{(a+b)}{2}$  e raio  $\frac{(b-a)}{2}$ .

As semirretas  $(-\infty, b)$  e  $(a, +\infty)$  também são subconjuntos abertos em  $\mathbb{R}$ .

De fato, seja  $c \in (-\infty, b)$ , qualquer, logo  $c < b$ . Veja que considerando  $r = b - c > 0$  temos que o intervalo  $(c - r, c + r)$  é uma bola aberta de centro  $c$  contida inteiramente em  $(-\infty, b)$ , pois se  $x \in (c - r, c + r)$ , qualquer, então  $x < c + r = c + (b - c) = b$ , ou seja,  $x \in (-\infty, b)$ . De modo análogo mostra-se que a semirreta  $(a, +\infty)$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.16.** Uma bola fechada pode ser um conjunto aberto ou não, dependendo do espaço métrico em que está inserida.

Se  $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ , com a métrica induzida da reta, então a bola fechada de centro 0 e raio 1 em  $M$  coincide com a bola aberta de mesmo centro e mesmo raio, logo é um conjunto aberto em  $M$ .

Mas se  $E$  é um espaço normado diferente de 0, uma bola fechada  $B[a, r]$ ,  $a \in E$  nunca é um subconjunto aberto de  $E$ , pois tomando  $x \neq 0$  em  $E$ , pondo  $u = \frac{x}{|x|}$  e  $b = a + r \cdot u$  vemos que  $|b - a| = r$ , pois  $b = a + r \cdot \frac{x}{|x|}$ , isto é,  $b - a = r \cdot \frac{x}{|x|}$  e portanto  $|b - a| = r$ . Logo,  $b \in B[a, r]$ .

Mas  $b$  não é interior a esta bola fechada, pois para todo  $s > 0$  o ponto  $a + (r + \frac{s}{2}) \cdot u$  pertence à bola aberta de centro  $b$  e raio  $s$ , pois,  $d(b, c) = |a + (r + \frac{s}{2}) \cdot u - a - r \cdot u| = |\frac{s}{2} \cdot u| = |\frac{s}{2} \cdot \frac{x}{|x|}| = |\frac{s}{2}| \cdot |\frac{x}{|x|}| = \frac{s}{2} \cdot 1 = \frac{s}{2} < s$ .

Mas está fora da bola fechada  $B[a, r]$ ;

$$d(a, c) = |a + (r + \frac{s}{2}) \cdot u - a| = |(r + \frac{s}{2}) \cdot u| = |r + \frac{s}{2}| \cdot |u| = r + \frac{s}{2} > r.$$

Assim, nenhuma bola aberta de centro  $b$  pode estar contida em  $B[a, r]$ . Isto mostra que todos os pontos  $b$  pertencentes à esfera  $S(a, r)$  estão na fronteira da bola  $B[a, r]$ . Segue então que  $\text{int} B[a, r] = B(a, r)$ . Veja que nenhum ponto  $c \in E$  tal que  $|c - a| > r$  pertence à fronteira de  $B[a, r]$ . Logo  $\delta B[a, r] = S(a, r)$  e portanto  $B[a, r] \cap \delta B[a, r] = S(a, r)$  sendo assim diferente do vazio, então  $B[a, r]$  não é aberto. Observe que

$$d(a, b) = |a + r \cdot u - a| = |r \cdot u| = |r| \cdot |u| = r$$

assim  $b \in B(a, r)$ .

**Proposição 2.3.** Se  $\mathcal{U}$  é uma coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico  $M$  então:

1.  $M \in \mathcal{U}$  e  $\emptyset \in \mathcal{U}$ ;
2. Se  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$  então  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{U}$ .
3. Se  $A_\lambda \in \mathcal{U}$  para todo  $\lambda \in L$  então  $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{U}$ .

**Demonstração.** (1) Segue do exemplo 2.12 que  $M$  é um conjunto aberto e por vacuidade segue que o conjunto vazio é aberto.

(2) Mostremos que a interseção finita de subconjuntos abertos,  $A_1, \dots, A_n$ , é um subconjunto aberto. Para tanto seja  $a \in A_1 \cap \dots \cap A_n$ , qualquer. Como  $A_1, \dots, A_n$  são subconjuntos são abertos, existem respectivamente  $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$  tais que  $B(a; r_1) \subset A_1, \dots, B(a; r_n) \subset A_n$ . Seja  $r$  o menor dos números  $r_1, \dots, r_n$ .

Consequentemente,

$$B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset A_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Portanto,  $B(a, r) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$  e então  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  é subconjunto aberto de  $M$ .

(3) Provemos que a reunião arbitrária de subconjuntos abertos,  $A_\lambda$ ,  $\lambda \in L$ , de  $M$  é também um subconjunto aberto de  $M$ . Veja que se  $a \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ , qualquer, então existe um índice  $\lambda \in L$  tal que  $a \in A_\lambda$ . Como  $A_\lambda$  é aberto, há uma bola  $B(a, r)$  contida em  $A_\lambda$ . Logo  $B(a, r) \subset A_\lambda \subset A$ . ■

**Corolário 2.4.** *Um subconjunto  $A \subset M$  é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $A \subset M$  um subconjunto aberto, logo para cada  $x \in A$  existe uma bola aberta  $B_x$  tal que  $x \in B_x \subset A$ , o que se escreve também como  $\{x\} \subset B_x \subset A$ . Tomando reuniões, vem  $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$ . Logo  $A = \bigcup_{x \in A} B_x$ , o que mostra que todo aberto é reunião de bolas abertas.

( $\Leftarrow$ ) Se  $A = \bigcup B_\lambda$  é uma reunião de bolas abertas, então  $A$  é aberto em  $M$ , em virtude da Proposição 2.2 e do item (3) da Proposição 2.3. ■

**Observação 2.5.** A interseção de infinitos conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto, pois tomando como exemplo um ponto  $a \in M$ , o conjunto  $\{a\}$  não é aberto em  $M$  a menos que  $a$  seja isolado. Mas todo conjunto  $\{a\}$  é interseção de um número enumerável de abertos, a saber,  $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B\left(a; \frac{1}{n}\right)$ . Com efeito, se  $x \neq a$  então  $d(x, a) > 0$ , logo existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x, a) > \frac{1}{n}$ . Assim sendo,  $x \notin B\left(a; \frac{1}{n}\right)$ . Isto mostra que apenas o ponto  $a$  pertence a todas as bolas abertas  $B\left(a; \frac{1}{n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lema 2.2.** . *Seja  $X \subset M$ . Considerando em  $X$  a métrica induzida por  $M$ , os conjuntos abertos no subespaço métrico  $X$  são as interseções  $A \cap X$ , onde  $A$  é aberto em  $M$ .*

**Demonstração.**

Note que isto decorre do fato, já observado, de que as bolas abertas em  $X$  têm a forma  $B_x(a; r) = B(a, r) \cap X$ , onde  $B(a, r)$  é uma bola em  $M$ . Ora, os subconjuntos abertos do espaço  $X$  são, pelo Corolário 2.4, as reuniões de bolas abertas em  $X$ . Logo,  $A' \subset X$  é aberto  $\Leftrightarrow A' = \bigcup_{\lambda} B_{\lambda}^x = \bigcup_{\lambda} (B_{\lambda} \cap X) = \left( \bigcup_{\lambda} B_{\lambda} \right) \cap X = A \cap X$ , onde  $A = \bigcup B_{\lambda}$  é aberto em  $M$ . Em particular se  $X$  é aberto em  $M$ , os abertos do subespaço  $X$  são os subconjuntos abertos de  $M$  que estão contidos em  $X$ . Quando  $X$  não é aberto em  $M$  então, evidentemente, todo conjunto aberto em  $M$  e contido em  $X$  é também aberto em  $X$ , mas existem subconjuntos  $A' \subset X$  que são abertos em  $X$  mas não em  $M$ . (O próprio  $X$  é um deles.) Por exemplo, se  $0 < \varepsilon < b - a$ , o intervalo  $[a, a + \varepsilon)$  é aberto no subespaço  $[a, b]$  da reta mas não é aberto em  $\mathbb{R}$ . ■

**Definição 2.11.** *Um ponto  $a$  diz-se aderente a um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  quando para todo  $\varepsilon > 0$ , tem-se  $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ .*

Da definição de subconjunto aberto, afirmar que  $a$  é aderente a  $X$  é equivalente a dizer que para todo aberto  $A$  contendo  $a$ , tem-se  $A \cap X \neq \emptyset$ .

**Exemplo 2.17.** Todo ponto  $a \in X$  é aderente a  $X$ . Além disso, os pontos da fronteira  $\partial X$  também são aderentes a  $X$ . Por exemplo se  $X = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ , então 1 é aderente a  $X$  na reta  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.12.** O fecho (ou aderência) de um conjunto  $X$  em um espaço métrico  $M$  é o conjunto  $\overline{X}$  dos pontos de  $M$  que são aderentes a  $X$ .

**Exemplo 2.18.** Veja que  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ , já que para quaisquer  $a \in M$  e  $\xi > 0$  temos  $B(a, \xi) \cap \emptyset = \emptyset$ . Ainda  $\overline{M} = M$  pois  $B(a, \xi) \cap M = M$ .

**Lema 2.3.** Sejam  $M$  um espaço métrico e  $X, Y \subset M$ .

São válidas as seguintes afirmações:

- (i)  $C \subset \overline{X}$ ;
- (ii) Se  $X \subset Y$  então  $\overline{X} \subset \overline{Y}$ ;
- (iii)  $\overline{X} = \text{int}X \cup \partial X$ .

**Demonstração.**

- (i) Se  $x_0 \in X$ , então dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, temos  $B(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ , ou seja,  $x_0 \in \overline{X}$ .
- (ii) Como  $X \subset Y$  temos que  $x \in X \cap B(a, \xi) \subset Y \cap B(a, \xi)$ . Seja  $x \in X \cap B(a, \xi)$  temos que  $x \in X$  e  $x \in B(a, \xi)$ , mas como  $x \in X$  temos que  $x \in Y$  pois  $X \subset Y$ . Assim como  $x \in Y$  e  $x \in B(a, \xi)$  temos que  $x \in Y \cap B(a, \xi)$ .
- (iii) Se para que  $a$  não seja aderente a  $X$  é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro  $a$  na qual não haja pontos de  $X$ . Ou seja,  $a \notin \overline{X} \Leftrightarrow a \in \text{int}(M - X)$ . Podemos então escrever:  $M - \overline{X} = \text{int}(M - X)$ . Lembrando a decomposição  $M = \text{int}X \cup \partial X \cup \text{int}(M - X)$ , reunião disjunta, concluímos que  $\overline{X} = \text{int}X \cup \partial X$ .

■

**Definição 2.13.** Um subconjunto  $X \subset M$  se diz denso em  $M$  quando  $\overline{X} = M$ . Equivalentemente, quando toda bola aberta em  $M$  contém algum ponto de  $X$ .

**Exemplo 2.19.** O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é denso em  $\mathbb{R}$ . Também o conjunto  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , dos números irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contendo números racionais contém números irracionais.

**Definição 2.14.** Diz-se que um conjunto  $F \subset M$  é fechado no espaço métrico  $M$  quando o seu complementar  $M - F$  é um subconjunto aberto em  $M$ .

A proposição seguinte relaciona a definição acima com a definição de fecho, a saber:

**Proposição 2.4.** *Seja  $F$  subconjunto arbitrário de um espaço métrico  $M$ .*

*Tem-se  $\overline{F} = F$  se, e somente se,  $F$  é um subconjunto fechado em  $M$ .*

**Demonstração.**

Veja que  $F$  é fechado se, e somente,  $M - F$  é aberto, ou seja, se, e somente se, para todo  $a \in M - F$ , existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset M - F$ , que é equivalente a afirmar que para todo  $a \in M - F$ , existe uma bola aberta  $B(a, r)$  que não contém pontos de  $F$ , ou seja, os pontos que não pertencem a  $F$  não são aderentes a  $F$  mas isto ocorre se, e somente se,  $F = \overline{F}$ . ■

**Corolário 2.5.** *Para todo  $X \subset M$ , seu fecho  $\overline{X}$  é um conjunto fechado.*

**Demonstração.** Basta observar que para todo subconjunto  $X \subset M$  têm-se  $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$  e aplicar o resultado anterior. ■

**Lema 2.4.** *Se  $F$  é fechado e  $X \subset F$  então  $\overline{X} \subset F$ . Neste sentido,  $\overline{X}$  é o menor subconjunto fechado de  $M$  que contém  $X$ .*

**Demonstração.** Suponha que  $F$  é fechado e  $X \subset F$ . Observe que  $X \subset F$  implica  $\overline{X} \subset \overline{F}$ . Mas  $F = \overline{F}$  logo  $\overline{X} \subset F$ . ■

**Observação 2.6.** Negar que um subconjunto  $X \subset M$  seja fechado significa admitir a existência de algum ponto  $a \notin X$  que seja aderente a  $X$ . Ou seja,  $a \notin X$  mas para cada  $\xi > 0$  tem-se  $B(a, \xi) \cap X \neq \emptyset$ . Um tal ponto pertence à fronteira de  $X$ . Logo,  $X$  é fechado se, e somente se,  $\partial X \subset X$ .

Sobretudo observe que “fechado” não é o contrário de “aberto”. Quando um conjunto não é fechado, não pode concluir que ele é aberto, por exemplo, o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais que não é fechado também não é aberto em  $\mathbb{R}$ .

Há também casos de conjuntos que são ao mesmo tempo fechados e abertos: o vazio e o espaço inteiro são exemplos óbvios.

Veja que no espaço métrico  $M = \mathbb{R} - \{0\}$ , com a métrica induzida da reta, cada um dos conjuntos é aberto  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ . Como cada um deles é o complementar do outro, em  $M$ , segue que eles também são fechados.

No resultado a seguir apresentamos algumas propriedades sobre a relação de Interseção e Reunião entre subconjuntos fechados.

**Proposição 2.5.** *Se  $\mathcal{F}$  é uma coleção dos subconjuntos fechados de um espaço métrico  $M$  então:*

1.  $M \in \mathcal{F}$  e  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
2. Se  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$  então  $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}$ ;

3. Se  $F_\lambda \in \mathcal{F}$  para todo  $\lambda \in L$  então  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \mathcal{F}$ .

**Demonstração.** (1) Basta observar que o complementar do conjunto vazio em  $M$  é o próprio espaço  $M$ , que é aberto, e que o complementar do conjunto  $M$  em  $M$  é o conjunto vazio, sobre o qual sabemos que também é aberto.

(2) Provemos que a reunião  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$  de um número finito de subconjuntos fechados  $F_1, F_2, \dots, F_n \subset M$  é um subconjunto fechado de  $M$ .

Uma vez que  $F_1, \dots, F_n$  são subconjuntos fechados de  $M$ ,  $\mathcal{C}F_1, \dots, \mathcal{C}F_n$  são subconjuntos abertos em  $M$ .

Por outro lado, pela lei de De Morgan,

$$\mathcal{C}F_1 \cap \mathcal{C}F_2 \cap \dots \cap \mathcal{C}F_n = \mathcal{C}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n).$$

Uma vez que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{C}F_i$  é aberto segue, da proposição 2.3, que  $\mathcal{C}F_1 \cap \mathcal{C}F_2 \cap \dots \cap \mathcal{C}F_n$  é um subconjunto aberto de  $M$ .

Consequentemente pela igualdade acima,  $\mathcal{C}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n)$  é um subconjunto aberto de  $M$ , equivalentemente,  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$  é um subconjunto fechado de  $M$ .

(3) Queremos demonstrar que a interseção arbitrária  $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  de subconjuntos fechados, elementos de  $\mathcal{F}$ , é um subconjunto fechado de  $M$ .

Para tanto, note que sendo cada  $F_\lambda$  um subconjunto fechado, para qualquer  $\lambda \in L$ , segue que  $\mathcal{C}F_\lambda$  para todo  $\lambda \in L$ , é um subconjunto aberto.

Consequentemente pela proposição 2.3,  $\bigcup_{\lambda \in L} \mathcal{C}F_\lambda$  é um subconjunto aberto.

Mas pela lei de De Morgan,  $\bigcup_{\lambda \in L} \mathcal{C}F_\lambda = \mathcal{C}\left(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda\right)$ .

Portanto,  $\mathcal{C}\left(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda\right)$  é um subconjunto aberto em  $M$ , ou seja,  $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$  é um subconjunto fechado em  $M$ . ■

## 2.3 Função Contínua

**Definição 2.15.** Sejam  $M, N$  espaços métricos. Diz-se que a aplicação  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a \in M$  quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, é possível obter  $\delta > 0$  tal que para  $x \in M$ ,  $d(x, a) < \delta$  implica  $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ . Diz-se que  $f : M \rightarrow N$  é contínua quando ela é contínua em todos os pontos  $a \in M$ .

**Exemplo 2.20.** Em particular se  $M \subset \mathbb{R}$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , dizer que  $f$  é contínua no ponto  $a \in M$  significa afirmar que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in M$  e  $a - \delta < x < a + \delta$  implica  $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$ . Ou seja,  $f$  transforma os pontos de  $M$  que estão no intervalo aberto  $(a - \delta, a + \delta)$  em pontos do intervalo  $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ .

**Definição 2.16.** *Sejam  $(M, d_M)$  e  $(N, d_N)$  espaços métricos quaisquer. Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é lipschitziana quando existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d_N(f(x), f(y)) \leq c.d_M(x, y)$  quaisquer que sejam  $x, y \in M$ .*

*Por vezes, a constante  $c$  é chamada constante de Lipschitz.*

**Proposição 2.6.** *Se  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação lipschitziana, então  $f$  é contínua em cada ponto  $a \in M$ . Em particular, se  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  são aplicações lipschitzianas então  $f + g$  e  $k.f$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , também são aplicações lipschitzianas.*

**Demonstração.** Provaremos as afirmações por partes. Inicialmente mostremos que se  $f$  é lipschitziana, então ela é contínua em cada ponto. Dado  $\varepsilon > 0$ , mostremos que existe algum  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ , para  $x \in M$ . Sabe-se que  $f$  é uma aplicação lipschitziana, logo, para quaisquer  $x, y \in M$ ,  $d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y)$  sendo  $c$  uma constante maior que zero.

Dessa forma podemos afirmar que  $d(f(x), f(a)) \leq c.d(x, a) < c.\delta$ , logo, basta que tomemos  $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$  que teremos  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c.d(x, a) < c.\delta = \varepsilon$ , em outras palavras,  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

Vamos supor agora  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  são aplicações lipschitzianas, mostremos que  $f + g$  também é uma função lipschitziana.

Como  $f$  e  $g$  são lipschitzianas, sabe-se que existem  $c_1, c_2$  estritamente positivos tal que  $d(f(x_1), f(y_1)) \leq c_1.d(x_1, y_1)$  e  $d(g(x_2), g(y_2)) \leq c_2.d(x_2, y_2)$  para quaisquer  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ .

Mostremos então que existe  $m > 0$  tal que  $d((f + g)(x), (f + g)(y)) \leq m.d(x, y)$ . Sabemos que  $d((f + g)(x), (f + g)(y)) = d(f(x) + g(x), f(y) + g(y))$  e como  $f$  e  $g$  são de  $M$  em  $\mathbb{R}$ , podemos afirmar que  $d(f(x) + g(x), f(y) + g(y)) = |(f(y) + g(y)) - (f(x) + g(x))| = |f(y) - f(x) + g(y) - g(x)|$  pela desigualdade triangular, temos que  $|f(y) - f(x) + g(y) - g(x)| \leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| = d(f(x), f(y)) + d(g(x), g(y)) \leq c_1.d(x, y) + c_2.d(x, y) = (c_1 + c_2)d(x, y)$ , portanto, basta tomarmos  $m = c_1 + c_2$  que teremos  $d((f + g)(x), (f + g)(y)) \leq m.d(x, y)$ , o que nos dá que  $f + g$  é de fato lipschitziana.

E por fim, mostremos que se  $f$  é uma aplicação lipschitziana,  $k.f$  com  $k \in \mathbb{R}$  também é uma função desse tipo. Como  $f$  é lipschitziana, temos que  $d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M$ , mostremos que existe uma constante positiva  $n$  tal que  $d(k.f(x), k.f(y)) \leq n.d(x, y)$ .

Note que como  $f$  é uma função de  $M$  em  $\mathbb{R}$ , pode-se dizer que

$$d(k.f(x), k.f(y)) = |k.f(y) - k.f(x)| =$$

$$|k.(f(y) - f(x))| = |k|. |f(y) - f(x)| = |k|.d(f(x), f(y)) \leq |k|.c.d(x, y),$$

logo, basta que tomemos  $n = |k|.c$  que teremos  $d(k.f(x), k.f(y)) \leq n.d(x, y)$ , o que nos permite concluir que de fato  $k.f$  é lipschitziana. ■

**Proposição 2.7.** *Sejam  $M, N$  e  $P$  espaços métricos arbitrários.*

*Se  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a$  e  $g : N \rightarrow P$  é contínua no ponto  $f(a)$ , então  $g \circ f : M \rightarrow P$  é contínua no ponto  $a$ .*

**Demonstração.** Como a aplicação  $g$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda > 0$  de tal forma que,  $d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon$  com  $y \in N$ .

Por outro lado, temos a continuidade de  $f$ , logo, dado  $\lambda > 0$  obtemos  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda$ , para  $x \in M$ , portanto, como  $f(x) \in N$  temos que  $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$ . ■

**Teorema 2.2.** *Sejam  $M, N$  espaços métricos. Uma função  $f : M \rightarrow N$  é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo subconjunto aberto  $A \subset N$ ,  $f^{-1}(A)$ , é um subconjunto aberto de  $M$ .*

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $f$  seja contínua e mostremos dado subconjunto aberto  $A \subset N$ , qualquer,  $f^{-1}(A)$  é um subconjunto aberto de  $M$ . Para tanto basta mostrar que todo ponto  $a \in f^{-1}(A)$  é ponto interior de  $f^{-1}(A)$ .

Veja que  $a \in f^{-1}(A)$  implica que  $f(a) \in A$ . Uma vez que  $A$  é aberto existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(f(a), \epsilon) \subset A$ . Mas  $f$  é contínua em  $a$  logo a este  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon) \subset A$ . Consequentemente  $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A)$  e portanto  $f^{-1}(A)$  é um subconjunto aberto de  $M$ .

( $\Leftarrow$ ) Provemos a continuidade de  $f$  assumindo que a imagem inversa de todo subconjunto aberto  $A \subset N$ ,  $f^{-1}(A)$ , é um subconjunto aberto de  $M$ . Para isto sejam  $a \in M$  e  $\epsilon > 0$  quaisquer. Mostremos que associado a este  $\epsilon$ , existe  $\delta > 0$  de forma que  $d(x, a) < \delta$  implica  $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ , ou equivalentemente que,  $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$ , ou ainda que,  $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ .

Sabemos que  $B(f(a), \epsilon)$  é um subconjunto aberto de  $N$ . Logo, pela hipótese, sua imagem inversa  $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$  é um subconjunto aberto de  $M$ , ou seja, todo ponto deste conjunto é ponto interior; em particular, para  $a \in f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$  existe  $\delta > 0$  de forma que  $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ . ■

**Corolário 2.6.** *Sejam  $M, N$  espaços métricos, quaisquer. Afim de que uma função  $f : M \rightarrow N$  seja contínua é necessário e suficiente que a imagem inversa de todo subconjunto fechado  $F \subset N$ ,  $f^{-1}(F)$ , seja um subconjunto fechado de  $M$ .*

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $f$  seja contínua e considere  $F \subset N$  fechado, qualquer. Como  $F$  é fechado segue que  $\mathbb{C}F \subset N$  é aberto. Da continuidade da  $f$ , segue do resultado anterior que  $f^{-1}(\mathbb{C}F)$  é subconjunto aberto de  $M$ . Por outro lado,  $f^{-1}(\mathbb{C}F) = \mathbb{C}f^{-1}(F)$ . Portanto,  $\mathbb{C}f^{-1}(F)$  é subconjunto aberto de  $M$  e consequentemente,  $f^{-1}(F)$  é subconjunto fechado de  $M$ .

( $\Leftarrow$ ) Por hipótese, a imagem inversa de todo subconjunto fechado de  $N$  é fechado em  $M$ . Desta maneira, dado  $A \subset N$  aberto, qualquer, temos que  $\mathbb{C}A$  é fechado, logo  $f^{-1}(\mathbb{C}A) = \mathbb{C}f^{-1}(A)$  é fechado, isto é,  $f^{-1}(A)$  é um subconjunto aberto de  $M$ . Portanto pelo torema anterior,  $f$  é contínua.

**Definição 2.17.** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Dizemos que uma função  $f : M \rightarrow N$  é um homeomorfismo quando  $f$  é uma aplicação bijetora, contínua e ainda sua inversa  $f^{-1} : N \rightarrow M$  é contínua.*

*Neste caso dizemos que  $M$  e  $N$  são homeomorfos.*

**Observação 2.7.** Veja que nem toda função contínua e bijetora é um homeomorfismo. Ou seja, existem funções contínuas bijetoras  $f : M \rightarrow N$  tais que  $f^{-1} : N \rightarrow M$  é descontínua. Por exemplo, seja  $M = \mathbb{R}$  com a métrica zero-um. A aplicação identidade  $i : M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua mas sua inversa  $j : \mathbb{R} \rightarrow M$  (que também é dada por  $j(x) = x$ ) é descontínua em cada ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Com efeito, tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , temos  $B(f(a); \frac{1}{2}) = \{f(a)\}$  em  $M$ . Logo não existe  $\delta > 0$  tal que  $f((a - \delta, a + \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$ .

**Proposição 2.8.** *Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Para todo  $a \in E$  e para todo número real  $\lambda \neq 0$ , a translação  $t_a : E \rightarrow E$  e a homotetia  $m_\lambda : E \rightarrow E$ , definidas por  $t_a(x) = x + a$  e  $m_\lambda(x) = \lambda x$ , são homeomorfismos de  $E$ .*

**Demonstração.** De fato, temos que  $t_a$  e  $m_\lambda$  são aplicações contínuas. Além do mais, ambas possuem inversas:  $(t_a)^{-1} = t_{-a}$  e  $(m_\lambda)^{-1} = m_\mu$ , sendo que  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ . Note que as inversas  $t_{-a}$  e  $m_\mu$  também são contínuas.

Duas bolas abertas  $B(a, r)$  e  $B(b, s)$  em  $E$  são homeomorfas. Mais precisamente, a composta  $\varphi = t_b \circ m_{\frac{s}{r}} \circ t_{-a}$  define um homeomorfismo  $\varphi : E \rightarrow E$ . Para cada  $x \in E$ , temos  $\varphi(x) = b + \frac{s}{r}(x - a)$ . Isto mostra que  $\varphi$  consiste em: 1.ž) Transladar  $B(a, r)$  de modo a colocar seu centro na origem; 2.ž) Multiplicar todos os valores por  $\frac{s}{r}$  de modo que vetores de comprimento menor que  $r$  passem a ter comprimento menor que  $s$ . Isto transforma  $B(0; r)$  em  $B(0; s)$ ; 3.ž) Transladar  $B(0; s)$  de modo a colocar seu centro no ponto  $b$ . Assim, o homeomorfismo  $\varphi : E \rightarrow E$  é tal que  $\varphi(B(a, r)) = B(b, s)$ . Da mesma maneira se mostra que duas bolas fechadas quaisquer em  $E$  são homeomorfas. Vemos assim que o diâmetro de um conjunto é um invariante métrico (não muda por isometrias) mas não é um invariante topológico. Convém observar que, num espaço arbitrário, duas bolas abertas podem não ser homeomorfas. O exemplo mais simples é o de um espaço métrico  $M$ , que possua um ponto isolado  $a$  e um ponto não-isolado  $b$ . Existe uma bola  $B(a, r) = \{a\}$ , a qual não pode ser homeomorfa a uma bola aberta de centro  $b$  pois, para todo  $s > 0$ ,  $B(b, s)$  é um conjunto infinito.

■

**Proposição 2.9.** *Toda bola aberta de um espaço vetorial normado  $E$  é homeomorfa ao espaço inteiro.*

**Demonstração.** Basta considerar a bola unitária  $B = B(0; 1)$  e mostrar a existência de algum homeomorfismo  $f : E \rightarrow B$ .

Tomemos  $f(x) = \frac{x}{(1+|x|)}$ .

Como  $|f(x)| = \frac{|x|}{(1+|x|)} < 1, \forall x \in M$ , vemos que  $f$  é uma aplicação contínua definida em  $E$  com valores em  $B$ . Tomemos agora  $g : B \rightarrow E$  tal que  $g(y) = \frac{y}{(1-|y|)}$ . Como  $|y| < 1$  para todo  $y \in B$ , é de fácil visualização que  $g$  é contínua. Note que  $f(g(y)) = \frac{g(y)}{(1+|g(y)|)} = \frac{\frac{y}{(1-|y|)}}{(1+\frac{|y|}{(1-|y|)})} = y$ , e da mesma forma, que  $g(f(x)) = \frac{f(x)}{1-|f(x)|} = \frac{\frac{x}{(1+|x|)}}{(1-\frac{|x|}{(1+|x|)})} = x$  para quaisquer  $y \in B$  e  $x \in E$ . Logo  $g = f^{-1}$  e  $f$  é um homeomorfismo. ■

**Exemplo 2.21.** Note que todo intervalo aberto limitado  $(a, b)$  é homeomorfo à reta  $\mathbb{R}$ , pois  $(a, b)$  é a bola aberta de centro no seu ponto médio  $\frac{(a+b)}{2}$  e raio  $r = \frac{(b-a)}{2}$ . Mais geralmente, porém, todo intervalo aberto da reta é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Com efeito, no caso de um intervalo do tipo  $(a, +\infty)$ , temos o homeomorfismo  $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, +\infty)$ , dado por  $f(x) = a + e^x$ , cujo inverso  $g = f^{-1} : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tem a expressão  $g(y) = \log(y-a)$ . Se o intervalo aberto for do tipo  $(-\infty, b)$ , usaremos o homeomorfismo  $h : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, b)$ , definido por  $h(x) = b - e^x$ , o qual possui a inversa  $k : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$  com a definição  $k(y) = -\log(b-y)$ .

### 3 Conexidade

Neste capítulo, trataremos da conexidade de um espaço métrico, que é necessário tanto para o enunciado bem como para a demonstração do Teorema da Alfândega.

**Definição 3.1.** *Uma cisão de um espaço métrico  $M$  é uma decomposição  $M = A \cup B$ , de  $M$  como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos  $A$  e  $B$ . Ainda, uma cisão  $M = A \cup B$  é denominada trivial quando  $A$  ou  $B$  é vazio.*

Veja que numa cisão  $M = A \cup B$  os conjuntos  $A, B$  são abertos e fechados em  $M$  já que as condições  $M = A \cup B$  e  $A \cap B = \emptyset$  equivalem a dizer que  $A = M - B$  e  $B = M - A$ .

**Exemplo 3.1.**  $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  é uma cisão do espaço métrico  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

**Exemplo 3.2.** Dado um número irracional  $\alpha$ , sejam  $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$ . Então  $A \cup B = \mathbb{Q}$  é uma cisão do conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais.

**Definição 3.2.** *Dizemos que um espaço métrico  $M$  é um conexo quando a única cisão possível em  $M$  é a trivial. Em particular, que um subconjunto  $X$  de um espaço métrico  $M$  é conexo quando o subespaço  $X \subset M$  é conexo. Um subconjunto não conexo, isto é, que admite alguma cisão não trivial, é denominado desconexo.*

Note que, ao contrário das noções de aberto, fechado, fecho, etc, a propriedade de um conjunto  $X$  ser conexo é intrínseca, isto é, se  $X \subset M$ ,  $X \subset N$  e  $M, N$  induzem a mesma métrica em  $X$ , então  $X$  é um subconjunto conexo de  $M$  se, e somente se, é um subconjunto conexo de  $N$ .

**Proposição 3.1.** *O conjunto  $\mathbb{R}$  com a métrica usual é um espaço conexo.*

**Demonstração.** Suponhamos, por absurdo, que exista uma cisão não-trivial da reta  $\mathbb{R} = A \cup B$ . Considere agora  $a \in A$  e  $b \in B$ ; digamos que  $a < b$ .

Seja  $X = \{x \in A; x < b\}$ . Como  $a \in X$ , vemos que  $X$  não é vazio. Além disso,  $b$  é uma cota superior de  $X$ . Logo existe  $c = \sup X$ . Pela definição de supremo,  $c \leq b$  e ainda para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in X$  (e portanto  $x \in A$ ) tal que  $c - \varepsilon < x \leq c$ . Logo  $c \in \overline{A}$ . Sendo  $A$  fechado, concluímos que  $c \in A$ . Como  $b \in B$ , temos que  $c \leq b$ , donde

$c < b$ . Sendo  $A$  aberto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $c + \varepsilon < b$  e  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$ . Então todos os pontos do intervalo  $(c, c + \varepsilon)$  pertencem a  $X$ , contradizendo que  $c$  seja o sup de  $X$ . ■

**Proposição 3.2.** *As seguintes afirmações sobre um espaço métrico  $M$  são equivalentes:*

1.  $M$  é conexo;
2.  $M$  e  $\emptyset$  são os únicos subconjuntos de  $M$  ao mesmo tempo abertos e fechados;
3. Se  $X \subset M$  tem fronteira vazia, então  $X = M$  ou  $X = \emptyset$ .

**Demonstração.** (1)  $\Rightarrow$  (2) Supondo  $M$  conexo, mostremos que os únicos subconjuntos de  $M$  ao mesmo tempo abertos e fechados são:  $M$  e  $\emptyset$ .

Seja  $A \subset M$  aberto e fechado, qualquer. Logo  $M = A \cup (M - A)$  é uma cisão e como  $M$  é conexo temos que  $A = M$  ou  $A = \emptyset$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Seja  $X \subset M$  com fronteira vazia. Então  $X = \text{int}X \cup (\partial X \cap X) \Rightarrow X = \text{int}X$  e portanto  $X$  é aberto. Como  $\partial X \subset X$  temos que  $\overline{X} = \text{int}X \cup \partial X \Rightarrow \overline{X} = X$  e portanto  $X$  é fechado. Assim  $X$  é aberto e fechado, então temos que  $X = M$  ou  $X = \emptyset$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) Usando a propriedade (3) mostremos que  $M$  é conexo.

Seja  $M = A \cup B$  uma cisão. Logo  $A$  e  $B$  são abertos e fechados.

Como  $A$  é aberto temos  $A = \text{int}A$  e como  $A$  é fechado temos que  $A = \overline{A}$ .

Assim:  $A = \overline{A} = \text{int}A \cup \partial A = A \cup \partial A$ , e portanto  $\partial A \subset A \Rightarrow \partial A \cap A = \partial A$ .

Mostremos agora que  $\partial A \cap A = \emptyset$ .

Sabemos que  $A = \text{int}A$ , logo  $\partial A \cap A = \partial A \cap \text{int}A$ .

Suponhamos que exista  $x \in \partial A \cap A$ , logo  $x \in \text{int}A$  e  $x \in \partial A$ .

Como  $x \in \text{int}A$  sabemos que existe  $\xi > 0$  tal que  $B(x, \xi) \subset A$ .

Como  $x \in \partial A$  temos que para qualquer  $\bar{\xi} > 0$ ,  $B(x, \bar{\xi}) \cap (M - A) \neq \emptyset$ , assim em particular para  $\xi = \bar{\xi}$ . O que é um absurdo pois,  $B(x, \xi) \subset A$ .

Concluimos então que  $\partial A \cap A = \emptyset$  e portanto temos  $\partial A = \emptyset$ . Logo  $A = M$  ou  $A = \emptyset$ .

Assim  $M$  é conexo. ■

**Exemplo 3.3.** Um espaço métrico com apenas um ponto é conexo.

**Observação 3.1.** Se  $X \subset \mathbb{Q}$  é conexo então  $X$  não contém mais de um ponto, com efeito: se  $a, b \in X$  com  $a < b$  tomemos um número irracional  $\alpha$  tal que  $a < \alpha < b$ , assim temos  $A = \{x \in X; x < \alpha\}$  e  $B = \{x \in X; x > \alpha\}$ , assim obtemos uma cisão não trivial  $X = A \cup B$ .

Observemos  $A$  e  $B$  são abertos em  $X$  já que  $A = X \cap (-\infty, \alpha)$  e  $B = X \cap (\alpha, +\infty)$ .

**Proposição 3.3.** *A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

**Demonstração.** Mostremos para um caso particular em que  $f : M \rightarrow N$  é contínua, sobrejetora e com  $M$  conexo, provaremos que  $N = f(M)$  é conexo.

Para isso seja  $N = A \cup B$  uma cisão, ou seja  $A$  e  $B$  são abertos e  $A \cap B = \emptyset$ . Logo  $A \cup B$  é aberto e como  $f$  é contínua temos que para qualquer  $A \subset N$  aberto  $f^{-1}(A)$  é aberto. Portanto  $f^{-1}(A)$  é aberto e  $f^{-1}(B)$  é aberto, assim  $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  é uma cisão, mas  $M$  é conexo e portanto  $f^{-1}(A)$  ou  $f^{-1}(B)$  é  $\emptyset$ , como  $f$  é sobrejetora temos que  $A$  ou  $B$  é vazio e concluímos então que  $N = A \cup B$  é um conjunto conexo.

Agora verifiquemos o caso geral, que nada mais é do que uma consequência deste caso particular.

Seja  $f : M \rightarrow N$  contínua e  $X \subset M$  conexo, então  $f : X \rightarrow f(X)$  é uma sobrejeção contínua, logo  $f(X)$  é conexo. ■

**Corolário 3.1.** *Se  $M$  é conexo e  $N$  é homeomorfo a  $M$ , então  $N$  também é conexo.*

**Demonstração.** Sabe-se que  $N$  é homeomorfo a  $M$ , dessa forma existe  $f : M \rightarrow N$  bijetora contínua tal que  $f^{-1} : N \rightarrow M$  é contínua, logo  $N$  é conexo. ■

**Proposição 3.4.** *Todo intervalo aberto da reta é conexo.*

**Demonstração.** Sabemos que um intervalo aberto da reta é uma bola aberta de um espaço normado, logo ela é homeomorfa ao espaço  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é conexo temos que toda bola aberta é conexa.

O círculo unitário  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  é conexo pois é a imagem da reta pela aplicação contínua e sobrejetora  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  onde  $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . ■

**Proposição 3.5.** *O fecho de um conjunto conexo é conexo.*

**Demonstração.** Inicialmente mostremos para o caso particular em que  $X \subset M$  é um conjunto conexo tal que  $\overline{X} = M$ , isto é,  $X$  é denso em  $M$ , provemos que  $M$  é conexo.

Se  $M = A \cup B$  for uma cisão, teremos a cisão  $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ , mas por hipótese temos que  $X$  é conexo, logo  $A \cap X = \emptyset$  ou  $B \cap X = \emptyset$ . Sendo  $X$  denso temos que  $A \cap X \neq \emptyset$  ou  $B \cap X \neq \emptyset$  para qualquer  $A, B$  abertos não-vazios, mas como  $A \cap X = \emptyset$  ou  $B \cap X = \emptyset$  temos que  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ , logo  $M = A \cup B$  só assume a cisão trivial e portanto temos que  $M$  é conexo e como  $M = \overline{X}$  temos que  $\overline{X}$  é conexo.

Provemos agora para o caso geral. Temos  $X$  conexo e queremos mostrar que  $\overline{X}$  é conexo. Uma vez que  $X$  é denso em  $\overline{X}$  temos que esta demonstração é análoga a anterior. ■

**Corolário 3.2.** *Se  $X \subset Y \subset \overline{X}$  e  $X$  é conexo, então  $Y$  é conexo.*

**Demonstração.** Note que o fecho de  $X$  no subespaço  $Y$  é  $\overline{X} = (\overline{X} \cap Y) = Y$ , desta forma temos que  $X$  é denso em  $Y$  e portanto  $Y$  é conexo. ■

**Proposição 3.6.** *Um subconjunto da reta é conexo se, e somente se, é um intervalo.*

**Demonstração.**  $(\Rightarrow)$  Seja  $X \subset \mathbb{R}$  conexo. Suponha  $a, b \in X$  e  $a < c < b$ . Provaremos que, neste caso,  $c \in X$ . Com efeito, se fosse  $c \notin X$  então teríamos a cisão  $X = [X \cap (-\infty, c)] \cup [X \cap (c, +\infty)]$ , a qual é não-trivial porque  $a \in X \cap (-\infty, c)$  e  $b \in X \cap (c, +\infty)$ . Esta propriedade nos garante que  $X$  é um intervalo.

$(\Leftarrow)$  Temos que todo intervalo aberto é conexo pois é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Todo intervalo fechado é conexo pois é o fecho de um intervalo aberto e sabemos que o fecho de um conjunto conexo é conexo. Também, todo intervalo semifechado  $(a, b]$  é conexo pois:  $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b] = \overline{(a, b)}$  e o intervalo aberto é conexo (e portanto, também seu fecho). ■

**Corolário 3.3.** *Se  $M$  é um espaço métrico conexo e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real contínua, então  $f(M)$  é um intervalo.*

**Demonstração.** Sabemos que a imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é conexo, logo podemos afirmar que  $f(M)$  será conexo já que  $M$  também o é, e portanto temos que  $f(M)$  é um intervalo. ■

## 4 Sobre o Teorema da Alfândega

Chegamos ao capítulo mais importante mais importante do nosso trabalho, onde enunciamos e demonstramos o Teorema da Alfândega. Finalizamos este capítulo com demonstração do Teorema do Valor Intermediário, visto como corolário do Teorema da Alfândega.

**Teorema 4.1.** (*Teorema da Alfândega*) *Sejam  $C$ ,  $X$  subconjuntos de um espaço métrico  $M$ . Se  $C$  é conexo e tem pontos em comum com  $X$  e com  $M - X$ , então algum ponto de  $C$  pertence à fronteira de  $X$ .*

**Demonstração.** Por hipótese temos que  $C \cap X \neq \emptyset$  e  $C \cap (M - X) \neq \emptyset$ , assim  $C \cap X \neq C$ . Logo como  $C$  é conexo temos que  $\partial(C \cap X) \neq \emptyset$ , pois se  $\partial(C \cap X) = \emptyset$  teríamos  $C \cap X = C$ .

Portanto existe  $c \in \partial(C \cap X)$ . Assim toda bola aberta de centro  $c$  e raio  $\xi$  contém pontos de  $C \cap X$  e  $C - (C \cap X)$ , isto é: Para qualquer  $\xi > 0$  existe  $s \in (C \cap X)$  tal que  $d(c, s) < \xi$  e existe  $t \in C - (C \cap X)$  tal que  $d(t, c) < \xi$ .

Mas  $C \cap X \subset X$ , logo como  $s \in (C \cap X)$  temos que  $s \in X$ .

Também  $C - (C \cap X) = C - X \subseteq M - X$  logo como  $t \in C - (C \cap X)$  temos que  $t \in M - X$ .

Assim concluímos que  $c \in \partial X$ .

Note que podemos a partir do “Teorema da Alfândega” chegarmos no “Teorema do Valor Intermediário”, o que nos possibilita escrever o último como sendo um corolário do primeiro.

**Corolário 4.1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $f(a) < d < f(b)$  então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = d$ .*

**Demonstração.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua com  $f(a) < d < f(b)$ , tomemos  $C = [a, b]$  (que é conexo) e  $X = \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$ . Logo, pelo Teorema da Alfândega existe  $c \in \partial X$ , consequentemente segue que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = d$ . ■

Existem diversas aplicações do Teorema do Valor Intermediário interessantes. Veremos a seguir uma delas, a saber, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Para tanto vejamos a seguinte definição:

**Definição 4.1.** *Seja  $f : M \rightarrow M$ , um ponto fixo desta aplicação é um ponto  $x \in M$  tal que  $f(x) = x$ .*

**Exemplo 4.1.** A origem  $0 \in \mathbb{R}^n$  é o único ponto fixo de uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(x) = -x$ . A aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ , tem dois pontos fixos, a saber 0 e 1. Se  $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$  então a translação  $x \mapsto x + a$ , de  $\mathbb{R}^n$  em si mesmo, não tem ponto fixo.

Um famoso resultado de Topologia é o chamado “Teorema do Ponto Fixo de Brouwer” enunciado a seguir.

**Teorema 4.2.** *(Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Se  $B = B[0, 1]$  é a bola unitária fechada do espaço  $\mathbb{R}^n$ , então toda aplicação contínua  $f : B \rightarrow B$  possui (pelo menos) um ponto fixo  $x \in B$ .*

Faremos aqui a versão deste teorema para o caso  $n = 1$ .

**Teorema 4.3.** *Toda função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  possui um ponto fixo.*

**Demonstração.** Para provar que toda função contínua  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  possui um ponto fixo, consideramos a função contínua  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(x) = f(x) - x$  como  $0 \leq f(x) \leq 1$  para todo  $x \in [0, 1]$ , segue que  $\varphi(0) = f(0) \geq 0$  e  $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ . Logo,  $\varphi(1) \leq 0 \leq \varphi(0)$  e assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $\varphi(x) = 0$ . Como  $\varphi(x) = f(x) - x$ ,  $\varphi(x) = 0$  implica em  $f(x) - x = 0$  e portanto em  $f(x) = x$ . ■

Vejamos uma outra aplicação do “Teorema do Valor Intermediário”.

**Lema 4.1.** *Um polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.*

**Demonstração.** Seja  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ , com  $a_n \neq 0$  e  $n$  ímpar. Sem perda de generalidade, podemos supor  $a_n = 1$ .

Como  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , basta mostrar que existem  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $p(x_1) < 0 < p(x_2)$ . Ora, podemos escrever, para todo  $x \neq 0$ :

$$p(x) = x^n \cdot \left[ \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + 1 \right]. \quad (4.1)$$

Seja  $r = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + 1$ . Se tomarmos  $|x| > r$  teremos:

$$\left| \frac{a_0}{x^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} \right| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|x|} < 1, \text{ já que } r > 1.$$

Logo, quando  $|x| > r$ , o fator dentro do colchete em 4.1 é positivo. Isto significa que, para valores de  $x$  tais que  $|x| > r$ , o sinal de  $p(x)$  é o mesmo sinal que  $x^n$ . Como  $n$  é ímpar, vemos que o polinômio  $p(x)$  assume valores positivos e negativos, logo se anula em algum ponto. Evidentemente um polinômio de grau par, como  $x^2 + 1$ , pode não admitir raízes reais.

■

## 5 Aplicações do Teorema da Alfândega

Para finalizar este trabalho buscamos outras aplicações do Teorema da Alfândega além da demonstração do Teorema do Valor Intermediário. Apresentamos duas aplicações que julgamos interessantes, a saber, uma envolvendo Geometria Diferencial e outra via Sistemas Dinâmicos. Neste momento o intuito é apenas de elucidar tais aplicações, não temos a pretensão de explorar rigorosamente tais conceitos.

Antes disto observamos que o Teorema da Alfândega que apresentamos no capítulo anterior é bem geral, válido em qualquer espaço métrico. Em particular, para  $\mathbb{R}^n$  temos a seguinte versão:

“Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto arbitrário. Se um conjunto conexo  $C \subset \mathbb{R}^n$  contém um ponto  $a \in X$  e um ponto  $b \notin X$  então  $C$  contém algum ponto da fronteira de  $X$ ”.

### 5.1 Aplicação em Geometria Diferencial

Nesta seção apresentamos a demonstração de um teorema inserido no contexto da geometria diferencial, o qual trata em particular da Convexidade de uma Superfície, a saber:

**Teorema 5.1.** *A imersão  $f$  é um mergulho convexo se, e somente se,  $S_u$  é simplesmente conexo, para todo  $u \in S^2$ .*

Essa demonstração foi baseada na dissertação [1] e no artigo [2], de Mohammad Ghomi, publicado no *Annals of Mathematics*, 155 (2002). Para sua compreensão, há uma lista bastante extensa de prerequisites entre estes destacamos as seguintes definições e afirmações, que podem ser encontradas nestas referências citadas:

- Sejam  $M$  uma variedade de dimensão 2 orientada e fechada (isto é,  $M$  é compacta e  $\partial M \neq \emptyset$ )  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão diferenciável de  $M$  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  e  $N : M \rightarrow S^2$  a Aplicação Normal de Gauss.

- Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão se a diferencial  $df_p : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Ainda,  $M$  é um mergulho se  $f$  é uma imersão injetiva.
- Um mergulho  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um mergulho convexo se  $f(M)$  é bordo de uma região convexa, isto é, de um conjunto convexo limitado, fechado e com interior não vazio. Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^3$  é convexo se dados  $x, y \in X$  o segmento de reta unindo  $x$  e  $y$  está contido em  $X$ .
- Um subconjunto  $X$  de uma variedade  $M$  é simplesmente conexo se é conexo e qualquer curva fechada de  $X$  pode ser deformada continuamente em um ponto.
- Para todo  $u \in S^2$ , definimos o conjunto sombra,  $S_u$ , por  $S_u := \{p \in M; \langle N(p), u \rangle > 0\}$ , em que  $\langle \cdot \rangle$  é produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ .
- Se  $f$  é um mergulho convexo, então é intuitivo que  $S_u$  é um subconjunto conexo de  $M$ , para todo  $u \in S_2$ .

### 5.1.1 Demonstração do teorema 5.1

Começaremos mostrando que se  $f$  é um mergulho convexo, então  $S_u$  é simplesmente conexo para todo  $u \in S^2$ .

Seja  $C \subset \mathbb{R}^3$  corpo convexo tal que  $\partial C = f(M)$ . Como  $M$  é compacta, existe  $x \in \mathbb{R}^3$  tal que  $x \notin C$ . Então, dado  $u \in S^2$ , sejam  $\Pi$  o plano ortogonal a  $u$  passando por  $x$  e  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$  a projeção ortogonal. Já que  $\pi$  é uma transformação linear,  $\pi(C)$  é convexo. Seja  $D := \pi(f(M))$ .

**Afirmção 1.**  $D = \pi(C)$ .

Como  $f(M) \subset C$ ,  $D = \pi(f(M)) \subset \pi(C)$ . Falta mostrar que  $\pi(C) \subset D$ . Para tanto, seja  $y \in \pi(C)$ , qualquer. Então,  $y = \pi(p)$ , para algum  $p \in C$ . Vamos analisar as duas possibilidades para  $p$ : ou  $p \in \partial C$  ou  $p \in \text{int}(C)$ . Se  $p \in \partial C = f(M)$ , então  $\pi(p) \in \pi(f(M)) = D$ . Se  $p \in \text{int}(C)$ , seja  $A$  a semirreta com origem em  $p$  e direção e sentido de  $u$ . Como  $C$  é um conjunto limitado, existe  $q \in A \cap (\mathbb{R}^3 - C)$ , e como  $p \in A \cap C$ , pelo Teorema da Alfândega (versão enunciada acima) resulta que  $A$  contém algum ponto da fronteira de  $C$ , isto é, de  $f(M)$ . Seja  $p_1 \in A \cap \partial C$ . Como  $\pi(p_1) = \pi(p)$ ,  $\pi(p) \in \pi(f(M)) = D$ .

Logo  $\pi(C) \subset D$  e a afirmação 1 está demonstrada.

Desta afirmação, segue em particular que  $D$  é convexo.

**Afirmção 2.** O interior de  $D$ ,  $\text{int}(D)$ , é não vazio.

De fato, se  $p \in \text{int}(C)$ , então existe  $r > 0$  tal que a bola centrada em  $p$  de raio  $r$ ,  $B(p; r)$ , está contida no interior de  $C$ . Logo, é possível mostrar que neste caso,

$\pi(B(p; r))$  é o disco de centro  $\pi(p)$  e raio  $r$  em  $\Pi$ .

Portanto,  $\pi(p)$  é um ponto interior de  $\pi(C) = D$ . Como  $\text{int}(D)$  é convexo e não vazio, segue que  $\text{int}(D)$  é simplesmente conexo.

**Afirmção 3.**  $f(S_u)$  é um gráfico sobre  $\text{int}(D)$ .

Sejam  $y \in \text{int}(D)$  e  $r$  a reta por  $y$  paralela a  $u$ . Como  $y \in \text{int}(D)$ , existe  $p \in \text{int}(C)$  tal que  $\pi(p) = y$ . Então  $p \in r$  e podemos escrever  $r$  como a união das duas semirretas  $A$  e  $A_0$  iniciando em  $p$ :  $A$  tem o sentido de  $u$  e  $A_0$  tem o sentido contrário. Já que  $C$  é um conjunto limitado, existe  $q_1 \in A \cap (\mathbb{R}^3 - C)$  e como  $p \in A \cap C$ , resulta do **Teorema da Alfândega** que  $A$  contém algum ponto da fronteira de  $C$ .

Analogamente,  $A_0$  contém algum ponto da fronteira de  $C$ . Mais ainda, por  $C$  ser convexo,  $A$  e  $A_0$  contêm, cada um deles, um único ponto da fronteira de  $C$ . Sejam  $p_1 = A \cap \partial C$  e  $p_2 = A_0 \cap \partial C$ . Como a superfície  $f(M)$  é convexa, segue que  $f(M)$  está contida em um dos subespaços determinados pelo plano tangente  $T_{p_1}f(M)$  e está contida em um dos subespaços determinados por  $T_{p_2}f(M)$ .

Logo,  $\langle u; N(p_1) \rangle$  e  $\langle u; N(p_2) \rangle$  têm sinais opostos. Supondo, sem perda de generalidade, que  $\langle u; N(p_1) \rangle > 0$ ,  $p_1 \in S_u$ ,  $p_2 \in S_{-u}$  e, mais ainda,  $p$  é o único ponto de  $M$  tal que  $\pi(f(p_1)) = y$  e  $\langle u; N(p_1) \rangle > 0$ . Portanto a afirmação 3 está provada.

Assim,  $\pi \circ f : S_u \rightarrow \text{int}(D)$  é um homeomorfismo, e como  $\text{int}(D)$  é simplesmente conexo, resulta que  $S_u$  é simplesmente conexo. Como  $u \in S^2$  é arbitrário,  $S_u$  é simplesmente conexo, para qualquer  $u \in S^2$ .

■

## 5.2 Aplicação em Sistemas Dinâmicos

A próxima aplicação do teorema da Alfândega aparece no contexto de Sistemas Dinâmicos Discretos; este resultado foi extraído do artigo *Estabilidade de Conjuntos Invariantes por uma Classe de Perturbações Descontínuas da Identidade* de Marcos Luiz Crispino,[3]. A saber:

**Teorema 5.2.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $\{X_1, \dots, X_k\}$ ,  $k \geq 2$ , uma classe de subconjuntos convexos e fechados de  $E$ , cujos interiores são não vazios e disjuntos dois a dois. Nestas condições, denotando,  $X = \bigcup_{j=1}^k X_j$  e  $Y = \bigcup_{j=1}^k \partial X_j$ , dados  $A \subset E$  convexo e  $r > 0$ , se*

1.  $B(a, r) \subset \text{int}(X)$ , em que  $B(a, r)$  denota a bola aberta de raio  $r$  em torno do conjunto  $A$ , isto é,  $A \subset B(a, r)$ .
2.  $B(a, r) \cap X_j = B(A \cap X_j; r) \cap X_j$ ;  $j = 1, \dots, k$ .

então para  $y \in B(a, r) \cap Y$  existe, em correspondência,  $x \in A \cap Y$  tal que  $y \in B(x; r)$

Esta aplicação parece-nos mais familiar uma vez que grande parte dos elementos e notações que aqui aparecem já foram tratados anteriormente. Para mais detalhes vide [4].

### 5.2.1 Demonstração do teorema 5.2

Provemos primeiramente a existência de índices  $j, l \in \{1, \dots, k\}$  tais que  $j \neq k$  e  $\partial X_j \cap \partial X_l \neq \emptyset$ . **(I)**.

Façamos isto, dado  $y \in B(a, r) \cap Y$  arbitrário, seja  $j \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $y \in \partial X_j$ . Sendo  $X_j$  convexo então  $y \in \partial \text{int}(X_j)$ .

Uma vez que  $B(a, r)$  é um conjunto aberto, existe  $\rho > 0$  tal que

$$B(y; \rho) \subset B(a, r).$$

Valem as seguintes afirmações

1.

$$B(y; \rho) \cap \text{int}(X_j) \neq \emptyset.$$

2.

$$B(y; \rho) \cap (E - X_j) \neq \emptyset.$$

Da condição (1) do enunciado, temos que  $B(y; \rho) \subset \text{int}(X)$ , logo

$$B(y; \rho) \cap (E - X_j) \subset B(y; \rho) \subset \text{int}(X).$$

Desta forma

$$B(y; \rho) \cap (E - X_j) = (B(y; \rho) \cap (E - X_j)) \cap \text{int}(X) =$$

$$B(y; \rho) \cap ((E - X_j) \cap \text{int}(X)) = B(y; \rho) \cap (\text{int}(X) - X_j).$$

Da afirmação (2) e igualdades acima decorre que existe também  $l \in \{1, \dots, k\}$  para o qual  $B(y; \rho) \cap X_l \neq \emptyset$ . Para este índice temos:  $X_l \cap \text{int}(X_j) = \emptyset$ .

Consequentemente,  $B(y; \rho) \cap X_l \neq \emptyset$  e  $B(y; \rho) \cap (\text{int}(X) - X_l) \neq \emptyset$ , logo  $y \in \partial X_l$ .

Ou seja, para todo  $y \in B(A, r) \cap Y$  existem índices distintos  $j, l \in \{1, \dots, k\}$  tais que  $y \in \partial X_j \cap \partial X_l$ .

Desta forma temos que dado arbitrariamente  $y \in B(A, r) \cap Y$ , existem índices distintos em  $\{1, \dots, k\}$  tais que  $y \in \partial X_j \cap \partial X_l$ . Por outro lado, sendo  $X_j$  e  $X_l$  fechados segue que  $y \in X_l \cap X_k$ .

Ou seja,  $y \in (B(A, r) \cap X_j) \cap (B(A, r) \cap X_l)$ .

Deste fato e pela propriedade (2) do enunciado:  $y \in (B(A \cap X_j, r)) \cap (B(A \cap X_l, r))$ .

Portanto, existem  $x_j \in A \cap X_j$  e  $x_l \in A \cap X_l$  tais que  $y \in B(x_j, r) \cap B(x_l, r)$ .

Veja que se  $x_j \in \partial X_j$  ou  $x_l \in \partial X_l$  nada mais há para demonstrar.

Admitamos então que  $x_j \in \text{int}X_j$  e  $x_l \in \text{int}X_l$ . Consequentemente,  $x_j, x_l \in B(y, r)$ . Daí da convexidade de  $B(y, r)$  temos que

$$[x_j, x_l] \subseteq A \cap B(y, r).$$

Como  $\text{int}X_j \cap \text{int}X_l = \emptyset$ , da conexidade de  $[x_j, x_l]$  e do **teorema da Alfândega** existe  $x \in [x_j, x_l] \cap \partial(\text{int}X_j)$ . Por outro lado, pela convexidade de  $X_j$  segue que  $x \in \partial X_j$ , portanto  $x \in Y$ .

Visto que  $x \in B(y, r)$  tem-se finalmente que  $y \in B(x, r)$ .

■

## 6 Considerações Finais

Neste trabalho tratamos de elementos topológicos tendo como fio condutor o teorema da Alfândega, também conhecido como teorema da Fronteira.

Aproveitamos este ambiente para aprofundar temas que são pertinentes quando estuda-se Espaços Métricos. Neste contexto, destacamos o tratamento com as principais métricas do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e bem como a abordagem sobre as funções lipschitzianas. Isto foi realizado uma vez que pensamos neste material como sendo um viés para nortear o estudo da disciplina Espaços Métricos, inserida nas grades curriculares dos melhores cursos de graduação em Matemática.

Percebe-se no desenvolvimento deste trabalho que Conexidade é a palavra chave quando pensamos no Teorema da Alfândega, tanto para poder apresentar e entender seu enunciado quanto para conseguir demonstrá-lo.

Quando feito um levantamento histórico sobre o teorema da Alfândega pouco foi encontrado. Mesmo em conversas informais com pesquisadores sobre História da Matemática. Um fato interessante que obtivemos é que o teorema do Valor Intermediário pode ser demonstrado de modo muito natural a partir do teorema da Alfândega, embora este tenha pelo menos mais duas demonstrações diferentes desta. Observamos que quando nos deparamos com a riqueza de aplicações do teorema do Valor Intermediário decidimos aproveitar algumas destas neste trabalho.

Além do teorema do Valor Intermediário, procuramos outras aplicações do teorema da Alfândega. Percebemos que estas inserem-se em contextos matemáticos extremamente complexos, podendo inclusive dar origem a outra dissertação de mestrado. Entretanto, mesmo com risco de parecer muito superficial, escolhemos duas aplicações para fazer parte deste trabalho, colocando apenas elementos para possivelmente entender seu enunciado.

# Referências

- [1] RIBEIRO, S. M. C. *Sombra e Conexidade de Superfícies*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- [2] GHOMI, M. Conjuntos invariantes por uma classe de perturbações da identidade. *Information and Control*, v. 8, p. 338–353, 1965.
- [3] CRISPINO, M. L. Estabilidade de conjuntos invariantes por uma classe de perturbações descontínuas da identidade. *Rev. Math. Estat.*, v. 19, p. 285–296, 2001.
- [4] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1989.
- [5] MUNKRES, J. R. *Topology: a first course*. 2. ed. New York: Springer, 1969.