

Ary Franco Junior

**Condições Relaxadas para o Controle Chaveado com
Especificação da Região de Operação de Modelos Fuzzy T-S
Incertos utilizando Otimizadores não Derivativos**

Ilha Solteira
2023



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Ary Franco Junior

**Condições Relaxadas para o Controle Chaveado com
Especificação da Região de Operação de Modelos Fuzzy T-S
Incertos utilizando Otimizadores não Derivativos**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do
Campus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor em En-
genharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto
Teixeira

Ilha Solteira

2023

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

F825c Franco Junior, Ary.
Condições relaxadas para o controle chaveado com especificação da região de operação de modelos fuzzy T-S incertos utilizando otimizadores não derivativos / Ary Franco Junior. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
134 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2023

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Sistemas não lineares incertos contínuos no tempo. 2. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. 3. Controle chaveado. 4. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIS). 5. Otimizador não derivativo. 6. Sistema Fotovoltaico (MPPT).


Raiane da Silva Santos

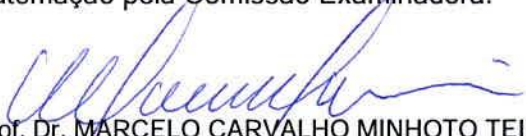
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

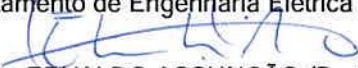
TÍTULO DA TESE: Condições Relaxadas para o Controle Chaveado com Especificação da Região de Operação de Modelos Fuzzy T-S Incertos utilizando Otimizadores não Derivativos

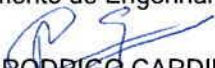
AUTOR: ARY FRANCO JUNIOR

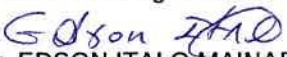
ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA


Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR (Participação Presencial)
Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS


Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Ilha Solteira, 26 de janeiro de 2023

Agradecimentos

Esta tese foi desenvolvida com muita dedicação, empenho, e superando muitos desafios. Desafios estes, em que não estive sozinho.

Agradeço a Deus pela minha saúde e por ter iluminado meu caminho com sabedoria e conhecimentos adquiridos durante esta jornada.

À minha querida esposa Jacqueline, por ser tão importante em minha vida, contribuindo para este trabalho com seu carinho, apoio emocional e amor incondicional.

Agradeço meu pai Ary, minha mãe Josefina e minha irmã Lidiane, por todo incentivo aos estudos, desde criança, e pelos valores transmitidos.

À psicoterapeuta Caroline Macedo, que me acompanha a alguns anos, pela ajuda e suporte na busca do meu autoconhecimento.

Ao professor Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, que me orienta desde a Iniciação Científica, passando pelo mestrado, e agora neste doutorado, agradeço pelo apoio, paciência, confiança e orientação. Foram 5 anos, 8 meses, e 23 dias, desde meu primeiro contato pedindo sua orientação para o doutorado até a data da defesa desta tese.

Agradeço aos membros e ex-membros do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), por toda ajuda recebida, em especial ao Igor Thiago Minari Ramos, Wallysonn Alves de Souza, e Talita Tozetto Esteves Bolandim.

Aos professores Rodrigo Cardim e Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves, pelo apontamentos feitos na qualificação deste trabalho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, pelo afastamento concedido durante parte deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“A verdade é filha do tempo e não da autoridade,
mas a dúvida é o começo da sabedoria.”
(Galileu Galilei)

Resumo

Esta tese apresenta condições relaxadas para o projeto de controladores chaveados, para plantas não lineares com parâmetros incertos descritas exatamente através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), utilizando matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$, através da busca extremal realizada por um otimizador não derivativo. A ideia principal da estratégia de controle proposta foi mitigar a influência das incertezas na matriz de entrada $B(\alpha)$. Foi considerada uma região de operação para a modelagem fuzzy T-S exata da planta e o chaveamento dos ganhos do controlador é feito através de um otimizador não derivativo, visando a minimização de uma função de Lyapunov quadrática para o sistema realimentado. O conhecimento do vetor dos pesos normalizados α na modelagem fuzzy T-S da planta, que no caso depende de parâmetros incertos e não linearidades da planta, não é necessário na implementação da lei de controle chaveada proposta. O otimizador não derivativo, que é um tipo de controle extremal, é usado para buscar o máximo ou mínimo de uma função. Foi realizada uma revisão de seu funcionamento, e como exemplo de sua operação, ele foi utilizado para ser o Rastreador do Ponto de Máxima Potência (MPPT) na simulação de um sistema fotovoltaico. Outros tipos de controle por busca extremal também são brevemente descritos. A representação exata dos sistemas não lineares incertos e/ou com não linearidades é feita exatamente por modelos fuzzy T-S incertos, que possuem funções de pertinência incertas e modelos locais conhecidos. Mas, como a representação do sistema através de combinação convexa obtida é válida apenas em uma região do espaço de estados, não há garantias de que o vetor de estado do sistema permaneça nessa região. O procedimento de projeto se inicia com a inclusão de LMIs que garantam a permanência das trajetórias do sistema em uma região de operação especificada, dada uma região de condições iniciais, em três teoremas diferentes disponíveis na literatura que até então garantiam a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy T-S. Além disso, são adicionadas LMIs que garantam uma taxa de decaimento mínima (tempo de resposta), bem como uma restrição no sinal de controle. Foram comparadas as regiões de factibilidade destes três teoremas adaptados e escolhido o que apresenta a maior região factível, para obter os ganhos do controlador. Os parâmetros do otimizador não derivativo foram então definidos e ajustados. Foram realizadas simulações numéricas para um pêndulo invertido, contendo incerteza na massa do carrinho, em quatro cenários possíveis. Em todos os casos o sistema foi controlado e se manteve dentro da região de operação especificada. As condições de projeto para os controladores chaveados utilizando otimizadores não derivativos propostos, nos casos estudados, apresentaram áreas factíveis maiores do que as obtidas para o projeto de uma classe de controladores chaveados disponível na literatura. Este fato ilustra o principal resultado desta tese, que é a relaxação das condições para o projeto de controladores chaveados utilizando otimizadores não de-

rivativos, mitigando no projeto a influência das incertezas na matriz de entrada $B(\alpha)$ da planta, representada através de modelos fuzzy T-S.

Palavras-chave: Sistemas não lineares incertos contínuos no tempo. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Controle chaveado. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Otimizador Não Derivativo. MPPT. Sistema Fotovoltaico.

Abstract

This thesis presents relaxed conditions for the design of switched controllers, for nonlinear plants with uncertain parameters exactly described through Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models, using matrices $A(\alpha)$ and $B(\alpha)$, based on extremum seeking control performed by a non-derivative optimizer. The main idea of the proposed control strategy was to mitigate the influence of uncertainties in the input matrix $B(\alpha)$. An operating region was considered for the exact fuzzy T-S modeling of the plant and the switching of the controller gains is done by a non-derivative optimizer, aiming at the minimization of a quadratic Lyapunov function for the feedback system. The knowledge of the vector of normalized weights α in the fuzzy T-S modeling of the plant, which in this case depends on uncertain parameters and nonlinearities of the plant, is not necessary in the implementation of the proposed switched control law. The non-derivative optimizer, which is a type of extremum seeking control, is used to find the maximum or minimum of a function. A review of its operation was carried out, and as an example of its operation, it was used to be the Maximum Power Point Tracker (MPPT) in the simulation of a photovoltaic system. Other types of extreme search control are also briefly described. The exact representation of uncertain nonlinear systems and/or systems with nonlinearities is made exactly by uncertain T-S fuzzy models, which have uncertain membership functions and known local models. But, as the representation of the system through convex combination obtained is valid only in a region of the state space, there is no guarantee that the state vector of the system will remain in that region. The design procedure begins with the inclusion of LMIs that guarantee the permanence of the system trajectories in a specified operating region, given a region of initial conditions, in three different theorems available in the literature that until then guaranteed the global asymptotic stability of the equilibrium point $x = 0$ of the fuzzy T-S system. In addition, LMIs are added that guarantee a minimum decay rate (response time), as well as a restriction on the control signal. The feasibility regions of these three adapted theorems were compared and the one with the largest feasible region was chosen to obtain the controller gains. The non-derivative optimizer parameters were then defined and adjusted. Numerical simulations were performed for an inverted pendulum, containing uncertainty in the mass of the cart, in four possible scenarios. In all cases the system was controlled and remained within the specified operating region. The design conditions for switched controllers using proposed non-derivative optimizers, in the studied cases, presented larger feasible areas than those obtained for the design of a class of switched controllers available in the literature. This fact illustrates the main result of this thesis, which is the relaxation of the conditions for the design of switched controllers using non-derivative optimizers, mitigating in the design the influence of uncertainties in the input matrix $B(\alpha)$ of the plant, represented by T-S fuzzy models.

Keywords: Uncertain continuous-time nonlinear systems. Takagi-Sugeno fuzzy models. Switched control. Linear matrix inequalities (LMIs). Non-Derivative Optimizer.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Método das Perturbações Senoidais.	31
Figura 2 – Superfícies de Deslizamento.	33
Figura 3 – Esquema de Controle Extremal por Modos Deslizantes.	35
Figura 4 – Esquema de Controle Extremal por Aproximação.	37
Figura 5 – Diagrama de blocos do otimizador T-Z.	40
Figura 6 – Sinais de entrada e saída de um detector de pico mínimo.	40
Figura 7 – Trajetória típica do otimizador T-Z.	43
Figura 8 – Reiniciador do detector de pico mínimo.	44
Figura 9 – Diagrama do sistema fotovoltaico com MPPT.	47
Figura 10 – Circuito elétrico equivalente de uma célula fotovoltaica.	48
Figura 11 – Características de tensão-corrente e tensão-potência do módulo fotovoltaico para o caso de temperatura ambiente constante, $T_a = 25^\circ C$, e irradiação variável. Os pontos com * indicam o MPP.	51
Figura 12 – Características de tensão-corrente e tensão-potência do módulo fotovoltaico para o caso de irradiação constante, $G_c = 1000W/m^2$, e temperatura ambiente variável. Os pontos com * indicam o MPP.	52
Figura 13 – Esquema de simulação no Simulink [®] para o Otimizador Não Derivativo aplicado ao módulo fotovoltaico.	53
Figura 14 – Gráfico de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$ para o caso de temperatura ambiente constante, $T_a = 25^\circ C$, e irradiação variável. Os pontos com * indicam o valor máximo de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$	55
Figura 15 – Gráfico de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$ para o caso de irradiação constante, $G_c = 1000W/m^2$, e temperatura ambiente variável. Os pontos com * indicam o valor máximo de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$	55
Figura 16 – Simulação do sistema de MPPT do módulo fotovoltaico para o caso de temperatura ambiente constante, $T_a = 25^\circ C$ e irradiação variável, G_c	57
Figura 17 – Simulação do sistema de MPPT do módulo fotovoltaico para o caso de irradiação constante, $G_c = 1000W/m^2$, e temperatura ambiente variável, T_a	58
Figura 18 – Controlador Chaveado com Otimizador Não Derivativo.	73
Figura 19 – Sistema Pêndulo Invertido.	78
Figura 20 – Diagrama de corpo livre do pêndulo invertido.	79
Figura 21 – Comparação das regiões factíveis para o pêndulo invertido utilizando: Teorema 1 (“+”); Teorema 2 (“×”); Teorema 3 (“○”). Todos utilizados em conjunto com o Teorema 5 com $\mu_0 = 0,001$, para $0 \leq \beta \leq 2 \times 10^{-3}$	89

Figura 22 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$	92
Figura 23 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot}	93
Figura 24 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$	94
Figura 25 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$	95
Figura 26 – Comportamento da variável de estado $x_1(t)$ a partir de sua condição inicial $x_1(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$	96
Figura 27 – Comportamento da variável de estado $x_3(t)$ a partir de sua condição inicial $x_3(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$	97
Figura 28 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot}	98
Figura 29 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$	99
Figura 30 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$	100

- Figura 31 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} . 101
- Figura 32 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$ 102
- Figura 33 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$ 103
- Figura 34 – Comportamento da variável de estado $x_1(t)$ a partir de sua condição inicial $x_1(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 104
- Figura 35 – Comportamento da variável de estado $x_3(t)$ a partir de sua condição inicial $x_3(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 105
- Figura 36 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} 106
- Figura 37 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$ 107

Figura 38 – Comparação das regiões factíveis para o pêndulo invertido utilizando: Teorema 1 (“+”); Teorema 2 (“×”); Teorema 3 (“○”). Todos utilizados em conjunto com o Teorema 5, para $60 \times 10^{-3} \leq \beta \leq 67 \times 10^{-3}$	108
Figura 39 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$	111
Figura 40 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot}	112
Figura 41 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$	113
Figura 42 – Comportamento da variável de estado $x_1(t)$ a partir de sua condição inicial $x_1(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 66 \times 10^{-3}$, $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$	114
Figura 43 – Comportamento da variável de estado $x_3(t)$ a partir de sua condição inicial $x_3(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 66 \times 10^{-3}$, $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$	115
Figura 44 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot}	116
Figura 45 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$	117
Figura 46 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$	118

- Figura 47 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} . 119
- Figura 48 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$ 120
- Figura 49 – Comportamento da variável de estado $x_1(t)$ a partir de sua condição inicial $x_1(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 66 \times 10^{-3}$, $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 121
- Figura 50 – Comportamento da variável de estado $x_3(t)$ a partir de sua condição inicial $x_3(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 66 \times 10^{-3}$, $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 122
- Figura 51 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} 123
- Figura 52 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$ 124

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados de placa e estimados do módulo fotovoltaico.	51
Tabela 2 – Valores de G_c , T_c , V_{mp} e P_{mp} para as curvas da Figura 11.	51
Tabela 3 – Valores de G_c , T_c , V_{mp} e P_{mp} para as curvas da Figura 12.	52
Tabela 4 – Valores médios de V_{PV} e P_{PV} obtidos da Figura 16, desprezado o transitório $t < 0,5s$, para cada valor de G_c , e os valores de V_{mp} e P_{mp} da Tabela 2 para comparação.	57
Tabela 5 – Valores médios de V_{PV} e P_{PV} obtidos da Figura 17, desprezado o transitório $t < 0,5s$, para cada valor de T_a , e os valores de V_{mp} e P_{mp} da Tabela 3 para comparação.	58
Tabela 6 – Parâmetros do sistema pêndulo invertido.	83
Tabela 7 – Teste de Factibilidade do Pêndulo Invertido para $0 \leq \beta \leq 2 \times 10^{-3}$	89
Tabela 8 – Valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 1.	94
Tabela 9 – Valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 2.	102
Tabela 10 – Teste de Factibilidade do Pêndulo Invertido para $60 \times 10^{-3} \leq \beta \leq 67 \times 10^{-3}$	108
Tabela 11 – Valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 3.	113
Tabela 12 – Valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 4.	120

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivos	24
1.2	Estrutura da Tese	24
2	REVISÃO DE CONCEITOS	26
2.1	Modelo Fuzzy T-S	26
2.2	Representação Exata de uma Classe de Sistemas Não Lineares Incertos por Modelos Fuzzy T-S	28
2.2.1	Forma Generalizada de Sistemas Fuzzy T-S	28
2.3	Controle por Busca Extremal	30
2.3.1	Controle Extremal por Perturbação Senoidal ou <i>Dither</i>	31
2.3.2	Controle Extremal por Modos Deslizantes	32
2.3.3	Controle Extremal por Aproximação ou Otimização Numérica	36
2.3.4	Controle Extremal por Adaptação ou Modelo	38
2.3.5	Controle Extremal por Redes Neurais	39
2.4	Otimizador Não Derivativo	39
3	MPPT DE UM SISTEMA FOTOVOLTAICO USANDO OTIMIZADOR NÃO DERIVATIVO	46
3.1	Modelagem Matemática de uma Célula Fotovoltaica	48
3.2	Aplicação do Otimizador Não Derivativo como MPPT do Sistema Fotovoltaico	52
4	RESULTADOS BÁSICOS	60
4.1	Região de Operação	60
4.2	Região de Condições Iniciais	62
4.3	Tempo de Resposta	63
4.4	Estabilidade de Sistemas Fuzzy T-S via LMIs	63
4.5	Restrição do Sinal de Controle	69
5	CONTROLADORES CHAVEADOS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS COM OTIMIZADOR NÃO DERIVATIVO	72
5.1	Controlador Chaveado com Otimizador Não Derivativo	72
5.1.1	Prova Matemática do Funcionamento da Configuração de Controle Proposta	76
5.1.2	Escolha de parâmetros do Otimizador Não Derivativo	76

5.2	Pêndulo Invertido - Representação do Sistema Dinâmico no Espaço de Estados	78
5.3	Pêndulo Invertido - Modelo Fuzzy T-S	82
5.4	Pêndulo Invertido - Simulações	86
5.4.1	Região de Factibilidade com β pequeno	88
5.4.2	Simulação do Cenário 1	91
5.4.3	Simulação do Cenário 2	99
5.4.4	Região de Factibilidade com β grande	107
5.4.5	Simulação do Cenário 3	110
5.4.6	Simulação do Cenário 4	117
6	CONCLUSÕES	125
6.1	Perspectivas Futuras	126
	REFERÊNCIAS	127

1 INTRODUÇÃO

Com o passar dos anos, problemas vinculados à teoria de controle têm sido estudados, principalmente com foco na análise da estabilidade e o projeto de novos controladores. Muitos estudos utilizam Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês “*Linear Matrix Inequalities - LMIs*”), as quais oferecem procedimentos metódicos para o projeto de controladores, que asseguram a estabilidade assintótica do sistema controlado. Para plantas não lineares, este procedimento teve um grande avanço utilizando a representação das plantas através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S). O procedimento em que os modelos fuzzy T-S descrevem um sistema não linear de forma exata pode ser encontrado em Taniguchi et al. (2001). Ele utiliza a combinação de um certo número de modelos locais lineares invariantes no tempo, sendo que a combinação é realizada por funções de pertinência fuzzy, e o projeto do regulador fuzzy é construído por meio da compensação distribuída paralela (do inglês “*Parallel Distributed Compensation - PDC*”), como proposto em Tanaka, Ikeda e Wang (1998) (SOUZA, 2013).

O PDC oferece um procedimento para projetar um controlador fuzzy a partir do modelo T-S. Para realizar o PDC, uma planta a ser controlada (sistema não linear) é primeiro representada por um modelo fuzzy T-S. No PDC, cada regra de controle é projetada a partir da regra correspondente de um modelo fuzzy T-S. O controlador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos fuzzy com o modelo fuzzy nas partes premissas (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Com base na PDC e nas LMIs, diferentes técnicas de projeto de controle foram propostas nas últimas décadas para o controle de sistemas não lineares representados através de modelos fuzzy T-S.

Em Lam (2018) foi realizada uma revisão sobre a análise de estabilidade de sistemas de controle baseados em modelos fuzzy (do inglês “*Fuzzy-Model-Based - FMB*”) em tempo contínuo. Ele resume as questões nos quatro aspectos fundamentais e essenciais: os tipos de correspondência de função de pertinência; tipos de funções de Lyapunov; tipos de análise de estabilidade; e as técnicas de análise de estabilidade. Esses aspectos desempenham um papel importante em relação com as seguintes questões dos sistemas de controle FMB:

- Aplicabilidade: trata-se da capacidade de aplicar os resultados da análise e os métodos de projeto aos problemas de controle;
- Computação: trata-se do nível de demanda computacional necessário para obter uma solução viável para as condições de estabilidade obtidas sob a mesma abordagem de análise de estabilidade;

- Conservatividade : trata-se do nível conservador das condições de estabilidade obtidas sob a mesma abordagem de análise de estabilidade;
- Complexidade: trata da complexidade estrutural do controlador fuzzy;
- Flexibilidade: trata da flexibilidade de projeto do controlador fuzzy, como a liberdade de escolher suas funções de pertinência e número de regras;
- Implementação: trata dos custos de implementação do controlador fuzzy;
- Robustez: trata-se da capacidade do controlador fuzzy de tolerar as incertezas da planta não linear, que estão embutidas nas funções de pertinência do modelo fuzzy.

Os tipos de correspondência de função de pertinência podem ser classificados em premissas com correspondência perfeita, parcial ou imperfeita, em relação às funções de pertinência da premissa e ao número de regras usadas no modelo fuzzy e controlador fuzzy que forma o sistema de controle FMB (LAM, 2018):

Entre os tipos de candidatas a função de Lyapunov podem ser citadas: função de Lyapunov quadrática, função de Lyapunov polinomial, função de Lyapunov linear por partes/chaveada, função de Lyapunov fuzzy e função de Lyapunov de ordem superior. O emprego de diferentes candidatas à função de Lyapunov para a análise de estabilidade levará a diferentes níveis de relaxamento das condições de estabilidade. Em geral, candidatas a função de Lyapunov mais complexas geralmente levam a condições de estabilidade mais relaxadas. No entanto, requerem técnicas mais avançadas para conduzir a análise de estabilidade. A candidata a função de Lyapunov quadrática é simples e amplamente utilizada. No entanto, sempre leva a resultados de análise de estabilidade mais conservadores em comparação com outras candidatas de função de Lyapunov mais sofisticadas devido à quantidade limitada de características do sistema de controle FMB que é utilizada, pois uma matriz de Lyapunov comum deve ser encontrada para todos os subsistemas da equação fuzzy (LEE; PARK; JOO, 2011; LAM, 2018).

Existem principalmente dois tipos de análise de estabilidade em termos de se as informações das funções de pertinência estão sendo usadas:

- A análise de estabilidade com funções de pertinência independentes (do inglês “*Membership-Function-Independent - MFI*”) não leva em consideração as informações de funções de pertinência, o que implica no conservadorismo da análise de estabilidade;
- A análise de estabilidade com funções de pertinência dependentes (do inglês “*Membership-Function-Dependent - MFD*”), as condições de estabilidade conterão algumas informações das funções de pertinência.

Em comparação com a análise de estabilidade MFD, a análise de estabilidade MFI é mais simples, em termos de menor número de condições de estabilidade e variáveis de decisão, uma vez que as funções de pertinência são geralmente descartadas para obter as condições de estabilidade. Na prática, para lidar com o problema de controle, as condições de estabilidade MFI podem ser aplicadas em primeiro lugar, considerando-se que menor demanda computacional é necessária para encontrar uma solução viável.

As técnicas para a análise de estabilidade MFI irão eliminar as funções de pertinência no processo de construção de condições de estabilidade. Na literatura, em um caso especial em que o controlador fuzzy compartilha as mesmas funções de pertinência da premissa e número de regras que as do modelo fuzzy, está na categoria de premissas perfeitamente combinadas ou conhecido como PDC. Os resultados da análise de estabilidade podem ser progressivamente relaxados usando o Teorema de Pólya, considerando as permutações de funções de pertinência, e este é um exemplo de técnica de análise de estabilidade. Vários trabalhos se desenvolveram em torno desta linha de pesquisa, entre eles: Kim e Lee (2000); Liu e Zhang (2003a); Liu e Zhang (2003b); Teixeira, Assunção e Avellar (2003); Fang et al. (2006); Sala e Ariño (2007).

A análise de estabilidade MFD pode carregar as informações de limite global, informação de limite local ou funções de pertinência aproximadas para a análise de estabilidade. A ideia principal é extrair as informações das funções de pertinência e utilizá-las nas condições de estabilidade. As maneiras de capturar as informações das funções de pertinência e as técnicas de sua utilização na análise de estabilidade apontarão uma direção para obter resultados de análise de estabilidade mais relaxados (LAM, 2018).

Funções quadráticas de Lyapunov foram extensivamente usadas na análise de estabilidade de sistemas fuzzy T–S. Além disso, a maioria das técnicas de controle existentes para o modelo T–S utilizam a lei PDC, que se utiliza das funções de pertinência para tal, ou variações dessas características. Com funções quadráticas de Lyapunov e lei PDC, há uma grande quantidade de resultados de estabilidade para sistemas fuzzy T–S expressos em LMIs e na sua grande maioria utilizam as funções de pertinência. Entre alguns trabalhos nesta linha, podem ser citados: Ding, Sun e Yang (2006) ao estender uma função de Lyapunov não quadrática e aplicar uma lei de compensação distribuída não paralela (não PDC), novos resultados para a estabilização foram apresentados, oferecendo uma generalização de alguns resultados disponíveis na literatura na época, para o modelo fuzzy T–S discreto no tempo.

Em Dong e Yang (2008) os controladores fuzzy chaveados foram explorados no projeto de controle, que são comutados com base nos valores das funções de pertinência, e o esquema de controle é uma extensão do esquema PDC; em Lam e Narimani (2009) sob a premissa imperfeita do casamento em que o modelo fuzzy T–S e o controlador fuzzy não compartilham as mesmas funções de pertinência, um controlador fuzzy com

flexibilidade de projeto aprimorada e propriedade de robustez é proposto para controlar uma planta não linear, ou seja, o controlador fuzzy proposto permite o emprego de funções de pertinência diferentes das do modelo fuzzy.

Em Dong, Wang e Yang (2009) um novo esquema de controle fuzzy com feedbacks não lineares locais é proposto, e o novo método de projeto de controle é baseado em menos regras fuzzy e menos carga computacional, mas ainda usa funções de pertinência; em Lee, Park e Joo (2011) apresenta uma nova função fuzzy de Lyapunov (FFL) para a análise de estabilidade de sistemas fuzzy T-S de tempo contínuo. Ao contrário dos FFLs convencionais, o proposto não depende apenas das funções de ponderação fuzzy dos sistemas fuzzy T-S, mas também de suas derivadas de tempo de primeira ordem.

Em Chen et al. (2012), foi proposto um controlador fuzzy chaveado que chaveia acompanhando uma função de Lyapunov quadrática por partes e foram obtidos novos critérios de estabilização menos conservadores. Porém, algumas condições estabelecidas são baseadas em uma classe particular de BMIs que, segundo os autores, podem ser resolvidas de forma eficiente pelo método *path-following*; em Liu e Zhang (2003a), os resultados particulares apresentados se mostram interessantes opções na modelagem e projeto de sistemas de controle fuzzy, já que são apresentadas condições de estabilidade quadrática mais simples junto a teoremas que são associados aos conceitos de LMIs, compostas pelos coeficientes de todos os subsistemas fuzzy (SILVA, 2020).

Quando o sistema não linear possui parâmetros incertos ainda assim pode-se obter um modelo fuzzy que represente exatamente este sistema em uma região de operação, com o procedimento mostrado em Santim et al. (2012). Contudo, com este procedimento, embora sejam conhecidos os modelos locais, as funções de pertinência obtidas são incertas, dependentes dos parâmetros incertos. Assim, técnicas que utilizam o conceito de controle PDC não podem ser diretamente utilizadas, pois estas funções de pertinência dependem de parâmetros incertos (ALVES, 2017).

Os controladores chaveados têm mostrado um avanço significativo nos estudos da teoria de controle. Esses controladores selecionam um ganho, em um conjunto de ganhos, por meio de uma lei de chaveamento, por exemplo, uma que retorna o menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov quadrática, e está alicerçada no fato de que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual que qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto. A lei de controle chaveada proposta em Souza et al. (2014a) e Souza et al. (2014b) não utiliza as funções de pertinência do modelo na estrutura do controlador, e então, não necessita das expressões que definem as funções de pertinência para o cálculo do sinal de controle (ALVES, 2017). Esta metodologia proposta apresenta a vantagem de estabelecer condições mais relaxadas, no projeto de controle de sistemas lineares e, para os sistemas não lineares, a vantagem de não alterar as LMIs dadas em métodos de projeto de controle comumente utilizadas, bem como um melhor

desempenho, em alguns casos, em termos de tempo de estabilização dos controladores projetados, quando comparados com o controlador não chaveado normalmente implementado como, por exemplo, os apresentados em Tanaka, Ikeda e Wang (1998) para o caso não linear (SOUZA, 2013), além é claro, de eliminar a necessidade de obter as expressões explícitas das funções de pertinência, para implementar a lei de controle.

Embora observa-se um menor conservadorismo da lei de controle chaveada frente à realimentação de estado com um único ganho, por outro lado, os teoremas propostos em Souza et al. (2014a) e Souza et al. (2014b) ainda são conservadores. O primeiro, pelo fato de que a obtenção das condições baseadas em LMIs para o projeto dos controladores chaveados foi possível às custas de um certo conservadorismo, adicionando matrizes artificiais. O segundo, pelo fato da exigência de que a matriz B deve ser constante. Estes dois procedimentos de projeto não necessitam do acesso às funções de pertinência do modelo fuzzy T-S da planta (que no caso podem depender de parâmetros incertos) na implementação das leis de controle. Este fato importante também ocorre na nova lei de controle chaveada proposta nesta tese, que oferece condições com factibilidade maior ou igual do que a obtida com o procedimento apresentado em Souza et al. (2014a).

Como o controle chaveado de sistemas não lineares através de modelos fuzzy T-S é dependente do modelo utilizado, uma vez que ele descreve exatamente o sistema não linear através de uma combinação convexa de modelos locais apenas na região de operação considerada, uma condição para que a trajetória de estado do sistema permaneça nesta região de validade deve ser obtida. O procedimento de projeto proposto em Alves (2017) fornece uma região positivamente invariante $\mathcal{E}(P, 1)$ na qual, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$, o vetor de estado do sistema controlado $x(t)$, $t > 0$, permanece na região de operação considerada para a obtenção do modelo fuzzy T-S que descreve a dinâmica não linear. Em consequência, garante-se que o sistema não linear é exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S, durante toda a trajetória de estado do sistema iniciada com $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ (ALVES, 2017). Alguns resultados desta linha de pesquisa podem ser encontrados em Blanchini (1999), Klug et al. (2015), Klug, Castelan e Coutinho (2015), Alves et al. (2016).

O otimizador apresentado em Teixeira e Žak (1998), chamado de Otimizador Teixeira & Žak (T-Z) (LEE; ZAK, 2001), é um sistema (de otimização) que proporciona robustez e eficiência ao projeto de busca pelo mínimo de uma função objetivo sem a necessidade de conhecer explicitamente a derivada de tal função. Este otimizador, devido à sua estrutura modular, pode ser facilmente modificado para problemas com dimensionalidades diferentes.

O Controle por Busca Extremal (do inglês: *Extremum Seeking Control* - ESC) tem conexão estreita com o bem conhecido problema de Otimização em Tempo Real. Os algoritmos mais populares para otimização sem restrição utilizam informação da derivada ou do gradiente da função objetivo. Entretanto, em muitos problemas de controle extre-

mal, o gradiente da função objetivo pode não ser acessível em tempo real ou ser muito dispendioso ter essa informação. Portanto, existe uma necessidade clara de algoritmos de otimização não derivativos (OLIVEIRA; HSU; PEIXOTO, 2011).

Em Lee e Žak (2002), foi utilizado um otimizador bidimensional (2-D) não derivativo de Teixeira e Žak (1998) para calcular a derrapagem de roda ótima para a superfície de uma estrada (controle do sistema de freio ABS): o otimizador não derivativo encontra os deslizamentos de roda (dianteiras e traseiras) ótimos que maximizam o coeficiente de aderência da estrada. As entradas para os componentes da lógica fuzzy das rodas dianteiras e traseiras são os deslizamentos de roda ótimos obtidos pelo otimizador não derivativo. Os componentes fuzzy então calculam os torques de freio que forçam os deslizamentos atuais das rodas a seguir os deslizamentos ótimos das rodas, consequentemente isso minimiza a distância de parada do veículo.

Em Peixoto (2007) aborda o controle de sistemas não lineares incertos via realimentação de saída. São propostas estratégias para rastreamento de plantas com grau relativo arbitrário, baseadas em modelo de referência e modos deslizantes. As superfícies de deslizamento são construídas a partir de estimativas baseadas em alto ganho e a amplitude do sinal de controle é gerada por um observador da norma do estado, livre do fenômeno de pico. Propõe-se uma estratégia baseada em uma função de monitoração, obtendo-se rastreamento semi-global e exato por meio de um diferenciador exato e local. No contexto de algoritmos de otimização com função objetivo não diferenciável, encontra-se também conexão entre sistemas por modos deslizantes e direção de controle desconhecida (ou variante), onde problemas de otimização são solucionados variando a direção de busca.

Em Oliveira, Hsu e Peixoto (2011) foi tratado o projeto de controle por modos deslizantes para o rastreamento de trajetória em plantas monovariáveis incertas com grau relativo unitário e com sinal de ganho de alta frequência (do inglês: *High Frequency Gain* - HFG) desconhecido, i.e., a direção de controle é assumida desconhecida. Demonstra-se que é possível obter rastreamento global e exato utilizando-se apenas realimentação de saída por meio de uma função de chaveamento periódica e filtros de entrada e saída. Uma vantagem significativa desse novo esquema é sua robustez na direção de controle variante no tempo que foi teoricamente justificada para variações do tipo salto e testada com sucesso através de simulações. Essa propriedade torna a abordagem adequada para resolver problemas de busca extremal. Uma aplicação da otimização não derivativa ilustra a viabilidade prática do esquema de controle proposto (controle do sistema de freio ABS). Segundo os autores, uma vantagem peculiar da nova abordagem não observada plenamente pelas outras estratégias na literatura é sua robustez com respeito a mudanças frequentes da direção de controle. É essa propriedade os motivaram a aplicação da função de chaveamento periódica ao problema de controle por busca extremal via realimentação

de saída de sistemas incertos utilizando otimizadores não derivativos. Assim sendo, outra contribuição adicional foi mostrar que o controlador por realimentação de saída proposto pode também ser aplicado no ESC de sistemas incertos.

Em Oliveira, Peixoto e Hsu (2012), um novo controlador de modo deslizante de busca extrema com realimentação de saída baseado na função de comutação periódica e observação do estado da norma foi desenvolvido para uma classe mais geral de plantas não lineares incertas do que o considerado até aquele momento na literatura de controle por modo deslizante. A abordagem resultante garante a convergência em tempo finito da saída do sistema para uma pequena vizinhança do ponto extremo. Resultados de simulação de um problema de otimização não derivativa foram realizados para ilustrar o desempenho do controlador. Embora a utilização de modos deslizantes no controle de busca de extremos não fosse algo novo, soluções em tempo real com propriedades de convergência global e baseadas apenas em realimentação de saída não existiam até o momento.

Em Calli et al. (2012), o objetivo foi ajudar engenheiros e pesquisadores a escolher entre as técnicas ESC para aplicações robóticas, como apreensão de objetos, reconhecimento ativo de objetos e otimização de pontos de vista. Essas técnicas são categorizadas em cinco grupos principais: ESC de modo deslizante, ESC de rede neural, ESC baseado em aproximação, ESC baseado em perturbação e ESC adaptativo. Esses grupos são explicados brevemente enfatizando seus princípios de trabalho e o efeito dos parâmetros. Em seguida, as técnicas são comparadas quanto à sua robustez ao ruído e dinâmica do sistema por meio de simulações. Em conclusão, propõe-se o uso dos métodos baseados em aproximação quando o nível de ruído é desprezível. Quando o ruído está presente, os otimizadores baseados em rede neural são a melhor escolha graças às suas funções de histerese. No entanto, se o sistema tem alto ruído e efeitos dinâmicos, então o método baseado em perturbação é preferível, uma vez que grandes movimentos fornecem robustez ao ruído e referências suaves geradas pelo algoritmo são menos propensas a causar instabilidade.

Em Silva et al. (2017) foi explorada a busca pela região de operação de um sistema linear com grandes incertezas, quando não existe uma combinação convexa entre os subsistemas da planta, mas o otimizador T-Z permitiu projetar uma lei de chaveamento estabilizante.

Em Calli et al. (2018) uma nova estratégia de visão ativa é proposta para otimizar o ponto de vista do sensor de visão de um robô para um determinado critério de sucesso. A estratégia é baseada no ESC, que apresenta duas vantagens principais: 1) a abordagem é livre de modelo: não requer uma função objetivo explícita ou qualquer outro modelo de tarefa para calcular a direção do gradiente para otimização do ponto de vista. Isso traz novas possibilidades para o uso da visão ativa em ambientes não estruturados, uma vez que não é necessário o conhecimento a priori do entorno e dos objetos alvo. 2)

ESC conduz otimização contínua apoiada com mecanismos para escapar de máximos locais. Isso permite uma execução eficiente de uma tarefa de visão ativa. Os experimentos mostraram que a otimização contínua do ponto de vista pode aumentar eficientemente a qualidade dos dados para o algoritmo subjacente, mantendo a robustez.

Em Sousa (2018) foi associado o otimizador T-Z a técnicas ESC na busca pelo máximo ponto de potência (do inglês: *Maximum Power Point Tracking* - MPPT) do modelo matemático de uma célula fotovoltaica.

Em Silva (2020) foi utilizado o otimizador T-Z como principal ferramenta no controle chaveado de sistemas não lineares incertos. Os resultados obtidos possibilitam o projeto de controladores para plantas não lineares com um nível maior de incertezas do que tolerado com os métodos disponíveis, assegurando uma estabilidade *ultimate bounded*. A aplicação, através de simulações no domínio do tempo, desta metodologia em um sistema numérico representando um pêndulo invertido atestaram a validade do método.

Os trabalhos acima relacionados mostram a importância e praticidade do ESC.

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho foi utilizar o otimizador T-Z no projeto de controladores chaveados, para sistemas não lineares com incertezas descritos por modelos fuzzy T-S com direção de controle desconhecida, em busca de encontrar o ganho ótimo, dentre um conjunto de ganhos, através da minimização da derivada da função de Lyapunov. Desta forma, o acesso às funções de pertinência pela lei de chaveamento não foi necessário. Ainda foram estabelecidas condições LMIs que garantiram a operação do sistema dentro de uma região de operação, para um conjunto de condições iniciais previamente especificadas.

De forma mais geral, os resultados esperados da metodologia proposta foram apresentar uma aplicabilidade e flexibilidade ampla aos problemas de controle, com menor conservadorismo e alta robustez (capaz de tolerar as incertezas na planta).

1.2 Estrutura da Tese

A estrutura desta tese é composta por:

- Capítulo 1: Introduz o tema abordado na tese, com uma revisão bibliográfica. Apresenta os objetivos gerais do trabalho e a organização do texto.
- Capítulo 2: Algumas notações são definidas. Expõe os conceitos fundamentais necessários para a elaboração dos próximos capítulos, como o modelo fuzzy T-S, e a representação exata do sistema não linear incerto através do modelo fuzzy T-S. São

descritos alguns métodos ESC, sendo detalhado o método que utiliza o Otimizador T-Z.

- Capítulo 3: Como exemplo de aplicação do Otimizador T-Z, o mesmo é aplicado como um método de rastreamento do ponto de máxima potência, para o funcionamento eficiente na simulação de um sistema fotovoltaico.
- Capítulo 4: São propostos três teoremas que garantem estabilidade, taxa de decaimento, restrição no sinal de controle, operação do sistema em uma região de operação previamente especificada, e região de condições iniciais do sistema.
- Capítulo 5: Descreve o projeto de controle chaveado utilizando o Otimizador Não Derivativo. Como exemplo, este projeto é aplicado em um sistema pêndulo invertido, que foi representado através de modelos fuzzy T-S contendo incertezas.
- Capítulo 6: Apresenta as conclusões finais, e as perspectivas futuras.

2 REVISÃO DE CONCEITOS

Neste capítulo são revisados alguns conceitos utilizados no decorrer do texto.

Considere as seguintes notações, utilizadas em todo o trabalho:

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i, \\
 B(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i, \\
 \alpha_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \quad \alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_r]^T, \\
 \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+^*; \\
 x(t) &= x; \quad u(t) = u; \quad V(x(t)) = V(x) = V,
 \end{aligned} \tag{1}$$

sendo \mathbb{Z}_+^* o conjunto dos números inteiros positivos e sem o zero, $r = 2^{n_s}$, e n_s é o número de funções não lineares e incertezas distintas entre os elementos que compõem o modelo matemático do sistema.

Para sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy T-S, $\alpha_i = \alpha_i(z(t))$ são funções de pertinência que dependem das variáveis de estado e das incertezas da planta (SOUZA, 2013).

2.1 Modelo Fuzzy T-S

O modelo fuzzy T-S consiste da descrição de um sistema não linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo, sendo que estes modelos descrevem o comportamento de forma aproximada ou exata deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. É descrito por regras SE-ENTÃO que representam localmente as relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema não linear. Assim, como descrito em Takagi e Sugeno (1985) o modelo fuzzy T-S é da seguinte forma (TANIGUCHI et al., 2001; SOUZA, 2013; CARDIM, 2009; ALVES, 2017):

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Regra } i}: \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\
 & \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$ (r é o número de modelos lineares), \mathcal{M}_j^i o j -ésimo ($j = 1, 2, \dots, p$) conjunto fuzzy da regra i correspondente à função $z_j(t)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$, e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas, que podem ser funções das variáveis de estado, distúrbios externos e/ou tempo. Cada equação linear representada por $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ é chamada de subsistema.

Como apresentado em Taniguchi et al. (2001), dado o par $(x(t), u(t))$, o vetor de saída final do sistema fuzzy é inferido da seguinte forma, usando o método de centro de gravidade:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)]}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \end{cases} \quad (3)$$

sendo

$$z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)], \quad (4)$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mathcal{M}_j^i(z_j(t)), \quad w_i(z(t)) \geq 0, \quad (5)$$

em que $w_i(z(t))$ é o grau de ativação da i -ésima regra. $\mathcal{M}_j^i(z_j(t)) \in [0, 1]$ é o grau de pertinência da variável premissa $z_j(t)$ ao conjunto \mathcal{M}_j^i . Define-se:

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1, \quad \alpha_i(z(t)) \geq 0, \quad (6)$$

sendo $\alpha_i(z(t))$ o grau de pertinência (peso) normalizado de cada modelo de regra, também conhecido como função de pertinência do modelo local i , $i \in \mathbb{K}_r$.

Assim, utilizando por conveniência de notação $\alpha_i(z(t)) = \alpha_i$, de (3)-(6), a equação (3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i [A_i x(t) + B_i u(t)] = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i x(t) = C(\alpha)x(t), \end{cases} \quad (7)$$

sendo $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T$, $(A, B, C)(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i, B_i, C_i)$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$. Desta forma tem-se a combinação linear convexa dos modelos.

Para realizar a compensação distribuída paralela, um objeto controlado (sistema não linear) é primeiro representado por um modelo fuzzy T-S, e cada regra de controle é projetada a partir da regra de um modelo fuzzy T-S (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Considerando o modelo fuzzy (2), os reguladores fuzzy via compensação distribuída paralela (PDC) possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } \mathcal{M}_p^i, \\ & \text{ENTÃO } u(t) = -K_i x(t). \end{aligned} \quad (8)$$

De forma análoga à obtenção de (7), pode-se concluir que

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) K_i x(t). \quad (9)$$

Substituindo (9) em (7), considerando $z(t) = x(t)$, e lembrando que $\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1$ e $\alpha_i(x(t)) \geq 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) \left[A_i x(t) - B_i \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) K_j x(t) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) [A_i - B_i K_j] x(t) \\ &= [A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)]x(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Normalmente, os sistemas fuzzy T-S estão relacionados a uma região de operação, por exemplo, quando usamos os limites das variáveis de estados para encontrar os modelos locais. Portanto, a análise se torna local, apenas para aquela região de operação. A estabilidade global dos modelos T-S depende de um modelo global do sistema.

2.2 Representação Exata de uma Classe de Sistemas Não Lineares Incertos por Modelos Fuzzy T-S

Certas classes de sistemas não lineares podem ser representadas de forma exata através de modelos Fuzzy T-S, utilizando-se o método proposto em Taniguchi et al. (2001), no qual os modelos locais, bem como os pesos normalizados, são obtidos em função dos valores máximos e mínimos das funções não lineares na região de operação considerada para o sistema. O número de modelos locais está diretamente relacionado ao número de funções não lineares presentes no modelo matemático da planta. Na construção dos modelos, em geral, são considerados apenas os valores extremos das funções não lineares (SANTIM, 2012).

2.2.1 Forma Generalizada de Sistemas Fuzzy T-S

Uma classe de sistemas não lineares pode ser assim representada (TANIGUCHI et al., 2001):

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_x} f_{ij}(z(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{n_u} g_{ik}(z(t))u_k(t), \quad i = 1, \dots, n_x, \quad (11)$$

sendo $x(t)$ o vetor de estado, $u(t)$ o vetor das entradas, n_x e n_u o número de variáveis de estado e entradas, respectivamente. $f_{ij}(z(t))$ e $g_{ik}(z(t))$ são funções de $z(t)$, sendo $z(t) = [z_1(t) \dots z_n(t)]$ variáveis conhecidas, podendo ser funções das variáveis de estado, variáveis externas, e/ou tempo.

Para obter a forma generalizada, são definidas as variáveis:

$$a_{ij1} \equiv \max_{z(t)} \{f_{ij}(z(t))\}, \quad (12)$$

$$a_{ij2} \equiv \min_{z(t)} \{f_{ij}(z(t))\}, \quad (13)$$

$$b_{ik1} \equiv \max_{z(t)} \{g_{ik}(z(t))\}, \quad (14)$$

$$b_{ik2} \equiv \min_{z(t)} \{g_{ik}(z(t))\}. \quad (15)$$

Como será visto no Capítulo 5, quando é especificada uma região de operação no espaço de estados, os máximos e mínimos descritos em (12)-(15) são calculados nesta região. Com essas novas variáveis, as funções $f_{ij}(z(t))$ e $g_{ik}(z(t))$ podem ser representadas como modelos fuzzy:

$$f_{ij}(z(t)) = \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(z(t)) a_{ijl_{(i,j)}^a}, \quad (16)$$

$$g_{ik}(z(t)) = \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(z(t)) b_{ikl_{(i,k)}^b}, \quad (17)$$

sendo:

$$\sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(z(t)) = 1, \quad (18)$$

$$\sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(z(t)) = 1, \quad (19)$$

com $\sigma_{ij1} \geq 0$, $\sigma_{ij2} \geq 0$, $\xi_{ik1} \geq 0$, e $\xi_{ik2} \geq 0$, para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n_x\}$ e $k \in \{1, 2, \dots, n_u\}$.

As funções de pertinência são atribuídas da seguinte forma Taniguchi et al. (2001):

$$\sigma_{ij1}(z(t)) = \frac{f_{ij}(z(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \quad (20)$$

$$\sigma_{ij2}(z(t)) = \frac{a_{ij1} - f_{ij}(z(t))}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \quad (21)$$

$$\xi_{ik1}(z(t)) = \frac{g_{ik}(z(t)) - b_{ik2}}{b_{ik1} - b_{ik2}}, \quad (22)$$

$$\xi_{ik2}(z(t)) = \frac{b_{ik1} - g_{ik}(z(t))}{b_{ik1} - b_{ik2}}. \quad (23)$$

Usando a representação por modelo fuzzy, a equação (11) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(z(t)) a_{ijl_{(i,j)}^a} x_j(t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_u} \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(z(t)) b_{ikl_{(i,k)}^b} u_k(t), \quad i = 1, \dots, n_x. \end{aligned} \quad (24)$$

A forma generalizada do sistema Fuzzy T-S na forma matricial é dada por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(z(t)) a_{ijl_{(i,j)}^a} U_{ij}^A x(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_u} \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(z(t)) b_{ikl_{(i,k)}^b} U_{ik}^B u(t) = \\
& = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{l_{(i,j)}^a=1}^2 \sigma_{ijl_{(i,j)}^a}(z(t)) A_{ijl_{(i,j)}^a} x(t) + \\
& + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_u} \sum_{l_{(i,k)}^b=1}^2 \xi_{ikl_{(i,k)}^b}(z(t)) B_{ikl_{(i,k)}^b} u(t), \tag{25}
\end{aligned}$$

sendo:

$$U_{ij}^A = i \begin{matrix} & & j & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \end{matrix}, \quad U_{ik}^B = i \begin{matrix} & & k & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \end{matrix}, \tag{26}$$

$$A_{ijl_{(i,j)}^a} = i \begin{matrix} & & j & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ijl_{(i,j)}^a} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \end{matrix}, \quad B_{ikl_{(i,k)}^b} = i \begin{matrix} & & k & & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{ikl_{(i,k)}^b} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \end{matrix}, \tag{27}$$

para $l_{(i,j)}^a = 1, 2$ e $l_{(i,k)}^b = 1, 2$, com $U_{ij}^A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $U_{ik}^B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$.

Desta forma, para representar de forma exata o sistema não linear (11) com modelos fuzzy T-S usando a forma generalizada, são necessários 2^s modelos locais, sendo s o número de não linearidades distintas existentes no sistema (CARDIM, 2009). Na Seção 5.3 é apresentado um exemplo que mostra mais detalhes deste método.

2.3 Controle por Busca Extremal

O processo de busca de máximo ou mínimo (também chamado de extremo ou valor ótimo) de uma saída ou função objetivo é denominado controle extremal. O controle extremal é um campo de estudo muito amplo em que se procura otimizar sistemas nos quais a função objetivo, seu gradiente e o valor ótimo são desconhecidos.

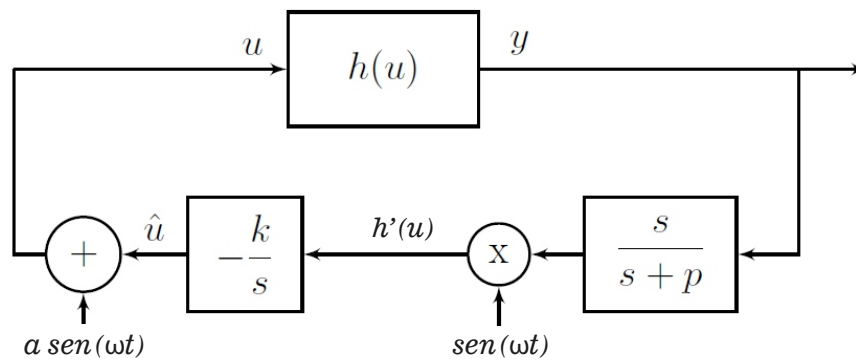
Na literatura de controle existem vários métodos de controle extremal que podem ser divididos em cinco grandes grupos: controle extremal por perturbação, por modos deslizantes, por aproximação, por adaptação, e por redes neurais (AMINDE, 2013).

Descreve-se a seguir, brevemente, estes métodos.

2.3.1 Controle Extremal por Perturbação Senoidal ou *Dither*

Este método é bem popular entre os algoritmos de controle de busca extremal. Suas principais características são a rápida adaptação e fácil implementação (AMINDE, 2013). Mais referências sobre o assunto podem ser encontradas em Krstić e Wang (2000), Ariyur e Krstic (2003). A Figura 1 mostra a estrutura básica do controle extremal deste método.

Figura 1 – Método das Perturbações Senoidais.



Fonte: Adaptado de Spelta (2017).

O esquema apresenta uma perturbação senoidal $a \sin(\omega t)$ na direção do gradiente nulo. Para $k > 0$ o esquema conduz \hat{u} para as proximidades $a \sin(\omega t)$ (modulação) que somada a \hat{u} gera o sinal de entrada u . O sinal de saída $y = h(u)$ passa por um filtro passa-alta, $\frac{s}{s+p}$, e é multiplicado pelo mesmo sinal de perturbação $\sin(\omega t)$ (demodulação) gerando uma estimativa da derivada (gradiente) $h'(u)$ na entrada do integrador, $-\frac{k}{s}$. Este integrador atualiza a estimativa de \hat{u} conduzindo-o na direção do gradiente nulo. Para $k > 0$ o esquema conduz \hat{u} para as proximidades de um mínimo local de $h(u)$, enquanto para $k < 0$ conduz \hat{u} para as proximidades de um máximo local. O filtro tem o papel de eliminar a componente DC de y sem que a frequência de perturbação ω seja relativamente alta (AMINDE, 2013).

Há quatro parâmetros de projeto: a , k , ω , e p . A amplitude a provê um dilema entre o desempenho assintótico e a região de atração do algoritmo. Quanto menor a , menor é o erro residual no extremo alcançado, porém, maior é a possibilidade de parar no extremo local, em caso de existência de vários máximos. Ao contrário, quanto maior a , maior é o erro residual e também maior é a possibilidade de alcançar o extremo global. O ganho k controla a velocidade de convergência, juntamente com a , que também influencia a velocidade de convergência. A frequência de perturbação ω controla o processo de esti-

mação do gradiente conduzido pelo integrador e pela perturbação somada e multiplicada. Quanto maior a frequência ω , mais correta é a estimativa do gradiente e menor é o efeito da perturbação introduzida pelos harmônicos de ordem superior e a componente DC de y . A frequência de corte do filtro passa-alta, p , deve ser menor do que ω , de tal modo que o filtro elimine a componente DC em y sem comprometer a estimativa do gradiente $h'(u)$ (AMINDE, 2013). Em Ariyur e Krstic (2003) podem ser encontrados outros métodos de Controle Extremal por Perturbação.

2.3.2 Controle Extremal por Modos Deslizantes

No início dos anos 70, Korovin e Utkin (KOROVIN; UTKIN, 1974) propuseram uma nova estrutura para o ESC, com base na teoria sobre os sistemas com modos deslizantes. Este método é baseado em um sinal de referência. Ao contrário dos problemas de controle convencionais, o valor de referência é desconhecido nesta estrutura ESC, uma vez que o valor ótimo da função objetivo é desconhecido. O próprio sinal de referência no modo deslizante ESC é projetado para diminuir monotonicamente ao procurar o mínimo (ou máximo) local. A regra ESC é então formulada de forma que o sistema rastreie esse sinal de direção (CALLI et al., 2012).

O sistema de Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV/MD) é um controle realimentado com alta velocidade de chaveamento, sendo que o chaveamento ocorre quando o estado do sistema cruza certas superfícies contínuas no espaço de estados. Esta estrutura de controle fornece um meio robusto de controlar plantas não lineares.

A característica principal do CEV/MD é utilizar uma lei de controle chaveada para levar a trajetória dos estados da planta em direção a uma superfície específica (chamada superfície de chaveamento ou superfície de deslizamento) no espaço de estados, e manter a trajetória dos estados nesta superfície durante o tempo subsequente. A superfície em questão é determinada pelo projetista conforme a necessidade do projeto. O comportamento em que a trajetória de estados atinge a superfície de deslizamento e nela permanece, é chamado Modo Deslizante. Quando o sistema está no modo deslizante, o mesmo sofre menor influência por parte de alterações paramétricas ou de distúrbios externos, o que dá robustez ao sistema controlado.

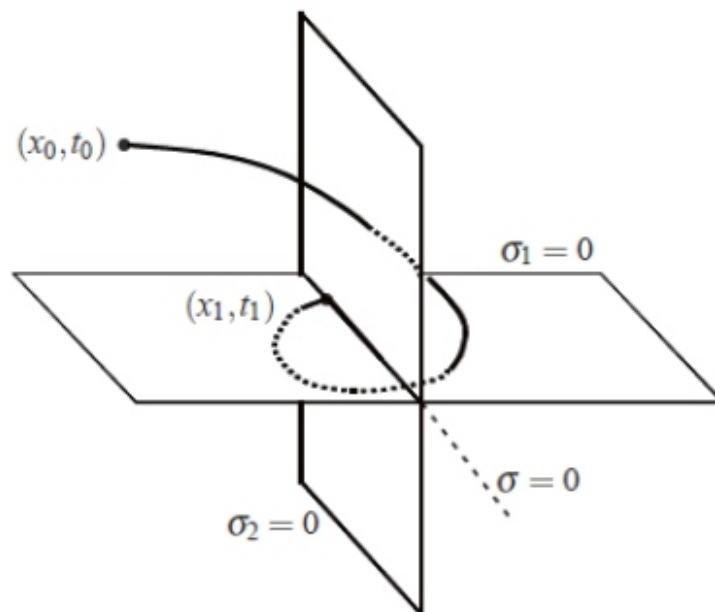
A existência de um modo deslizante requer a convergência da trajetória de estado para a superfície de deslizamento. Uma lei de controle chaveada deve então ser projetada para assegurar que a trajetória de estados se dirija à superfície de deslizamento (alcançabilidade) e nela permaneça durante todo o tempo subsequente (atratividade). O sistema com CEV/MD é caracterizado por ser insensível a certas perturbações que ocorrem nos canais de entrada do sistema, ditas perturbações casadas (FERNANDES, 2013).

Para uma função de transferência escalar, o grau relativo é a diferença entre o

número de polos (n) e de zeros (m) ($\rho = n - m$) (PEIXOTO, 2007; OLIVEIRA, 2010). A superfície de deslizamento $\sigma(x(t)) = 0$ é um espaço fechado de dimensão $\rho = n - m$ em \mathbb{R}^n , determinado pela intersecção de superfícies de deslizamento de dimensão $\rho = n - m$. As superfícies de deslizamento são projetadas tal que o sistema, restrito à superfície $\sigma(x(t)) = 0$, tenha comportamento desejado.

Depois de projetar a superfície de deslizamento adequada, o próximo passo essencial no CEV/MD é garantir a existência de um modo deslizante. Um modo deslizante existe se na vizinhança da superfície de deslizamento, a tangente ou vetor velocidade da trajetória de estado sempre está direcionado para a superfície de deslizamento. Assim, se a trajetória do estado intercepta a superfície de deslizamento, o valor da trajetória de estado ou “ponto representativo” se mantém dentro de uma vizinhança de $\{x(t) | \sigma(x(t)) = 0\}$. Se o modo deslizante existe em $\sigma(x(t)) = 0$, então $\sigma(x(t))$ é chamado superfície de deslizamento. Como mostra a Figura 2, o modo deslizante não pode existir na i -ésima superfície deslizante separadamente, mas somente na intersecção de todas as superfícies (FERNANDES, 2013).

Figura 2 – Superfícies de Deslizamento.



Fonte: Fernandes (2013).

Como o projeto de um controlador por modos deslizantes envolve a escolha de funções de deslizamento $\sigma_i(x)$ e a utilização de leis de controle adequadas para que as superfícies $\sigma_i(x) = 0$ sejam curvas de deslizamento, um requerimento usual é que a direção de controle seja conhecida. A importância em conhecer a direção de controle está relacionada à estabilidade, pois uma suposição incorreta a respeito deste parâmetro pode gerar uma realimentação positiva, instabilizando o sistema. Porém, ao empregar a função

de deslizamento senoidal $\sigma(y) = \text{sen}(y)$ há infinitos pontos y_k em que o modo deslizante pode ocorrer. Verifica-se, então, que com uma função de deslizamento não linear periódica da forma $\sigma(y) = \text{sen}(y)$ pode-se fazer com que um sistema dinâmico em que a direção de controle é desconhecida seja estável com o emprego da estratégia de modos deslizantes.

Esta técnica de controle por modos deslizantes que emprega uma função de deslizamento senoidal é conhecida na literatura como Método da Função Periódica e tem destaque pela capacidade de estabilizar sistemas em que não há informação sobre a direção de controle (SPELTA, 2017).

Seja uma planta linear e invariante no tempo, controlável e observável descrita por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (28)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados da planta, $u \in \mathbb{R}$ a entrada, $y \in \mathbb{R}$ a saída medida e A , B e C são matrizes constantes incertas. Seu modelo entrada-saída é dado por

$$y = G(s)u, \quad (29)$$

sendo $G(s)$ a função de transferência dada por:

$$G(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad (30)$$

em que $k_p \in \mathbb{R}$ é o ganho de alta frequência desconhecido (relacionado à direção de controle da planta), e $N_p(s)$, $D_p(s)$ polinômios mônicos.

O objetivo de controle é fazer com que o erro de saída, dado pela diferença entre a saída $y(t)$ da planta e uma trajetória desejada $y_m(t)$, ou seja, $e(t) = y(t) - y_m(t)$, convirja assintoticamente para zero, ou alguma vizinhança bem próxima de zero, enquanto os demais sinais do sistema permanecem uniformemente limitados.

A trajetória de referência $y_m(t)$ é a saída da dinâmica dada por

$$y_m(t) = M(s)r, \quad M(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)}, \quad (31)$$

sendo $M(s)$ o modelo de referência, $r(t)$ um sinal de entrada contínuo por partes e uniformemente limitado, $k_m > 0$ o ganho de alta frequência de $M(s)$, e $N_m(s)$, $D_m(s)$ são polinômios Hurwitz mônicos. Com a intenção de facilitar a análise e o sistema de controle em malha fechada, o modelo de referência é dado por:

$$M(s) = \frac{k_m}{s + \gamma}, \quad \gamma > 0. \quad (32)$$

A Figura 3 apresenta o esquema de Controle Extremal por Modos Deslizantes, sendo que a lei de controle para o bloco Controlador pode ser dada por (SPELTA, 2017):

$$\begin{cases} u = \varrho(t) \text{sign}(\text{sen}(\frac{\pi}{\varepsilon} \sigma(t))), \\ \sigma(t) = e(t) + \lambda \int_0^t \text{sign}(e(\tau)) d\tau, \end{cases} \quad (33)$$

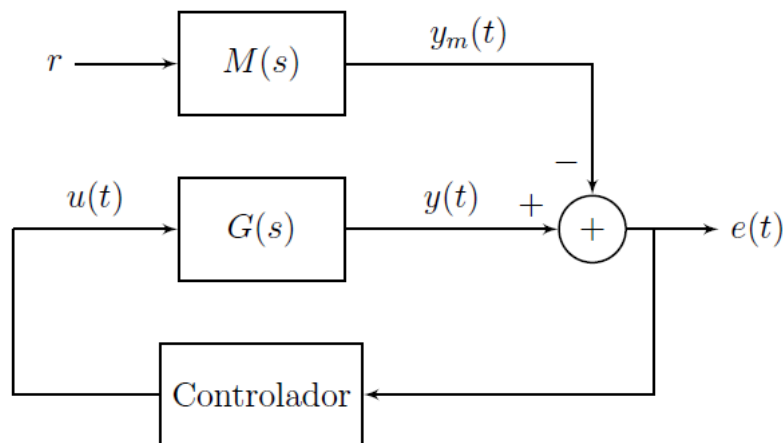
sendo $\lambda > 0$ e $\varepsilon > 0$ constantes apropriadas, e $\varrho(t)$ uma função de modulação descrita por:

$$\varrho(t) = \frac{1}{\underline{k}_p} [\gamma |e(t)| + \lambda] + \bar{\theta} |\omega(t)| + \delta, \quad (34)$$

com $\bar{\theta}$ um limitante de norma conhecido, $\omega(t)$ o vetor regressor, $\delta > 0$ uma constante arbitrariamente pequena, \underline{k}_p um limitante inferior conhecido para $|k_p|$ e γ a constante do modelo de referência $M(s)$ (SPELTA, 2017). A função de modulação é projetada de modo que $y(t)$ rastreie $y_m(t)$, no regime. Neste caso, y é forçado a alcançar e permanecer na vizinhança do ponto ótimo y^* . Desta forma, garante-se que o erro e tenda para zero (AMINDE, 2013).

A razão de usar uma função seno dentro do sinal é a seguinte: como a função objetivo é desconhecida, o algoritmo ESC não tem como informação disponível a direção em que deve conduzir o sistema, para encontrar o valor ótimo da função objetivo $y(t)$. Então, se o sistema for na direção errada, o erro aumentará. Este aumento continuará até que o valor da função seno mude de sinal. Então, a referência de velocidade também mudará de direção e o sistema começará a seguir a entrada de referência. O limite do erro permitido pelo sistema pode ser ajustado pelo parâmetro ε . Se o sistema for mais lento ou mais rápido que o sinal de referência, isso causará vibração e a frequência dessa vibração poderá ser notavelmente diminuída aumentando o parâmetro ε . Quando o valor ótimo é alcançado, o sistema oscila dentro do limite de erro permitido (CALLI et al., 2012).

Figura 3 – Esquema de Controle Extremal por Modos Deslizantes.



Fonte: Spelta (2017).

Mais detalhes sobre o Controle Extremal por Modos Deslizantes pode ser encontrado em Korovin e Utkin (1974), Calli et al. (2012), Oliveira (2010), Oliveira, Hsu e Peixoto (2011), Oliveira, Peixoto e Hsu (2012).

2.3.3 Controle Extremal por Aproximação ou Otimização Numérica

Quando a função objetivo a ser otimizada é desconhecida, uma escolha natural é derivar uma representação local dessa função com base nos dados anteriores. Essa representação pode ser usada com uma abordagem baseada em gradiente ou não-gradiente. A ideia principal do algoritmo da região de confiança é a seguinte: primeiro um conjunto de aproximação bem posicionado é formado e uma aproximação local da função objetivo $\hat{f}(x)$ é obtida. Como esta é apenas uma aproximação local, ela só pode ser confiável em uma região local. Um valor inicial Δ_0 é definido para essa região de confiança e a função objetivo aproximada é otimizada dentro dessa região. Digamos que o sistema esteja em x_k e o valor ótimo nesta região local seja encontrado em $x_k + p_k$. A sequência de otimização x_k é gerada pela construção e minimização iterativa de uma função modelo $\hat{f}(x)$ da função objetivo $f(x)$ dentro da região de confiança, um círculo centrado na iteração atual, x_k , da forma $R_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_k\| \leq \Delta_k\}$. O sistema é conduzido a este novo set point e sempre que o set point é atingido a seguinte razão é calculada para medir quão boa foi a aproximação da função objetivo:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{\hat{f}(x_k) - \hat{f}(x_k + p_k)}. \quad (35)$$

Se ρ_k estiver próximo de 1, isso significa uma boa aproximação, e o raio da região de confiança pode ser aumentado, caso contrário, deve ser diminuído. Esta regra de atualização é a seguinte:

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} [\Delta_k, \infty], & \rho_k \geq \eta_2 \\ [\gamma_2 \Delta_k, \Delta_k], & \rho_k \in [\eta_1, \eta_2) \\ [\gamma_1 \Delta_k, \gamma_2 \Delta_k], & \rho_k < \eta_1 \end{cases} \quad (36)$$

sendo $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1$ e $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 1$. A vantagem de utilizar sistemas linearizáveis por realimentação é poder garantir a convergência do sistema aos pontos de ajuste e poder estimar o tempo de regulação, de modo que o tempo em que $x_k + p_k$ é atingido seja conhecido aproximadamente. Como não se quer impor nenhuma restrição ao sistema, use-se o erro entre $x_k + p_k$ e x para detectar quando a referência é alcançada. Alternativamente, uma vez que o gradiente da função objetivo pode ser estimado localmente pela derivada da função objetivo aproximada, um algoritmo de busca linear como gradiente descendente

também pode ser utilizado. Neste caso, a referência de velocidade pode ser gerada da seguinte forma:

$$\dot{x}_r = -k \frac{d\hat{f}(x(k))}{dx}, \quad (37)$$

sendo k um ganho positivo (CALLI et al., 2012).

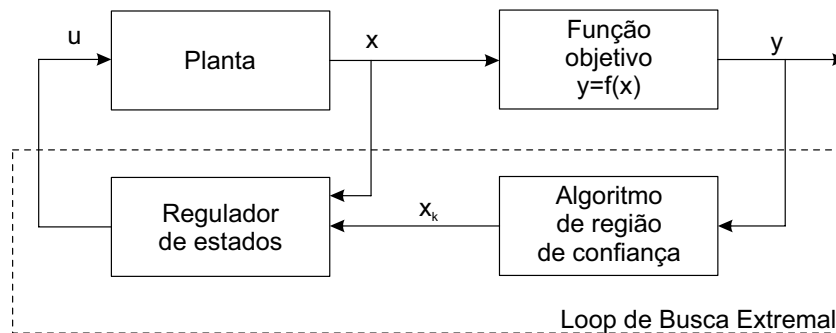
O algoritmo a seguir descreve o processo básico (ZHANG; ORDONEZ, 2006):

- Passo 0 [Inicialização]: x_0 e Δ_0 são dados. $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1$ e $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 1$. Calcule $f(x_0)$ e defina $k = 0$;
- Passo 1 [Definição do modelo]: defina um modelo $\hat{f}(x_k + p)$ em R_k ;
- Passo 2 [Cálculo do passo]: calcule um passo p_k que “reduziu suficientemente o modelo” $\hat{f}(x)$ com $x_k + p_k \in R_k$;
- Passo 3 [Aceitação do ponto de teste]: calcule $f(x_k + p_k)$ e avalie ρ_k , conforme equação (35). Se $\rho_k \geq \eta_1$, então defina $x_{k+1} = x_k + p_k$; caso contrário, defina $x_{k+1} = x_k$.
- Passo 4 [Atualização do raio da região de confiança]: calcule Δ_{k+1} , conforme equação (36). Faça $k = k + 1$ e vá para o Passo 1.

O método da região de confiança mantém a taxa de convergência quadrática enquanto é globalmente convergente.

Um diagrama de blocos é apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Esquema de Controle Extremal por Aproximação.



Fonte: Baseado em Zhang e Ordóñez (2006).

O loop de busca de extremos é composto por um regulador de estado e um algoritmo de região de confiança, onde o regulador de estado garante o deslocamento do estado x ao longo da sequência de set point x_k gerada pelo algoritmo convergente, e portanto, o estado eventualmente converge para o minimizador global da função objetivo. Com a incorporação do método da região de confiança, livre de derivada, no controle de busca de

extremos, elimina-se a exigência de informação do gradiente, ou seja, apenas a medição do valor da função de objetivo é necessário (ZHANG; ORDONEZ, 2006).

2.3.4 Controle Extremal por Adaptação ou Modelo

Os controladores adaptativos são baseados na estimativa online dos parâmetros do processo e no princípio de equivalência da certeza. Para formular o problema, é preciso especificar o modelo, o objetivo de controle e as leis de controle admissíveis.

Quanto ao modelo, para realizar o controle adaptativo de sistemas não lineares é necessário fazer suposições sobre a estrutura do processo a ser controlado. Quando os sistemas são desconhecidos, eles precisam ser identificados. A maioria dos métodos de identificação é baseada na suposição de que o modelo é linear nos parâmetros. Uma classe de sistemas é obtida dividindo o processo em uma parte estática não linear e uma parte dinâmica linear. A teoria da aproximação pode ser usada para derivar diferentes tipos de representações de expansão em série, de sistemas não lineares.

Quanto ao objetivo de controle, considera-se a situação em que o objetivo é minimizar a variância de predição em torno do valor de referência y_0 . Seja, por exemplo, a situação de controle extremal em que $y(t)$ deve ser minimizado ou maximizado e ao mesmo tempo a variação de y em torno do ponto extremo estático deve ser minimizada. Isso implica que o valor de referência y_0 deve ser ajustado para encontrar o ponto extremal. O primeiro passo no projeto é, portanto, determinar o valor de y_0 que corresponde ao ponto extremo.

Um sinal de controle $u(t)$ é admissível se for uma função dos dados disponíveis no tempo t , ou seja, de $y(t)$, $y(t-1)$, $u(t-1)$, ... (WITTENMARK; URQUHART, 1995).

O Controle Extremal por Adaptação usa esquemas de controle adaptativos para a otimização online. Ao contrário dos métodos baseados em aproximação, o ESC adaptativo aproxima a função objetivo globalmente. Este algoritmo necessita que o tipo da função objetivo seja conhecido. As implementações ESC adaptáveis para funções objetivo não lineares do tipo Hammerstein e Wiener são dadas em Wittenmark e Urquhart (1995) e Wittenmark e Evans (2002). Se a forma da função objetivo for conhecida, esse método fornece resultados eficientes ao identificar rapidamente o extremo e direcionar o sistema para ele. (CALLI et al., 2012).

A estrutura da função objetivo é considerada conhecida como uma função de parâmetros desconhecidos e um subconjunto mensurável do estado do sistema. Estes métodos dependem da adaptação de parâmetros para alcançar a condição operacional ideal. Uma distinção importante entre esta classe de algoritmos ESC e os baseados em perturbação é que o valor da função objetivo não precisa estar disponível para feedback online.

Como exemplo, em Guay e Zhang (2002), os autores desenvolveram um esquema de busca de extremos para sistemas não lineares MISO (do inglês “*Multiple Input Single Output*” - Múltiplas Entradas e Única Saída) afins na entrada de controle e nos parâmetros desconhecidos. Através de uma lei de adaptação, os parâmetros desconhecidos são estimados e seus valores utilizados para direcionar os estados mensuráveis para sua condição de operação ótima. Não que esta condição de operação seja conhecida, uma vez que a estrutura da função objetivo é assumida como conhecida. Por exemplo, considere a otimização:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (38)$$

com parâmetros desconhecidos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Embora a, b e c sejam desconhecidos, já se sabe a priori que o ótimo está em $x = -b/2a$. Assim, se b e a são estimados com sucesso, o problema ESC é resolvido.

Uma limitação comum do ESC baseado em adaptação é a necessidade de persistência da excitação para alcançar a convergência paramétrica. A convergência é necessária para obter a estimativa da função objetivo, que é usada para calcular a condição operacional ótima.

Semelhante ao ESC baseado em perturbação, as abordagens baseadas em adaptação precisam de algum tipo de separação em escala de tempo entre a dinâmica da planta e o algoritmo de busca de extremos, exigindo que o primeiro seja mais rápido que o último (MONTEIRO, 2020).

Mais detalhes sobre o Controle Extremal por Adaptação pode ser encontrado em Sternby (1980), Wittenmark e Urquhart (1995), Guay e Zhang (2002), Zhang, Guay e Dochain (2002), Wu et al. (2022).

2.3.5 Controle Extremal por Redes Neurais

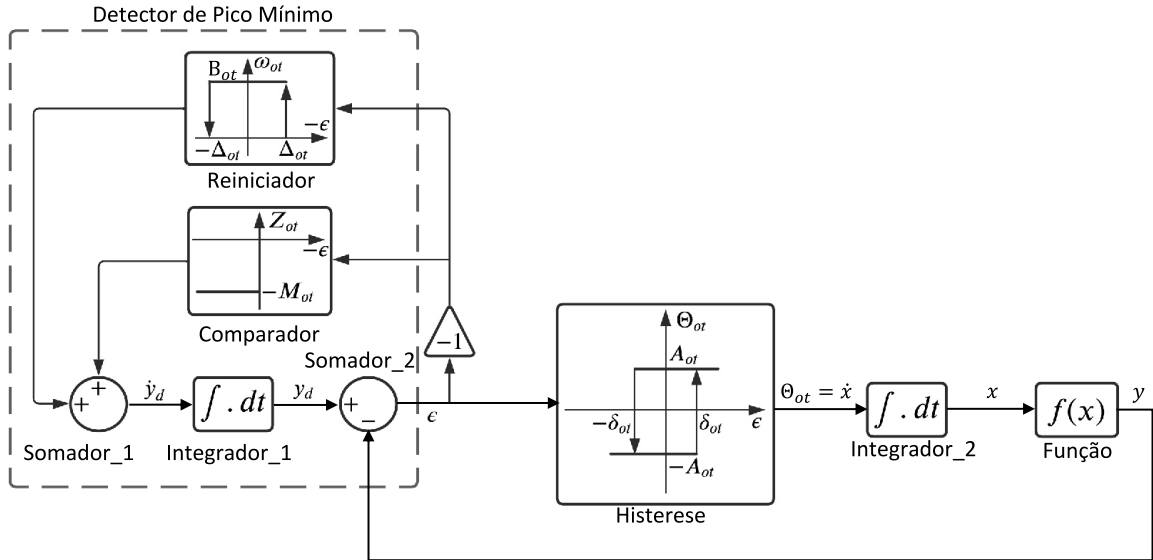
Este tipo de controle é o foco deste estudo e será apresentado em detalhes na Seção 2.4.

2.4 Otimizador Não Derivativo

O otimizador não derivativo proposto em Teixeira e Žak (1998) é adaptado para sintetizar uma lei de chaveamento entre ganhos de realimentação de uma planta não linear contínua no tempo, com parâmetros incertos e direção de controle desconhecida. Este otimizador é composto por blocos não lineares como histerese e relés e pode ser classificado como um sistema neural artificial. Na Figura 5 é apresentado o diagrama de

blocos do otimizador proposto em Teixeira e Žak (1998) para o caso unidimensional, ou seja, quando se trabalha com uma única variável de saída (SILVA, 2020).

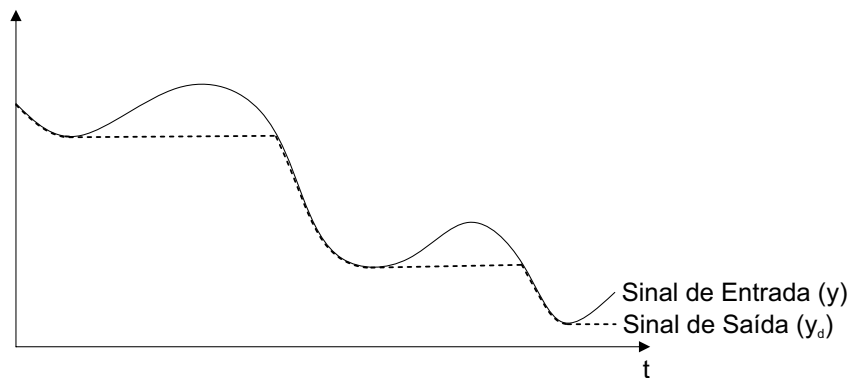
Figura 5 – Diagrama de blocos do otimizador T-Z.



Fonte: do próprio autor.

Um detector de pico mínimo, que pode ser implementado utilizando-se componentes passivos, rastreia o sinal de entrada e mantém o valor mínimo de sua saída desde a última reinicialização (Figura 6). O sinal de entrada é continuamente comparado com o valor mínimo armazenado para determinar se este deve ser atualizado.

Figura 6 – Sinais de entrada e saída de um detector de pico mínimo.



Fonte: do próprio autor.

Seja $y = y(t)$ a forma de onda de entrada e $y_d = y_d(t)$ a forma de onda de saída de um detector de pico mínimo. Então um modelo matemático de uma classe de detectores de pico mínimo pode ser representado como:

$$\dot{y}_d = \begin{cases} 0, & \text{se } y_d - y \leq 0; \\ -M_{ot}, & \text{se } y_d - y > 0, \end{cases} \quad (39)$$

sendo $M_{ot} > 0$, o parâmetro de concepção de projeto. A função $sign(\varepsilon)=1$, se $\varepsilon > 0$; ou $sign(\varepsilon)=-1$, se $\varepsilon < 0$.

A derivada temporal da função $y = y(t)$ deve ser limitada por uma constante M_{ot} tal que:

$$\left| \frac{d}{dt}y(t) \right| < M_{ot}. \quad (40)$$

Então, uma possível equação desse detector de pico que satisfaz (39) é representada por $\dot{y}_d = -\frac{M_{ot}}{2}(sign(y_d - y) + 1)$ e pode-se então definir o erro ε como $\varepsilon = y_d - y$.

Com o modelo do detector de pico mínimo (39), são possíveis dois diferentes casos:

- **Caso (i):** Quando $\varepsilon < 0$, ou seja, $y > y_d$, e a rede armazena o valor mínimo anteriormente detectado do sinal de entrada y , pois $\dot{y}_d = -\frac{M_{ot}}{2}(sign(y_d - y) + 1) = 0$, neste caso;
- **Caso (ii):** Quando $\varepsilon > 0$, ou seja, $y < y_d$, usa-se um tipo de argumento baseado em funções de Lyapunov. Se um erro ε é limitado e $\varepsilon \rightarrow 0$, seja a candidata a função de Lyapunov, a partir da medida da magnitude do erro, $v(t) = \frac{1}{2}\varepsilon^2(t)$. A derivada de $v(t)$ com relação ao tempo, usando a equação (39) com a condição $\varepsilon > 0$, é calculada como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \varepsilon(t)\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t)(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) = \\ &= \varepsilon(t) \left(-\frac{M_{ot}}{2} [sign(\varepsilon(t)) + 1] - \dot{y}(t) \right) = \varepsilon(t) (-M_{ot} - \dot{y}(t)). \end{aligned} \quad (41)$$

Considerando o fato de que $\varepsilon(t) > 0$ e a equação (40), pode-se concluir que observando (41), obtém-se a relação $\frac{d}{dt}v(t) \leq \varepsilon(|\dot{y}(t)| - M_{ot}) < 0$. Logo, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Adicionalmente, pode-se mostrar que $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ em um intervalo de tempo finito.

Observação 1. O caso $\varepsilon = 0$ não foi analisado nos Casos (i) ou (ii), o que é razoável, pois em modo deslizante $sign(0)$ pode assumir qualquer valor entre -1 e 1 .

O valor da magnitude M_{ot} indica a velocidade com que o erro vai para zero. Então a forma de onda da saída $y_d(t)$ irá convergir para a forma de onda da entrada $y(t)$.

O erro ε eventualmente atingirá o valor $\pm\Delta_{ot}$, momento em que o detector de pico mínimo é reinicializado atribuindo condições iniciais.

O otimizador T-Z, realiza a “procura” do mínimo de uma função objetivo $y = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de uma variável x sendo que tal função deve ter um mínimo, x^* , no interior de um intervalo fechado de interesse $[a, b]$. Supondo que a derivada com respeito a x de f no intervalo $[a, b]$ seja limitada, então há uma constante finita $L_{ot} > 0$ tal que (TEIXEIRA; ŽAK, 1998; MONTANARI, 2016; SILVA, 2020):

$$\left| \frac{df(x)}{dx} \right| \leq L_{ot}, \quad x \in [a, b]. \quad (42)$$

O diagrama de blocos do otimizador, apresentado na Figura 5, pode ser representado por (SILVA, 2020):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Theta_{ot}(y_d - f(x)), \\ \dot{y}_d &= \omega_{ot}(y_d - f(x)) + Z_{ot}(y_d - f(x)), \end{aligned} \quad (43)$$

sendo $\Theta_{ot}(y_d - f(x))$, $\omega_{ot}(y_d - f(x))$ e $Z_{ot}(y_d - f(x))$ funções descontínuas.

Há dois elementos de histerese no otimizador que possuem os parâmetros δ_{ot} e Δ_{ot} , relacionados com a variação da saída y em torno do ponto de mínimo no regime e devem ser calculados ou escolhidos de acordo com as exigências de projeto, respeitando a relação:

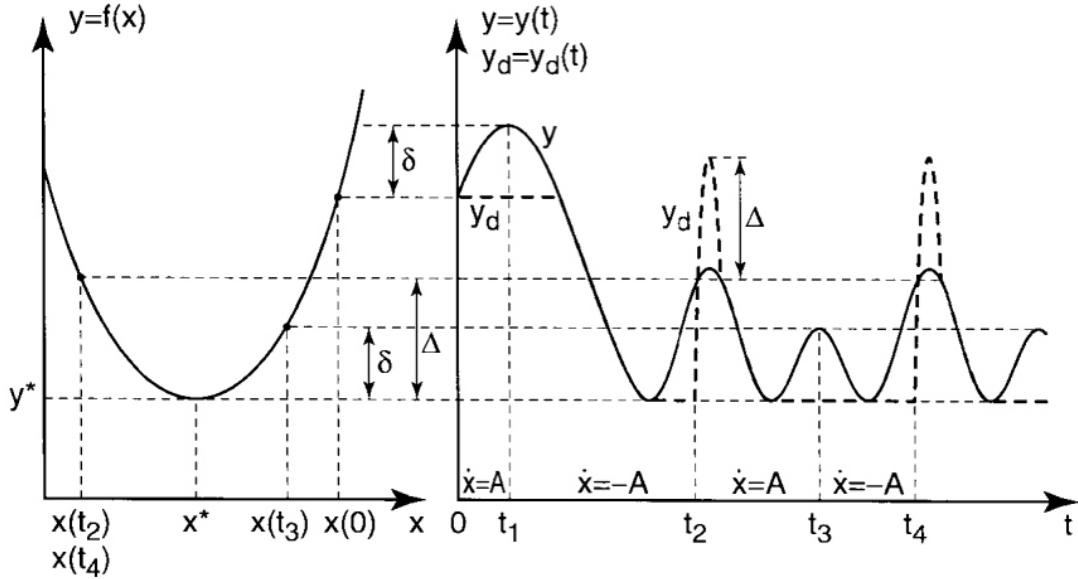
$$0 < \delta_{ot} < \Delta_{ot}, \quad \text{sendo que} \quad \Delta_{ot} \geq 2\delta_{ot}. \quad (44)$$

Quanto menores forem os valores de δ_{ot} e Δ_{ot} , melhor será a eficiência do otimizador, pois a variação da saída em torno do ponto mínimo no regime será menor, porém mais sofisticada será a implementação. Outros parâmetros do otimizador T-Z são A_{ot} e B_{ot} , que devem ser calculados de acordo com as exigências do projeto. O parâmetro A_{ot} é o passo da busca do mínimo da função objetivo e quanto maior for seu valor, maior será a velocidade de busca. O parâmetro B_{ot} é o passo para reiniciar o detector de pico, devendo respeitar a relação $B_{ot} > 2M_{ot}$ e também $B_{ot} \geq A_{ot}$ (SILVA, 2020).

Uma trajetória típica da rede é mostrada na Figura 7.

Do projeto inicial para o otimizador, Teixeira e Žak (1998) definiram a condição inicial $x_0 = x(0)$, em que $\frac{df}{dx}(x(0)) > 0$. Pode ser observado da Figura 7 que o ponto $x(0)$ está localizado ao lado direito do mínimo x^* . Em seguida, faz-se $\varepsilon = 0$, $\omega_{ot} = 0$ e $\Theta_{ot} = A_{ot}$. Então, se $\dot{x} = \Theta_{ot}$, para $t > t_0 = 0$ tem-se $x(t) = A_{ot}t + x(0)$. Isto significa que, inicialmente, x estará se afastando do ponto mínimo, x^* . A saída do detector de pico mínimo y_d será constante devido $\dot{y}_d = 0$. Como consequência, o erro $\varepsilon = y_d - y$ se tornará negativo e decrescerá até o momento em que o tempo t_1 atingir o valor $\varepsilon = -\delta_{ot}$. Isto fará com que Θ_{ot} mude de A_{ot} para $-A_{ot}$, e para $t > t_1$, tem-se que $x(t) = -A_{ot}(t - t_1) + x(t_1)$.

Figura 7 – Trajetória típica do otimizador T-Z.



Fonte: Teixeira e Žak (1998).

Então x começará a se mover para a esquerda na direção de x^* e o valor de $y = f(x)$ vai começar a diminuir. Uma vez que $\varepsilon = 0$ é atingido novamente, o sinal de saída do detector de pico mínimo muda seu valor de $y_d = y(x(0))$ para seguir a trajetória de $y(x(t))$. O valor escolhido para o parâmetro M_{ot} deve respeitar o seguinte:

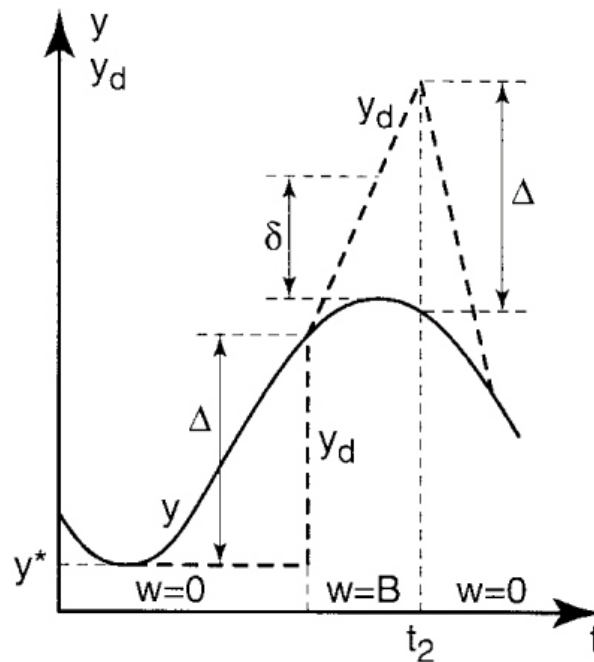
$$|\dot{y}(t)| = \left| \frac{df(x)}{dx} \dot{x}(t) \right| \leq L_{ot} A_{ot} < M_{ot}. \quad (45)$$

A saída y_d a partir do detector de pico mínimo irá rastrear y até x atingir x^* . Então, uma vez que ε ainda permanece em zero, x continuará se movendo para a esquerda. No entanto, y_d será bloqueado em $(x, y) = (x^*, y^*)$ e o erro ε irá decrescer, assumindo valores negativos, até que se atinja o valor de $\varepsilon = -\Delta_{ot}$ em algum momento $t = t_2$. Neste momento, o sinal de ω_{ot} crescerá muito, isto é, assumirá o valor B_{ot} . Isto implica que, para $\varepsilon \leq 0$, e da Figura 5, observando que neste caso $Z_{ot} = 0$ e $\omega_{ot} = B_{ot}$, têm-se $\dot{\varepsilon} = \dot{y}_d - \dot{y} = B_{ot} - \dot{y} > 0$, pois de (45), $|\dot{y}| < M_{ot}$ e $B_{ot} > 2M_{ot}$. Logo ε crescerá até que fique positivo. Para $\varepsilon > 0$, da Figura 5, considerando (45), e que $|\dot{y}| < M_{ot}$, então $\dot{\varepsilon} = B_{ot} - M_{ot} - \dot{y} > 0$, pois $B_{ot} > 2M_{ot}$.

A Figura 8 descreve os detalhes do processo no qual analisando $v(t) = \frac{1}{2}\varepsilon^2(t)$, desde que $\omega_{ot} \neq 0$, temos $\varepsilon > 0$, e isto acarretará com que o detector de pico mínimo seja reiniciado para um novo valor.

Para o intervalo de tempo em que ε está crescendo de $-\Delta_{ot}$ à δ_{ot} , observa-se que $\dot{x} = -A_{ot}$, e, portanto, y crescerá. Quando ε atinge o valor de δ_{ot} , o sinal de entrada Θ_{ot} terá o valor de A_{ot} , que é $\dot{x} = A_{ot}$, e y irá decrescer, enquanto ε continua a aumentar.

Figura 8 – Reiniciador do detector de pico mínimo.



Fonte: Teixeira e Žak (1998).

A trajetória de x começará a voltar para a direção x^* porque agora $\dot{x} = A_{ot}$. Quando ε alcança o valor de Δ_{ot} , o sinal ω_{ot} será configurado para zero, e ε vai começar a diminuir até que se torne zero.

A saída do detector de pico mínimo, y_d , irá rastrear y até x voltar para x^* . Então, y_d vai assumir o valor $y(x^*)$, e $Z_{ot} = 0$. O erro ε decrescerá até atingir o valor de $-\delta_{ot}$. No instante de tempo $t = t_3$, a trajetória x reverterá seu trajeto, porque agora $\dot{x} = -A_{ot}$. O erro é negativo e aumentará até que se atinja o valor zero. A trajetória x ainda estará se movendo para a esquerda. O erro permanecerá em seus valores negativos até encontrar o valor de $-\Delta_{ot}$, que irá ativar o sinal ω_{ot} no momento t_4 , o mesmo que ocorre em t_2 .

As oscilações de y em torno do valor mínimo de x^* serão repetidas, em períodos sendo $t_4 - t_2$ e os valores de pico-a-pico aproximadamente igual a Δ_{ot} . E este pode ser tão pequeno quanto desejar desde que Δ_{ot} seja um parâmetro de projeto, reduzindo então a amplitude das oscilações de x em torno do minimizador x^* .

Caso mude a condição inicial, se por exemplo, em uma condição inicial $x(t_0)$ apresentar $\frac{df}{dx}(x(t_0)) > 0$, ou seja, o ponto inicial $x(t_0)$ estará localizado ao lado esquerdo de x^* , o erro $\varepsilon = 0$ e $\omega_{ot} = 0$, com isso a trajetória resultante do otimizador terá a forma apresentada na Figura 8 com $t_0 > t_2$ para o qual $\varepsilon = 0$ e $\omega_{ot} = 0$ (TEIXEIRA; ŽAK, 1998).

Os parâmetros do otimizador podem ser resumidos da seguinte forma:

- δ_{ot} : magnitude do erro ε a partir do qual ocorre a inversão de sinal de \dot{x} , e consequentemente, a inversão da direção da função $y(t)$ para valores crescentes ou decrescentes. Na prática, $\delta_{ot} \geq \delta_{ot(min)}$, sendo $\delta_{ot(min)} > 0$ o menor valor para δ_{ot} capaz de ser interpretado pelo sistema de controle, seja pelo solver do simulador, ou seja pelo equipamento de medição/aquisição de dados utilizado no sistema de controle;
- Δ_{ot} : magnitude do erro ε a partir do qual ocorre a reinicialização do detector de pico. Representa o valor de pico-a-pico da oscilação de $y(t)$ em torno de seu valor mínimo, sendo $\Delta_{ot} \geq 2\delta_{ot}$;
- A_{ot} : é o passo da busca do mínimo da função objetivo e quanto maior for seu valor, maior será a velocidade de busca;
- M_{ot} : limitante de $\left| \frac{d}{dt}y(t) \right|$. Indica, no projeto do detector de pico, a velocidade com que o erro ε vai a zero;
- B_{ot} : valor somado a \dot{y}_d quando da reinicialização do detector de pico para que a função $y(t)$ não se afaste demais do seu valor mínimo, sendo $B_{ot} > 2M_{ot}$.

3 MPPT DE UM SISTEMA FOTOVOLTAICO USANDO OTIMIZADOR NÃO DERIVATIVO

A energia solar é uma das formas de energia alternativa mais indicadas para substituir os métodos convencionais de geração de eletricidade. Atualmente, a energia fotovoltaica tem aplicações nas mais diversas áreas, com o objetivo de geração de energia elétrica aliada às seguintes vantagens: simplicidade de instalação, elevado grau de confiabilidade do sistema, redução das perdas por transmissão de energia devido à proximidade entre a geração e o consumo, e pouca necessidade de manutenção. Além disso, os sistemas fotovoltaicos são fontes silenciosas de geração de energia elétrica não poluente (AMINDE, 2013).

A célula solar, ou célula fotovoltaica, é o dispositivo elétrico responsável por converter a energia da luz do sol diretamente em energia elétrica por meio do efeito fotovoltaico. Para isso, as células fotovoltaicas são produzidas a partir de materiais semicondutores, os quais podem ser de diferentes tipos. Um conjunto de células fotovoltaicas interligadas eletricamente e encapsuladas constituem um módulo fotovoltaico. Os módulos podem ser conectados em ligações série e/ou paralelo, dependendo da corrente e tensão desejadas, para formar um arranjo fotovoltaico com potência mais elevada. Com o arranjo fotovoltaico conectado a demais acessórios para pleno funcionamento, têm-se o sistema fotovoltaico.

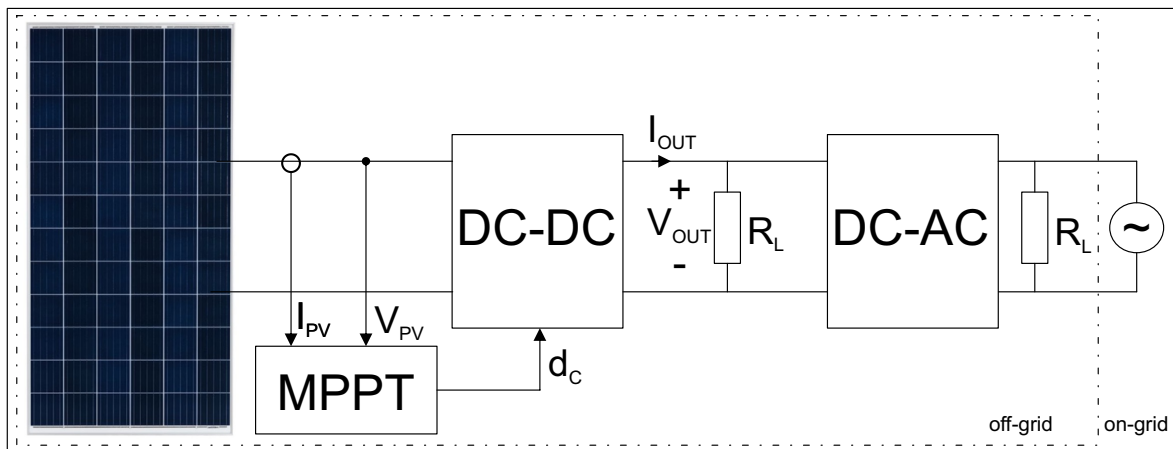
Devido ao seu alto custo e baixa eficiência no processo de conversão da energia solar em energia elétrica, é necessário otimizar o desempenho dos arranjos fotovoltaicos através dos sistemas de conversão da energia, para aumentar a eficiência de saída de todo o sistema. Portanto, é crucial que os sistemas fotovoltaicos operem perto do Ponto de Máxima Potência (do inglês "*Maximum Power Point - MPP*") para aumentar a eficiência do sistema como um todo. A tensão e corrente de saída do arranjo fotovoltaico é uma função não linear da temperatura do painel, radiação recebida e condições de carga (HEYDARI-DOOSTABAD et al., 2013).

Mas a energia produzida pelo arranjo fotovoltaico também depende de outras variáveis como o ângulo de incidência do sol, nuvens e sombras. A consequência disso é que a tensão e corrente fornecidas por cada módulo varia muito. Acontece que não necessariamente a corrente e tensão fornecidas são as melhores para o sistema como um todo. Portanto, é necessário explorar um método de Rastreamento do Ponto de Máxima Potência (MPPT), para o funcionamento eficiente do sistema fotovoltaico.

Em geral, a técnica MPPT consiste em um método aplicado no controle de um conversor DC-DC que faz a interface entre o módulo (ou arranjo) fotovoltaico e a carga, no caso de sistemas isolados da rede elétrica ("*off-grid*"), ou entre o módulo (ou arranjo) fotovoltaico e o inversor em sistemas conectados à rede elétrica ("*on-grid*"). A Figura 9

mostra um diagrama do sistema fotovoltaico com MPPT.

Figura 9 – Diagrama do sistema fotovoltaico com MPPT.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

De acordo com a Figura 9, a corrente e a tensão geradas pelo módulo (ou arranjo) fotovoltaico são medidas por sensores no circuito eletrônico MPPT, que envia a um conversor DC-DC um sinal de referência. Um conversor DC-DC, no caso, se trata de um conversor Boost, que eleva a tensão de saída em relação a tensão de entrada de acordo com a razão cíclica de operação, também conhecido como *Duty Cycle* (d_c).

Quando aplicado a um conversor DC-AC, o conversor boost não possui apenas a função de elevar a tensão de saída, mas também de regular a tensão de entrada. Os circuitos operam em malha fechada, portanto o feedback de potência gerada sempre altera os parâmetros de todos os elementos do circuito. Referenciando uma tensão de saída no conversor Boost através da variação do valor de referência enviado pelo controlador MPPT, o conversor “forçará” o arranjo de módulos fotovoltaicos a operar na tensão em que o MPP está localizado. A função do conversor DC-DC nada mais é do que garantir o casamento entre a impedância de entrada (módulo) com a impedância de saída (carga). A potência gerada, então, é enviada ao conversor DC-AC, que transforma ela nos parâmetros da rede definidos pela concessionária local (PERUZZO; PETERS JUNIOR, 2021).

Há diversos tipos de métodos MPPT em sistemas fotovoltaicos. Como exemplos destes métodos, podem ser citados: métodos de relação constante - razão cíclica fixa (R_{cte}) e tensão constante (V_{cte}); métodos do tipo *Hill Climbing*¹ - perturba e observa clássico (P&OC), perturba e observa moderno (P&O), perturba e observa modificado (P&OM), estima, perturba e perturba (EPP), condutância incremental (CI) e condutância

¹ Otimização matemática que pertence à família de busca local, onde se inicia com uma solução arbitrária e busca a otimização por incrementar a variável de processo. Se isso produzir uma melhor solução, é repetido até que não seja possível encontrar melhorias no processo.

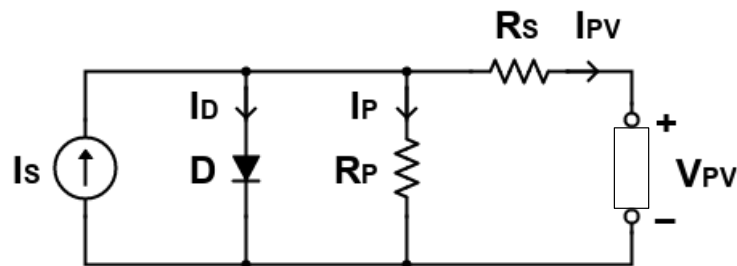
incremental modificada (CIM); métodos baseados na aplicação de filtros - oscilação do sistema (OdS) e correlação de ripple (CdR); métodos que utilizam princípios próprios - método beta ($M\beta$) e o método de temperatura (ΔT) (SILVA, 2015). Dentre estes métodos, alguns não consideram variações na radiação e na temperatura, outros demandam alta capacidade computacional e têm resposta lenta, e ainda os que encontram o MPP, não necessariamente garantem que este ponto seja ótimo (HEYDARI-DOOSTABAD et al., 2013; SILVA, 2015; NJOMO et al., 2020).

Sendo assim, como uma alternativa aos métodos MPPT citados, será aplicado o Otimizador Não Derivativo para determinar o MPP de um sistema fotovoltaico. A princípio será desenvolvido o modelo matemático de uma célula fotovoltaica para levantamento das curvas características com seus respectivos MPP. Depois será aplicado o Otimizador Não Derivativo para que ele mesmo determine estes MPP e forneça assim a tensão de referência (de máxima potência), V_{mp} , para a próxima etapa de controle do sistema fotovoltaico, que é o conversor DC-DC.

3.1 Modelagem Matemática de uma Célula Fotovoltaica

O modelo de um circuito elétrico equivalente de uma célula fotovoltaica é mostrada na Figura 10 (AMINDE, 2013; CARRIJO et al., 2010; HEYDARI-DOOSTABAD et al., 2013; NJOMO et al., 2020).

Figura 10 – Circuito elétrico equivalente de uma célula fotovoltaica.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Este circuito equivalente é composto por:

- Uma fonte de corrente ideal, I_S : representa a corrente de curto-circuito da célula, sendo proporcional à intensidade luminosa e à temperatura;
- Um diodo em paralelo, D : representa a junção PN e seus efeitos são dependentes da temperatura;

- Uma resistência em paralelo, R_P : representa as perdas devido às correntes de fuga, seu valor é superior a 10Ω .
- Uma resistência em série, R_S : representa as perdas por contato e condução (queda de tensão interna da célula), da ordem de $m\Omega$.

I_{PV} e V_{PV} são a corrente e tensão elétrica de saída da célula fotovoltaica, respectivamente.

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff, a corrente de saída da célula é dada por:

$$I_{PV} = I_S - I_D - I_P. \quad (46)$$

A corrente gerada pela radiação solar, I_S , é calculada por (AMINDE, 2013):

$$I_S = \frac{G_c I_{sc}}{G_0} (1 + K_i (T_c - T_r)), \quad (47)$$

sendo G_c a irradiação solar recebida pela célula, em W/m^2 , $G_0 = 1000W/m^2$ a referência da irradiação solar, I_{sc} a corrente de curto-circuito de referência da célula a $25^\circ C$ e $1000W/m^2$, K_i o coeficiente da temperatura de corrente de curto-circuito, em $^\circ C^{-1}$, T_c a temperatura da célula fotovoltaica, em $^\circ C$, e T_r a temperatura de referência da célula, em $^\circ C$ (geralmente $25^\circ C$).

A temperatura da célula, T_c , em $^\circ C$ é dada por (ALONSO GARCÍA; BALENZA-TEGUI, 2004):

$$T_c = T_a + \frac{G_c (NOCT - 20)}{800}, \quad (48)$$

sendo T_a a temperatura ambiente em $^\circ C$, NOCT vem do inglês “*Normal Operating Cell Temperature*” que significa “Temperatura Nominal de Operação da Célula”, dada em $^\circ C$. A NOCT é a temperatura a que o módulo fotovoltaico chegou no laboratório do fabricante quando submetido a $800W/m^2$ de irradiância (um dia de sol moderado) a uma temperatura ambiente de $20^\circ C$ e um vento de $1m/s$. Geralmente seu valor está entre $45^\circ C$ e $49^\circ C$.

A corrente I_D no diodo é expressa por (NJOMO et al., 2020; AMINDE, 2013):

$$I_D = I_{sat} \left(\exp\left(\frac{V_{PV} + I_{PV} R_S}{A_D N_s V_T}\right) - 1 \right), \quad (49)$$

sendo I_{sat} a corrente de saturação do diodo, $\exp(x) = e^x$ a função exponencial natural, A_D o fator de idealidade do diodo (geralmente um valor entre 1 e 5), N_s é o número de células ligadas em série, e V_T é a tensão térmica.

A tensão térmica é dada por:

$$V_T = \frac{k_B T_c K}{q_e}, \quad (50)$$

sendo $k_B = 1,380649 \times 10^{-23} J/K$ a constante de Boltzmann, $q_e = 1,602176634 \times 10^{-19} C$ a carga elementar, e T_{cK} a temperatura da célula fotovoltaica, em Kelvin.

A corrente de saturação do diodo, I_{sat} , é dada por (CELIK; ACIKGOZ, 2007; AMINDE, 2013):

$$I_{sat} = I_{OR} \left(\frac{T_{cK}}{T_{rK}} \right)^3 \exp \left(\frac{q_e E_g}{A_D N_s k_B} \left(\frac{1}{T_{rK}} - \frac{1}{T_{cK}} \right) \right), \quad (51)$$

sendo T_{rK} a temperatura de referência da célula, em Kelvin, E_g a banda proibida ou gap de energia da junção p-n, em eV, I_{OR} é a corrente de saturação reversa do diodo na condição de referência, em A.

A corrente I_{OR} é dada por (AMINDE, 2013; NJOMO et al., 2020):

$$I_{OR} = \frac{I_{SC}}{\exp \left(\frac{q_e V_{oc}}{A_D N_s k_B T_{cK}} \right) - 1}, \quad (52)$$

sendo I_{SC} a corrente de curto-circuito, em A, e V_{oc} a tensão em circuito aberto, em V.

A corrente I_P é dada por:

$$I_P = \frac{V_{PV} + I_{PV} R_S}{R_P} \quad (53)$$

Finalmente, a partir das equações (47), (49) e (53), têm-se a relação entre a corrente e a tensão de saída:

$$I_{PV} = \frac{G_c I_{sc}}{G_0} (1 + K_i (T_c - T_r)) - I_{sat} \left(\exp \left(\frac{V_{PV} + I_{PV} R_S}{A_D N_s V_T} \right) - 1 \right) - \frac{V_{PV} + I_{PV} R_S}{R_P}. \quad (54)$$

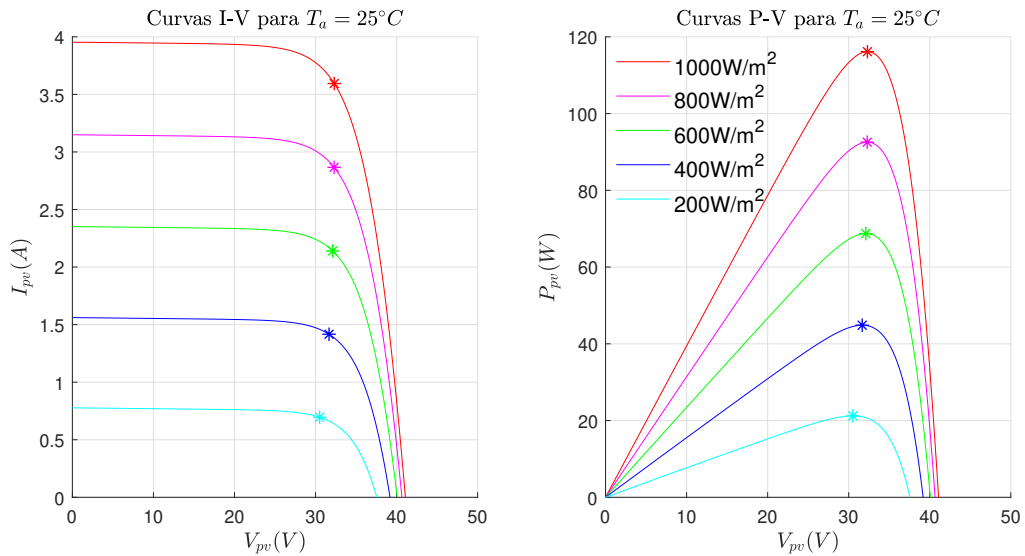
Para simular o comportamento de um módulo fotovoltaico foi escolhido o modelo BP MSX 120 da empresa BP Solar. Este módulo possui potência máxima de 120W. As Figuras 11 e 12 e as Tabelas 2 e 3 apresentam as características do módulo fotovoltaico com parâmetros dados na Tabela 1. A máxima potência é denominada P_{mp} e a tensão na máxima potência é denominada V_{mp} .

Tabela 1 – Dados de placa e estimados do módulo fotovoltaico.

Parâmetros	Valor
E_g	1,124eV
NOCT	47°C
T_r	25°C
I_{sc}	3,87A
K_i	0,00065°C ⁻¹
V_{oc}	42,1V
N_s	72
A_D	1,3977
R_s	0,473Ω
R_p	1367Ω

Fonte: Morsli et al. (2020), Heydari-doostabad et al. (2013), BP Solar (2002), Sera, Teodorescu e Rodriguez (2007), Celik e Acikgoz (2007).

Figura 11 – Características de tensão-corrente e tensão-potência do módulo fotovoltaico para o caso de temperatura ambiente constante, $T_a = 25^\circ C$, e irradiação variável. Os pontos com * indicam o MPP.



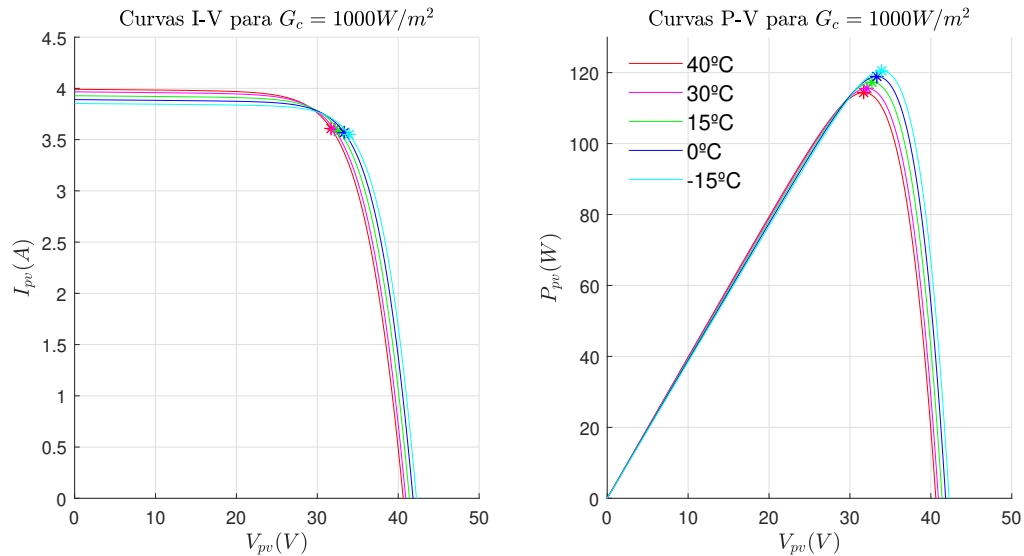
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 2 – Valores de G_c , T_c , V_{mp} e P_{mp} para as curvas da Figura 11.

$G_c [W/m^2]$	$T_c [^\circ C]$	$V_{mp} [V]$	$P_{mp} [W]$
1000	58,75	32,31	116,10
800	52,00	32,29	92,55
600	45,25	32,12	68,74
400	38,50	31,67	44,85
200	31,75	30,51	21,23

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 12 – Características de tensão-corrente e tensão-potência do módulo fotovoltaico para o caso de irradiação constante, $G_c = 1000W/m^2$, e temperatura ambiente variável. Os pontos com * indicam o MPP.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 3 – Valores de G_c , T_c , V_{mp} e P_{mp} para as curvas da Figura 12.

$T_a [^{\circ}C]$	$T_c [^{\circ}C]$	$V_{mp} [V]$	$P_{mp} [W]$
40	73,75	31,70	114,40
30	63,75	32,11	115,60
15	48,75	32,72	117,30
0	33,75	33,33	118,90
-15	18,75	33,93	120,50

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observa-se na Figura 11 que para temperatura ambiente constante o MPP varia com a irradiação. Já na Figura 12, observa-se que em irradiação constante o MPP varia com a temperatura ambiente. A partir das observações acima, pode-se concluir que tanto a temperatura quanto as variações de irradiação modificam o MPP do módulo fotovoltaico.

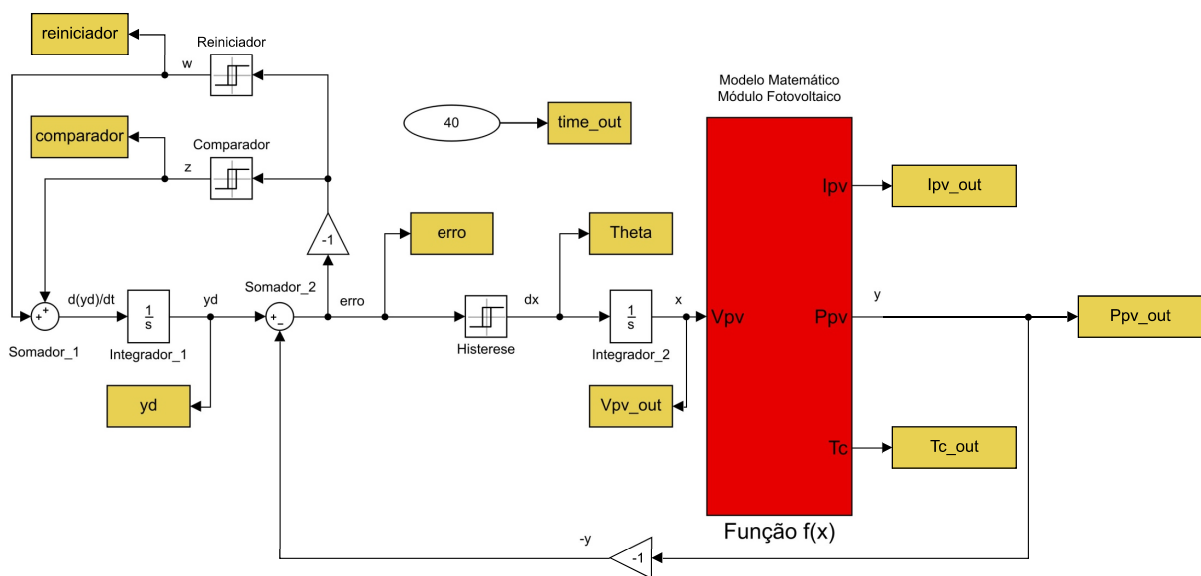
3.2 Aplicação do Otimizador Não Derivativo como MPPT do Sistema Fotovoltaico

Conforme descrito anteriormente, a corrente de saída da célula fotovoltaica, I_{PV} , é dada em função da tensão de saída da célula, V_{PV} . Consequentemente, a potência de saída da célula é uma função da tensão de saída, $P_{PV}(V_{PV})$.

O objetivo da aplicação do Otimizador T-Z é encontrar o ponto de máxima potência do sistema a uma determinada condição de irradiação solar e temperatura ambiente. Este ponto corresponde a uma tensão de operação de máxima potência, V_{mp} .

A Figura 13 mostra o esquema de simulação no Simulink® para o Otimizador Não Derivativo aplicado ao módulo fotovoltaico. O Otimizador realiza a “procura” do mínimo de uma função objetivo, mas no caso, pretende-se fazer a “procura” do máximo de uma função objetivo, então é aplicado um ganho unitário negativo na realimentação do sinal $y(x)$. Desta forma, é como se a curva característica de potência do módulo fotovoltaico estivesse invertida e apresenta-se então um único ponto de valor mínimo.

Figura 13 – Esquema de simulação no Simulink® para o Otimizador Não Derivativo aplicado ao módulo fotovoltaico.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Os parâmetros do Otimizador foram definidos da seguinte forma:

- $\delta_{ot} = 0,07$: magnitude do erro ε a partir do qual ocorre a inversão de sinal de \dot{x} . A escolha deste valor está relacionada, neste caso, à capacidade do solver utilizado na simulação. Para valores $\delta_{ot} < 0,07$ previamente testados, a resposta do sistema não foi condizente com o comportamento que era esperado;
- $\Delta_{ot} = 0,14$: representa $0,14W$ de pico-a-pico da oscilação de P_{PV} em torno de seu valor mínimo. Seu valor é obtido através da equação (44), ou seja, $0 < \delta_{ot} < \Delta_{ot}$, sendo que $\Delta_{ot} \geq 2\delta_{ot}$;
- $A_{ot} = 33,7$: é o passo da busca do mínimo da função objetivo. O valor $33,7V$ se refere à tensão de máxima potência fornecida pelo fabricante do módulo fotovoltaico

escolhido para análise (BP MSX 120). Valores de $V_{PV} > 42,1V = V_{oc}$ causam I_{PV} com valores negativos no modelo matemático, por isso a precaução em manter V_{PV} abaixo de V_{oc} ;

- M_{ot} : limitante de $\left| \frac{d}{dt}y(t) \right|$. Indica a velocidade com que o erro ε vai a zero. A obtenção do seu valor será descrita a seguir.

O valor de M_{ot} é obtido a partir da equação (45), logo, esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left| \dot{P}_{PV}(t) \right| = \left| \frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}} \dot{V}_{PV}(t) \right| \leq L_{ot} A_{ot} < M_{ot}. \quad (55)$$

Como A_{ot} já foi definido, pode-se definir L_{ot} através da equação (42), logo:

$$\left| \frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}} \right| \leq L_{ot}. \quad (56)$$

Temos que, da equação (54):

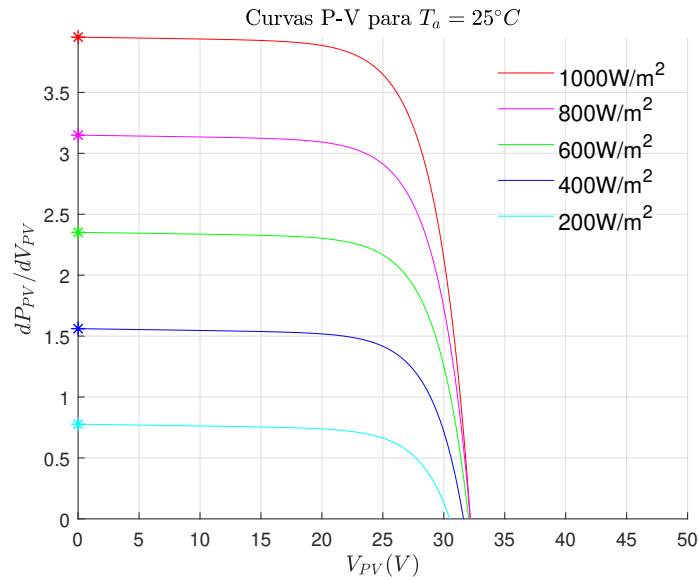
$$\begin{aligned} P_{PV}(t) &= V_{PV}(t) I_{PV}(t) \\ &= V_{PV}(t) \frac{G_c I_{sc}}{G_0} (1 + K_i (T_c - T_r)) - V_{PV}(t) I_{sat} \left(e^{\left(\frac{V_{PV}(t) + I_{PV} R_S}{A_D N_s V_T} \right)} - 1 \right) + \\ &\quad - V_{PV}(t) \frac{V_{PV}(t) + I_{PV} R_S}{R_P}, \end{aligned} \quad (57)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}} &= \frac{G_c I_{sc}}{G_0} (1 + K_i (T_c - T_r)) - I_{sat} \left(e^{\left(\frac{V_{PV}(t) + I_{PV} R_S}{A_D N_s V_T} \right)} \left(1 + \frac{V_{PV}(t)}{A_D N_s V_T} \right) - 1 \right) + \\ &\quad - \frac{2V_{PV}(t) + I_{PV} R_S}{R_P}. \end{aligned} \quad (58)$$

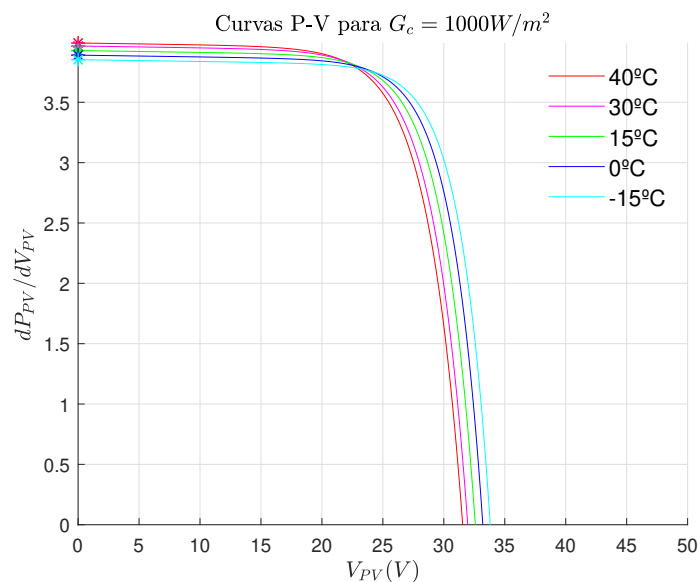
A seguir têm-se os gráficos de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$ para as mesmas condições das Figuras 11 e 12.

Figura 14 – Gráfico de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$ para o caso de temperatura ambiente constante, $T_a = 25^\circ C$, e irradiação variável. Os pontos com * indicam o valor máximo de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 15 – Gráfico de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$ para o caso de irradiação constante, $G_c = 1000W/m^2$, e temperatura ambiente variável. Os pontos com * indicam o valor máximo de $\frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}}$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A partir da análise das Figuras 14 e 15, e de volta a equação (56)

$$\left| \frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}} \right|_{max} \leq L_{ot} = 3,991. \quad (59)$$

Como A_{ot} já foi definido, então de volta a equação (55):

$$\left| \dot{P}_{PV}(t) \right| = \left| \frac{dP_{PV}(V_{PV})}{dV_{PV}} \dot{V}_{PV}(t) \right| \leq 3,991 \times 33,7 = 134,5 < M_{ot}. \quad (60)$$

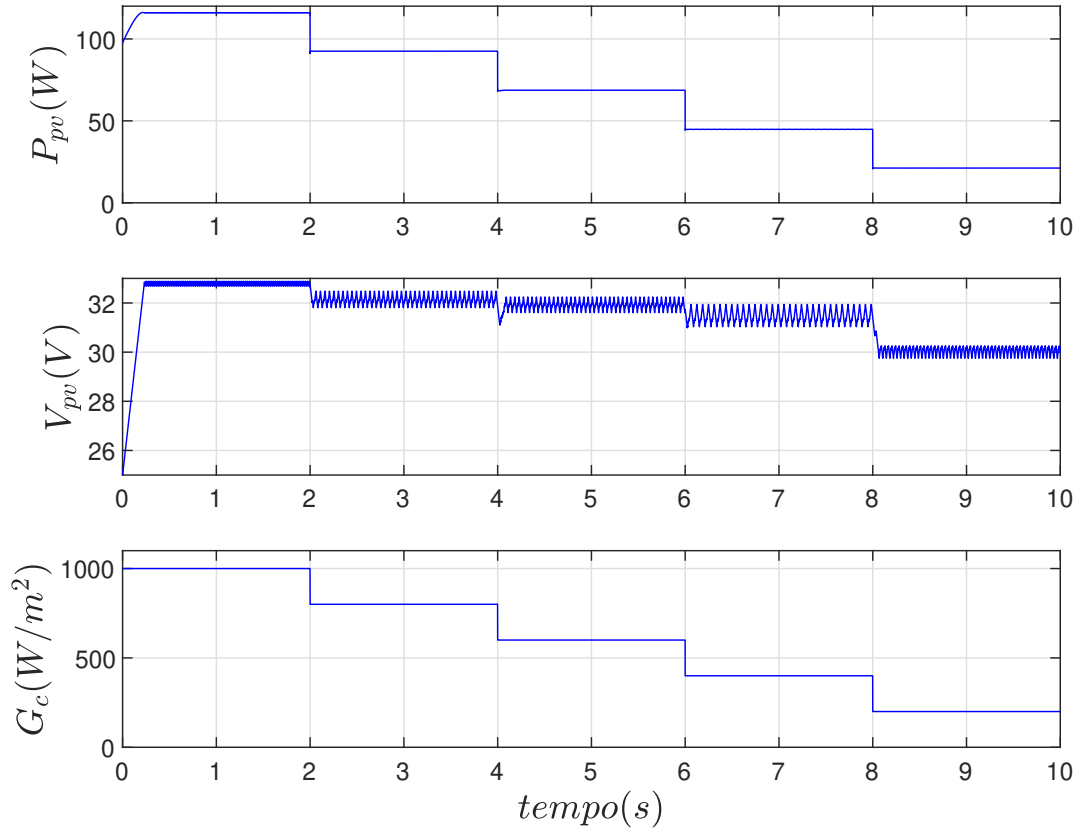
Após alguns testes prévios com o Otimizador, optou-se por escolher $M_{ot} = 1000$. Com essa escolha, fica garantido que a velocidade com que o erro ϵ vai a zero seja suficiente para o correto funcionamento do Otimizador.

- $B_{ot} = 2100$: a condição é que $B_{ot} = 2100 > 2M_{ot} = 2000$.

Finalizada a parametrização do Otimizador Não Derivativo, o sistema de MPPT do módulo fotovoltaico foi simulado.

Para a primeira simulação, considerou-se que o sistema fotovoltaico já estivesse operando com $V_{PV}(0) = 25V$ e temperatura ambiente constante de $25^\circ C$. Variou-se a irradiância para valores decrescentes, condição análoga a que o módulo fotovoltaico estivesse a pleno sol e posteriormente o céu fosse ficando encoberto cada vez mais com nuvens. O resultado desta simulação está na Figura 16 e Tabela 4.

Figura 16 – Simulação do sistema de MPPT do módulo fotovoltaico para o caso de temperatura ambiente constante, $T_a = 25^\circ C$ e irradiação variável, G_c .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

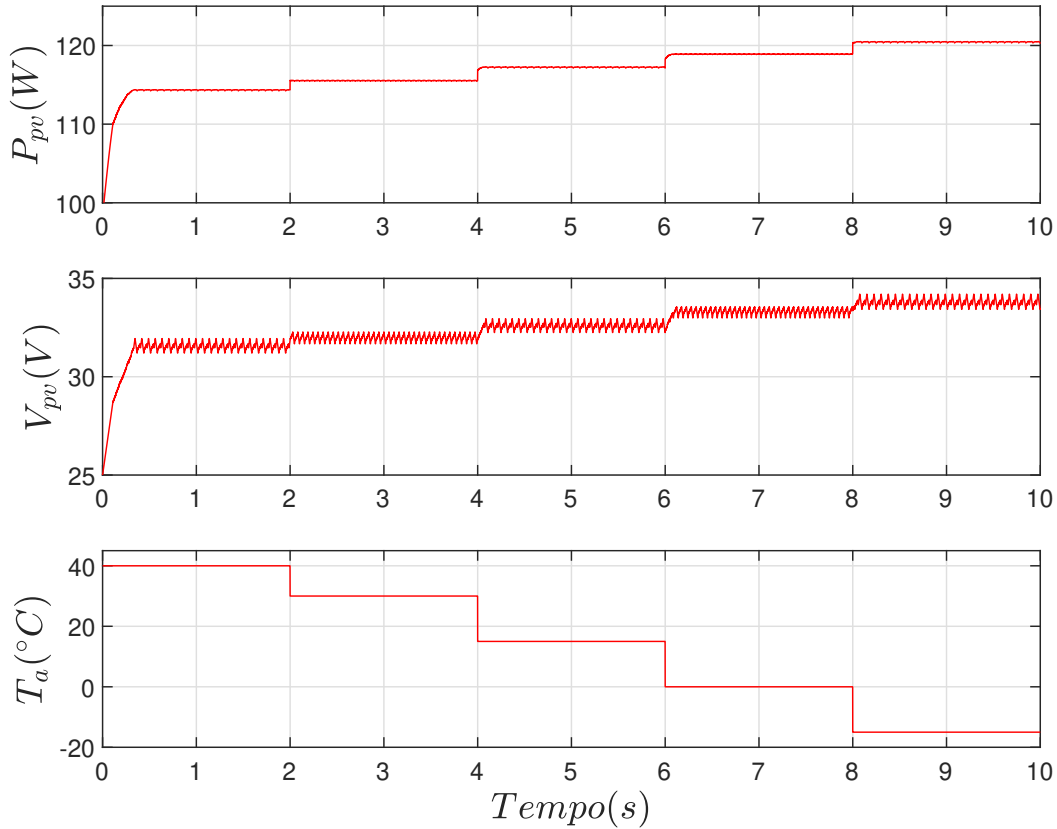
Tabela 4 – Valores médios de V_{PV} e P_{PV} obtidos da Figura 16, desprezado o transitório $t < 0,5s$, para cada valor de G_c , e os valores de V_{mp} e P_{mp} da Tabela 2 para comparação.

$G_c [W/m^2]$	$V_{mp} [V]$	$V_{PV} [V]$	$P_{mp} [W]$	$P_{PV} [W]$
1000	32,31	32,21	116,10	116,11
800	32,29	32,15	92,55	92,52
600	32,12	31,94	68,74	68,71
400	31,67	31,47	44,85	44,83
200	30,51	30,15	21,23	21,20

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para a segunda simulação, considerou-se que o sistema fotovoltaico também já estivesse operando com $V_{PV}(0) = 25V$ e irradiação constante de $1000W/m^2$. Variou-se a temperatura ambiente. O resultado desta simulação está na Figura 17 e Tabela 5.

Figura 17 – Simulação do sistema de MPPT do módulo fotovoltaico para o caso de irradiação constante, $G_c = 1000W/m^2$, e temperatura ambiente variável, T_a .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 5 – Valores médios de V_{PV} e P_{PV} obtidos da Figura 17, desprezado o transitório $t < 0,5s$, para cada valor de T_a , e os valores de V_{mp} e P_{mp} da Tabela 3 para comparação.

T_a [°C]	V_{mp} [V]	V_{PV} [V]	P_{mp} [W]	P_{PV} [W]
40	31,70	31,55	114,40	114,34
30	32,11	31,98	115,60	115,53
15	32,72	32,58	117,30	117,23
0	33,33	33,29	118,90	118,89
-15	33,93	33,78	120,50	120,45

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observando as Figuras 16 e 17 é possível verificar no gráfico de V_{PV} uma oscilação de pico-a-pico em torno de $0,7V$. Há também uma oscilação em P_{PV} da ordem de $0,14W$. Essas oscilações são características do Otimizador Não Derivativo utilizado, e tem relação com os parâmetros δ_{ot} e Δ_{ot} . Na prática, para obter uma tensão final de uso igual a

da rede elétrica, por exemplo $220V_{rms}$, o conversor DC-DC deve elevar a tensão de saída em torno de $400V$ para que o link CC do conversor DC-AC possa funcionar de forma adequada, a fornecer em sua saída a tensão de $220V_{rms}$. Ou seja, a oscilação de $0,7V_{pp}$ se torna pouco relevante para o link CC do conversor DC-AC (SILVA, 2015).

A partir das Tabelas 4 e 5 pode-se concluir que o Otimizador Não Derivativo cumpriu bem sua função de encontrar o MPP do sistema fotovoltaico, pois os valores médios de tensão V_{PV} e potência P_{PV} obtidos ficaram bem próximos dos valores de máxima potência V_{mp} e P_{mp} , respectivamente.

O Otimizador Não Derivativo trabalha para determinar a tensão V_{PV} que maximiza a potência de saída do sistema fotovoltaico. Essa tensão é a que deve ser utilizada como referência de tensão de entrada do conversor DC-DC já descrito anteriormente. A próxima etapa para o controle do sistema fotovoltaico seria controlar o *Duty Cycle* (d_c) do conversor DC-DC para que ele se ajuste à tensão de entrada fornecida pelo MPPT, neste caso o Otimizador Não Derivativo.

4 RESULTADOS BÁSICOS

Neste capítulo são apresentadas condições para estabilidade de sistemas lineares via LMIs e estabilidade de sistemas Fuzzy T-S via LMIs, considerando a região de operação em que o sistema deve operar, a região de condições iniciais, a taxa de decaimento, e a restrição na norma dos ganhos do controlador. Os resultados apresentados a seguir serão importantes para o estabelecimento de uma nova lei de controle chaveado, descrita no Capítulo 5. Adicionalmente, estes resultados permitirão mostrar que esta lei proposta apresenta uma área factível maior ou igual à obtida com um outro procedimento disponível na literatura.

4.1 Região de Operação

Uma questão importante, geralmente não abordada na literatura relacionada aos sistemas de controle fuzzy T-S, é que a representação do sistema não linear por modelo fuzzy geralmente tem um domínio de validade específico e limitado. Essa abordagem é descrita nesta seção.

Seja $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ uma matriz positiva definida. O conjunto $\mathcal{E}(P, 1)$ é definido como (ALVES, 2017):

$$\mathcal{E}(P, 1) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : x(t)^T P x(t) \leq 1\}, \quad (61)$$

ou seja, $\mathcal{E}(P, 1)$ é o conjunto elipsoidal formado pelo vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, tais que, $x(t)^T P x(t) \leq 1$.

O sistema deverá permanecer numa região de operação (domínio de validade) descrita por um conjunto compacto no espaço de estados $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$. Este conjunto compacto, que é a região de operação do sistema, é definido por (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015; ALVES, 2017):

$$\mathcal{X} \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |Nx(t)| \leq \phi\}, \quad (62)$$

sendo $\phi \in \mathbb{R}^{n_\phi}$, um vetor formado por escalares positivos conhecidos, que representa os limites da região de operação; n_ϕ designa o número de restrições que caracteriza a região \mathcal{X} , com $n_\phi \leq n_x$; $N \in \mathbb{R}^{n_\phi \times n_x}$ é a matriz que conecta o vetor de estado com ϕ , também conhecida.

É importante mencionar que a desigualdade (62) pode ser decomposta em componentes, ou seja,

$$\mathcal{X} \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |N_h x(t)| \leq \phi_h, h \in \mathbb{K}_{n_\phi}\}. \quad (63)$$

Assim, $N = [N_1^T \ N_2^T \ \dots \ N_{n_\phi}^T]^T$, sendo $N_h \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$ e $\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_\phi}]^T$, com $\phi_h \in \mathbb{R}^1$ e $\mathbb{K}_{n_\phi} = \{1, 2, \dots, n_\phi\}$.

Tal domínio de validade deve ser levado em consideração por qualquer síntese de controle ou condição de análise de estabilidade. Com efeito, pode ocorrer perda de desempenho ou mesmo instabilidade quando as trajetórias de estado evoluem fora do domínio de validade do modelo (2), caso em que tal modelo não mais representa adequadamente o sistema não linear original (KLUG et al., 2015). Nesse sentido, um dos objetivos do presente trabalho é tratar do domínio da validade do modelo T-S no estágio de síntese do controlador para garantir a estabilidade em malha fechada local.

Baseado em Alves (2017), é proposto o lema a seguir, que fornece uma condição suficiente, se satisfeita, para assegurar que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$.

Lema 1. *Dados os conjuntos $\mathcal{E}(P, 1)$ definido em (61) e \mathcal{X} definido em (63), a condição $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$ é assegurada se:*

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_h X \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (64)$$

sendo $P = P^T = X^{-1}$, para todo $h \in \mathbb{K}_{n_\phi}$.

Demonstração. Pré e pós multiplicando (64) por $\text{diag}\{1, P\}$, sendo $P = P^T = X^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_h X \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \geq 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_h \\ N_h^T & P \end{bmatrix} \geq 0. \quad (65)$$

Aplicando o complemento de Schur com respeito à primeira linha e primeira coluna em (65):

$$P - N_h^T (\phi_h^2)^{-1} N_h \geq 0 \rightarrow N_h^T (\phi_h^2)^{-1} N_h \leq P. \quad (66)$$

Pré e pós multiplicando (66) por $x(t)^T$ e $x(t)$, respectivamente:

$$x(t)^T N_h^T (\phi_h^2)^{-1} N_h x(t) \leq x(t)^T P x(t). \quad (67)$$

Considerando $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$, tem-se, da definição (61):

$$x(t)^T P x(t) \leq 1. \quad (68)$$

E assim, de (67) e (68):

$$x(t)^T N_h^T (\phi_h^2)^{-1} N_h x(t) \leq 1. \quad (69)$$

Logo:

$$x(t)^T N_h^T N_h x(t) \leq \phi_h^2, \quad (70)$$

que é equivalente a (63).

Portanto, $x(t) \in \mathcal{X}$ e, conseqüentemente, $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$.

□

4.2 Região de Condições Iniciais

Assim como foi definida uma região de operação \mathcal{X} para o sistema de controle fuzzy T-S, sendo $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$, é interessante exigir que um conjunto de condições iniciais de interesse, $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$, e portanto, para qualquer condição inicial $x(0) \in \mathfrak{X}$ tenha-se $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$.

Considere que o estado inicial $x(0)$ pertence ao conjunto convexo (PERES et al., 2019):

$$x(0) = \sum_{k=1}^{n_{x0}} \chi_k x_k(0), \quad \chi_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n_{x0}} \chi_k = 1, \quad \chi = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n_{x0}}]^T, \quad (71)$$

$$\mathbb{K}_{n_{x0}} = \{1, 2, \dots, n_{x0}\}, \quad n_{x0} \in \mathbb{Z}_+^*$$

sendo n_{x0} o número de vértices do politopo de condições iniciais.

O lema a seguir fornece uma condição que assegura $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$ (TANAKA; WANG, 2001; ALVES, 2017; PERES et al., 2019).

Lema 2. *Assuma que a condição inicial $x_k(0)$ é conhecida, para $k \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, com $x(0)$ pertencente ao conjunto convexo definido em (71). A condição $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$ é assegurada se:*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k^T(0) \\ x_k(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (72)$$

sendo $X = P^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$.

Demonstração. Multiplicando (72) por χ_k , somando de $k = 1$ até $k = n_{x0}$ (número de condições iniciais), e aplicando o complemento de Schur com respeito a segunda linha e segunda coluna, têm-se:

$$1 - x^T(0)X^{-1}x(0) \geq 0 \leftrightarrow x^T(0)X^{-1}x(0) \leq 1. \quad (73)$$

Se $X = P^{-1}$, logo (73) pode ser reescrita como:

$$x^T(0)Px(0) \leq 1. \quad (74)$$

A equação (74) corresponde à mesma condição da equação (61) para $t = 0$. Consequentemente, $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$, qualquer que seja $x(0) \in \mathfrak{X}$. Portanto $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$. Ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(P, 1)$, então uma estratégia de projeto do controlador consiste em impor também que todas as trajetórias $x(t)$, $t > 0$ correspondentes irão permanecer neste conjunto, satisfazendo $V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \leq 1$, para $t \geq 0$. Isto é, as trajetórias de $x(t)$, $t \geq 0$ ficam contidas no conjunto $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$ (ALVES, 2017; OLIVEIRA, 2017). \square

4.3 Tempo de Resposta

Em projeto de sistemas de controle é importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado, e um deles é a velocidade de resposta (SOUZA, 2013).

A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento do sistema (10) (ou maior expoente Lyapunov), que é definido como sendo o maior $\beta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta t} \|x(t)\| = 0 \quad (75)$$

vale para todas as trajetórias $x(t)$ (BOYD et al., 1994).

É mais comum usar a função de Lyapunov quadrática $V = x(t)^T P x(t)$ para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema (10). A condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$, para todas as trajetórias $x(t)$, é equivalente à especificação de uma taxa de decaimento maior ou igual a β (BOYD et al., 1994). Esta condição foi utilizada nos teoremas da Seção 4.4.

4.4 Estabilidade de Sistemas Fuzzy T-S via LMIs

Nesta seção, serão estabelecidas condições baseadas em LMIs que garantem a estabilidade assintótica global do sistema (10). Além disso, os teoremas propostos fornecem uma região positivamente invariante (BLANCHINI, 1999) $\mathcal{E}(P, 1)$ na qual, para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$, o vetor de estado do sistema controlado $x(t)$, $t > 0$, permanece na região de operação considerada para a obtenção do modelo fuzzy T-S que descreve a dinâmica não linear. Em consequência, garante-se que o sistema não linear é exatamente representado pelo modelo fuzzy T-S descrito em (7), com base no Lema 1, durante toda a trajetória de estado do sistema iniciada com $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$.

O teorema proposto a seguir trata da lei de controle fuzzy tradicional que utiliza a compensação distribuída paralela, de Tanaka, Ikeda e Wang (1998), com os Lemas 1 e 2.

Teorema 1. *Seja o sistema não linear incerto, exatamente descrito por um modelo fuzzy T-S como em (7) em uma região de operação \mathcal{X} em (63), sendo $\phi \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ e $N \in \mathbb{R}^{n_\phi \times n_x}$ conhecidos, assim como as faixas de valores para seus parâmetros incertos. Seja $x(0)$ pertencente ao conjunto convexo definido em (71), em que $x_k(0)$, $k \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, são também conhecidos. Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e uma taxa de decaimento $\beta > 0$, tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, $h \in \mathbb{K}_{n_\phi}$ e $k \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, as seguintes LMIs sejam factíveis:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T + 2\beta X < 0, \quad (76)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_iM_j - B_jM_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T + 4\beta X \leq 0, \quad i < j, \quad (77)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_h X \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (78)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k^T(0) \\ x_k(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (79)$$

exceto para os pares (i, j) com $\alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t)) = 0$ para todo $x(t)$, para $P = X^{-1}$, e a lei de controle (9), sendo os ganhos dos controladores dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se que, para $t \geq 0$, a origem ($x(t) = 0$) é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (7), e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, ou seja, se $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$, todas as trajetórias de $x(t)$, $t \geq 0$ irão permanecer dentro deste conjunto.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática $V = x^T P x$ e a condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$. Assim, de (10) nota-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\beta V \Leftrightarrow \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \leq -2\beta x^T P x \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j x^T [(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j)] x + 2\beta x^T P x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j x^T [(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + 2\beta P] x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 x^T [(A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i) + 2\beta P] x \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1+i}^r 2\alpha_i \alpha_j x^T \left[\left(\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right)^T P \right. \\ &\quad \quad \left. + P \left(\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right) + \frac{4\beta P}{2} \right] x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 x^T [A_i^T P + P A_i - K_i^T B_i^T P - P B_i K_i + 2\beta P] x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1+i}^r \alpha_i \alpha_j x^T [(A_i + A_j)^T P + P(A_i + A_j) \\
 & \quad - PB_i K_j - PB_j K_i - K_i^T B_j^T P - K_j^T B_i^T P + 4\beta P] x \leq 0. \quad (80)
 \end{aligned}$$

Como $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, então a condição de (80), para $x \neq 0$, é atendida se:

$$A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + 2\beta P < 0, \quad (81)$$

$$\begin{aligned}
 & (A_i + A_j)^T P + P(A_i + A_j) + \\
 & -PB_i K_j - PB_j K_i - K_i^T B_j^T P - K_j^T B_i^T P + 4\beta P \leq 0, \quad i < j. \quad (82)
 \end{aligned}$$

Definindo $X = P^{-1}$ e $M_i = K_i X$, pré e pós multiplicando as equações (81) e (82) por X , obtém-se (76) e (77). As equações (78) e (79) garantem que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$ e $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$, como provado nos Lemas 1 e 2, respectivamente. \square

O teorema a seguir, originalmente de Liu e Zhang (2003a), propõe uma relaxação das condições de estabilidade de sistemas fuzzy T-S. Essa proposta de relaxação utiliza matrizes $Y_{ji} = Y_{ij}^T$ para $i \neq j$ não necessariamente simétricas. Na equação (85), a seguir, observa-se que os blocos matriciais fora da diagonal principal Y_{ij} podem ser não simétricos, ou seja, há muito mais variáveis possíveis em cada bloco Y_{ij} , ao passo que outros teoremas não permitem essa situação e são mais conservativos. De acordo com Liu e Zhang (2003a) isso implica que essas condições admitem muito mais liberdade (ou dimensão) para garantir a estabilidade dos sistemas de controle fuzzy do que trabalhos anteriores como, por exemplo, em Tanaka, Ikeda e Wang (1998). O teorema é proposto com os Lemas 1 e 2.

Teorema 2. *Seja o sistema não linear incerto, exatamente descrito por um modelo fuzzy T-S como em (7) em uma região de operação \mathcal{X} em (63), sendo $\phi \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ e $N \in \mathbb{R}^{n_\phi \times n_x}$ conhecidos, assim como as faixas de valores para seus parâmetros incertos. Seja $x(0)$ pertencente ao conjunto convexo definido em (71), em que $x_k(0)$, $k \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, são também conhecidos. Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, matrizes $Y_{ij} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, sendo Y_{ii} matrizes simétricas e $Y_{ji} = Y_{ij}^T$ para $i \neq j$, e uma taxa de decaimento $\beta > 0$, tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, $h \in \mathbb{K}_{n_\phi}$ e $k \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, as seguintes LMIs sejam factíveis:*

$$XA_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + 2\beta X < Y_{ii}, \quad (83)$$

$$\begin{aligned}
 & A_i X + X A_i^T + A_j X + X A_j^T - B_i M_j - M_j^T B_i^T - B_j M_i - M_i^T B_j^T + \\
 & + 4\beta X \leq Y_{ij} + Y_{ij}^T, \quad i \neq j, \quad (84)
 \end{aligned}$$

$$[Y_{ij}]_{r \times r} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{r1} & \cdots & Y_{rr} \end{bmatrix} < 0, \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_h X \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (86)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k^T(0) \\ x_k(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (87)$$

para $P = X^{-1}$, e a lei de controle (9), sendo os ganhos dos controladores dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se que, para $t \geq 0$, a origem ($x(t) = 0$) é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (7), e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, ou seja, se $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$, todas as trajetórias de $x(t)$, $t \geq 0$ irão permanecer dentro deste conjunto.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática $V = x^T P x$ e a condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$. Assim, de (10) nota-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\beta V \Leftrightarrow \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \leq -2\beta x^T P x \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j x^T [(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j)] x + 2\beta x^T P x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j x^T [(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + 2\beta P] x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 x^T [(A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i) + 2\beta P] x \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1+i}^r 2\alpha_i \alpha_j x^T \left[\left(\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right)^T P \right. \\ &\quad \left. + P \left(\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right) + \frac{4\beta P}{2} \right] x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 x^T [A_i^T P + P A_i - K_i^T B_i^T P - P B_i K_i + 2\beta P] x \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1+i}^r \alpha_i \alpha_j x^T [P(A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i) \\ &\quad + (A_i^T - K_j^T B_i^T + A_j^T - K_i^T B_j^T) P + 4\beta P] x \leq 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Seja $P = X^{-1}$, $K_i = M_i X^{-1}$. Pré e pós multiplicando as equações (83) e (84) por P obtém-se:

$$A_i^T P + P A_i - K_i^T B_i^T P - P B_i K_i + 2\beta P < P Y_{ii} P, \quad (89)$$

$$\begin{aligned} &P(A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i) + \\ &+ (A_i^T - K_j^T B_i^T + A_j^T - K_i^T B_j^T) P + 4\beta P \leq P Y_{ij} P + P Y_{ij}^T P, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (90)$$

Substituindo (89) e (90) na expressão de $\dot{V} + 2\beta V$ obtida no final de (88), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{V} + 2\beta V &< \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 x^T [PY_{ii}P]x + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1+i}^r \alpha_i \alpha_j x^T [PY_{ij}P + PY_{ij}^T P]x \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \vdots \\ \alpha_r x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PY_{11}P & \cdots & PY_{1r}P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ PY_{r1}P & \cdots & PY_{rr}P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \vdots \\ \alpha_r x \end{bmatrix}, \quad Y_{ji} = Y_{ij}^T, \quad i \neq j. \quad (91)
\end{aligned}$$

Pré e pós multiplicando a equação (85) por $\text{diag}(P, \dots, P)$ obtém-se:

$$\begin{bmatrix} PY_{11}P & \cdots & PY_{1r}P \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ PY_{r1}P & \cdots & PY_{rr}P \end{bmatrix} < 0. \quad (92)$$

Usando a condição de (92) em (91), sendo $\alpha_i \geq 0$, então para $x \neq 0$, é equivalente a:

$$\dot{V} + 2\beta V < 0. \quad (93)$$

As equações (86) e (87) garantem que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$ e $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$, como provado nos Lemas 1 e 2, respectivamente. \square

O teorema a seguir é baseado de Souza et al. (2014a) e Buzetti (2017).

Observação 2. *Em sua forma original, o teorema não estabelecia novos critérios de estabilização mais relaxados, mas sim objetivava um método de projeto de controle chaveado para plantas não lineares incertas descritas por modelos fuzzy T-S, que pudessem ser aplicados de maneira satisfatória sem a necessidade de utilizar as funções de pertinência na lei de controle. Além disso, este método de projeto de controle (por não utilizar as funções de pertinência) poderia atuar mesmo quando a planta apresentasse parâmetros incertos e as funções de pertinência dependiam desses parâmetros.*

Neste trabalho, o teorema em questão é proposto, acrescentando os Lemas 1 e 2.

Teorema 3. *Seja o sistema não linear incerto, exatamente descrito por um modelo fuzzy T-S como em (7) em uma região de operação \mathcal{X} em (63), sendo $\phi \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ e $N \in \mathbb{R}^{n_\phi \times n_x}$ conhecidos, assim como as faixas de valores para seus parâmetros incertos. Seja $x(0)$ pertencente ao conjunto convexo definido em (71), em que $x_k(0)$, $k \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, são também conhecidos. Se existirem uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e uma taxa de decaimento $\beta > 0$, tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, $h \in \mathbb{K}_{n_\phi}$ e $k \in \mathbb{K}_{n_{x0}}$, as seguintes LMIs sejam factíveis:*

$$XA_i^T + A_i X + Z_i + Q_i + 2\beta X < 0, \quad (94)$$

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - Z_i - Q_j < 0, \quad (95)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_h X \\ X N_h^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (96)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k^T(0) \\ x_k(0) & X \end{bmatrix} \geq 0. \quad (97)$$

Então, com a lei de controle chaveada,

$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t); \quad \sigma(t) = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r}^* \{x^T \bar{Q}_j x\}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_r, \quad (98)$$

tem-se que, para $t \geq 0$, a origem ($x(t) = 0$) é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (7), e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, ou seja, se $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$, todas as trajetórias de $x(t)$, $t \geq 0$ irão permanecer dentro deste conjunto. Os ganhos do controlador são dados por $K_j = M_j X^{-1}$, $j \in \mathbb{K}_r$, sendo que $P = X^{-1}$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática $V = x^T P x$ e a condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$. Assim, de (7) e (98) nota-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\beta V \Leftrightarrow \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \leq -2\beta x^T P x \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [A_i^T P - K_\sigma^T B_i^T P + P A_i - P B_i K_\sigma] x \leq -2\beta x^T P x \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [A_i^T P + P A_i - P B_i K_\sigma - K_\sigma^T B_i^T P + 2\beta P] x \leq 0. \end{aligned} \quad (99)$$

Agora, suponha que existam matrizes simétricas $\bar{Z}_i, \bar{Q}_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que:

$$-(P B_i K_j + K_j^T B_i^T P) < \bar{Z}_i + \bar{Q}_j, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_r. \quad (100)$$

Então, multiplicando-se (100) por α_i , pré e pós multiplicando por x^T e x , tomando a somatória de $i = 1$ a $i = r$, e trocando o índice j por σ , tem-se:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [-P B_i K_\sigma - K_\sigma^T B_i^T P] x < \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [\bar{Z}_i + \bar{Q}_\sigma] x. \quad (101)$$

O mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual a toda combinação convexa dos elementos deste conjunto, e portanto, de (1) e (98), pode-se notar que:

$$x^T \bar{Q}_\sigma x = \min_{i \in \mathbb{K}_r} (x^T \bar{Q}_i x) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T \bar{Q}_i x. \quad (102)$$

Então, a equação (101) pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [-P B_i K_\sigma - K_\sigma^T B_i^T P] x < \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [\bar{Z}_i + \bar{Q}_\sigma] x \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [\bar{Z}_i + \bar{Q}_i] x. \quad (103)$$

Usando (103), supondo $x \neq 0$, note uma condição para o atendimento de (99) é a seguinte:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [A_i^T P + P A_i - P B_i K_\sigma - K_\sigma^T B_i^T P + 2\beta P] x \\ & < \sum_{i=1}^r \alpha_i x^T [A_i^T P + P A_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta P] x \leq 0. \end{aligned} \quad (104)$$

Lembrando que $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, para $x \neq 0$ tem-se:

$$A_i^T P + P A_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta P \leq 0. \quad (105)$$

Pré e pós multiplicando as equações (105) e (100) por X :

$$X A_i^T P X + X P A_i X + X \bar{Z}_i X + X \bar{Q}_i X + 2\beta X P X \leq 0, \quad (106)$$

$$-X P B_i K_j X - X K_j^T B_i^T P X - X \bar{Z}_i X - X \bar{Q}_j X < 0. \quad (107)$$

Agora, defina $X = P^{-1}$, $Z_i = X \bar{Z}_i X$, $Q_i = X \bar{Q}_i X$, $M_j = K_j X$. Logo, (106) e (107) se tornam:

$$X A_i^T + A_i X + Z_i + Q_i + 2\beta X \leq 0, \quad (108)$$

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - Z_i - Q_j < 0, \quad (109)$$

que são satisfeitas quando as condições (95) e (94) são atendidas. As equações (96) e (97) garantem que $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$ e $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(P, 1)$, como provado nos Lemas 1 e 2, respectivamente. \square

4.5 Restrição do Sinal de Controle

Pode-se restringir a entrada do sinal de controle, de forma indireta, limitando a norma dos ganhos do controlador.

Como proposto em Šiljak e Stipanović (2000), considere os ganhos do controlador dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{Z}_+^*$. Impondo restrições em M_i e X^{-1} , tem-se $M_i^T M_i < \eta I_{n_x}$, e $X^{-1} < \eta_W I_{n_x}$. Assim, dadas as constantes $\eta > 0$ e $\eta_W > 0$, uma restrição sobre os ganhos do controlador pode ser estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema 4 (Šiljak e Stipanović (2000)). *A restrição na norma dos ganhos do controlador tal que $K_i^T K_i < \eta \eta_W^2 I_{n_x}$, $i \in \mathbb{Z}_+^*$, é imposta, se existirem constantes $\eta > 0$ e $\eta_W > 0$, tais que as LMIs a seguir sejam factíveis.*

$$\begin{bmatrix} \eta_W I_{n_x} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & X \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \eta I_{n_x} & M_i^T \\ M_i & I_{n_u} \end{bmatrix} > 0. \quad (110)$$

Demonstração. Aplicando o complemento de Schur com respeito a segunda linha e segunda coluna de cada desigualdade em (110):

$$\eta_W I_{n_x} - I_{n_x} X^{-1} I_{n_x} > 0 \rightarrow X^{-1} < \eta_W I_{n_x}; \quad (111)$$

$$\eta I_{n_x} - M_i^T I_{n_u}^{-1} M_i > 0 \rightarrow M_i^T M_i < \eta I_{n_x}. \quad (112)$$

Seja $K_i = M_i X^{-1}$, logo:

$$K_i^T K_i = X^{-1} M_i^T M_i X^{-1}. \quad (113)$$

Substituindo (112) em (113), tem-se:

$$K_i^T K_i < X^{-1} \eta I_{n_x} X^{-1}. \quad (114)$$

Finalmente, substituindo (111) em (114), tem-se:

$$K_i^T K_i < \eta \eta_W^2 I_{n_x}, \quad (115)$$

e a demonstração está concluída. \square

Outra forma de restringir a entrada do sinal de controle, é utilizar o teorema a seguir.

Teorema 5 (Assunção et al. (2007), Buzetti (2017)). *Dada uma constante $\mu_0 > 0$, conhecida, então a especificação de limites da matriz de realimentação de estado K , pode ser descrita encontrando o valor mínimo de η , $\eta > 0$, tal que $K_i K_i^T < \eta I / \mu_0^2$, $i \in \mathbb{Z}_+^*$. O valor ótimo de η pode ser obtido solucionando o seguinte problema de otimização:*

$$\min(\eta) \quad \begin{bmatrix} \eta I & M_i \\ M_i^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad (116)$$

$$X > \mu_0 I, \quad (117)$$

sendo $M_i = K_i X$.

Demonstração. Aplicando o complemento de Schur com respeito à segunda linha e segunda coluna em (116):

$$\eta I - M_i (I)^{-1} M_i^T > 0 \rightarrow \eta I > M_i (I)^{-1} M_i^T \rightarrow M_i M_i^T < \eta I. \quad (118)$$

Dividindo (118) por μ_0 e fazendo $M_i = K_i X$:

$$\frac{M_i M_i^T}{\mu_0} < \frac{\eta I}{\mu_0} \rightarrow \frac{K_i X X K_i^T}{\mu_0} < \frac{\eta I}{\mu_0}. \quad (119)$$

Pré e pós multiplicando (117) por \sqrt{X} :

$$\sqrt{X}X\sqrt{X} > \sqrt{X}\mu_0I\sqrt{X} \rightarrow XX > \mu_0X \rightarrow \mu_0X < XX. \quad (120)$$

Pré e pós multiplicando (120) por K_i e K_i^T , respectivamente:

$$K_i\mu_0XK_i^T < K_iXXK_i^T \rightarrow K_iXK_i^T < \frac{K_iXXK_i^T}{\mu_0}. \quad (121)$$

Pré e pós multiplicando (117) por K_i e K_i^T , respectivamente:

$$K_iXK_i^T > K_i\mu_0IK_i^T \rightarrow K_i\mu_0IK_i^T < K_iXK_i^T. \quad (122)$$

De (119), (121) e (122) tem-se:

$$K_i\mu_0IK_i^T < K_iXK_i^T < \frac{K_iXXK_i^T}{\mu_0} < \frac{\eta I}{\mu_0}, \quad (123)$$

então,

$$K_i\mu_0IK_i^T < \frac{\eta I}{\mu_0} \rightarrow K_iK_i^T < \frac{\eta I}{\mu_0^2}, \quad (124)$$

e a demonstração está concluída. \square

Os Teoremas 4 ou 5 podem ser usados em conjunto com os Teoremas 1, 2, ou 3.

Os Teoremas 1 e 2, que oferecem condições de factibilidade melhores ou iguais às do Teorema 3, serão utilizados no projeto baseado em LMIs da nova lei de controle chaveada, apresentada no Capítulo 5. Estes Teoremas 1 e 2 consideram que as funções de pertinência do modelo fuzzy T-S da planta estão disponíveis para a implementação das leis de controle, que no caso não são chaveadas. O Teorema 3 descreve um procedimento de projeto para controladores chaveados, que tem sido utilizado com sucesso em várias situações descritas na literatura. O Teorema 3 não considera que as funções de pertinência do modelo fuzzy T-S da planta estão disponíveis para a implementação das leis de controle. As condições do Teorema 3 serão utilizadas para um estudo comparativo com a nova lei de controle descrita no Capítulo 5, objetivando mostrar as melhorias obtidas com a lei de controle proposta.

5 CONTROLADORES CHAVEADOS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS COM OTIMIZADOR NÃO DERIVATIVO

Neste capítulo é descrito o projeto de um sistema de controle chaveado com Otimizador Não Derivativo, abordado na Seção 2.4. Como exemplo, este projeto foi aplicado em um sistema pêndulo invertido, que foi modelado através de sistema fuzzy T-S contendo incertezas. Ainda, foram especificadas condições LMIs que delimitam a região de operação, bem como limites às normas dos controladores. Os procedimentos de projeto fornecem uma região na qual as condições iniciais devam estar, tal que, o sistema não linear seja exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S incerto durante toda a trajetória de estado do sistema e ainda que esta trajetória permaneça dentro de uma região de operação previamente especificada.

5.1 Controlador Chaveado com Otimizador Não Derivativo

Nesta seção é descrita a proposta de um controlador chaveado utilizando Otimizador Não Derivativo, já apresentado na Seção 2.4.

Seja $V(x) = x^T P x$, uma candidata a função de Lyapunov quadrática. Para que o sistema seja assintoticamente estável (é estável e as variáveis de estado do sistema convergem para a origem, $x(t) = 0$, ou seja, $V(x(\infty)) = V(0) = 0$), duas condições devem ser verificadas: $V(x) = x^T P x > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$. A primeira condição é satisfeita para $P = P^T > 0$. A segunda condição é analisada a seguir.

Seja a lei de controle, com base na equação (9), dada por:

$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t). \quad (125)$$

$\dot{V}(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}, \\ \dot{V}(x) &= (A(\alpha)x + B(\alpha)u)^T P x + x^T P (A(\alpha)x + B(\alpha)u) \\ &= x^T [P A(\alpha) + A(\alpha)^T P] x + 2x^T P B(\alpha)u. \end{aligned} \quad (126)$$

Da equação (126), nota-se que $\{2x^T P B(\alpha)u\} < 0$ contribuiria para que $\dot{V}(x(t)) < 0$, para $x(t) \neq 0$. Considerando esta condição e a lei de controle da equação (125), tem-se:

$$2x^T P B(\alpha)u < 0 \quad \leftrightarrow \quad 2x^T P B(\alpha)(-K_\sigma x(t)) < 0. \quad (127)$$

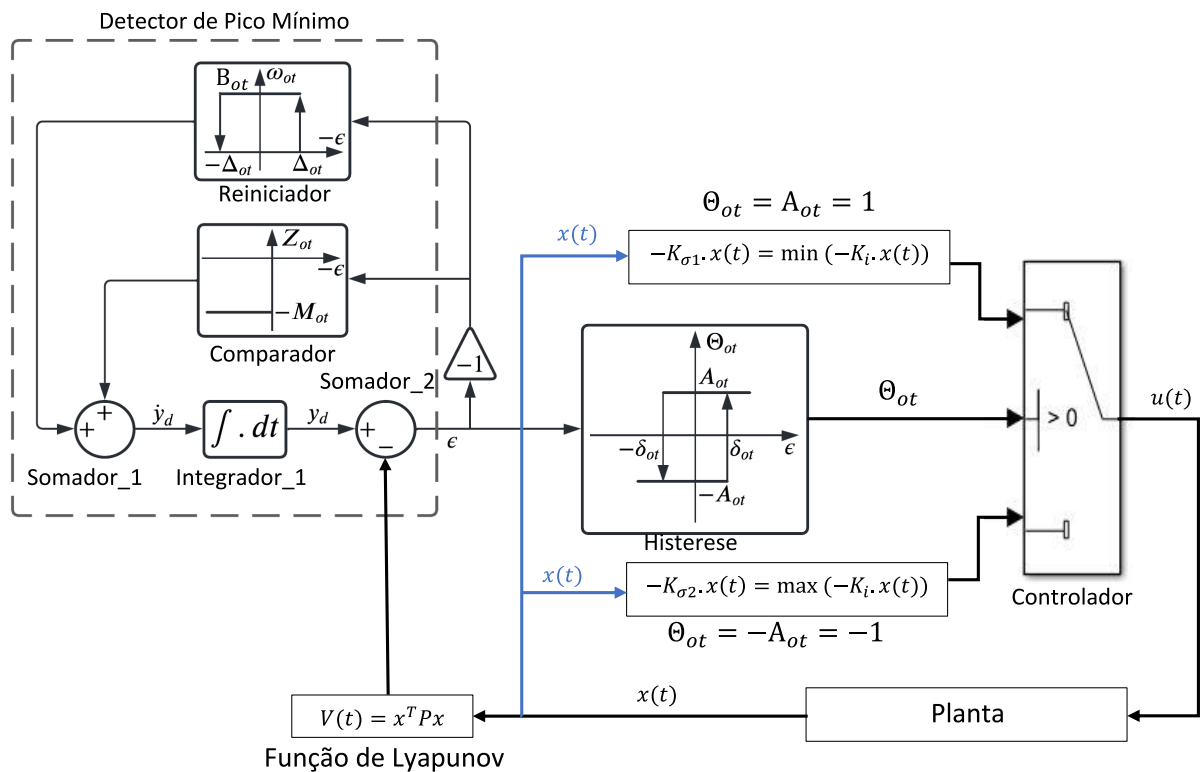
A princípio, a lei de chaveamento para a lei de controle (125), para satisfazer a equação (127), poderia ser definida como:

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* \left(-2x^T P B(\alpha) K_i x \right), \quad (128)$$

ou seja, $\sigma(t) \in \mathbb{K}_r$ assume o valor do índice “ i ”, de K_i , responsável pelo menor valor de “ $-2x^T PB(\alpha)K_i x$ ”. $\sigma(t)$ pode conter mais que um elemento. Assim, ao definir $\arg \min^*$ estabelece-se uma forma de selecionar apenas o menor deles.

Entretanto, $B(\alpha)$ pode conter incertezas, o que inviabiliza o uso e cálculo da equação (128). A proposta de aplicação do Otimizador Não Derivativo, descrito neste trabalho, visa obter uma lei de chaveamento que independa das incertezas e não linearidades apresentadas. Esta proposta é ilustrada na Figura 18.

Figura 18 – Controlador Chaveado com Otimizador Não Derivativo.



Fonte: do próprio autor.

De acordo com a Figura 18, o “Detector de Pico Mínimo” fornece o sinal de erro ϵ para o bloco “Histerese”, que tem como saída o sinal Θ_{ot} , que será a variável de decisão para o bloco “Controlador”. Este bloco, por sua vez, interliga uma de suas duas entradas à saída, $u(t)$, que se trata do sinal de controle. A seguir o sinal $u(t)$ entra no bloco “Planta”, que foi definida em (7) e neste estudo o vetor $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T$ satisfaz a condição (6), mas é considerado incerto, ou seja, não está disponível para a elaboração do lei de controle. Com o vetor de estado, $x(t)$, é possível calcular a função de Lyapunov $V(x)$, que é a função objetivo a ser minimizada, e finalmente esta função dá entrada no “Detector de Pico Mínimo”, fechando a realimentação do sistema. A seguir será detalhado o funcionamento de todo este sistema. Este detalhamento é baseado em Silva (2020).

Seja o sistema dinâmico, com base na equação (7), dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t). \quad (129)$$

Considerando a lei de controle dada pela equação (125), observe que $u_\sigma(t)$ é um escalar que pode assumir valores positivos, negativos, ou nulo. Essa informação será relevante mais adiante.

Para todo $x(t)$ e $B(\alpha)$ existem $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{K}_r$ tais que:

$$\begin{aligned} 2x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_1}x) &\leq 2x^T PB(\alpha)(-K_i x), \quad \forall i \in \mathbb{K}_r, \\ 2x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_2}x) &\geq 2x^T PB(\alpha)(-K_j x), \quad \forall j \in \mathbb{K}_r. \end{aligned} \quad (130)$$

Com base nas equações (127) e (130), considerando que a planta tem apenas uma entrada ($n_u = 1$) o que implica que “ $-K_\sigma x$ ” é um escalar, define-se então a lei de chaveamento para os casos:

- **Caso (i):**

Se: $2x^T PB(\alpha) > 0$, o ideal seria $(-K_\sigma x) < 0$,

Então: $K_\sigma = K_{\sigma_1}$, $\sigma_1 = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* (-K_i x)$,

Logo: $2x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_1}x) \leq 2x^T PB(\alpha)(-K_i x)$,

para todo $i \in \mathbb{K}_r$. (131)

- **Caso (ii):**

Se: $2x^T PB(\alpha) < 0$, o ideal seria $(-K_\sigma x) > 0$,

Então: $K_\sigma = K_{\sigma_2}$, $\sigma_2 = \arg \max_{i \in \mathbb{K}_r}^* (-K_i x)$,

Logo: $2x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_2}x) \leq 2x^T PB(\alpha)(-K_i x)$,

para todo $i \in \mathbb{K}_r$. (132)

Observação 3. Neste caso, como $2x^T PB(\alpha) < 0$, então $2x^T PB(\alpha)(-K_{\sigma_2}x) = 2x^T PB(\alpha) \max(-K_i x) \leq 2x^T PB(\alpha)(-K_i x)$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$.

- **Caso (iii):**

Se: $x^T PB(\alpha) = 0$,

Então: O controlador mantém o ganho anterior. (133)

Portanto, a lei de chaveamento (131)-(133) busca escolher entre dois valores de $\sigma \in \mathbb{K}_\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ para minimizar a derivada da função de Lyapunov, levando o sistema para a sua condição de equilíbrio.

Em resumo, o sinal de controle $u(t)$ poderá ser de duas formas:

$$-K_{\sigma_1}x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r}(-K_i x(t)), \quad (134)$$

$$-K_{\sigma_2}x(t) = \max_{i \in \mathbb{K}_r}(-K_i x(t)). \quad (135)$$

De volta à Figura 18, é possível verificar no bloco “Controlador” a aplicação das equações (134) e (135). A saída do bloco “Histerese” é representada pelo sinal Θ_{ot} , e adotando-se $A_{ot} = 1$, poderá assumir os valores $+1$ ou -1 . Desta forma, é possível associar a lógica de escolha do ganho do controlador como sendo:

$$\text{Se: } \Theta_{ot} = 1, \quad \text{então } u = -K_{\sigma_1}x(t); \quad (136)$$

$$\text{Se: } \Theta_{ot} = -1, \quad \text{então } u = -K_{\sigma_2}x(t). \quad (137)$$

Assim, o otimizador trabalha para minimizar a função de Lyapunov ($V(x)$), ou seja, retorna o menor valor da derivada temporal da função quadrática de Lyapunov, ao passo que gera o sinal de controle utilizado, após decidir por um subsistema σ_{min} ou σ_{max} , sendo $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{K}_r$. Nota-se aqui as características de controle via busca extremal para o processo de caracterização da estabilidade do sistema, já que o esforço de escolha entre r ganhos (n_s não linearidades) para o controlador, é reduzido para apenas 2 ganhos, sendo tais os valores mínimo e máximo de $K_i x(t)$. Com escolha conveniente de σ_1 e σ_2 pelo otimizador tem-se $\dot{V}(x(t)) < 0$, para $x(t) \neq 0$. Assim, pode-se usar os teoremas do Capítulo 4 para projetar os ganhos $K_i, i \in \mathbb{K}_r$.

Considerando que os parâmetros do otimizador foram especificados corretamente, de acordo com a análise realizada em (126)-(137) e a Figura 18, o otimizador selecionará o ganho K_σ igual a K_{σ_1} ou K_{σ_2} definidos em (134) e (135), de modo que σ atenda (128), procurando minimizar a função de Lyapunov $V(x)$. Quando (128) é satisfeita, tem-se que $-2x^T P B(\alpha) K_\sigma x \leq -2x^T P B(\alpha) (\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \dots + \alpha_r K_r) x$. Assim, de (126) tem-se que $\dot{V}(x) \leq x^T [P(A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha)) + (A(\alpha) - B(\alpha)K(\alpha))^T P]x$. Logo, pode-se utilizar os teoremas apresentados no Capítulo 4 para projetar os ganhos $K_i, i \in \mathbb{K}_r$, de modo que quando (128) é atendida, então $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. Como foi observado na Seção 2.4, que apresentou as características do otimizador, o sistema realimentado apresenta um comportamento “ultimate bounded” (quando as variáveis de estado do sistema não convergem necessariamente para origem do sistema, $x(t) = 0$, e sim para uma região limitada em torno desta origem). Como podemos fazer esta região próxima da origem tão pequena quanto desejamos, especificando adequadamente os parâmetros δ_{ot} e $\Delta_{ot} \geq 2\delta_{ot}$ do otimizador, este fato normalmente não acarretará problemas em aplicações práticas.

5.1.1 Prova Matemática do Funcionamento da Configuração de Controle Proposta

A ideia do sistema de controle descrito na Figura 18, foi aplicar o Otimizador Não Derivativo originalmente proposto como descrito na Figura 5, para levar o sistema para uma vizinhança do mínimo da função de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, $P = P^T > 0$, que é único, igual a 0 e ocorre para $x = 0$.

No sistema da Figura 5, quando $y = f(x)$ tem apenas um mínimo, então para $\Theta_{ot} = A_{ot}$ ou $-A_{ot}$ foi demonstrado que $y = f(x)$ se aproxima deste mínimo quando não está nele. Analogamente, no caso da configuração da Figura 18, a escolha de $\Theta_{ot} = \min(-K_i x)$ ou $\max(-K_i x)$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, faz com que $\dot{y} = \dot{V}(x)$ seja negativa, quando $x \neq 0$. Logo, $V(x)$ se aproxima de 0 e assim, x se aproxima de 0.

Tendo em vista o exposto acima, do estudo apresentado sobre o Otimizador Não Derivativo na Seção 2.4, para a configuração da Figura 18, no regime $y = V(x)$ vai convergir para uma região próxima de $x = 0$, que pode ser alterada de acordo com a escolha dos parâmetros δ_{ot} e Δ_{ot} , de modo que a amplitude do ripple de saída do sinal $y = V(x)$ possa ser feita tão pequena quanto desejado, desde que se aumente o esforço do controlador (OLIVEIRA; PEIXOTO; HSU, 2012; SPELTA, 2017).

Na próxima seção são apresentados detalhes técnicos desta estratégia de controle, incluindo a especificação dos parâmetros do otimizador.

5.1.2 Escolha de parâmetros do Otimizador Não Derivativo

Observando a Figura 18, notamos que o objetivo é levar o sistema para o mínimo da função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, sendo que $P = P^T > 0$, que corresponde ao ponto $x = 0$. Comparando com a situação tratada na descrição do otimizador (Seção 2.4), Figura 5, então $y(t) = V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$. Logo, de (7) e (40), note que:

$$\left| \frac{d}{dt} y(t) \right| = \left| 2x(t)^T P \dot{x}(t) \right| = \left| 2x(t)^T P [A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t)] \right| < M_{ot}. \quad (138)$$

Agora, as leis de controle $u(t)$ estudadas são dadas por (98) ou (128).

Então, de (138) tem-se para $u(t) = -K_\sigma x(t)$ que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} y(t) \right| &= \left| 2x(t)^T P \dot{x}(t) \right| = \left| 2x(t)^T P [A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K_\sigma x(t)] \right| = \\ &= \left| x(t)^T \{ P[A(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma] + [A(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma]^T P \} x(t) \right| < x(t)^T x(t) s, \end{aligned} \quad (139)$$

sendo $s > 0$ tal que as LMIs abaixo são atendidas para todo vetor α admissível:

$$P[A(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma] + [A(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma]^T P < sI \quad (140)$$

e

$$P[A(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma] + [A(\alpha) - B(\alpha)K_\sigma]^T P > -sI, \quad (141)$$

em que I a matriz identidade $n_x \times n_x$, sendo que P é também $n_x \times n_x$.

As LMIs (140) e (141) podem ser resolvidas após a obtenção de P e K_σ , e são equivalentes ao seguinte problema (acrescentando a conveniente minimização de s):

$$\begin{aligned} \min(s) \\ s > 0, \end{aligned} \quad (142)$$

$$P[A_i - B_i K_\sigma] + [A_i - B_i K_\sigma]^T P < sI, \quad (143)$$

$$P[A_i - B_i K_\sigma] + [A_i - B_i K_\sigma]^T P > -sI, \quad (144)$$

para todo i e σ pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$.

Agora, uma análise pode ser feita com base na expressão $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ e a condição de que $V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \leq V(x(0)) = x(0)^T P x(0) + \delta_{ot}$, para $t > 0$. Ou seja, levando-se em conta que, pela Figura 7, o otimizador corretamente projetado assegura que $y(t) = V(x(t)) \leq V(x(0)) + \delta_{ot}$ para $t \geq 0$. Neste caso, obtemos a seguinte condição:

$$x(t)^T x(t) \leq \frac{x(0)^T P x(0) + \delta_{ot}}{\lambda}, \quad (145)$$

sendo que $\lambda > 0$ é o menor autovalor da matriz P . Esta condição, juntamente com as condições (139)-(141), permite obter de (139) que:

$$\left| \frac{d}{dt} y(t) \right| < x(t)^T x(t) s \leq \frac{s(x(0)^T P x(0) + \delta_{ot})}{\lambda} < M_{ot}, \quad (146)$$

para $t \geq 0$, e assim,

$$M_{ot} > \frac{s(x(0)^T P x(0) + \delta_{ot})}{\lambda}. \quad (147)$$

Logo, podemos agora especificar M_{ot} .

Obtendo M_{ot} , pode-se especificar B_{ot} satisfazendo $B_{ot} > 2M_{ot}$.

Quanto menores forem os parâmetros δ_{ot} e $\Delta_{ot} \geq 2\delta_{ot}$, mais próxima da origem será a região em que o vetor de estado do sistema ficará confinado no regime, pois no regime $y = V$ oscilará (aproximadamente) em torno de 0, com o valor máximo igual a $2\Delta_{ot}$ (veja a Figura 7).

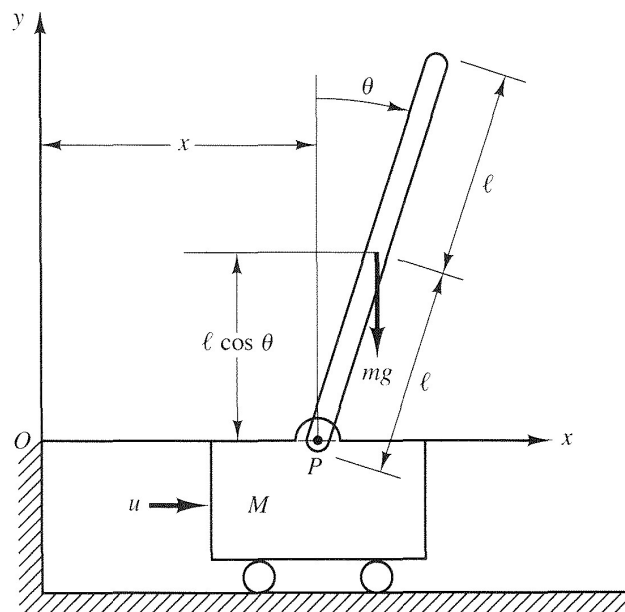
5.2 Pêndulo Invertido - Representação do Sistema Dinâmico no Espaço de Estados

O problema do pêndulo invertido, apesar de se tratar de um sistema mecânico bastante simples, representa várias situações práticas que podem ser analisadas a partir dos conceitos envolvidos em seu estudo. Por exemplo, modelos biomecânicos do modo de caminhar dos seres humanos, possibilitando aplicações em áreas como próteses e braços robóticos, uma vez que a posição ereta e estável de uma pessoa ao caminhar se aproxima muito do pêndulo invertido. Além disso, o conceito de pêndulo invertido móvel pode ser utilizado em: foguetes para manter a direção durante seu lançamento; veículos de transporte humano; e estudos de robôs autônomos (VENDRAMINI; SILVA, 2010; OGATA, 2003).

O sistema do pêndulo invertido possui características dinâmicas intrinsecamente instáveis, o que possibilita o estudo de diversas arquiteturas e tipos de controladores, servindo assim, de sistema alvo para que tais técnicas possam ser colocadas à prova.

Um pêndulo invertido montado sobre um suporte móvel acionado a motor é mostrado na Figura 19. O objetivo do controle é manter o pêndulo na posição vertical e a posição x , por exemplo, em 0. Esta posição é considerada instável pelo fato de que ele tende a se afastar desta posição, para um lado ou para o outro, a menos que seja aplicada uma força de controle adequada. Considera-se aqui somente o problema a duas dimensões, em que o movimento do pêndulo fica restrito ao plano da página. A força de controle u é aplicada ao suporte móvel (OGATA, 2003).

Figura 19 – Sistema Pêndulo Invertido.



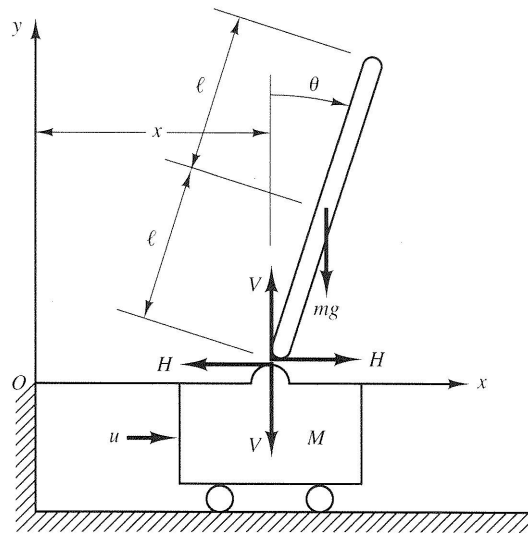
Fonte: Ogata (2003).

Seja m a massa da haste do pêndulo, M a massa do suporte móvel (carrinho), $2l$ o comprimento total da haste, θ o ângulo da haste com a vertical, g a aceleração da gravidade. Admite-se que o centro de gravidade da haste do pêndulo está em seu centro geométrico (x_G, y_G) . Então:

$$\begin{cases} x_G = x + l \sin(\theta) \\ y_G = l \cos(\theta). \end{cases} \quad (148)$$

Para deduzir as equações de movimento do sistema, será considerado o diagrama de corpo livre da Figura 20.

Figura 20 – Diagrama de corpo livre do pêndulo invertido.



Fonte: Ogata (2003)

A equação que descreve o movimento de rotação da haste com relação ao seu centro de gravidade pode ser obtida com a aplicação da segunda lei de Newton na forma rotacional. Somando os valores dos momentos com relação ao centro de gravidade da haste, obtém-se (TEIXEIRA; ŽAK, 1999):

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = V l \sin(\theta) - H l \cos(\theta), \quad (149)$$

sendo J o momento de inércia da haste em relação a seu centro de gravidade, dado por:

$$J = \int r^2 dm = \int_{-l}^l r^2 \frac{m}{2l} dr = \frac{m}{2l} \int_{-l}^l r^2 dr = \frac{ml^2}{3}. \quad (150)$$

O movimento horizontal e vertical do centro de gravidade da haste do pêndulo são dados respectivamente por:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin(\theta)) = H \Leftrightarrow m (\ddot{x} + l (-\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \ddot{\theta} \cos(\theta))) = H, \quad (151)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos(\theta)) = V - mg \Leftrightarrow ml(-\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - \ddot{\theta} \sin(\theta)) = V - mg. \quad (152)$$

O movimento do suporte móvel (carrinho) pode ser expresso por:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H - f_c \Leftrightarrow H = u - f_c - M\ddot{x}, \quad (153)$$

sendo f_c a força de atrito entre as rodas do conjunto e a superfície, dada por:

$$f_c = \mu_c \text{sign}(\dot{x}). \quad (154)$$

Substituindo (153) em (151):

$$m\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) + f_c = u - M\ddot{x}. \quad (155)$$

Substituindo (152) e (153) em (149):

$$J\ddot{\theta} = (-ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \sin(\theta) + mg)l \sin(\theta) - (-f_c + u - M\ddot{x})l \cos(\theta). \quad (156)$$

Então, substituindo (155) em (156):

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= (-ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - ml\ddot{\theta} \sin(\theta) + mg)l \sin(\theta) + \\ &\quad - (-f_c + m\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) + f_c)l \cos(\theta) \Leftrightarrow \\ J\ddot{\theta} &= -ml^2\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - ml^2\ddot{\theta} \sin^2(\theta) + mgl \sin(\theta) + \\ &\quad + f_c l \cos(\theta) - m\ddot{x} l \cos(\theta) + ml^2\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - ml^2\ddot{\theta} \cos^2(\theta) - f_c l \cos(\theta) \Leftrightarrow \\ J\ddot{\theta} &= -ml^2\ddot{\theta} \sin^2(\theta) + mgl \sin(\theta) - m\ddot{x} l \cos(\theta) - ml^2\ddot{\theta} \cos^2(\theta) \Leftrightarrow \\ J\ddot{\theta} &= mgl \sin(\theta) - m\ddot{x} l \cos(\theta) - ml^2\ddot{\theta}. \end{aligned} \quad (157)$$

Seja $a = \frac{1}{m+M}$, logo (155) pode ser representada por:

$$\ddot{x} = a(u - f_c) - aml\ddot{\theta} \cos(\theta) + aml\dot{\theta}^2 \sin(\theta). \quad (158)$$

Finalmente, substituindo (150) e (158) em (157):

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} &= mgl \sin(\theta) - m(au - af_c - aml\ddot{\theta} \cos(\theta) + aml\dot{\theta}^2 \sin(\theta))l \cos(\theta) - ml^2\ddot{\theta} \Leftrightarrow \\ \ddot{\theta} \left(\frac{ml^2}{3} + ml^2 - am^2 l^2 \cos^2(\theta) \right) &= mgl \sin(\theta) - m(au - af_c + aml\dot{\theta}^2 \sin(\theta))l \cos(\theta) \Leftrightarrow \\ \ddot{\theta} \left(\frac{4ml^2}{3} - am^2 l^2 \cos^2(\theta) \right) &= mgl \sin(\theta) - aml \cos(\theta)(u - f_c) - am^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \Leftrightarrow \\ \ddot{\theta} &= \frac{mgl \sin(\theta) - aml \cos(\theta)(u - f_c) - am^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\frac{4ml^2}{3} - am^2 l^2 \cos^2(\theta)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g\text{sen}(\theta) - a \cos(\theta)(u - f_c) - aml\dot{\theta}^2\text{sen}(2\theta)/2}{\frac{4l}{3} - aml \cos^2(\theta)}. \quad (159)$$

Substituindo (159) em (158):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a(u - f_c) - aml \cos(\theta) \left(\frac{g\text{sen}(\theta) - a \cos(\theta)(u - f_c) - aml\dot{\theta}^2\text{sen}(2\theta)/2}{\frac{4l}{3} - aml \cos^2(\theta)} \right) + \\ &+ aml\dot{\theta}^2\text{sen}(\theta) \Leftrightarrow \\ \ddot{x} &= \frac{-amg\text{sen}(2\theta)/2 + \frac{4}{3}aml\dot{\theta}^2\text{sen}(\theta) + \frac{4}{3}a(u - f_c)}{4/3 - am \cos^2(\theta)}. \end{aligned} \quad (160)$$

Seja a definição das variáveis de estado: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$, e $x_4 = \dot{x}$. Então, combinando (158) e (159), obtém-se a representação em espaço de estados do sistema pêndulo invertido:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g\text{sen}(x_1) - a \cos(x_1)(u - f_c) - amlx_2^2\text{sen}(2x_1)/2}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{-amg\text{sen}(2x_1)/2 + \frac{4}{3}amlx_2^2\text{sen}(x_1) + \frac{4}{3}a(u - f_c)}{4/3 - am \cos^2(x_1)} \end{bmatrix}. \quad (161)$$

Ou ainda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g\text{sen}(x_1) - amlx_2^2\text{sen}(2x_1)/2}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{-amg\text{sen}(2x_1)/2 + \frac{4}{3}amlx_2^2\text{sen}(x_1)}{4/3 - am \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{4/3 - am \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} (u - f_c). \quad (162)$$

Representando (162) em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g\text{sen}(x_1)}{x_1(4l/3 - aml \cos^2(x_1))} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-amg\text{sen}(2x_1)}{2x_1(4/3 - am \cos^2(x_1))} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a \cos(x_1)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)} \\ 0 \\ \frac{4a/3}{4/3 - am \cos^2(x_1)} \end{bmatrix} (u - f_c + mlx_2^2\text{sen}(x_1)). \end{aligned} \quad (163)$$

5.3 Pêndulo Invertido - Modelo Fuzzy T-S

O sistema Fuzzy T-S generalizado, do pêndulo invertido, pode ser construído a partir da equação (163). De acordo com o procedimento da Seção 2.2, são apresentadas as funções $f_{ij}(\tilde{x}(t))$ e $g_{ik}(\tilde{x}(t))$, que contém as não linearidades do sistema:

$$f_{21}(\tilde{x}(t)) = \frac{g\text{sen}(x_1)}{x_1(4l/3 - aml \cos^2(x_1))}, \quad (164)$$

$$f_{41}(\tilde{x}(t)) = \frac{-amg\text{sen}(2x_1)}{2x_1(4/3 - am \cos^2(x_1))}, \quad (165)$$

$$g_{21}(\tilde{x}(t)) = \frac{-a \cos(x_1)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1)}, \quad (166)$$

$$g_{41}(\tilde{x}(t)) = \frac{4a/3}{4/3 - am \cos^2(x_1)}. \quad (167)$$

Então, note que (163) pode ser reescrito na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_{21}(\tilde{x}(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{41}(\tilde{x}(t)) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21}(\tilde{x}(t)) \\ 0 \\ g_{41}(\tilde{x}(t)) \end{bmatrix} (u - f_c + mlx_2^2\text{sen}(x_1)). \quad (168)$$

Neste caso, como existem quatro não linearidades no sistema ($n_s = 4$), serão necessários dezesseis modelos locais ($r = 2^4 = 16$).

Primeiro, é necessário estabelecer o domínio durante a operação. Para isso, considerou-se que o ângulo da haste pode assumir qualquer valor no intervalo $-\frac{60\pi}{180} \leq x_1 \leq \frac{60\pi}{180}$, e a massa do carrinho, embora incerta, pertença ao intervalo $5 \leq M \leq 10$. Então, o domínio do sistema (168), denotado por D_1 , é dado por:

$$D_1 = \{\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{60\pi}{180} \leq x_1 \leq \frac{60\pi}{180}, \quad 5 \leq M \leq 10\}. \quad (169)$$

Observação 4. Não foram definidos intervalos para x_2 , x_3 , e x_4 porque estas variáveis não influenciam na determinação dos modelos locais.

Observação 5. Para $x_1 \leq -\frac{\pi}{2}$ ou $x_1 \geq \frac{\pi}{2}$ o sistema se torna não controlável.

A Tabela 6 mostra os valores dos parâmetros considerados para o sistema. Esses valores são baseados em Ogata (2003), Machado (2003), Ribeiro (2006), Vendramini e Silva (2010), Oliveira (2017), Silva (2020).

Tabela 6 – Parâmetros do sistema pêndulo invertido.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa do carrinho (kg)	M	$5 \leq M \leq 10$
Massa da haste (kg)	m	1, 5
Comprimento total da haste (m)	$2l$	0, 9
Aceleração da gravidade (m/s^2)	g	9, 81

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Feitos os cálculos, foram obtidos os seguintes valores máximos e mínimos para as funções $f_{21}(\tilde{x}(t))$, $f_{41}(\tilde{x}(t))$, $g_{21}(\tilde{x}(t))$, e $g_{41}(\tilde{x}(t))$:

$$\begin{aligned}
 a_{21_1} &= \max_{\tilde{x}(t) \in D_1} \{f_{21}(\tilde{x}(t))\} = 19,7721, & a_{21_2} &= \min_{\tilde{x}(t) \in D_1} \{f_{21}(\tilde{x}(t))\} = 13,8603, \\
 a_{41_1} &= \max_{\tilde{x}(t) \in D_1} \{f_{41}(\tilde{x}(t))\} = -0,4068, & a_{41_2} &= \min_{\tilde{x}(t) \in D_1} \{f_{41}(\tilde{x}(t))\} = -2,0533, \\
 b_{21_1} &= \max_{\tilde{x}(t) \in D_1} \{g_{21}(\tilde{x}(t))\} = -0,0743, & b_{21_2} &= \min_{\tilde{x}(t) \in D_1} \{g_{21}(\tilde{x}(t))\} = -0,3101, \\
 b_{41_1} &= \max_{\tilde{x}(t) \in D_1} \{g_{41}(\tilde{x}(t))\} = 0,1860, & b_{41_2} &= \min_{\tilde{x}(t) \in D_1} \{g_{41}(\tilde{x}(t))\} = 0,0891.
 \end{aligned} \tag{170}$$

Assim, a função não linear $f_{21}(\tilde{x}(t))$ pode ser representada por um modelo fuzzy Takagi-Sugeno, considerando que existe uma combinação convexa com as funções de pertinência $\sigma_{21_1}(\tilde{x})$ e $\sigma_{21_2}(\tilde{x})$ e valores constantes a_{21_1} e a_{21_2} dados em (170) tais que (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM, 2012; SOUZA, 2013; SILVA, 2020):

$$f_{21}(\tilde{x}) = \sigma_{21_1}(\tilde{x})a_{21_1} + \sigma_{21_2}(\tilde{x})a_{21_2}, \tag{171}$$

com

$$0 \leq \sigma_{21_1}(\tilde{x}), \sigma_{21_2}(\tilde{x}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sigma_{21_1}(\tilde{x}) + \sigma_{21_2}(\tilde{x}) = 1. \tag{172}$$

Portanto, de (171) e (172) segue que

$$\sigma_{21_1}(\tilde{x}) = \frac{f_{21}(\tilde{x}) - a_{21_2}}{a_{21_1} - a_{21_2}} \quad \text{e} \quad \sigma_{21_2}(\tilde{x}) = 1 - \sigma_{21_1}(\tilde{x}).$$

Analogamente, para $f_{41}(\tilde{x}(t))$:

$$f_{41}(\tilde{x}) = \sigma_{41_1}(\tilde{x})a_{41_1} + \sigma_{41_2}(\tilde{x})a_{41_2}, \tag{173}$$

com

$$0 \leq \sigma_{41_1}(\tilde{x}), \sigma_{41_2}(\tilde{x}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sigma_{41_1}(\tilde{x}) + \sigma_{41_2}(\tilde{x}) = 1. \tag{174}$$

Portanto, de (173) e (174) segue que

$$\sigma_{41_1}(\tilde{x}) = \frac{f_{41}(\tilde{x}) - a_{41_2}}{a_{41_1} - a_{41_2}} \quad \text{e} \quad \sigma_{41_2}(\tilde{x}) = 1 - \sigma_{41_1}(\tilde{x}).$$

De (170), existem $\xi_{21_1}(\tilde{x})$ e $\xi_{21_2}(\tilde{x})$ tais que

$$g_{21}(\tilde{x}) = \xi_{21_1}(\tilde{x})b_{21_1} + \xi_{21_2}(\tilde{x})b_{21_2}, \quad (175)$$

com

$$0 \leq \xi_{21_1}(\tilde{x}), \xi_{21_2}(\tilde{x}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \xi_{21_1}(\tilde{x}) + \xi_{21_2}(\tilde{x}) = 1. \quad (176)$$

Logo, de (175) e (176) segue que

$$\xi_{21_1}(\tilde{x}) = \frac{g_{21}(\tilde{x}) - b_{21_2}}{b_{21_1} - b_{21_2}} \quad \text{e} \quad \xi_{21_2}(\tilde{x}) = 1 - \xi_{21_1}(\tilde{x}).$$

Analogamente, para $g_{41}(\tilde{x}(t))$:

$$g_{41}(\tilde{x}) = \xi_{41_1}(\tilde{x})b_{41_1} + \xi_{41_2}(\tilde{x})b_{41_2}, \quad (177)$$

com

$$0 \leq \xi_{41_1}(\tilde{x}), \xi_{41_2}(\tilde{x}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \xi_{41_1}(\tilde{x}) + \xi_{41_2}(\tilde{x}) = 1. \quad (178)$$

Logo, de (177) e (178) segue que

$$\xi_{41_1}(\tilde{x}) = \frac{g_{41}(\tilde{x}) - b_{41_2}}{b_{41_1} - b_{41_2}} \quad \text{e} \quad \xi_{41_2}(\tilde{x}) = 1 - \xi_{41_1}(\tilde{x}).$$

Lembrando que $\sigma_{21_1}(\tilde{x}) + \sigma_{21_2}(\tilde{x}) = 1$, $\sigma_{41_1}(\tilde{x}) + \sigma_{41_2}(\tilde{x}) = 1$, $\xi_{21_1}(\tilde{x}) + \xi_{21_2}(\tilde{x}) = 1$, e $\xi_{41_1}(\tilde{x}) + \xi_{41_2}(\tilde{x}) = 1$, a equação (171) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} f_{21}(\tilde{x}) &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})a_{21_1} + \sigma_{21_2}(\tilde{x})a_{21_2} \\ &= (\sigma_{41_1}(\tilde{x}) + \sigma_{41_2}(\tilde{x}))(\xi_{21_1}(\tilde{x}) + \xi_{21_2}(\tilde{x}))(\xi_{41_1}(\tilde{x}) + \xi_{41_2}(\tilde{x}))(\sigma_{21_1}(\tilde{x})a_{21_1} + \sigma_{21_2}(\tilde{x})a_{21_2}) \\ &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x})a_{21_1} + \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x})a_{21_1} \\ &\quad + \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x})a_{21_1} + \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x})a_{21_1} \\ &\quad + \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x})a_{21_1} + \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x})a_{21_1} \\ &\quad + \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x})a_{21_1} + \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x})a_{21_1} \\ &\quad + \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x})a_{21_2} + \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x})a_{21_2} \\ &\quad + \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x})a_{21_2} + \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x})a_{21_2} \\ &\quad + \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x})a_{21_2} + \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x})a_{21_2} \\ &\quad + \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x})a_{21_2} + \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x})a_{21_2}. \end{aligned} \quad (179)$$

Então, as funções de pertinência do sistema (164)-(168) podem ser assim definidas:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x}), \\ \alpha_2 &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x}), \\
 \alpha_4 &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x}), \\
 \alpha_5 &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x}), \\
 \alpha_6 &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x}), \\
 \alpha_7 &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x}), \\
 \alpha_8 &= \sigma_{21_1}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x}), \\
 \alpha_9 &= \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x}), \\
 \alpha_{10} &= \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x}), \\
 \alpha_{11} &= \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x}), \\
 \alpha_{12} &= \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_1}(\tilde{x}), \\
 \alpha_{13} &= \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x}), \\
 \alpha_{14} &= \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_1}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x}), \\
 \alpha_{15} &= \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_1}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x}), \\
 \alpha_{16} &= \sigma_{21_2}(\tilde{x})\sigma_{41_2}(\tilde{x})\xi_{21_2}(\tilde{x})\xi_{41_2}(\tilde{x}).
 \end{aligned} \tag{180}$$

O mesmo procedimento usado na equação (179) pode ser aplicado para as funções $f_{41}(\tilde{x}(t))$, $g_{21}(\tilde{x}(t))$, e $g_{41}(\tilde{x}(t))$, obtendo-se as mesmas funções de pertinência de (180).

Finalmente, os modelos locais para o sistema (168), são:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_2 = A_3 = A_4, & A_5 &= A_6 = A_7 = A_8, \\
 A_9 &= A_{10} = A_{11} = A_{12}, & A_{13} &= A_{14} = A_{15} = A_{16},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_9 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{181}$$

$$\begin{aligned} B_1 = B_5 = B_9 = B_{13}, & \quad B_2 = B_6 = B_{10} = B_{14}, \\ B_3 = B_7 = B_{11} = B_{15}, & \quad B_4 = B_8 = B_{12} = B_{16}, \end{aligned}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_{21_1} & 0 & b_{41_1} \end{bmatrix}^T, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_{21_1} & 0 & b_{41_2} \end{bmatrix}^T, \quad (182)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & b_{21_2} & 0 & b_{41_1} \end{bmatrix}^T, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & b_{21_2} & 0 & b_{41_2} \end{bmatrix}^T.$$

Substituindo os resultados de (170) em (181) e (182), tem-se que as matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ pertencem aos seguintes polítopos de vértices:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = A_3 = A_4, & \quad A_5 = A_6 = A_7 = A_8, \\ A_9 = A_{10} = A_{11} = A_{12}, & \quad A_{13} = A_{14} = A_{15} = A_{16}, \end{aligned}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19,7721 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4068 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19,7721 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2,0533 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (183)$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13,8603 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4068 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13,8603 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2,0533 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} B_1 = B_5 = B_9 = B_{13}, & \quad B_2 = B_6 = B_{10} = B_{14}, \\ B_3 = B_7 = B_{11} = B_{15}, & \quad B_4 = B_8 = B_{12} = B_{16}, \end{aligned}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,0743 & 0 & 0,1860 \end{bmatrix}^T, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,0743 & 0 & 0,0891 \end{bmatrix}^T, \quad (184)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0,3101 & 0 & 0,1860 \end{bmatrix}^T, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0,3101 & 0 & 0,0891 \end{bmatrix}^T.$$

5.4 Pêndulo Invertido - Simulações

Para as simulações do sistema dinâmico do pêndulo invertido, foi aplicado o controlador chaveado utilizando Otimizador Não Derivativo, conforme descrito na Seção 5.1. É então necessário projetar os ganhos K_i . Para tanto, foram utilizados os teoremas do Capítulo 4, garantindo assim, estabilidade, operação limitada a uma região de operação, conjunto de condições iniciais, e restrição na norma dos ganhos do controlador.

A princípio foi determinada a região de operação e a região de condições iniciais do sistema. Depois foi determinada a região de factibilidade, e a partir desta, é escolhido um ponto determinado por β e η , de um dos teoremas testados, e então os ganhos do controlador são determinados, assim como os parâmetros do Otimizador não Derivativo, e finalmente o sistema é simulado.

Foram determinadas duas regiões de factibilidade: uma para β pequeno, o que resulta em um tempo de estabelecimento maior, porém com baixo ganho; e outra região para β grande, o que resulta em um tempo de estabelecimento menor, porém com alto ganho.

Para o pêndulo invertido, a região de operação \mathcal{X} , na qual o modelo fuzzy T-S (7) é válido, é dada em (63), sendo $n_\phi = 4$, e logo $h \in \mathbb{K}_4$, com:

$$\phi_1 = \frac{60\pi}{180} \quad ; \quad \phi_3 = 6100, \quad (185)$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (186)$$

Observação 6. *Os elementos das linhas 2 e 4 da matriz N são nulos, ou seja, os componentes ϕ_2 e ϕ_4 da matriz ϕ , que correspondem às variáveis de estado x_2 e x_4 , não terão limitação em sua região de operação. Neste caso somente as variáveis x_1 e x_3 estarão limitadas à uma região de operação específica.*

Foram adotadas as seguintes possibilidades para as condições iniciais das variáveis de estado do sistema: que o ângulo da haste pode assumir qualquer valor no intervalo $-\frac{4\pi}{180} \leq x_1(0) \leq \frac{4\pi}{180}$; $x_2(0) = 0$; $x_3(0) = 0$; $x_4(0) = 0$. Desta forma, o politopo de condições iniciais possui 2 vértices. Então, o domínio das condições iniciais, denotado por D_2 , é dado por:

$$D_2 = \{x(0) \in \mathbb{R}^4 : -\frac{4\pi}{180} \leq x_1(0) \leq \frac{4\pi}{180}, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0\}. \quad (187)$$

Para a restrição da norma do controlador, foi utilizado apenas o Teorema 5, pela sua capacidade de encontrar um η mínimo, dado um certo β . Para tanto, foi fixado $\mu_0 = 0,001$.

Foram considerados quatro cenários diferentes para simulação do sistema dinâmico. Em todos eles é desprezada a força de atrito entre as rodas do conjunto e a superfície, ou seja, $f_c = 0$. No Cenário 1 considera-se β pequeno, a massa do carrinho fixa em $M = 8kg$ e condição inicial no limite do domínio D_2 ; No Cenário 2 considera-se β pequeno, a massa do carrinho variável e condição inicial no limite do domínio D_2 ; No Cenário 3 considera-se β grande, a massa do carrinho fixa em $M = 8kg$ e condição inicial no limite do domínio D_2 ; No Cenário 4 considera-se β grande, a massa do carrinho variável e condição inicial no limite do domínio D_2 .

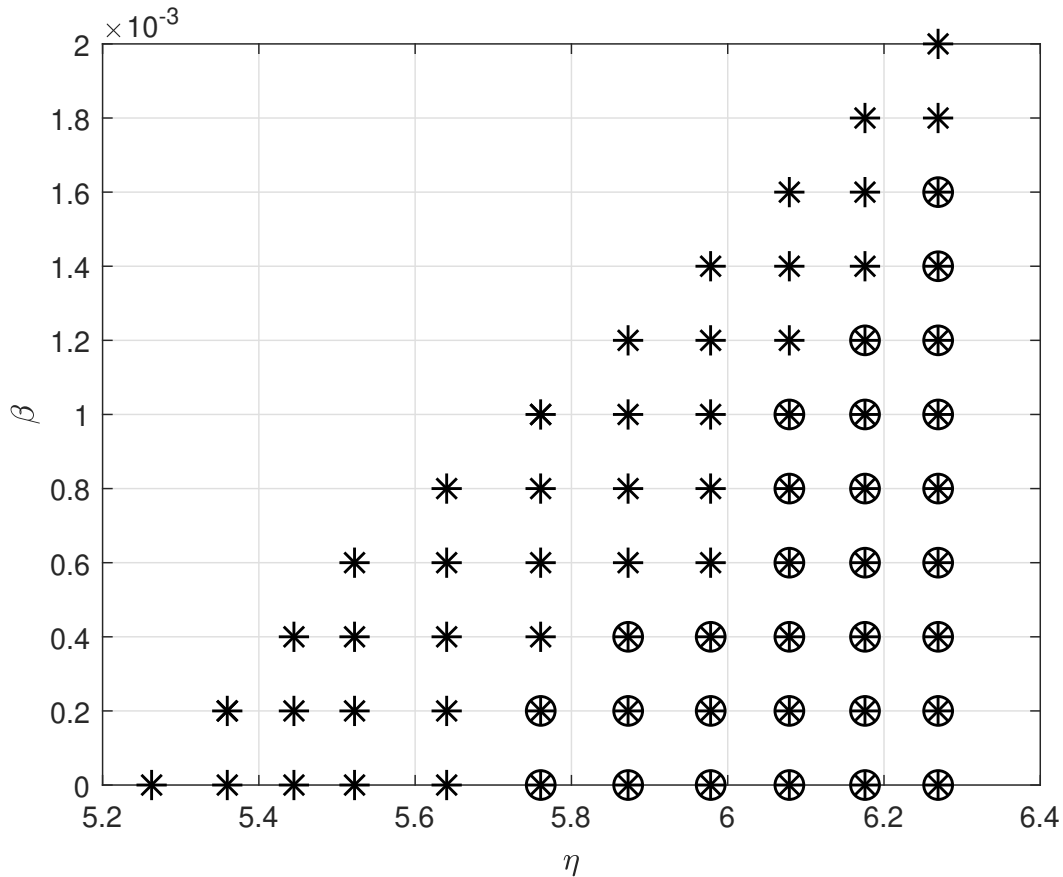
As implementações computacionais foram feitas utilizando o MATLAB[®], versão R2018b, com a linguagem do YALMIP (Lofberg, 2004), versão R20200116, com os solvers: SDPT3 (TOH; TODD; TütüNCü, 1999), versão 4.0; ou SeDuMi (STURM, 1999), versão 1.3; ou MOSEK (MOSEK, 2021), versão 9.2.40. Os solvers SeDuMi e SDPT3 acabaram apresentando mais erros e menos pontos factíveis que o solver MOSEK, e por isso não foram considerados para as simulações.

Para a simulação do sistema dinâmico, foi utilizada a ferramenta Simulink[®], através de blocos customizáveis, seguindo o modelo da Figura 18. Para o *Simulink*©, foi utilizado passo de cálculo fixo (tempo de amostra fundamental) em 0,001s, e solver automático.

5.4.1 Região de Factibilidade com β pequeno

A região de factibilidade, dos Teoremas 1-3 juntamente com o Teorema 5, foi determinada, variando-se β na faixa de $0 \leq \beta \leq 2 \times 10^{-3}$ e encontrando η na faixa de $5,2 \leq \eta \leq 6,3$. Os resultados obtidos estão na Figura 21 e na Tabela 7.

Figura 21 – Comparação das regiões factíveis para o pêndulo invertido utilizando: Teorema 1 (“+”); Teorema 2 (“×”); Teorema 3 (“○”). Todos utilizados em conjunto com o Teorema 5 com $\mu_0 = 0,001$, para $0 \leq \beta \leq 2 \times 10^{-3}$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 7 – Teste de Factibilidade do Pêndulo Invertido para $0 \leq \beta \leq 2 \times 10^{-3}$.

Teorema	Pontos Factíveis
1	66
2	66
3	30

Fonte: Elaboração do próprio autor.

O tempo de processamento usado pelo solver, para encontrar a região de factibilidade foi: $t_{MOSEK} = 2334,41s$.

Os Teoremas 1 e 2 apresentaram a mesma região de factibilidade, com 66 pontos cada, enquanto que o Teorema 3 apresentou apenas 30 pontos factíveis. Este fato ilustra o principal resultado desta tese, que é a relaxação das condições para o projeto de controladores chaveados utilizando otimizadores não derivativos. Como descrito anteri-

ormente, as condições de projeto de controladores chaveados utilizando otimizadores não derivativos propostas podem ser descritas pelos Teoremas 1 e 2, enquanto que o Teorema 3 apresenta as condições normalmente usadas para o projeto de controladores chaveados até o momento (SOUZA et al., 2014a; BUZETTI, 2017).

É importante notar que os pontos factíveis exclusivos dos Teoremas 1 e 2 possuem uma boa relação entre os valores de β (melhor velocidade de resposta) e η (menor norma do controlador). Sendo assim, foi escolhido o ponto factível $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$ e $\eta = 6,18$, por ser um ponto extremo da região de factibilidade, e no qual o Teorema 3 não é factível. Conforme apresentado na Seção 4.4, o Teorema 2 é menos conservador que o Teorema 1, e por isso será escolhido para definição dos ganhos do controlador. Logo, para este ponto factível, os ganhos K_i do controlador e a matriz P obtidos foram:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-311,63 \quad -69,614 \quad -0,0029821 \quad -1,6575], \\
 K_2 &= [-446,53 \quad -99,691 \quad -0,0045033 \quad -2,5029], \\
 K_3 &= [-274,22 \quad -61,216 \quad -0,0025631 \quad -1,4246], \\
 K_4 &= [-305,18 \quad -68,001 \quad -0,0028836 \quad -1,6027], \\
 K_5 &= [-320,59 \quad -71,562 \quad -0,0030793 \quad -1,7115], \\
 K_6 &= [-462,79 \quad -103,27 \quad -0,0046831 \quad -2,6027], \\
 K_7 &= [-278,36 \quad -62,083 \quad -0,0026051 \quad -1,4479], \\
 K_8 &= [-302,68 \quad -67,362 \quad -0,0028513 \quad -1,5847], \\
 K_9 &= [-317,59 \quad -70,975 \quad -0,0030506 \quad -1,6955], \\
 K_{10} &= [-431,4 \quad -96,36 \quad -0,0043323 \quad -2,4078], \\
 K_{11} &= [-273,87 \quad -61,188 \quad -0,002563 \quad -1,4246], \\
 K_{12} &= [-297,94 \quad -66,408 \quad -0,0028043 \quad -1,5586], \\
 K_{13} &= [-307,09 \quad -68,547 \quad -0,0029283 \quad -1,6275], \\
 K_{14} &= [-432,18 \quad -96,47 \quad -0,0043338 \quad -2,4086], \\
 K_{15} &= [-275,45 \quad -61,471 \quad -0,0025758 \quad -1,4317], \\
 K_{16} &= [-275,88 \quad -61,305 \quad -0,0025534 \quad -1,4191],
 \end{aligned} \tag{188}$$

$$P = \begin{bmatrix} 205,18 & 45,614 & 0,0021587 & 1,1998 \\ 45,614 & 11,282 & 0,00054087 & 0,30061 \\ 0,0021587 & 0,00054087 & 6,8317 \times 10^{-7} & 0,00019673 \\ 1,1998 & 0,30061 & 0,00019673 & 0,1093 \end{bmatrix}. \tag{189}$$

Conforme discutido na Subseção 5.1.2, a escolha dos parâmetros do Otimizador não Derivativo se deu da seguinte forma:

1. A princípio é estimado o valor para $\delta_{ot} > 0$. Então, seja $\delta_{ot} = 1 \times 10^{-4}$;
2. Com a condição $\Delta_{ot} \geq 2\delta_{ot}$, logo $\Delta_{ot} = 2 \times 10^{-4}$;
3. A partir da matriz P , determina-se λ , que corresponde ao seu menor autovalor. Logo, $\lambda = 3,2906 \times 10^{-7}$;
4. O valor de s é determinado através da resolução das LMIs (142)-(144). Foi obtido $s = 12353$;
5. De acordo com o domínio D_2 da equação (187), considerou-se a condição inicial das variáveis de estado do sistema: $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$;
6. O valor de M_{ot} é obtido através da equação (147), ou seja, $M_{ot} = 3,7543 \times 10^{10}$;
7. Sendo $B_{ot} > 2M_{ot}$, então $B_{ot} = 7,5086 \times 10^{10}$.

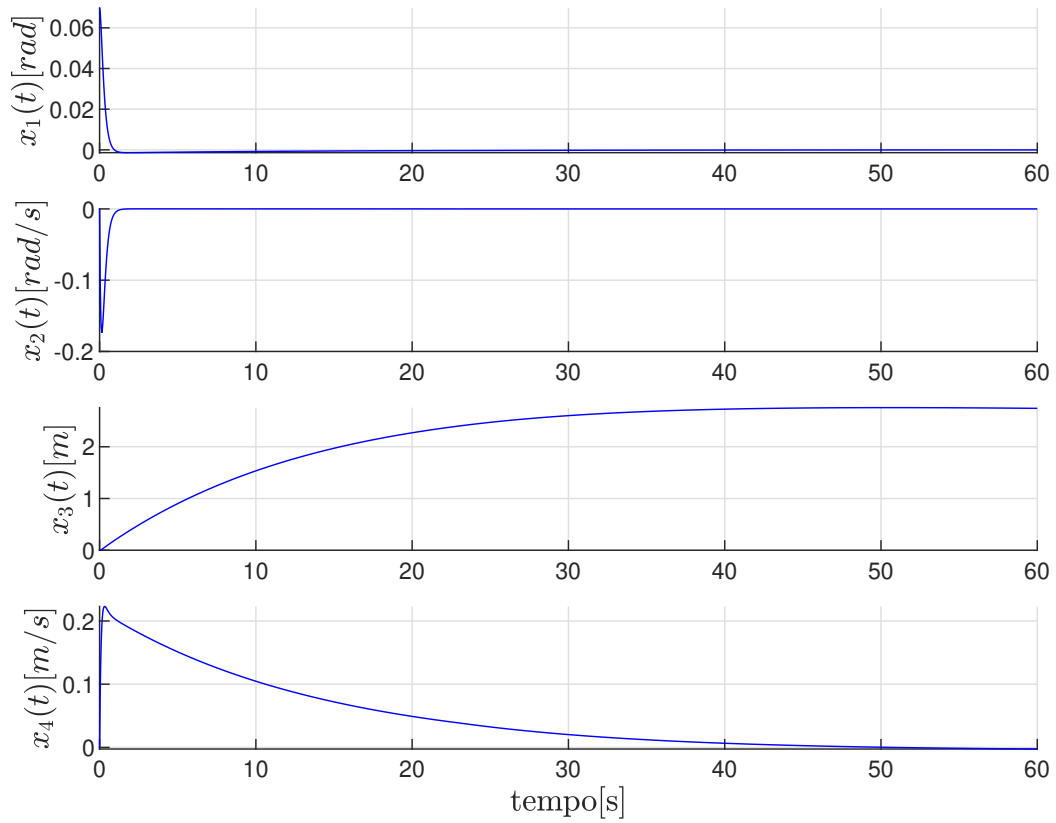
5.4.2 Simulação do Cenário 1

No Cenário 1 considera-se β pequeno, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, a massa do carrinho fixa em $M = 8kg$ e condição inicial no limite do domínio D_2 . Logo:

- A força de atrito entre as rodas do conjunto e a superfície, $f_c = 0$;
- $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (no limite do domínio D_2);
- A massa do carrinho fixa em $M = 8kg$.

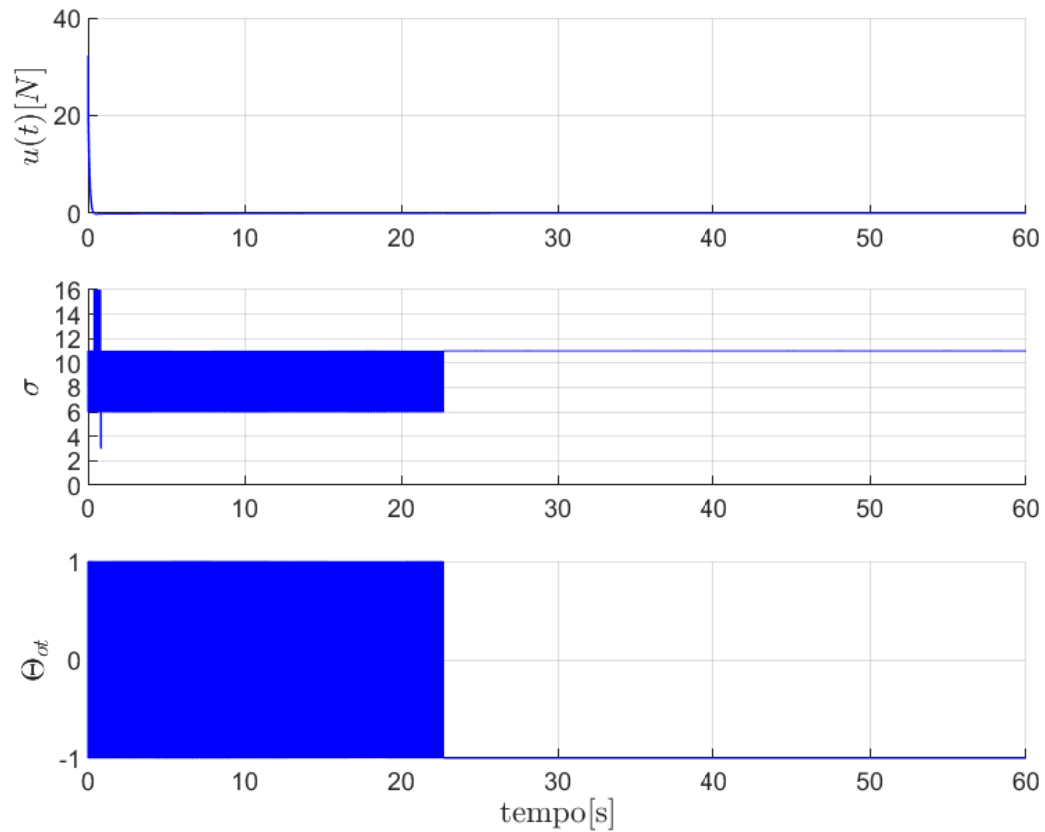
A resposta temporal do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, é mostrada nas Figuras 22-24.

Figura 22 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$.



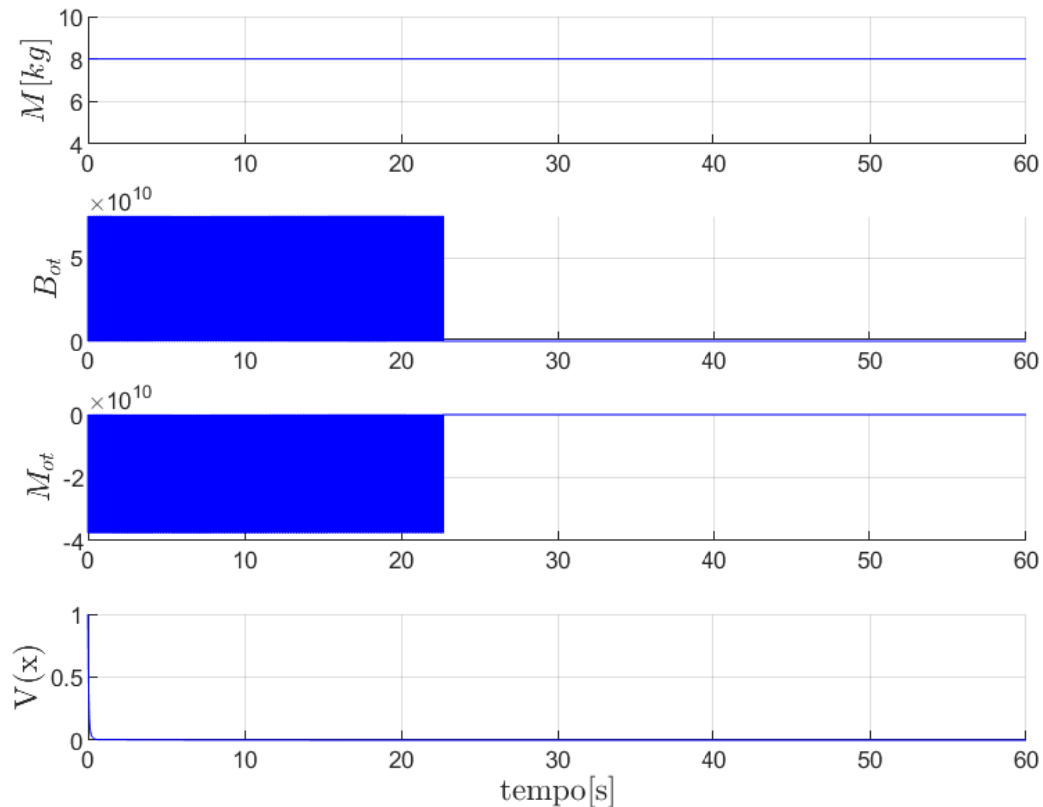
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 23 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 24 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Tabela 8 encontram-se os valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 1.

Tabela 8 – Valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 1.

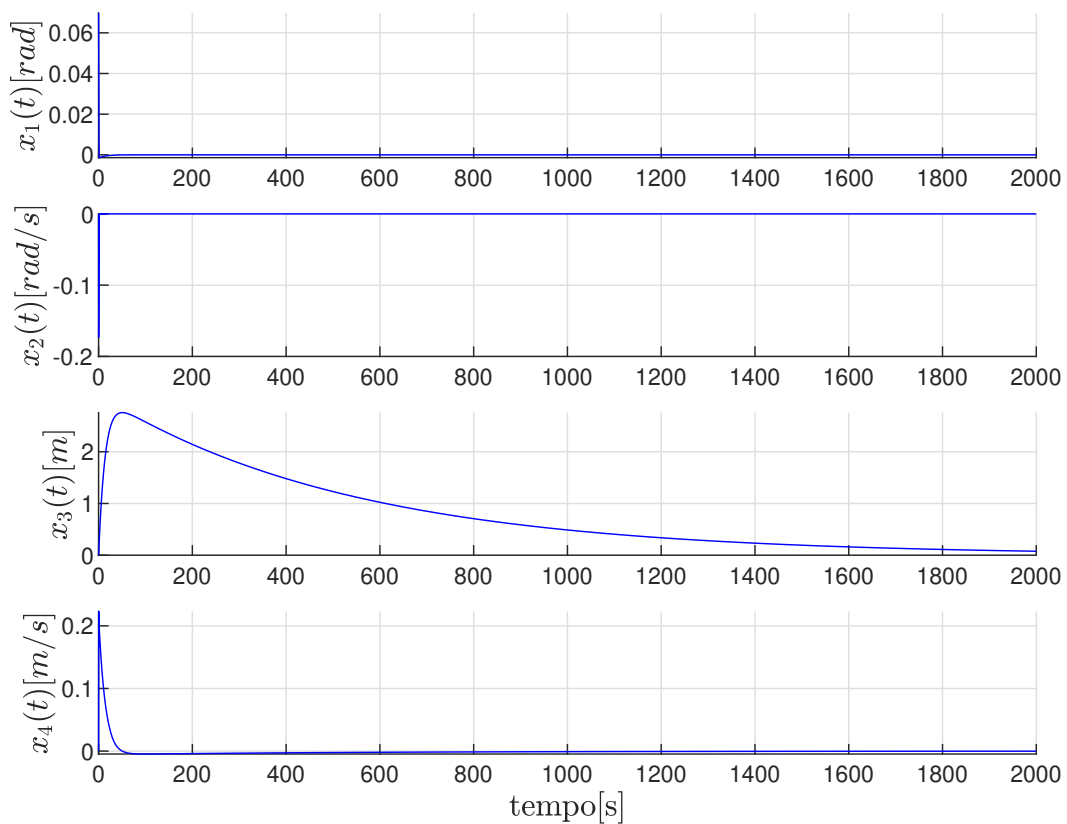
Variável	Valor Máximo	Tempo [s]	Valor Mínimo	Tempo [s]
$u(t)$	32,309	1×10^{-3}	-0,29182	0,539
$x_1(t)$	0,069813	1×10^{-3}	-0,0013813	1,857
$x_2(t)$	$9,3427 \times 10^{-5}$	2,761	-0,17329	0,143
$x_3(t)$	2,7564	50,573	0	1×10^{-3}
$x_4(t)$	0,22307	0,326	-0,0026094	60,001

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observa-se que para uma condição inicial no limite da região de condições iniciais

definida em (187), o sistema respondeu de forma adequada, e dentro do limite da região de operação especificada em (185) e (186). É importante citar que embora os tempos gráficos tenham sido limitados em $t = 60s$, a variável de estado $x_3(t)$ tende a zero para $t > 60s$, conforme Figura 25.

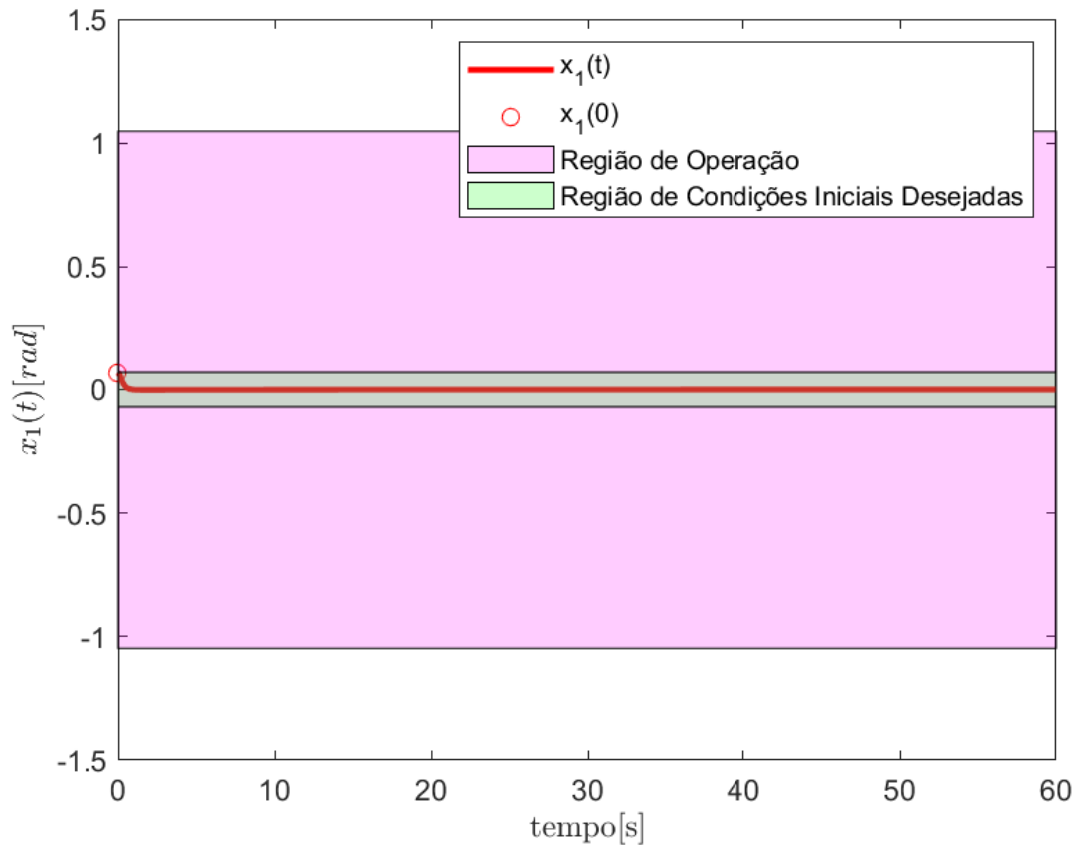
Figura 25 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

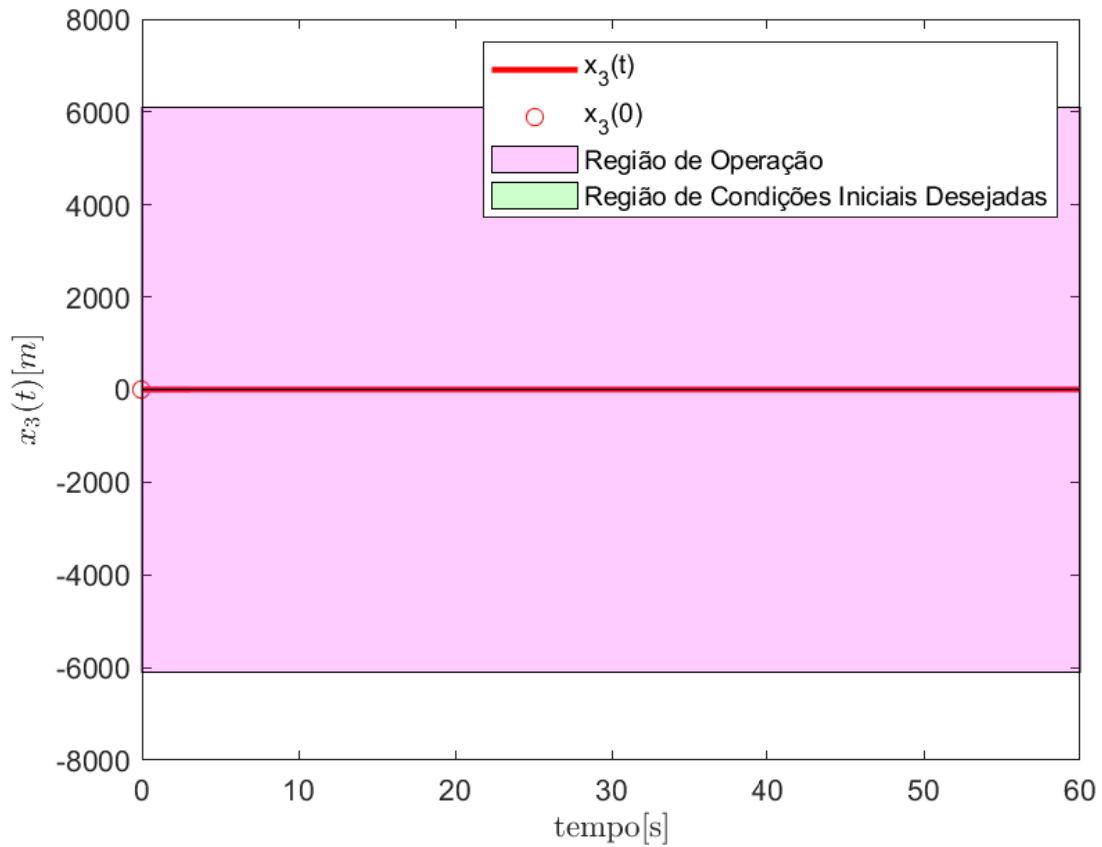
Nas Figuras 26 e 27 é possível observar a relação de $x_1(t)$ e $x_3(t)$ com seus respectivos valores iniciais ($x_1(0)$ e $x_3(0)$), suas regiões de operação (\mathcal{X}), definida em (185) e (186), e a região de condições iniciais desejadas, definida em (187). Com $x_1(0)$ no limite da região de condições iniciais desejadas, a variável de estado foi ao equilíbrio ($x_1 = 0$), permanecendo o tempo todo dentro de sua região de operação.

Figura 26 – Comportamento da variável de estado $x_1(t)$ a partir de sua condição inicial $x_1(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

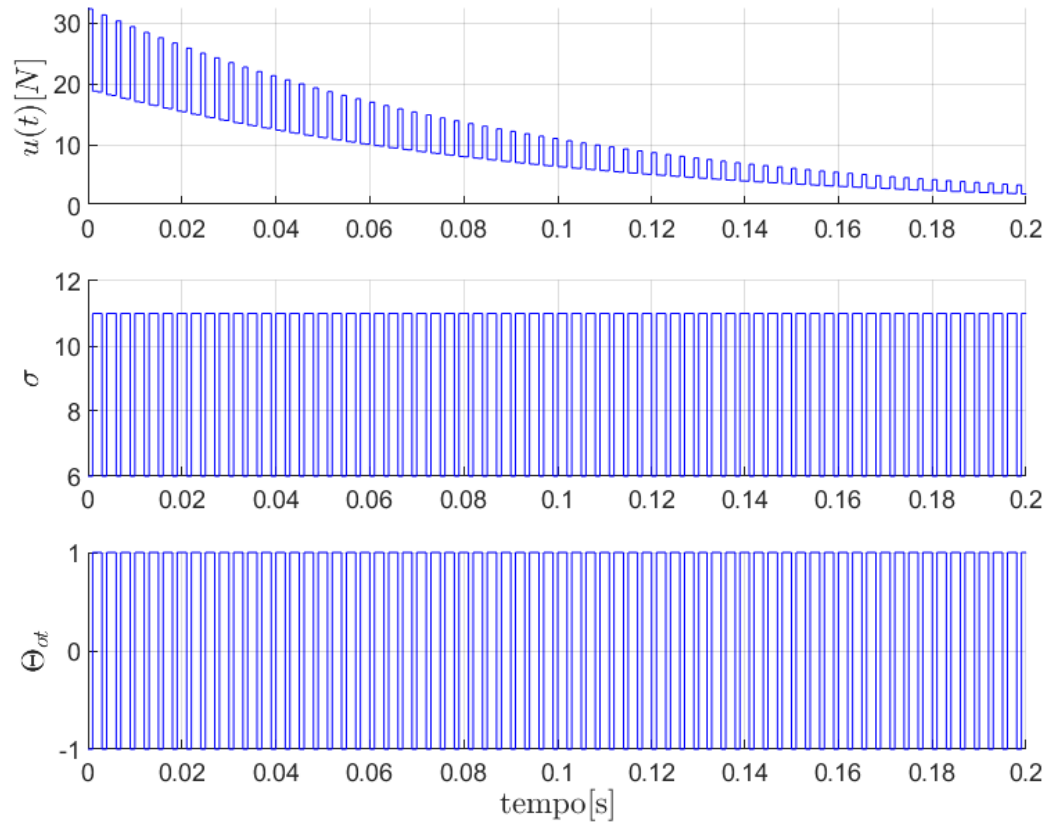
Figura 27 – Comportamento da variável de estado $x_3(t)$ a partir de sua condição inicial $x_3(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathcal{X}), para $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

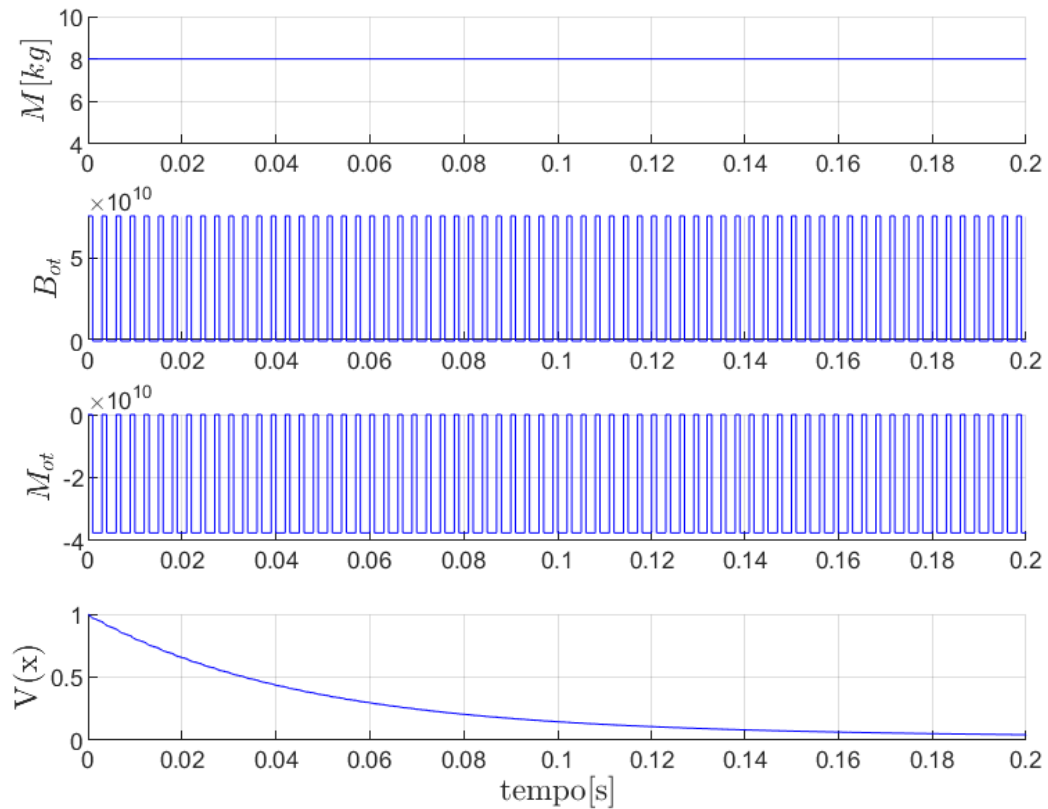
Nas Figuras 28 e 29 é possível observar o detalhe de funcionamento do controlador através do sinal de controle $u(t)$, chaveamento dos ganhos σ , e pela ação do otimizador, através da leitura dos parâmetros Θ_{ot} , B_{ot} (Reiniciador) e M_{ot} (Comparador). Além disso, observa-se a função de Lyapunov $V(x)$ partindo de 1 e indo a 0.

Figura 28 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 29 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

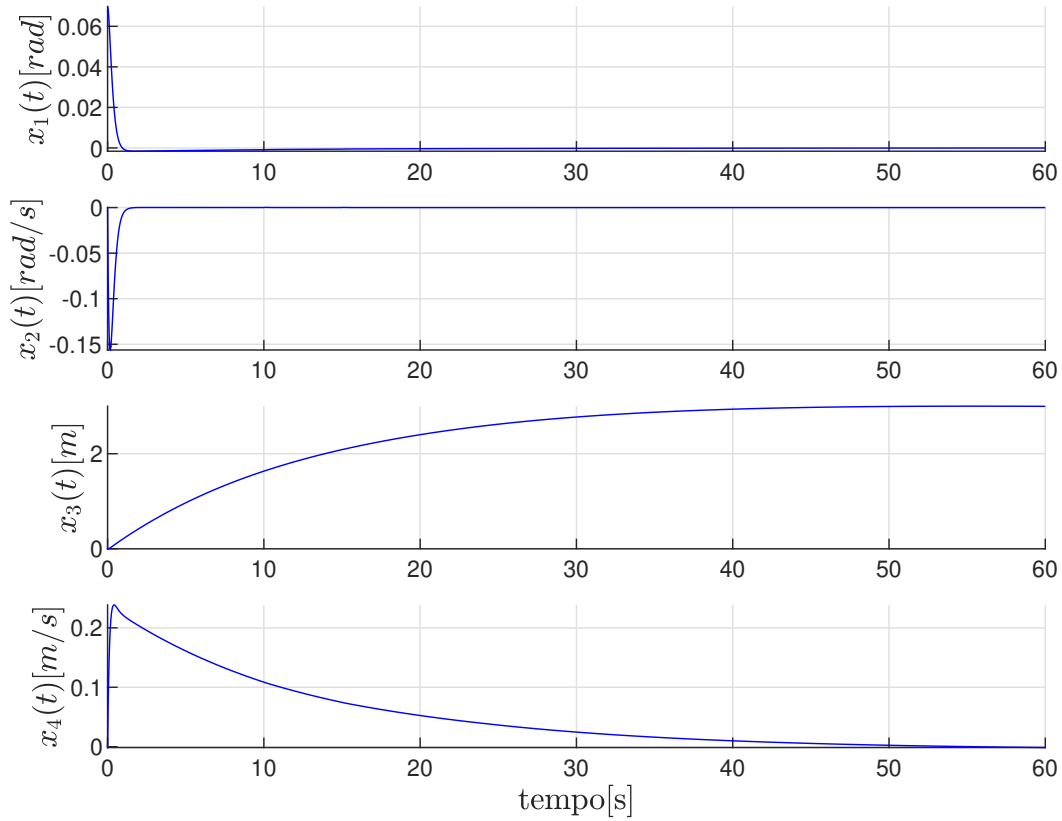
5.4.3 Simulação do Cenário 2

No Cenário 2 considera-se β pequeno, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, a massa do carrinho variável e condição inicial no limite do domínio D_2 . Logo:

- A força de atrito entre as rodas do conjunto e a superfície, $f_c = 0$;
- $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (no limite do domínio D_2);
- A massa do carrinho variou com o tempo, de forma que $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$.

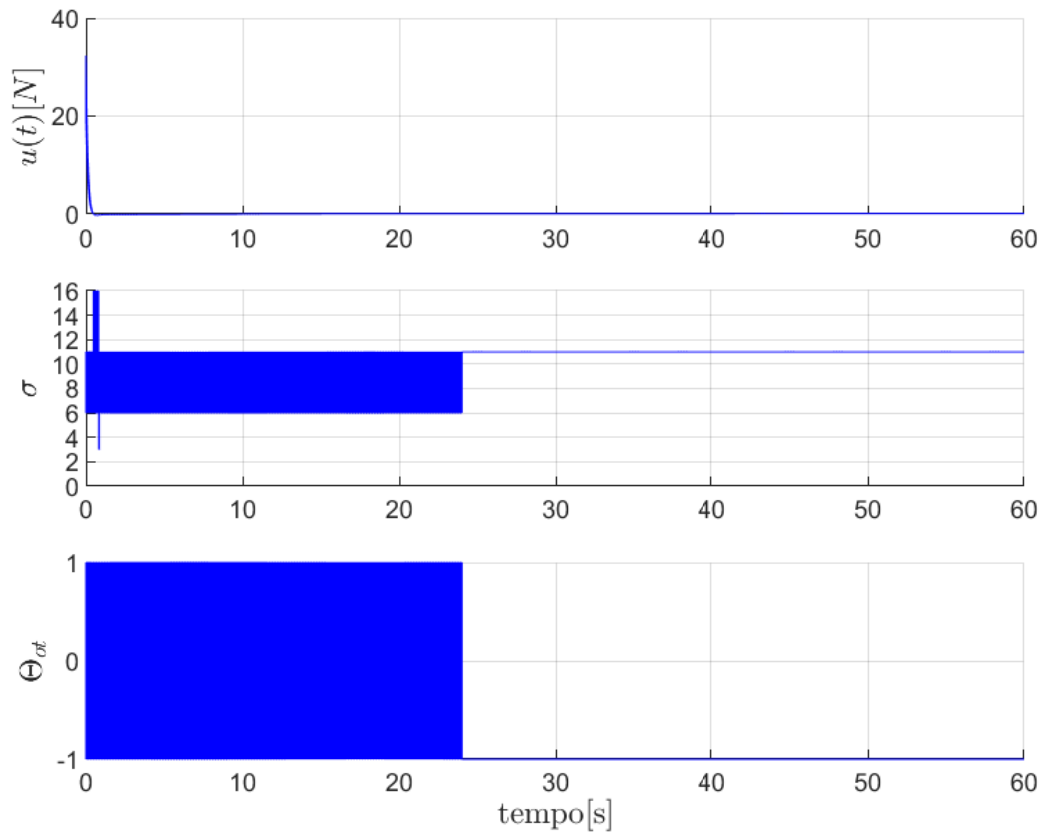
A resposta temporal do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, é mostrada nas Figuras 30-32.

Figura 30 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$.



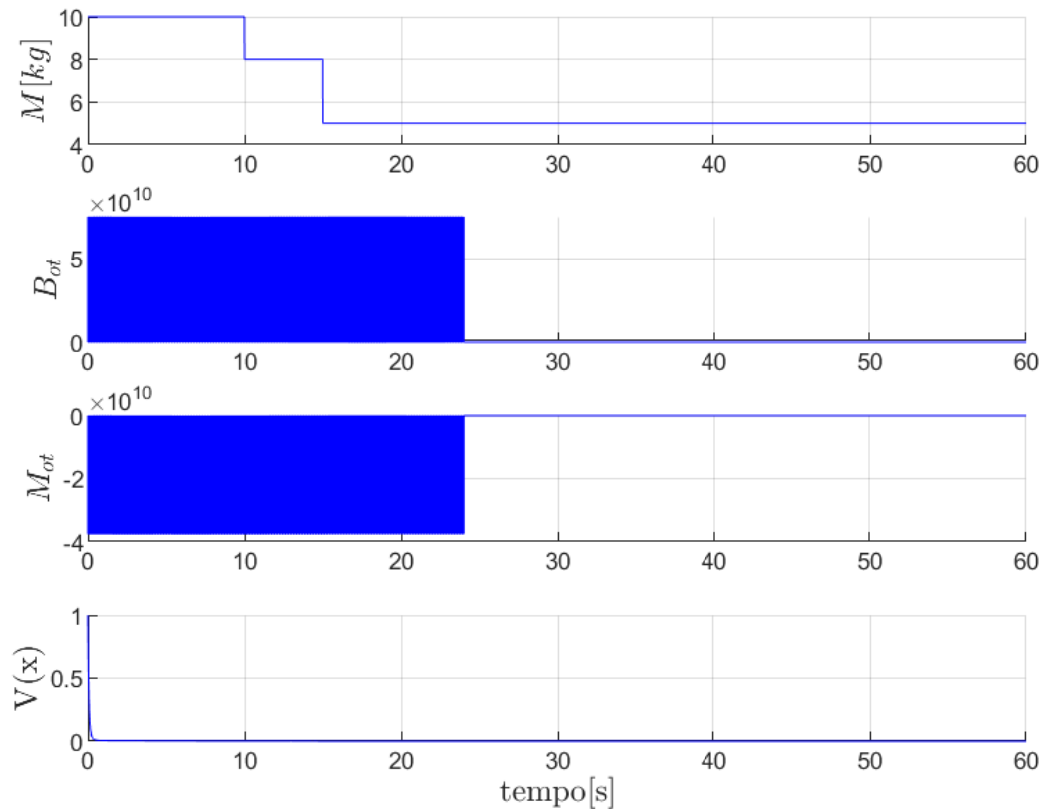
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 31 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 32 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Tabela 9 encontram-se os valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 2.

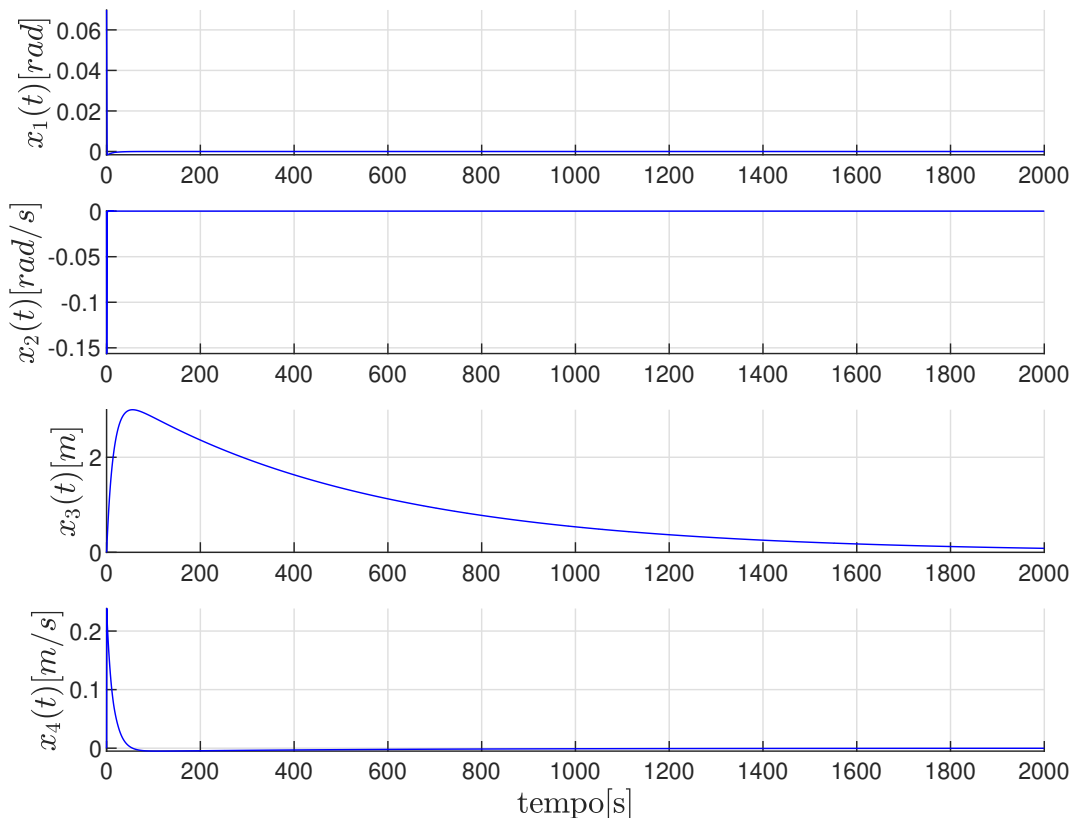
Tabela 9 – Valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 2.

Variável	Valor Máximo	Tempo [s]	Valor Mínimo	Tempo [s]
$u(t)$	32,309	1×10^{-3}	-0,37872	0,662
$x_1(t)$	0,069813	1×10^{-3}	-0,0016086	1,812
$x_2(t)$	0,00021607	10,123	-0,15628	0,170
$x_3(t)$	3,0006	55,442	0	1×10^{-3}
$x_4(t)$	0,2385	0,419	-0,0014356	60

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observa-se que para uma condição inicial no limite da região de condições iniciais definida em (187), o sistema respondeu de forma adequada, e dentro do limite da região de operação especificada em (185) e (186), mesmo com a massa do carrinho sofrendo variações. Os valores máximos e mínimos da Tabela 9 são bem próximos aos obtidos na Tabela 8, o que mostra que a variação da massa do carrinho não interferiu de forma significativa nestes valores. Não foi observado mudanças significativas no comportamento das variáveis de estado com a mudança da massa do carrinho. É importante citar que embora os tempos gráficos tenham sido limitados em $t = 60s$, a variável de estado $x_3(t)$ tende a zero para $t > 60s$, conforme Figura 33.

Figura 33 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$.

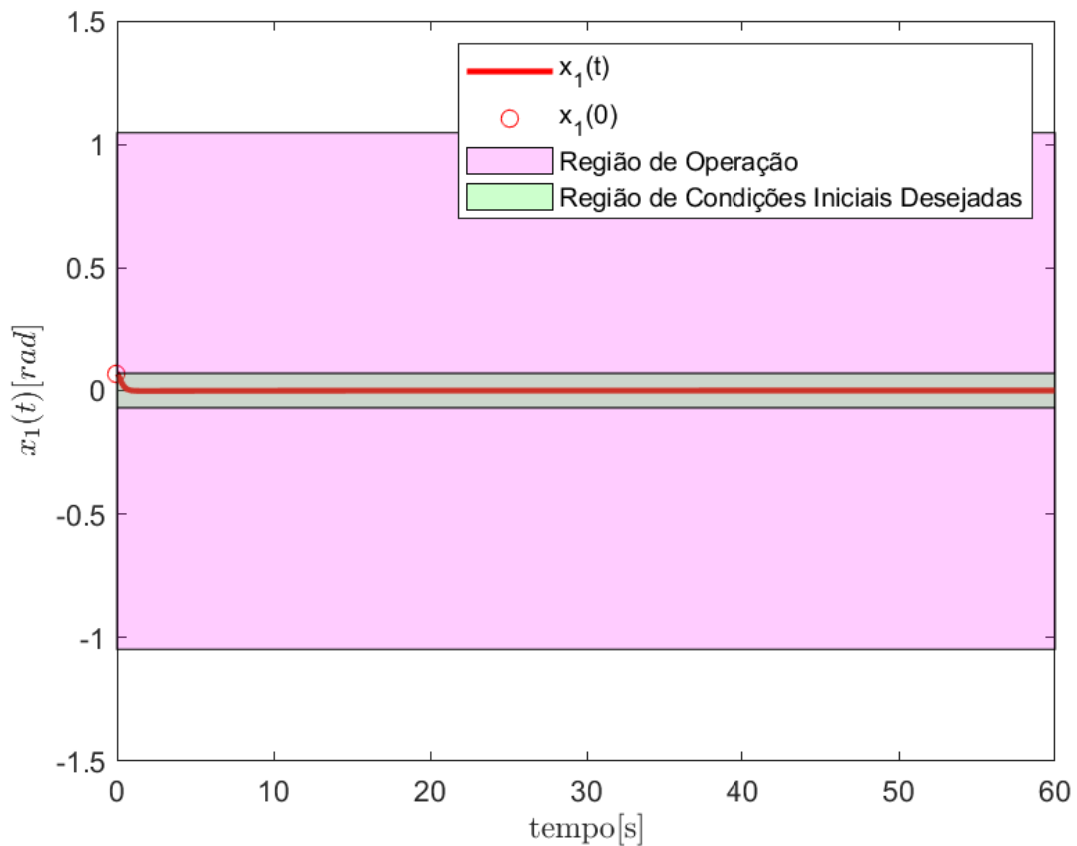


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas Figuras 34 e 35 é possível observar a relação de $x_1(t)$ e $x_3(t)$ com seus respectivos valores iniciais ($x_1(0)$ e $x_3(0)$), suas regiões de operação (\mathcal{X}), definida em (185) e (186), e a região de condições iniciais desejadas, definida em (187). Com $x_1(0)$ no limite

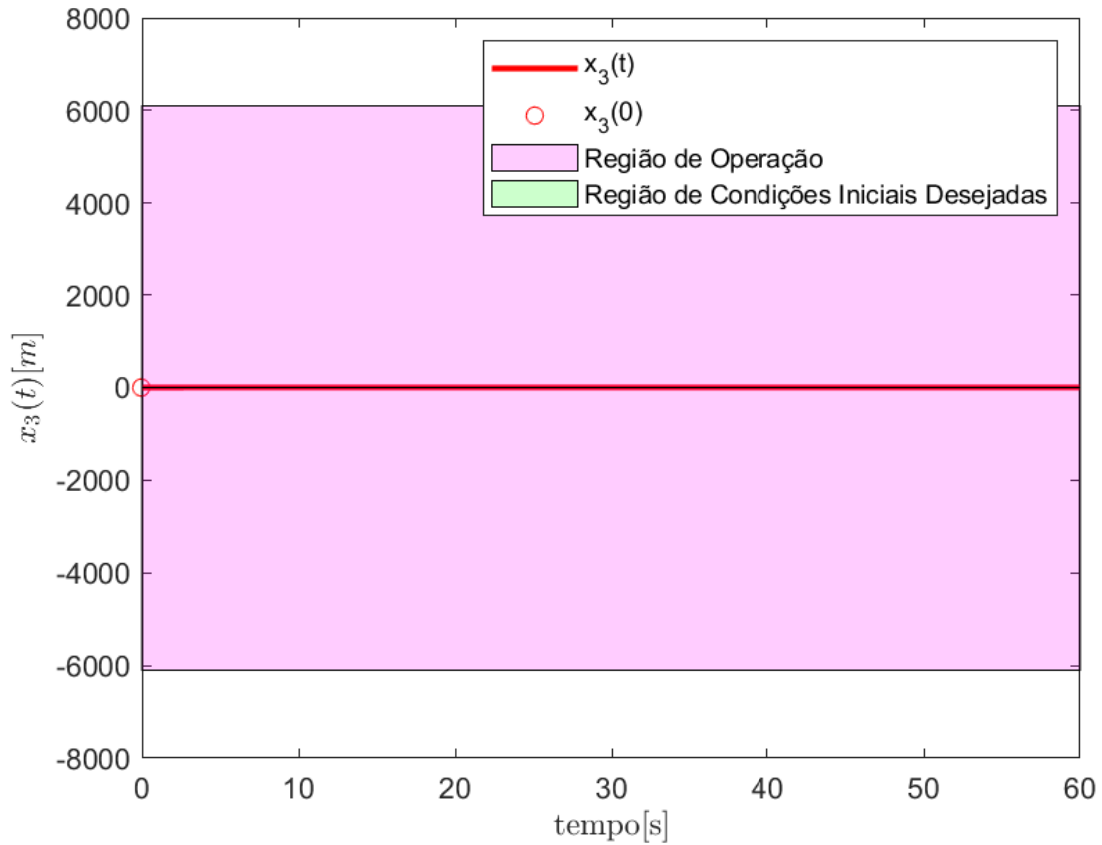
da região de condições iniciais desejadas, a variável de estado foi ao equilíbrio ($x_1 = 0$), permanecendo o tempo todo dentro de sua região de operação.

Figura 34 – Comportamento da variável de estado $x_1(t)$ a partir de sua condição inicial $x_1(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

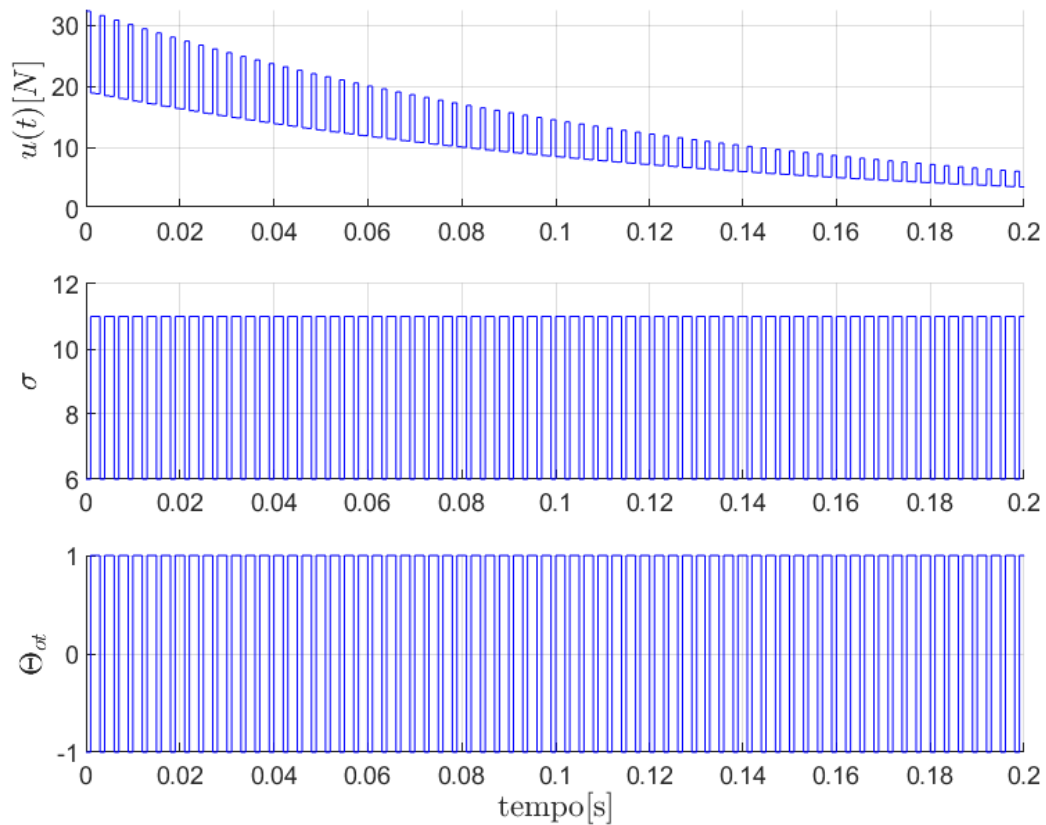
Figura 35 – Comportamento da variável de estado $x_3(t)$ a partir de sua condição inicial $x_3(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

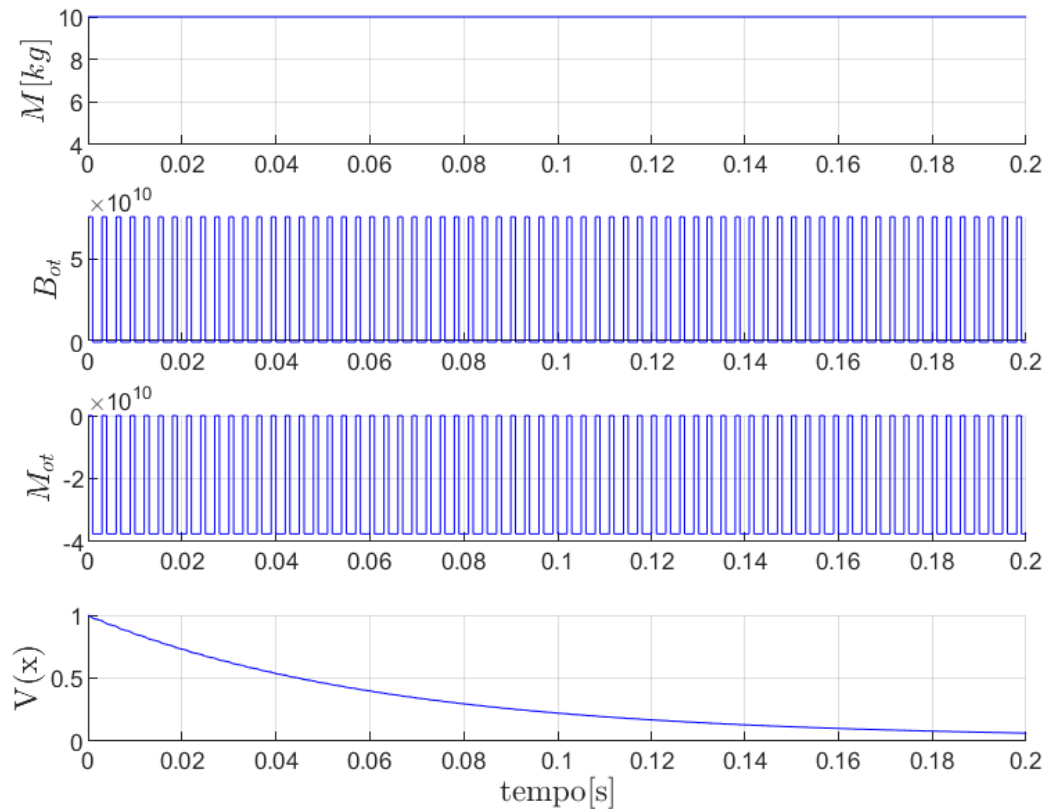
Nas Figuras 36 e 37 é possível observar o detalhe de funcionamento do controlador através do sinal de controle $u(t)$, chaveamento dos ganhos σ , e pela ação do otimizador, através da leitura dos parâmetros Θ_{ot} , B_{ot} (Reiniciador) e M_{ot} (Comparador). Além disso, observa-se a função de Lyapunov $V(x)$ partindo de 1 e indo a 0.

Figura 36 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 37 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 1,8 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$.

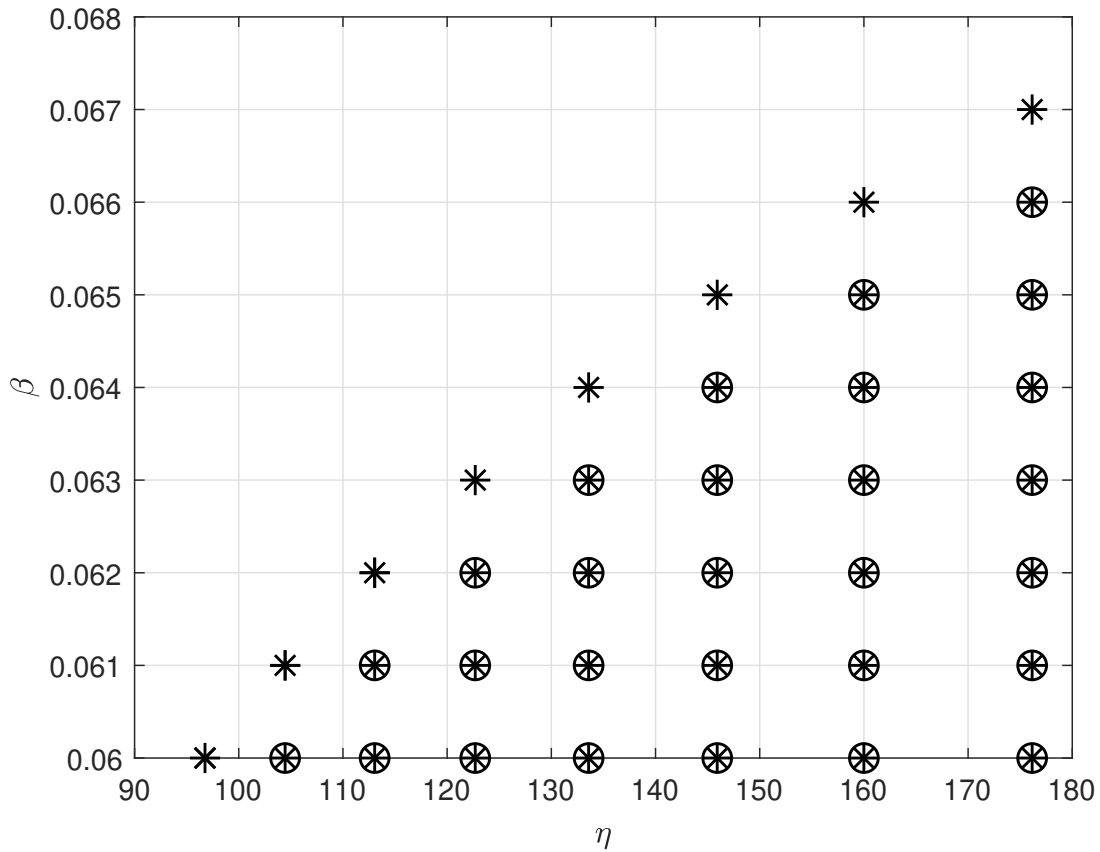


Fonte: Elaboração do próprio autor.

5.4.4 Região de Factibilidade com β grande

A região de factibilidade, dos Teoremas 1-3 juntamente com o Teorema 5, foi determinada, variando-se β na faixa de $60 \times 10^{-3} \leq \beta \leq 67 \times 10^{-3}$ e encontrando η na faixa de $96 \leq \eta \leq 177$. Os resultados obtidos estão na Figura 38 e na Tabela 10.

Figura 38 – Comparação das regiões factíveis para o pêndulo invertido utilizando: Teorema 1 (“+”); Teorema 2 (“×”); Teorema 3 (“○”). Todos utilizados em conjunto com o Teorema 5, para $60 \times 10^{-3} \leq \beta \leq 67 \times 10^{-3}$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 10 – Teste de Factibilidade do Pêndulo Invertido para $60 \times 10^{-3} \leq \beta \leq 67 \times 10^{-3}$.

Teorema	Pontos Factíveis
1	36
2	36
3	28

Fonte: Elaboração do próprio autor.

O tempo de processamento usado pelo solver, para encontrar a região de factibilidade foi: $t_{MOSEK} = 1354,09s$.

Os Teoremas 1 e 2 apresentaram a mesma região de factibilidade, com 36 pontos cada, enquanto que o Teorema 3 apresentou apenas 28 pontos factíveis. É importante notar que os pontos factíveis exclusivos dos Teoremas 1 e 2 possuem uma boa relação entre os valores de β (melhor velocidade de resposta) e η (menor norma do controlador). Sendo

assim, foi escolhido o ponto factível $\beta = 66 \times 10^{-3}$ e $\eta = 160$, por ser um ponto extremo da região de factibilidade, e no qual o Teorema 3 não é factível. Conforme apresentado na Seção 4.4, o Teorema 2 é menos conservador que o Teorema 1, e por isso será escolhido para definição dos ganhos do controlador. Logo, para este ponto factível, os ganhos K_i do controlador e a matriz P obtidos foram:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [-1163, 3 \quad -278, 98 \quad -4, 989 \quad -76, 76], \\
 K_2 &= [-1765, 1 \quad -423, 25 \quad -7, 6888 \quad -118, 27], \\
 K_3 &= [-998, 33 \quad -239, 28 \quad -4, 2488 \quad -65, 379], \\
 K_4 &= [-1066, 2 \quad -255, 32 \quad -4, 5422 \quad -69, 891], \\
 K_5 &= [-1189, 3 \quad -285, 07 \quad -5, 1021 \quad -78, 499], \\
 K_6 &= [-1866, 6 \quad -447, 51 \quad -8, 144 \quad -125, 27], \\
 K_7 &= [-995 \quad -238, 35 \quad -4, 2302 \quad -65, 092], \\
 K_8 &= [-990, 79 \quad -237, 01 \quad -4, 1959 \quad -64, 568], \\
 K_9 &= [-1100, 4 \quad -263, 87 \quad -4, 7072 \quad -72, 426], \\
 K_{10} &= [-1611, 5 \quad -386, 44 \quad -6, 9963 \quad -107, 62], \\
 K_{11} &= [-961, 18 \quad -230, 45 \quad -4, 0844 \quad -62, 85], \\
 K_{12} &= [-982, 67 \quad -235, 3 \quad -4, 1679 \quad -64, 136], \\
 K_{13} &= [-1043 \quad -249, 93 \quad -4, 4452 \quad -68, 398], \\
 K_{14} &= [-1586, 2 \quad -380, 21 \quad -6, 8773 \quad -105, 79], \\
 K_{15} &= [-944, 11 \quad -226, 2 \quad -4, 0032 \quad -61, 603], \\
 K_{16} &= [-563, 77 \quad -134, 26 \quad -2, 2799 \quad -35, 109],
 \end{aligned} \tag{190}$$

$$P = \begin{bmatrix} 205, 18 & 49, 176 & 0, 91211 & 14, 021 \\ 49, 176 & 12, 122 & 0, 2225 & 3, 422 \\ 0, 91211 & 0, 2225 & 0, 0065696 & 0, 081365 \\ 14, 021 & 3, 422 & 0, 081365 & 1, 2469 \end{bmatrix}. \tag{191}$$

Conforme discutido na Subseção 5.1.2, a escolha dos parâmetros do Otimizador não Derivativo se deu da seguinte forma:

1. A princípio é estimado o valor para $\delta_{ot} > 0$. Então, seja $\delta_{ot} = 1 \times 10^{-4}$;
2. Com a condição $\Delta_{ot} \geq 2\delta_{ot}$, logo $\Delta_{ot} = 2 \times 10^{-4}$;
3. A partir da matriz P , determina-se λ , que corresponde ao seu menor autovalor. Logo, $\lambda = 1, 2542 \times 10^{-3}$;

4. O valor de s é determinado através da resolução das LMIs (142)-(144). Foi obtido $s = 54184$;
5. De acordo com o domínio D_2 da equação (187), considerou-se a condição inicial das variáveis de estado do sistema: $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$;
6. O valor de M_{ot} é obtido através da equação (147), ou seja, $M_{ot} = 4,3205 \times 10^7$;
7. Sendo $B_{ot} > 2M_{ot}$, então $B_{ot} = 8,6411 \times 10^7$.

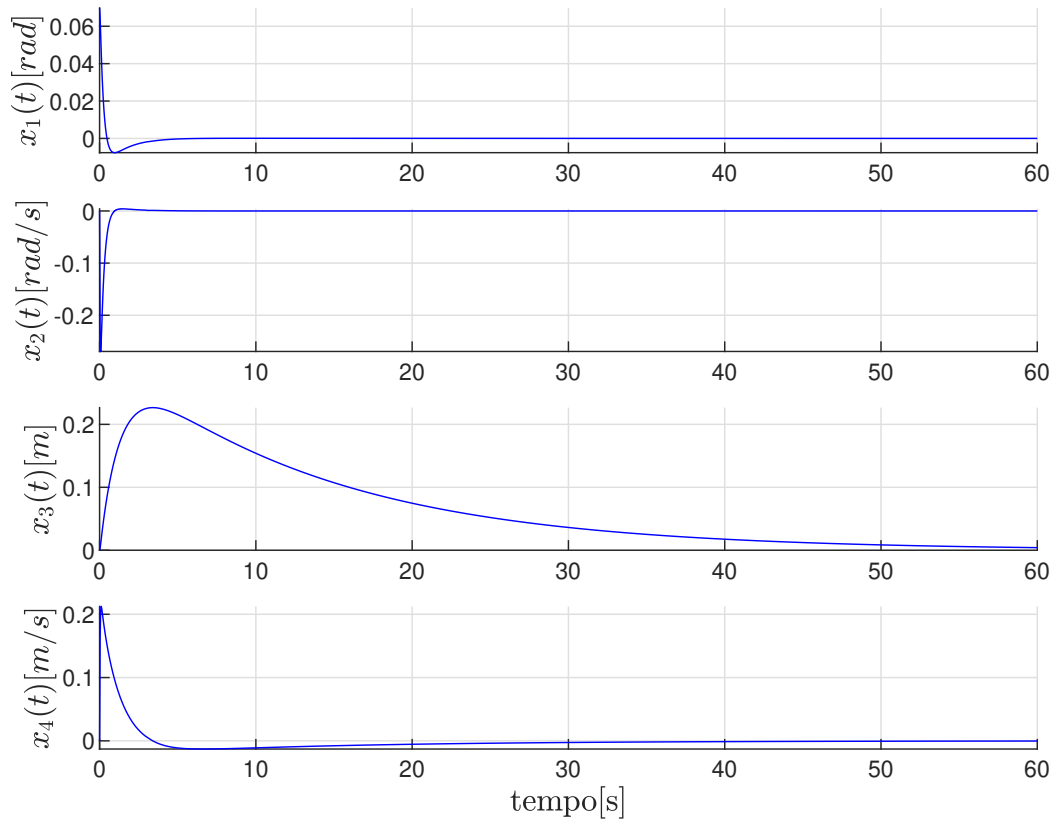
5.4.5 Simulação do Cenário 3

No Cenário 3 considera-se β grande, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, a massa do carrinho fixa em $M = 8kg$ e condição inicial no limite do domínio D_2 . Logo:

- A força de atrito entre as rodas do conjunto e a superfície, $f_c = 0$;
- $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (no limite do domínio D_2);
- A massa do carrinho fixa em $M = 8kg$.

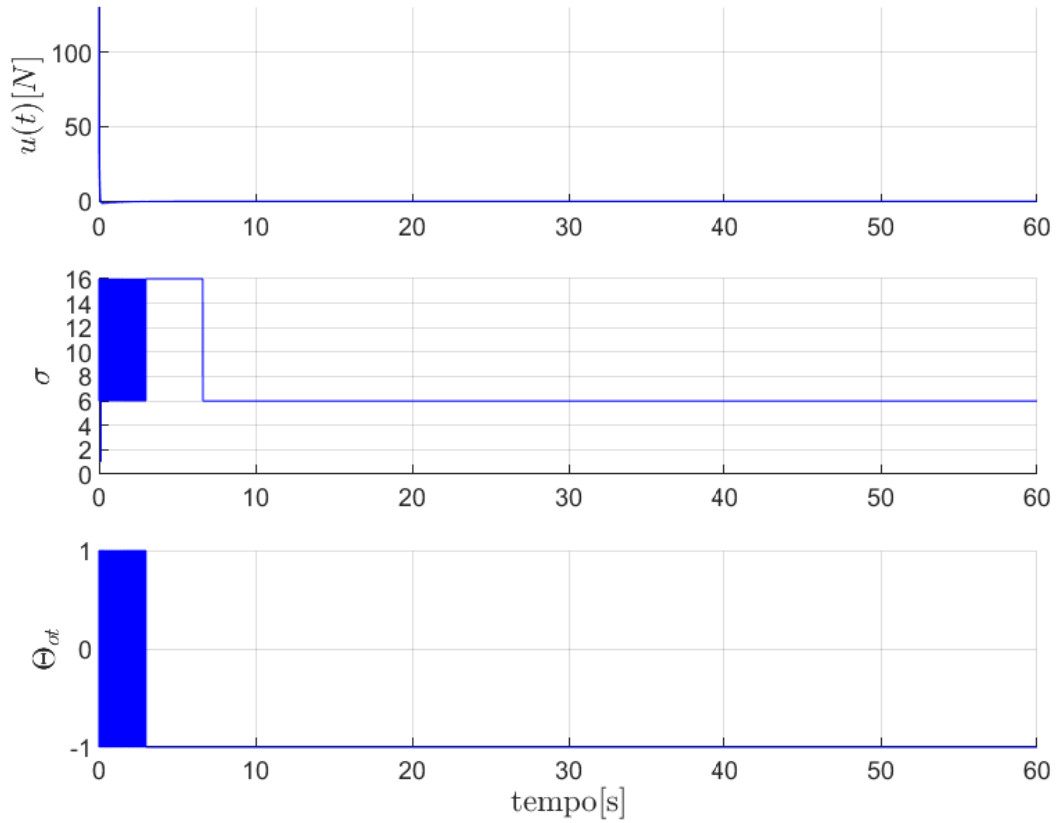
A resposta temporal do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, é mostrada nas Figuras 39-41.

Figura 39 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$.



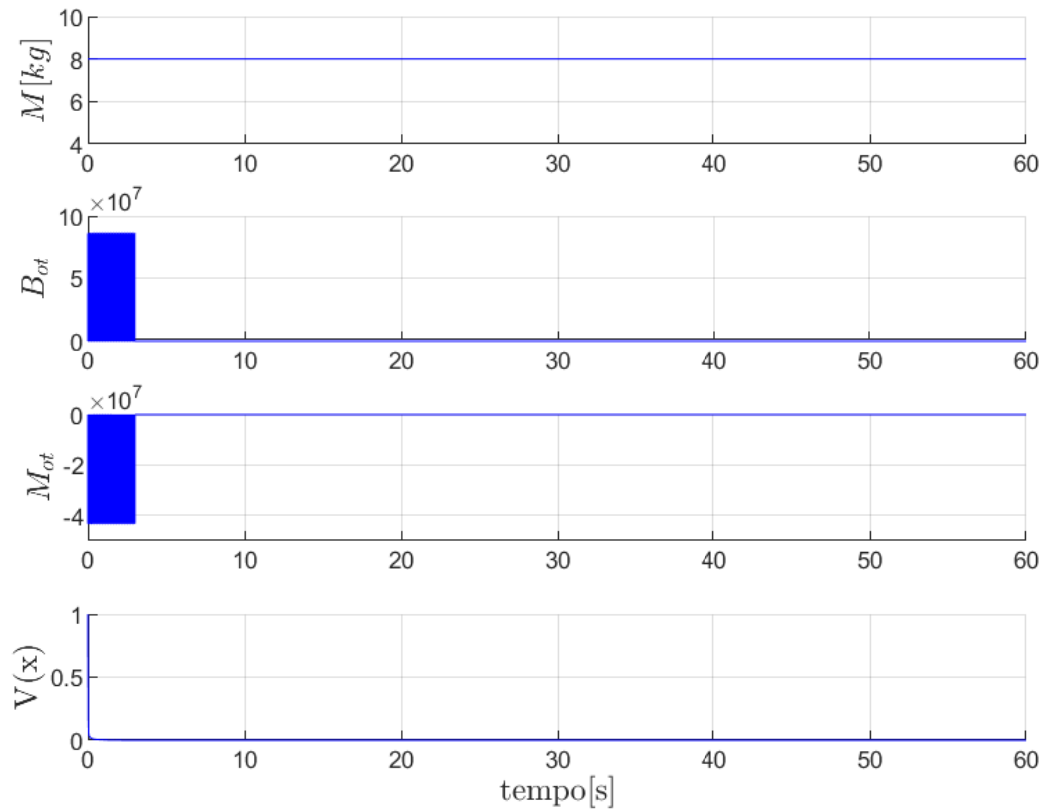
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 40 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 41 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Tabela 11 encontram-se os valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 3.

Tabela 11 – Valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 3.

Variável	Valor Máximo	Tempo [s]	Valor Mínimo	Tempo [s]
$u(t)$	130,31	1×10^{-3}	-1,6043	0,209
$x_1(t)$	0,069813	1×10^{-3}	-0,0076196	0,966
$x_2(t)$	$4,0745 \times 10^{-3}$	1,459	-0,26938	0,068
$x_3(t)$	0,22658	3,405	0	1×10^{-3}
$x_4(t)$	0,21243	0,104	-0,01294	6,6

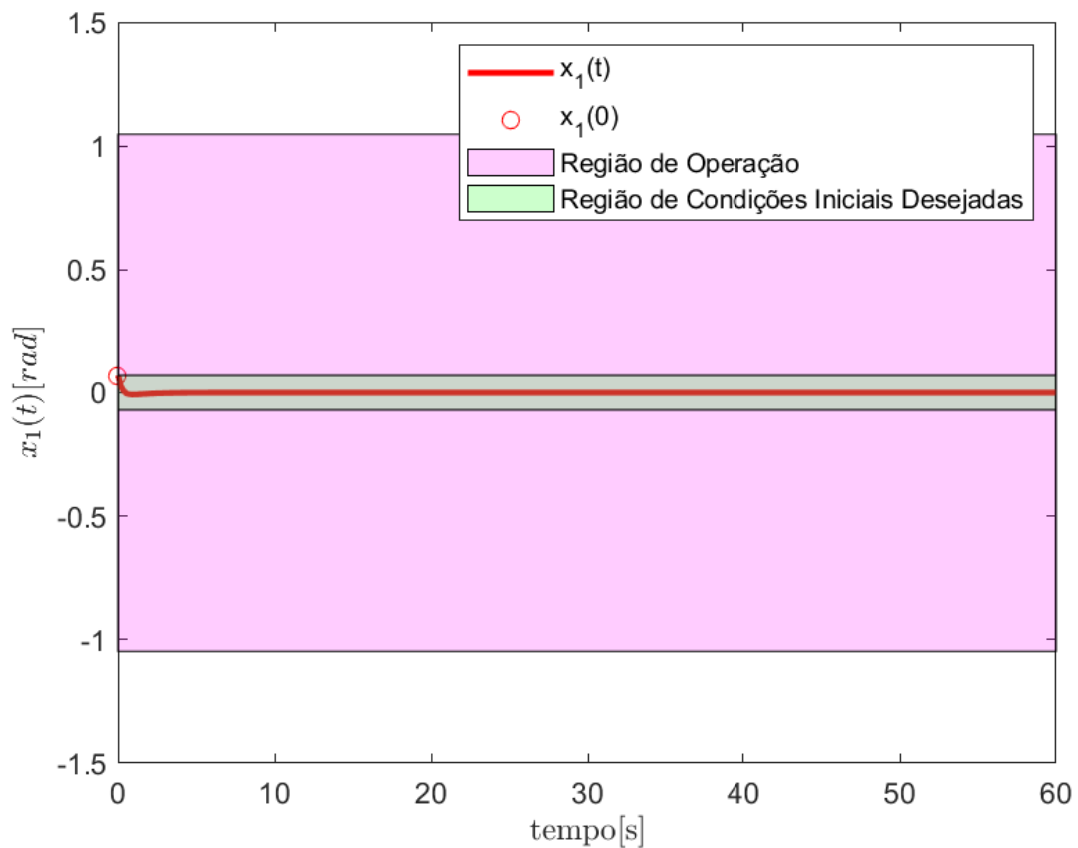
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observa-se que para uma condição inicial no limite da região de condições iniciais

definida em (187), o sistema respondeu de forma adequada, e dentro do limite da região de operação especificada em (185) e (186).

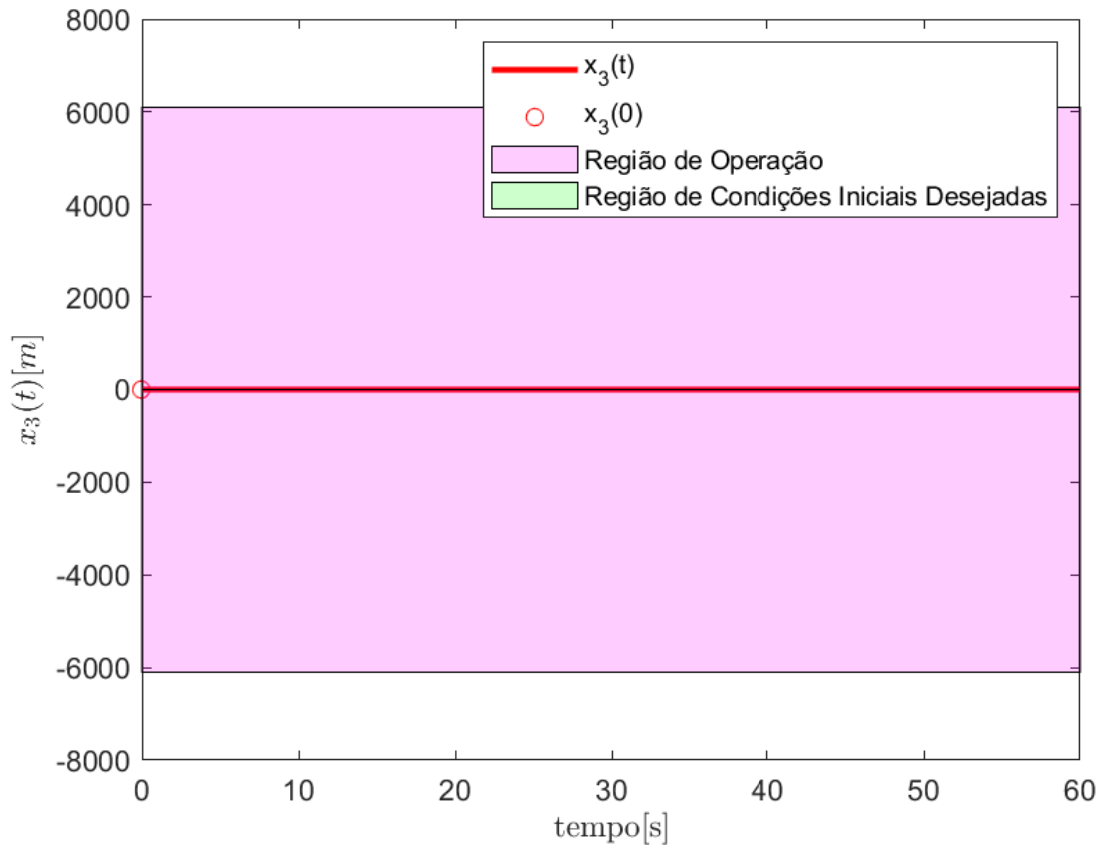
Nas Figuras 42 e 43 é possível observar a relação de $x_1(t)$ e $x_3(t)$ com seus respectivos valores iniciais ($x_1(0)$ e $x_3(0)$), suas regiões de operação (\mathcal{X}), definida em (185) e (186), e a região de condições iniciais desejadas, definida em (187). Com $x_1(0)$ no limite da região de condições iniciais desejadas, a variável de estado foi ao equilíbrio ($x_1 = 0$), permanecendo o tempo todo dentro de sua região de operação.

Figura 42 – Comportamento da variável de estado $x_1(t)$ a partir de sua condição inicial $x_1(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 66 \times 10^{-3}$, $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

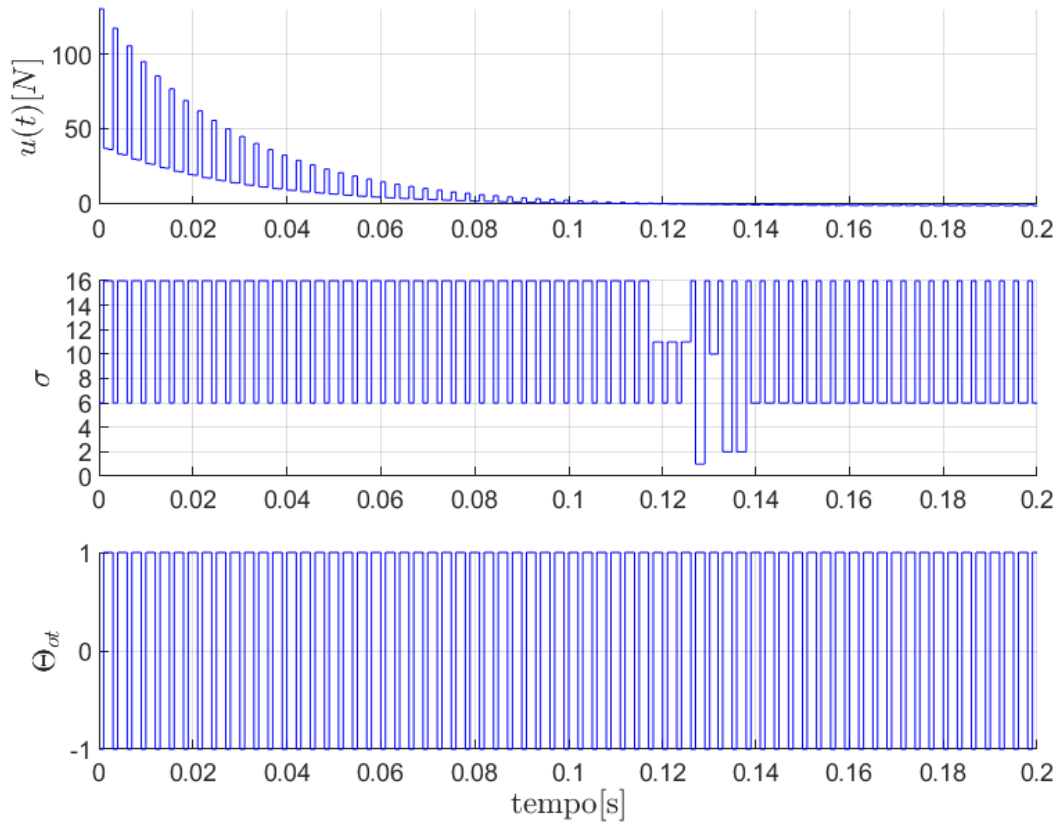
Figura 43 – Comportamento da variável de estado $x_3(t)$ a partir de sua condição inicial $x_3(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 66 \times 10^{-3}$, $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

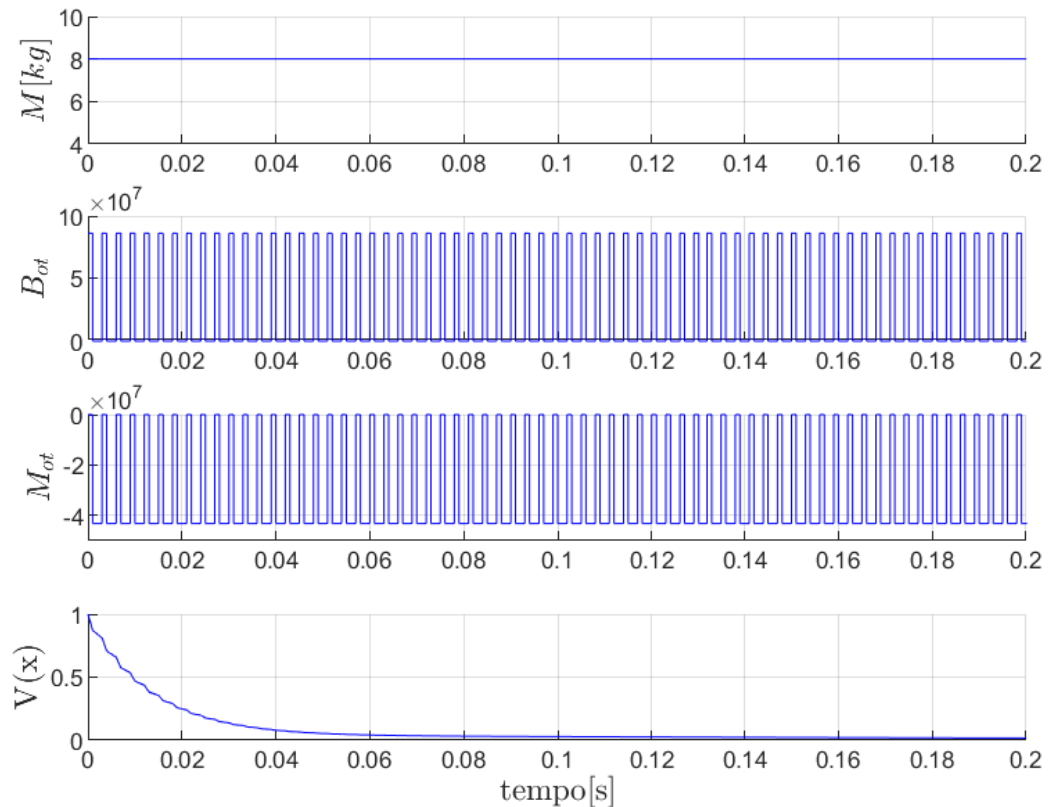
Nas Figuras 44 e 45 é possível observar o detalhe de funcionamento do controlador através do sinal de controle $u(t)$, chaveamento dos ganhos σ , e pela ação do otimizador, através da leitura dos parâmetros Θ_{ot} , B_{ot} (Reiniciador) e M_{ot} (Comparador). Além disso, observa-se a função de Lyapunov $V(x)$ partindo de 1 e indo a 0.

Figura 44 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 45 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho fixa em $M = 8kg$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

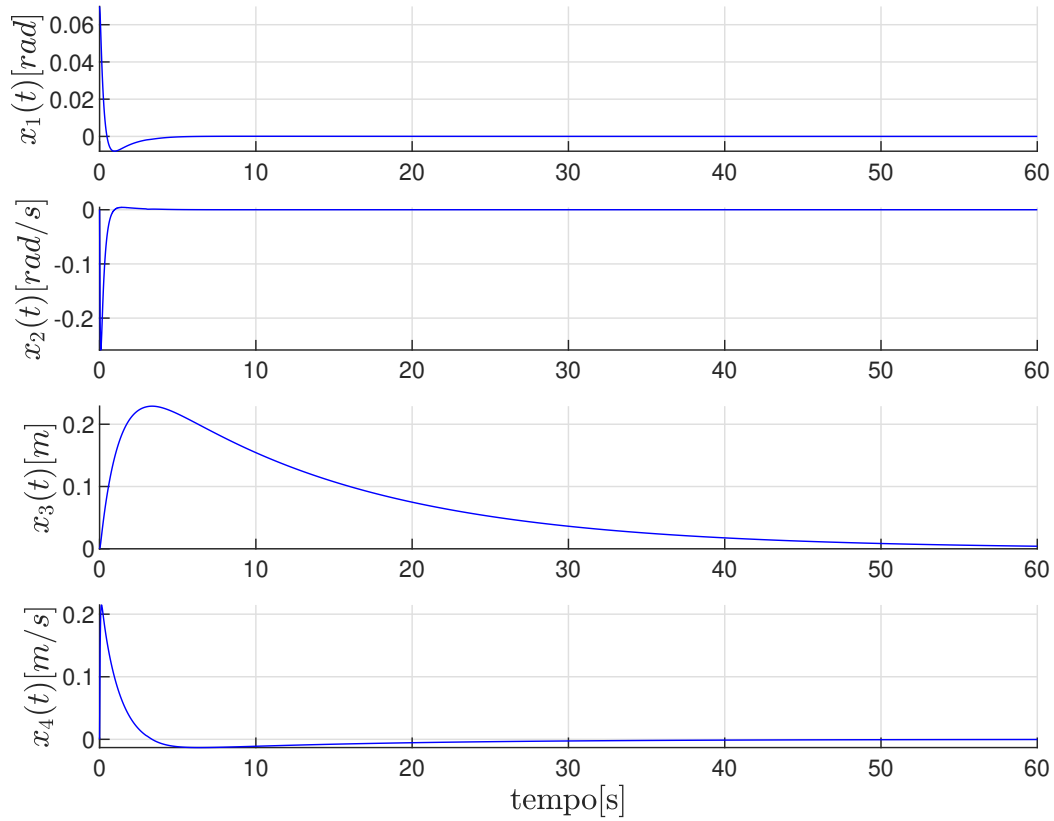
5.4.6 Simulação do Cenário 4

No Cenário 4 considera-se β grande, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, a massa do carrinho variável e condição inicial no limite do domínio D_2 . Logo:

- A força de atrito entre as rodas do conjunto e a superfície, $f_c = 0$;
- $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (no limite do domínio D_2);
- A massa do carrinho variou com o tempo, de forma que $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$.

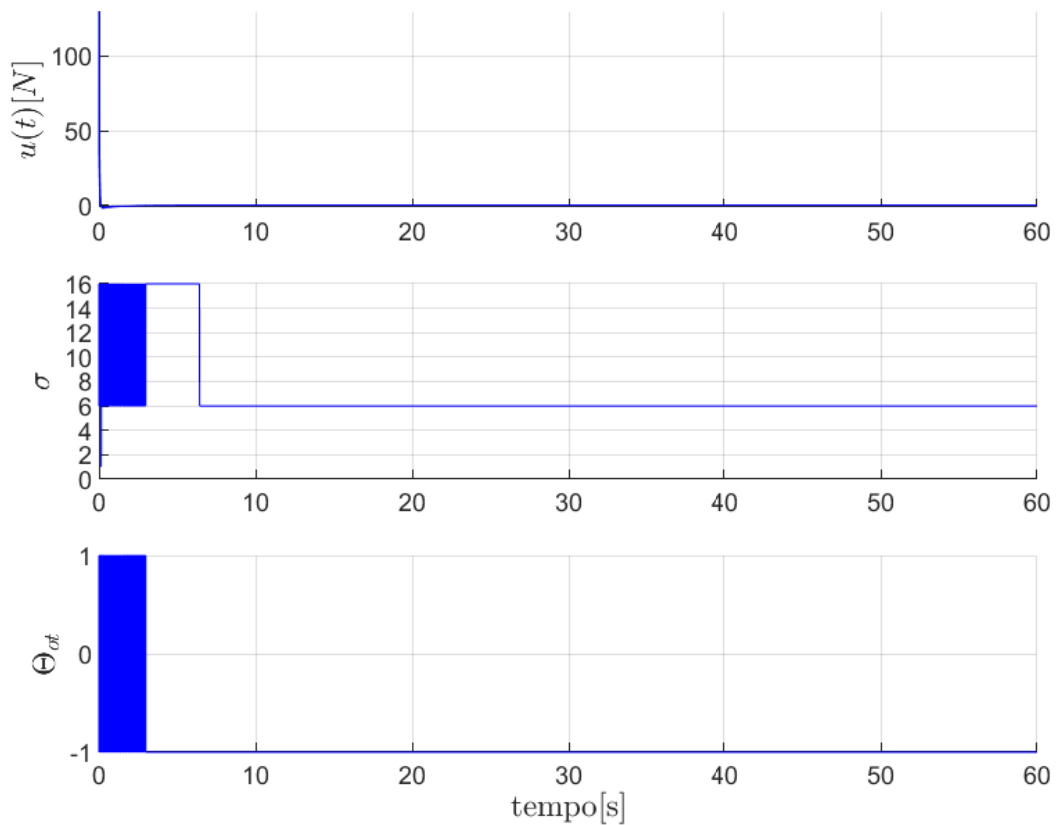
A resposta temporal do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, é mostrada nas Figuras 46-48.

Figura 46 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: variáveis de estado $x(t)$.



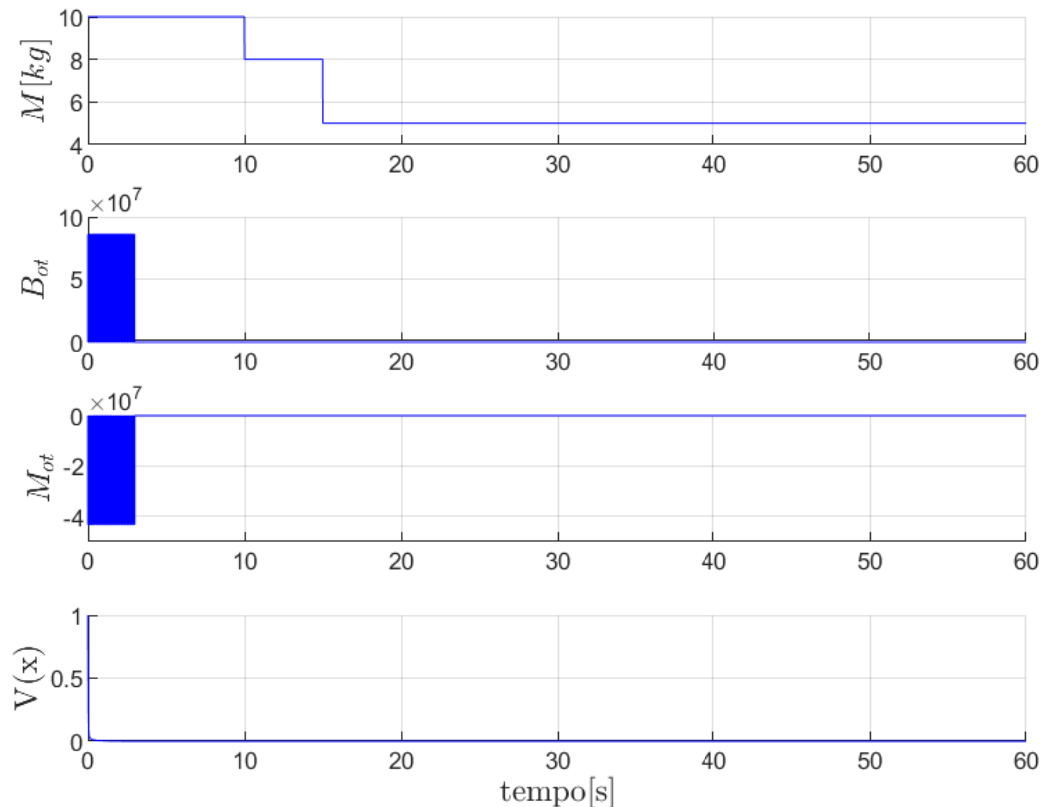
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 47 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 48 – Resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Tabela 12 encontram-se os valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 4.

Tabela 12 – Valores máximos e mínimos do sinal de entrada e das variáveis de estado para o Cenário 4.

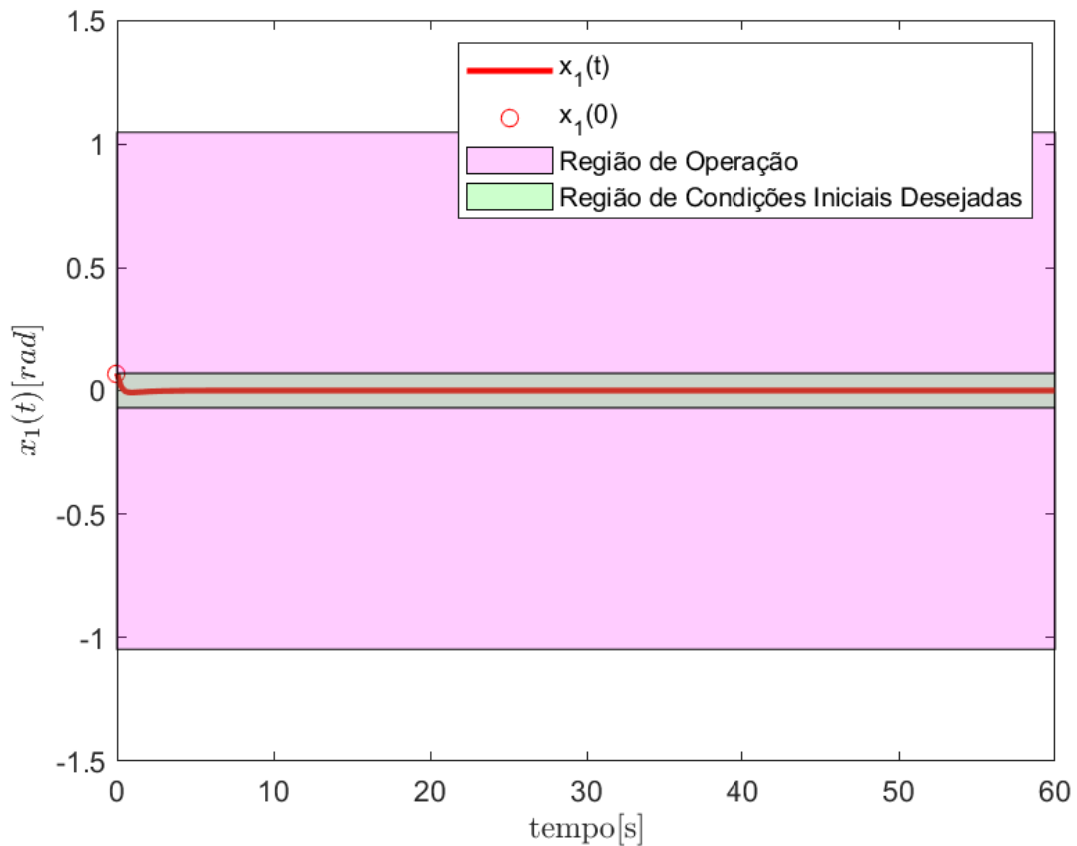
Variável	Valor Máximo	Tempo [s]	Valor Mínimo	Tempo [s]
$u(t)$	130,31	1×10^{-3}	-2,195	0,236
$x_1(t)$	0,069813	1×10^{-3}	-0,0079495	0,96
$x_2(t)$	0,0043306	1,447	-0,25887	0,080
$x_3(t)$	0,229	3,359	0	1×10^{-3}
$x_4(t)$	0,21473	0,125	-0,013178	6,394

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observa-se que para uma condição inicial no limite da região de condições iniciais definida em (187), o sistema respondeu de forma adequada, e dentro do limite da região de operação especificada em (185) e (186), mesmo com a massa do carrinho sofrendo variações. Os valores máximos e mínimos da Tabela 12 são bem próximos aos obtidos na Tabela 11, o que mostra que a variação da massa do carrinho não interferiu de forma significativa nestes valores. Não foi observado mudanças significativas no comportamento das variáveis de estado com a mudança da massa do carrinho.

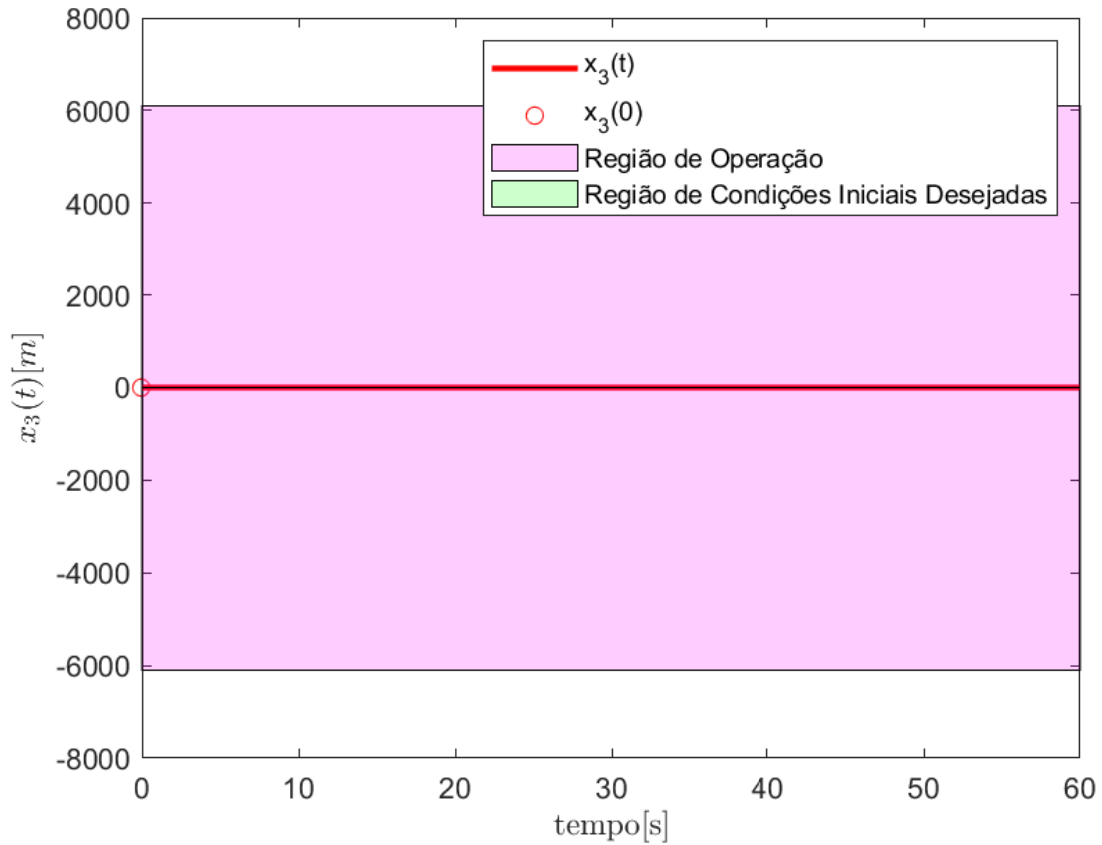
Nas Figuras 49 e 50 é possível observar a relação de $x_1(t)$ e $x_3(t)$ com seus respectivos valores iniciais ($x_1(0)$ e $x_3(0)$), suas regiões de operação (\mathcal{X}), definida em (185) e (186), e a região de condições iniciais desejadas, definida em (187). Com $x_1(0)$ no limite da região de condições iniciais desejadas, a variável de estado foi ao equilíbrio ($x_1 = 0$), permanecendo o tempo todo dentro de sua região de operação.

Figura 49 – Comportamento da variável de estado $x_1(t)$ a partir de sua condição inicial $x_1(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 66 \times 10^{-3}$, $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

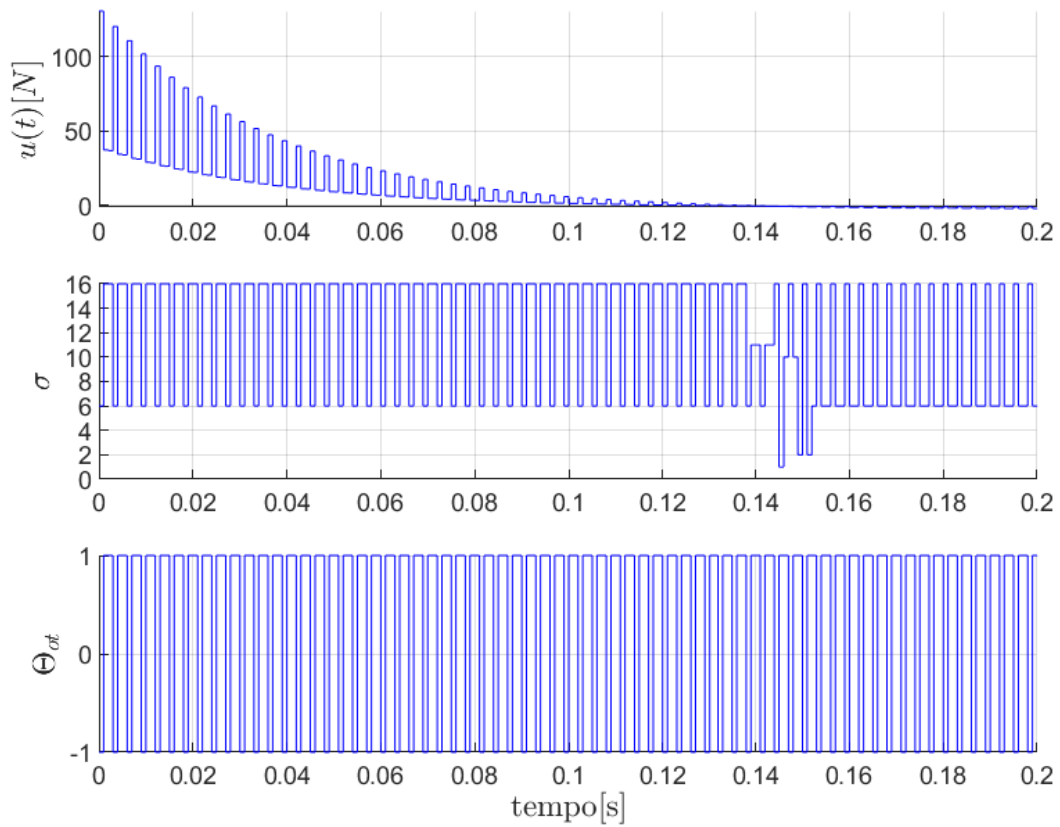
Figura 50 – Comportamento da variável de estado $x_3(t)$ a partir de sua condição inicial $x_3(0)$, sua região de operação (\mathcal{X}), e região de condições iniciais desejadas (\mathfrak{X}), para $\beta = 66 \times 10^{-3}$, $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

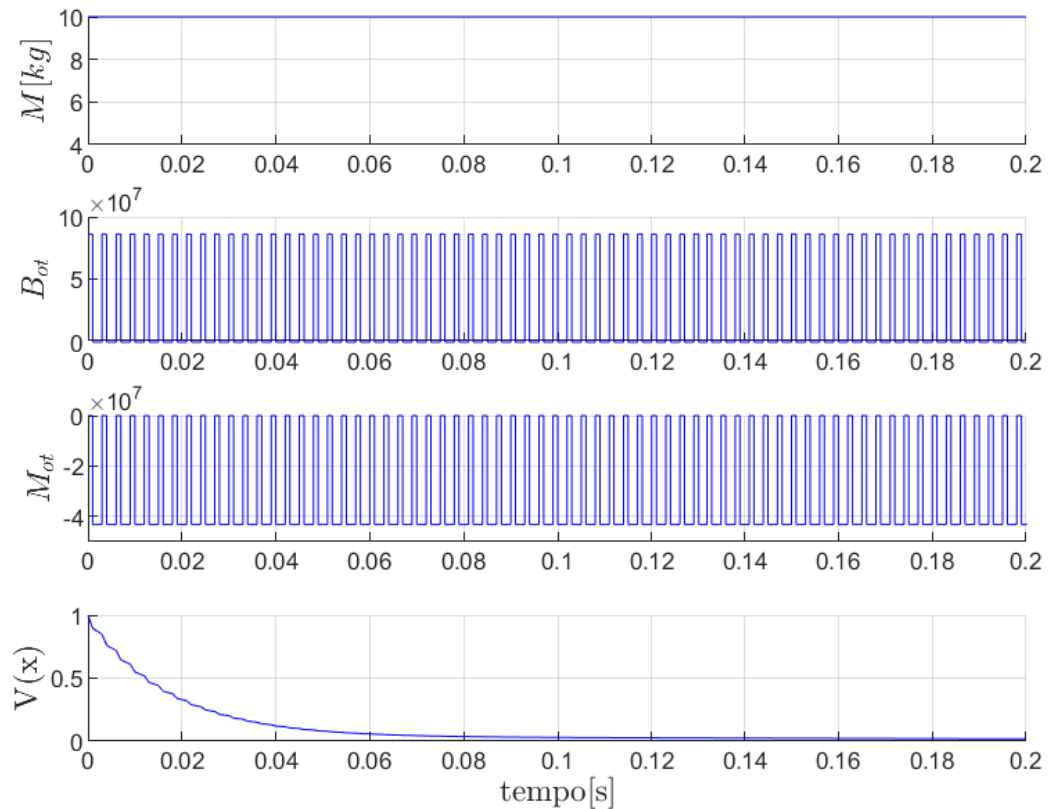
Nas Figuras 51 e 52 é possível observar o detalhe de funcionamento do controlador através do sinal de controle $u(t)$, chaveamento dos ganhos σ , e pela ação do otimizador, através da leitura dos parâmetros Θ_{ot} , B_{ot} (Reiniciador) e M_{ot} (Comparador). Além disso, observa-se a função de Lyapunov $V(x)$ partindo de 1 e indo a 0.

Figura 51 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle $u(t)$, índice de chaveamento σ , saída do otimizador Θ_{ot} .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 52 – Detalhe da resposta temporal para uma simulação do sistema pêndulo invertido, em malha fechada, com Otimizador Não Derivativo, $\beta = 66 \times 10^{-3}$, massa do carrinho variável $M(t) = 10kg$ para $t < 10s$, $M(t) = 8kg$ para $10s \leq t < 15s$, e $M(t) = 5kg$ para $t \geq 15s$, $x(0) = [\frac{4\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$: massa do carrinho M , Reiniciador B_{ot} , Comparador M_{ot} , Função de Lyapunov $V(x)$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Dentre os 4 cenários simulados, pode-se observar que o sistema de controle atuou de forma a estabilizar o sistema, respeitando a região de operação previamente especificada.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas condições relaxadas para o projeto de sistemas de controle chaveado, para uma classe de sistemas não lineares incertos descrita por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, utilizando um Otimizador Não Derivativo.

O controle chaveado proposto não utiliza na sua implementação parâmetros do modelo matemático da planta na forma de modelos fuzzy Takagi-Sugeno, que dependem de não linearidades e incertezas relacionadas às matrizes $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$.

O Otimizador Não Derivativo proposto em Teixeira e Žak (1998) é um método de busca extremal que proporciona robustez e eficiência ao projeto de busca pelo mínimo de uma função objetivo sem a necessidade de conhecer explicitamente a derivada de tal função. No Capítulo 3 o Otimizador T-Z foi aplicado como um método de Rastreamento do Ponto de Máxima Potência (“MPPT”), para o funcionamento eficiente de um sistema fotovoltaico, cujos resultados de simulação iniciais foram satisfatórios.

A representação exata dos sistemas não lineares incertos foi feita por modelos fuzzy T-S incertos, conforme apresentada na Seção 2.2, através de uma combinação convexa de modelos lineares locais. Como a representação exata do sistema não linear é determinada através de um domínio de atuação do sistema, ou seja, em uma região do espaço de estados, as leis de controle propostas encontram-se em um contexto local.

No Capítulo 4, condições LMIs garantiram então a operação do sistema em uma região de operação previamente especificada, e também LMIs asseguraram a região das condições iniciais do sistema. Os teoremas testados ainda garantiram, além da estabilidade, taxa de decaimento (tempo de resposta), e restrição no sinal de controle.

No Capítulo 5, foi descrito o projeto de controle chaveado utilizando o Otimizador Não Derivativo. No caso deste trabalho, a função objetivo foi uma função de Lyapunov para o sistema. Como exemplo, este projeto foi aplicado em um sistema pêndulo invertido, que foi representado através de modelos fuzzy T-S contendo incertezas. O sistema possuía a incerteza da massa do carrinho, que era variável. Foram simulados 4 cenários possíveis, sendo a massa do carrinho fixa ou variável, e a taxa de decaimento pequena ou grande. Em todos os casos, o sistema foi controlado e respeitando a região de operação especificada. Nos gráficos apresentados foi possível verificar a atuação do otimizador, através de alguns de seus parâmetros monitorados.

Para o projeto de um controlador chaveado para um sistema não linear, o Otimizador Não Derivativo se mostrou eficiente na busca do mínimo de uma função Lyapunov, escolhendo entre subsistemas do projeto a partir dos ganhos do controlador (K_{σ_1} ou K_{σ_2} , $\{\sigma_1; \sigma_2\} \in \mathbb{K}_r$). Esta metodologia permitiu o projeto com um nível maior de incertezas na planta, quando comparada com resultados provenientes de procedimentos similares.

Assim, o otimizador associado ao sistema foi capaz de fazer a melhor opção de escolha entre os ganhos de realimentação de modo contínuo.

Mais especificamente, as condições de projeto de controladores chaveados utilizando otimizadores não derivativos propostas podem ser descritas pelos Teoremas 1 e 2, enquanto que o Teorema 3 apresenta condições que já foram utilizadas com sucesso no projeto de controladores chaveados, sem o acesso às funções de pertinência do modelo fuzzy T-S da planta, que podem depender de parâmetros incertos. Nos exemplos numéricos foi possível observar que os Teoremas 1 e 2 apresentaram uma região de factibilidade maior do que a obtida com o Teorema 3. Este fato ilustra o principal resultado desta tese, que é a relaxação das condições para o projeto de controladores chaveados utilizando otimizadores não derivativos, mitigando no projeto a influência das incertezas na matriz de entrada $B(\alpha)$ da planta, representada através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

6.1 Perspectivas Futuras

Como extensão da pesquisa deste estudo, sugere-se:

- Procurar aplicar a estrutura proposta em outros problemas de controle, por exemplo, considerando adicionalmente distúrbios casados (somados à entrada da planta) e/ou minimizando a norma H_∞ e/ou levando-se em conta a saturação do sinal de entrada;
- Outra ideia seria usar outros otimizadores na estrutura do sistema de controle chaveado proposta.

REFERÊNCIAS

- ALONSO GARCÍA, M.; BALENZATEGUI, J. Estimation of photovoltaic module yearly temperature and performance based on nominal operation cell temperature calculations. *Renewable Energy*, Oxford, v. 29, n. 12, p. 1997–2010, 2004. ISSN 0960-1481. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148104001260>>. Acesso em: 2 jul. 2022.
- ALVES, U. N. L. T. *Controle Chaveado e Chaveado Suave de Sistemas Não Lineares Incertos via Modelos Fuzzy T-S*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2017.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R. de; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. de. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Chichester, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/acs.2671>>. Acesso em: 5 jan. 2022.
- AMINDE, N. O. *Controle Extremal via Funções de Monitoração e Realimentação de Saída*. 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, jul. 2013.
- ARIYUR, K. B.; KRSTIC, M. *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. Hoboken, New Jersey: JOHN WILEY & SONS, 2003.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207170701283899>>. Acesso em: 10 ago. 2021.
- BLANCHINI, F. Set invariance in control. *Automatica*, Elmsford, v. 35, n. 11, p. 1747–1767, 1999. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109899001132>>. Acesso em: 20 abr. 2021.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. v. 15. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- BP SOLAR. *120-Watt Multicrystalline Photovoltaic Module*. [S.l.], 2002. 01-4003-2.
- BUZETTI, A. S. *Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas nos Sensores*. 2017. 87 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.
- CALLI, B.; CAARLS, W.; JONKER, P.; WISSE, M. Comparison of extremum seeking control algorithms for robotic applications. In: *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Vilamoura, Algarve, Portugal: [s.n.], 2012. p. 3195–3202. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/6386180>>. Acesso em: 20 abr. 2022.

- CALLI, B.; CAARLS, W.; WISSE, M.; JONKER, P. P. Active vision via extremum seeking for robots in unstructured environments: Applications in object recognition and manipulation. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, New York, v. 15, n. 4, p. 1810–1822, 2018. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8310020>>. Acesso em: 30 set. 2021.
- CARDIM, R. *Projeto de Controladores baseados em LMIs: Realimentação Derivativa e Sistemas Chaveados utilizando Estrutura Variável*. 2009. 120 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- CARRIJO, D. R.; FERREIRA, R. S.; JUNIOR, S. C. G.; CAMACHO, J. R. Uma proposta de técnica de rastreamento de máxima potência de um painel fotovoltaico. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. Bonito, MS, Brasil: [s.n.], 2010. p. 2543–2548.
- CELIK, A. N.; ACIKGOZ, N. Modelling and experimental verification of the operating current of mono-crystalline photovoltaic modules using four- and five-parameter models. *Applied Energy*, London, v. 84, n. 1, p. 1–15, 2007. ISSN 0306-2619. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261906000511>>. Acesso em: 15 set. 2021.
- CHEN, Y.-J.; OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, W.-J.; WANG, H. Relaxed stabilization criterion for T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise-Lyapunov-function-based switching fuzzy controller. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 20, n. 6, p. 1166–1173, dec. 2012. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/6189778>>. Acesso em: 27 dez. 2021.
- DING, B.; SUN, H.; YANG, P. Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*, Elmsford, v. 42, n. 3, p. 503–508, 2006. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109805004085>>. Acesso em: 15 out. 2021.
- DONG, J.; WANG, Y.; YANG, G.-H. Control synthesis of continuous-time T-S fuzzy systems with local nonlinear models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, New York, v. 39, n. 5, p. 1245–1258, 2009. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4804711>>. Acesso em: 5 fev. 2021.
- DONG, J.; YANG, G.-H. State feedback control of continuous-time T–S fuzzy systems via switched fuzzy controllers. *Information Sciences*, New York, v. 178, n. 6, p. 1680–1695, 2008. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025507005257>>. Acesso em: 5 fev. 2021.
- FANG, C.-H.; LIU, Y.-S.; KAU, S.-W.; HONG, L.; LEE, C.-H. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 14, n. 3, p. 386–397, jun. 2006. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/1638455>>. Acesso em: 7 mar. 2021.
- FERNANDES, U. B. *Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes Aplicado em Sistema de Suspensão Ativa*. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.

- GUAY, M.; ZHANG, T. Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties. *IFAC Proceedings Volumes*, Laxenburg, v. 35, n. 1, p. 459–464, 2002. ISSN 1474-6670. 15th IFAC World Congress. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667015390662>>. Acesso em: 11 abr. 2021.
- HEYDARI-DOOSTABAD, H.; KEYPOUR, R.; KHALGHANI, M. R.; KHOOBAN, M. H. A new approach in MPPT for photovoltaic array based on extremum seeking control under uniform and non-uniform irradiances. *Solar Energy*, Kidlington, v. 94, p. 28–36, 2013. ISSN 0038-092X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038092X13001771>>. Acesso em: 15 abr. 2021.
- KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, n. 5, p. 523–534, 2000. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/873576>>. Acesso em: 17 mai. 2021.
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T–S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Heidelberg, v. 26, p. 191–200, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40313-015-0172-8>>. Acesso em: 20 jun. 2021.
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; LEITE, V. J.; SILVA, L. F. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear takagi–sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 263, p. 92–111, 2015. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011414002632>>. Acesso em: 9 ago. 2021.
- KOROVIN, S.; UTKIN, V. Using sliding modes in static optimization and nonlinear programming. *Automatica*, Elmsford, v. 10, n. 5, p. 525–532, 1974. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109874900533>>. Acesso em: 11 set. 2021.
- KRSTIĆ, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, Elmsford, v. 36, n. 4, p. 595–601, 2000. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109899001831>>. Acesso em: 12 set. 2021.
- LAM, H. A review on stability analysis of continuous-time fuzzy-model-based control systems: from membership-function-independent to membership-function-dependent analysis. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Amsterdam, v. 67, p. 390–408, 2018. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095219761730221X>>. Acesso em: 12 set. 2021.
- LAM, H. K.; NARIMANI, M. Stability analysis and performance design for fuzzy-model-based control system under imperfect premise matching. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 17, n. 4, p. 949–961, 2009. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4565671>>. Acesso em: 15 set. 2021.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A new fuzzy Lyapunov function for relaxed stability condition of continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE*

Transactions on Fuzzy Systems, New York, v. 19, n. 4, p. 785–791, 2011. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/5750043>>. Acesso em: 7 out. 2021.

LEE, Y.; ŽAK, S. Designing a genetic neural fuzzy antilock-brake-system controller. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, New York, v. 6, n. 2, p. 198–211, 2002. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/996019>>. Acesso em: 10 out. 2021.

LEE, Y.; ZAK, S. Genetic neural fuzzy control of anti-lock brake systems. In: *Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No.01CH37148)*. Arlington: [s.n.], 2001. v. 2, p. 671–676 vol.2. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/945791>>. Acesso em: 27 dez. 2021.

LIU, X.; ZHANG, Q. Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for T-S fuzzy systems. *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 6, p. 830–839, 2003. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/1255418>>. Acesso em: 7 ago. 2021.

LIU, X.; ZHANG, Q. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, Elmsford, v. 39, n. 9, p. 1571–1582, 2003. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109803001729>>. Acesso em: 10 out. 2021.

Lofberg, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*. Taipei: [s.n.], 2004. p. 284–289. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/1393890>>. Acesso em: 7 ago. 2020.

MACHADO, E. R. M. D. *Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2003.

MONTANARI, L. A. Aplicação do otimizador analógico não derivativo Teixeira & Žak junto ao controle chaveado em sistemas lineares chaveados com direção incerta no sinal de realimentação. Trabalho de Conclusão de Curso. Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista. 2016.

MONTEIRO, J. C. E. *Optimization of Nonlinear Systems with Uncertain Objective Functions via Sliding-Mode Control*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2020.

MORSLI, A.; TLEMÇANI, A.; KRAMA, A.; ABBADI, A.; LAID, Z.; NOURI, H. Application of the direct power control strategy in a shunt active filter by exploiting the solar photovoltaic energy as a continuous source. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Kyiv, v. 20, p. 410–424, 10 2020. Disponível em: <<https://uwe-repository.worktribe.com/output/6821796>>. Acesso em: 18 jul. 2021.

MOSEK. *MOSEK Optimization Suite*: Release 9.2.40. Copenhagen, Denmark, 2021. 11 p.

NJOMO, A. F. T.; KENNE, G.; DOUANLA, R. M.; SONFACK, L. L. A modified ESC algorithm for MPPT applied to a photovoltaic system under varying environmental conditions. *International Journal of Photoenergy*, New York, v. 2020, 2020. ISSN

- 1110-662X. Disponível em: <<https://www.hindawi.com/journals/ijp/2020/1956410/>>. Acesso em: 5 jan. 2022.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4th. ed. New York: Prentice Hall, 2003. 800 p.
- OLIVEIRA, D. R. *Controle \mathcal{H}_∞ chaveado para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy T-S considerando região de operação e saturação do sinal de controle*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2017.
- OLIVEIRA, T. R.; HSU, L.; PEIXOTO, A. J. Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with application to extremum-seeking control. *Automatica*, Elmsford, v. 47, n. 9, p. 2029–2038, 2011. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109811002949>>. Acesso em: 6 fev. 2022.
- OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; HSU, L. Global real-time optimization by output-feedback extremum-seeking control with sliding modes. *Journal of the Franklin Institute*, New York, v. 349, n. 4, p. 1397–1415, 2012. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003211002031>>. Acesso em: 6 fev. 2022.
- OLIVEIRA, T. R. de. *Rastreamento para Sistemas Incertos Fortemente Não-Lineares com Direção de Controle Desconhecida*. 2010. 165 f. Tese (Doutorado) — COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- PEIXOTO, A. J. *Rastreamento de Trajetória por Modos Deslizantes de uma Classe de Sistemas Não-Lineares Incertos via Realimentação de Saída*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2007.
- PERES, J. C.; RAMOS, I. T. M.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controlador robusto chaveado com custo garantido para sistemas lineares incertos. *Anais da XIV Conferência Brasileira de Controle, Dinâmica e Aplicações*, 2019.
- PERUZZO, E. S.; PETERS JUNIOR, G. *Como é Realizado o MPPT*. 2021. Disponível em: <<https://blog.solarinove.com.br/como-e-realizado-o-mppt/>>. Acesso em: 10 fev. 2022.
- RIBEIRO, J. M. d. S. *Controle Discreto com Modos Deslizantes em Sistemas Incertos com Atraso no Sinal de Controle*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2006.
- SALA, A.; ARIÑO, C. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 158, n. 24, p. 2671–2686, 2007. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011407003284>>. Acesso em: 7 fev. 2022.
- SANTIM, M. P. A. *Projeto e Implementação com Chaveamento de Reguladores Fuzzy Takagi-Sugeno para um Conjunto de Pontos de Operação*. 2012. 84 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012.

- SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, p. 17, 2012. Disponível em: <<http://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/731298/>>. Acesso em: 20 jul. 2020.
- SERA, D.; TEODORESCU, R.; RODRIGUEZ, P. PV panel model based on datasheet values. In: *2007 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Vigo: [s.n.], 2007. p. 2392–2396. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4374981>>. Acesso em: 10 fev. 2022.
- ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIĆ, D. M. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 6, n. 5, p. 461–493, jun. 2000. Disponível em: <<http://www.hindawi.com/journals/mpe/2000/810975/abs/>>. Acesso em: 25 mai. 2020.
- SILVA, L. R. C. *Análise De Técnicas De Rastreamento De Máxima Potência (MPPT) Para Aplicação Em Arranjos De Sistemas Fotovoltaicos Conectados á Rede*. 2015. 117 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal De Uberlândia, Uberlândia, MG, 2015.
- SILVA, P. H. G. L.; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Controle de sistemas chaveados lineares com grandes incertezas utilizando um otimizador analógico não derivativo. In: *Anais ..., Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*. São José do Rio Preto, SP: [s.n.], 2017.
- SILVA, P. H. G. L. da. *Controle Chaveado de Sistemas com Incertezas utilizando Otimizadores não Derivativos*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2020.
- SOUSA, M. H. N. Estudo de novas aplicações de otimizadores analógicos não derivativos. Relatório de Iniciação Científica. Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista. 2018.
- SOUZA, W. A. *Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2013.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, Dec 2014. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/6722917>>. Acesso em: 10 fev. 2022.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2014, p. 11, 2014. Disponível em: <<https://www.hindawi.com/journals/mpe/2014/721537/>>. Acesso em: 18 jul. 2020.
- SPELTA, M. J. M. *Busca Extremal Utilizando Controle por Modos Deslizantes Aplicada à Geração de Energia Através de Módulos Fotovoltaicos*. 158 p. Monografia (Projeto de Graduação) — Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro Paulo, 2017.

STERNBY, J. Adaptive control of extremum systems. *Technical Reports; TFRT*, p. 151–160, 1980.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, New York, v. 11–12, p. 625–653, 1999. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10556789908805766>>. Acesso em: 25 jul. 2020.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, feb. 1985. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/6313399>>. Acesso em: 18 jul. 2020.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, may 1998. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/669023>>. Acesso em: 18 jul. 2020.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis: a Linear Matrix Inequality approach*. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, aug. 2001. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/940966>>. Acesso em: 18 jul. 2020.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, out. 2003. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/1235989>>. Acesso em: 7 ago. 2021.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Analog neural nonderivative optimizers. *IEEE Transactions on Neural Networks*, New York, v. 9, n. 4, p. 629–638, 1998. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/701176>>. Acesso em: 20 nov. 2020.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, abr. 1999. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/755395>>. Acesso em: 20 abr. 2021.

TOH, K. C.; TODD, M. J.; TütüNCü, R. H. Sdpt3 — a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization Methods and Software*, New York, v. 11, n. 1–4, p. 545–581, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10556789908805762>>. Acesso em: 20 nov. 2020.

VENDRAMINI, G.; SILVA, P. S. da. Controle de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel utilizando PID e MFAC (Model-Free Adaptive Control). In: *Anais ..., Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*. Serra Negra, SP: [s.n.], 2010.

WITTENMARK, B.; EVANS, R. Extremal control of wiener model processes. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*. Las Vegas:

[s.n.], 2002. v. 4, p. 4637–4642 vol.4. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/1185109>>. Acesso em: 20 abr. 2021.

WITTENMARK, B.; URQUHART, A. R. Adaptive extremal control. *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, v. 2, p. 1639–1644 vol.2, 1995. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/480374>>. Acesso em: 15 fev. 2022.

WU, Y.; MAHMUD, M. H.; MOORTHY, R. S. K.; CHINTHAVALI, M.; ZHAO, Y. Adaptive extremum seeking control based LCL filter resonant frequency online estimation. *IEEE Transactions on Power Electronics*, New York, v. 37, n. 1, p. 59–64, 2022. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9507076>>. Acesso em: 20 abr. 2022.

ZHANG, C.; ORDONEZ, R. Non-gradient extremum seeking control of feedback linearizable systems with application to ABS design. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego: [s.n.], 2006. p. 6666–6671. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4177772>>. Acesso em: 23 mar. 2022.

ZHANG, T.; GUAY, M.; DOCHAIN, D. Adaptive extremum seeking control of continuous stirred tank bioreactors. *IFAC Proceedings Volumes*, Laxenburg, v. 35, n. 1, p. 449–454, 2002. ISSN 1474-6670. 15th IFAC World Congress. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667015398050>>. Acesso em: 11 abr. 2021.