UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Cálculo fracionário aplicado ao modelo de Lotka-Volterra: controle biológico no cultivo da cana-de-açúcar

Wanderley Silva Ferreira Júnior

Orientador: Prof. Dr. Rubens de Figueiredo Camargo

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Bauru, Fevereiro de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Cálculo fracionário aplicado ao modelo de Lotka-Volterra: controle biológico no cultivo da cana-de-açúcar

Wanderley Silva Ferreira Júnior

Orientador: Prof. Dr. Rubens de Figueiredo Camargo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Bauru, Fevereiro de 2024

F383c

Ferreira Júnior, Wanderley Silva
Cálculo fracionário aplicado ao modelo de Lotka-Volterra : controle biológico no cultivo da cana-de-açúcar / Wanderley Silva Ferreira Júnior. -- Bauru, 2024
86 f. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientador: Rubens de Figueiredo Camargo

1. Matemática. 2. Cálculo Fracionário. 3. Modelagem. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Cálculo fracionário aplicado ao modelo de Lotka-Volterra: controle biológico no cultivo da cana-de-açúcar

AUTOR: WANDERLEY SILVA FERREIRA JÚNIOR

ORIENTADOR: RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO (Participaçao Virtual)
Departamento de Matematica / Faculdade de Ciencias de Bauru - UNESP

gov.br Documento assinado digitalmente
RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO
Data: 14/09/2023 14:05:40-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA (Participaçao Virtual)
Departamento de Matematica / Faculdade de Ciencias de Bauru - UNESP

gov.br Documento assinado digitalmente
FABIANO BORGES DA SILVA
Data: 22/11/2023 15:59:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. ESTER CRISTINA FONTES DE AQUINO ROSA (Participaçao Virtual)
Seção de Cálculo / EsPCEx

gov.br Documento assinado digitalmente
ESTER CRISTINA FONTES DE AQUINO ROSA
Data: 21/11/2023 17:25:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Presidente Prudente, 06 de setembro de 2023

Dedico este trabalho aos meus pais, Ivone e Wanderley, por terem me ensinado um pouco sobre a vida, cada um a sua maneira. Dedico à Thaís Nogueira, a mulher maravilhosa com quem pretendo dividir todos os meus dias. Dedico à minha irmã, Monique, por ser minha inspiração de dedicação e vontade de aprender.

Agradecimentos

Primeiramente desejo agradecer aos meus pais, Ivone e Wanderley, por me ensinarem a ser a pessoa que eu sou hoje e por sempre fazerem tudo o que podem por mim e pela minha irmã. Sem eles, a minha jornada sequer teria começado.

Agradeço ao meu tio, Roberto, que dentro do meu coração é como um pai. Obrigado por dedicar a sua vida para cuidar de mim.

Agradeço à minha irmã, Monique, que apesar de ser mais nova, me ensina todos os dias o que é ter força de vontade e disciplina para atingir um objetivo.

Agradeço à minha namorada, Thaís, por sempre estar presente me apoiando em tudo e ser uma pessoa incrível. Com ela os momentos difíceis ficaram mais fáceis, me ajudando a nunca desistir.

Agradeço ao meu primo, Anderson, por sempre ser uma inspiração na vida acadêmica e por compartilhar comigo os seus sucessos e dificuldades, além de ouvir os meus relatos desta caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rubens de Figueiredo Camargo, quero demonstrar os meus mais sinceros agradecimentos e gratidão, pois não só aprendi sobre Cálculo Fracionário, aprendi sobre a vida, sobre a ciência e sobre o mundo acadêmico. As aulas sempre eram ótimos momentos e tenho a certeza de que, mais do que um orientador, tenho nele um amigo nesta jornada acadêmica. Muito obrigado, Rubão!

Agradeço aos meus amigos de curso, que me acompanham desde a graduação: Allan, Dryelly, Hugo, Igor e Pietra, vocês foram essenciais para que eu chegasse até aqui. Muito obrigado!

Agradeço à Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP) pelo apoio financeiro durante a minha formação e pesquisa.

"Um único sonho é mais poderoso do que mil realidades"

J.R.R Tolkien

Resumo

Este trabalho versa sobre o Cálculo Fracionário aplicado ao problema predador-presa do sistema de Lotka-Volterra, visando obter resultados acerca do controle biológico no cultivo da cana-de-açúcar. Para realizar a análise são utilizadas representações gráficas geradas por métodos numéricos, que evidenciam o fato do Cálculo Fracionário ser apropriado para o estudo. As ferramentas aqui utilizadas sugerem aplicabilidade para uma vasta classe de problemas, sendo a proposta deste trabalho comparar qualitativamente os resultados obtidos.

Palavras-Chave: Cálculo fracionário; Derivada fracionária de Caputo; Modelagem fracionária; Sistema de Lotka-Volterra.

Abstract

This paper deals with the Fractional Calculus applied to the predator-prey problem of the Lotka-Volterra's system, to obtain results about the biological control in the cultivation of sugar cane. To perform the analysis of the study, graphical representations generated by numerical methods are used, proving that Fractional Calculus is appropriate for the study object. The tools used here suggest applicability to a wide range of problems, and the purpose of this paper is to compare the results obtained qualitatively.

Keywords: fractional calculus; Caputo's fractional derivative; fractional modelling; Lotka-Volterra's system.

Lista de Figuras

3.1 Morfologia do colmo da cana-de-açúcar. **a.** Colmo da planta. **b.** Detalhe para uma gema presente disposta alternadamente no colmo. **G** = gema; **Zr** = zona radicular. 30

3.2 **A.** Disposição das folhas, localização do nó e do entrenó no colmo. **B.** Detalhes das estruturas contidas no nó 30

3.3 Ciclo de vida da broca da cana-de-açúcar (*Diatraea saccharalis*) 32

4.1 Estrutura do modelo de Lotka-Volterra 39

5.1 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$: 52

5.2 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$: 53

5.3 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$: 53

5.4 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$: 54

5.5 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$: 55

5.6 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$: 55

5.7 Retrato de fase: presa x predador para o ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* e 53 dias da *Diatraea saccharalis* com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas: 56

5.8 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$: 57

5.9 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$: 57

5.10 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$: 58

5.11 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.99$: 58

5.12 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.98$: 59

5.13 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 1.00$: 59

5.14 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 1.00$: 60

5.15 Retrato de fase: presa x predador para o ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* e 53 dias da *Diatraea saccharalis* com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas: 62

5.16 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$: 62

5.17 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$: 63

5.18 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$: 63

5.19 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.99$: 64

5.20 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.98$: 64

5.21 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 1.00$: 65

5.22 Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 1.00$: 65

5.23 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$: 67

5.24 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$: 68

5.25 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$: 68

5.26 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$: 69

5.27 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$: 70

5.28 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$: 70

5.29 Retrato de fase: presa x predador para o ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* e 70 dias da *Diatraea saccharalis* com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas: 71

5.30 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$: 72

5.31 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$: 72

5.32 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$: 73

5.33 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.99$: 73

5.34 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.98$: 74

5.35 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 1.00$: 74

5.36 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 1.00$: 75

5.37 Retrato de fase: presa x predador para o ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* e 70 dias da *Diatraea saccharalis* com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas: 77

5.38 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$: 77

5.39 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$: 78

5.40 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$: 78

5.41 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.99$: 79

5.42 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.98$: 79

5.43 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 1.00$: 80

5.44 Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 1.00$: 80

Lista de Tabelas

5.1 Dados utilizados para determinar as constantes a, b, c e d do sistema de Lotka-Volterra. 50

5.2 Parâmetros utilizados para um ciclo de vida com 20 dias da *Cotesia flavipes* e 53 dias da *Diatraea saccharalis*. 51

5.3 Parâmetros utilizados para um ciclo de vida com 24 dias da *Cotesia flavipes* e 70 dias da *Diatraea saccharalis*. 51

Conteúdo

Resumo **5**

Abstract **7**

Lista de Figuras **8**

Lista de Tabelas **13**

1 Introdução **19**

2 Cálculo Fracionário **21**

2.1 Origem do Cálculo Fracionário 21

2.2 Função Gama 22

2.3 Função Beta 23

2.4 Função de Gel'fand-Shilov 23

2.5 Integral fracionária de Riemann-Liouville 24

2.6 Derivada fracionária de Caputo 27

3 A cana-de-açúcar e o controle biológico **29**

3.1 Morfologia da cana-de-açúcar e a relevância mundial da cultura 29

3.2 Pragas da cana-de-açúcar 31

3.2.1 A broca da cana-de-açúcar e os danos causados no cultivo 32

3.3 Controle biológico 34

3.3.1 Controle biológico da broca da cana-de-açúcar pela vespinha *Cotesia flavipes* C. 35

4 Modelagem matemática **37**

4.1 Sistema de Lotka-Volterra 38

4.1.1 Estabilidade dos pontos críticos de um sistema quase linear 40
4.1.2 Estabilidade dos pontos críticos do Sistema de Lotka-Volterra . . . 42
4.2 Modelagem fracionária 44
4.2.1 Sistema de Lotka-Volterra fracionário 46
4.2.2 Método numérico 47

5 Resultados e principais considerações **49**
5.1 Parâmetros e valores iniciais utilizados 49
5.2 Análise gráfica 51
5.3 Considerações finais 82

Bibliografia **86**

Capítulo

1

Introdução

O processo de modelagem matemática, feito por meio de equações diferenciais, é utilizado em diversas áreas de pesquisa, tendo grande impacto na obtenção de resultados, uma vez que é possível estudar diferentes comportamentos de fenômenos reais por meio de expressões matemáticas que aproximam as características de tais fenômenos. Por envolverem equações diferenciais, os modelos matemáticos tratam de taxas de variação relacionadas com situações físicas reais, que podem ser estudadas utilizando ferramentas conhecidas do cálculo clássico.

Por outro lado, a área da matemática que estuda integrais e derivadas de ordem não inteira, isto é, o Cálculo de Ordem Arbitrária, popularmente conhecido como Cálculo Fracionário (CF), tem se mostrado uma poderosa ferramenta para a modelagem, uma vez que, em diversos casos, apresenta resultados que se aproximam melhor dos fenômenos reais. Em especial, o Brasil pode ser visto como vanguarda nos estudos dos operadores generalizados, com trabalhos e resultados inovadores que fomentam e estimulam os avanços das pesquisas no Cálculo Fracionário.

O modelo matemático estudado neste trabalho é constituído por equações diferenciais não lineares, que foram idealizadas de forma independente por Alfred James Lotka e Vito Volterra, para expressar a relação predador-presa entre duas populações, que interagem em um ambiente homogêneo. De forma específica, além do estudo das características do modelo, será levado em conta a sua aplicação no processo de controle biológico da broca da cana-de-açúcar, uma das principais pragas que afetam as plantações.

Tal aplicação se justifica por conta do Brasil ser um dos maiores produtores mundiais do cultivo, logo é essencial que exista preocupação em reduzir os danos no processo de produção e obtenção de produtos derivados, como o açúcar e o etanol. Como objetivo, é proposta a comparação qualitativa entre os resultados obtidos no processo de modelagem clássica e no processo fracionário, levando em conta a aplicação em questão. Para isto, será utilizado o conceito de derivada fracionária no sentido de Caputo, por conta dos efeitos de memória que são gerados pela não localidade do operador, além de que o mesmo compõe o método numérico utilizado nas simulações realizadas.

Para atingir o objetivo desejado, este trabalho está estruturado da seguinte maneira: o Capítulo 2 apresenta uma breve introdução histórica do Cálculo Fracionário, além das definições necessárias para a compreensão dos resultados, tendo como principal referência o livro dos autores Rubens de Figueiredo Camargo e Edmundo Capelas de Oliveira, publicado em 2015; no Capítulo 3 será apresentado o contexto da aplicação realizada, mostrando informações acerca do cultivo da cana-de-açúcar, pragas que prejudicam tal processo e informações sobre controle biológico; o Capítulo 4 é constituído de informações que norteiam a modelagem matemática e a modelagem fracionária, dando base para introduzir o sistema de Lotka-Volterra clássico, sua versão fracionária e possíveis caminhos para o estudo do sistema, bem como o método numérico utilizado para isto; por último, no Capítulo 5, serão apresentados os resultados preliminares obtidos por meio de comparações gráficas, que levam em conta as constatações da modelagem clássica feitas por Isaias de Jesus em sua dissertação, publicada em 2018, e as simulações realizadas utilizando a derivada fracionário de Caputo, além das considerações sobre tais resultados.

Capítulo

2

Cálculo Fracionário

Este capítulo tem como objetivo apresentar brevemente a história do Cálculo Fracionário (que também será identificado por CF), bem como as definições necessárias para a compreensão da modelagem matemática que será desenvolvida neste trabalho, além dos resultados que serão mostrados.

2.1 Origem do Cálculo Fracionário

O cálculo de ordem não inteira, conhecido popularmente como Cálculo Fracionário, é o campo matemático que estuda integrais e derivadas que possuem ordem arbitrária.

De acordo com Camargo e Oliveira (2015, p. 6), o Cálculo Fracionário tem o seu início no final do século XVII, em uma troca de cartas entre Leibniz e ℓ'Hôpital: nessa ocasião, Leibniz, um dos pais do cálculo de ordem inteira, formula uma questão que envolve a generalização da derivada de ordem inteira para a ordem arbitrária, sendo questionado por ℓ'Hôpital sobre o caso em que a ordem da derivada assume valor meio. Nas palavras de Camargo e Oliveira (2015, p. 6) "Leibniz apresenta o resultado e afirma: isto é, aparentemente, um paradoxo que um dia vai gerar várias consequências importantes.".

Apesar de sua origem no final do século XVII, o Cálculo Fracionário pode ser considerado ainda muito novo, uma vez que as primeiras conferências sobre o tema ocorreram apenas na segunda metade do século XX (CARPINTERI; MAINARDI, 1997, p. 224).

No Brasil, o primeiro texto completo em Português sobre as integrais e derivadas de ordem arbitrária é a tese de doutorado de Rubens de Figueiredo Camargo, publicada no ano de 2009, sob orientação do professor doutor Edmundo Capelas de Oliveira e coorientação do professor doutor Ary Orozimbo Chiacchio (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p. 33). Em 2015, o livro de Rubens de Figueiredo Camargo e Edmundo Capelas de Oliveira utilizado como referência neste trabalho é publicado, sendo a primeira obra formal em Português sobre o Cálculo Fracionário.

Na sequência serão apresentados alguns conceitos indispensáveis para o entendimento deste trabalho, bem como as definições da integral fracionária de Riemann-Liouville e da derivada fracionária segundo Caputo, tendo como referência o livro citado acima.

2.2 Função Gama

Uma das mais importantes funções especiais do Cálculo Fracionário é a função gama, responsável por generalizar a função fatorial e compor parte essencial da conversão dos operadores de integrais e derivadas de ordem inteira, para os operadores de ordem não inteira. Nesta seção, a função gama será definida tomando a integral imprópria associada ao fatorial, creditada a Euler (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p. 161).

Definição 2.2.1. *Tomando $n = 0, 1, 2, 3, ...$ A integral imprópria associada a $n!$ é dada por*

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n \mathrm{d}t = n!. \tag{2.1}$$

É possível fazer a mudança de $n + 1$ para um número complexo $z = x + iy$ em (2.1), com $x, y \in \mathbb{R}$ e $Re(z) > 0$, obtendo a função gama denotada por $\Gamma(z)$, de modo que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Para os fins deste trabalho, considera-se $z \in \mathbb{R}$ e $z > 0$ na expressão (2.2). Por se tratar de uma generalização da função fatorial para o caso fracionário, é possível mostrar que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^0 \mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1, \tag{2.3}$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z \mathrm{d}t = z\Gamma(z) = z!, \tag{2.4}$$

para a expressão (2.4), utiliza-se a integração por partes, de forma que

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z \, \mathrm{d}t, \tag{2.5}$$

$$\Gamma(z+1) = -e^{-t}t^z\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1} \, \mathrm{d}t, \tag{2.6}$$

o termo $-e^{-t}t^z\Big|_0^\infty$ vai para 0 quando avaliado no intervalo proposto. Logo, considerando (2.2)

$$\Gamma(z+1) = z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1} \, \mathrm{d}t = z\Gamma(z), \tag{2.7}$$

Das expressões (2.3) e (2.7) obtêm-se

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z(z-1)\Gamma(z-1) = z(z-1)(z-2)...(2)(1)\Gamma(1) = z!. \tag{2.8}$$

2.3 Função Beta

A função beta será apresentada neste trabalho visando sua utilização em exemplos de resolução para a integral e a derivada fracionárias que serão mostradas nas próximas seções, uma vez que é possível estabelecer uma importante relação entre ela e a função gama (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p. 162).

Definição 2.3.1. *Sejam ξ, $\eta \in \mathbb{R}$ tais que $\xi > 0$ e $\eta > 0$. A função beta denotada por $B(\xi, \eta)$ é tal que*

$$B(\xi, \eta) = \int_0^1 w^{\xi-1}(1-w)^{\eta-1}dw \tag{2.9}$$

Da expressão (2.9) é possível definir a relação entre as funções beta e gama, de forma que

$$B(\xi, \eta) = \int_0^1 w^{\xi-1}(1-w)^{\eta-1}dw = \frac{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\xi+\eta)} \tag{2.10}$$

2.4 Função de Gel'fand-Shilov

A função de Gel'fand-Shilov é uma das funções especiais que possuem grande importância dentro do Cálculo Fracionário, uma vez que compõe a definição da integral de ordem não inteira de Riemann-Liouville. Esta seção tem por objetivo definir a função de Gel'fand-Shilov, bem como sua generalização utilizando a função gama definida na seção 2.2.

Definição 2.4.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \in \mathbb{R}$, a função de Gel'fand-Shilov é definida como*

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & se\ t \geq 0, \\ 0 & se\ t < 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Para sua versão generalizada, utiliza-se da definição da função gama em relação ao fatorial da expressão (2.11), obtendo

$$\phi_\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & se\ t \geq 0, \\ 0 & se\ t < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

2.5 Integral fracionária de Riemann-Liouville

A integral fracionária de Riemann-Liouville tem papel essencial neste trabalho, uma vez que compõe a derivada fracionária de Caputo. Sua definição será dada considerando a generalização, por meio da função gama, da integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ de uma função $f(t)$, tendo $t \in \mathbb{R}$, que pode ser escrita como o produto de convolução de Laplace entre a função de Gel'fand-Shilov e $f(t)$ (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p. 40).

Antes de apresentar a definição da integral fracionária em pauta, para melhorar a compreensão desta seção, serão exibidas as definições de transformada e convolução de Laplace, segundo Camargo (2005), bem como a definição de integral de ordem n, segundo Camargo e Oliveira (2015).

Definição 2.5.1. *Seja $f(t)$ uma função de ordem exponencial definida no intervalo $0 \leq t < \infty$. A transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$, é dada pela integral*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t, \tag{2.13}$$

onde s é a variável transformada, com $Re(s) > 0$.

Em relação à definição 2.5.1, a transformada de Laplace do produto de duas funções não é o produto das transformadas. Logo, utiliza-se do produto de convolução, de forma que a sua transformada de Laplace seja o produto das transformadas.

Definição 2.5.2. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções de ordem exponencial definidas no intervalo $0 \leq t < \infty$, com transformadas de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ e $\mathcal{L}[g(t)]$, respectivamente. A*

convolução de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$, denotada por $f(t) * g(t)$, é dada pela integral

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau. \tag{2.14}$$

Definição 2.5.3. *A integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ de $f(t)$, com $t \in \mathbb{R}_+$, denotada pelo operador I, é dada por*

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\ \mathrm{d}t_n\ \mathrm{d}t_{n-1}\ \ldots\ \mathrm{d}t_3\ \mathrm{d}t_2\ \mathrm{d}t_1. \tag{2.15}$$

Para $n = 0$, define-se

$$I^0 f(t) = f(t). \tag{2.16}$$

Conhecendo as definições 2.5.2 e 2.5.3, é possível elencar o teorema a seguir, apresentado por Camargo e Oliveira (2015, p. 41), sobre o conceito de integral de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, por meio do produto de convolução de Laplace entre a função de Gel'fand-Shilov e a função $f(t)$. Este resultado será utilizado, através da generalização do fatorial pela função gama, para definir a integral fracionária de Riemann-Liouville.

Teorema 2.5.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ e $f(t)$ uma função integrável, então*

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) = \int_0^t \phi_n(t-\tau)f(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau. \tag{2.17}$$

Demonstração: *O teorema é demonstrado por meio de indução finita em n.*

Para $n = 1$, tem-se

$$If(t) = \int_0^t f(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{1-1}}{(1-1)!} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \phi_1(t-\tau)f(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \phi_1(t) * f(t). \tag{2.18}$$

Como hipótese de indução considera-se $I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t)$. Basta mostrar que a igualdade $I^{n+1} f(t) = \phi_{n+1}(t) * f(t)$ é válida. Logo, por hipótese indutiva, tem-se

$$I^{n+1} f(t) = I[I^n f(t)] = I[\phi_n(t) * f(t)] = \int_0^t \phi_n(u) * f(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^t \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}u. \tag{2.19}$$

Trocando a ordem de integração na expressão acima e calculando a integral interna, obtêm-se

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}\tau, \tag{2.20}$$

$$I^{n+1}f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \phi_{n+1}(t) * f(t), \tag{2.21}$$

que é o resultado desejado.

■

Pelo resultado do Teorema 2.5.1 e tomando $(n-1)! = \Gamma(n)$ por definição, a integral de Rieman-Liouville é definida a seguir, com base em Camargo (2009, p. 22).

Definição 2.5.4. *Seja f uma função contínua por partes e integrável em $[0, \infty)$. Para $t > 0$ e $Re(\alpha) > 0$, denota-se por $I^\alpha f(t)$ a integral de Riemann-Liouville de ordem α de $f(t)$, dada por*

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\ \mathrm{d}\tau. \tag{2.22}$$

Exemplo 2.5.1. *Integral Fracionária de Polinômios.*

Considerando $\mu \in \mathbb{R}$, com $\mu > -1$ e $t > 0$, determina-se $I^\alpha t^\mu$ como

$$I^\alpha t^\mu = \phi_\alpha(t) * t^\mu \tag{2.23}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\mu\ \mathrm{d}\tau. \tag{2.24}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = tu$, encontra-se

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-tu)^{\alpha-1} (tu)^\mu\ t\mathrm{d}u \tag{2.25}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t^{\alpha+\mu}) \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\mu \mathrm{d}u. \tag{2.26}$$

Tomando a definição 2.3.1, obtêm-se

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t^{\alpha+\mu}) \left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} \right) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} (t^{\alpha+\mu}) \tag{2.27}$$

Logo,

$$I^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} (t^{\alpha+\mu}) \tag{2.28}$$

Conhecendo a Definição 2.5.4, a próxima seção será destinada para a derivada fracionária segundo Caputo.

2.6 Derivada fracionária de Caputo

As definições de derivadas fracionárias são diversas. Na principal referência deste capítulo, o livro de Camargo e Oliveira (2015), é possível encontrar derivadas fracionárias no sentido de Riemann-Liouville, Weyl, Riesz e Caputo, dentre outras formulações. De fato, não existe uma única abordagem correta para a derivada fracionária, pois para cada situação modelada pela matemática, um tipo de derivada pode apresentar melhores resultados do que outros. Tudo depende do contexto em que a modelagem matemática está sendo feita.

Neste trabalho, a derivada fracionária de Caputo será utilizada, uma vez que em Caputo a derivada de constantes é nula, diferentemente do que ocorre na definição de Riemann-Liouville, por exemplo. Outra característica valiosa da utilização da derivada fracionária é a existência dos efeitos de memória, capazes de minimizar as simplificações que ocorrem no processo de modelagem. Um pouco mais sobre os efeitos de memória será tratado no Capítulo 4, que versa sobre a "Modelagem fracionária". Além disso, os resultados apresentados no Capítulo 5 foram obtidos através de métodos numéricos que possuem a derivada de Caputo como base, uma vez que o modelo matemático utilizado é composto por equações diferenciais não lineares.

A derivada fracionária de Caputo é proposta com base na definição de Riemann-Liouville, que apesar de não ter sido apresentada neste trabalho, é dada pela derivada de ordem inteira de uma integral fracionária. No sentido de Caputo, ocorre uma inversão na construção de Riemann-Liouville, sendo a derivada fracionária uma integral fracionária da derivada de ordem inteira (CAMARGO, 2009, p. 37).

Dada a sua importância, a derivada fracionária de Caputo será definida a seguir, com base em Carpinteri e Mainardi (1997, p. 228).

Definição 2.6.1. *Seja $f(t)$ uma função integrável, $\alpha \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $n-1 < Re(\alpha) \leq n$. Denota-se por D^α a derivada fracionária de Caputo dada por*

$$D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha}[D^n f(t)] = \phi_{n-\alpha}(t) * [D^n f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \, \mathrm{d}\tau. \quad (2.29)$$

Na Definição 2.6.1, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, recupera-se a derivada de ordem inteira clássica, pois

$$D^\alpha f(t) = I^{n-n}[D^n f(t)] = I^0[D^n f(t)] = D^n f(t). \quad (2.30)$$

Portanto, fica claro que a deriva de ordem inteira é um caso particular da derivada fracionária segundo Caputo.

Exemplo 2.6.1. *Derivada Fracionária de Polinômios.*

Considerando $\mu \in \mathbb{R}$, com $\mu > 0$, determina-se $D^{\alpha}t^{\mu}$ como

$$D^{\alpha}t^{\mu} = I^{n-\alpha}[D^{n}t^{\mu}]. \tag{2.31}$$

Sabe-se que

$$D^{n}t^{\mu} = \mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-(n-1))t^{\mu-n}. \tag{2.32}$$

Visando utilizar a definição da função gama, é possível multiplicar a expressão (2.31) por $\frac{\Gamma(\mu-n+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}$, de forma que

$$D^{n}t^{\mu} = \mu(\mu-1)...(\mu-(n-1))\left(\frac{\Gamma(\mu-n+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}\right)t^{\mu-n} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}t^{\mu-n}. \tag{2.33}$$

Das expressões (2.31) e (2.33), obtêm-se

$$D^{\alpha}t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}I^{n-\alpha}[t^{\mu-n}]. \tag{2.34}$$

Utilizando do resultado do exemplo 2.5.1, e substituindo α por $n-\alpha$ e μ por $\mu-n$ na expressão (2.28), verifica-se que

$$D^{\alpha}t^{\mu} = \left(\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}\right)\left(\frac{\Gamma(\mu-n+1}{\Gamma(\mu-\alpha+1}\right)t^{\mu-\alpha} = \left(\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}\right)t^{\mu-\alpha} \tag{2.35}$$

Capítulo

3

A cana-de-açúcar e o controle biológico

O conteúdo deste capítulo tem o objetivo de introduzir algumas informações sobre a cana-de-açúcar, bem como o processo de controle biológico das pragas que afetam a cultura, visando deixar claro o contexto em que a modelagem matemática deste trabalho se desenvolve.

3.1 Morfologia da cana-de-açúcar e a relevância mundial da cultura

A cana-de-açúcar é uma espécie classificada como *Saccharum officinarum* L., sendo parte da família Poaceae, da ordem Poales (APG et al., 2016, apud SILVA, 2021, p. 56). Seu desenvolvimento ocorre no formato de moita, tendo a sua parcela aérea formada por colmos, frutos, inflorescências e folhas, enquanto sua parte subterrânea é composta por raízes e rizomas (SILVA; SILVA, 2012, p. 23).

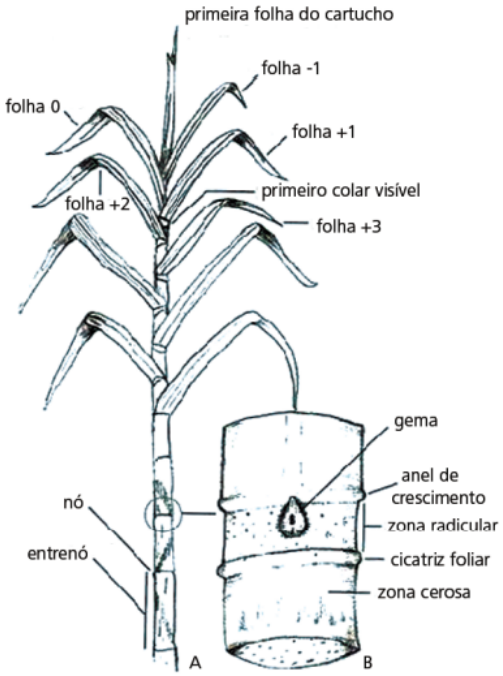
O colmo, que também pode ser entendido como o caule da planta, é dividido em nós e entrenós (SOUZA; LORENZI, 2012, apud SILVA, 2021, p. 58). Nele é possível verificar a presença de gemas responsáveis pela geração de brotos. As raízes da planta são finas e pouco profundas, tendo a função de conceder água e nutrientes para o colmo. Suas folhas são presas pela parte inferior aos nós, com comprimento entre $0,5$ e $1,5$ metros e largura entre $2,5$ e 10 centímetros (SILVA, 2021, p. 57 e 59). As figuras 3.1 e 3.2 mostram algumas das características morfológicas citadas acima.

Figura 3.1: Morfologia do colmo da cana-de-açúcar. **a.** Colmo da planta. **b.** Detalhe para uma gema presente disposta alternadamente no colmo. **G** = gema; **Zr** = zona radicular.



Fonte: retirado de Silva (2021, p. 58).

Figura 3.2: **A.** Disposição das folhas, localização do nó e do entrenó no colmo. **B.** Detalhes das estruturas contidas no nó



Fonte: retirado de Segato et al. (2006, apud SILVA; SILVA, 2012, p. 26).

A cana-de-açúcar é um dos mais importantes cultivos mundiais, sendo a principal matéria-prima para a produção de açúcar, etanol e alguns subprodutos. No Brasil, a cana-de-açúcar foi introduzida entre 1530 e 1532 por Martim Afonso de Sousa, durante as suas expedições (SILVA et al., 2021, p. 3).

De acordo com os dados do relatório semestral do USDA (United States Department of Agriculture) publicado em novembro de 2022 sobre o comércio, produção, consumo e estoques de açúcar no mundo, o período 2021/2022 teve como produção bruta mundial 180,348 milhões de toneladas de açúcar, enquanto as expectativas para o período 2022/2023 são de 183,150 milhões de toneladas. Em relação ao etanol, os dados da RFA (Renewable Fuels Association) mostram que em 2021 foram produzidos 27,29 bilhões de galões americanos do combustível em todo o mundo.

O Brasil é o maior produtor e exportador de açúcar do mundo, ocupando a segunda posição na produção de etanol (FONTANETTI; BUENO, 2017, p. 14 e 19). Por conta disso, o país é responsável pela maior produção mundial de cana-de-açúcar, sendo o setor sucroalcooleiro, segundo Carvalho et al. (2013, apud SILVA et al., 2021, p. 3), contribuinte significativo no Produto Interno Bruto (PIB) brasileiro. Ainda é citado no trabalho de Silva et al. (2021, p. 3) que:

> Segundo afirmações de Jaime Finguerut, diretor do Instituto de Tecnologia Canavieira (ITC) na abertura do workshop *Sugar & Ethanol Brazil* em 2019, o setor sucroenergético representa 2% do PIB brasileiro, mostrando o peso deste setor para a economia. Estes 2% equivalem a 10% do valor total bruto do agronegócio, que por sua vez representa 20% do PIB do Brasil. (SILVA et al., 2021, p. 3).

Portanto, tendo conhecimento da importância do cultivo da cana-de-açúcar para o mundo e, em especial, para o Brasil, a próxima seção irá tratar sobre o problema com pragas que este plantio enfrenta.

3.2 Pragas da cana-de-açúcar

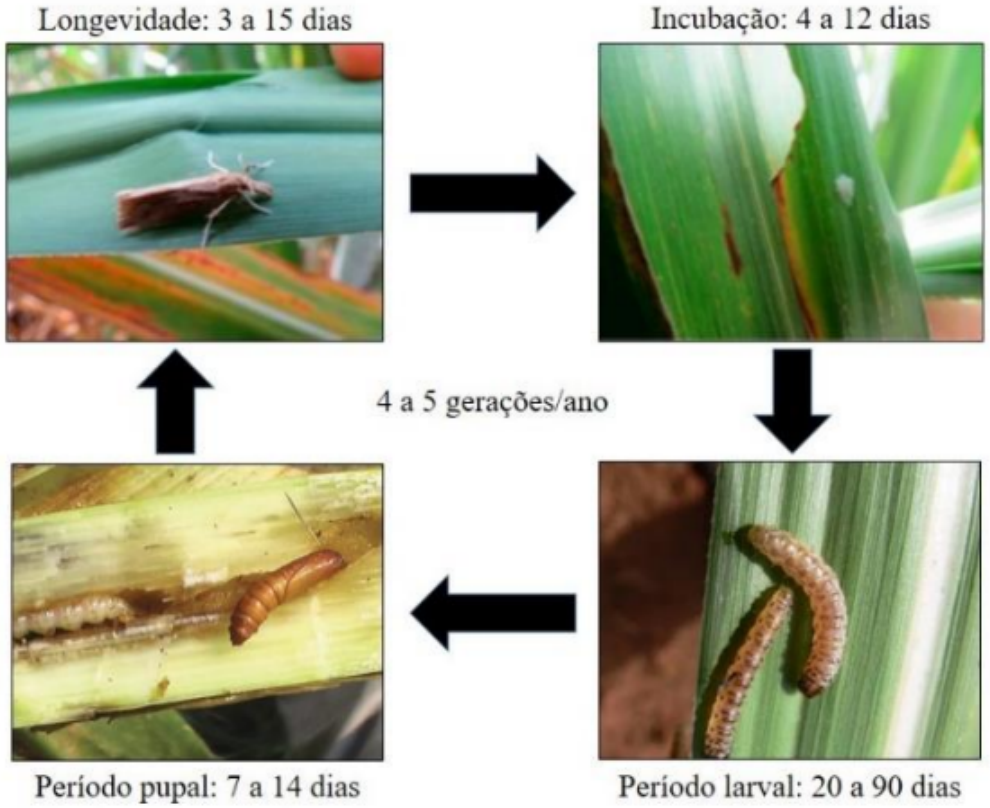
Como já foi apresentado na seção anterior, o Brasil é o maior produtor mundial de cana-de-açúcar. Segundo o acompanhamento da safra 2022/2023 feito pela CONAB (2022), a área de plantio estimada no Brasil é de $8127,7$ mil hectares. Por conta disso, a presença de insetos-pragas que reduzem a qualidade e a quantidade da produção é muito comum. Os três principais insetos-pragas que afetam a produção de cana-de-açúcar são: o bicudo da cana-de-açúcar, a cigarrinha das raízes e a broca da cana-de-açúcar (SILVA, 2021, p. 123). Este último, em específico, é o inseto-praga alvo deste trabalho e, portanto, mais informações sobre ele são apresentadas na subseção a seguir.

3.2.1 A broca da cana-de-açúcar e os danos causados no cultivo

A broca da cana-de-açúcar, classificada como *Diatraea saccharalis* F., é um dos insetos-pragas mais comuns no cultivo da planta. Em território brasileiro, a broca se faz presente em todas as regiões de plantio da cana-de-açúcar, afetando também o milho, o arroz e o sorgo (SOLIS; METZ, 2016, apud SILVA, 2021, p. 124).

A broca é um inseto do tipo holometabólico, isto é, seu desenvolvimento passa por uma metamorfose completa, possuindo as fases de ovo, lagarta, pupa e adulto (SILVA, 2021, p. 124). Quanto ao seu ciclo biológico, as fases podem variar de acordo com a temperatura, tendo a fase de ovo uma duração de 4 a 12 dias, a fase larval de 20 a 90 dias, a fase de pupa de 7 a 14 dias e a fase adulta de 3 a 15 dias (PINTO et al., 2009, apud SILVA, 2021, p. 124). O ciclo completo pode durar de 53 a 60 dias, levando em conta as variações das condições climáticas. Além disso, durante o período de um ano, podem ocorrer de 4 a 5 gerações de indivíduos (PINTO et al., 2018 apud SILVA, 2021, p. 124). A figura 3.3 a seguir, encontrada no trabalho de Silva (2021, p. 124), mostra a aparência da broca em cada uma de suas fases.

Figura 3.3: Ciclo de vida da broca da cana-de-açúcar (*Diatraea saccharalis*)



Fonte: retirado de Silva (2021, p. 124).

Durante a vida adulta, as fêmeas do inseto podem depositar nas folhas da cana-de-açúcar de 300 a 780 ovos, que são alocados de forma agrupada, variando de 5 a 50 ovos por postura. Sua sobrevivência fica atrelada às condições climáticas, uma vez que as baixas umidades nos ambientes podem causar ressecamento nos ovos, comprometendo seu desenvolvimento (SILVA, 2021, p. 125).

Após a eclosão dos ovos, as lagartas se alimentam do parênquima das folhas e sofrem a primeira ecdise, isto é, passam por uma troca de esqueleto que garante o seu crescimento. Entrando em contato com o colmo da cana-de-açúcar, as lagartas procuram o ponto em que é mais fácil fazer a perfuração, abrindo galerias transversais e longitudinais no interior dos colmos. Enquanto estiver em sua forma larval, a broca da cana-de-açúcar passa por cinco a seis fases de desenvolvimento até chegar próxima do momento de pupação. Neste momento, as larvas procuram o exterior do colmo por meio de um orifício, que posteriormente é fechado com seda e serragem. Já em formato de pupa, ainda dentro da cana hospedeira, o inseto completa a sua metamorfose, saindo do orifício como um inseto adulto, que apresenta cor amarelo-pardo nas asas anteriores e cor esbranquiçada nas asas posteriores (SILVA, 2021, p. 125 e 126).

Conhecendo um pouco sobre o ciclo biológico da broca da cana-de-açúcar, é possível entender como este inseto-praga causa danos à cultura da planta. Por conta da perfuração que é feita no colmo, a *Diatraea saccharalis* causa danos diretos e indiretos. Os danos diretos englobam a perda de peso do colmo, o perfilhamento lateral, enraizamento aéreo e a morte da gema da cana. Os danos indiretos englobam os ataques causados pelos fungos dos gêneros *Colletotrichum* sp. e *Fusarium* sp., que acessam os entrenós da planta através dos buracos deixados pela broca, gerando a podridão vermelha e a fusariose (DINARDO-MIRANDA et al., 2013, apud SILVA, 2021, p. 126 e 127).

Em seu trabalho, Silva (2021, p. 127) apresenta uma estimativa dos danos causados pela broca da cana-de-açúcar por meio do índice de intensidade de infestação, dado pela sigla I.I.I., que representa a porcentagem de entrenós afetados pela praga em relação aos entrenós totais. O processo de verificação é feito coletando 20 colmos por unidade amostral e contando a quantidade de entrenós totais e quantos destes possuem a praga. Ainda de acordo com a autora, a média dos danos é de 1,14% da produção agrícola a cada 1% de I.I.I. registrado, além das perdas no processo industrial, que atingem 0,42% e 0,21% na produção de açúcar e etanol, respectivamente.

3.3 Controle biológico

Considerando o trabalho de Fontes e Valadares-Inglis (2020, p. 21), uma população de indivíduos pode ser controlada por processos ecológicos abióticos e bióticos. O primeiro destes tem relação, por exemplo, com as temperaturas dos ambientes, enquanto o segundo se refere, por exemplo, às quantidades de alimentos disponíveis ou à presença de inimigos naturais da espécie em questão. A ação humana, em especial nos ambientes agrícolas, que busca favorecer a concentração e o crescimento do cultivo, pode afetar populações de diferentes espécies, causando situações indesejáveis, como o aumento da população de pragas na plantação.

Uma forma de conter a população de pragas neste tipo de situação é realizando o controle biológico. De forma geral, o controle biológico já acontece no ambiente, sendo uma característica natural dos ecossistemas. No entanto, a ação humana pode interferir no processo, visando facilitar a atividade do agente de controle da praga. De acordo com Fontes e Valadares-Inglis (2020, p. 23):

> O controle biológico é caracterizado por relações ecológicas que envolvem a competição do homem com as pragas por recursos naturais (ex.: plantas cultivadas e produção agrícola) e a presença do agente de controle biológico como aliado do homem e inimigo natural da praga. (FONTES; VALADARES-INGLIS, 2020, p. 23).

Com base em DeBach e Rosen (1991, apud FONTES; VALADARES-INGLIS, 2020, p. 23) e Van Driesche e Bellows (1996, apud FONTES; VALADARES-INGLIS, 2020, p. 23), existem três formas de realizar o controle biológico: por importação, aumento (também chamado de inundação) e conservação. Um pouco sobre os três métodos será apresentado nos tópicos que seguem:

- **Controle biológico por importação:** quando uma espécie exótica se estabelece em uma nova região, a ausência de limites naturais do ambiente propicia um crescimento exagerado de sua população, podendo tornar-se uma praga. Neste caso, o controle biológico por importação consiste na busca de um inimigo natural da praga em regiões externas, para que este seja introduzido no mesmo ambiente de ocupação da praga e consiga realizar o seu controle (FONTES; VALADARES-INGLIS, 2020, p. 23);

- **Controle biológico conservativo:** consiste em manipular os agroecossistemas com o objetivo de aumentar e preservar a população de inimigos naturais da praga já existentes. Para isso, é necessário empregar técnicas para que os inimigos naturais se sintam estimulados a permanecer e se desenvolver no ambiente em questão (FONTES; VALADARES-INGLIS, 2020, p. 27);

- **Controle biológico aumentativo:** neste caso, o controle é feito por meio do aumento artificial da população de inimigos naturais no ambiente. Tal aumento é feito de forma inundativa, liberando grandes quantidades do inimigo natural no ambiente em que se deseja fazer o controle da praga (FONTES; VALADARES-INGLIS, 2020, p. 31).

3.3.1 Controle biológico da broca da cana-de-açúcar pela vespinha *Cotesia flavipes* C.

O controle biológico aumentativo da broca da cana-de-açúcar (*Diatraea saccharalis*) utilizando a vespinha (*Cotesia flavipes*) está entre os melhores do mundo, sendo um dos programas de controle de pragas ativos mais duradouros. No Brasil, cerca de metade da área com cultivo de cana-de-açúcar utiliza a *Cotesia flavipes* como agente de controle (FONTES; VALADARES-INGLIS, 2020, p. 39).

Tendo origem na Ásia, a *Cotesia flavipes* foi introduzida no Brasil em 1971, especificamente no estado de São Paulo, pela Esalq/USP e Copersucar, no entanto, não ocorreu sucesso no parasitismo. Uma nova tentativa de introdução ocorreu em 1974, no estado de Alagoas, obtendo ótimos resultados. Ainda em 1974, o Programa Nacional de Controle Integrado da Broca da Cana-de-açúcar é instaurado pelo Planalsucar, tendo início o maior programa de controle biológico do mundo (NAVA; PINTO; SILVA, 2009, p. 12).

A vespinha *Cotesia flavipes* é um parasitoide que se desenvolve passando pelos estágios de larva, pupa e adulto, utilizando da broca da cana-de-açúcar como hospedeiro no seu ciclo de vida. O processo de parasitismo ocorre por meio da picada da vespinha na broca: a primeira deposita na segunda uma vasta quantidade de ovos, que eclodem em larvas que se alimentam da broca até a sua morte (NAVA; PINTO; SILVA, 2009, p. 12 e 13).

As larvas de terceiro ínstar deixam a broca hospedeira em até dois dias, migrando para fora do corpo e iniciando a fase de pupa, que possui coloração branca. Alguns dias após o processo de pupação, os adultos com cerca de 2 a 3 milímetros emergem, tendo coloração preta (NAVA; PINTO; SILVA, 2009, p. 13).

Para o processo de controle biológico aumentativo, são realizadas inundações com a *Cotesia flavipes* na área de cultivo da cana-de-açúcar, tomando como parâmetro para o controle a população de 800 a 1000 lagartas da broca por hectare ou pelo menos 10 lagartas por hora/homem no processo de busca organizada. De forma usual, costumam ser liberadas 6 mil vespinhas por hectare, em quatro pontos diferentes, podendo ocorrer uma nova soltura em aproximadamente 15 dias caso a população da praga se mantenha acima das 1000 lagartas por hectare ou acima de 10 lagartas por hora/homem (BOTELHO; MACEDO, 2002, apud NAVA; PINTO; SILVA, 2009, p. 13).

Normalmente, as vespinhas são adquiridas pelos produtores de cana-de-açúcar ainda na fase de pupa, armazenadas em copos plásticos, que apresentam cerca de 1500 indivíduos cada. O armazenamento e transporte dos copos até os locais de soltura deve ser muito cuidadoso, pois a *Cotesia flavipes* é muito sensível, em especial com relação à condições climáticas e temperatura. Os copos com os indivíduos devem ser armazenados com tampas, em local climatizado com cerca de $27 \pm 2°\text{C}$, com umidade de 80% e iluminado. Para o transporte, as vespinhas não podem ficar expostas ao Sol, nem sofrerem com mudanças drásticas de temperatura. Quanto a soltura, é indicado que aconteça ao entardecer ou pela manhã, para que os indivíduos não sofram com altas temperaturas e ocorra o melhor aproveitamento possível do número de vespinhas (NAVA; PINTO; SILVA, 2009, p. 14).

Após 15 dias do processo de soltura da *Cotesia flavipes* ocorre o acompanhamento do parasitismo. Para isso uma amostragem populacional de brocas parasitadas e "massas"de pupas da vespinha é coletada. A porcentagem de parasitismo é dada por,

$$\text{parasitismo}(\%) = \left(\frac{\text{total de brocas parasitadas e "massas" da vespinha}}{\text{total de brocas e pupas da vespinha}} \right) 100. \qquad (3.1)$$

Por meio deste valor é possível constatar se o controle biológico atendeu ao que se esperava ou se uma nova soltura será necessária. No caso, para valores de parasitismo inferiores a 20%, uma nova soltura é necessária levando em conta os níveis de contaminação da broca na plantação (NAVA; PINTO; SILVA, 2009, p. 14).

Capítulo

4

Modelagem matemática

Neste capítulo será apresentado o modelo fracionário do sistema de Lotka-Volterra para a dinâmica predador-presa, que foi utilizado para encontrar os resultados que serão apresentados no Capítulo 5. No entanto, antes de mostrar tal modelo, é importante que seja esclarecido o conceito de modelagem matemática. De acordo com Witelski e Bowen (2015, p. 7, tradução nossa), é de grande ajuda para pensar a modelagem matemática o seguinte questionamento: "o que é um modelo matemático?".

Para Rutherford (1994 apud WITELSKI; BOWEN, 2015, p. 7, tradução nossa), "Um modelo matemático é um conjunto de equações que fornecem uma descrição adequada de um sistema físico.". Levando em conta tal resposta, um sistema físico pode ser entendido como um problema real, seja ele natural, seja ele resultado das ações humanas, que pode pertencer a diferentes áreas de estudo, como por exemplo a física, biologia, economia, etc.

Portanto, é possível entender um modelo matemático como um conjunto de equações que descrevem de forma adequada um problema real. No entanto, o que define uma descrição adequada nesse contexto? Pensando na construção dessa descrição, é essencial que as equações envolvidas forneçam informações e previsões precisas sobre o problema, sem dificultarem demais os cálculos envolvidos. Ou seja, uma descrição adequada deve apresentar um equilíbrio nas equações que a compõem, uma vez que incluir parâmetros para todos os fenômenos que norteiam o problema estudado pode dificultar demais os cálculos matemáticos envolvidos, ao mesmo tempo que simplificar demais os fenômenos

pode gerar um modelo com resultados inexpressivos para estudo (WITELSKI; BOWEN, 2015, p. 7).

A modelagem matemática de fenômenos populacionais não é algo novo. A busca por modelos que melhor representam determinadas relações sempre foi um grande desafio para as áreas científicas, em especial para os fenômenos biológicos.

De acordo com Bassanezi (2002, p. 325), os modelos matemáticos são vulneráveis e podem ser modificados sempre que necessário, uma vez que um problema real pode ser representado por meio de diferentes modelos, com variações na quantidade de parâmetros utilizados. A modelagem matemática para o estudo populacional começou com Malthus, que propõe um modelo onde a taxa de crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante de tempo, isto é (BASSANEZI, 2002, p. 327)

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = kP(t), \tag{4.1}$$

onde $P(t)$ é a população total e k é uma constante de proporcionalidade.

Existem diferentes modelos que lidam com o crescimento populacional de forma isolada além do de Malthus, como os modelos logísticos, de Montroll, de Gompertz, dentre outros. Por outro lado, o modelo utilizado neste trabalho representa a interação entre duas espécies, onde uma é a predadora e a outra a presa.

Logo, compreendendo as intenções da modelagem matemática e levando em conta o problema proposto no Capítulo 3, será apresentado na seção a seguir o modelo do sistema predador-presa de Lotka-Volterra em sua versão clássica.

4.1 Sistema de Lotka-Volterra

Segundo Boyce e DiPrima (2010, p. 414), Alfred James Lotka foi um biofísico americano que nasceu em 1880, onde hoje é a Ucrânia, e faleceu em 1949. A maior parte da sua educação foi adquirida na Europa, tendo contribuído em vida para a biologia matemática e, como principal formulação, as equações de Lotka-Volterra.

Vito Volterra foi um importante matemático italiano que nasceu em 1860 e faleceu em 1940. Possui fama por conta dos seus trabalhos em análise funcional e equações integrais, tendo toda uma classe de equações integrais que levam o seu nome, além de ter formulado as equações de Lotka-Volterra através dos dados sobre a pesca no Mar Adriático.

Lotka e Volterra, por volta de 1925, tiveram as mesmas conclusões de forma independente acerca da relação predador-presa, utilizando de equações diferenciais não lineares que mostram a interação entre duas populações de forma oscilatória e periódica em um ambiente (ANISIU, 2014, p. 11). Sua construção leva em conta o crescimento exponencial do modelo de Malthus e a lei de ação de massas para a interação entre espécies (BASSANEZI, 2002, p. 362).

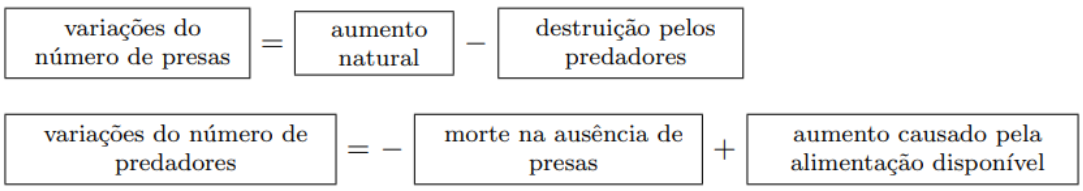
Tendo conhecimento das informações acima, o modelo de Lotka-Volterra para a dinâmica predador-presa é dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = & ax - bxy = & x(a - yb), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = & -cy + dxy = & -y(c - xd), \end{cases} \tag{4.2}$$

no qual a, b, c e d são constantes positivas e $x(t)$ representa a população de presas, $y(t)$ a população de predadores, a é a taxa de crescimento de $x(t)$ quando não existem predadores, b é a taxa de decréscimo de $x(t)$ por conta dos ataques dos predadores, c é a taxa de mortalidade de $y(t)$ quando não existem presas e d é a taxa de crescimento de $y(t)$ por conta das interações com as presas.

Considerando o processo de modelagem, o modelo em questão apresenta sérias restrições: a população de presas cresce de forma exponencial na ausência de predadores; na ausência de presas a população de predadores morre de fome; os predadores podem se alimentar das presas infinitamente e não existe complexidade ambiental, isto é, as populações de presas e predadores interagem de forma aleatória em um ambiente homogêneo (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p. 136). Na Figura 4.1 a seguir é apresentada a estrutura do modelo utilizando a descrição das taxas envolvidas.

Figura 4.1: Estrutura do modelo de Lotka-Volterra



Fonte: retirado de Bassanezi (2002, p. 363).

4.1.1 Estabilidade dos pontos críticos de um sistema quase linear

Para uma melhor compreensão do estudo da estabilidade dos pontos críticos do modelo proposto, serão apresentados a seguir uma definição e dois teoremas, baseados em Bessa (2011).

Definição 4.1.1. *Considere um sistema de equações diferenciais não-linear do tipo*

$$x' = Ax + g(x), \tag{4.3}$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, $g(x)$ uma matriz $n \times 1$ contínua, com $g(0) = 0$. Supondo que $\overline{x} = 0$ é ponto crítico isolado do sistema e $\det(A) \neq 0$, tem-se que $\overline{x} = 0$ é o único ponto crítico do sistema linear $x' = Ax$. Se a condição

$$\frac{||g(x)||}{||x||} \to 0, \text{ quando } x \to 0, \tag{4.4}$$

for atendida para $g(x)$, o sistema (4.3) é chamado sistema quase linear na vizinhança do ponto crítico $\overline{x} = 0$.

Pela Definição 4.1.1, quando $||g(x)||$ é pequeno em comparação a $||x||$ próximo à origem, o comportamento do sistema não-linear é o mesmo do sistema linear em volta do ponto crítico $\overline{x} = 0$ (BESSA, 2011, p. 36).

Para o caso bidimensional, o teorema a seguir apresenta uma condição suficiente para que um sistema não-linear do tipo

$$\begin{cases} x_1' = & F(x_1, x_2), \\ x_2' = & G(x_1, x_2), \end{cases} \tag{4.5}$$

seja quase linear.

Teorema 4.1.1. *Um sistema do tipo (4.5) será quase linear em uma vizinhança U de um ponto crítico $\overline{x}$ sempre que as funções $F(x_1, x_2)$ e $G(x_1, x_2)$ forem duas vezes diferenciáveis e de classe C^1.*

Demonstração: *As funções $F(x_1, x_2)$ e $G(x_1, x_2)$ são de classe C^1, portanto usando a expansão de Taylor em torno do ponto $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, para $(x_1, x_2) \in U$, tem-se*

$$F(x_1, x_2) = F(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + F_{x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)(x_1 - \overline{x}_1) + F_{x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)(x_2 - \overline{x}_2) + \zeta_1(x_1, x_2), \quad (4.6)$$

$$G(x_1, x_2) = G(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + G_{x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)(x_1 - \overline{x}_1) + G_{x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)(x_2 - \overline{x}_2) + \zeta_2(x_1, x_2), \quad (4.7)$$

onde

$$\frac{\zeta_1(x_1, x_2)}{\sqrt{(x_1 - \overline{x}_1)^2 + (x_2 - \overline{x}_2)^2}} \to 0, \text{ quando } (x_1, x_2) \to (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \text{ e} \quad (4.8)$$

$$\frac{\zeta_2(x_1, x_2)}{\sqrt{(x_1 - \overline{x}_1)^2 + (x_2 - \overline{x}_2)^2}} \to 0, \text{ quando } (x_1, x_2) \to (\overline{x}_1, \overline{x}_2). \quad (4.9)$$

Como $F(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = G(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0$, $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x_1 - \overline{x}_1)}{\mathrm{d}t}$ *e* $\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x_2 - \overline{x}_2)}{\mathrm{d}t}$, *o sistema* (4.3) *pode ser escrito como*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\overline{x}) \cdot u + \zeta(x), \quad (4.10)$$

onde $u = [x_1 - \overline{x}_1 \quad x_2 - \overline{x}_2]^T$, $\zeta(x) = [\zeta_1(x_1, x_2) \quad \zeta_2(x_1, x_2)]^T$ *e* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\overline{x})$ *é a matriz jacobiana do sistema para* $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, *também denotada por* $J(\overline{x})$.

Portanto, o sistema (4.5) *satisfaz a condição da Definição 4.1.1 e é quase linear na vizinhança de um ponto crítico.*

■

Pelo Teorema 4.1.1, é possível constatar que o sistema linear que melhor aproxima o sistema não-linear na vizinhança do ponto crítico $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, é dado pela parte linear do sistema (4.5) (BESSA, 2011, p. 37). Tal sistema linear é dado por

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\overline{x}) \cdot u. \quad (4.11)$$

O próximo teorema trata dos resultados envolvendo o processo de linearização, sendo possível estudar a estabilidade dos pontos críticos de um sistema quase linear por meio do estudo do sistema linear correspondente.

Teorema 4.1.2. *Seja* $\overline{x} = 0$ *um ponto crítico de um sistema quase linear e do sistema linear correspondente. Então*

- *Se* $\overline{x}$ *é um ponto assintoticamente estável do sistema linear correspondente, então* $\overline{x}$ *é um ponto assintoticamente estável do sistema quase linear;*

- *Se $\overline{x}$ é um ponto instável do sistema linear correspondente, então $\overline{x}$ é um ponto instável do sistema quase linear.*

A demonstração do Teorema 4.1.2 será omitida neste trabalho, no entanto, é possível consultá-la na íntegra no trabalho de Bessa (2011, p. 38).

4.1.2 Estabilidade dos pontos críticos do Sistema de Lotka-Volterra

Os pontos críticos de um sistema, também chamados de pontos de equilíbrio, são encontrados tomando a sua variação como nula, no caso do sistema de Lotka-Volterra, tomando $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$, obtendo-se assim (BASSANEZI, 2002, p. 366)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = & ax - bxy = & x(a - yb) = & 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = & -cy + dxy = & -y(c - xd) = & 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Do sistema (4.12), encontra-se as seguintes expressões

$$x = 0 \text{ e } y = 0, \text{ gerando o ponto crítico } P_1 = (0, 0), \tag{4.13}$$

$$x = \frac{c}{d} \text{ e } y = \frac{a}{b}, \text{ gerando o ponto crítico } P_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right). \tag{4.14}$$

Pelos Teoremas 4.1.1 e 4.1.2, o sistema de Lotka-Volterra é quase linear e, portanto, é possível estudar a estabilidade dos seus pontos críticos por meio do sistema linear correspondente dado por,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\overline{x}) \cdot u. \tag{4.15}$$

Que também pode ser escrito como (BESSA, 2011, p. 37)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x - \overline{x} \\ y - \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(\overline{x}, \overline{y}) & F_y(\overline{x}, \overline{y}) \\ G_x(\overline{x}, \overline{y}) & G_y(\overline{x}, \overline{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \overline{x} \\ y - \overline{y} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Calculando a matriz jacobiana para o sistema de Lotka-Volterra em (4.16), obtêm-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x-\overline{x} \\ y-\overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\overline{x} \\ y-\overline{y} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Conhecendo a expressão (4.17), os valores de P_1 e P_2 serão aplicados, de forma que:

- Para $P_1 = (0,0)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Tomando $\det[J(P_1) - \lambda I] = 0$, são encontrados os autovalores $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = -c$, com autovetores $\omega_1 = [1,0]^T$ e $\omega_2 = [0,1]^T$ relacionados. As equações diferenciais do sistema linear correspondente são separáveis, tendo sua solução geral dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x_0 e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_0 e^{-ct}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Portanto, de acordo com Bassanezi (2002, p. 366) e Bessa (2011, p. 55), pela solução geral $x(t) = x_0 e^{at}$ e $y(t) = y_0 e^{-ct}$, a trajetória $P(t) = (x(t), y(t))$ se afasta do ponto $P_1 = (0,0)$, que é ponto de sela, logo, instável. Pelo resultado do Teorema 4.1.2, o ponto P_1 é instável para o sistema de Lotka-Volterra.

- Para $P_2 = (c/d, a/b)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x-\frac{c}{d} \\ y-\frac{a}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b\frac{a}{b} & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & -c+d\frac{c}{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\frac{c}{d} \\ y-\frac{a}{b} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Utilizando a mudança de variáveis $u = x - \frac{c}{d}$ e $v = y - \frac{a}{b}$, de forma que $P_2 = (c/d, a/b)$ seja transladado para $P_2^* = (0,0)$ no sistema associado às novas variáveis, obtêm-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Tomando $\det[J(P_2) - \lambda I] = 0$, são encontrados os autovalores $\lambda_3 = i\sqrt{ac}$ e $\lambda_4 = -i\sqrt{ac}$, que são complexos conjugados puros. Portanto, tem-se um ponto de centro estável para o sistema linear correspondente (BESSA, 2011, p.55).

Neste caso, para que seja possível concluir algo sobre a estabilidade do ponto crítico no sistema quase linear, é necessário estudar as trajetórias do sistema linear correspondente e do sistema quase linear. Para o plano uv,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\left(\frac{d\frac{a}{b}}{b\frac{c}{d}}\right)\left(\frac{u}{v}\right). \tag{4.22}$$

Resolvendo o sistema acima obtém-se

$$d\frac{a}{b}u^2 + b\frac{c}{d}v^2 = K_1, \tag{4.23}$$

onde K_1 é a constante de integração. Pela expressão (4.23), as trajetórias do sistema linear correspondente, para o ponto crítico em questão, são elipses. Considerando agora o sistema quase linear, para o plano xy,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-y(c - xd)}{x(a - yb)}. \tag{4.24}$$

Resolvendo o sistema acima obtém-se

$$c\ln x - xd + a\ln y - yb = K_2, \tag{4.25}$$

onde K_2 é a constante de integração. Logo, de acordo com Camargo (2009, p. 95) e Bessa (2011, p. 55), as trajetórias definidas pela expressão (4.25) são as curvas de nível da função relacionada e, portanto, são fechadas. Logo, pelo Teorema 4.1.2, o ponto P_2 é centro estável para o sistema de Lotka-Volterra.

Na próxima seção será apresentada a modelagem fracionária, com enfoque nos efeitos de memória, uma importante característica creditada às derivadas de ordem não inteira.

4.2 Modelagem fracionária

Como já foi visto no início deste capítulo, os modelos matemáticos ajudam a explicar problemas e situações reais, permitindo que informações sejam descobertas, além de possibilitar processos de simulação e predição de resultados. O uso de equações diferenciais ordinárias no processo de modelagem é muito comum, uma vez que o cálculo clássico

estuda fenômenos que envolvem a variação e o movimento (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2018).

No entanto, os modelos clássicos que utilizam de equações diferenciais ordinárias não possuem memória, isto é, as soluções não dependem dos instantes anteriores. Esse comportamento pode ser observado tomando $f(t; x_0)$ como solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, com condição inicial x_0 em $t = 0$. Por propriedade ocorre que $f(t + s; x_0) = f(t; f(s; x_0))$, o que mostra que escolher $f(s; x_0)$ como condição inicial não muda a solução, isto é, para cada valor inicial a solução é determinada de forma única para os pontos do domínio (BARROS et al., 2021, p. 4 e 5).

Tal característica explicita a importante função que o Cálculo Fracionário vem desenvolvendo nos últimos anos, pois além de ser uma generalização para o cálculo clássico (tomando a ordem arbitrária das derivadas e integrais como inteiros), os efeitos de memória e a não localidade dos operadores são impactantes nos resultados da modelagem (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). O exemplo a seguir, encontrado em Barros et al. (2021, p. 5), mostra tal característica dos operadores fracionários.

Exemplo 4.2.1. *Seja f uma função real definida no intervalo $[0, t]$ e $t_1, t_2 \in [0, t]$, tais que $0 < t_1 < t_2$. Tomando $A = I^\alpha f(t_2) - I^\alpha f(t_1)$, mostra-se que*

$$A = I^\alpha f(t_2) - I^\alpha f(t_1) \tag{4.26}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right] \tag{4.27}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_0^{t_1} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \right. \tag{4.28}$$

$$\left. - \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right] \tag{4.29}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \int_0^{t_1} \left[(t_2 - \tau)^{\alpha-1} - (t_1 - \tau)^{\alpha-1} \right] f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right]. \tag{4.30}$$

Do exemplo 4.2.1, é possível observar que a segunda integral apresenta valores entre 0 e t_1, enquanto a primeira integral envolve valores entre t_1 e t_2. Considerando $\alpha = 1$, isto é, para o caso inteiro, apenas a primeira integral irá contribuir no cálculo, fato que reafirma a ausência dos efeitos de memória para modelos de ordem inteira.

No entanto, para $0 < \alpha \neq 1$, ambas as integrais contribuem no cálculo, evidenciando a presença dos efeitos de memória para modelos de ordem não inteira. Neste caso, o efeito de memória está relacionado com a segunda integral, uma vez que são envolvidos valores anteriores à t_1 para calcular $I^\alpha f(t_2) - I^\alpha f(t_1)$ (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2018).

Portanto, o processo de modelagem fracionária por meio dos operadores do Cálculo Fracionário se justifica por apresentar, em diversos casos, resultados melhores do que a modelagem clássica (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Além disso, por se tratar de uma generalização do cálculo de ordem inteira, os resultados deste não são excluídos do processo. Outro fator de grande preciosidade para a modelagem fracionária é o fato de que a complexidade dos modelos baseados em EDOs pode ser melhorada, em partes, pela ordem da derivada utilizada. Em outra palavras, a complexidade de parâmetros omitidos do modelo pode ser parcialmente compensada pela ordem das derivadas.

Na subseção a seguir será apresentada a versão fracionária do sistema de Lotka-Volterra, bem como os devidos ajustes dimensionais que são necessários.

4.2.1 Sistema de Lotka-Volterra fracionário

Como já foi apresentado no início da seção 4.1, o sistema de Lotka-Volterra possui algumas restrições em relação aos fenômenos reais. Portanto, visando aprimorar o processo de modelagem e amenizar o impacto dessas restrições, é possível introduzir o cálculo de ordem não inteira no sistema, utilizando as derivadas fracionárias no sentido de Caputo (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p. 138).

Para isso, serão considerados os operadores $D^\gamma = \dfrac{\mathrm{d}^\gamma}{\mathrm{d}t^\gamma}$ e $D^\beta = \dfrac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}t^\beta}$ no sistema de Lotka-Volterra clássico (4.2), com $0 < \gamma \leq 1$ e $0 < \beta \leq 1$, de forma que

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^\gamma x}{\mathrm{d}t^\gamma} = & ax - bxy = & x(a - yb), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^\beta y}{\mathrm{d}t^\beta} = & -cy + dxy = & -y(c - xd). \end{cases} \tag{4.31}$$

Porém, quando são considerados os novos operações, obtendo o sistema (4.31), ocorre um desbalanceamento nas unidades de medida das equações diferenciais utilizadas, uma vez que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ possui unidade $\dfrac{1}{t}$, enquanto $\dfrac{\mathrm{d}^\gamma}{\mathrm{d}t^\gamma}$ possui unidade $\dfrac{1}{t^\gamma}$, de forma análoga

ocorre para o operador $\frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}t^\beta}$. Como os parâmetros a, b, c e d possuem unidade $\frac{1}{t}$ do sistema clássico, ocorre um desequilíbrio entre os termos das equações, no sentido que $\frac{1}{t^\gamma} \neq \frac{1}{t}$ e $\frac{1}{t^\beta} \neq \frac{1}{t}$.

Portanto, é necessário rebalancear o sistema por meio de um ajuste dimensional. O caminho utilizado para este ajuste segue as sugestões apresentadas em Theodoro (2022, p. 84). Como a dimensão $\frac{1}{t}$ do lado direito das equações do sistema (4.31) é determinada pelos parâmetros a, b, c e d, é possível elevar a, b a γ e c, d a β, de forma que

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^\gamma x}{\mathrm{d}t^\gamma} = & a^\gamma x - b^\gamma xy = & x(a^\gamma - yb^\gamma), \\ \dfrac{\mathrm{d}^\beta y}{\mathrm{d}t^\beta} = & -c^\beta y + d^\beta xy = & -y(c^\beta - xd^\beta). \end{cases} \tag{4.32}$$

Logo, as equações diferenciais da expressão (4.32) ficam balanceadas, obtendo-se o sistema de Lotka-Volterra fracionário. Os resultados que serão apresentados no Capítulo 5 consideram as simulações numéricas realizadas com o sistema (4.32), por meio do método que será apresentado, de forma breve, na subseção a seguir.

4.2.2 Método numérico

O sistema de Lotka-Volterra fracionário, assim como o sistema clássico, é composto por equações diferenciais não lineares. Portanto, para que as simulações fossem possíveis dentro do processo de modelagem matemática, optou-se por utilizar um método numérico para aproximar as soluções, uma vez que é de grande complexidade trabalhar com soluções de sistemas não lineares de forma analítica.

Para isso, optou-se por utilizar o algoritmo desenvolvido por Roberto Garrappa na rotina FDE_PI2_Im para o software MATLAB, que faz uso da regra implícita do trapézio de integração do produto, com convergência de ordem 2, considerando a derivada fracionária segundo Caputo. O método utilizada de uma combinação da transformada rápida de Fourier com subdivisões que facilitam e melhoram a eficiência computacional.

A estrutura da rotina passa pela inicialização e verificação das entradas, visando os parâmetros, ordens fracionárias e tamanho do passo. É feita uma preparação e armazenamento de informações para o processo de integração, tendo como finalização da

rotina a verificação e avaliação final dos resultados encontrados. A descrição completa da construção e do funcionamento do método pode ser encontrada em Garrappa (2018).

A rotina em questão fornece a aproximação numérica das soluções de problemas de valores iniciais para sistemas de equações diferenciais fracionárias com diferentes ordens das derivadas de Caputo, característica que corrobora com a estrutura do sistema de Lotka-Volterra fracionário em questão, bem como as simulações desejadas no processo de modelagem matemática para a dinâmica predador-presa entre a *Cotesia flavipes* e a *Diatraea saccharalis*.

Capítulo

5

Resultados e principais considerações

As informações apresentadas neste capítulo têm por objetivo comparar qualitativamente os resultados encontrados no processo de modelagem matemática da dinâmica predador-presa pautada neste trabalho, levando em conta o sistema de Lokta-Volterra clássico e sua versão fracionária. Para isso, será utilizado como principal material de referência, para os dados e comparações, a dissertação de mestrado do autor Isaias de Jesus, publicada em 2018, que apresenta um elaborado estudo acerca da utilização do sistema de Lotka-Volterra clássico para modelar a dinâmica do controle biológico da broca da cana-de-açúcar.

5.1 Parâmetros e valores iniciais utilizados

Os valores dos parâmetros a, b, c e d utilizados nas simulações numéricas para o caso fracionário foram encontrados no trabalho de Jesus (2018). Além disso, para efeitos de comparação, foram utilizados os mesmos valores iniciais de presas e predadores, bem como o mesmo intervalo de tempo para a simulação numérica.

Para encontrar os valores dos parâmetros, Jesus (2018, p. 23) faz o uso de diversos dados biológicos sobre a *Cotesia flavipes* e a *Diatraea saccharalis*, que foram encontrados pelo autor em diferentes literaturas, conforme a Tabela 5.1 a seguir.

Tabela 5.1: Dados utilizados para determinar as constantes a, b, c e d do sistema de Lotka-Volterra.

Parâmetro	Valor	Unidade
Ciclo de vida (*C. flavipes*)	20	dias
	24	dias
Prole/Fêmea (Indivíduos gerados por fêmea de *C. flavipes*)	28	indivíduos
Razão sexual (*C. flavipes*)	32	%
Taxa de sobrevivência (*C. flavipes*)		%
Ciclo de vida *D. saccharalis*	53 a 60	dias
	70	dias
	66	dias
Prole/Fêmea (Indivíduos gerados por fêmea de *D. saccharalis*)	63	indivíduos
Razão sexual (*D. saccharalis*)	50	%
Taxa de sobrevivência (*D. saccharalis*)		%
Taxa de captura (parasitismo)	40	%

Fonte: retirado de Jesus (2018, p. 23).
Nota: tabela com adaptação dos autores, as referências bibliográficas dos dados apresentados podem ser encontradas no trabalho de origem.

Além da Tabela 5.1, outras duas, com alguns dados sobre a sobrevivência e a geração de indivíduos da broca da cana-de-açúcar, foram utilizadas por Jesus (2018, p. 25 e 26) para auxiliar no processo de determinação dos valores dos parâmetros. No entanto, elas foram omitidas deste texto e podem ser encontradas na referência em questão.

Por conta dos dados biológicos encontrados, Jesus (2018) propõe quatro diferentes combinações de valores de parâmetros, que são estipulados levando em conta a quantidade de ovos depositados por uma fêmea da *Diatraea saccharalis* durante seu ciclo de vida (no caso, o autor utiliza os valores de 300 e 600 ovos), bem como o tempo em dias dos ciclos de vida da *Diatraea saccharalis* e da *Cotesia flavipes* (para os ciclos de vida, o autor utiliza as combinações de 20 dias para o ciclo da vespinha, com 53 dias para a broca e 24 dias para o ciclo da vespinha, com 70 dias para a broca).

As simulações numéricas para o sistema de Lotka-Volterra clássico são feitas pelo autor tomando diferentes valores iniciais para as populações de presas e predadores.

Portanto, a cada comparação gráfica realizada, os valores iniciais das populações serão apresentados, bem como quais parâmetros foram utilizados, levando em conta os dados das Tabelas 5.2 e 5.3 que seguem.

Tabela 5.2: Parâmetros utilizados para um ciclo de vida com 20 dias da *Cotesia flavipes* e 53 dias da *Diatraea saccharalis*.

Nº de ovos (broca)	a	b	c	d
300	0,0126	0,0000101	0,1534	0,00012
600	0,0388	0,0000145	0,1188	0,000106

Fonte: dados retirados de Jesus (2018).

Tabela 5.3: Parâmetros utilizados para um ciclo de vida com 24 dias da *Cotesia flavipes* e 70 dias da *Diatraea saccharalis*.

Nº de ovos (broca)	a	b	c	d
300	0,0095	0,0000096	0,1278	0,0001
600	0,0293	0,0000129	0,099	0,0000887

Fonte: dados retirados de Jesus (2018).

Na próxima seção será desenvolvida a análise gráfica das simulações numéricas utilizando os grupos de parâmetros encontrados por Jesus (2018) para 300 ovos de *Diatraea saccharalis*, nos ciclos de 20 e 53 dias da vespinha e da broca, respectivamente, e para 600 ovos de *Diatraea saccharalis*, nos ciclos de 24 e 70 dias da vespinha e da broca, respectivamente (verificar Tabelas 5.2 e 5.3). O principal objetivo do estudo gráfico é comparar e compreender as diferenças entre os resultados utilizando o cálculo clássico e o cálculo de ordem não inteira.

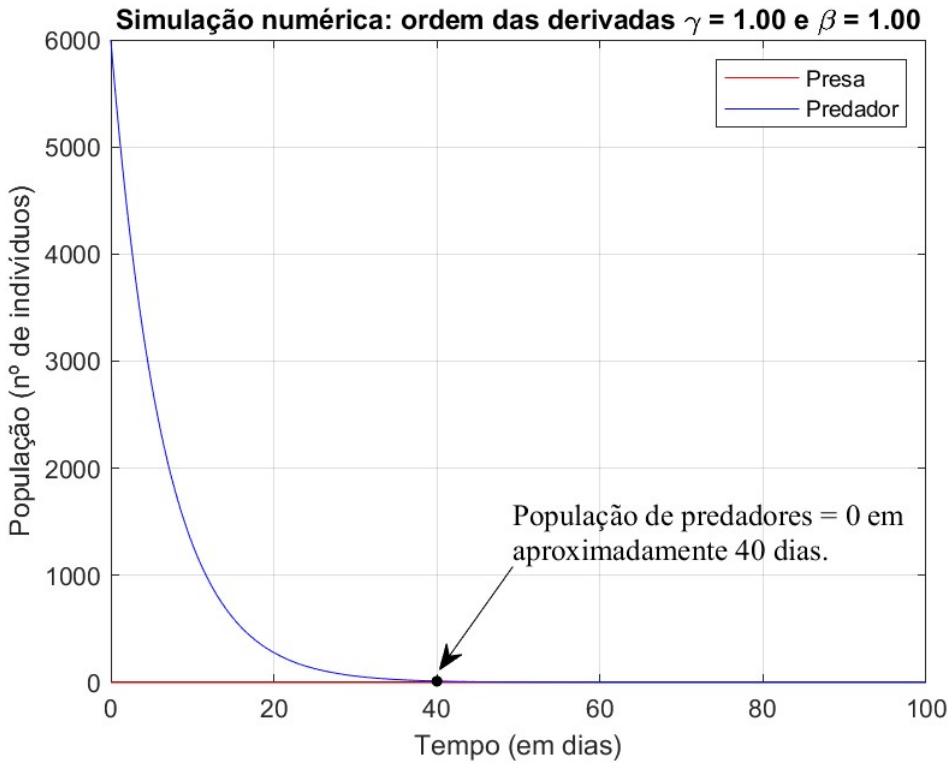
5.2 Análise gráfica

Por meio da rotina FDE_PI2_Im para o software MATLAB, apresentada na subseção 4.2.2 e utilizando os parâmetros das Tabelas 5.2 e 5.3 para o caso de 300 ovos e 600 ovos, foram elaborados os gráficos que seguem. Em todos os casos, são tomadas as derivadas fracionárias de Caputo, com $0 < \gamma \leq 1$ e $0 < \beta \leq 1$, utilizando o sistema de Lotka-Volterra fracionário (4.32). Em específico, são consideradas combinações das ordens de derivadas com valores de γ e β iguais a 1.00, 0.99 e 0.98, uma vez que o comportamento esperado já pode ser identificado com estes valores, possibilitando a comparação qualitativa

desejada. Valores menores de ordens de derivadas foram simulados, no entanto não estão presentes neste trabalho, pois foi possível constatar que o comportamento gráfico apenas reforça o fenômeno e, para valores muito menores, já não fazia mais sentido para o evento biológico em questão. Além disso, foi possível verificar que para o modelo utilizado a alteração na ordem das derivadas é muito sensível, uma vez que pequenas modificações de valores causam grande diferença no gráfico gerado. Portanto, não foi necessário trabalhar com ordens menores para o objetivo em questão, pois como já foi citado, pode acontecer a descaracterização da modelagem trabalhada. Nos casos em que $\gamma = \beta = 1$, recuperam-se os resultados clássicos, isto é, são os resultados já apresentados por Jesus (2018) em seu trabalho. São apresentados, inicialmente, os resultados referentes aos parâmetros de 300 ovos, seguidos pelos resultados referentes aos parâmetros de 600 ovos.

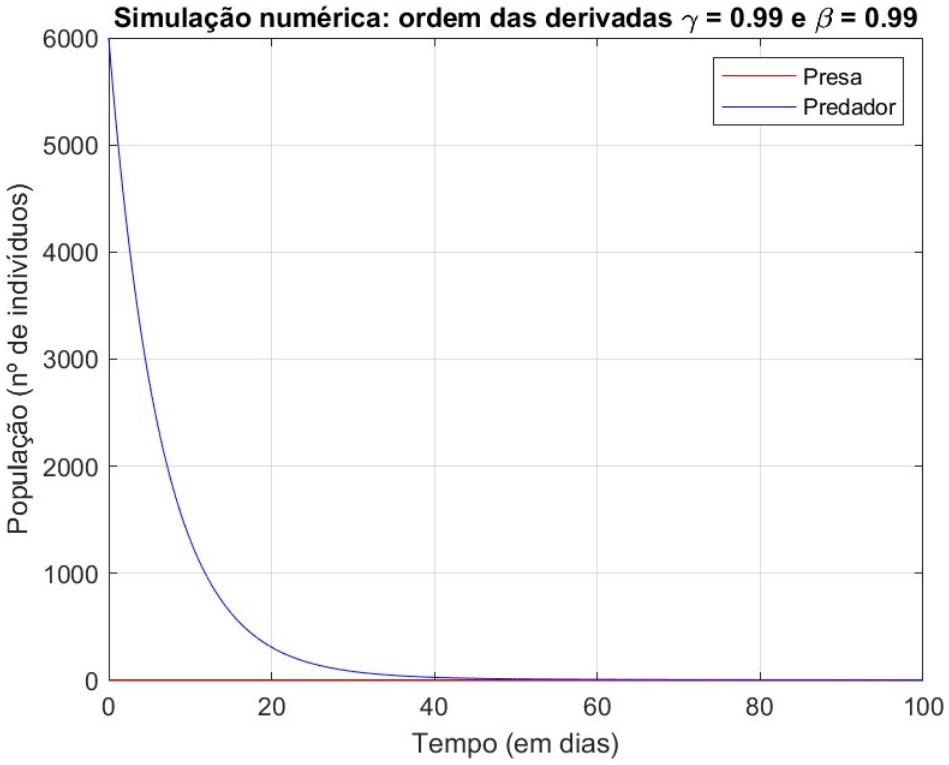
Como forma de introduzir o funcionamento do sistema, assim como foi feito por Jesus (2018) em seu trabalho, as Figuras de 5.1 até 5.6 consideram as situações em que uma das populações não possui indivíduos, isto é, em um dos casos ocorrerá a ausência de presas, no outro a ausência de predadores.

Figura 5.1: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$:



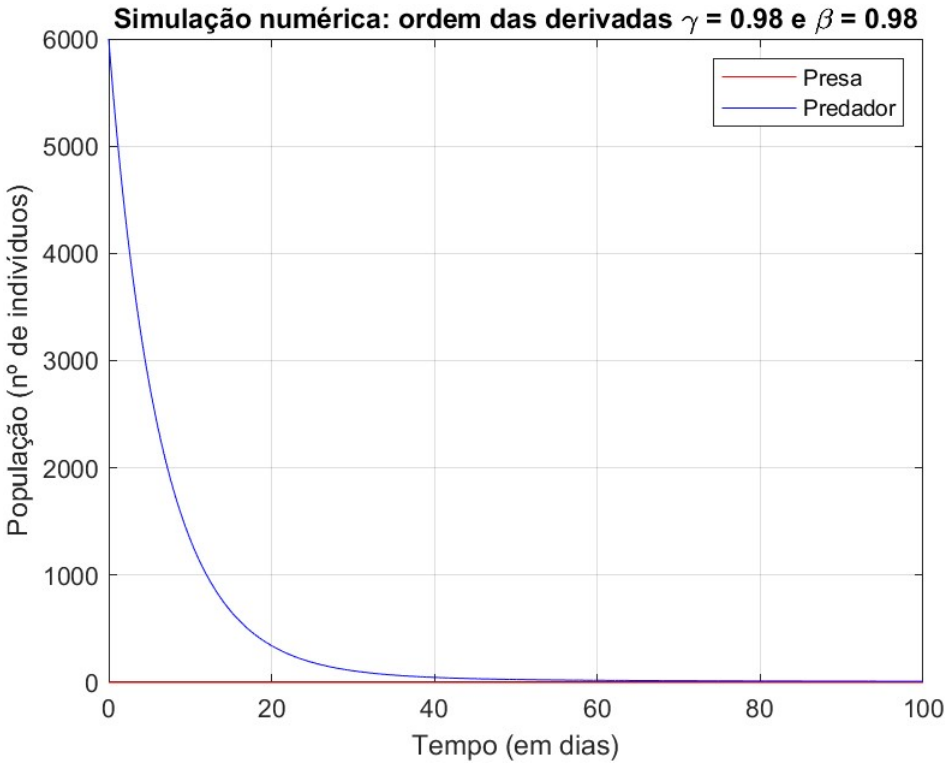
Fonte: retirado de Jesus (2018), adaptação dos autores.

Figura 5.2: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.3: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$:

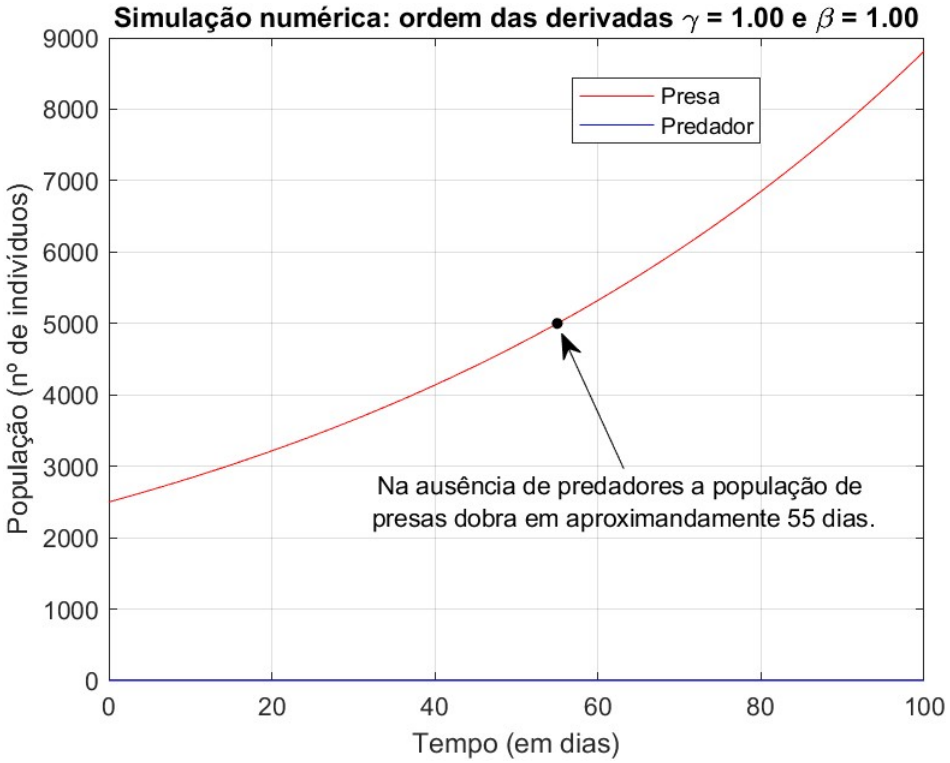


Fonte: elaborado pelos autores.

As Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 mostram um comportamento muito semelhante, uma vez que quando não existem brocas da cana-de-açúcar para a predação da vespinha, a população tende a cair de forma exponencial. No entanto, ainda é possível verificar, por meio das Figuras 5.2 e 5.3, leves diferenças nos casos em que as ordens das derivadas γ e β assumem os valores 0.99 e 0.98.

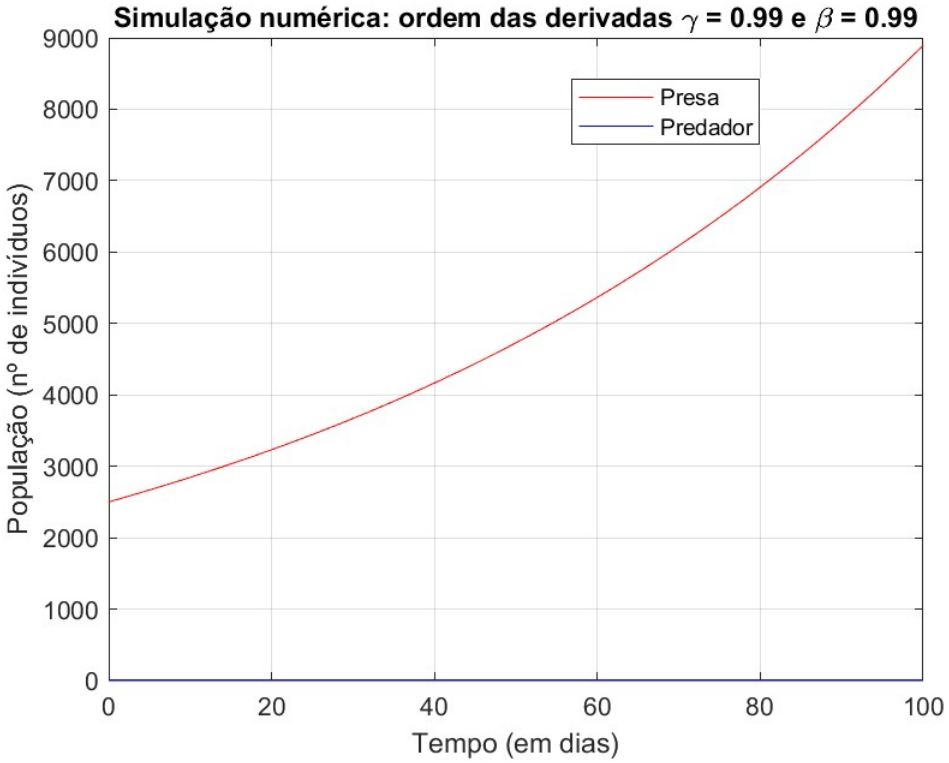
Para o caso clássico, representado na Figura 5.1, a população de vespinhas chega a 0 em aproximadamente 40 dias, o que não ocorre tão diretamente nos outros casos. Tal característica pode estar relacionada com algum fator de sobrevivência da vespinha que não é trabalhado como parâmetro no sistema de Lotka-Volterra, porém representa uma extensão, mesmo que mínima, da duração da vida da população na ausência de alimento.

Figura 5.4: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$:



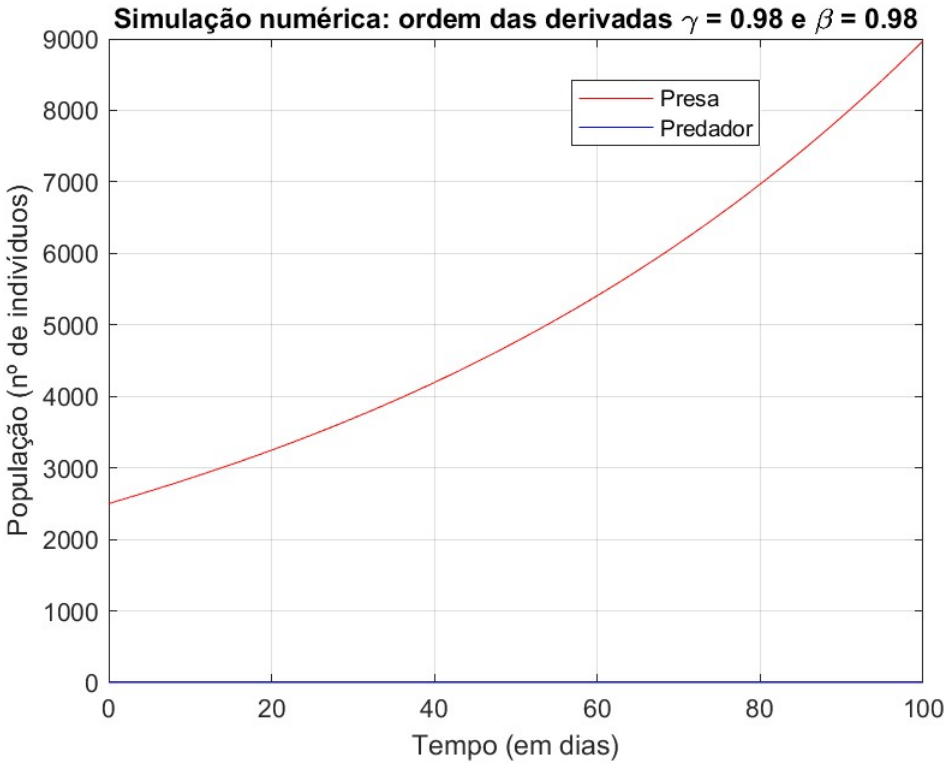
Fonte: retirado de Jesus (2018), adaptação dos autores.

Figura 5.5: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.6: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$:

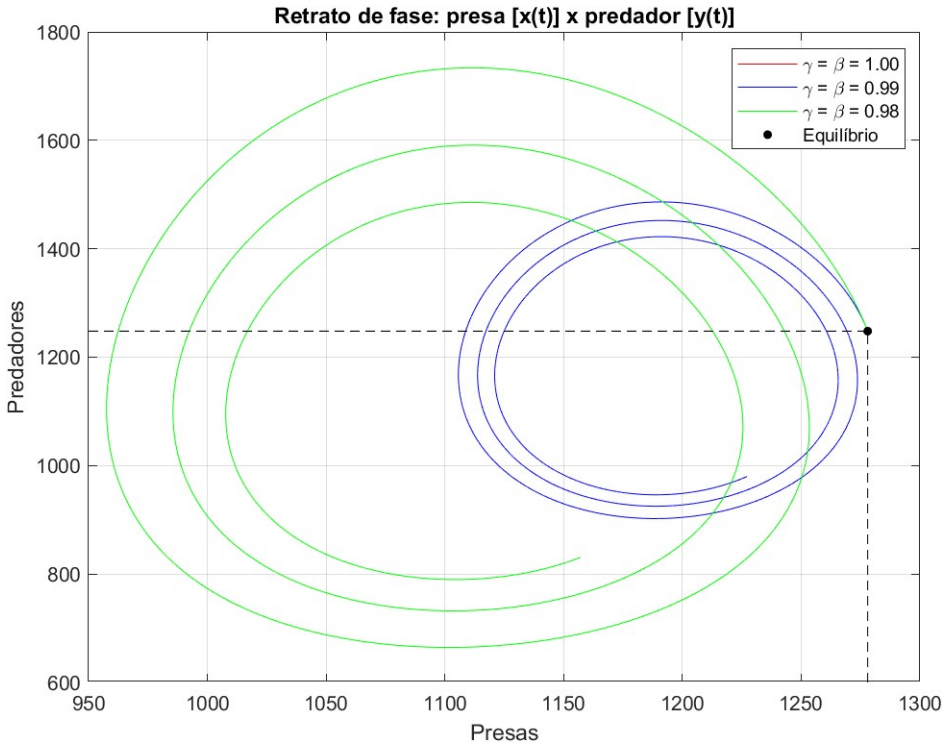


Fonte: elaborado pelos autores.

A situação representada pelas Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 mostra a evolução da broca da cana-de-açúcar no ambiente quando não existem predadores. O crescimento se dá de forma exponencial nos três casos, fator que justifica sua fama de inseto-praga. No entanto, assim como ocorreu na presença de predadores e ausência de pragas, mesmo o comportamento gráfico sendo muito semelhante, ainda é possível reparar que nos casos das Figuras 5.5 e 5.6, em que as ordens das derivadas γ e β assumem os valores 0.99 e 0.98, o crescimento da praga sofre uma leve aceleração, que também pode ser justificada pela compensação da ausência de parâmetros no sistema relacionados à adaptação e evolução do inseto-praga no ambiente.

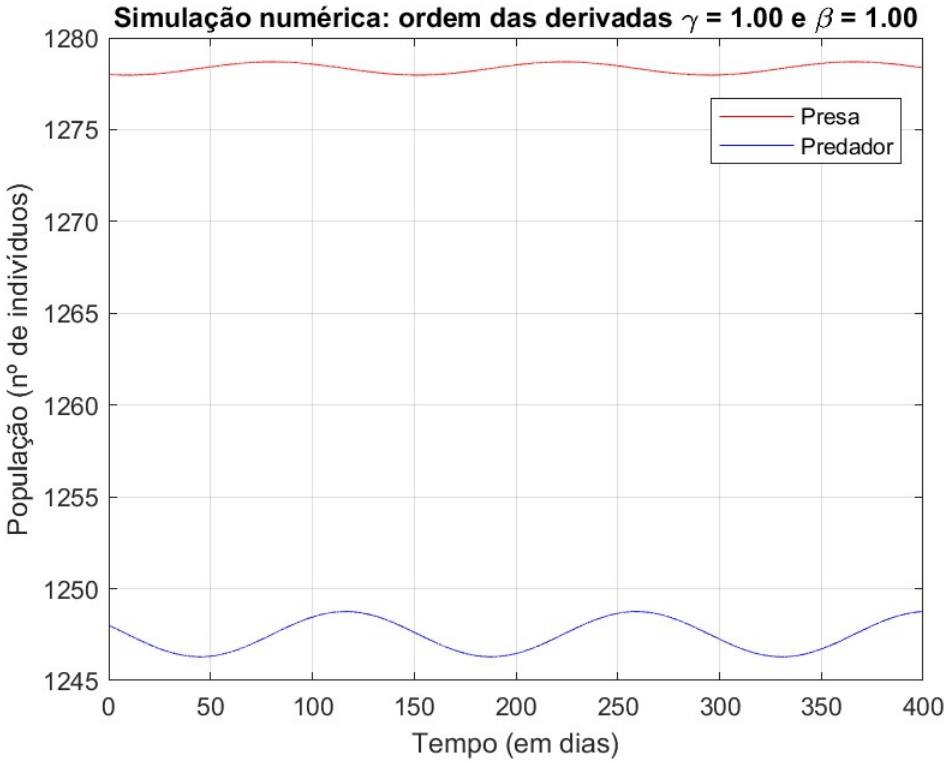
Outra possibilidade para desenvolver as simulações numéricas é utilizar o ponto de equilíbrio do sistema de Lotka-Volterra como condição inicial. Em seu trabalho, Jesus (2018) utiliza o ponto de equilíbrio para estudar o comportamento do sistema durante o tempo. Da subseção 4.1.2, sabe-se que $P_2 = (c/d, a/b)$ é ponto crítico do sistema. Logo, substituindo os valores dos parâmetros, obtém-se o ponto $P_2 = (1278.33\overline{3}, 1247.5248)$, que será considerado $P_2 = (1278, 1248)$, pois são valores relacionados às populações de indivíduos. As Figuras de 5.7 até 5.14 utilizam P_2 como condição inicial, sendo que a Figura 5.7 mostra o retrato de fase da relação predador-presa neste caso.

Figura 5.7: Retrato de fase: presa x predador para o ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* e 53 dias da *Diatraea saccharalis* com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas:



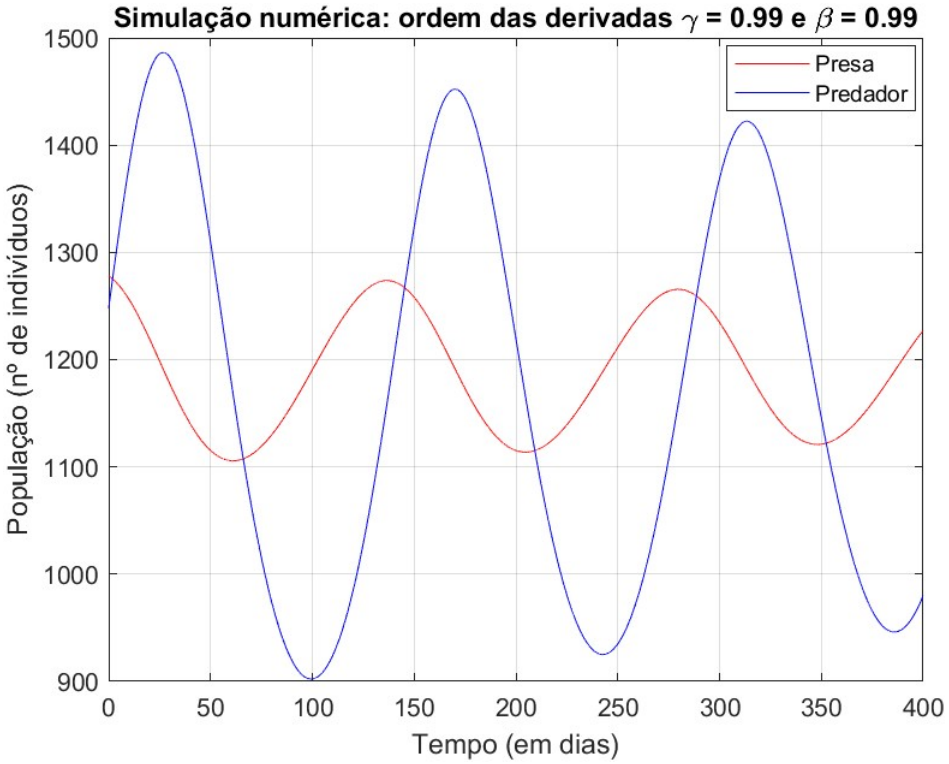
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.8: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$:



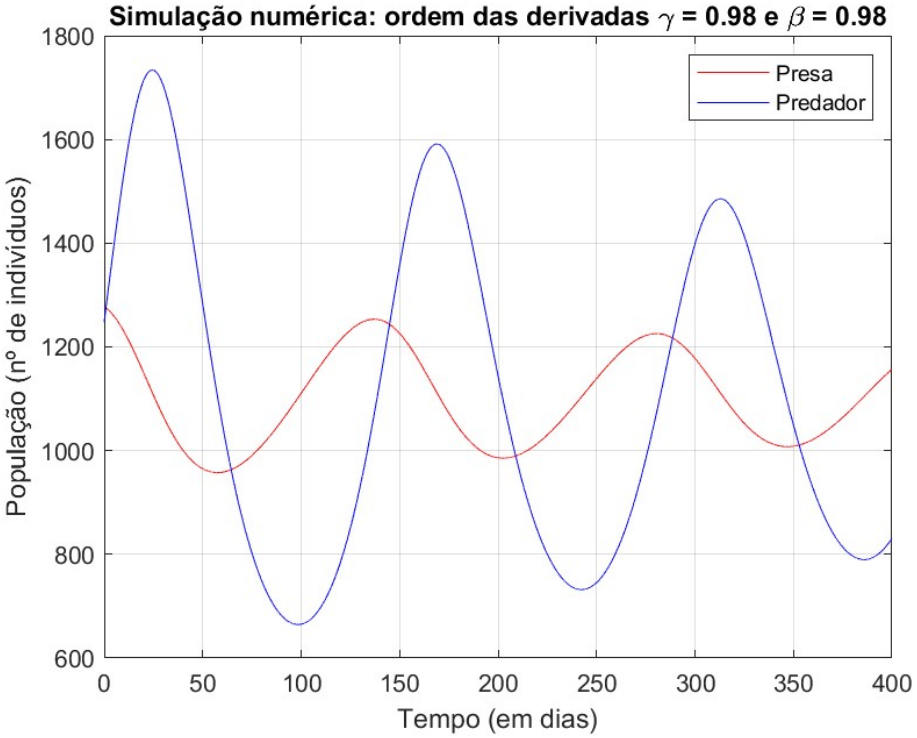
Fonte: retirado de Jesus (2018), adaptação dos autores.

Figura 5.9: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$:



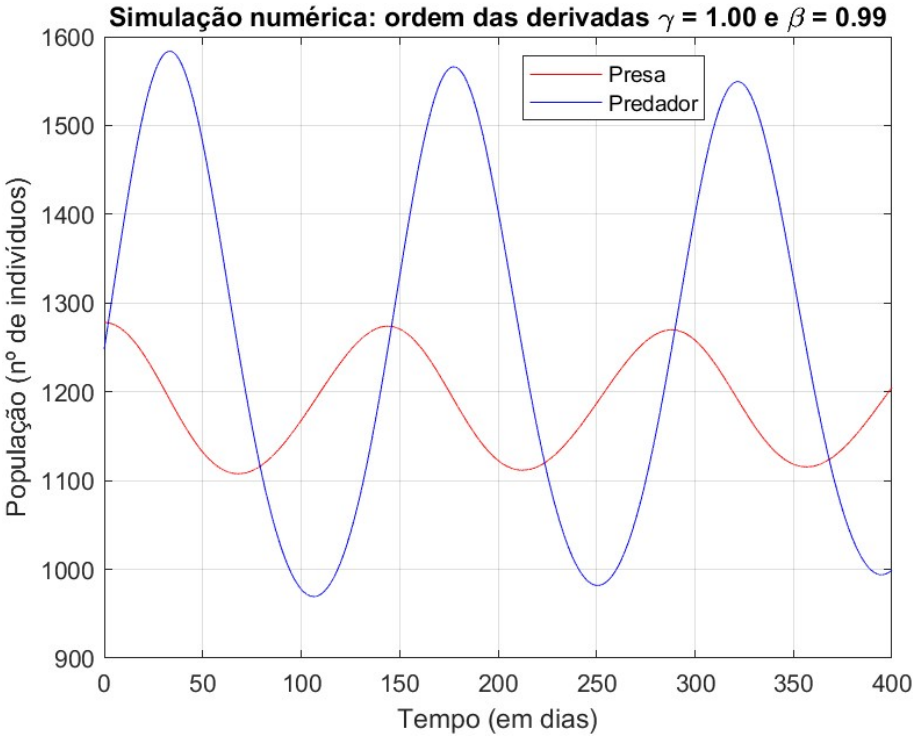
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.10: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$:



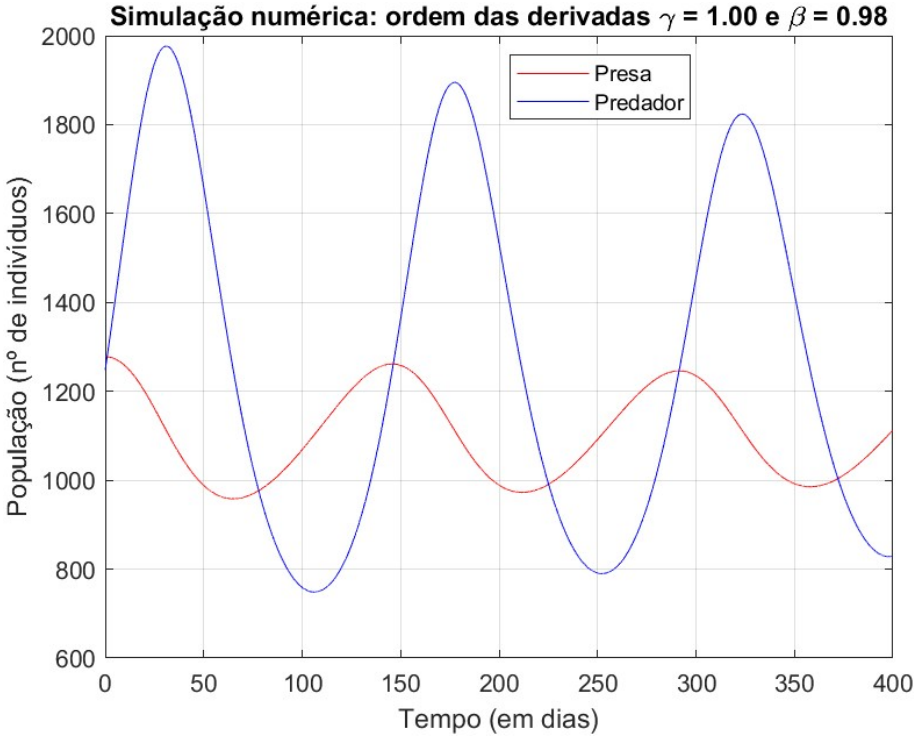
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.11: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.99$:



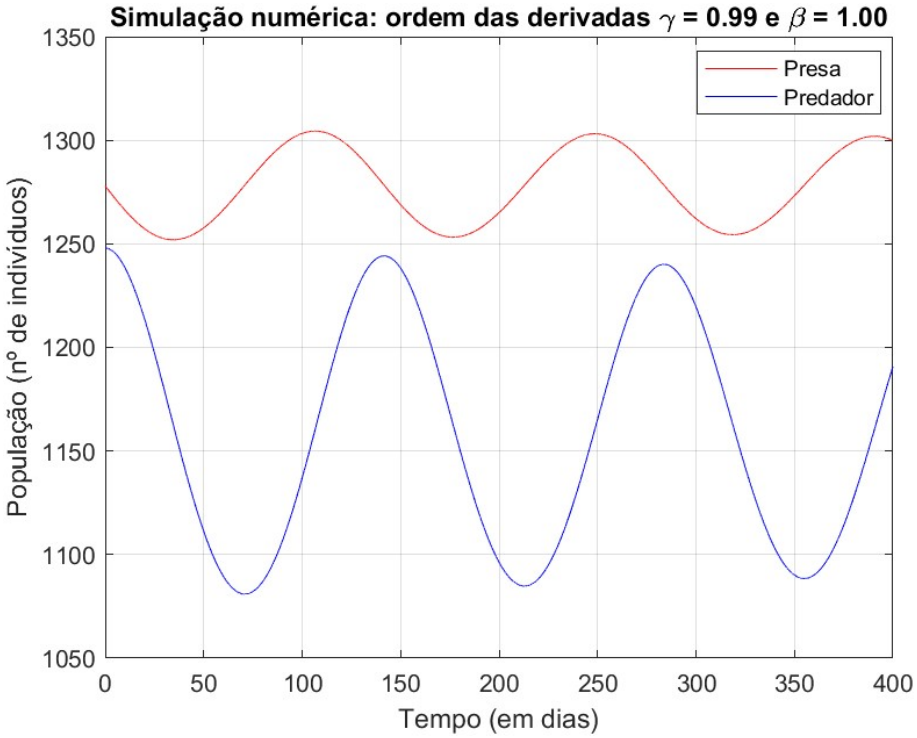
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.12: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.98$:



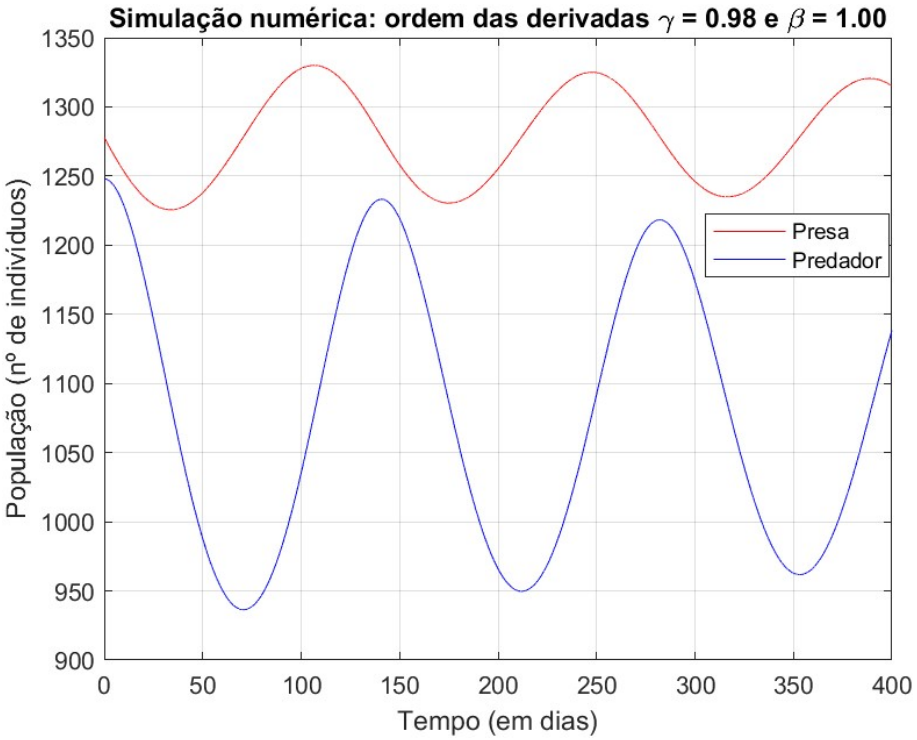
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.13: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 1.00$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.14: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 1248 predadores e 1278 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 1.00$:



Fonte: elaborado pelos autores.

De maneira alternativa ao que ocorreu nas primeiras figuras analisadas, quando as populações da vespinha e da broca da cana-de-açúcar possuem seus valores no ponto de equilíbrio do sistema, o comportamento dos gráficos envolvendo derivadas fracionárias e as derivadas inteiras clássicas é bem diferente. Iniciando a análise pelo retrato de fase da Figura 5.7, é possível observar que as populações mantêm uma relação cíclica, afunilando a quantidade de indivíduos por conta do efeito das derivadas fracionárias, que fazem o sistema buscar o ponto de equilíbrio. No entanto, pela fato de a condição inicial ser o ponto de equilíbrio, ocorre que o gráfico para o caso clássico acaba não sendo visível, pois sua variação é mínima quando comparado com os casos fracionários.

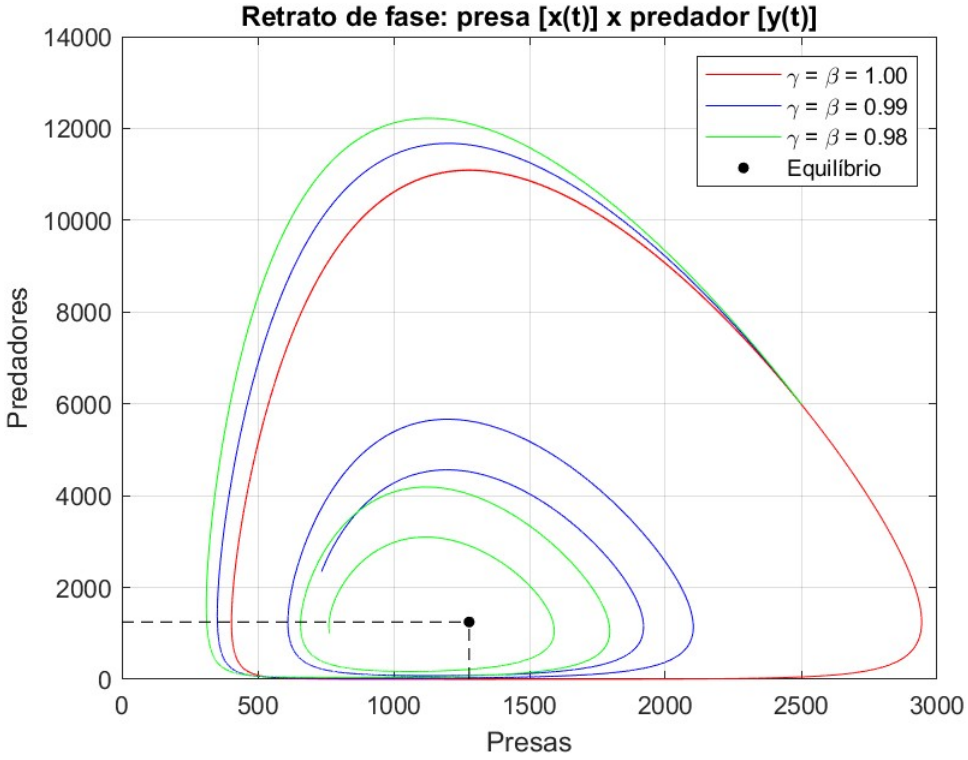
A Figura 5.8 representa o comportamento do modelo clássico, que foi apresentado por Jesus (2018) em seu trabalho. De acordo com o autor, é possível verificar que as oscilações nas populações são mínimas, além de que a oscilação na população da broca da cana-de-açúcar é menor do que a oscilação da população de vespinhas. Além disso, por conta da estabilidade que as populações apresentam, não ocorrem pontos de intersecção entre os gráficos.

Considerando o processo de controle biológico, o modelo clássico mostra que, para o período de 400 dias em questão, as populações se mantêm controladas, sem que ocorra um surto da praga ou a morte de todos os predadores. No entanto, é importante ressaltar que o sistema de Lotka-Volterra considera duas populações interagindo de forma homogênea no ambiente, sem envolvimento de complexidade ambiental. Neste sentido, os resultados apresentados nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 podem ser alternativas que melhor expressam tal complexidade, uma vez que mesmo que as populações estejam em seus pontos de equilíbrio, existem diversos outros parâmetros, por exemplo as condições climáticas durante o intervalo de tempo, que o sistema não considera e que podem causar certa oscilação nas populações próximas desses pontos. É possível observar, ainda nestas figuras, que mesmo que o intervalo inicie com as populações em equilíbrio, ocorrem pontos de intersecção nos gráficos e, apesar das oscilações, as populações estão tendendo para pontos de estabilidade.

Em relação às Figuras 5.13 e 5.14, os fenômenos representados possuem certa semelhança com os anteriores. Porém, para estes dois casos, não ocorrem pontos de intersecção entre os gráficos, fato que pode ser relacionado com uma menor oscilação da população de vespinhas, que nunca chegam a atingir a mesma quantidade de presas. Uma hipótese para este tipo de comportamento pode estar relacionada com o processo de alimentação e reprodução das vespinhas, que para estes dois casos, pode não ser tão proveitoso por conta de fatores externos ao modelo utilizado.

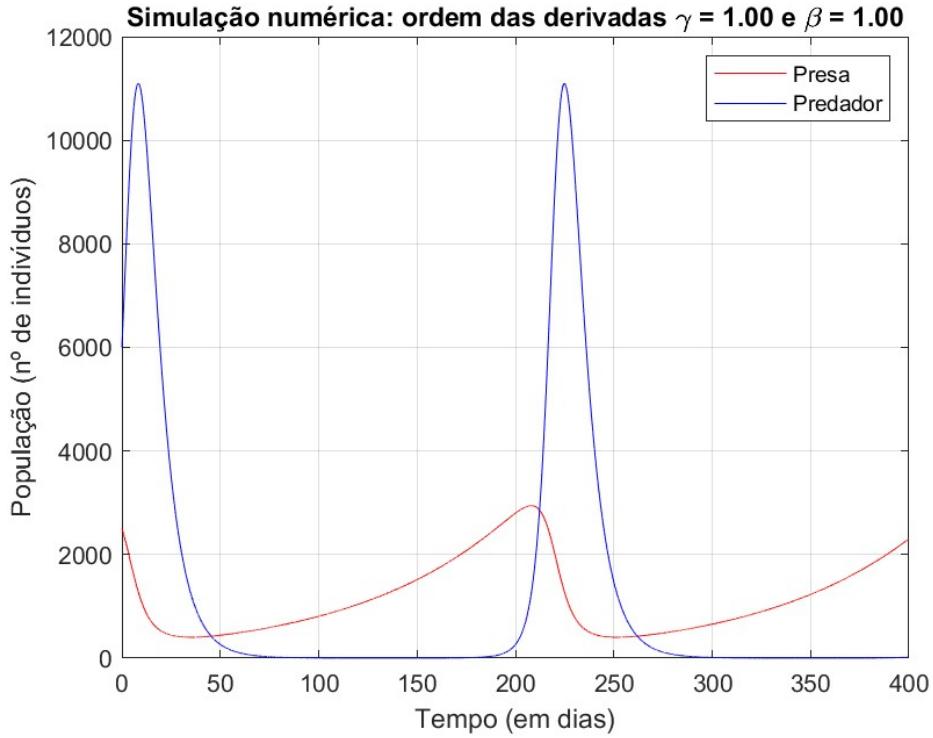
As próximas figuras representam as simulações com valores iniciais de 6000 vespinhas e 2500 brocas da cana-de-açúcar. Optou-se por esses valores por conta da possibilidade de comparar as simulações fracionárias com os resultados do modelo clássico, que foram encontrados por Jesus (2018) em seu trabalho. Além disso, de acordo com Araújo et. al. (1984, apud JESUS, 2018, p. 44), a quantidade de 6000 vespinhas é capaz de controlar o avanço da praga para uma população de 2500 brocas, considerando um hectare. Tal informação corrobora com os dados vistos na subseção 3.3.1, que informa que usualmente costumam ser liberadas 6000 vespinhas por hectare para o processo de controle biológico. Portanto, a análise gráfica dos resultados a seguir se faz pertinente por conta do processo de controle biológico, representando uma possível quantidade ideal de predadores para iniciar a contenção da praga.

Figura 5.15: Retrato de fase: presa x predador para o ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* e 53 dias da *Diatraea saccharalis* com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas:



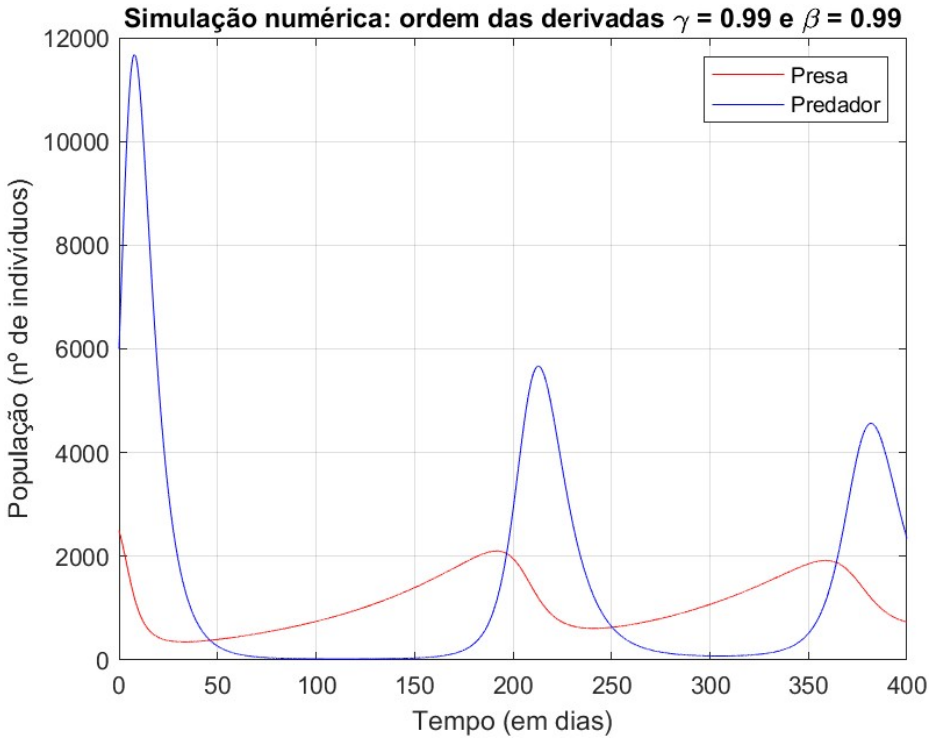
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.16: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$:



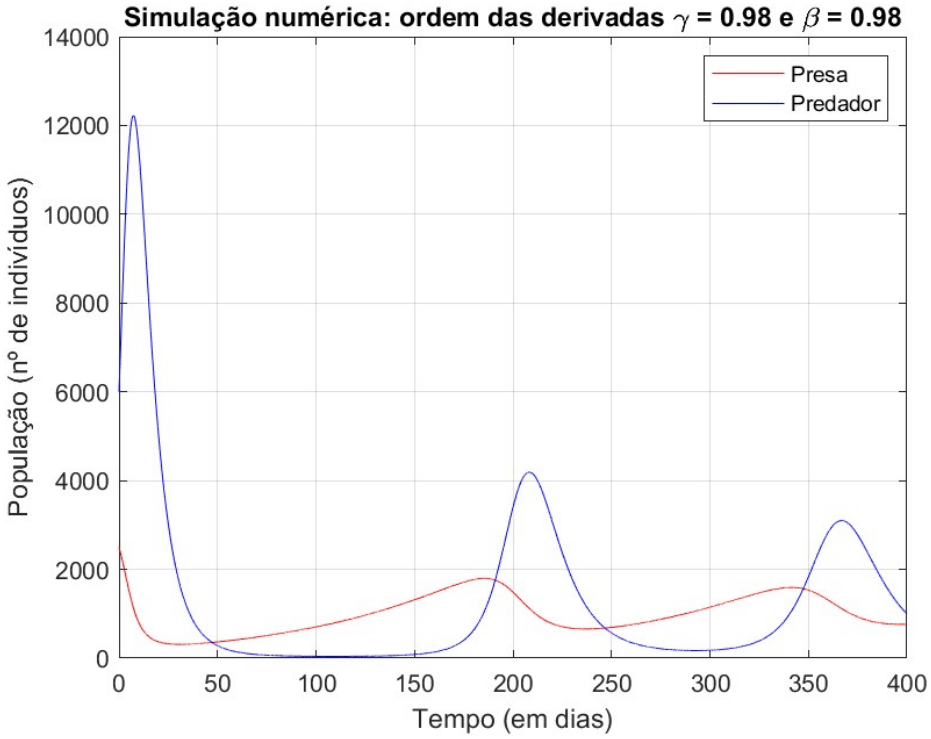
Fonte: retirado de Jesus (2018), adaptação dos autores.

Figura 5.17: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$:



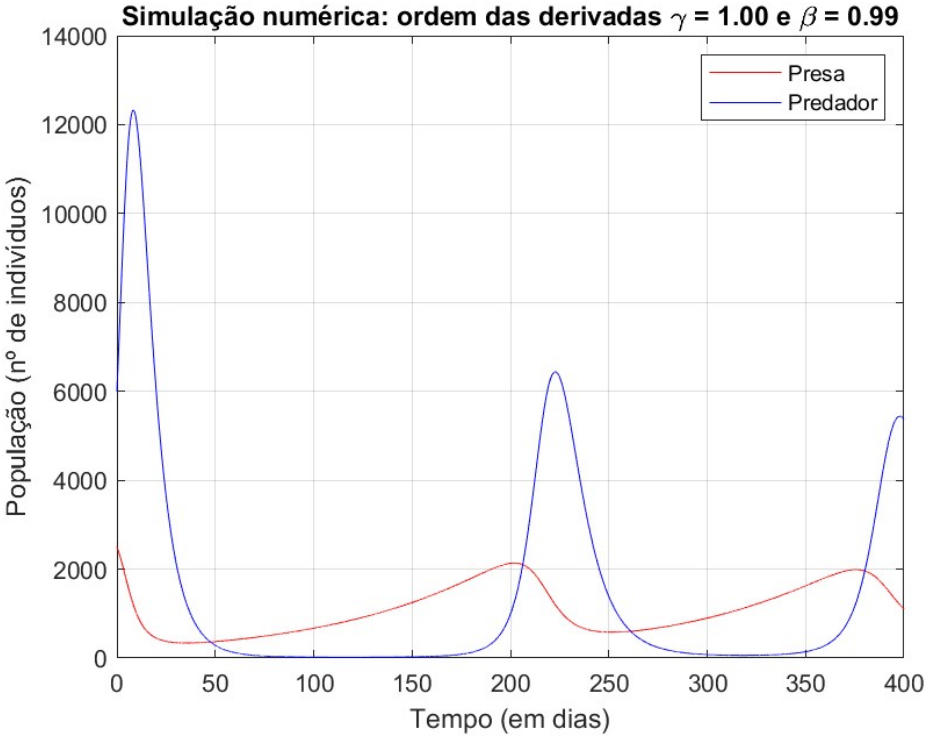
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.18: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$:



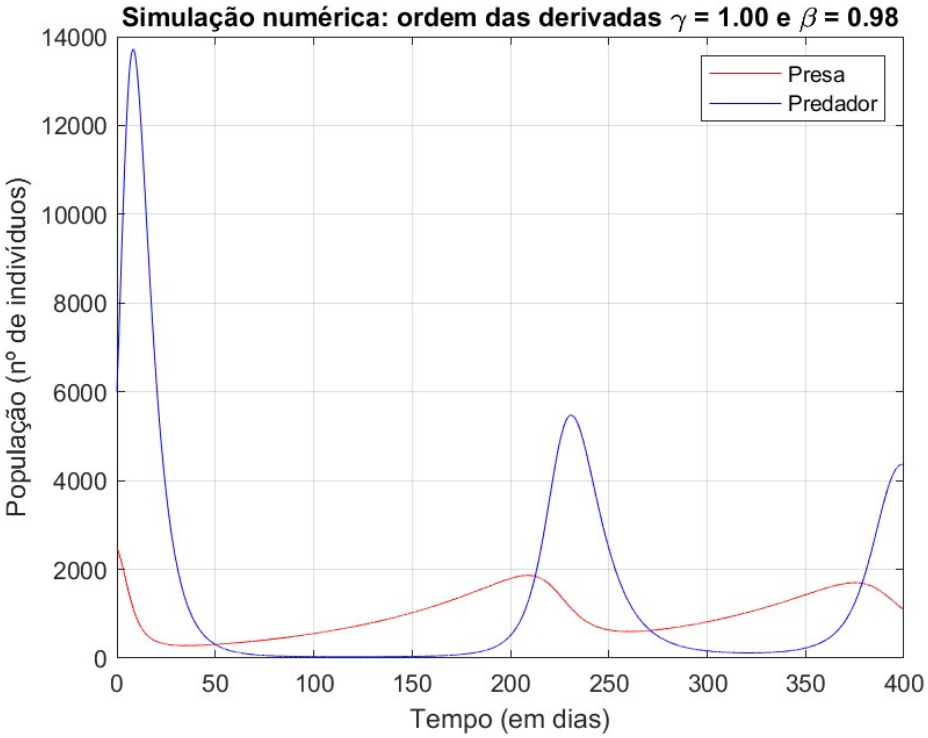
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.19: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.99$:



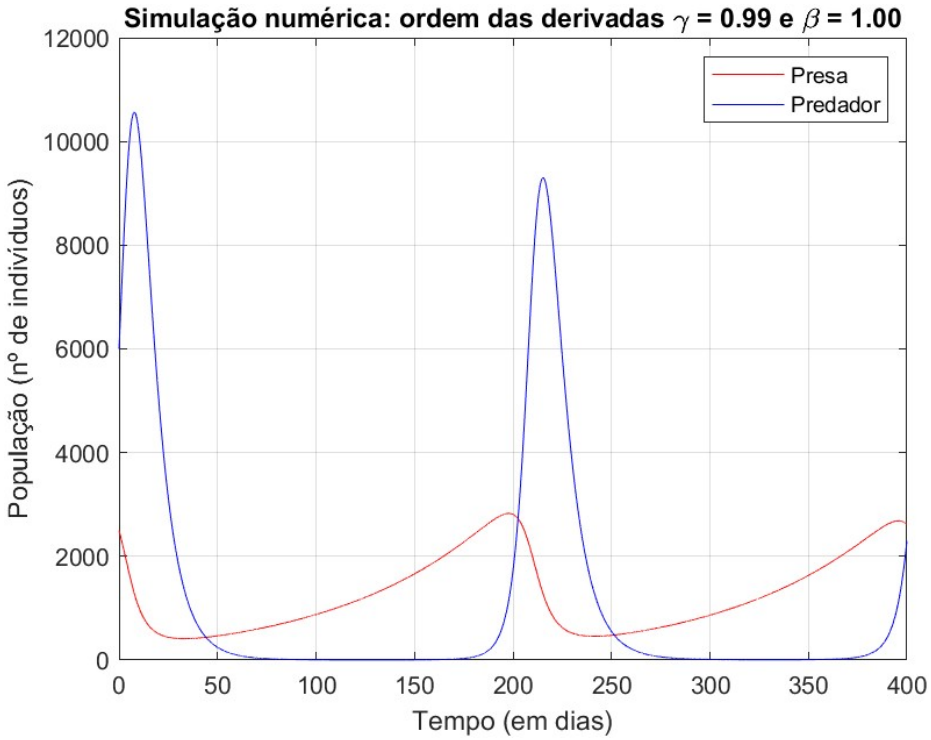
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.20: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.98$:



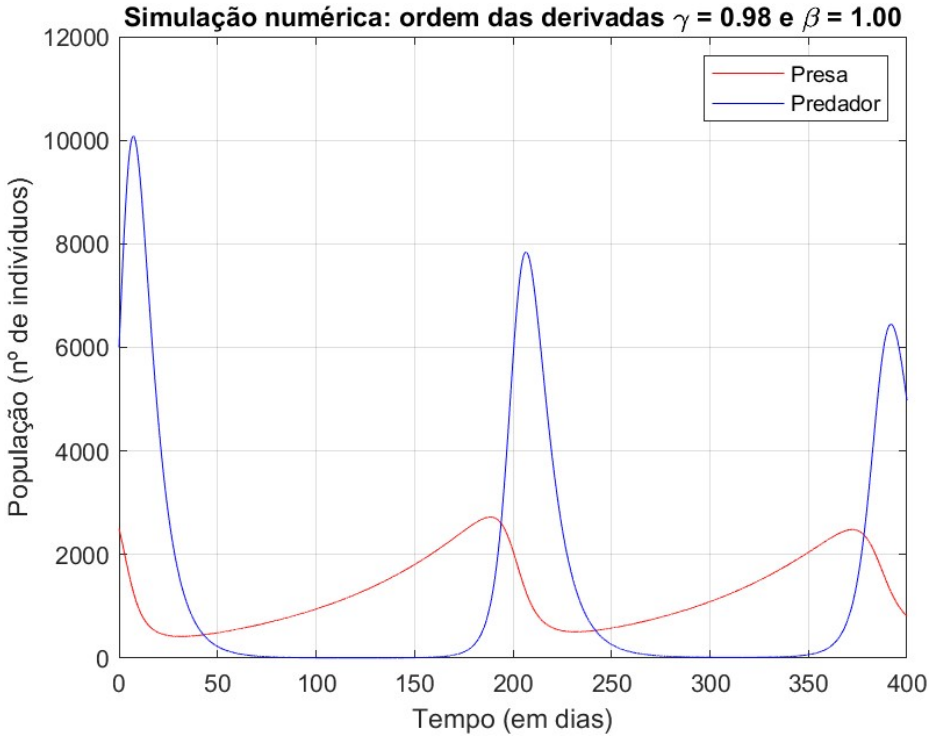
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.21: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 1.00$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.22: Ciclo de vida de 20 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 53 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 300 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 1.00$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Assim como visto para o caso do ponto de equilíbrio como condição inicial, é possível observar o retrato de fase para a situação de 6000 vespinhas e 2500 brocas. A Figura 5.15 mostra que, assim como já visto, as populações mantêm um ciclo de crescimento e decrescimento ao longo do tempo. No entanto, diferentemente do caso em que as condições iniciais são o ponto de equilíbrio, agora possível observar que mesmo o caso clássico mantêm seu movimento com base no ponto de equilíbrio das populações. Em especial é possível observar que os casos fracionários tendem a tal ponto, fator que novamente caracteriza a complexidade que surge quando são utilizadas derivadas fracionárias.

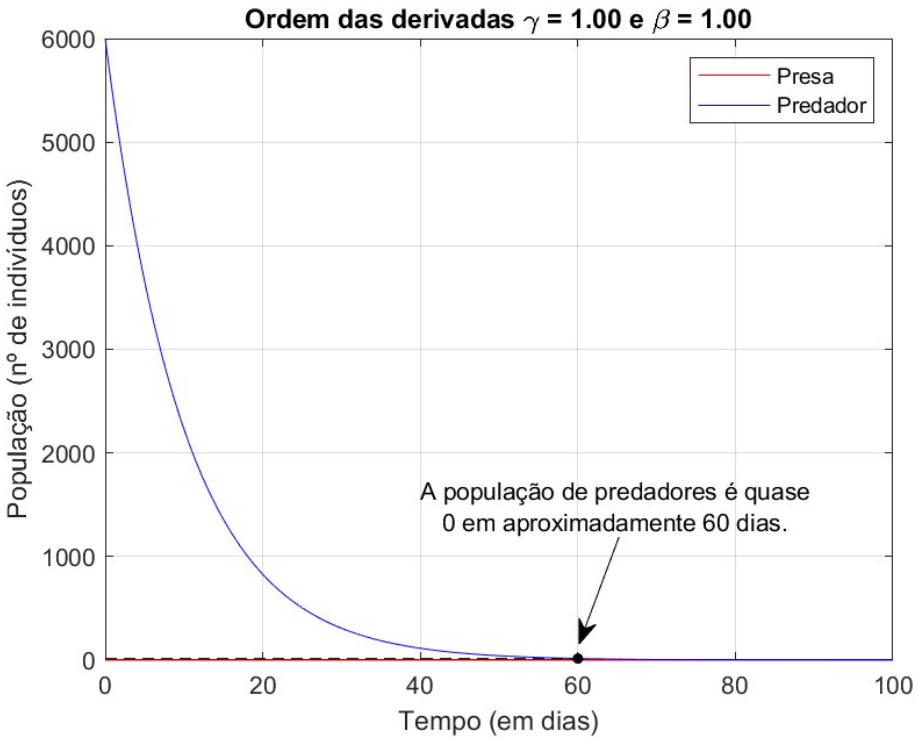
A Figura 5.16 mostra os resultados numéricos encontrados por Jesus (2018). É possível verificar, assim como constatado pelo autor, que a população de pragas se mantêm controlada por aproximadamente 180 dias, antes de retornar ao seu valor inicial de indivíduos. Este tipo de conclusão é de grande valia, uma vez que pode auxiliar o processo de controle biológico em relação ao tempo que a praga fica controlada. No entanto, como já foi citado neste trabalho, é comum que ocorram novas solturas da vespinha em períodos de até 15 dias em relação à soltura inicial. Tal fato sugere a hipótese de que a população de vespinhas pode não manter a característica cíclica mostrada na Figura 5.16, perdendo indivíduos com o avanço do tempo e diminuindo a efetividade do controle biológico.

Novamente, pelo fato do sistema de Lotka-Volterra não representar toda a complexidade das interações de um ambiente, o movimento periódico entre as populações no gráfico é uma característica intrínseca do modelo. Porém, considerando as Figuras 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22, em que é utilizada a derivada fracionária, o movimento das populações passa a tender para um ponto de estabilidade do sistema. Entre todos estes casos, é possível verificar que a população de pragas não sofre uma variação tão grande, enquanto a população de predadores atinge picos menores com o passar do tempo. Este comportamento pode auxiliar na justificativa do porquê são necessárias novas solturas da vespinha no ambiente, reforçando a quantidade de indivíduos na população, para que o controle biológico se mantenha.

Em especial, as Figuras 5.21 e 5.22 mostram situações em que a população de vespinhas diminui com o avanço do tempo e a população de pragas volta ao seu valor inicial e chega a ultrapassá-lo. Estas situações apresentam as hipóteses de que ao longo do tempo, caso não ocorram reforços na população de vespinhas, a broca da cana-de-açúcar voltará a crescer sem controle.

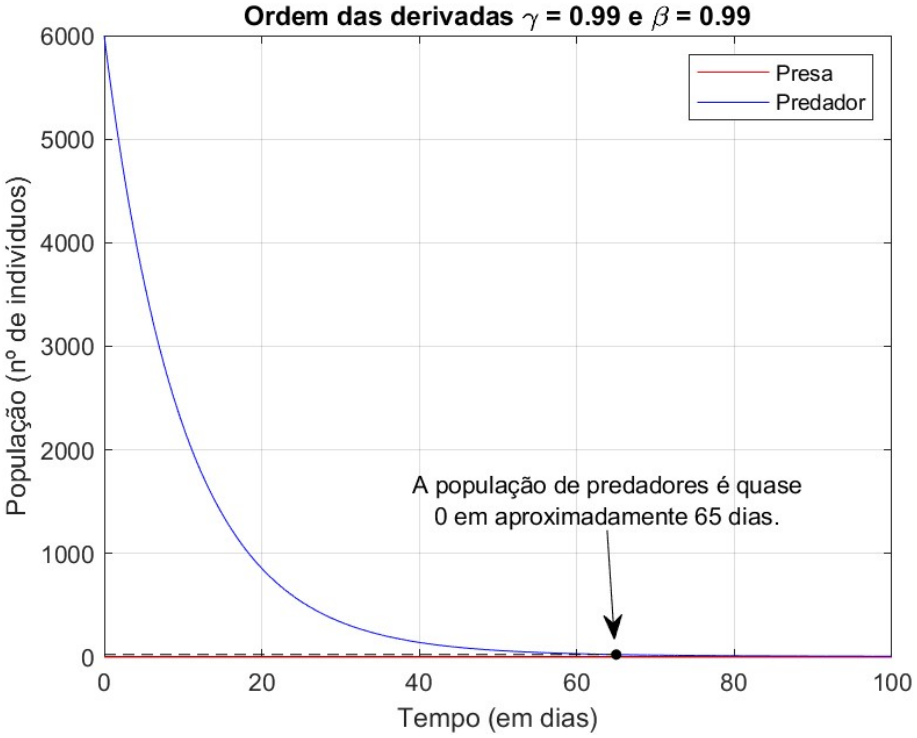
Com base no que já foi elencado no começo desta seção, as próximas figuras são as simulações numéricas para o caso de 600 ovos da praga. O objetivo neste momento é verificar se o comportamento gráfico se difere dos já apresentados por conta das mudanças dos parâmetros e dos dados biológicos relacionados com a presa e o predador. A sequência das figuras segue a ordem já apresentada anteriormente, passando pelas situações de uma única espécie presente, o ponto de equilíbrio entre espécies e uma situação de controle biológico considerada suficiente. As Figuras de 5.23 até 5.25 tratam da situação de 6000 predadores, sem pragas presentes.

Figura 5.23: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$:



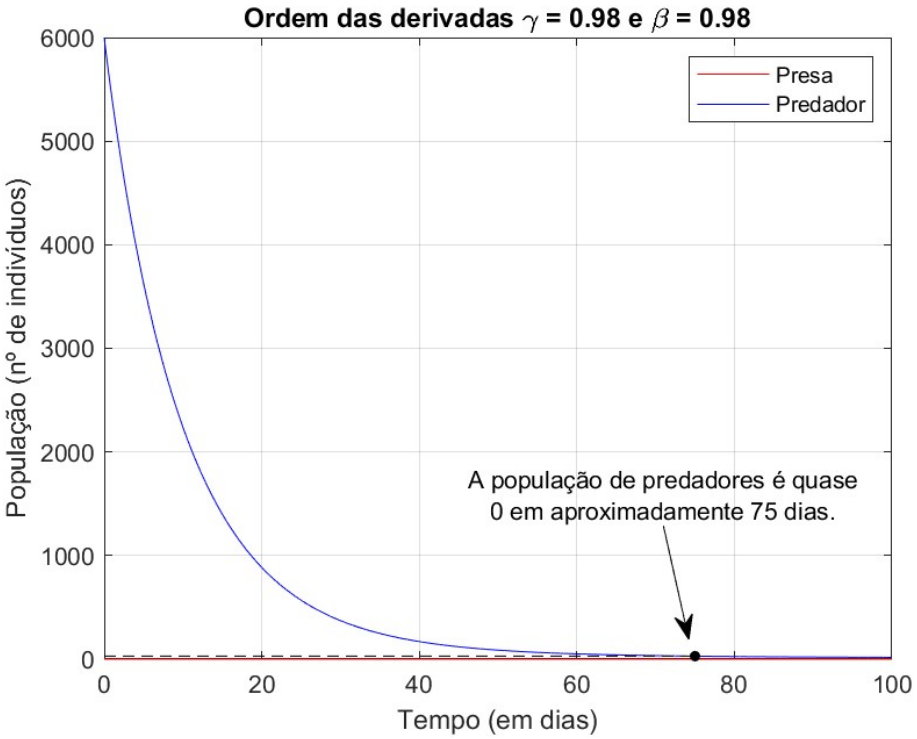
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.24: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.25: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 0 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$:

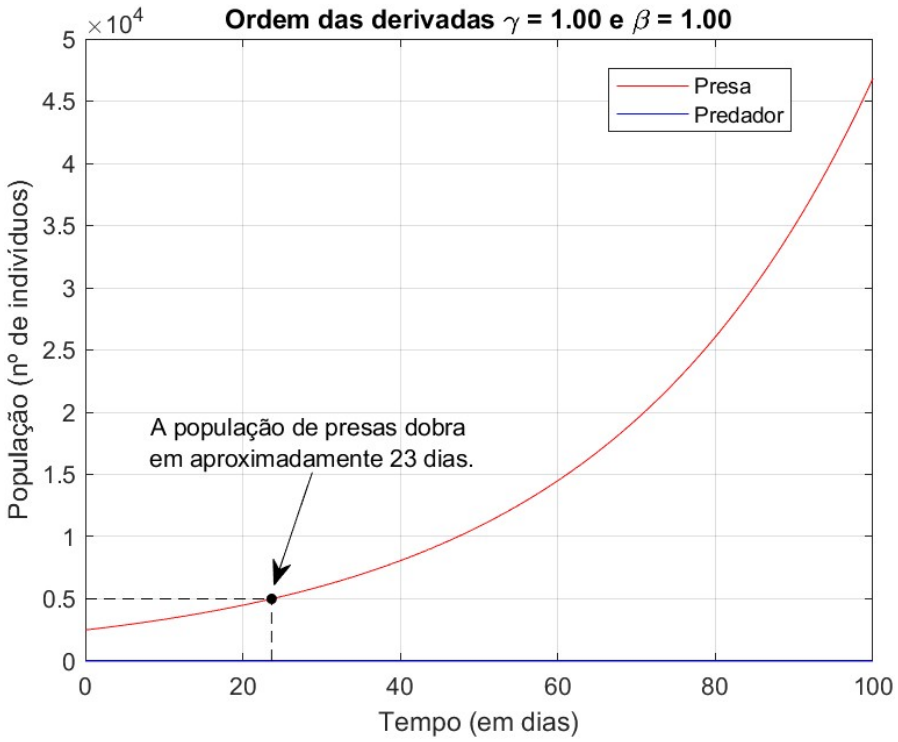


Fonte: elaborado pelos autores.

As Figuras 5.23, 5.24 e 5.25 mostram um comportamento semelhante com a simulação feita para o caso de 300 ovos da praga. É possível observar que a população de predadores decai exponencialmente por conta da ausência de presas no ambiente. A Figura 5.23 representa o resultado encontrado por Jesus (2018), em que a população de predadores chega a 0 em aproximadamente 60 dias, enquanto nas Figuras 5.24 e 5.25, o tempo de vida do predador sofre um prolongamento, passando para aproximadamente 65 e 75 dias, respectivamente. Assim como na situação para 300 ovos, é possível considerar que tal extensão do tempo de vida das vespinhas está relacionada com fatores do ambiente externos aos parâmetros do sistema de Lotka-Volterra.

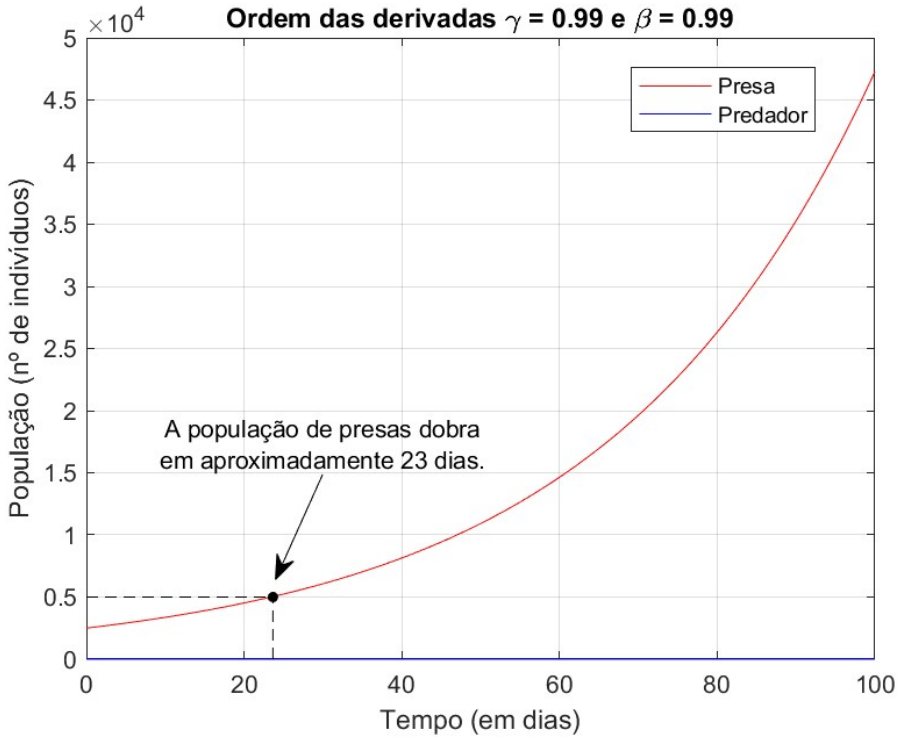
Visando observar o comportamento para o caso em que não existem predadores, as Figuras 5.26, 5.27 e 5.28 a seguir mostram as simulações feitas para a população de 2500 brocas, sem a presença de vespinhas predadoras.

Figura 5.26: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$:



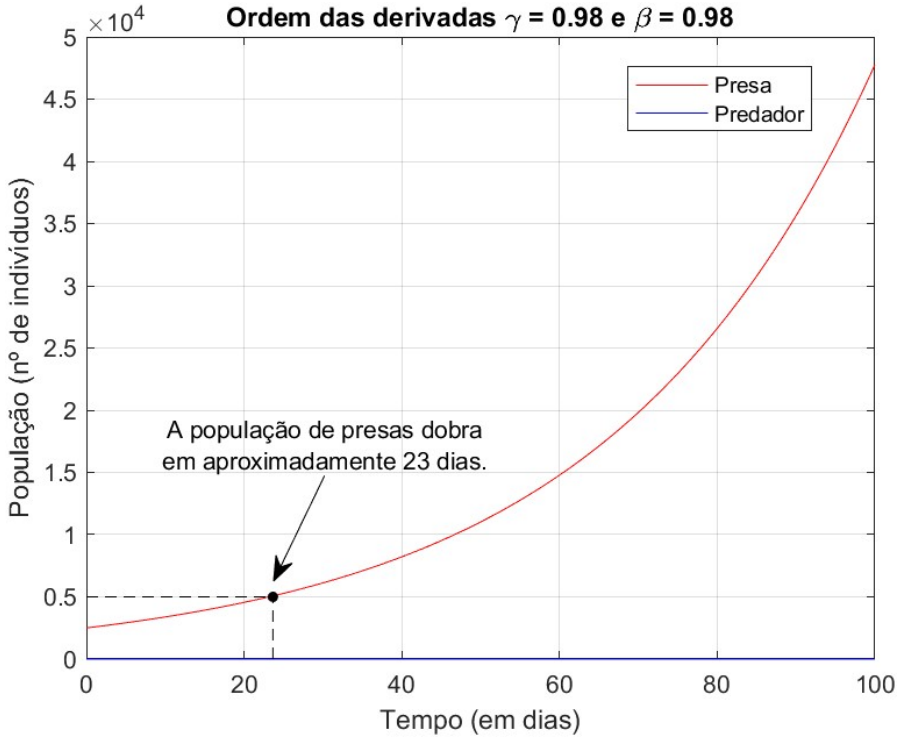
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.27: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.28: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 0 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$:

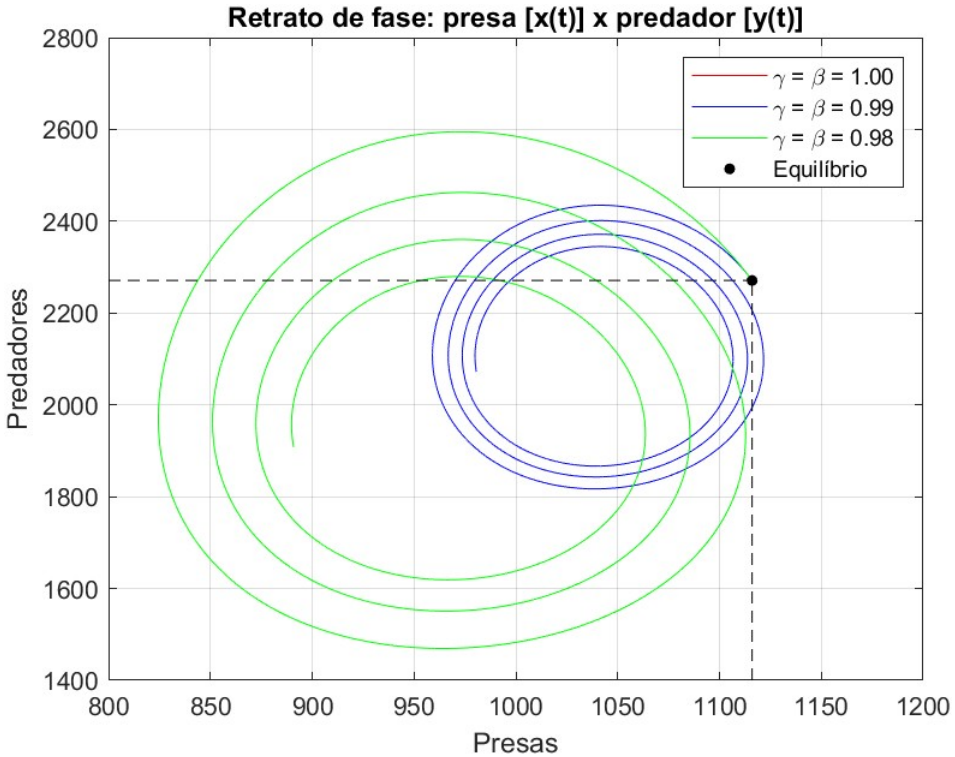


Fonte: elaborado pelos autores.

Assim como o comportamento observado para o caso de 300 ovos da broca, as Figuras 5.26, 5.27 e 5.28 mostram que ocorre uma aceleração no crescimento do inseto-praga, que pode ser verificada por conta da variação tangente em relação ao gráfico das presas. Em especial, é possível observar que a aceleração do crescimento da praga é cada vez maior conforme o grau das derivadas é diminuído. Tal situação sugere novamente que, por conta da complexidade ambiental, o crescimento da população da broca tende a ser ainda mais rápido do que os resultados apresentados para o modelo clássico. No entanto, apesar de os parâmetros para 600 ovos lidarem com uma população muito maior de presas do que os parâmetros de 300 ovos, a forma como o crescimento se dá é semelhante, uma vez que o tempo do ciclo de vida das presas e predadores influencia diretamente nas simulações obtidas.

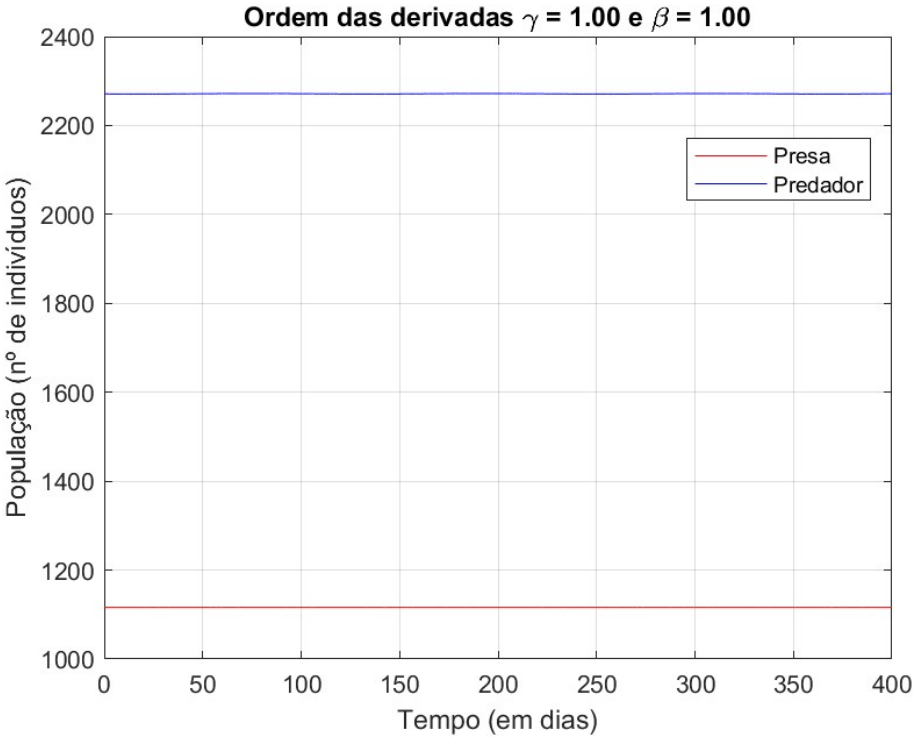
Na sequência, as Figuras de 5.29 até 5.36 consideram o ponto crítico $P_3 = (1116, 2271)$ como condição inicial das populações, sendo 2271 predadores e 1116 presas. Assim como no caso de 300 ovos, utilizar o ponto crítico é conveniente para compreensão de como o sistema se comporta ao longo de tempo, em especial para os casos fracionários, que podem apresentar informações novas, além das já conhecidas do modelo clássico.

Figura 5.29: Retrato de fase: presa x predador para o ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* e 70 dias da *Diatraea saccharalis* com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas:



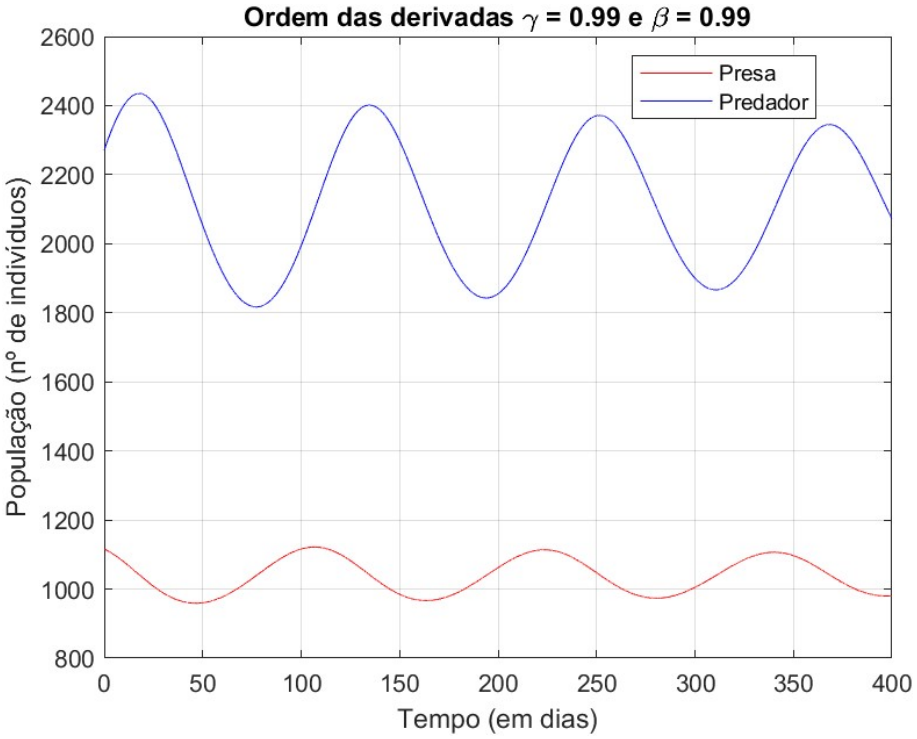
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.30: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$:



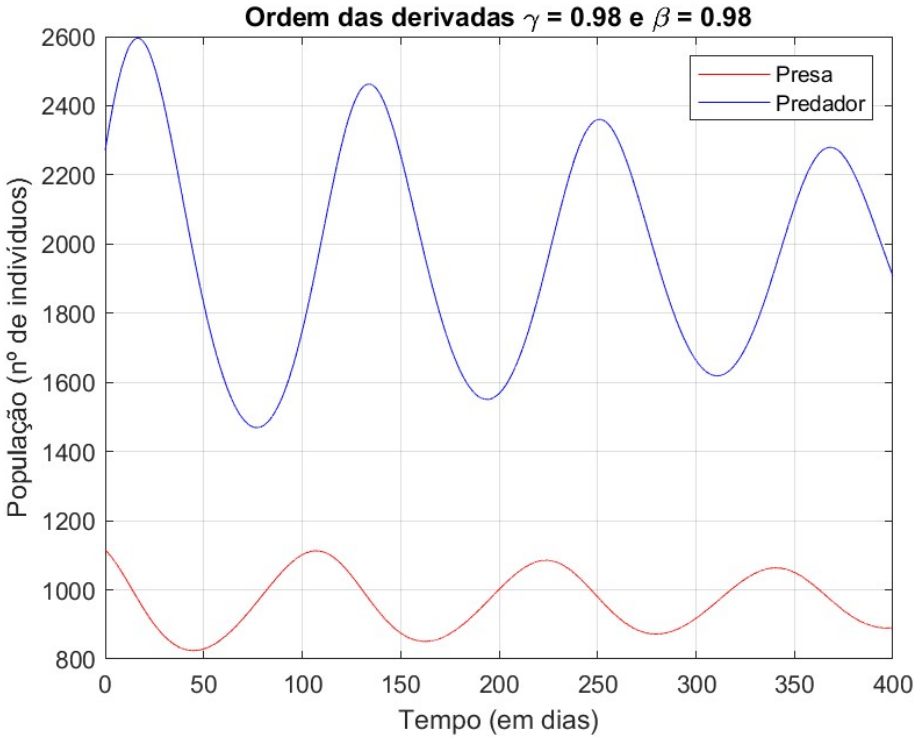
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.31: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$:



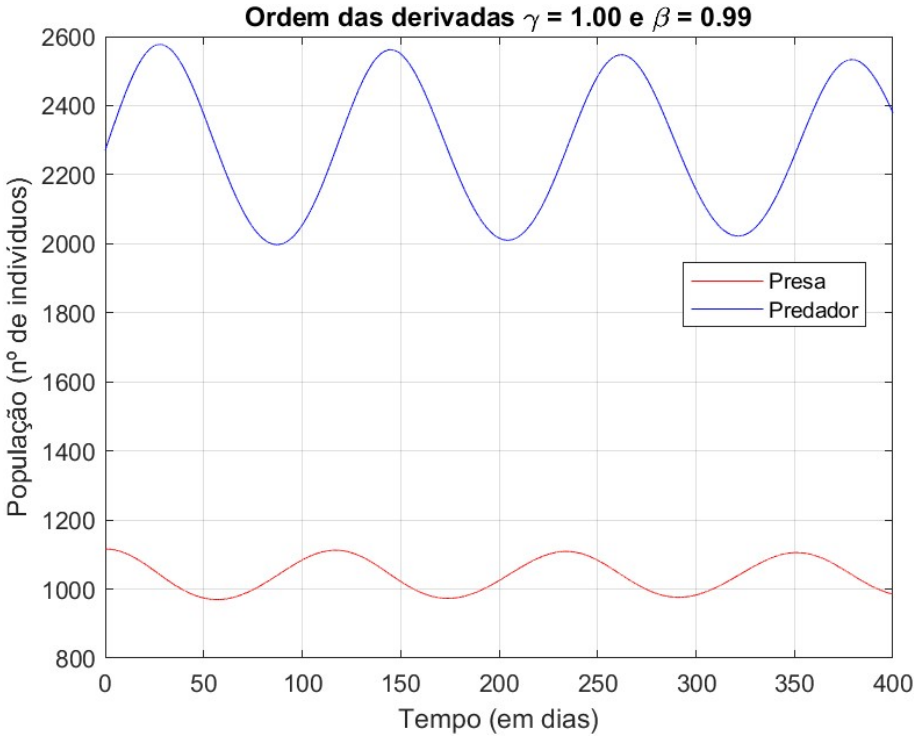
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.32: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$:



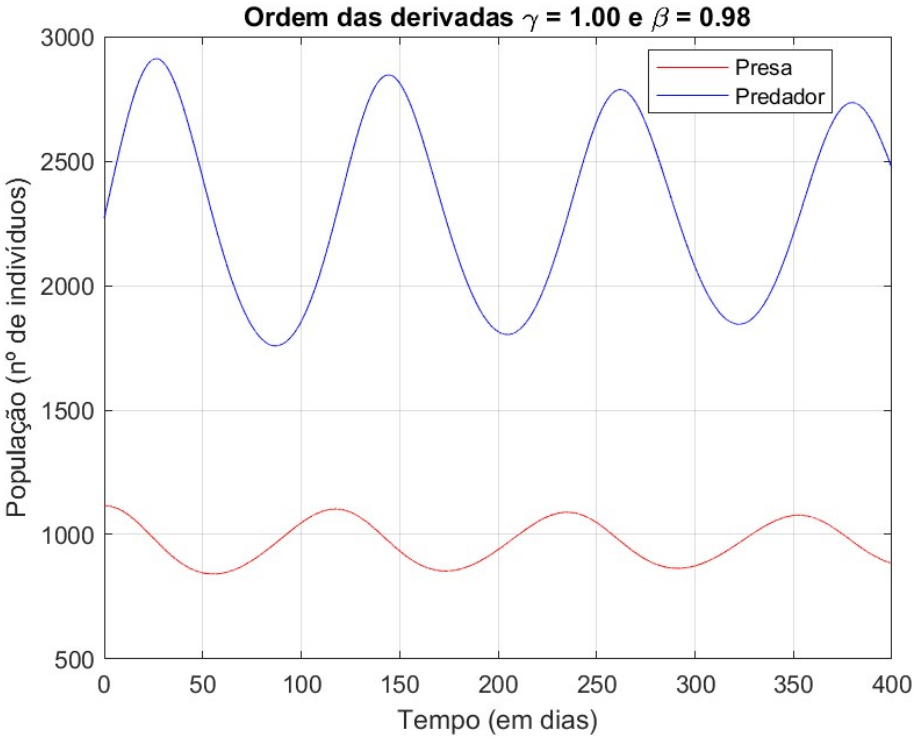
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.33: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.99$:



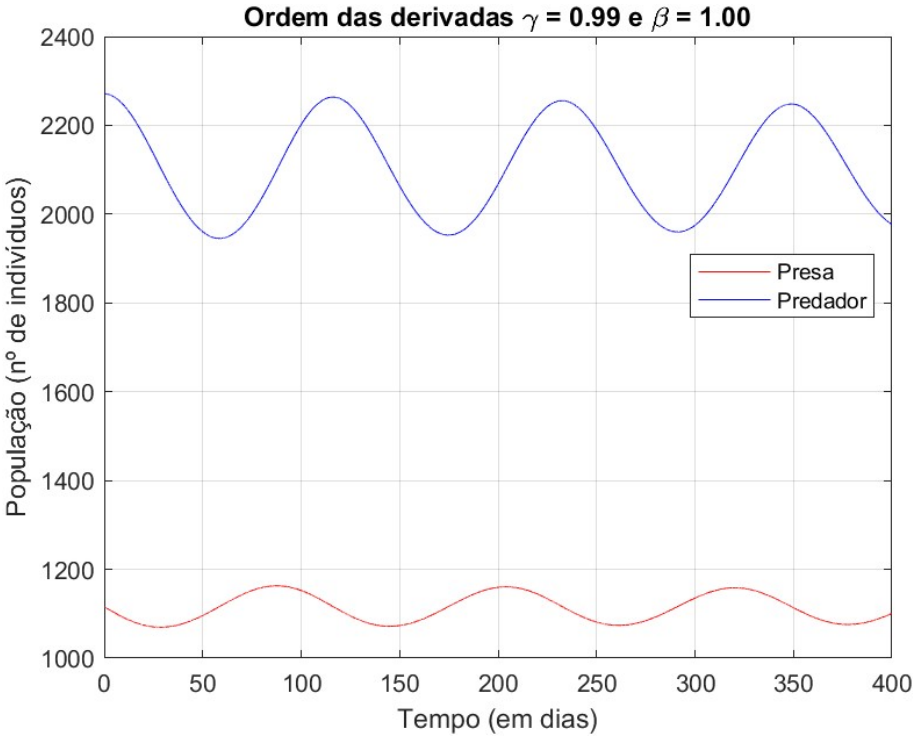
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.34: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.98$:



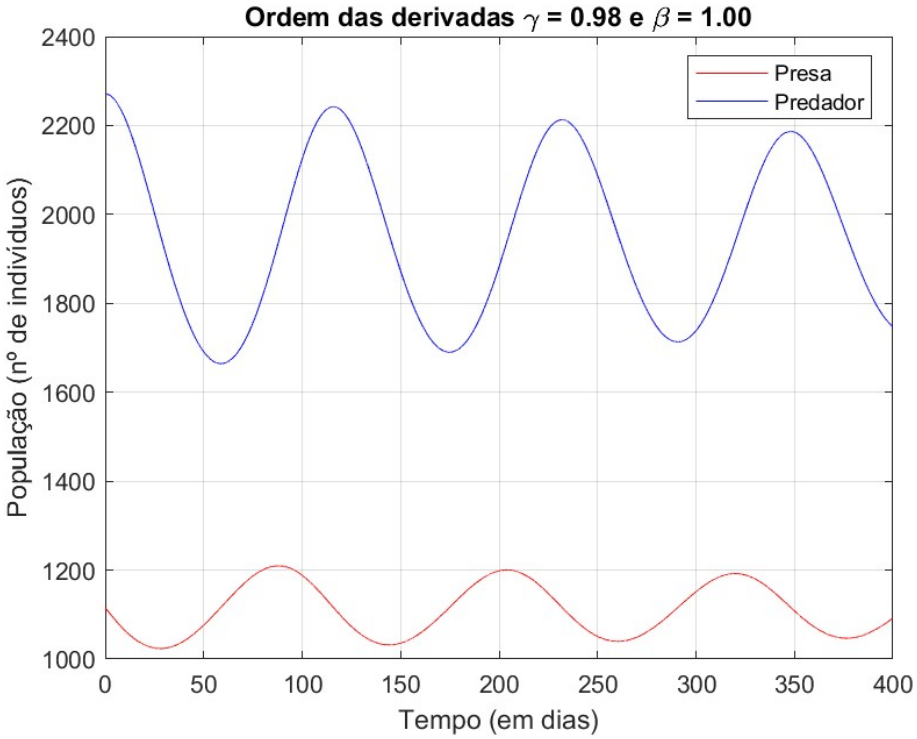
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.35: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 1.00$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.36: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 2271 predadores e 1116 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 1.00$:



Fonte: elaborado pelos autores.

É possível observar que, assim como no caso para 300 ovos, o comportamento das populações para os casos fracionários é muito diferente do resultado encontrado para o caso clássico. Para o retrato de fase apresentado na Figura 5.29, no entanto, o comportamento não é muito diferente do observado para o caso de 300 ovos. Em seu trabalho, Jesus (2018) observa que no caso clássico as populações se mantêm estáveis, o que de fato ocorre e sugere um caminho de controle da praga viável. No entanto, quando o grau das derivadas envolvidas é diminuído, é possível perceber que mesmo tendo as condições iniciais no ponto de equilíbrio, o sistema sofre grandes perturbações. Novamente, tal comportamento é justificado pela ausência da complexidade ambiental no caso clássico do sistema de Lotka-Volterra. Vale ressaltar que, para o retrato de fase em questão, não é possível observar a linha vermelha do gráfico que forma o ciclo para o caso em que $\gamma = \beta = 1.00$, uma vez que a escala do gráfico para os valores de presas e predadores não permite tal visualização. No entanto, o comportamento cíclico já é conhecido do trabalho de Jesus (2018).

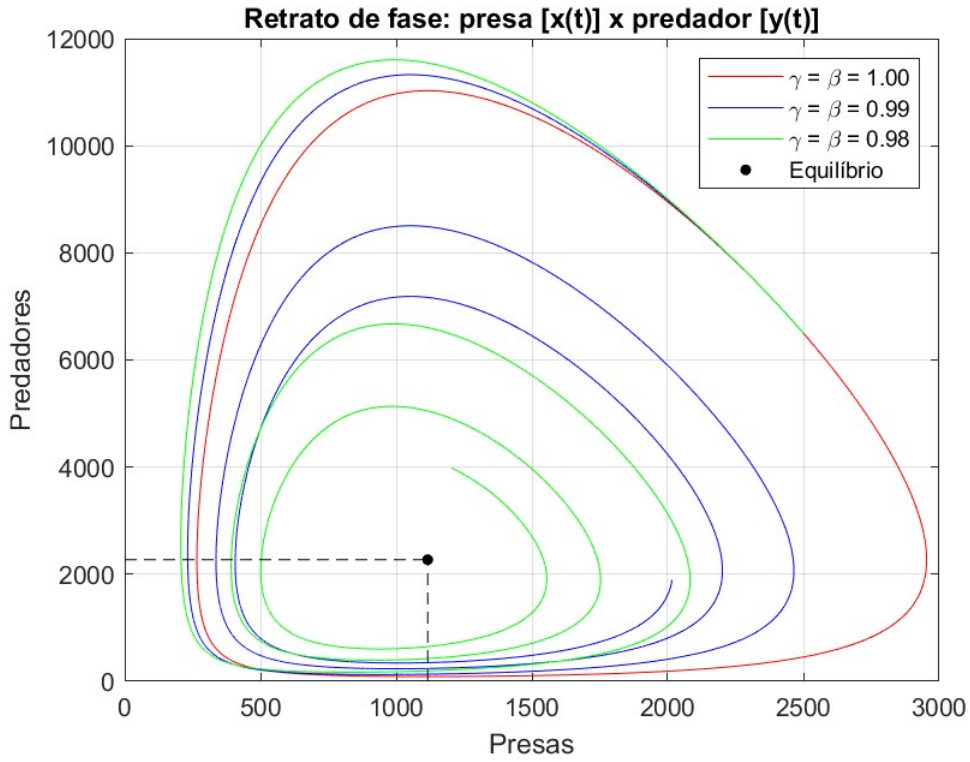
Além disso, as Figuras 5.31, 5.32, 5.33 e 5.34 mostram um comportamento dos parâmetros de 600 ovos para o caso fracionário diferente do obtido quando considerados

os parâmetros de 300 ovos da praga. Nas figuras citadas acima, mesmo ocorrendo grande variação das populações ao longo tempo, em nenhum momento ocorre uma intersecção entre os gráficos, isto é, em nenhum momento as populações se igualam. Já nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12, o comportamento é diferente, ocorrendo pontos de intersecção.

Tal situação sugere que, por conta do maior número populacional de presas e predadores para o caso de 600 ovos, além dos ciclos de vida maiores, os parâmetros externos ao sistema de Lotka-Volterra relacionados com a complexidade ambiental não afetam as populações de forma suficiente para que a quantidade de indivíduos se iguale em algum momento. Outro ponto importante para ressaltar é que, dependendo das condições biológicas das presas e predadores, ter como condição inicial o ponto de equilíbrio das populações para o controle biológico apresenta resultados positivos para conservação da plantação.

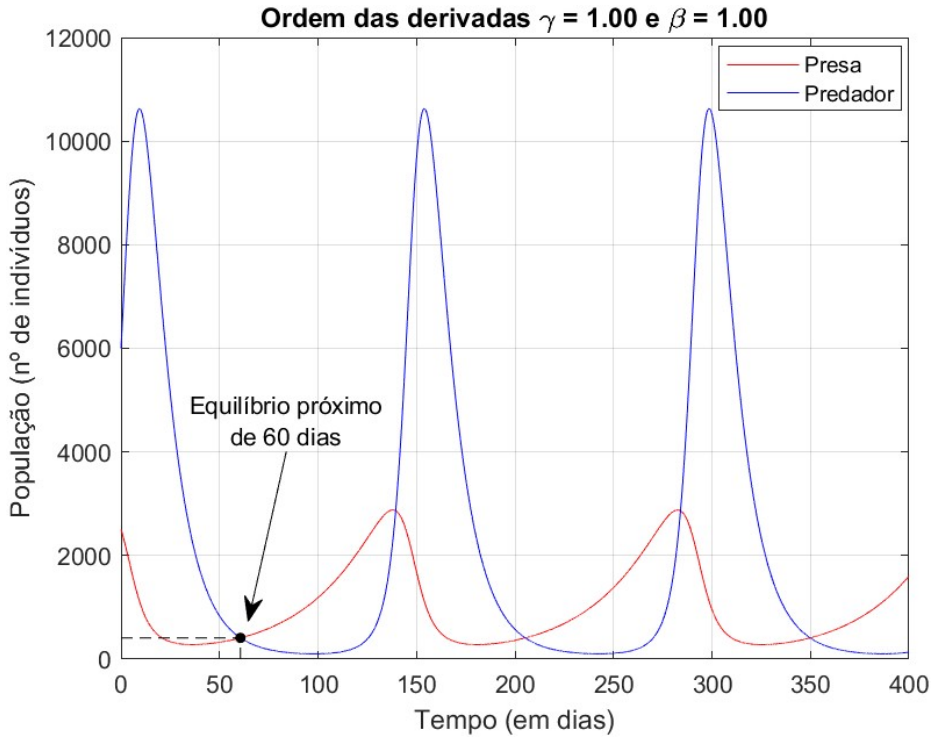
As Figuras 5.37 até 5.44 que seguem, apresentam os resultados obtidos para a simulação com 6000 vespinhas e 2500 brocas para o caso de 600 ovos. Assim como foi feito para o caso de 300 ovos, o objetivo aqui é compreender como os resultados fracionários podem acrescentar informações pertinentes para uma situação de controle biológico considerada eficiente, além de verificar se o comportamento é diferente para situações em que os parâmetros utilizados são outros, bem como a extensão dos ciclos de vida das populações.

Figura 5.37: Retrato de fase: presa x predador para o ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* e 70 dias da *Diatraea saccharalis* com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas:



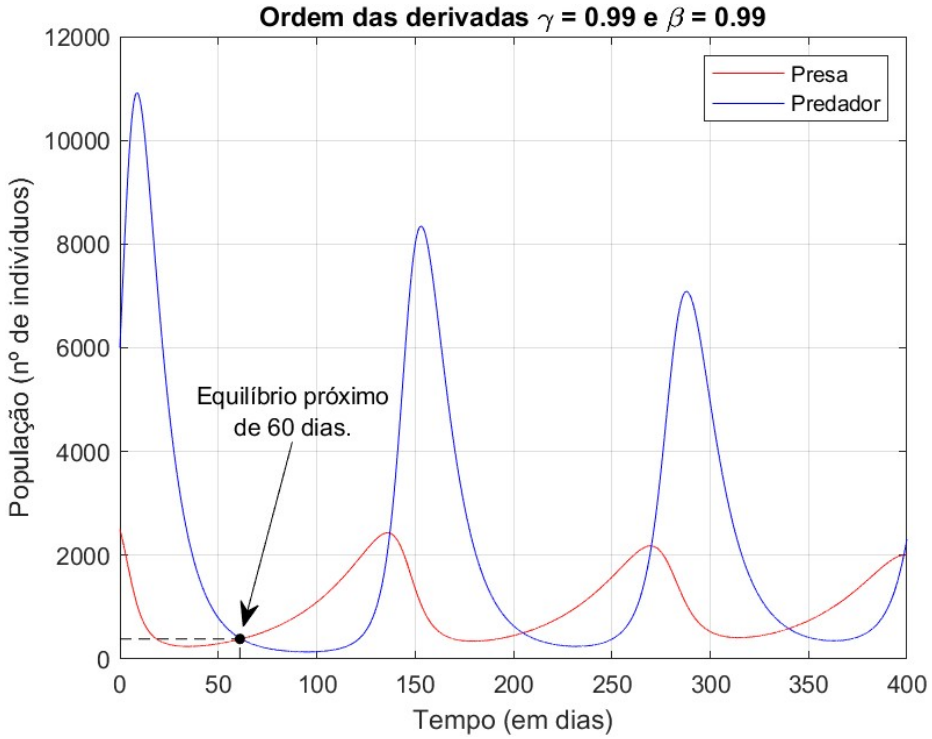
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.38: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 1.00$:



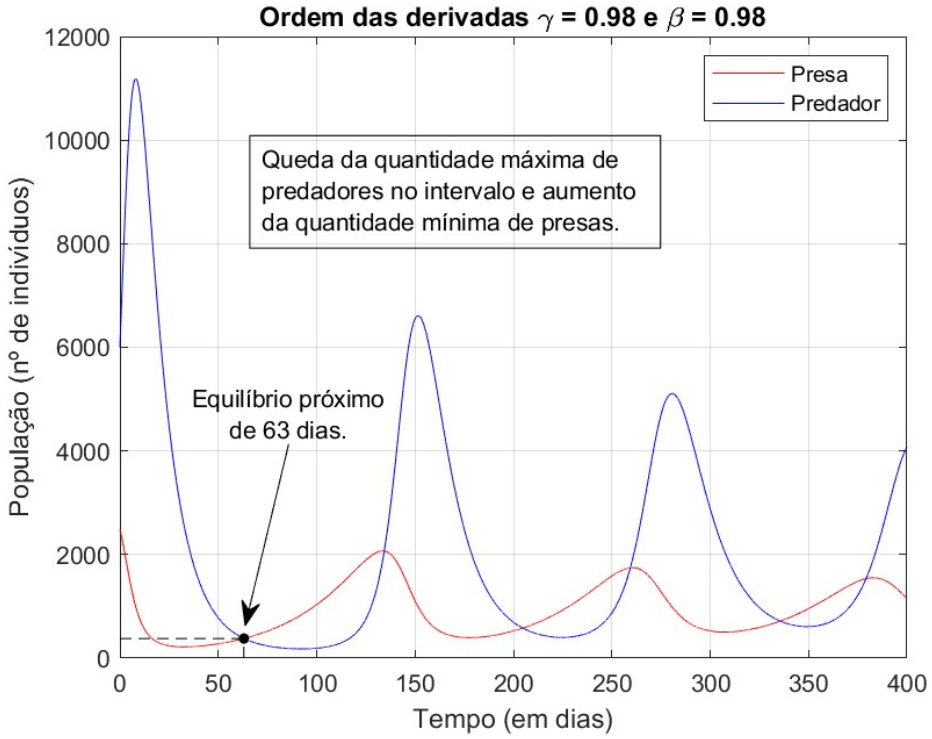
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.39: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 0.99$:



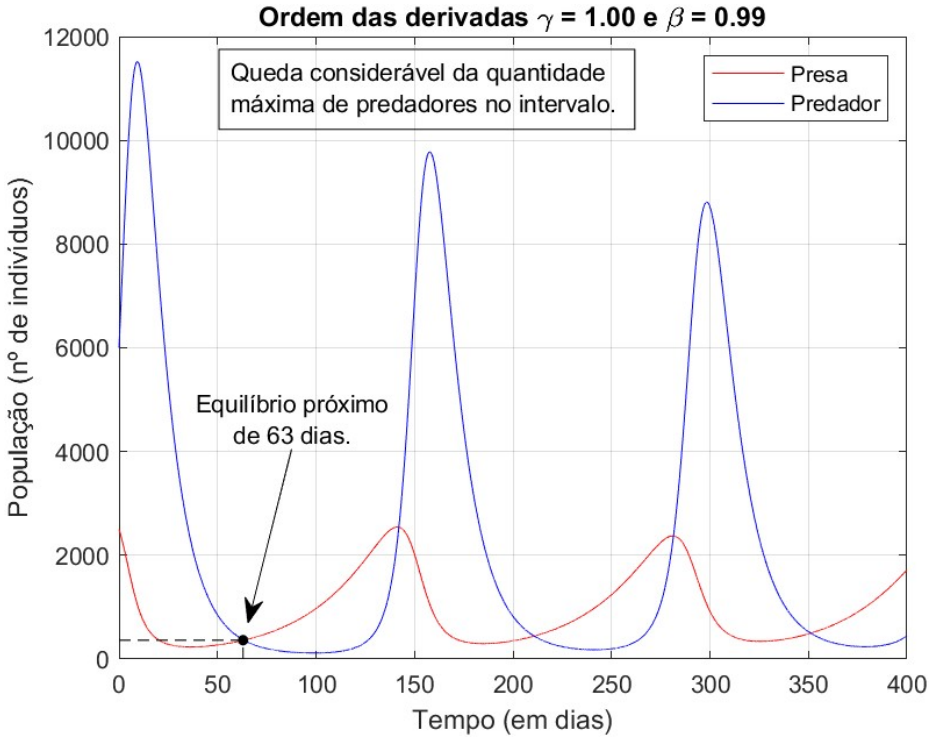
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.40: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 0.98$:



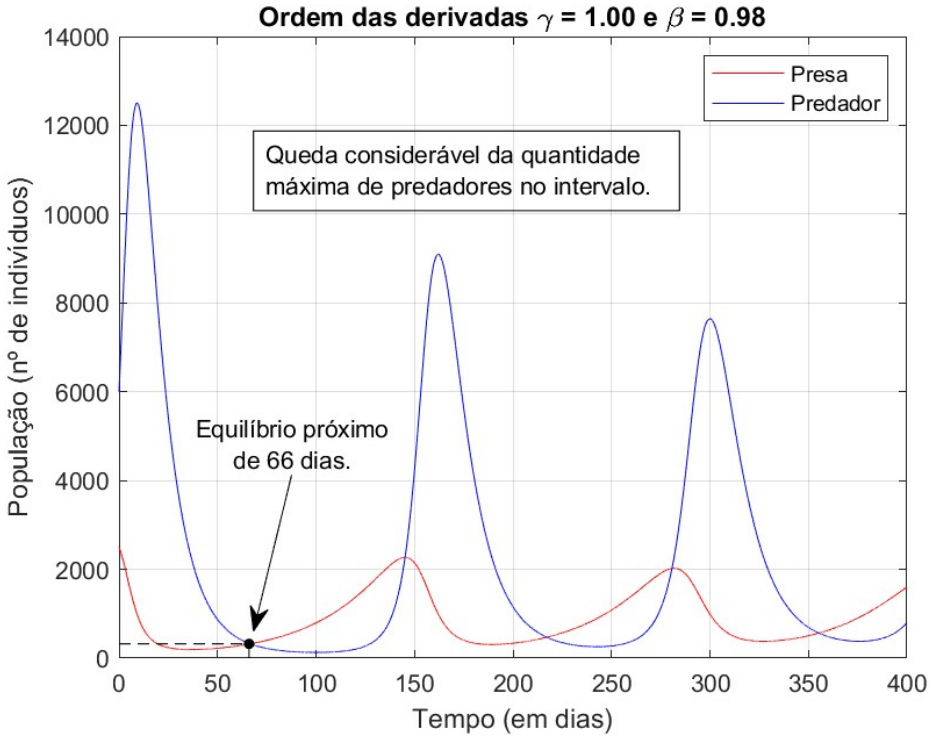
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.41: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.99$:



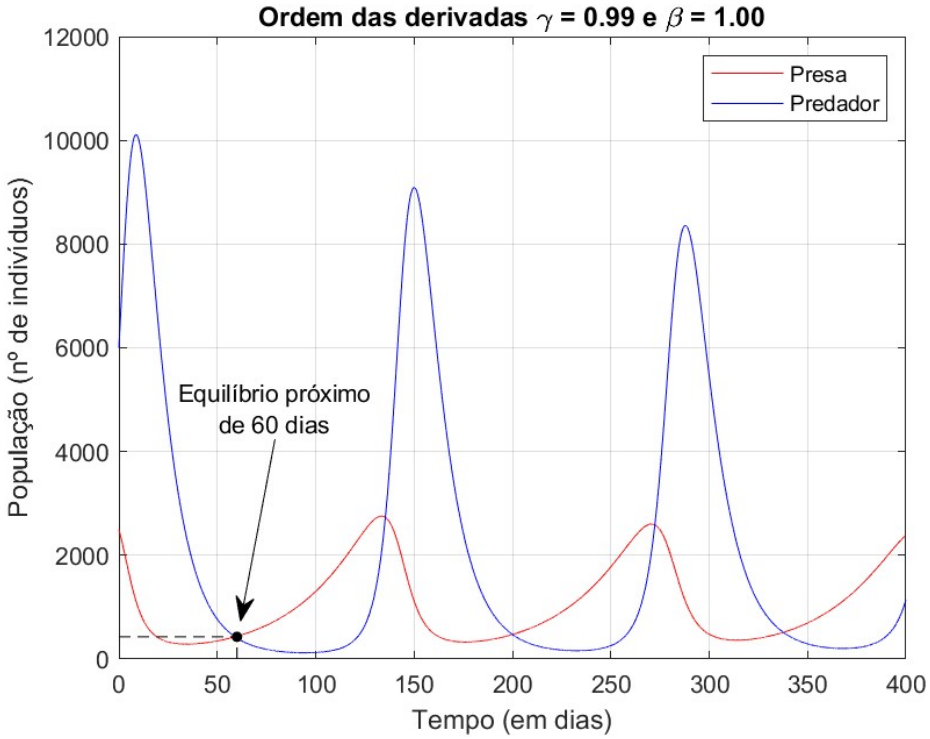
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.42: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 1.00$ e $\beta = 0.98$:



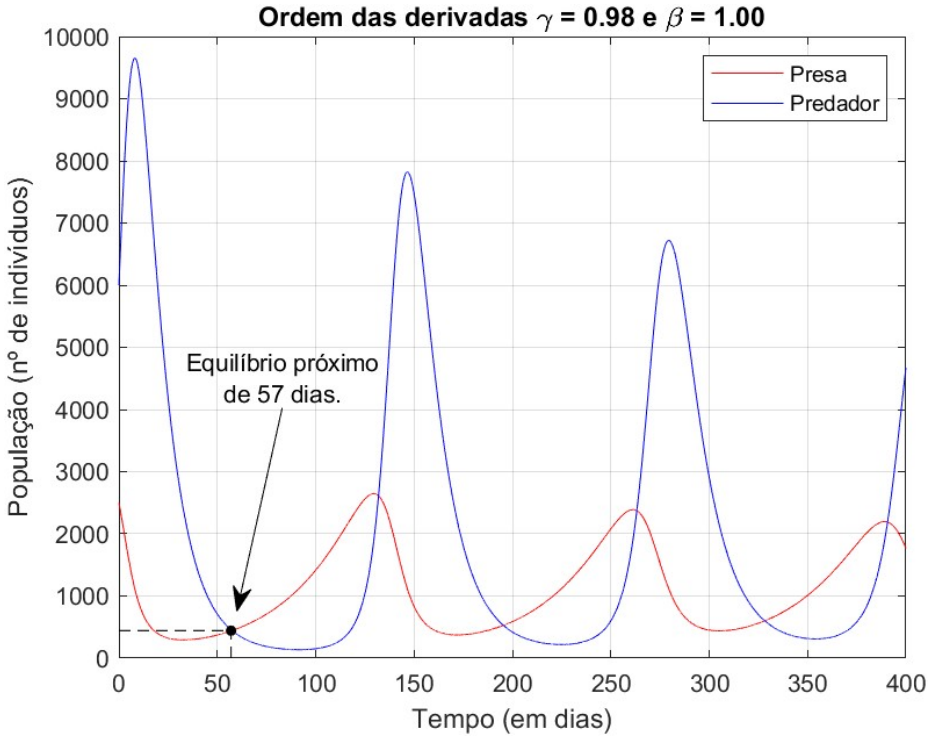
Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.43: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.99$ e $\beta = 1.00$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 5.44: Ciclo de vida de 24 dias da *Cotesia flavipes* (predador) e 70 dias da *Diatraea saccharalis* (presa) com 600 ovos depositados. Valores iniciais de 6000 predadores e 2500 presas, para $\gamma = 0.98$ e $\beta = 1.00$:



Fonte: elaborado pelos autores.

Partindo da Figura 5.37, é possível observar que o retrato de fase para a situação de 600 ovos da praga tem um comportamento semelhante ao caso de 300 ovos. De fato, a versão clássica mostra o ciclo entre as populações, enquanto as versões fracionárias apresentam o movimento populacional se direcionando para o ponto de equilíbrio do sistema, característica esperada quando considerada a complexidade ambiental agregada pelo sistema fracionário. A Figura 5.38 apresenta os resultados encontrados por Jesus (2018) em seu trabalho. É possível verificar que a população de predadores sofre um aumento considerável nos primeiros dias de controle, decaindo rapidamente antes dos 50 dias. Em contrapartida, a população da praga decai rapidamente nos dias iniciais, voltando a crescer também antes dos 50 dias. Tal comportamento é esperado na modelagem feita com o sistema de Lotka-Volterra, sendo que as populações atingem o valor de equilíbrio pela primeira vez por volta dos 60 dias.

Além disso, os resultados encontrados para o caso de 600 ovos da praga mostram mais ciclos das populações no mesmo intervalo de 400 dias utilizados para as simulações de 300 ovos. Com isso, é possível observar nas Figuras 5.39, 5.40, 5.41, 5.42, 5.43 e 5.44 que, independentemente da ordem das derivadas (escolhidas entre 1.00, 0.99 e 0.98), a população de predadores apresenta picos cada vez menores nos ciclos, fato que reforça, assim como visto nas simulações para o caso de 300 ovos, a necessidade de reposição da vespinha ao longo do tempo de controle.

Outro comportamento observado é a variação dos dias necessários para se obter o primeiro ponto de equilíbrio entre as populações. De fato, quando considerada a complexidade ambiental, as variações tendem a ser diferentes para cada situação observada. Em especial, a Figura 5.44 mostra um comportamento muito interessante das populações. Dentre as simulações para o caso de 600 ovos, este é o resultado que mostra o primeiro ponto de equilíbrio mais breve, além de mostrar um comportamento de diminuição da quantidade máxima de predadores a cada ciclo e um pequeno aumento da quantidade mínima de presas nestes mesmos ciclos. Desta forma, a simulação em questão mostra o porque da necessidade e da importância do controle biológico, uma vez que com cada vez menos predadores, a população de presas tende a voltar a crescer, gerando novamente os prejuízos decorrentes da existência da praga.

5.3 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo comparar qualitativamente os resultados do sistema de Lotka-Volterra clássico e sua versão fracionária no processo de modelagem do controle biológico da broca da cana-de-açúcar. Os dados encontrados levam em conta as informações e considerações feitas por Jesus (2018) em seu trabalho, para fins de comparação com os resultados fracionários. Desta forma, foi possível compreender como a utilização do Cálculo Fracionário consegue agregar valor e novas informações acerca de fenômenos já estudados no modelo clássico, sem descartar o que já é conhecido.

No estudo realizado por meio das simulações apresentadas neste trabalho, fica claro que a utilização do Cálculo Fracionário (neste caso, por meio das derivadas fracionárias segundo Caputo) aprimora o processo de modelagem matemática para o controle biológico da broca da cana-de-açúcar por meio do sistema de Lotka-Volterra, uma vez que apresenta resultados que abrangem novas hipóteses e que refinam ainda mais os resultados observados na modelagem clássica. Em especial, para o sistema de Lotka-Volterra em sua versão fracionária, mostra-se possível "embutir" na ordem da derivada a influência de parâmetros que não são considerados no modelo, trazendo para a modelagem uma carga de complexidade ambiental que a versão clássica do sistema não apresenta.

Para que fosse possível realizar as simulações numéricas, foi apresentada no Capítulo 2 uma base para compreensão de algumas definições e teoremas do Cálculo Fracionário, visando atingir o conhecimento da derivada fracionária de Caputo utilizada por Roberto Garrapa no método numérico apresentado no Capítulo 4.

No Capítulo 5, responsável por apresentar os resultados das simulações realizadas, foi possível constatar como a utilização de derivadas fracionárias influenciou no comportamento das populações da broca da cana-de-açúcar e da vespinha predadora. Em especial para as situações que utilizaram dos pontos de equilíbrio e das quantidades ideias de controle, foi possível observar comportamentos que, num ambiente cheio de diversas interações com outros indivíduos e modificações ambientais e climáticas, é comum e esperado. Apesar de o modelo clássico já apresentar resultados muito satisfatórios, o modelo fracionário agrega todo o seu valor quando, sem desconsiderar o já citado modelo clássico, apresenta resultados que levam em conta todo o comportamento volátil de duas populações num ambiente.

Portanto, com base no que foi apresentado neste trabalho, é possível constatar que a utilização do Cálculo Fracionário consegue mudar e aprimorar a forma como são modelados diversos fenômenos e, em especial, fenômenos biológicos como o processo de controle biológico de insetos-praga. Por apresentar os efeitos de memória e possibilitar a utilização de derivadas fracionárias nas equações diferenciais, os resultados aqui apresentados por meio do uso da derivada de Caputo podem servir como base para o estudo do controle biológico em diversas outras situações, que vão além do controle da broca da cana-de-açúcar por meio da vespinha *Cotesia flavipes*.

Os resultados aqui apresentados são fruto do processo de pesquisa desenvolvido pelos autores, levando em consideração algumas das principais obras no campo do Cálculo Fracionário, bem como os dados apresentados por Isaias de Jesus em sua dissertação, que compôs parte essencial para que se os resultados fracionários fossem encontrados.

Visando trabalhos futuros dos autores e divulgação dos resultados, o conteúdo desta dissertação será submetido como artigo para periódico, uma vez que as ferramentas e informações obtidas por meio do Cálculo Fracionário podem ser uma fonte de avanço para diversas outras áreas de estudo, que vão muito além do processo de controle biológico entre populações. Por se tratar de um modelo de competição entre populações, a versão fracionária do sistema de Lotka-Volterra agrega valor em importantes aplicações, por exemplo, em toda biomatemática, controle de pragas, dinâmicas tumorais, economia, controles ótimos e agroecossistemas.

Bibliografia

ANISIU, M.-C. Lotka, volterra and their model. *Didáctica mathematica*, v. 32, p. 9–17, 2014.

BARROS, L. C. d. et al. The memory effect on fractional calculus: an application in the spread of covid-19. *Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 40, n. 3, p. 1–21, 2021.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. [S.l.]: Contexto, 2002. ISBN 85-7244-207-3.

BESSA, G. R. Teoria de estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2011.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. ISBN 978-5-216-1756-3.

CAMARGO, R. d. F. Do teorema de cauchy ao método de cagniard. Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), 2005.

CAMARGO, R. d. F. Cálculo fracionário e aplicações. Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), 2009.

CAMARGO, R. d. F.; OLIVEIRA, E. C. *Cálculo fracionário*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015. ISBN 978-85-7861-329-7.

CARPINTERI, A.; MAINARDI, F. (ed.). *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. 1. ed. New York: Springer-Verlag Wien, 1997. ISBN 978-3-7091-2664-6.

COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO. *Acompanhamento da safra brasileira: cana-de-açúcar*. [S.l.]: Companhia Nacional de Abastecimento. Disponível em <https://www.conab.gov.br/info-agro/safras/cana>. Acesso em: 15 set. 2022.

FONTANETTI, C. S.; BUENO, O. C. (org.). *Cana-de-açúcar e seus impactos: uma visão acadêmica*. 1. ed. Bauru, SP: Canal 6, 2017. ISBN 978-85-7917-421-6.

FONTES, E. M. G.; VALADARES-INGLIS, M. C. (ed.). *Controle biológico de pragas da agricultura*. 1. ed. Brasília, DF: Embrapa, 2020. ISBN 978-65-86056-01-3.

GARRAPPA, R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. *Mathematics*, MDPI, v. 6, n. 2, p. 16, 2018.

JESUS, I. d. Equações de lotka-volterra aplicadas ao controle biológico da broca da cana-de-açúcar. Universidade de Uberaba (Uniube), 2018.

NAVA, D. E.; PINTO, A. d. S.; SILVA, S. D. d. S. e. *Controle biológico da broca da cana-de-açúcar*. 1. ed. Pelotas: Embrapa Clima Temperado, 2009. ISSN 1516-8840.

RENEWABLE FUELS ASSOCIATION. *Annual Ethanol Production*. [S.l.]: Renewable Fuels Association. Disponível em <https://ethanolrfa.org/markets-and-statistics/annual-ethanol-production>. Acesso em: 17 out. 2022.

SILVA, D. L. G. et al. Cana-de-açúcar: aspectos econômicos, sociais, ambientais, subprodutos e sustentabilidade. *Research, Society and Development*, v. 10, n. 7, p. e44410714163–e44410714163, 2021.

SILVA, J. P. N. d.; SILVA, M. R. N. d. *Noções da cultura da cana-de-açúcar*. 1. ed. Inhumas; Santa Maria: IFG; Universidade Federal de Santa Maria, 2012.

SILVA, M. C. A. C. d. (org.). *Cana-de-açúcar: manejo, ecologia e biomassa*. 1. ed. Bauru, SP: Spessotto, 2021. ISBN 978-85-5973-190-3.

TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. C. Sobre derivadas fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, 2018.

THEODORO, M. M. Modelagem fracionária da dinâmica da covid-19. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2022.

UNITED STATES DEPARTMENT OF AGRICULTURE. *Sugar: World Markets and Trade*. [S.l.]: United States Department of Agriculture. Disponível em <https://www.fas.usda.gov/data/sugar-world-markets-and-trade>. Acesso em: 20 maio 2022.

WITELSKI, T.; BOWEN, M. *Methods of mathematical modelling*. Switzerland: Springer, 2015.