
Universidade Estadual Paulista
Câmpus de São José do Rio Preto, Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

Samuel Paulino dos Santos

Geometria Diferencial do Conjunto Focal

São José do Rio Preto
2018

Universidade Estadual Paulista
Câmpus de São José do Rio Preto, Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

Geometria Diferencial do Conjunto Focal

Samuel Paulino dos Santos

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na área de Singularidades.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

FAPESP - Processo 2016/21226-5

São José do Rio Preto
2018

Santos, Samuel Paulino dos.

Geometria diferencial do conjunto focal / Samuel Paulino dos Santos. – São José do Rio Preto, 2017.

91 f. : il.

Orientador: Luciana de Fátima Martins

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
1. Matemática. 2. Geometria diferencial. 3. Conjunto focal I.
Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 513.81

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Samuel Paulino dos Santos

Geometria Diferencial do Conjunto Focal

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Singularidades, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora

Prof^ª. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Fábio Scalco Dias

UNIFEI - Itajubá

Segundo Examinador

Prof. Dr. João Carlos Ferreira da Costa

UNESP - São José do Rio Preto

SUPLENTE

Prof^ª. Dr^a. Ana Cláudia Nabarro

ICMC-USP - São Carlos

Prof^ª. Dr^a. Michelle Ferreira Zancheta Morgado

UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 08 de Fevereiro de 2018.

*Aos meus pais José Leite e Gisley,
aos meus irmãos Gabriel e Samira
e a minha amada esposa Deusiane
dedico.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

À Deus, que me sustentou até aqui, me fortalecendo em todas as horas, e me deu capacidade para fazer tal trabalho.

À Luciana de Fátima Martins, mais que uma orientadora, uma amiga, que com muito talento e maestria me adotou durante a graduação e me orientou durante esses anos, me propiciando um excelente amadurecimento matemático. Agradeço pelos elogios, também pelos puxões de orelha, pelo maravilhoso trabalho que fizemos juntos e por sua amizade que levarei para sempre.

À minha família, pelo imenso amor que recebo todos os dias, pelo apoio, o incentivo, o carinho e por me fazer sentir querido por pessoas tão especiais. Sobretudo, agradeço aos meus pais, por terem me dado a vida, pelo amor e carinhos que tiveram comigo desde o dia em que nasci e por fazerem minha vida tão especial com a vossa presença.

A todos os meus amigos da universidade, que me apoiaram, me ajudaram e me incentivaram a prosseguir. Em especial aos meus amigos Nilton, Luan e Plínio, sempre como ótimos amigos, me ajudaram a ser quem eu sou. Agradeço também aos amigos e colegas da graduação e pós graduação de diversos anos que tive o prazer de conhecer, os quais não listo aqui por se tratar de muitos nomes, mas agradeço a amizade de cada um que fez parte dessa história.

À OBMEP, que juntamente com seus professores e os programas PIC e PICME - CNPq, me incentivaram ainda mais em trilhar este caminho, buscando aprender e descobrir coisas novas neste vasto universo da matemática.

À CAPES e à FAPESP, pelo suporte financeiro, o qual foi essencial para a realização deste trabalho.

“Prefiram a minha instrução à prata, e o conhecimento ao ouro puro, pois a sabedoria é mais preciosa do que rubis; nada do que vocês possam desejar compara-se a ela.”

Provérbios 8:10-11.

Resumo

Seja S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ sem pontos parabólicos. O conjunto focal de S é o lugar geométrico dos centros das esferas que possuem contato degenerado com S em cada ponto. Tal contato é medido pelas singularidades da família de funções distância ao quadrado D associada à S . O conjunto focal é uma superfície, porém não necessariamente regular, e pode também ser visto como o conjunto bifurcação da família D . A técnica de associar uma variedade singular $X(S)$ a uma subvariedade suave S do espaço euclidiano e descobrir alguns aspectos da geometria de S a partir daqueles de $X(S)$ está na essência das aplicações da Teoria das Singularidades à Geometria Diferencial. Neste trabalho, estudamos os modelos, a menos de difeomorfismos, para o conjunto focal de superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ genéricas, reunimos os principais resultados sobre a geometria da superfície focal encontrados na literatura e os apresentamos de forma mais explicativa e com uma linguagem moderna. Além disso, mostramos que a superfície focal pode ser parametrizada por uma frente de onda e utilizamos resultados conhecidos para tais aplicações no estudo da geometria da superfície focal.

Palavras Chave: Contato. Desdobramentos versais. Conjunto Focal. Frentes de onda.

Abstract

Let S be a immersed surface in $\mathbb{R}^3$ without parabolic points. The focal set of S is the locus of the centres of spheres that have a degenerate contact with S in each point. This contact is measured by singularities of the family of distance squared function D associated with S . The focal set is a surface, but is not necessarily regular, and it can also be seen as the bifurcation set of the family D . The approach of associating a singular variety $X(S)$ to a smooth submanifold S in an Euclidian space and recover some aspects of the geometry of S from that of $X(S)$ is at the essence of applications of singularity theory to the Differential Geometry. In this work, we study models, unless diffeomorphism, of focal set of the immersed generics surfaces in $\mathbb{R}^3$. We have also gathered some results about the geometry of the focal set of the literature and we present them in a more explanatory way and in a modern notation. Furthermore, we show that the focal surface can be parametrized by a wave front and use the known results of such applications in the study of the focal set.

Key words: Contact. Versal unfoldings. Focal set. Wave front.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	14
1.1 Teoria de singularidades	14
1.1.1 Germes	14
1.1.2 Determinação finita	18
1.1.3 Desdobramentos	20
1.2 Superfícies em $\mathbb{R}^3$	23
1.2.1 Superfícies na forma de Monge	30
1.3 Frentes de onda	31
1.3.1 Primeira e segunda formas fundamentais de uma frente de onda	37
2 Contato	39
2.1 Contato entre subvariedades de $\mathbb{R}^n$	39
2.2 Contato entre superfícies e esferas	42
3 Conjunto focal	47
3.1 Conjunto focal de uma superfície regular	47
3.2 Modelos do conjunto focal	52
3.3 Singularidades do conjunto focal	55
3.4 Parametrização especial	57
3.5 Superfície focal como frente de onda	59
3.6 Critérios para singularidades da superfície focal e de $d_{\psi(q)}$	62
3.7 Algumas propriedades das curvas especiais	65
3.7.1 Geometria da rib	67
3.8 Curvatura Gaussiana e curvas sub-parabólicas	73
3.9 Pontos especiais sobre a superfície	83
3.10 Um pouco sobre pontos umbílicos	86

Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo do conjunto focal de uma superfície regular S imersa em $\mathbb{R}^3$. Através deste estudo, podemos obter propriedades geométricas de S a partir de seu conjunto focal e vice-versa. Veremos que tal conjunto é uma superfície, possivelmente com singularidades. Além disso, a superfície focal é o lugar geométrico dos centros das esferas tangentes à S com raio igual ao inverso das curvaturas principais (chamadas esferas de curvatura). Em Física, se a luz se propaga uniformemente em S , então o conjunto focal é o lugar geométrico dos pontos onde a luz é mais concentrada.

A Teoria de Singularidades trata do estudo de variedades e aplicações singulares, sendo o trabalho sobre aplicações do plano no plano de Whitney considerado o início da teoria. Desde então esta teoria se consolidou e ganhou interesse devido a suas amplas aplicações a várias áreas das ciências, como à ótica, robótica e visão computacional, e à sua interação com diversas áreas da matemática, como por exemplo a geometria diferencial, geometria algébrica e teoria qualitativa de equações diferenciais. A técnica de associar uma variedade singular $X(S)$ a uma subvariedade suave S do espaço euclidiano e descobrir alguns aspectos da geometria de S a partir daqueles de $X(S)$ está na essência das aplicações da Teoria das Singularidades à Geometria Diferencial. Por exemplo, pode ser mostrado que o conjunto focal de uma superfície regular S é o conjunto bifurcação da família de funções distância ao quadrado D relacionada à S , a qual mede o contato entre a superfície S e esferas e, a partir disto, deduzir modelos para a superfície focal. Estes modelos são, além de superfícies regulares, arestas cuspidais, rabos de andorinha, umbílicos elípticos e umbílicos hiperbólicos, que surgem quando as singularidades da família D são A_2, A_3, A_4, D_4^- e D_4^+ , respectivamente.

As propriedades geométricas da superfície focal de uma superfícies regulares foram estudadas por Porteous e sintetizadas em seu livro “Geometric differentiation. For the Intelligence of Curves and Surfaces”, ([14]). Morris também faz um estudo sobre tal conjunto em [13], onde considera que S , fora de pontos umbílicos, está parametrizada por s de maneira que as curvas coordenadas de s coincidam com as linhas de curvatura de S . Tal parametrização é útil para facilitar o estudo e também é utilizada neste trabalho. Tanto Porteous como Morris definem curvas especiais que ajudam no estudo da geometria

da superfície focal. Tais definições são feitas de modo diferente, mas equivalente. São elas as curvas ridges e sub-parabólicas. Além dos resultados destes dois autores, utilizamos também alguns dos resultados do trabalho de Saji, Umehara e Yamada ([15]), feitos para frentes de onda, uma vez que observamos que a superfície focal, fora de pontos umbílicos, pode ser parametrizada por uma frente de onda. É conhecido que as singularidades genéricas de frentes de onda são arestas cuspidais e rabos de andorinha.

As ridges podem ser pensadas como o conjunto de pontos onde uma das curvaturas principais assume um valor extremo ao longo da linha de curvatura associada a ela (excluindo os pontos umbílicos). Ridges podem também ser vistas como a curva relativa aos pontos singulares da superfície focal, os quais, fora de umbílicos, também constituem uma curva, chamada rib.

Um pouco mais difícil de visualizar, as curvas sub-parabólicas vêm ganhando importância. Elas foram primeiramente observadas como as curvas relativas às curvas parabólicas da superfície focal (daí o nome) e, posteriormente, como o lugar geométrico das inflexões geodésicas, por esta razão, Porteous propôs um nome mais curto para elas, “flexcords”. Paralelamente às ridges, tais curvas são constituídas dos pontos de S tais que uma de suas curvaturas principais assume um extremo ao longo da linha de curvatura associada a outra curvatura principal.

A organização deste trabalho é como segue: No primeiro capítulo, Seção 1.1, discutimos ferramentas da Teoria de Singularidades que são necessárias para o nosso estudo, dentre elas o conceito de germes, que nos permite trabalhar localmente com conjuntos e aplicações, o de determinação finita, que facilita o trabalho, no sentido que permite reduzir o problema de classificar um certo germe ao estudo de seu k -jato, que é um polinômio, e desdobramentos. Na Seção 1.2, revisamos alguns conceitos da Geometria Diferencial, como as formas fundamentais, curvaturas Gaussiana e média, que também são necessários para o nosso estudo. Na última seção, estudamos a definição e alguns conceitos relacionados a frentes de onda, tendo como referência o artigo [15].

No Capítulo 2, estudamos o conceito de contato entre subvariedades do $\mathbb{R}^3$, uma importante ferramenta da Teoria de Singularidades para o estudo da geometria diferencial de subvariedades de $\mathbb{R}^3$, onde propriedades geométricas são estudadas através de aplicações que medem o contato. Neste capítulo, estudamos primeiramente a noção de contato entre duas subvariedades diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ para, posteriormente, podermos aplicar para o caso particular entre superfícies de $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, entre uma superfície e uma família de esferas imersas em $\mathbb{R}^3$.

No terceiro e principal capítulo, estudamos a superfície focal de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, onde nas duas primeiras seções a definimos e encontramos os seus modelos para superfícies genéricas. Na terceira seção, são definidas as curvas ridge e rib, que dão informações importantes sobre a geometria da superfície focal. Na Seção 3.4, discutimos sobre uma parametrização especial de uma superfície, que auxilia no nosso estudo. Na

Seção 3.5, mostramos que, se supormos que a superfície S não tem pontos umbílicos nem parabólicos, então sua superfície focal é uma frente de onda. Na Seção 3.6, estudamos critérios geométricos sobre a superfície S para que sua superfície focal seja uma aresta cuspidal ou um rabo de andorinha. Na Seção 3.7, discutimos algumas propriedades da curva ridge, rib e das linhas de curvatura de S , dentre elas, mostramos que as curvas da superfície focal relativas as linhas de curvatura de S são geodésicas. Além disso, estudamos mais detalhadamente o comportamento da rib na superfície focal na vizinhança de arestas cuspidais. Por ser uma curva regular sob a superfície focal, é possível definir funções curvatura normal e geodésica, aqui chamado de curvatura singular, de modo semelhante às definições para curvas regulares em $\mathbb{R}^3$. Veremos que o sinal da curvatura singular fornece uma interessante informação sobre o comportamento da superfície focal em relação ao plano retificante da rib. Na Seção 3.8, estudamos a curvatura Gaussiana e o conjunto sub-parabólico da superfície focal, verificando seu comportamento perto de pontos singulares, onde usamos os resultados de [15] (a priori feitos para frentes de onda). Na Seção 3.9, discutimos alguns casos que podem ocorrer na superfície S , quando as curvas especiais (ridges, sub-parabólicas e linhas de curvatura) se intersectam, transversalmente ou tangencialmente. Por exemplo, analisamos os pontos de interseção entre a ridge e uma curva sub-parabólica de S , mostrando que estes ocorrem nos pontos relativos aos quais os planos osculador e tangente limitante da rib coincidem (para a definição de plano tangente limitante, ver Definição 1.3.9). Por fim, na Seção 3.10, discutimos um pouco sobre o comportamento das curvas ridges e sub-parabólicas em torno de um ponto umbílico de S , o que não fizemos com detalhes, por se tratar de uma extensa teoria. Sendo assim, este trabalho tem como enfoque o estudo da geometria da superfície focal na vizinhança de arestas cuspidais.

A geometria de uma superfície é um objeto de estudo extremamente rico. Mesmo para superfícies regulares, ainda hoje vemos novos resultados surgindo na literatura. Neste sentido, certamente há vários enfoques interessantes sobre a geometria da superfície focal associada a uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ que não estão estudados neste trabalho. Por exemplo, o estudo da geometria na vizinhança de rabos de andorinha, o comportamento da curvatura média na vizinhança dos pontos singulares, dentre outros, assuntos estes não abordados em nosso estudo por questões de prazo para sua conclusão.

Acreditamos que nossa maior contribuição na elaboração deste trabalho é apresentar um texto em português, rico em detalhes e com uma linguagem moderna, além de obter mais resultados sobre a geometria da superfície focal, além daqueles apresentados por Porteous e Morris, a partir da observação de que a superfície focal pode ser parametrizada por uma frente de onda e do trabalho de Saji, Umehara e Yamada ([15]).

Preliminares

Neste primeiro capítulo, discutimos algumas definições e resultados que são úteis em nosso trabalho. Na primeira seção, vemos alguns conceitos básicos sobre Teoria de Singularidades, como germes, determinação finita e desdobramentos. Na segunda seção, fazemos uma revisão de Geometria Diferencial de superfícies regulares e, na última seção, discutiremos algumas definições relacionadas a uma frente de onda, onde apresentamos um resultado que garante quando sua singularidade é uma aresta cuspidal ou um rabo de andorinha.

1.1 Teoria de singularidades

O nascimento da Teoria de Singularidades pode ser marcado com o trabalho pioneiro de Whitney, onde mostrou que aplicações do plano no plano têm, em geral, somente dobras e singularidades de cúspide. Mather introduziu grupos que agem no conjunto de germes de aplicações e estabeleceu a base para o estudo de determinação finita de germes de aplicações, um conceito ligado à existência de deformações versais e desdobramentos versais, conceitos que veremos durante este capítulo. Nesta seção, discutiremos o conceito de germes, que nos permite trabalhar localmente com conjuntos e aplicações, o de determinação finita, que facilita o trabalho, no sentido que permite reduzir o problema de classificar um certo germe ao estudo de seu k -jato, que é um polinômio, e desdobramentos, que nos auxilia a encontrar as singularidades da função distância ao quadrado. As referências bases para este capítulo são os livros [5] e [9].

1.1.1 Germes

Estamos interessados em estudar algumas propriedades locais de uma superfície. Para isso, é necessário um certo conhecimento sobre germes de conjunto e de aplicações. Um germe contém toda a informação que pode ocorrer em um conjunto ou em uma aplicação em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto.

Definição 1.1.1 *Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é equivalente a Y em p se existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo p tal que $X \cap U = Y \cap U$.*

A definição acima gera uma relação de equivalência sobre os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contém p . A classe de equivalência de um subconjunto X é chamada de **germe de X em p** e é denotada por (X, p) .

Definição 1.1.2 *Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^n$ contendo $p \in \mathbb{R}^n$ e sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ duas aplicações. Dizemos que as aplicações f e g são equivalentes (e denotamos por $f \sim g$) se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo p tal que $f|_W = g|_W$, isto é, as aplicações f e g coincidem em W .*

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações definidas em uma vizinhança de $p \in \mathbb{R}^n$ assumindo valores em $\mathbb{R}^m$. A classe de equivalência de uma aplicação f , a qual é denotada por

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

é chamada de **germe da aplicação f em p** .

Se supomos que todos os elementos da classe de equivalência de f assumem o mesmo valor em p , digamos q , denotamos seu germe por

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q).$$

Dizemos que um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é suave ou que $f \in C^\infty$ se um de seus representantes e, portanto todos, é suave em p . Da mesma forma, dizemos que $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um germe de difeomorfismo se um de seus representantes é um difeomorfismo local em p .

Denotamos por $\mathcal{E}_n$ o conjunto dos germes de funções suaves na origem de $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathcal{E}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é um germe de função suave}\}.$$

O conjunto de todos os germes de aplicações suaves $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é denotado por $\mathcal{E}(n, m)$, ou simplesmente por $\mathcal{E}(n)$, quando $n = m$. Note que $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}(n, 1)$.

Com a adição e multiplicação usuais para funções, $\mathcal{E}_n$ é uma $\mathbb{R}$ -álgebra comutativa com unidade (ou seja, $\mathcal{E}_n$ tem estrutura de anel comutativo com unidade e de espaço vetorial real) e possui um único ideal maximal $\mathcal{M}_n$, o subconjunto dos germes de funções suaves que se anulam na origem, isto é,

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n; f(0) = 0\}.$$

Já $\mathcal{E}(n, m)$ é um $\mathcal{E}_n$ -módulo, ou seja, é um grupo abeliano com relação a adição e, para todo $f \in \mathcal{E}_n$ e todo $g \in \mathcal{E}(n, m)$, o elemento fg pertence a $\mathcal{E}(n, m)$, onde $fg(x) = (f(x)g_1(x), \dots, f(x)g_m(x))$, com $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$ e $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$. Além disso, as seguintes propriedades devem ser satisfeitas:

- (1) $f(g + g_1) = fg + fg_1$;
- (2) $f(f_1g) = (ff_1)g$;
- (3) $(f + f_1)g = fg + f_1g$; onde $f, f_1 \in \mathcal{E}_n$ e $g, g_1 \in \mathcal{E}(n, m)$.

Se consideramos $(x_1, \dots, x_n)$ como um sistema de coordenadas locais de $\mathbb{R}^n$, então $\mathcal{M}_n$ é finitamente gerado pelos germes de projeções, ou seja, pelos germes de funções $x_i, i = 1, \dots, n$, isto é,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1, \dots, x_n\} = \{f \in \mathcal{E}_n; f = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, a_i \in \mathcal{E}_n\}.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{M}_n^k$ como o produto de k ideais maximais $\mathcal{M}_n$, o que resulta no conjunto de germes em $\mathcal{M}_n$ tais que as derivadas de ordem menor ou igual a $k - 1$ se anulam na origem. Também é válido que

$$\mathcal{M}_n^k = \mathcal{E}_n \cdot \{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} : i_1 + \dots + i_n = k\}.$$

Denotamos por $\mathcal{R}_n$ o subconjunto de $\mathcal{E}(n)$ formado pelos germes de difeomorfismos que se anulam na origem, isto é,

$$\mathcal{R} = \{\phi \in \mathcal{E}(n); \phi \text{ é um germe de difeomorfismo e } \phi(0) = 0\}.$$

É fácil ver que $\mathcal{R}$ é um subgrupo de $\mathcal{E}(n)$ com relação a composição. Dado $m \in \mathbb{Z}$, tal subgrupo induz, de certa maneira, uma relação de equivalência em $\mathcal{E}(n, m)$. Isto é feito na seguinte definição.

Definição 1.1.3 *Sejam $f, g \in \mathcal{E}(n, m)$. Dizemos f e g são $\mathcal{R}$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\phi \in \mathcal{R}_n$ tal que $g = f \circ \phi^{-1}$. Quando isto ocorre, denotamos $f \sim_{\mathcal{R}} g$.*

Dizemos que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **singular** em $p \in \mathbb{R}^n$ se o posto da aplicação linear $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é máximo, isto é, $\text{posto}(df_p) < \min\{m, n\}$. Neste caso, p é dito ser um **ponto singular** de f . Caso contrário, p é dito um **ponto regular** de f .

Um germe $f \in \mathcal{E}(n, m)$ é dito **singular** se um dos seus representantes é singular em 0. Ser singular independe do representante, pois qualquer um deles tem o mesmo comportamento na vizinhança de p . Note que o conjunto de todos os germes de aplicações singulares em $\mathcal{E}_n$ é o ideal $\mathcal{M}_n^2$. Note ainda que, se $f \in \mathcal{M}_n^2 \mathcal{E}(n, m)$, então $f(0) = 0$.

Definição 1.1.4 A matriz Hessiana de um germe de função $f \in \mathcal{E}_n$ é a matriz:

$$\text{Hess}(f(0)) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right).$$

Se f é singular na origem, dizemos que f é uma singularidade **não degenerada** se $\det(\text{Hess}(f(0))) \neq 0$. Caso contrário, dizemos que f é uma singularidade **degenerada**. Germes de funções com singularidades não degeneradas na origem são chamados **germes de Funções de Morse**.

Definição 1.1.5 Seja $f \in \mathcal{E}_n$. Definimos o **ideal Jacobiano de f** por

$$Jf = \mathcal{E}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$$

e definimos a **codimensão do germe f** por

$$\text{cod } f := \text{cod}(Jf) = \dim \frac{\mathcal{E}_n}{Jf}.$$

É fácil verificar que $\text{cod } f = 0$ se e somente se f é regular.

Veremos, no que segue, exemplos de germes $\mathcal{R}$ -equivalentes.

Seja $f \in \mathcal{E}(n, m)$ não singular. Se $n \geq m$, então $f \sim_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_m)$ e se $n < m$, então $f \sim_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$. Agora, $f \in \mathcal{E}_n$ é um germe de função de Morse se e somente se $\text{cod } f = 1$ e, neste caso, $f \sim_{\mathcal{R}} \pm x_1^2 + \dots \pm x_n^2$. Tal resultado é conhecido por Lema de Morse. Para a prova destes resultados ver, por exemplo, [9].

Definição 1.1.6 Sejam $f \in \mathcal{E}_n, n \geq 2$, e $Q(x_2, \dots, x_n) = \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2$.

a) Dizemos que f é uma **singularidade A_k** em 0 quando

$$f \sim_{\mathcal{R}} \pm x_1^{k+1} + Q(x_2, \dots, x_n), k \geq 0. \quad (1.1)$$

b) Dizemos que f é uma **singularidade D_k** em 0 quando

$$f \sim_{\mathcal{R}} x_1^2 x_2 \pm x_2^{k-1} + Q(x_3, \dots, x_n), k \geq 4. \quad (1.2)$$

Por exemplo, dado $f \in \mathcal{E}_2$, temos que f é uma singularidade

$$A_k \Leftrightarrow f \sim_{\mathcal{R}} \pm x^{k+1} \pm y^2, k \geq 0$$

e f é uma singularidade

$$D_4 \Leftrightarrow f \sim_{\mathcal{R}} x^2 y \pm y^3.$$

Pode ser mostrado que a codimensão é invariante pela $\mathcal{R}$ -equivalência. Assim, uma singularidade A_0 (resp. A_1) em $\mathcal{E}_n$ é um germe de aplicação regular (resp. de Morse),

enquanto singularidades $A_k, k \geq 2$ e $D_k, k \geq 4$ são germes degenerados.

Além de $\mathcal{R}_n$, outros dois grupos de grande interesse, de onde também obtém-se relações de equivalência em $\mathcal{E}(n, m)$, são o grupo $\mathcal{A}$ e o grupo de contato $\mathcal{K}$. O grupo $\mathcal{A}$ é dado por $\mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_m$ e dizemos que duas aplicações $f, g \in \mathcal{E}(n, m)$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes quando existe $(h, k) \in \mathcal{A}$ tal que $g = k \circ f \circ h^{-1}$. O grupo de contato $\mathcal{K}$, por sua vez, é formado pelo conjunto dos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (0, 0))$ que podem ser escritos da forma $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$, onde $h \in \mathcal{R}_n$ e $H_1(x, 0) = 0$, para todo x em uma vizinhança de 0. A relação de equivalência dada por este grupo é a seguinte: dois germes $f, g \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}(n, m)$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes se existe um germe $(h, H) \in \mathcal{K}$ tal que

$$(x, g(x)) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))).$$

Esses grupos se relacionam entre si da seguinte maneira: $\mathcal{R}$ é subgrupo de $\mathcal{A}$ que, por sua vez, é subgrupo de $\mathcal{K}$. Sendo assim, a $\mathcal{R}$ equivalência implica a $\mathcal{A}$ equivalência que implica a $\mathcal{K}$ equivalência.

1.1.2 Determinação finita

O conceito de determinação finita permite reduzir o problema de classificar um certo germe ao estudo de seu k -jato, para algum k , o que facilita o trabalho, já que o k -jato é um polinômio, como veremos.

Definição 1.1.7 *Seja $f \in \mathcal{E}_n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos o **k -jato de f na origem** (e denotamos por $j^k f(0)$) ao desenvolvimento de Taylor de um representante de f em torno da origem, sem os termos de ordem maior que k e sem o termo constante. Dado $k \in \mathbb{N}$, o conjunto de todos os k -jatos de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é definido por*

$$J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{j^k f(0); f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m\}.$$

A definição de k -jato de f pode ser feita de modo mais geral, para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ em um ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Porém, em nosso estudo, trabalharemos com o caso $m = 1$ e p sendo a origem, uma vez que, para m e p quaisquer, o estudo é feito de modo análogo.

Definição 1.1.8 *Um germe $f \in \mathcal{E}_n$ é dito ser **k - $\mathcal{R}$ -determinado** (ou **k -determinado**, se o grupo $\mathcal{R}_n$ estiver subentendido) se, para qualquer $g \in \mathcal{E}_n$ tal que $j^k f(0) = j^k g(0)$, tem-se $f \sim_{\mathcal{R}} g$. Dizemos que f é **finitamente determinado** se f é k -determinado, para algum $k \in \mathbb{N}$.*

Note que, se f é k -determinado, então f é k' -determinado, para todo $k' \geq k$. O menor inteiro k tal que f é k -determinado é chamado de **grau de determinação de f** . Note também que, se f é k -determinado, então $f \sim_{\mathcal{R}} j^k f(0)$.

A proposição a seguir apresenta uma condição algébrica para verificar se um dado germe é k -determinado.

Proposição 1.1.9 ([5], p. 274) *Seja $f \in \mathcal{E}_n$. Se $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^2 Jf$, então f é k - $\mathcal{R}$ -determinado.*

Um corolário desta proposição, que pode ser útil em algumas situações, é o seguinte:

Corolário 1.1.10 *Seja $f \in \mathcal{E}_n$. Se $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n Jf$, então f é k - $\mathcal{R}$ -determinado.*

Uma pergunta natural a se fazer é se a determinação finita é invariante pela $\mathcal{R}$ -equivalência. A próxima proposição fornece uma resposta a esta pergunta.

Proposição 1.1.11 *Sejam $f, g \in \mathcal{E}_n$, com f k -determinado. Se $f \sim_{\mathcal{R}} g$, então g é k -determinado.*

Exemplo 1.1.12 Toda singularidade A_1 é 2-determinada. De fato, pela Proposição 1.1.11, basta verificarmos que o germe $f(x, y) = \pm x^2 \pm y^2$ é 2-determinado. Temos $Jf = \mathcal{E}_n \cdot \{x, y\}$, $\mathcal{M}_2^3 = \mathcal{M}_2^2 Jf = \mathcal{E}_n \cdot \{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$ e o resultado segue da Proposição 1.1.9. $\square$

Exemplo 1.1.13 Toda singularidade A_2 é 3-determinada. De fato, tomando $f = \pm x^2 \pm y^3$, temos $Jf = \mathcal{E}_n \cdot \{x, y^2\}$, e $\mathcal{M}_2^2 Jf = \mathcal{E}_n \cdot \{x^3, x^2y, xy^2, x^2y^2, xy^3, y^4\} \supset \mathcal{M}_2^4$. Logo f é 3-determinado. Com o mesmo raciocínio, segue que $f(x, y) = \pm x^2 \pm y^4$ é 4-determinado e, ainda mais, pode ser mostrado que $f(x, y) = \pm x^2 \pm y^k$ é k -determinado. Portanto, toda singularidade A_{k-1} é k -determinada. $\square$

Exemplo 1.1.14 Toda singularidade D_4 é 3-determinada. De fato, tomando o germe $f(x, y) = x^2y \pm y^3$, temos $Jf = \mathcal{E}_n \cdot \{xy, x^2 + 3y^2\}$ e $\mathcal{M}_2^2 Jf = \mathcal{E}_n \cdot \{x^3y, x^4 + 3x^2y^2, x^2y^2, xy^3, 3y^4\} \supset \mathcal{M}_2^4$. Logo, f é 3-determinado. $\square$

Exemplo 1.1.15 Considere o germe $f(x, y) = x^4 + y^4$. O ideal Jacobiano de f é dado por $Jf = \mathcal{E}_n \cdot \{x^3, y^3\}$. Note que $\mathcal{M}_2^4 \not\subset \mathcal{M}_2 Jf$, mas $\mathcal{M}_2^5 \subseteq \mathcal{M}_2^2 Jf$ e, portanto, f é 4-determinado. Isso mostra que a recíproca do Corolário 1.1.10 não é verdadeira, ou seja, existem germes k -determinados tais que $\mathcal{M}_n^k \not\subset \mathcal{M}_n Jf$. $\square$

1.1.3 Desdobramentos

Os conceitos de desdobramento versal e deformação versal são importantes em nosso estudo, pois nos auxiliam a encontrar os modelos do conjunto focal de uma superfície regular sem pontos parabólicos, a menos de difeomorfismo. Nesta subseção, estudamos tais conceitos e alguns de seus resultados.

Definição 1.1.16 *Seja $f \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n, m)$. Um **desdobramento** a b parâmetros (b, F) de f é um germe*

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^b, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^b, (0, 0)), \\ (x, u) &\mapsto (\bar{f}(x, u), u) \end{aligned}$$

com $\bar{f}(x, 0) = f(x)$. A família de germes

$$\bar{f} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^b, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$$

associada ao desdobramento F é dita uma **deformação** a b parâmetros de f .

O germe $\bar{f}$ é chamado de família de germes pois, para cada $u \in \mathbb{R}^b$, definimos o germe $\bar{f}_u : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$, dado por $\bar{f}_u(x) = \bar{f}(x, u)$. Quando $m = 1$, $\bar{f}$ é chamado **família de germes de funções**. Note que, para cada desdobramento (b, F) de f , existe uma deformação $\bar{f}$ de f associada e, para cada deformação $\bar{f}$ de f , existe um desdobramento F tal que $\bar{f}$ é sua deformação associada.

Exemplo 1.1.17 *Seja $f \in \mathcal{M}_2$ dado por $f(x, y) = x^2 + y^2$. A aplicação*

$$\bar{f}(x, y, u_1, u_2) = x^2 + y^2 + xu_1 + yu_2$$

é uma deformação de f a 2 parâmetros. De fato, $\bar{f}(x, y, 0, 0) = f(x, y)$. Seu desdobramento associado é dado por

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (0, 0)), \\ (x, y, u_1, u_2) &\mapsto (x^2 + y^2 + xu_1 + yu_2, u_1, u_2) \end{aligned}$$

□

Definição 1.1.18 *Um **morfismo** entre dois desdobramentos (a, F) e (b, G) de $f \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n, m)$ é um par $(\alpha, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$ com $\alpha : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathcal{R}_n, I)$, onde I é a identidade do grupo $\mathcal{R}_n$, e $\psi : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^b, 0)$, tal que*

$$\bar{f}_u = \bar{g}_{\psi(u)} \circ \alpha(u)^{-1}.$$

Neste caso, o desdobramento (a, F) é dito **induzido** de (b, G) por (α, φ) . Dois desdobramentos (a, F) e (b, G) de $f \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n, m)$ são ditos **equivalentes** se existe um morfismo

$(\alpha, \psi) : (a, F) \rightarrow (b, G)$ tal que ψ é invertível. Um desdobramento (a, F) de um germe f é dito **versal** (ou $\mathcal{R}$ -versal) se qualquer outro desdobramento (b, G) de f pode ser induzido de (a, F) .

Definição 1.1.19 Uma **suspensão** de um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ por $(\mathbb{R}^p, 0)$ é um desdobramento de f a p parâmetros $F = (f, id) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$ dado por $(f, id)(x, u) = (f(x), u)$, onde id é o germe da aplicação identidade.

Pode ser mostrado que o menor número p_0 de parâmetros para um desdobramento versal de f é igual a codimensão de f . Neste caso, um desdobramento versal (p_0, F) é chamado desdobramento **mini-versal**. Os desdobramentos mini-versais são únicos a menos de equivalência. Além disso, se f é finitamente determinado, então existe um desdobramento versal de f qualquer desdobramento versal é equivalente a uma suspensão de um desdobramento mini-versal, e dois desdobramentos versais (a, F) e (a, G) de f são equivalentes. Para detalhes, ver [9], Teorema 3.5, p.57.

Para germes de funções, é importante considerar o produto direto do grupo $\mathcal{R}$ com as translações, que denotamos por $\mathcal{R}^+$.

Definição 1.1.20 Duas famílias de germes de funções $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, deformações de um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, são ditas $\mathcal{R}^+$ -**equivalentes** se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0))$ da forma $\Phi(x, u) = (\alpha(x, u), \phi(u))$ e um germe de função $c : (\mathbb{R}^a, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$G(x, u) = F(\Phi(x, u)) + c(u).$$

As definições para desdobramentos versais e mini-versais referentes à $\mathcal{R}^+$ -equivalência são análogas à feita para o grupo $\mathcal{R}$.

Teorema 1.1.21 ([9] p. 62) Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ um germe $\mathcal{R}$ -finitamente determinado, com $1 \leq \text{cod}(f) \leq 4$. Então qualquer desdobramento $\mathcal{R}^+$ -miniversal de f tem sua deformação associada $\mathcal{R}^+$ -equivalente a uma das seguintes deformações, onde $Q(x_r, \dots, x_n) = \pm x_r^2 \pm \dots \pm x_n^2$:

- (i) $Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^3 + u_1 x_1$, se f é A_2 ;
- (ii) $Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^4 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$, se f é A_3 ;
- (iii) $Q(x_2, \dots, x_n) + x_1^5 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$, se f é A_4 ;
- (iv) $Q(x_2, \dots, x_n) \pm x_1^6 + u_4 x_1^4 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1$, se f é A_5 ;
- (v) $Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 - x_1 x_2^2 + u_3(x_1^2 + x_2^2) + u_2 x_2 + u_1 x_1$, se f é D_4^- ;

- (vi) $Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^3 + x_2^3 + u_3x_1x_2 + u_2x_2 + u_1x_1$, se f é D_4^+ ,
- (vii) $Q(x_3, \dots, x_n) + x_1^2x_2 + x_2^4 + u_4x_2^2 + u_3x_1^2 + u_2x_2 + u_1x_1$, se f é D_5 .

Estas singularidades são referidas como as **sete catástrofes elementares de Thom**.

Definição 1.1.22 Uma família de aplicações $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, b) = f_b(x)$ é dita **localmente $\mathcal{R}^+$ -versal** se, para todo $(x, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a$ o germe F em (x, b) é um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal de f_b em x .

Para uma família a b parâmetros $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^b, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de germes de funções, associamos alguns germes de conjuntos como segue. O **conjunto catástrofe** C_F de F é definido por

$$C_F = \left\{ (x, u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^b, (0, 0)); \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, u) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, u) = 0 \right\}$$

e o **conjunto bifurcação** de F por

$$B_F = \{u \in (\mathbb{R}^b, 0); \exists (x, u) \in C_F \text{ e posto} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x, u) \right) < n\}.$$

Os conjuntos catástrofe e bifurcação das sete catástrofes elementares de Thom dadas no Teorema 1.1.21 são computados em [9] e [2], por exemplo. Apresentamos na Figura 1.1 os conjuntos bifurcações dos desdobramentos mini-versais daqueles germes com codimensão ≤ 3 , ou seja, dos germes de singularidades A_2, A_3, A_4, D_4^- e D_4^+ , da esquerda para a direita, respectivamente.

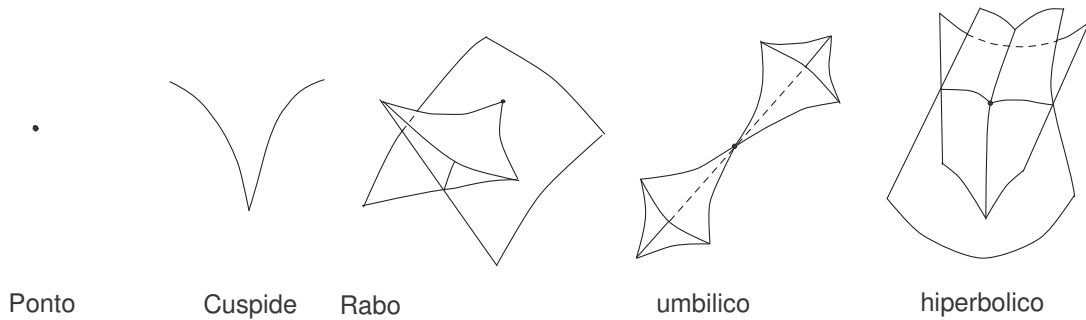


Figura 1.1: Conjuntos bifurcações das catástrofes de Thom com codimensão ≤ 3 .

Proposição 1.1.23 ([9] p. 64) Sejam $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^b, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ duas famílias de germes de funções tais que os seus conjuntos catástrofe C_F e C_G são subvariedades suaves. Suponha que F e G são $\mathcal{R}^+$ -equivalentes. Então existe um germe de difeomorfismo $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $\phi(B_F) = B_G$.

Observação 1.1.24 Segue da proposição acima que o conjunto bifurcação de qualquer deformação $\mathcal{R}^+$ -miniversal de um dos germes A_2, A_3, A_4, D_4^- ou D_4^+ (desde que seu conjunto catástrofe seja subvariedade suave) é, a menos de difeomorfismo, um dos modelos dados na Figura 3.2, uma vez que pode ser verificado que os conjuntos catástrofes dos germes dados no Teorema 1.1.21 são subvariedades suaves (ver, por exemplo, [9], p.65). $\square$

1.2 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Expomos, nesta seção, definições e resultados sobre superfícies em $\mathbb{R}^3$ e sua geometria diferencial que são importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Suporemos conhecida a teoria de curvas parametrizadas regulares em $\mathbb{R}^3$ e, para evitar nos estender demasiadamente nesta seção, não apresentaremos muitos detalhes, os quais podem ser consultados em [6] e [9], por exemplo.

Definição 1.2.1 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $s : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tal que:

- (1) s é suave, ou seja, se

$$s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

então as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

- (2) s é um homeomorfismo.

- (3) $ds_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, para todo $q \in U$, isto é, sua matriz no ponto q

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix}$$

tem posto 2.

A aplicação s é chamada uma **parametrização** ou um **sistema de coordenadas (locais)** de S em (uma vizinhança de) p . Chamamos de **curvas coordenadas** de s as curvas da forma $\alpha(t) = s(t, c)$ e $\beta(t) = s(c, t)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Note que s é uma **imersão** (injetiva) de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, ou seja, uma aplicação (injetiva) suave com derivada injetiva em todos os pontos de U . Como o estudo que faremos é local, consideramos no que segue superfícies S dadas por uma parametrização $s : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $S = s(U)$.

Seja $S = s(U)$ uma superfície regular e $q = s^{-1}(p) \in U$. A condição (3) da Definição 1.2.1 diz que os vetores $ds_q(1, 0) = s_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q))$ e $ds_q(0, 1) = s_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q))$ são linearmente independentes, o que permite definir unicamente um **plano tangente** a S em p , denotado por $T_p S$, como sendo o espaço vetorial de dimensão 2 tendo como base $s_u(q)$ e $s_v(q)$. Consequentemente, temos um vetor unitário normal a $T_p S$ dado por:

$$N(p) = \frac{s_u(q) \times s_v(q)}{\|s_u(q) \times s_v(q)\|}, \quad (1.3)$$

que diremos ser um vetor unitário normal à superfície S em p . Note que o vetor $-N(p)$ também é um vetor unitário normal a S em p .

No caso em que $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável, ou seja, possui um campo de vetores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável em S ($\|N(p)\| = 1$ e $N(p)$ é normal a $T_p S$, $\forall p \in U$), existe uma família de parametrizações $\{s_\alpha : U_\alpha \rightarrow s_\alpha(U_\alpha)\}$, com U_α conexo, tal que $S = \bigcup_\alpha s_\alpha(U_\alpha)$ e

$$N(s_\alpha(u, v)) = \frac{(s_\alpha)_u \times (s_\alpha)_v}{\|(s_\alpha)_u \times (s_\alpha)_v\|}(u, v),$$

para todo $(u, v) \in U_\alpha$. A direção a qual N aponta é dita ser a orientação de S . Para mais detalhes ver, por exemplo, [6]. Para a teoria local, não é necessário tomar S orientável, pois localmente qualquer superfície o é. Porém é preciso explicitar qual é a orientação a ser tomada, se compatível com (1.3) ou não. A aplicação suave $N : S \rightarrow S^2$ é chamada **Aplicação Normal de Gauss de S** , onde S^2 é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

O produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^3$ induz um produto escalar em $T_p S$ pela restrição e, como N é diferenciável e $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é um operador auto-adjunto (onde identificamos $T_{N(p)} S^2$ com $T_p S$), ou seja

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle,$$

para quaisquer $w_1, w_2 \in T_p S$, então $T_p S$ admite uma base ortonormal de auto-vetores w_1 e w_2 de $-dN_p$.

A aplicação bilinear simétrica $I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle$ é chamada de **primeira forma fundamental de S em p** .

Note que $I_p(w, w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$. Em muitos livros, a forma quadrática

$$\begin{aligned} T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto I_p(w, w) = \langle w, w \rangle \end{aligned}$$

associada a I_p é chamada de primeira forma fundamental de S em p , ou métrica induzida em S . Usaremos, sem distinção, a notação $I_p(w)$ para $I_p(w, w)$.

Consideremos dois vetores w_1 e $w_2 \in T_p S$, os quais podem ser escritos na forma

$$w_1 = a_1 s_u(q) + b_1 s_v(q) \quad \text{e} \quad w_2 = a_2 s_u(q) + b_2 s_v(q),$$

com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Temos assim que

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onde $E(q) = \langle s_u(q), s_u(q) \rangle$, $F(q) = \langle s_u(q), s_v(q) \rangle$ e $G(q) = \langle s_v(q), s_v(q) \rangle$ são funções suaves em U , chamadas de **coeficientes** da primeira forma fundamental de S em p com respeito à parametrização s . A matriz acima é chamada **matriz** da primeira forma fundamental. Assim, temos: $I_p(w) = a^2 E(q) + 2abF(q) + b^2 G(q)$, para $w = as_u(q) + bs_v(q)$.

Note que

$$(EG - F^2)(q) = \|s_u(q)\|^2 \|s_v(q)\|^2 - \langle s_u(q), s_v(q) \rangle^2 = \|s_u(q) \times s_v(q)\|^2 > 0, \quad (1.4)$$

ou seja, a matriz acima é não singular, para qualquer $q \in U$.

Uma curva parametrizada diferenciável em $S = s(U)$, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow s(U)$, é dada por

$$\alpha(t) = s(u(t), v(t)),$$

onde $(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada diferenciável em U .

Assim,

$$\alpha'(t) = u'(t)s_u(u(t), v(t)) + v'(t)s_v(u(t), v(t)).$$

Daqui em diante, com abuso de notação, usaremos $N(t)$ no lugar de $(N \circ \alpha)(t)$, quando α estiver implícito, ou seja,

$$N(t) = (N \circ \alpha)(t) = N(s(u(t), v(t))).$$

Assim,

$$N'(t) = (N \circ \alpha)'(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \in T_{\alpha(t)} S.$$

Consequentemente,

$$\langle N'(t), N(t) \rangle = 0, \forall t \in I.$$

Note que a igualdade acima não depende da curva α .

Seja $w = \alpha'(0) \in T_p S$, para alguma curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow s(U)$, dada por $\alpha(t) = s(u(t), v(t))$ e tal que $\alpha(0) = p$. Temos $w = u'(0)s_u(q) + v'(0)s_v(q)$, onde $s(q) = p$ e:

$$N'(0) = dN_p(w) = (N \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}(N \circ s(u(t), v(t)))|_{t=0} = u'(0)(N \circ s)_u(q) + v'(0)(N \circ s)_v(q).$$

Escrevendo, com abuso de notação,

$$N(u, v) = (N \circ s)(u, v),$$

obtemos

$$N_u(q) = (N \circ s)_u(q) = dN_p(s_u(q))$$

e

$$N_v(q) = (N \circ s)_v(q) = dN_p(s_v(q))$$

Assim, $N_u(u, v), N_v(u, v) \in T_{s(u,v)}S$ e

$$N'(t) = u'(t)N_u(u, v) + v'(t)N_v(u, v). \quad (1.5)$$

A **segunda forma fundamental** de S em p é a forma bilinear simétrica $II_p : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$II_p(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), w_2 \rangle,$$

de onde obtém-se a forma quadrática

$$\begin{aligned} T_pS &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto II_p(w, w) = \langle -dN_p(w), w \rangle \end{aligned}$$

associada a II_p , a qual é, em muitos livros, chamada de segunda forma fundamental de S em p . Usaremos, sem distinção, a notação $II_p(w)$ para $II_p(w, w)$.

A segunda forma fundamental pode também ser definida por

$$\begin{aligned} II_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (w_1, w_2) &\mapsto \langle -dN_q(w_1), ds_q(w_2) \rangle, \end{aligned}$$

o qual é equivalente à definição anterior, já que s é imersão e podemos identificar $\mathbb{R}^2$ com T_pS . Note que podemos usar as duas definições sem engano, basta notar se os vetores w_1 e w_2 pertencem a $\mathbb{R}^2$ ou a T_pS .

Note que, tomando uma parametrização s de S em $p = s(q)$ e escrevendo $w_1 = a_1s_u(q) + b_1s_v(q)$ e $w_2 = a_2s_u(q) + b_2s_v(q)$, segue que

$$II_p(w_1, w_2) = a_1a_2l(q) + (a_1b_2 + a_2b_1)m(q) + a_2b_2n(q),$$

onde

$$\begin{aligned} l(q) &= \langle -N_u, s_u \rangle(q) = \langle N, s_{uu} \rangle(q), \\ m(q) &= \langle -N_u, s_v \rangle(q) = \langle N, s_{uv} \rangle(q) = \langle -N_v, s_u \rangle(q), \\ n(q) &= \langle -N_v, s_v \rangle(q) = \langle N, s_{vv} \rangle(q) \end{aligned}$$

são funções suaves em U . Dizemos que $l(q), m(q)$ e $n(q)$ são os **coeficientes** da segunda forma fundamental de S em p com respeito à parametrização s .

Podemos também escrever

$$II_p(w_1, w_2) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l(q) & m(q) \\ m(q) & n(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

obtendo assim a matriz da segunda forma fundamental de S (com respeito a s). Notemos que $II_p(w) = a^2l(q) + 2abm(q) + b^2n(q)$, para $w = as_u(q) + bs_v(q)$.

Pode ser mostrado que a matriz do operador linear $-dN_p$ com respeito à base $\{s_u(q), s_v(q)\}$ de T_pS é dada por

$$\begin{bmatrix} l(q) & m(q) \\ m(q) & n(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.6)$$

(ver, por exemplo, [9], p. 28).

Para cada ponto $p \in S$, os auto-valores $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$ do operador linear $-dN_p$ são chamados de **curvaturas principais** de S em p . A **curvatura Gaussiana** K e a **curvatura média** H de S em p são definidas, respectivamente, por:

$$K(p) = \det(-d_pN) = \kappa_1(p)\kappa_2(p) \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{1}{2}\text{tr}(-d_pN) = \frac{1}{2}(\kappa_1(p) + \kappa_2(p)).$$

Estas curvaturas podem ser expressas em coordenadas locais em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental da seguinte maneira, sendo que a primeira igualdade segue diretamente de (1.6) (ver, por exemplo, [6], p. 184):

$$K(p) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}(q) \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)}(q). \quad (1.7)$$

As curvaturas principais κ_1 e κ_2 são as soluções da equação quadrática

$$x^2 - 2Hx + K = 0$$

e, portanto, uma é igual a $H + \sqrt{H^2 - K}$ e outra a $H - \sqrt{H^2 - K}$.

As **direções principais** de S em p são, por definição, os autovetores de $-dN_p$ (ou as direções (ortogonais, se p não é umbílico) de T_pS paralelas aos auto-vetores de $-dN_p$). Uma curva sobre S cuja direção tangente em todos os seus pontos é uma direção principal é chamada de **linha de curvatura**.

Em um plano, por exemplo, a aplicação de Gauss é constante e, portanto todas as curvaturas principais são nulas. Assim, dada qualquer curva sobre um plano, a direção tangente em um ponto sobre a curva sempre é uma direção principal. Logo, qualquer curva sobre um plano é uma linha de curvatura. Em uma esfera, apesar de a aplicação de

Gauss não ser constante, todas as direções em qualquer ponto são principais e, portanto, qualquer curva sobre uma esfera também é uma linha de curvatura.

Os pontos de uma superfície podem ser classificados segundo o valor da curvatura Gaussiana, conforme a seguinte definição:

Definição 1.2.2 *Seja $p \in S$. Dizemos que $p \in S$ é um ponto:*

- (a) **elíptico**, se $K(p) > 0$;
- (b) **hiperbólico**, se $K(p) < 0$;
- (c) **parabólico**, se $K(p) = 0$.

*O conjunto dos pontos parabólicos de S é chamado de **conjunto parabólico** de S . Quando $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$, dizemos que p é um ponto **umbílico**.*

Notemos que, como o conjunto parabólico de $S = s(U)$ é a imagem por s do conjunto zero da função suave $ln - m^2$, então em geral, quando não vazio, ele é uma curva regular sobre S .

Quanto aos pontos umbílico, a menos de um conjunto de imersões de medida nula, eles são isolados. Se p é um ponto não umbílico de S , então existem duas direções principais (os quais são ortogonais, devido ao fato de dN_p ser auto-adjunta). Em pontos umbílicos, toda direção tangente é uma direção principal. Além disso, pontos umbílicos podem ser elípticos ou parabólicos. Estes últimos são chamados de **umbílicos chatos** (flat), pois a curvatura em qualquer direção é nula nesse ponto.

Em muitos livros, pontos umbílicos chatos são chamados de *pontos planares*. Segue da matriz de $-dN_p$, dada em (1.6), que um ponto p de uma superfície regular $S = s(U)$ é umbílico chato se, e somente se, todos os coeficientes da segunda forma fundamental de S se anulam em p . Além disso, se todos os pontos de S são umbílicos chatos (resp. não chatos) então S está contida em um plano (resp. esfera) (ver, por exemplo, [9], p. 29). O conjunto parabólico separa S em duas regiões compostas pelos pontos elípticos e hiperbólicos. É possível identificar a forma de S em cada uma dessas duas regiões. Em um ponto elíptico, S está localmente em um dos lados determinados pelo plano tangente naquele ponto. Se o ponto é hiperbólico, então S se assemelha a uma sela de cavalo, no sentido de que, em uma vizinhança do ponto, há pontos de S em ambos semiespaços determinados pelo plano tangente naquele ponto.

Na vizinhança de pontos não umbílicos podemos obter uma parametrização especial para uma superfície dada, que será útil em nosso trabalho. Tal parametrização é dada na seguinte proposição:

Proposição 1.2.3 ([6], p. 220) *Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e $p \in S$ um ponto não umbílico. Existe uma parametrização s de S em uma vizinhança de p de tal modo que as curvas coordenadas de s são as linhas de curvaturas de S .*

Assim, se S está na forma da proposição acima, os vetores $s_u(q)$ e $s_v(q)$ são ortogonais, para todo q no domínio de s , ou seja,

$$\langle s_u, s_v \rangle = F \equiv 0$$

em U .

Além disso, $\left\{ \frac{s_u}{\sqrt{E}}(q), \frac{s_v}{\sqrt{G}}(q), N(p) \right\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, onde $s(q) = p$ e $N(p) = (N \circ s)(q)$ é a Aplicação Normal de Gauss de S . Neste caso,

$$\begin{aligned} N_u(q) &= dN_p(s_u(q)) = -\kappa_1(p)s_u(q), \\ N_v(q) &= dN_p(s_v(q)) = -\kappa_2(p)s_v(q). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Portanto,

$$m(p) = -\langle N_u(q), s_v(q) \rangle = -\langle N_v(q), s_u(q) \rangle = 0, \quad (1.9)$$

ou seja, $m \equiv 0$ em U .

Ainda no caso da Proposição 1.2.3, usando o fato que $F \equiv m \equiv 0$ e (1.6), temos

$$-dN_p = \begin{bmatrix} \frac{l}{E} & 0 \\ 0 & \frac{n}{G} \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

ou seja, as curvaturas principais no ponto p são dadas por $\frac{l}{E}(q)$ e $\frac{n}{G}(q)$.

Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, o vetor aceleração $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$ e, portanto, pertence ao plano gerado pelos vetores $N(t)$ e $N(t) \times \alpha'(t)$, onde $N(t) = N(\alpha(t))$. Podemos então escrever

$$\alpha''(t) = \kappa_g(t)(N(t) \times \alpha'(t)) + \kappa_n(t)N(t),$$

para algum escalar $\kappa_g(t)$, chamado **curvatura geodésica** de α em $\alpha(t)$, e $\kappa_n(t)$, chamado de **curvatura normal** de α em $\alpha(t)$.

Seja $p = \alpha(0)$. Como $\langle N(0), \alpha'(0) \rangle = 0$, derivando essa expressão, obtemos

$$II_p(\alpha'(0)) = \langle -dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle = \kappa_n(0). \quad (1.11)$$

Portanto, a curvatura normal depende apenas do vetor tangente unitário de α , e não propriamente da curva, ou seja, todas as curvas sobre a superfície parametrizadas por comprimento de arco com a mesma reta tangente em p têm a mesma curvatura normal em p . Assim, podemos denotar $\kappa_n(w)$ como sendo a curvatura normal de S em $\alpha(0)$ na direção de w , onde w é uma direção tangente unitária de $T_p S$.

Se α não está parametrizada pelo comprimento de arco, a curvatura normal em $p = \alpha(t)$ é definida por

$$\kappa_n(t) = II_p\left(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}\right) = \frac{II_p(\alpha'(t))}{I_p(\alpha'(t))} = -\frac{\langle \alpha'(t), N'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2} = \frac{\langle \alpha''(t), N(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}, \quad (1.12)$$

o que coincide com a definição anterior quando α for parametrizada pelo comprimento de arco. Se $\alpha' = as_u + bs_v$, então

$$\kappa_n = \frac{a^2l + 2abm + b^2n}{a^2E + 2abF + b^2G}. \quad (1.13)$$

Se p é não umbílico, podemos escrever qualquer vetor unitário $w \in T_pS$ como $w = \cos(\theta)w_1 + \sin(\theta)w_2$, onde w_1, w_2 são direções principais unitárias. Assim, podemos concluir, por (1.11) que

$$\kappa_n(w) = II_p(w) = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta).$$

Portanto, as curvaturas principais κ_1 e κ_2 são os extremos da curvatura normal κ_n em p , quando θ varia em $[0, \pi]$.

Uma direção w em p tal que $\kappa_n(w) = 0$ é chamado de **direção assintótica**. Uma direção é assintótica, portanto, se e somente se $II_p(w) = 0$. Pode-se verificar que em um ponto hiperbólico existem duas direções assintóticas, em um ponto elíptico nenhuma, e em um ponto parabólico apenas uma, caso $\kappa_1 \neq 0$ ou $\kappa_2 \neq 0$ e, no caso em que $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, todas as direções são assintóticas. Uma curva sobre S onde todos os vetores tangentes são direções assintóticas é chamada de **curva assintótica**.

Diferente da curvatura normal, a curvatura geodésica depende da curva α , e não somente do ponto $\alpha(t)$ e de $\alpha'(t)$.

Se a curvatura geodésica $\kappa_g = \langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle$ se anula em algum ponto t , dizemos que a curva α tem uma **inflexão geodésica** em t . Uma **geodésica** é uma curva sobre S tal que sua curvatura geodésica é nula em todos os pontos.

Pode ser mostrado que, se α não está parametrizada pelo comprimento de arco, a curvatura geodésica de α é dada por

$$\kappa_g = \frac{1}{\|\alpha'\|^3} \langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle. \quad (1.14)$$

1.2.1 Superfícies na forma de Monge

Seja S uma superfície regular e $p \in S$ um ponto não umbílico. Podemos escolher um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ tal que p seja a origem de $\mathbb{R}^3$, T_pM seja o plano $z = 0$ e S seja localmente o gráfico de alguma função $z = h(x, y)$, com (x, y) em algum aberto U de $\mathbb{R}^2$ contendo a origem e $h(0, 0) = p$ (neste caso, teremos $h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0$). Tal

parametrização é dita estar na **forma de Monge**

$$s(x, y) = (x, y, h(x, y)).$$

Neste caso, dizemos que S está parametrizada localmente na forma de Monge $z = h(x, y)$ na origem p . Note que a expansão de Taylor de h na origem não contém termos constantes ou lineares.

Podemos ainda supor, como as direções principais são ortogonais, que os eixos x e y estejam nas direções principais, com o eixo- x na direção de curvatura principal $\kappa_1(p)$. Assim

$$\begin{aligned} m(0, 0) &= -\langle dN_p(s_x(0, 0)), s_y(0, 0) \rangle = \kappa_1 \langle s_x(0, 0), s_y(0, 0) \rangle \\ &= \kappa_1 \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0 \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$m(0, 0) = \langle s_{xy}(0, 0), N(0, 0) \rangle = \langle (0, 0, h_{xy}(0, 0)), (0, 0, \pm 1) \rangle = \pm h_{xy}(0, 0).$$

Portanto $h_{xy}(0, 0) = 0$ e, assim, o desenvolvimento de Taylor de $h(x, y)$ em torno de $(0, 0)$ é

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(h_{xx}(0, 0)x^2 + h_{yy}(0, 0)y^2) + R,$$

onde $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{R}{x^2 + y^2} = 0$.

Como supomos os eixos coordenados estarem nas direções de curvatura principais, segue da equação (1.13) que $\kappa_1(p) = \frac{l(0, 0)}{E(0, 0)} = h_{xx}(0, 0)$ e $\kappa_2(p) = \frac{n(0, 0)}{G(0, 0)} = h_{yy}(0, 0)$, uma vez que

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= \langle s_x(0, 0), s_x(0, 0) \rangle = 1; \\ G(0, 0) &= \langle s_y(0, 0), s_y(0, 0) \rangle = 1; \\ l(0, 0) &= \langle s_{xx}(0, 0), N(0, 0) \rangle = \pm h_{xx}(0, 0); \\ n(0, 0) &= \langle s_{yy}(0, 0), N(0, 0) \rangle = \pm h_{yy}(0, 0). \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(\pm \kappa_1 x^2 \pm \kappa_2 y^2) + R.$$

1.3 Frentes de onda

Veremos, na Seção 3.5, que nosso objeto de estudo, a superfície focal, é imagem de uma aplicação que dizemos ser uma frente de onda, a qual definiremos a seguir. Em [15], é estudada a geometria de frentes de ondas. Assim, ao observar que o conjunto focal é imagem de uma frente de onda, podemos considerar os resultados de [15]. No que segue, U denotará um aberto de $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.3.1 Dizemos que uma aplicação suave $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **frontal** se existe um campo suave de vetores $\nu : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ unitários normais à f , isto é, $\|\nu(p)\| = 1$ e $\langle df_p(X), \nu(p) \rangle = 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$ e $p \in U$. Além disso, quando a aplicação $(f, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ é uma imersão, dizemos que f é uma **frente de onda** e ν é a **aplicação de Gauss** de f .

Note que toda parametrização de uma superfície regular é uma frente de onda, basta tomar ν como a aplicação normal de Gauss da parametrização. Como consequência disso, segue que toda superfície regular é localmente imagem de uma frente de onda. Por outro lado, uma frente de onda não é necessariamente regular e, neste caso, a imagem de uma frente de onda não é uma superfície regular, conforme veremos nos exemplos a seguir. Na verdade, genericamente, as singularidades de frentes de onda são arestas cuspidais ou rabos de andorinha, dadas na seguinte definição (para maiores detalhes, ver [1]):

Definição 1.3.2 Seja $f \in \mathcal{E}(2, 3)$.

a) Dizemos que f é uma **aresta cuspidal (cuspidal edge)** quando

$$f \sim_{\mathcal{A}} (x, y^2, y^3).$$

b) Dizemos que f é um **rabo de andorinha (swallowtail)** quando

$$f \sim_{\mathcal{A}} (3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y).$$

Suas imagens estão ilustradas nas figuras 1.2(a) e 1.2(b), respectivamente.

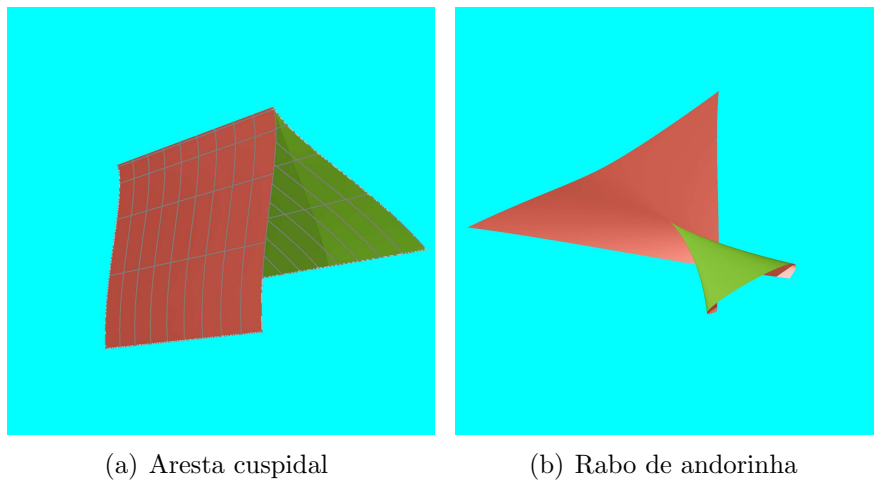


Figura 1.2: Singularidades genéricas de uma frente de onda.

Denotaremos no que segue o conjunto singular de $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ por Σ_f , ou seja

$$\Sigma_f = \{q \in U; q \text{ é ponto singular de } f\}.$$

Exemplo 1.3.3 Consideremos a aresta cuspidal

$$f(u, v) = (u, v^2, v^3).$$

Temos:

$$f_u(u, v) = (1, 0, 0), f_v(u, v) = (0, 2v, 3v^2) \text{ e } f_u \times f_v(u, v) = v(0, -3v, 2).$$

Assim, Σ_f é o eixo- u . Seja

$$\nu(u, v) = \frac{1}{\sqrt{4 + 9v^2}}(0, -3v, 2).$$

Então ν é um campo de vetores unitários normais à f . Além disso, como $f_v(u, 0) = (0, 0, 0)$, $f_u(u, 0) = (1, 0, 0)$ e $\nu_v(0, 0) = (0, -\frac{3}{2}, 0)$, então (f, ν) é imersão e, portanto, f é uma frente de onda, com seu conjunto imagem dado na Figura 1.2(a). $\square$

Exemplo 1.3.4 Seja $f(u, v) = (u, v^2, uv^3)$, cuja imagem é dada na Figura 1.3. Temos:

$$f_u(u, v) = (1, 0, v^3), f_v(u, v) = v(0, 2, 3uv) \text{ e } f_u \times f_v(u, v) = v(-2v^3, -3uv, 2).$$

Seja

$$\nu(u, v) = \frac{1}{\sqrt{4v^6 + 9u^2v^2 + 4}}(-2v^3, -3uv, 2).$$

Então ν é um campo de vetores unitários normais à f e, portanto, f é uma frontal.

Note que Σ_f é o eixo- u e, além disso, $\nu_u(u, 0) = \nu_v(u, 0) = (0, 0, 0)$. Logo (f, ν) não é imersão e, com esta aplicação ν , não podemos afirmar que f é uma frente de onda. $\square$

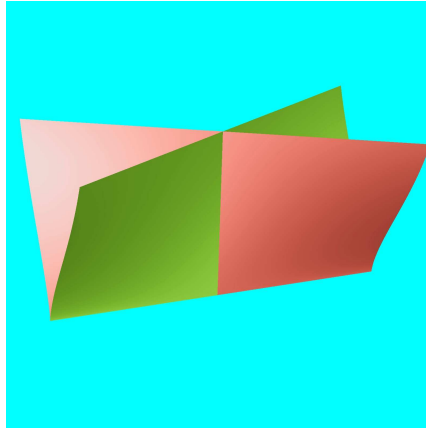


Figura 1.3: Superfície do Exemplo 1.3.4.

Exemplo 1.3.5 Seja f o rabo de andorinha dado por

$$f(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v),$$

cuja imagem é dada na Figura 1.2(b).

Temos:

$$f_u(u, v) = (12u^2 + 2v)(u, 1, 0), \quad f_v(u, v) = (u^2, 2u, 1)$$

e

$$f_u \times f_v(u, v) = (12u^2 + 2v)(1, -u, u^2),$$

de onde concluímos que o conjunto singular de f é a parábola dada por $v = -6u^2$.

Seja

$$\nu(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + u^4}}(1, -u, u^2).$$

Então ν é um campo de vetores unitários normais à f . Nos pontos singulares de f , f_u se anula e f_v e ν_u não se anulam, de onde concluímos que (f, ν) é uma imersão e, portanto, f é uma frente de onda. $\square$

No que segue, nesta seção, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ será uma frente de onda, $f(U) = S$ e ν uma aplicação de Gauss de f . Segue da definição de frente de onda que, em pontos regulares de f , ν é paralelo a $f_u \times f_v$ e S é localmente uma superfície regular.

Definição 1.3.6 A função $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\lambda(q) = \langle f_u(q) \times f_v(q), \nu(q) \rangle = \det(f_u, f_v, \nu)(q)$$

é chamada de **função densidade de área** de f .

Temos

$$\lambda(q) = 0 \Leftrightarrow f_u \times f_v(q) = 0 \Leftrightarrow q \in \Sigma_f.$$

Logo, $\Sigma_f = \lambda^{-1}(0)$. Por outro lado, em pontos regulares $q \notin \Sigma_f$, temos que $\lambda(q) > 0$ quando $\nu(q)$ e $f_u \times f_v(q)$ apontam para o mesmo semi-espaço determinado por $T_{f(q)}S$. Quando $\nu(q)$ e $f_u \times f_v(q)$ apontam para lados opostos, temos $\lambda(q) < 0$. Vamos denotar por U_+ (resp. U_-) o aberto de $\mathbb{R}^2$ constituído por $(u, v) \in U$ tal que $\lambda(u, v) > 0$ (resp. $\lambda(u, v) < 0$).

Definição 1.3.7 Seja $q \in \Sigma_f$. Dizemos que q é um ponto singular **não degenerado** de f se q é um ponto regular de λ , ou seja, $d\lambda_q \neq 0$, ou ainda, $\lambda_u(q)$ e $\lambda_v(q)$ não se anulam simultaneamente.

Como $\Sigma_f = \lambda^{-1}(0)$, segue do Teorema da Função Implícita que Σ_f é localmente uma curva regular em pontos singulares não degenerados de f , a qual chamaremos de **curva singular** de f . Cada direção tangente à curva singular é chamada de **direção singular**. No que segue, dado $q \in \Sigma_f$ não degenerado, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ ($\varepsilon > 0$) será uma parametrização para a curva singular, com $\gamma(0) = p$. Note que podemos tomar $\varepsilon > 0$ de forma que $\gamma(t)$ seja um ponto singular não degenerado para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Além disso, se $q \in \Sigma_f$, o núcleo da aplicação df_q tem dimensão 1. De fato, se $\dim(\text{Ker}(df_q)) = 2$, então $f_u(q) = f_v(q) = 0$, o que implica

$$\lambda_u = \det(f_{uu}, f_v, \nu) + \det(f_u, f_{uv}, \nu) + \det(f_u, f_v, \nu_u) = 0 \text{ em } q$$

e, de modo análogo, $\lambda_v(q) = 0$, o que não ocorre pois q é não degenerado. Logo, $\dim(\text{Ker}(df_q)) = 1$.

Definição 1.3.8 *Suponha q um ponto singular não degenerado de f . Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, existe um subespaço vetorial de dimensão 1 de $\mathbb{R}^2$, chamado de **direção nula**, que é o núcleo da aplicação linear $df_{\gamma(t)}$. Podemos escolher um campo suave de vetores $\eta(t)$ ao longo de γ tal que $\eta(t)$ pertença a uma direção nula para cada t (ou seja, $df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = 0$), chamado de **campo de vetores nulo ao longo de γ** .*

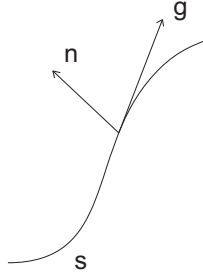


Figura 1.4: Direção singular e nula de uma curva singular.

Com abuso de linguagem, chamaremos um vetor pertencente a uma direção nula de uma direção nula.

Sabemos que $df_q(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ tendo como geradores os vetores $f_u(q)$ e $f_v(q)$. Logo, se $q \notin \Sigma_f$ então $df_q(\mathbb{R}^2)$ é um plano, e temos o **plano tangente** à S em $f(q)$, denotado por $T_{f(q)}S$, como no caso de superfícies parametrizadas regulares. Por outro lado, se $q \in \Sigma_f$ e é não degenerado, então $df_q(\mathbb{R}^2)$ é uma reta. Neste caso, definimos a **reta tangente** à S em $f(q)$ como sendo a reta que passa por $f(q)$ e é paralela à reta $df_q(\mathbb{R}^2)$ e a denotamos também por $T_{f(q)}S$. Definimos também o **plano normal** à S em $f(q)$ como sendo o plano por $f(q)$ perpendicular à reta $df_q(\mathbb{R}^2)$ e denotamos por $N_{f(q)}S$ (ver Figura 1.5). Além disso, dizemos que um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é **normal** à S em $f(q)$ quando w for ortogonal a $df_q(\mathbb{R}^2)$, isto é, $\langle df_q(u, v), w \rangle = 0, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

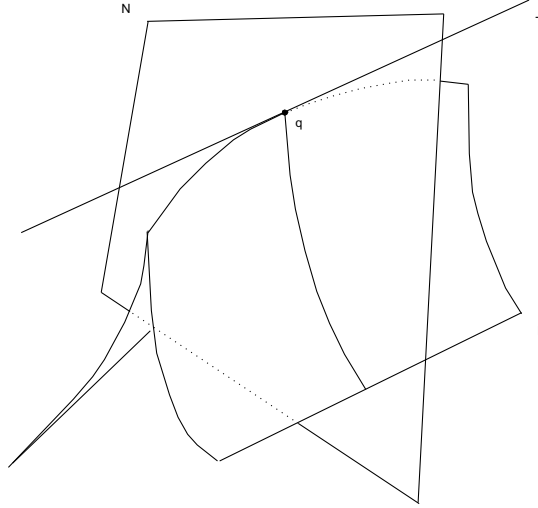


Figura 1.5: Reta tangente e plano normal à S em $f(q)$, onde q é um ponto singular de f .

Usando o fato de que ν é um campo de vetores normais, podemos considerar o “plano tangente” à S , mesmo em pontos singulares, da seguinte maneira:

Definição 1.3.9 Dado $q \in U$, definimos o **plano tangente limitante** à S em $f(q)$ como sendo o plano passando por $f(q)$ e ortogonal à $\nu(q)$.

Em pontos regulares de f , o plano tangente limitante coincide com o plano tangente usual; em pontos singulares, este plano contém a reta tangente à S naquele ponto.

O próximo teorema fornece critérios para que um ponto singular de f seja uma aresta cuspidal ou um rabo de andorinha. Ele é consequência do Fato 1.5 apresentado em [15], p. 495, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [16].

Teorema 1.3.10 Seja q um ponto singular não degenerado de f e γ a curva singular passando por q . Então:

- (a) $q = \gamma(t_0)$ é uma aresta cuspidal se, e somente se, a direção nula e a direção singular são transversais, isto é, $\det(\gamma'(t), \eta(t))$ não se anula em $t = t_0$, onde $\det$ denota o determinante da matriz 2×2 .
- (b) $q = \gamma(t_0)$ é um rabo de andorinha se, e somente se, a direção nula e a direção singular são tangentes e $\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \neq 0$.

Observação 1.3.11 A afirmação

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \neq 0$$

significa que a curva singular, além de ser tangente a direção nula, não a cruza em $\gamma(t_0)$. Quando isto ocorre, dizemos que as curvas têm uma **tangencia ordinária**.

Exemplo 1.3.12 Considere aresta cuspidal $f(u, v) = (u, v^2, v^3)$. Já vimos que Σ_f é o eixo- u , $f_v(u, 0) = 0$ e que $\nu(u, v) = \frac{1}{\sqrt{9v^2 + 4}}(0, -3v, 2)$ (ver Exemplo 1.3.3). Assim, dado $(u, 0) \in \Sigma_f$, temos que

$$\lambda_v(u, 0) = \det(f_u, f_{vv}, \nu)(u, 0) = 2.$$

Logo, todo ponto singular de f é não degenerado e, se $\gamma(t) = (u(t), 0)$ é uma parametrização da curva singular, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então $\eta(t) = (0, 1)$ é um campo de vetores nulo ao longo de γ , já que $f_v(\gamma(t)) = df_{\gamma(t)}(0, 1) = 0, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Note que, em todo ponto de Σ_f , a direção singular é paralela ao vetor $(1, 0)$ e a direção nula paralela ao vetor $(0, 1)$, ou seja, as direções singulares e nulas são sempre transversais, o que é coerente com o Teorema 1.3.10. Além disso, os pontos singulares de $f(U)$ estão sobre o eixo- x , pois $f(u, 0) = (u, 0, 0)$, o plano tangente limitante em um ponto singular $(u, 0, 0)$ é o plano paralelo ao plano (x, y) passando por $(u, 0, 0)$, já que $\nu(u, 0) = (0, 0, 1)$, e o plano normal é o plano paralelo ao plano (y, z) passando por $(u, 0, 0)$, uma vez que a reta tangente à aresta cuspidal é paralela a $f_u(u, 0) = (1, 0, 0)$.

□

Exemplo 1.3.13 Considere o rabo de andorinha $f(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$. Temos:

$$\lambda_v(0, 0) = \det(f_{uv}, f_v, \nu)(0, 0) = 2,$$

(ver Exemplo 1.3.5). Assim, a origem é um ponto singular não degenerado de f . Já vimos que a curva singular é dada por $\{v = -6u^2\}$. Logo, a direção singular na origem é paralela ao vetor $(1, 0)$. Por outro lado, como $f_u = 0$ sobre a curva singular, então a direção nula em qualquer ponto singular também é paralela a $(1, 0)$. Logo as direções singular e nula são paralelas em $(0, 0)$, o que é coerente com o Teorema 1.3.10. Além disso, $f(0, 0) = (0, 0, 0)$ e o plano tangente limitante em $(0, 0, 0)$ é o plano (x, y) , uma vez que $\nu(0, 0) = (0, 0, 1)$, e o plano normal é o plano (y, z) , já que $f_v(0, 0) = (0, 0, 0)$ e $f_u(0, 0) = (1, 0, 0)$.

1.3.1 Primeira e segunda formas fundamentais de uma frente de onda

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frente de onda e ν sua aplicação normal de Gauss. Sabemos que $f(U) = S$ não é necessariamente regular, logo a primeira e segunda formas fundamentais não estão definidas. Vamos, a seguir, defini-las, o que será de forma análoga para superfícies regulares.

Dado $q \in U$, a métrica de $\mathbb{R}^3$ induz a aplicação

$$I_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$I_q(X, Y) = \langle df_q(X), df_q(Y) \rangle,$$

chamada de **Primeira forma fundamental** de f em q .

Definimos os **coeficientes** de I_q da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E_f(q) &= I_q(e_1, e_1) = \langle f_u(q), f_u(q) \rangle, \\ F_f(q) &= I_q(e_1, e_2) = \langle f_u(q), f_v(q) \rangle \text{ e} \\ G_f(q) &= I_q(e_2, e_2) = \langle f_v(q), f_v(q) \rangle, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Dado $X = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, obtemos

$$I_q(X, X) = a^2 E_f(q) + 2ab F_f(q) + b^2 G_f(q).$$

Recorde que, para a segunda forma fundamental de Superfícies regulares, foi necessário considerar a aplicação normal de Gauss N . Para frentes de onda, vamos considerar a aplicação de Gauss ν , já que também é um campo de vetores normais unitários a S .

Definimos a **segunda forma fundamental de f em $f(q)$**

$$II_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$II_q(X, Y) = \langle -d\nu_q(X), df_q(Y) \rangle. \quad (1.15)$$

Dado $X = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$II_q(X, X) = a^2 l_f(q) + 2ab m_f(q) + b^2 n_f(q),$$

onde

$$\begin{aligned} l_f(q) &= \langle -\nu_u(q), f_u(q) \rangle = \langle f_{uu}(q), \nu(q) \rangle, \\ m_f(q) &= \langle -\nu_u(q), f_v(q) \rangle = \langle -\nu_v(q), f_u(q) \rangle = \langle f_{uv}(q), \nu(q) \rangle \text{ e} \\ n_f(q) &= \langle -\nu_v(q), f_v(q) \rangle = \langle f_{vv}(q), \nu(q) \rangle, \end{aligned}$$

os quais chamamos de **coeficientes da segunda forma fundamental** de f em q .

Note que os coeficientes da primeira forma fundamental de f em pontos regulares coincidem com aqueles definidos para superfícies regulares, enquanto os da segunda forma fundamental coincidem a menos de sinal (pois $\nu(q) = \pm N(q)$).

Contato

O conceito de contato entre subvariedades de $\mathbb{R}^3$ é uma importante ferramenta da Teoria de Singularidades para o estudo da geometria de subvariedades de $\mathbb{R}^3$, onde propriedades geométricas são estudadas através de aplicações que medem o contato.

Neste capítulo, estudamos primeiramente a noção de contato entre duas variedades diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ em um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ para, posteriormente, aplicarmos para o caso particular entre superfícies de $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, entre uma superfície e uma família de esferas imersas em $\mathbb{R}^3$. Não apresentaremos aqui a maioria das demonstrações, uma vez que isso tornaria este trabalho por demais extenso e também limitaria nosso tempo de dedicação ao estudo do conjunto focal. Tomamos o cuidado de exibir alguma referência onde as demonstrações possam ser encontradas.

A principal referência usada neste capítulo é o livro [9], o qual apresenta em seu Capítulo 4 alguns dos principais resultados da teoria geral de contato entre subvariedades, a qual foi desenvolvida por Montaldi em sua tese de doutorado [10], ainda que estes resultados podem ser encontrados em [11] e [12].

2.1 Contato entre subvariedades de $\mathbb{R}^n$

Definição 2.1.1 *Sejam $M_i, N_i, i = 1, 2$ subvariedades de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(M_1) = \dim(M_2) = m$ e $\dim(N_1) = \dim(N_2) = d$. Dizemos que o contato entre M_1 e N_1 em y_1 é do mesmo **tipo** que o **contato** entre M_2 e N_2 em y_2 quando existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$ tal que $\Phi(M_1) = M_2$ e $\Phi(N_1) = N_2$. Neste caso, denotamos $K(M_1, N_1; y_1) = K(M_2, N_2; y_2)$ e dizemos que a classe de contato entre as variedades é a mesma.*

Suponha que M seja dado localmente como a imagem de um germe de imersão $g : (\hat{M}, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, onde $\hat{M} \subset \mathbb{R}^l$ é uma subvariedade m -dimensional, isto é, $g(\hat{M}) = M$. Suponha também que N seja dado localmente como o conjunto zero de uma submersão

$f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d}, 0)$, isto é, $N = f^{-1}(0)$. Dizemos que o germe da aplicação composta $f \circ g$ em x é um **germe de aplicação de contato** entre M e N .

A classe de contato entre duas subvariedades de $\mathbb{R}^n$ é determinada pelas $\mathcal{K}$ -singularidades do germe de aplicação de contato $f \circ g$, como garante o seguinte teorema:

Teorema 2.1.2 ([9], p. 76) *Sejam $g_i : (\hat{M}_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ germes de imersões, com $g_i(\hat{M}_i) = M_i$ e $f_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d}, 0)$ germes de submersões, com $N_i = f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$. Então*

$$K(M_1, N_1; y_1) = K(M_2, N_2; y_2) \Leftrightarrow f_1 \circ g_1 \sim_{\mathcal{K}} f_2 \circ g_2.$$

Claramente, dado um par de variedades M e N , existem várias maneiras de escolher um germe de imersão g e um de submersão f tal que $f \circ g$ seja um germe de aplicação de contato entre M e N . A proposição a seguir assegura que a $\mathcal{K}$ -equivalência de um germe de aplicação de contato entre M e N não depende das aplicações g e f escolhidas, mas apenas das subvariedades em si.

Proposição 2.1.3 ([9], p. 76) *Dado qualquer par de germes de subvariedades em $\mathbb{R}^n$, a $\mathcal{K}$ -classe da aplicação de contato depende somente dos germes de subvariedades e não da escolha da aplicação de contato.*

Exemplo 2.1.4 Sejam C uma curva em $\mathbb{R}^3$ dada pela imagem de uma imersão $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e N uma superfície dada como conjunto zero de uma submersão $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. A aplicação de contato entre elas é, portanto, uma função real. Qualquer germe de função real $\mathcal{K}$ -finitamente determinado é $\mathcal{K}$ -equivalente ao germe $h(t) = t^{s+1}$, para algum $s \in \mathbb{N}$ e, neste caso, dizemos que h tem uma A_s singularidade. $\square$

Para o caso do contato entre uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e uma família de superfícies, veremos um resultado análogo ao Teorema 2.1.2 em termos da $\mathcal{R}^+$ -equivalência.

Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de submersão, denotamos por $\mathcal{F}_f$ a família

$$\mathcal{F}_f = \{f^{-1}(c); c \in (\mathbb{R}, 0)\}.$$

Sejam M_i superfícies suaves em $\mathbb{R}^3$ e $g_i : (\mathbb{R}^2, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^3, y_i)$ germes de imersões com $g_i(\mathbb{R}^2, x_i) = M_i$, $i = 1, 2$. Sejam também $f_i : (\mathbb{R}^3, y_i) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germes de submersões, $i = 1, 2$. Dizemos que o **contato** entre M_1 e a família $\mathcal{F}_{f_1}$ em y_1 é do mesmo **tipo** que o contato entre M_2 e a família $\mathcal{F}_{f_2}$ em y_2 se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^3, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, y_2)$ tal que $\Phi(M_1) = M_2$ e $\Phi(N_1(c)) = N_2(c)$, onde $N_i(c) = f_i^{-1}(c)$, para todo $c \in (\mathbb{R}, 0)$, $i = 1, 2$. Neste caso, denotamos

$$K(M_1, \mathcal{F}_{f_1}; y_1) = K(M_2, \mathcal{F}_{f_2}; y_2).$$

Proposição 2.1.5 ([9], p. 80) *Com as notações acima, temos:*

$$K(M_1, \mathcal{F}_{f_1}; y_1) = K(M_2, \mathcal{F}_{f_2}; y_2) \Leftrightarrow f_1 \circ g_1 \sim_{\mathcal{R}^+} f_2 \circ g_2.$$

Nosso objetivo a seguir é verificar que duas subvariedades em $\mathbb{R}^n$ são transversais se, e somente se, a aplicação de contato é regular. Em particular, se dois pares de variedades (M_1, N_1) e (M_2, N_2) , com $\dim(M_1) = \dim(M_2)$ e $\dim(N_1) = \dim(N_2)$, são ambos transversais, então as duas aplicações de contato são regulares e, portanto, o tipo de contato é o mesmo entre eles.

Definição 2.1.6 *Sejam M uma variedade diferenciável, $f : (M, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y)$ um germe de aplicação diferenciável, e N uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f é **transversal a N em x** , e denota-se por $f \pitchfork N$ em x , quando $f(x) \notin N$, ou $f(x) \in N$ e $T_{f(x)}N + df_x(T_xM) = \mathbb{R}^n$. Dizemos que duas subvariedades diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ são **transversais em x** quando considerarmos f como sendo a inclusão, isto é, quando $T_xN + T_xM = \mathbb{R}^n$.*

Observação 2.1.7 Sejam M e N subvariedades de $\mathbb{R}^n$, tal que M é m -dimensional dado por uma imersão $g : (\hat{M}, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e N é imagem inversa de 0 (valor regular) de um germe de submersão $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d}, 0)$. Então M e N são transversais em 0 se, e somente se, $m + d \geq n$ e a aplicação de contato $F = f \circ g$ é regular em x . $\square$

De fato, se $m + d < n$, então as variedades não são transversais. Por outro lado, note que $T_0M + T_0N$ é um espaço vetorial com dimensão igual a $\dim(T_0M) + \dim(T_0N) - \dim(T_0M \cap T_0N) = m + d - l \leq n$, onde $l = \dim(T_0M \cap T_0N)$. Note também que M e N serem não transversais é equivalente a $m + d - l < n$. Sabemos que F é regular em x se, e somente se, $dF_x = df_0 \circ dg_x$ é sobrejetiva. Agora, como g é imersão, segue que $dg_x(T_x\hat{M}) = T_0M$. Logo, dF_x é sobrejetiva se, e somente, $\text{Im}(df_0|_{T_0M}) = df_0(T_0M) = \mathbb{R}^{n-d}$, isto é, a dimensão do espaço vetorial $\text{Im}(df_0|_{T_0M})$ é $n - d$.

Para finalizar, note que

$$\text{Ker}(df_0|_{T_0M}) = \text{Ker}(df_0) \cap T_0M = T_0N \cap T_0M$$

e, então $\dim(\text{Ker}(df_0|_{T_0M})) = l$. Assim,

$$\dim(\text{Im}(df_0|_{T_0M})) = \dim(T_0M) - \dim(\text{Ker}(df_0|_{T_0M})) = m - l.$$

Portanto, dF_p não é sobrejetiva se, e somente se, $m - l < n - d$, que é equivalente a não transversalidade de M e N . Logo F é regular em 0 se, e somente se, M e N são transversais. $\square$

2.2 Contato entre superfícies e esferas

A classificação das $\mathcal{K}$ -singularidades das aplicações de contato entre uma superfície M e esferas em $\mathbb{R}^3$ é tratada para um certo tipo de superfícies, chamadas **genéricas**. A seguir daremos uma breve explicação do que isto significa, uma vez que nosso interesse principal neste trabalho é o estudo da geometria diferencial de um caso especial de superfície em $\mathbb{R}^3$, a superfície focal. Para maiores detalhes, sugerimos, por exemplo, as seções 4.2 e 4.3 do livro [9].

Seja $C^\infty(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y; f \text{ é suave}\}$. Uma propriedade P no espaço topológico $Imm(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y; f \text{ é imersão}\} \subset C^\infty(X, Y)$ é dita **genérica** se é satisfeita em um subconjunto residual de $Imm(X, Y)$. Um subconjunto residual de um espaço topológico é uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos. Pode-se mostrar que, em $Imm(X, Y)$, um subconjunto residual é também um subconjunto denso. Dada uma propriedade genérica P em $Imm(X, Y)$, chamamos de **imersões genéricas** aquelas que satisfazem P .

Seja $M = g(U)$ uma superfície regular, onde $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização. Estamos interessado em estudar o contato de M com uma família de esferas com centro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ fixado. Esferas em $\mathbb{R}^3$ são unicamente determinadas por um centro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ e um raio $r \in \mathbb{R}$. Denotamos por

$$S(\mathbf{u}, r) = \{y \in \mathbb{R}^3; \langle y - \mathbf{u}, y - \mathbf{u} \rangle = r^2\}$$

uma tal esfera. Consideremos a **família estendida de funções distância ao quadrado associada M**

$$\tilde{D} : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\tilde{D}(q, \mathbf{u}, r) = \langle g(q) - \mathbf{u}, g(q) - \mathbf{u} \rangle - r^2.$$

Notemos que, para cada $(\mathbf{u}, r)$ fixado, a função $\tilde{\mathcal{D}}_{(\mathbf{u}, r)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{\mathcal{D}}_{(\mathbf{u}, r)}(y) = \langle y - \mathbf{u}, y - \mathbf{u} \rangle - r^2$ é uma submersão (desde que $r \neq 0$). Além disso, a função $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)}(q) = \tilde{D}(q, \mathbf{u}, r)$ mede o contato entre M e a esfera $S(\mathbf{u}, r)$, o qual é dado pelas $\mathcal{K}$ -singularidades de $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)}$.

Consideremos também a **família de funções distância ao quadrado associada a M**

$$D : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$D(q, \mathbf{u}) = \langle g(q) - \mathbf{u}, g(q) - \mathbf{u} \rangle.$$

Assim, segue da Proposição 2.1.5 que o contato de $M = g(U)$ com a família de esferas com centro em $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ é medido pelas $\mathcal{R}^+$ -singularidades da função $d_{\mathbf{u}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$d_{\mathbf{u}}(q) = D(q, u)$, uma vez que esta é a aplicação de contato que obtemos.

As propriedades desejadas para uma imersão genérica são descritas em termos da $\mathcal{K}_e$ -versalidade da família $\tilde{D}$. Neste sentido, dizemos que g é **genérica** (com respeito ao contato com a família de esferas) se $\tilde{D}$ é $\mathcal{K}_e$ -versal (o que faz sentido devido ao próximo teorema desta seção). Um desdobramento versal de um germe de aplicação fornece um modelo para todas as possíveis singularidades que podem surgir com pequenas perturbações do germe de aplicação. Em particular, uma família $\mathcal{K}_e$ -versal dá informações sobre os possíveis contatos locais entre M e a família de esferas, como veremos aqui.

Em alguns casos, se faz necessário o uso de relações de equivalência mais finas que a dada pelo grupo $\mathcal{K}$. Por exemplo, quando estamos interessados em propriedades geométricas advindas do contato entre uma superfície M e não somente $\tilde{\mathcal{D}}_{(\mathbf{u},r)}^{-1}(0)$, mas também todos os conjuntos de níveis de $\tilde{\mathcal{D}}_{(\mathbf{u},r)}$ em uma vizinhança de 0, usamos a $\mathcal{R}^+$ -equivalência da aplicação de contato (Ver Proposição 2.1.5). Caso a dimensão do contradomínio de f seja ≥ 1 , usamos a $\mathcal{A}$ -equivalência, ou $\mathcal{A}_e$ -equivalência). Neste trabalho, o grupo a ser trabalhado será sempre um destes grupos $(\mathcal{K}, \mathcal{A}, \mathcal{R}^+)$ e, quando não especificado ao contrário, o grupo $\mathcal{R}^+$. Uma imersão genérica com respeito a $\mathcal{G}$ -equivalência é uma imersão tal que $\tilde{D}_g$ é $\mathcal{G}_e$ -versal.

Teorema 2.2.1 ([9] p. 91) *Para um conjunto aberto e denso de imersões de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, a família $\tilde{D}$ (respectivamente D) é localmente $\mathcal{K}_e$ -versal (respectivamente $\mathcal{R}^+$ -versal).*

Recorde que singularidades do tipo A_k e D_4 são dadas na Definição (1.1.6).

Teorema 2.2.2 ([9] p. 91) *Para uma superfície regular $M = g(U) \subset \mathbb{R}^3$, dada por uma imersão genérica, as $\mathcal{K}$ -singularidades da função $d_{\mathbf{u}}$ são do tipo $A_k, k = 1, 2, 3, 4$ ou D_4 .*

Usando o fato de que as funções $d_{\mathbf{u}}$ e $\tilde{d}_{(\mathbf{u},r)}$ tem, respectivamente, os mesmos $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{K}$ tipos de singularidades (Ver [9], p. 178), segue o seguinte resultado:

Teorema 2.2.3 ([9], p.178) *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$. Existe um conjunto residual de imersões $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para toda g nesse conjunto, a superfície $M = g(U)$ tem as seguintes propriedades: Para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, a função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ (resp. $\tilde{d}_{(\mathbf{u},r)}$) em qualquer ponto $q \in U$ tem somente singularidades locais do tipo A_1, A_2, A_3, A_4 ou D_4 . Além disso, as singularidades de $d_{\mathbf{u}}$ (resp. $\tilde{d}_{(\mathbf{u},r)}$) são $\mathcal{R}^+$ (resp. $\mathcal{K}$) versalmente desdobradas pela família D (resp. $\tilde{D}$).*

De agora em diante, diremos que uma superfície em $\mathbb{R}^3$ é **genérica** se ela é imagem de uma parametrização que seja uma imersão pertencente ao conjunto residual dado no Teorema 2.2.3.

Vamos agora analisar condições necessárias e suficientes para que cada uma das singularidades de $d_{(\mathbf{u},r)}$ dadas no Teorema 2.2.3 venha ocorrer, quando consideramos superfícies

genéricas. Suporemos, para isso, que a imersão esteja na forma de Monge na origem, isto é, $g(x, y) = (x, y, h(x, y))$, onde $h(x, y)$ é uma função diferenciável, $g(0, 0) = (0, 0, 0) = p$ e $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 0$. Além disso, suponha que $N(0, 0) = (0, 0, 1)$, as direções principais em p sejam os eixos coordenados e considere

$$h(x, y) = \kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \sum_{i+j=4} a_{ij}x^i y^j + \phi_5, \quad \phi_5 \in \mathcal{M}_2^5,$$

conforme seção [1.2.1](#)

Estamos focados, no momento, no estudo da $\mathcal{K}$ -singularidade da função $d_{(\mathbf{u}, r)}$, ou seja, no contato entre M e $S(\mathbf{u}, r)$. Vamos denotar, para efeito de simplificação, $d_{(\mathbf{u}, r)}$ apenas por $d_{\mathbf{u}}$ e, como estamos em uma superfície na forma de Monge na origem, $r = \|\mathbf{u}\|$, pois caso $r \neq \|\mathbf{u}\|$, não existe contato e $d_{\mathbf{u}}$ regular na origem.

Assim, a função distância ao quadrado é dada por

$$d_{\mathbf{u}}(x, y) = (x - u_1)^2 + (y - u_2)^2 + (h(x, y) - u_3)^2 - \|\mathbf{u}\|,$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Note que, se $u_1 \neq 0$ ou $u_2 \neq 0$, então $\frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial x}(0, 0) = -2u_1 \neq 0$ ou $\frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial y}(0, 0) = -2u_2 \neq 0$, de onde segue que $d_{\mathbf{u}}$ é submersão e, portanto, a superfície e a esfera são transversais. Neste caso, o contato é do tipo A_0 , já que, pela Observação [2.1.7](#), a aplicação de contato é regular. Por esse motivo, a partir de agora sempre consideraremos $\mathbf{u}$ da forma $\mathbf{u} = (0, 0, u_3)$, $u_3 \neq 0$.

Seja $j^2(d_{\mathbf{u}})(0, 0) = d_{20}x^2 + d_{02}y^2$ (note que o termo misto é nulo). Se d_{20} e d_{02} são não nulos, então $d_{\mathbf{u}}$ é 2-determinada e, portanto, $d_{\mathbf{u}}$ é singularidade A_1 . Como $d_{20} = \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial x^2}(0, 0) = 2 - 2u_3\kappa_1$ e $d_{02} = \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial y^2}(0, 0) = 2 - 2u_3\kappa_2$, concluímos que

$$d_{\mathbf{u}} \text{ é singularidade } A_1 \Leftrightarrow u_3 \neq \frac{1}{\kappa_i}, i = 1, 2.$$

No que segue, suporemos que $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\kappa_1}$ ($d_{20} = 0$), já que o outro caso segue analogamente. Prosseguindo, seja

$$j^3 d_{\mathbf{u}}(0) = d_{02}y^2 + d_{30}x^3 + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3.$$

Supondo $d_{02} \neq 0$ e escolhendo a mudança de coordenadas

$$(x, y) \mapsto (x, y - \frac{d_{21}x^2 + d_{12}xy + d_{03}y^2}{2d_{02}}),$$

segue que $j^3 f(0, 0) = d_{02}y^2 + d_{30}x^3$. Se $d_{30} \neq 0$, então $j^3 d_{\mathbf{u}}(0, 0)$ é 3-determinado (ver

Exemplo [1.1.13](#)), de onde segue que $d_{\mathbf{u}}$ é singularidade A_2 . Concluimos então que

$$d_{\mathbf{u}} \text{ é singularidade } A_2 \text{ em } 0 \Leftrightarrow d_{30} \neq 0.$$

Ainda supondo que $d_{20} = 0$ e $d_{02} \neq 0$, seguimos para o caso em que $d_{30} = 0$. Consideremos o 4-jato de $d_{\mathbf{u}}$ na origem:

$$j^4 d_{\mathbf{u}}(0, 0) = d_{02}y^2 + d_{30}x^3 + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{40}x^4 + d_{31}x^3y + d_{22}x^2y^2 + d_{13}xy^3 + d_{04}y^4.$$

Completando quadrados (para eliminar os termos que envolvem y , a menos do y^2), encontramos uma mudança de coordenadas que torna o 4-jato de $d_{\mathbf{u}}$ da seguinte maneira:

$$j^4 d_{\mathbf{u}}(0, 0) = d_{02}y^2 + (d_{40} - \frac{d_{21}^2}{4d_{02}})x^4.$$

Se $d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} \neq 0$, então $j^4 f(0, 0)$ é 4-determinado (Ver Exemplo [1.1.13](#)), de onde concluimos que $d_{\mathbf{u}}$ é singularidade A_3 em 0. Portanto

$$d_{\mathbf{u}} \text{ é singularidade } A_3 \Leftrightarrow d_{30} = 0 \text{ e } d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} \neq 0.$$

No caso em que $d_{30} = 0$ e $d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} = 0$, $d_{\mathbf{u}}$ é singularidade A_4 .

Para o caso em que $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{1}{\kappa_2}$, isto é, $d_{20} = d_{02} = 0$, daremos apenas as condições e não as demonstrações, porém as mesmas se encontram em [\[5\]](#). Neste caso, temos

$$j^3 d_{\mathbf{u}}(0, 0) = b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3.$$

e podemos fatorá-lo, considerando coeficientes complexos, da seguinte maneira:

$$j^3(d_{\mathbf{u}}(0, 0)) = (\alpha_1x + \beta_1y)(\alpha_2x + \beta_2y)(\alpha_3x + \beta_3y), \quad (2.1)$$

com o conjunto solução de $d_{\mathbf{u}}(x, y) = 0$ compreendendo três retas (reais ou complexas) pela origem. Dessa forma, $d_{\mathbf{u}}$ tem uma singularidade D_4 se, e somente se as três retas fatores de $j^3(d_{\mathbf{u}}(0, 0))$, dado em [2.1](#), são distintas. Se estas três retas são reais, então $d_{\mathbf{u}}$ é singularidade D_4^- , caso seja uma real e duas complexas conjugadas, D_4^+ . Considere o seguinte resultado:

Proposição 2.2.4 ([\[7\]](#)) *Seja $C(x, y) = b_0x^3 + 3b_1x^2y + 3b_2xy^2 + b_3y^3$ uma cúbica e $\delta(C) = 4(b_1^2 - b_0b_2)(b_2 - b_1b_3) - (b_0b_3 - b_1b_2)^2$. Se $\delta(C) > 0$, então existem 3 fatores reais na fatoração de $C(x, y)$. Se $\delta(C) < 0$, existe apenas um fator real e duas complexas distintas.*

Pode-se mostrar ainda que, nas condições do teorema acima, $\delta(C) = 0$ implica que existem dois fatores distintos, sendo um real e complexos repetidos ou três fatores repetidos. Assim, podemos afirmar que $j^3 d_{\mathbf{u}}(0)$ é uma singularidade D_4 se, e somente se

$\delta(j^3 f(0)) \neq 0$, isto é

$$d_{\mathbf{u}} \text{ é singularidade } D_4 \Leftrightarrow \frac{4}{27}(b_1 - 3b_0b_2)(b_2 - b_1b_3) - (b_0b_3 - \frac{1}{9}b_1b_2)^2 \neq 0.$$

O caso em que $\delta(j^3 f(0)) = 0$ necessita de mais ferramentas, porém não aparece quando se trata de tipos de contato entre superfícies genéricas e esferas e, por isso, não faremos aqui.

Podemos, portanto, com esta análise, concluir o seguinte teorema:

Teorema 2.2.5 *Seja $M = s(U)$ uma superfície genérica dada na forma de Monge na origem por $s(x, y) = (x, y, h(x, y))$ e $\mathbf{u} = (0, 0, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Então, considerando*

$$j^4(d_{\mathbf{u}}(0, 0)) = d_{20}x^2 + d_{02}y^2 + d_{30}x^3 + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3 + \sum_{i+j=4} d_{ij}x^i y^j,$$

$d_{\mathbf{u}}$ tem, na origem, uma singularidade:

- (i) $A_1 \Leftrightarrow u_3 \neq \frac{1}{\kappa_1}$ e $u_3 \neq \frac{1}{\kappa_2}$;
- (ii) $A_2 \Leftrightarrow u_3 = \frac{1}{\kappa_1}$ e $d_{30} \neq 0$;
- (iii) $A_3 \Leftrightarrow u_3 = \frac{1}{\kappa_1}$, $d_{30} = 0$ e $d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} \neq 0$;
- (iv) $A_4 \Leftrightarrow u_3 = \frac{1}{\kappa_1}$, $d_{30} = 0$ e $d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} = 0$;
- (v) $D_4 \Leftrightarrow u_3 = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{1}{\kappa_2}$,

onde $\kappa_i, i = 1, 2$ são as curvaturas principais da superfície.

Em [9], p. 180, outras equivalências para os casos acima são dadas pelos coeficientes da expansão de Taylor de $h(x, y)$, em vez de $d_{\mathbf{u}}(x, y)$.

Pelo teorema acima, um ponto $p \in S$ é umbílico se, e somente se, a função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$, com $\mathbf{u} = s(q) + \frac{1}{\kappa_i}N(q)$, $i = 1$ ou 2 , tem uma singularidade D_4 e, fora de pontos umbílicos, as singularidades que ocorrem em $d_{\mathbf{u}}$ são do tipo A_k , $k = 1, 2, 3$ ou 4 .

Veremos no próximo capítulo que, dado $q \in U$, $d_{\mathbf{u}}$ tem uma singularidade degenerada em q , isto é, $d_{\mathbf{u}}$ tem uma singularidade A_k , $k = 2, 3, 4$, ou D_4 , se e somente se $\mathbf{u}$ pertence ao conjunto focal da superfície M , o qual iremos definir.

Conjunto focal

O objetivo deste trabalho é o estudo do conjunto focal de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. Para um estudo similar para curvas regulares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ indicamos, por exemplo, o livro [5] ou a dissertação de mestrado [8]. Quanto à estrutura local do conjunto focal de curvas planas, pode ser mostrado que, em geral, este é difeomorfo à uma reta ou a uma cúspide ordinária (isto é, a curva parametrizada por (t^2, t^3)). Para curvas espaciais, seu conjunto focal é, em geral, difeomorfo a um plano, a uma aresta cuspidal ou a um rabo de andorinha.

As propriedades geométricas do conjunto focal para superfícies regulares foram estudadas por Porteous e sintetizadas em seu livro “Geometric differentiation. For the Intelligence of Curves and Surfaces”, ([14]). Morris também faz um estudo sobre tal conjunto em [13]. O que faremos neste capítulo é considerar os principais resultados destes autores e reescrevê-los, em uma linguagem moderna, usando também como base a abordagem que [9] faz sobre o assunto. Além disso, em [15], os autores estudam a geometria de frentes de ondas. Vamos mostrar que o conjunto focal pode ser parametrizado por uma frente de onda e então, a partir dos resultados de [15], vamos estudar outras propriedades do conjunto focal, além daquelas apresentadas por Porteous e Morris.

Em todo este capítulo, S denotará uma superfície regular genérica imersa em $\mathbb{R}^3$, no sentido do Teorema 2.2.3, com $S = s(U)$, onde $s : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão e $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, com coordenadas (u, v) . Além disso, salvo menção ao contrário, I e II são a primeira e segunda formas fundamentais em S , respectivamente, assim como seus coeficientes E, F, G e l, m, n e a aplicação normal de Gauss N tal que $\{s_u(q), s_v(q), N(q)\}$ seja uma base positiva para $\mathbb{R}^3$.

3.1 Conjunto focal de uma superfície regular

O conjunto focal de uma curva regular plana (mais conhecido com evoluta) é o lugar geométrico dos seus centros de curvatura. Nesta seção, definiremos o conjunto focal de

uma superfície regular, o qual segue a mesma ideia de uma evoluta de uma curva plana, isto é, o conjunto focal de uma superfície é o lugar geométrico dos centros de curvaturas da superfície, em outras palavras, o lugar geométrico dos centros das esferas que melhor aproximam a superfície em cada ponto.

Definição 3.1.1 *Suponha que S não tem pontos parabólicos. O conjunto focal (ou evoluta) de S é o subconjunto $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ de $\mathbb{R}^3$, onde*

$$\mathcal{F}_i = \{p + \frac{1}{\kappa_i(p)}N(p); p \in S\}, i = 1, 2,$$

com $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$ denotando as curvaturas principais mínima e máxima de S em p , respectivamente.

Observe que, como S não possui pontos parabólicos, então todo ponto umbílico de S é não chato, ou seja, as curvaturas principais de S em um ponto umbílico são não nulas.

Exemplo 3.1.2 Considere $S = s(U)$ contida na esfera de raio 1 e centro na origem, com $s(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$. Assim, todos os pontos de S são umbílicos não chatos. O conjunto focal de S é apenas a origem. De fato, fazendo os cálculos, chegamos que $N(u, v) = s(u, v)$ e $\kappa_1 = \kappa_2 \equiv -1$ e, portanto, $\mathcal{F}$ é dada pela imagem da aplicação $\psi(u, v) = s(u, v) + \frac{1}{-1}N(u, v) = s(u, v) - s(u, v) = 0$. $\square$

Exemplo 3.1.3 Considere o parabolóide hiperbólico S parametrizado por $f(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, se calcularmos seu conjunto focal, uma das suas folhas da superfície focal é parametrizada por

$$\psi(u, v) = \left(u - \frac{uz^2}{C}, v + \frac{vz^2}{C}, u^2 - v^2 + \frac{z^2}{2C}\right),$$

onde $C = 2(v^2 - u^2) - \sqrt{4(v^2 + u^2) + z^2}$ e $z = \|N(u, v)\| = \sqrt{4(u^2 + v^2) + 1}$. O outra folha também é parametrizada do mesmo modo, onde $C = 2(v^2 - u^2) + \sqrt{4(v^2 + u^2) + z^2}$. O conjunto focal $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ estão representados na Figura [3.1](#).

Chamamos $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ de **folhas** do conjunto focal $\mathcal{F}$. Se $p \in S$ é um ponto não umbílico, então existem dois pontos focais distintos correspondentes a p , um em cada folha de $\mathcal{F}$. Estes pontos focais coincidem quando p é um ponto umbílico, ou seja, $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ se intersectam neste ponto. Segue da definição de $\mathcal{F}$ que, em uma vizinhança de um ponto elíptico, as duas folhas de $\mathcal{F}$ estão do mesmo lado do plano tangente a S naquele ponto e, em um ponto hiperbólico, em lados opostos.

Nosso objetivo é estudar a geometria local do conjunto focal associado a S . Este estudo não pode ser feito satisfatoriamente usando a Geometria Diferencial clássica, uma vez que

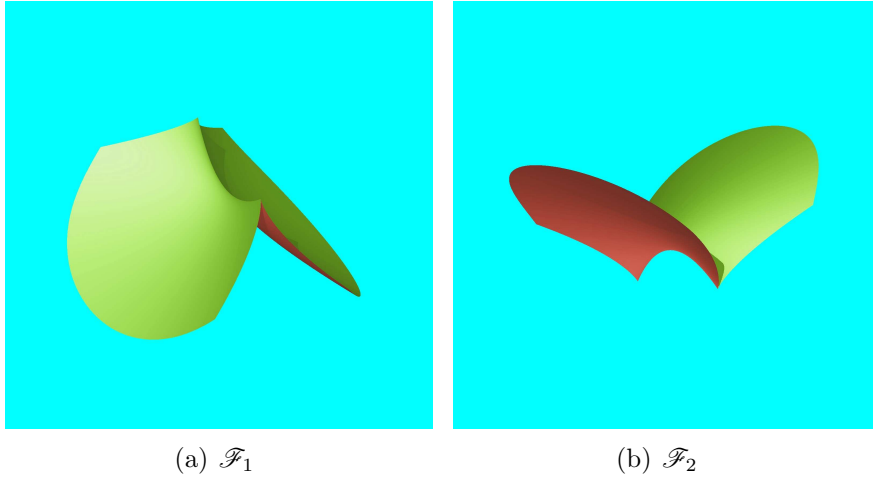


Figura 3.1: As duas folhas do conjunto focal do parabolóide hiperbólico, Exemplo [3.1.3](#).

$\mathcal{F}$ pode não ser uma superfície regular. Assim, ferramentas da Teoria de Singularidades se tornam necessárias.

Fora dos pontos umbílicos, o conjunto focal é localmente a união desconexa das imagens das aplicações suaves $\psi, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dadas por:

$$\psi(u, v) = s(u, v) + \frac{1}{\kappa_1(u, v)} N(u, v) \quad (3.1)$$

e

$$\varphi(u, v) = s(u, v) + \frac{1}{\kappa_2(u, v)} N(u, v). \quad (3.2)$$

Chamaremos o conjunto $\mathcal{F}_1 = \psi(U)$ de **folha vermelha do conjunto focal** e $\mathcal{F}_2 = \varphi(U)$ de **folha azul do conjunto focal**.

Também daremos cores para as linhas de curvaturas de S . Chamaremos de **linhas de curvatura vermelhas** as curvas sobre S cujas tangentes são direções principais associadas à curvatura mínima κ_1 , e de **linhas de curvatura azuis** as curvas cujas tangentes são direções principais associadas à curvatura máxima κ_2 .

Em pontos umbílicos, as aplicações ψ e φ podem não ser diferenciáveis, uma vez que as funções κ_1 e κ_2 não são necessariamente diferenciáveis nestes pontos.

Sabemos que, se todos os pontos de uma superfície S forem umbílicos não chatos, então as curvaturas principais de S são iguais (e não nulas) em todos os pontos e S está contida em uma esfera. Além disso, o Exemplo [3.1.2](#) pode ser generalizado:

Proposição 3.1.4 ([\[9\]](#), p 31.) *Suponha que S não tem pontos parabólicos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *S está contida em uma esfera.*
- (b) *O conjunto focal $\mathcal{F}$ de S é um ponto.*

Demonstração: Se S está contida em uma esfera, então as curvaturas principais são constantes e iguais a, digamos, $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. Assim, $\mathcal{F}$ é dado pela imagem de

$$\psi = \varphi = s + \frac{1}{k}N.$$

As derivadas parciais de ψ são nulas, para todo ponto $q \in U$, assim como as de φ . Logo ψ e φ são aplicações constantes, o que implica que $\mathcal{F}$ é um ponto.

Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ é um ponto, digamos $a \in \mathbb{R}^3$, então $\psi(q) = \varphi(q) = a, \forall q \in U, i = 1, 2$. Logo,

$$\frac{1}{\kappa_i}(q) = -\langle s(q) - a, N(q) \rangle, i = 1, 2$$

é uma função suave e, conseqüentemente, $\kappa_1(q) = \kappa_2(q) = k(q), \forall q \in U$. Recordemos que N_u e N_v pertencem a $T_p S$, logo

$$N_u = \alpha_1^1 s_u + \alpha_1^2 s_v \quad \text{e} \quad N_v = \alpha_2^1 s_u + \alpha_2^2 s_v,$$

onde $\alpha_i^j \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2$.

Diferenciando ψ , temos

$$\begin{aligned} \psi_u &= s_u + \frac{1}{\kappa} N_u - \frac{\kappa_u}{\kappa^2} N = s_u + \frac{1}{\kappa} (\alpha_1^1 s_u + \alpha_1^2 s_v) - \frac{\kappa_u}{\kappa^2} N = \\ &= \frac{1}{\kappa} (\kappa + \alpha_1^1) s_u + \frac{1}{\kappa} \alpha_1^2 s_v - \frac{\kappa_u}{\kappa^2} N, \end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$\psi_v = \frac{1}{\kappa} \alpha_2^1 s_u + \frac{1}{\kappa} (\kappa + \alpha_2^2) s_v - \frac{\kappa_v}{\kappa^2} N.$$

Como ψ é contante, cada derivada parcial deve ser nula. Logo, como as derivadas parciais foram dadas na base $\{s_u, s_v, N\}$, cada coordenada deve ser nula. Em particular $\kappa_u(q) = \kappa_v(q) = 0, \forall q \in U$, o que implica que κ é uma função constante e, portanto, S está contida em uma esfera. $\square$

Pontos umbílicos não chatos de S podem ser detectados pela família de funções distância ao quadrado

$$D : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$D(q, \mathbf{u}) = \langle s(q) - \mathbf{u}, s(q) - \mathbf{u} \rangle = \|s(q) - \mathbf{u}\|^2, \quad (3.3)$$

conforme veremos a seguir.

Fixado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, obtemos a função

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{u}} : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto d_{\mathbf{u}}(q) = D(q, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Temos:

$$\frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial u}(q) = 2\langle s_u(q), s(q) - \mathbf{u} \rangle \text{ e } \frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial v}(q) = 2\langle s_v(q), s(q) - \mathbf{u} \rangle. \quad (3.5)$$

Logo, q é um ponto singular de $d_{\mathbf{u}}$ se e somente se $s(q) - \mathbf{u}$ é um vetor normal à S em $s(q)$, ou seja, se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = s(q) + \lambda N(q)$.

Seja $\mathbf{u} = s(q) + \lambda N(q)$, com $s(q) = p$. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial u^2}(q) &= 2(\langle s_{uu}(q), s(q) - \mathbf{u} \rangle + \langle s_u(q), s_u(q) \rangle) = 2(-\lambda l(q) + E(q)) \\ \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial u \partial v}(q) &= 2(\langle s_{uv}(q), s(q) - \mathbf{u} \rangle + \langle s_u(q), s_v(q) \rangle) = 2(-\lambda m(q) + F(q)) \\ \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial v^2}(q) &= 2(\langle s_{vv}(q), s(q) - \mathbf{u} \rangle + \langle s_v(q), s_v(q) \rangle) = 2(-\lambda n(q) + G(q)). \end{aligned}$$

Logo, a matriz Hessiana de $d_{\mathbf{u}}$ em q é:

$$\text{Hess}(d_{\mathbf{u}})(q) = 2 \begin{pmatrix} -\lambda l(q) + E(q) & -\lambda m(q) + F(q) \\ -\lambda m(q) + F(q) & -\lambda n(q) + G(q) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Proposição 3.1.5 ([9], p. 35) *Seja $p = s(q)$ um ponto não parabólico da superfície regular $S = s(U)$ e seja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Então*

- (a) *O ponto q é singular de $d_{\mathbf{u}}$ se e somente se $\mathbf{u} = s(q) + \lambda N(q)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- (b) *O ponto q é singular degenerado de $d_{\mathbf{u}}$ se e somente se $\mathbf{u} = \psi(q)$ ou $\mathbf{u} = \varphi(q)$, isto é, $\mathbf{u}$ pertence ao conjunto focal.*
- (c) *O ponto p é umbílico (não chato) de S se e somente se o posto de $\text{Hess}(d_{\mathbf{u}})(q)$ é zero.*

Demonstração: (a) A primeira afirmação segue das equações (3.5).

(b) O ponto q é singular degenerado de $d_{\mathbf{u}}$ se e somente se $\text{posto}(\text{Hess}(d_{\mathbf{u}}(q))) < 2$. Para facilitar as contas, suponhamos $q = 0$ e que s seja uma parametrização local em $p = s(q) = 0$ na forma de Monge, isto é, $s(x, y) = (x, y, h(x, y))$, onde $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $h(0, 0) = h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0$. Além disso, com uma mudança de coordenadas adequada, podemos supor que as direções principais sejam paralelas aos eixos coordenados e, assim, $E = G = 1$, $F = m = 0$, $l = \kappa_1$ e $n = \kappa_2$. Com essas

hipóteses, por (3.6), a matriz Hessiana de $d_{\mathbf{u}}$ é dada por

$$Hess(d_{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} -\lambda\kappa_1 + 1 & 0 \\ 0 & -\lambda\kappa_2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o posto da matriz hessiana é menor que 2 se e somente se $\lambda = \frac{1}{\kappa_1}$ ou $\lambda = \frac{1}{\kappa_2}$, ou seja, se e somente se $\mathbf{u} = \psi(q)$ ou $\mathbf{u} = \varphi(q)$.

(c) Basta observar a matriz Hessiana de $d_{\mathbf{u}}$ novamente. Seu posto é zero se e somente se $\lambda = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{1}{\kappa_2}$, isto é, se e somente se $\mathbf{u} = \psi(q)$ ou $\mathbf{u} = \varphi(q)$ e p é um ponto umbílico de S . $\square$

Podemos determinar os modelos do conjunto focal para superfícies genéricas, a menos de difeomorfismo, ao considerar o contato das superfícies com esferas. Este é medido, como vimos no capítulo anterior, pelas singularidades dos membros da família de funções distância ao quadrado $D : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada em (3.3). O seguinte teorema fornece uma relação importante entre o conjunto focal e a família D .

Proposição 3.1.6 *O conjunto focal de uma superfície S na vizinhança de um ponto $p = s(q) \in S$ é o conjunto bifurcação da família D .*

Demonstração: Pela definição, temos que $u \in \mathbb{R}^3$ pertence ao conjunto bifurcação de D se e somente se existe $q \in U$ tal que q é um ponto singular não degenerado de $d_{\mathbf{u}}$. Pela Proposição (3.1.5), isto ocorre se e somente se $\mathbf{u}$ pertence ao conjunto focal. $\square$

A partir da proposição anterior, podemos, com mais alguns resultados, concluir sobre a estrutura local do conjunto focal de uma superfície S , isto é, podemos obter os conjuntos focais de superfícies genéricas, a menos de difeomorfismos, o que fazemos na próxima seção.

3.2 Modelos do conjunto focal

Pelos Teoremas (2.2.1) e (2.2.3), a família D é localmente $\mathcal{R}^+$ -versal, isto é, D é deformação $\mathcal{R}^+$ -versal de $d_{\mathbf{u}}$, para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ fixo. Assim, conforme a Observação (1.1.24), segue da Proposição (3.1.6) que o conjunto focal de uma superfície genérica em uma vizinhança de um ponto $p = s(q)$ de S é, a menos de difeomorfismo, o conjunto bifurcação de uma das deformações dadas no Teorema (1.1.21) (consideradas sempre a 3 parâmetros), dependendo apenas do tipo de singularidade de $d_{\mathbf{u}}$ em q , onde $\mathbf{u} = \psi(q)$. No que segue, faremos o estudo do conjunto focal para cada uma das singularidades possíveis para $d_{\mathbf{u}}$, a saber, A_2, A_3, A_4, D_4^+ e D_4^- .

1º caso: Suponha $d_{\mathbf{u}}$ uma singularidade A_2 . Então D é equivalente a deformação a 3 parâmetros dada por

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) = x_1^3 + u_1 x_1 + x_2^2.$$

Como $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_1} = 3x_1^2 + u_1$ e $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_2} = 2x_2$, o conjunto catástrofe de $\mathcal{D}$ é o conjunto

$$C_{\mathcal{D}} = \{(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 ; u_1 = -3x_1^2 \text{ e } x_2 = 0\}.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, o conjunto bifurcação de $\mathcal{D}$ é dado por

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{D}} &= \{(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R}^2, 0) ; u_1 = -3x_1^2, x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0\} \\ &= \{(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R}^2, 0) ; u_1 = 0, \}, \end{aligned}$$

isto é, $B_{\mathcal{D}}$ é um plano, que é difeomorfo a uma *superfície regular* (Figura 3.2(a)).

2º caso: Suponha $d_{\mathbf{u}}$ uma singularidade A_3 . Então D é equivalente a deformação a três parâmetros

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) = -x_1^4 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1 + x_2^2.$$

Como $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_1} = -4x_1^3 + 2u_2 x_1 + u_1$ e $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_2} = 2x_2$, o conjunto catástrofe de $\mathcal{D}$ é dado por

$$C_{\mathcal{D}} = \{(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 ; u_1 = 4x_1^3 - 2u_2 x_1 \text{ e } x_2 = 0\}.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 + 2u_2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos concluir que o conjunto bifurcação de $\mathcal{D}$ é dado por

$$B_{\mathcal{D}} = \{(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R}^2, 0) ; 6u_1^2 + u_2^3 = 0\},$$

isto é, $B_{\mathcal{D}}$ é imagem da aplicação dada por $f(u, v) = (v^3, -6v^2, u)$, que é uma *aresta cuspidal* (Figura 3.2(b)).

3º caso: Suponha $d_{\mathbf{u}}$ uma singularidade A_4 . Então D é $\mathcal{R}^+$ -equivalente à deformação a 3 parâmetros

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) = x_1^5 + u_3 x_1^3 + u_2 x_1^2 + u_1 x_1 + x_2^2.$$

Temos $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_1} = 5x_1^4 + 3u_3x_1^2 + 2u_2x_1 + u_1$ e $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_2} = 2x_2$. Assim

$$C_{\mathcal{D}} = \{(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3); u_1 = -5x_1^4 - 3u_3x_1^2 - 2u_2x_1 \text{ e } x_2 = 0\}$$

e, como

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} 20x_1^3 + 6u_3x_1 + 2u_2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

o conjunto bifurcação de $\mathcal{D}$ é dado por

$$B_{\mathcal{D}} = \{(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R}^3, 0) ; \exists x_1 \in \mathbb{R}; u_1 = -5x_1^4 - 3u_3x_1^2 - 2u_2x_1 \text{ e } u_2 = -10x_1^3 - 3u_3x_1\}.$$

Fazendo u_1 e u_2 em função de u_3 e x_1 , podemos concluir que $B_{\mathcal{D}}$ pode ser parametrizada por $s(x_1, u_3) = (15x_1^4 + 3u_3x_1^2, -10x_1^3 - 3u_3x_1, u_3)$, que é um *rabo de andorinha* em $\mathbb{R}^3$ (Figura 3.2 (c)).

4º caso: Suponha que $d_{\mathbf{u}}$ seja uma singularidade D_4^- . Para facilitar os cálculos, vamos tomar uma deformação versal diferente da dada no Teorema 1.1.21, dada por

$$\mathcal{D}(x, u) = \frac{1}{3}x_1^3 - x_1x_2^2 + u_3(x_1^2 + x_2^2) + u_2x_2 + u_1x_1.$$

Temos então

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_1} = x_1^2 - x_2^2 + 2u_3x_1 + u_1,$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_2} = -2x_1x_2 + 2u_3x_2 + u_2,$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, x_3, u_1) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2u_3 & -2x_2 \\ -2x_2 & -2x_1 + 2u_3 \end{bmatrix},$$

de onde segue que

$$C_{\mathcal{D}} = \{(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3); u_1 = -x_1^2 + x_2^2 - 2u_3x_1, \text{ e } u_2 = 2x_1x_2 - 2u_3x_2\}$$

e

$$B_{\mathcal{D}} = \{(u_1, u_2, u_3); u_1 = -x_1^2 + x_2^2 - 2u_3x_1, u_2 = 2x_1x_2 - 2u_3x_2 \text{ e } u_3^2 = x_1^2 + x_2^2, \text{ com } (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2, 0)\}.$$

Essa singularidade é chamada **elíptica umbílica** e seu conjunto bifurcação é chamado **pirâmide** (Fig. 3.2 (d)).

5º caso: Suponha $d_{\mathbf{u}}$ uma singularidade D_4^+ . Então D é $\mathcal{R}^+$ -equivalente à deformação a 3-parâmetros

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3) = x_1^3 + x_2^3 + u_3 x_1 x_2 + u_2 x_2 + u_1 x_1$$

e os conjuntos $C_{\mathcal{D}}$ e $B_{\mathcal{D}}$ são dados por

$$\begin{aligned} C_D &= \{(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3); u_1 = -3x_1^2 - u_3 x_2, u_2 = -3x_2^2 - u_3 x_1\}, \text{ e} \\ B_D &= \{(u_1, u_2, u_3); u_1 = -3x_1^2 - u_3 x_2, u_2 = -3x_2^2 - u_3 x_1, \\ &\quad \text{e } u_3^2 = 36x_1 x_2, (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2, 0)\}. \end{aligned}$$

Essa singularidade é chamada **elíptica hiperbólica** e seu conjunto bifurcação “bolsa” (Figura 3.2 (e)).

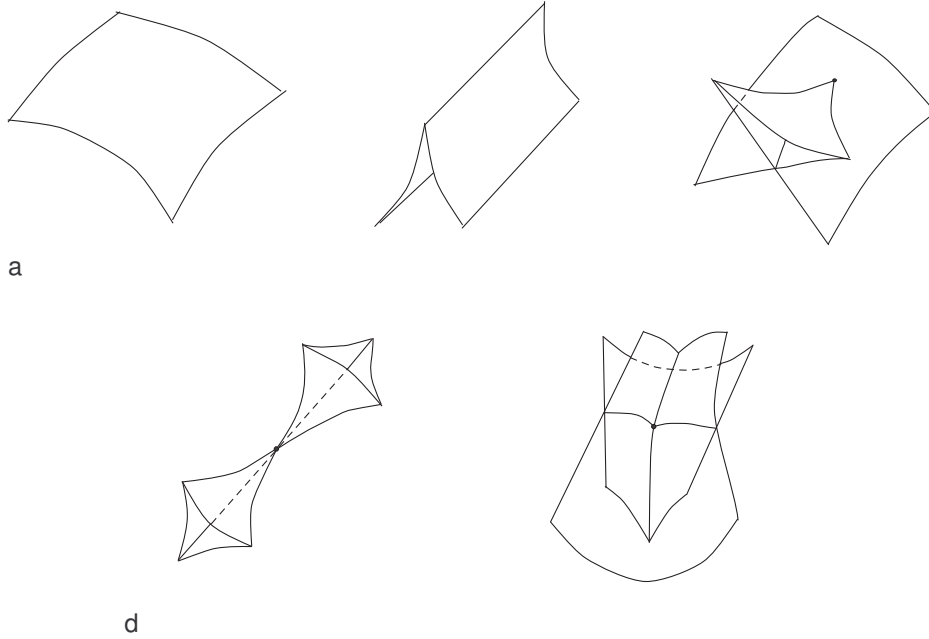


Figura 3.2: Modelos do conjunto focal de uma superfície genérica em $\mathbb{R}^3$, a menos de difeomorfismos, de acordo com as singularidades de $d_{\psi(q)}$. As figuras (a), (b) e (c) modelam os conjuntos focais $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$. As figuras (d) e (e) modelam $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, sendo o ponto de interseção um ponto umbílico.

Pode ser mostrado (ver [9], p.14) que as combinações genéricas para o par $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ são $(A_2, A_2), (A_2, A_3), (A_2, A_4)$ e (A_3, A_3) .

3.3 Singularidades do conjunto focal

Conhecemos, até agora, os modelos do conjunto focal de uma superfície genérica $S = s(U)$ sem pontos parabólicos.

Neste seção, introduzimos alguns conceitos necessários para o estudo da geometria do conjunto focal e, daqui em diante, faremos o estudo somente para a folha vermelha $\mathcal{F}_1$ do conjunto focal, imagem da aplicação ψ , dada por (3.1), uma vez que, para a folha azul, os resultados seguem de modo análogo.

Porteous ([14]) definiu ponto de ridge para investigar singularidades do conjunto focal de uma superfície regular.

Definição 3.3.1 *Um ponto $p = s(q) \in S$ é dito um **ponto de ridge** se a função distância ao quadrado $d_{\psi(q)}$ tem uma singularidade A_3 em q . O fecho do conjunto dos pontos de ridge é chamado de **ridge** de S .*

Denotamos por

$$\Sigma = \{q \in U ; q \text{ é um ponto singular de } \psi\}$$

o conjunto dos pontos singulares de ψ . O subconjunto $\psi(\Sigma)$ de $\mathcal{F}_1$ é chamado de **rib**.

Observação 3.3.2 (i) Se $q \notin \Sigma$, então $\mathcal{F}_1$ é localmente uma superfície regular (parametrizada por ψ) e, portanto, a função distância ao quadrado $d_{\psi(q)}$ tem uma singularidade A_2 em q . Se $q \in \Sigma$, então ψ é singular em q e $d_{\psi(q)}$ tem singularidade A_3, A_4 ou D_4 em q . Assim, a pré-imagem por s dos pontos de ridge está contida em Σ , ou seja, se $p = s(q)$ é um ponto de ridge, então $q \in \Sigma$. De agora em diante, passaremos a chamar o conjunto focal de S de **superfície focal**.

- (ii) Se supormos que S não contém pontos umbílicos nem parabólicos e $p = s(q)$ pertence à ridge de S , então a superfície focal vermelha é difeomorfa a uma aresta cuspidal, quando $d_{\psi(q)}$ é singularidade A_3 em q , ou a um rabo de andorinha, quando $d_{\psi(q)}$ é singularidade A_4 em q . Portanto, o conjunto singular Σ é localmente uma curva regular (chamada de **curva singular**), pelos Exemplos 1.3.3 e 1.3.5. Além disso, como as singularidades A_4 são isoladas, $s(\Sigma)$ coincide com a ridge e, uma vez que s é uma imersão, a ridge também é uma curva regular suave sobre S (ver Figura 3.3).
- (iii) Dado q um ponto singular de ψ , se ψ é uma aresta cuspidal em q (resp. um rabo de andorinha) chamaremos, com abuso de linguagem, o ponto $\psi(q)$ de uma aresta cuspidal (resp. um rabo de andorinha).

□

Todos estes conjuntos definidos até agora, são chamados de vermelhos, já que têm relação com $\psi(U) = \mathcal{F}_1$. De modo análogo define-se ridge, rib e a curva singular azul, relacionados a folha azul da superfície focal $\mathcal{F}_2 = \varphi(U)$. No que segue, salvo menção ao contrário, sempre estaremos nos referindo aos vermelhos.

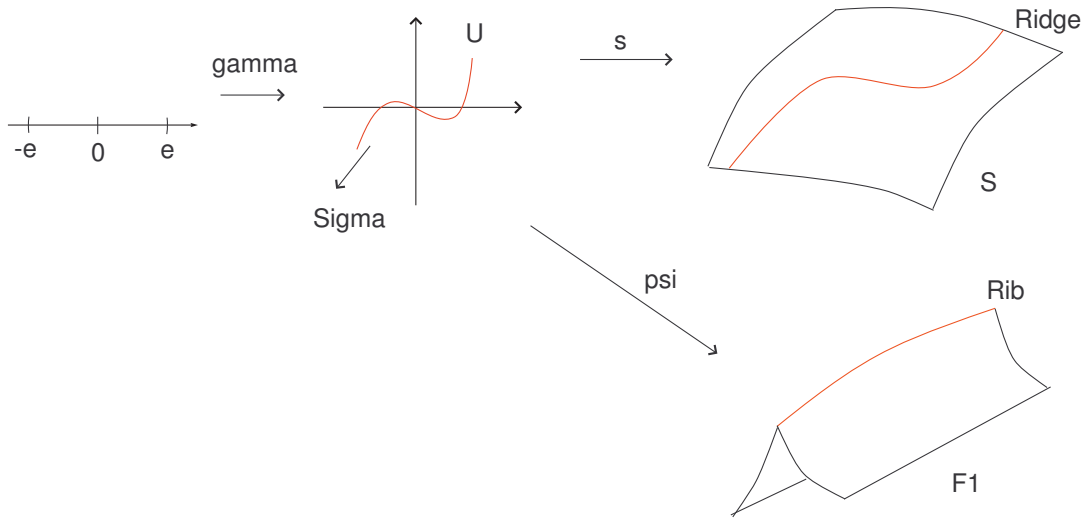


Figura 3.3: Curvas singular, ridge e rib.

Seja $q \in U$. Se $q \notin \Sigma$, então ψ é uma imersão em q . Neste caso, o plano tangente à $\mathcal{F}_1$ em $\psi(q)$ é denotado por $T_{\psi(q)}\mathcal{F}_1$. Se $q \in \Sigma$ e $d\psi_q$ tem posto 1, então $d\psi_q(\mathbb{R}^2)$ é uma reta, e temos assim a reta tangente à $\mathcal{F}_1$ em $\psi(q)$, denotada também por $T_{\psi(q)}\mathcal{F}_1$.

3.4 Parametrização especial

Recorde da Proposição [1.2.3](#) que, se $p \in S$ é um ponto não umbílico, então existe uma parametrização s de S em uma vizinhança de p tal que as curvas coordenadas de s coincidem com as linhas de curvatura de S . Quando supormos tal parametrização, diremos que S está parametrizada **de forma especial** ou que s é uma **parametrização local especial** de S .

No estudo da geometria de uma superfície S e sua superfície focal, quando as propriedades envolvidas não dependerem de sua parametrização, muitas vezes é útil tomar a parametrização s de forma especial, desde que esteja na hipótese que não há pontos umbílicos em S . Morris, em [\[13\]](#), sempre supõe tal parametrização, assim como [\[9\]](#). Porteous ([\[14\]](#)) porém apresenta seus resultados para uma parametrização qualquer.

Suporemos, nesta seção, que S não tem pontos umbílicos e está parametrizada de forma especial. Explicitaremos então algumas propriedades e vantagens desta parametrização. Ao final, concluímos que ψ e φ são frentes de onda.

Como as linhas de curvatura de S são as curvas coordenadas de s , vamos supor que aquelas associadas a κ_1 são as curvas coordenadas paralelas ao eixo- u e as associadas a κ_2 as paralelas ao eixo- v , isto é, as curvas coordenadas dadas por $t \mapsto s(t, v)$, v fixo, são as linhas de curvatura vermelhas e as curvas dadas por $t \mapsto s(u, t)$, u fixo, são as linhas de curvatura azuis.

Dado

$$\psi(u, v) = s(u, v) + \frac{1}{\kappa_1(u, v)} N(u, v)$$

como em (3.1), as derivadas parciais de ψ são dadas por

$$\begin{aligned}\psi_u &= s_u + \frac{1}{\kappa_1} N_u - \frac{(\kappa_1)_u}{\kappa_1^2} N = s_u + \frac{1}{\kappa_1} (-\kappa_1 s_u) - \frac{(\kappa_1)_u}{\kappa_1^2} N = -\frac{(\kappa_1)_u}{\kappa_1^2} N \quad \text{e} \\ \psi_v &= s_v + \frac{1}{\kappa_1} N_v - \frac{(\kappa_1)_v}{\kappa_1^2} N = s_v + \frac{1}{\kappa_1} (-\kappa_2 s_v) - \frac{(\kappa_1)_v}{\kappa_1^2} N = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1} s_v - \frac{(\kappa_1)_v}{\kappa_1^2} N,\end{aligned}$$

onde usamos as identidades dadas em (1.8). Ou seja, dado $q \in U$, temos:

$$\psi_u(q) = -\frac{1}{\kappa_1^2(q)} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}(q) N(q) \quad (3.7)$$

e

$$\psi_v(q) = \frac{\kappa_1(q) - \kappa_2(q)}{\kappa_1(q)} s_v(q) - \frac{1}{\kappa_1^2(q)} \frac{\partial \kappa_1}{\partial v}(q) N(q). \quad (3.8)$$

Portanto,

$$\Sigma = \{q \in U; \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}(q) = 0\}, \quad (3.9)$$

uma vez que supomos que não há pontos umbílicos em U e, por isso, ψ_v não se anula em U . Assim, os pontos singulares de ψ são de posto 1 e, portanto, dado $q \in \Sigma$, temos que $T_{\psi(q)}\mathcal{F}_1$ é uma reta paralela à $\psi_v(q)$.

Como $\{\frac{s_u}{\sqrt{E}}(q), \frac{s_v}{\sqrt{G}}(q), N(q)\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ em todo $q \in U$, então $N \times s_v = -\sqrt{G} \frac{s_u}{\sqrt{E}}$. Assim, de (3.7) e (3.8), temos:

$$\psi_u \times \psi_v = -\frac{1}{\kappa_1^2} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)}{\kappa_1} (N \times s_v) = \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)}{\kappa_1^3} \sqrt{G} \right) \frac{s_u}{\sqrt{E}}. \quad (3.10)$$

Note que, nos pontos singulares de ψ , o vetor $\psi_u \times \psi_v$ é nulo. Porém, dado $q \notin \Sigma$, $\mathcal{F}_1$ é localmente uma superfície regular parametrizada por ψ e temos o vetor unitário normal ao plano tangente $T_{\psi(q)}\mathcal{F}_1$:

$$N_\psi(q) = \frac{\psi_u \times \psi_v}{\|\psi_u \times \psi_v\|}(q) = \text{sgn}(\lambda(q)) \frac{s_u}{\sqrt{E}}(q), \quad (3.11)$$

onde

$$\lambda(q) = \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}(q) \frac{\kappa_1(q) - \kappa_2(q)}{\kappa_1^3(q)} \sqrt{G(q)}, \quad (3.12)$$

e $\text{sgn}(\lambda(q)) = +1$, quando $\lambda(q) > 0$, e $\text{sgn}(\lambda(q)) = -1$, quando $\lambda(q) < 0$. Podemos assim definir a função suave

$$\lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por (3.12), que veremos ser bastante útil no que segue. Note que $\lambda(q) = 0, \forall q \in \Sigma$

e, como $\sqrt{G}$ é sempre não nulo e estamos considerando que não há pontos umbílicos em U , o conjunto singular de ψ coincide com o conjunto $\{q \in U; \lambda(q) = 0\}$, isto é,

$$\Sigma = \lambda^{-1}(0). \quad (3.13)$$

A equação (3.11) inspira a definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \nu : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ q &\mapsto \frac{s_u(q)}{\|s_u(q)\|} = \frac{s_u(q)}{\sqrt{E(q)}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Afirmamos que ν é um campo de vetores unitários normais à $\mathcal{F}_1$. De fato, se $q \notin \Sigma$, então a afirmação segue de (3.11), uma vez que

$$N_\psi(q) = \text{sgn}(\lambda(q))\nu(q).$$

Por outro lado, se $q \in \Sigma$, então como a reta $T_{\psi(q)}\mathcal{F}_1$ é paralela à $\psi_v(q)$, basta observar que $\langle \psi_v(q), \nu(q) \rangle = 0$, o que ocorre devido a (3.8).

Além disso, $\nu(q)$ é direção principal unitária de S associada a $\kappa_1(q)$, ou seja, a direção normal da folha vermelha da superfície focal (associada a κ_1) é a direção (tangente) principal da superfície S associada a κ_1 .

Da mesma maneira, considerando

$$\varphi(u, v) = s(u, v) + \frac{1}{\kappa_2(u, v)}N(u, v)$$

dado em (3.2), obtemos

$$\bar{\nu}(q) = \frac{s_v(q)}{\sqrt{G(q)}}, \quad (3.15)$$

onde $\bar{\nu}(q)$ é um vetor unitário normal a $\mathcal{F}_2$ em q , o qual é a direção principal unitária de S associada a $\kappa_2(q)$.

Observação 3.4.1 Segue das equações (3.10) e (3.12) e da definição do campo ν de vetores unitários normais à $\mathcal{F}_1$ dada em (3.14), que

$$\lambda = \langle \psi_u \times \psi_v, \nu \rangle.$$

3.5 Superfície focal como frente de onda

Supondo que S não tem pontos parabólicos nem umbílicos, então quando s for uma parametrização especial de S , temos bem definido em todo ponto da superfície focal $\mathcal{F}$ de S um vetor normal unitário, dado por ν ou $\bar{\nu}$ (em (3.14) ou (3.15), respectivamente).

Além disso ν e $\bar{\nu}$ são aplicações suaves definidas em U . Isso prova que ψ e φ , dadas em (3.1) e (3.2) são frontais. O próximo resultado garante que ψ e φ são frentes de onda.

Proposição 3.5.1 *Suponha que S não tenha pontos umbílicos nem parabólicos. Então as aplicações ψ e φ , que parametrizam as folhas da superfície focal são frentes de onda.*

Demonstração: Basta provar o resultado para ψ , pois para φ é análogo.

Como supomos não haver pontos umbílicos, podemos supor que S esteja parametrizada de forma especial. Já vimos que ψ é uma frontal, pois basta tomar a aplicação ν . Para provar que ψ é uma frente de onda, resta provar que a aplicação $L = (\psi, \nu)$ é uma imersão. A matriz jacobiana de L é dada pela matriz

$$\text{Jac}(L) = \begin{bmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \nu_u & \nu_v \end{bmatrix}_{6 \times 2}.$$

Sabemos que ψ_v não se anula e que ψ_u é nulo sobre a curva singular. Assim, se garantirmos que $\nu_u \neq 0$ para todo ponto, então $\text{Jac}(L)$ tem posto máximo e, portanto, ψ é uma frente de onda.

Temos

$$\nu_u = \frac{1}{\sqrt{E}}s_{uu} - \frac{E_u}{2\sqrt{E}^3}s_u.$$

Afirmamos que s_{uu} e s_u são linearmente independentes e, portanto, $\nu_u \neq 0$. De fato, escrevendo

$$s_{uu} = \alpha \frac{s_u}{\sqrt{E}} + \beta \frac{s_v}{\sqrt{G}} + \delta N,$$

temos $\delta = \langle s_{uu}, N \rangle = l$. Como supomos s ser uma parametrização especial, então por (1.13), temos $\kappa_1 = \frac{l}{E}$. Além disso, não há pontos parabólicos em S . Logo $l = \delta \neq 0$, o que implica que s_{uu} e s_u são linearmente independentes. $\square$

Porteous, em [14], p. 174, dá uma prova que $\mathcal{F}$ é uma frente de onda sem usar a parametrização especial. Neste caso, Porteous mostra que o vetor principal em $s(q)$ relativo à κ_1 é normal a $\mathcal{F}_1$ em $\psi(q)$.

Observação 3.5.2 Suponha que S está parametrizada de forma especial. Como ψ é uma frente de onda, podemos fazer uso de todos os conceitos apresentado na seção 1.3, como por exemplo falar sobre plano tangente limitante, campo de vetores nulo, função densidade de área, ponto singular não degenerado, etc.

- (i) Sempre que tomarmos um ponto singular não degenerado de ψ (ver Definição 1.3.7) e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização para a curva singular, assumiremos que o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ possui apenas pontos singulares não degenerados de ψ (ver Seção 1.3, para detalhes).

- (ii) O plano tangente limitante a $\mathcal{F}_1$ em $\psi(q)$, que é o plano por $\psi(q)$ ortogonal a $\nu(q)$, é paralelo ao plano gerado pelos vetores $N(q)$ e $s_v(q)$ (ver Definição 1.3.9). Em pontos regulares da superfície focal, o plano tangente limitante coincide com o plano tangente usual; em pontos singulares, este plano contém a reta tangente à superfície focal.
- (iii) Seja q um ponto singular não degenerado de ψ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma parametrização para a curva singular. Se $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo de vetores nulo ao longo de γ , conforme Definição 1.3.8, então $\eta(t) = (a(t), 0)$, para alguma função suave $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, já que $\psi_u(\gamma(t)) = 0, \forall t \in I$, ou seja, $(1, 0)$ é sempre uma direção nula.
- (iv) Segue da Observação 3.4.1 que a função λ , definida na seção anterior, nada mais é do que a função densidade de área dada na Definição 1.3.6 para frentes de onda. $\square$

As vezes também é conveniente tomar um sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^2$, conforme a seguir, o qual é usado em [15] e em outros trabalhos que envolvem frentes de onda, por facilitar os cálculos.

Definição 3.5.3 ([15]) *Seja $q \in U$ um ponto singular não degenerado de ψ tal que $\psi(q)$ é uma aresta cuspidal (resp. rabo de andorinha). Dizemos que um sistema de coordenadas locais $(U; u, v)$ centrado em q é um **sistema de coordenadas adaptado** quando as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *O sistema de coordenadas (u, v) é compatível com a orientação positiva de $\mathbb{R}^2$.*
2. *A curva singular Σ é o eixo- u .*
3. *Considerando $q = (u_0, 0)$, o campo de vetores nulo é dado por $\eta(u, 0) = (0, e(u))$ (resp. $\eta(u, 0) = (a(u), e(u))$, com $e(u_0) = 0$), com $a, e : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves.*
4. *Não existem pontos singulares de ψ fora do eixo- u .*

Observemos que, quando dizemos que Σ é o eixo- u , queremos dizer $\Sigma = U \cap \{\text{eixo-}u\}$.

Tal sistema de coordenadas é útil, por exemplo, quando consideramos os resultados de [15] para analisar a curvatura Gaussiana próximo a pontos singulares de $\mathcal{F}$. Ver Seção 3.8. O lema a seguir é um resultado muito útil em geral e será utilizado em nossa próxima observação, assim como em algumas demonstrações de resultados posteriores.

Lema 3.5.4 ([5], p.86) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave em uma vizinhança da origem. Suponha que $f(u, 0) = 0$, para u suficientemente próximo de 0. Então*

$$f(u, v) = v f_1(u, v),$$

onde f_1 é uma função suave definida em uma vizinhança de $(0, 0)$.

Observação 3.5.5 Em um sistema de coordenadas adaptado, como a curva singular é o eixo- u , então a função λ se anula sobre o eixo- u . Assim, pelo Lema 3.5.4, $\lambda = v g_1$, onde g_1 é uma função suave e, portanto, λ_u também se anula sobre o eixo- u . Como todos os pontos de Σ são não degenerados, então λ_v não se anula sobre o eixo- u , numa vizinhança de q . Segue portanto que, como $\lambda_v(u, 0) = g_1(u, 0)$, então g_1 não muda de sinal em U (diminuindo U , se necessário) e, assim, $\lambda = v g_1$ muda de sinal quando cruza o eixo- u . Com isso, podemos concluir que, diminuindo U se necessário, a curva singular Σ separa U em duas regiões U_+ e U_- , onde $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$, respectivamente. Além disso, o item (3) da Definição 3.5.3 diz que, em uma aresta cuspidal,

$$d\psi_{(u,0)}(\eta(u, 0)) = \langle (\psi_u(u, 0), \psi_v(u, 0)), (0, e(u)) \rangle = e(u)\psi_v(u, 0) = 0,$$

de onde segue $\psi_v(u, 0) = 0$. Aplicando o lema acima para ψ_v , concluímos também que $\psi_{uv}(u, 0) = 0$. Ainda mais, se $\psi(q)$ é um rabo de andorinha, com raciocínio análogo, concluímos que então $\psi_u(q) = 0$. $\square$

3.6 Critérios para singularidades da superfície focal e de $d\psi(q)$

Usaremos nesta seção o Teorema 1.3.10 para determinar alguns critérios geométricos que são satisfeitos quando a superfície focal for uma aresta cuspidal ou um rabo de andorinha.

No que segue, suporemos q um ponto singular não degenerado de ψ , $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ uma parametrização para a curva singular, com $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. Consequentemente, $s \circ \gamma := \gamma_r$ será uma parametrização para a ridge de $S = s(U)$ e $\psi \circ \gamma := \hat{\gamma}$ uma parametrização para a rib.

Proposição 3.6.1 *Seja $q \in \Sigma$ um ponto singular não degenerado de ψ .*

- (i) *O ponto $\psi(q)$ é uma aresta cuspidal se e somente se a curva ridge é transversal em $s(q)$ à linha de curvatura de mesma cor.*
- (ii) *O ponto $\psi(q)$ é um rabo de andorinha se e somente se a curva ridge e a linha de curvatura de mesma cor têm uma tangência ordinária em $s(q)$.*
- (iii) *A rib $\hat{\gamma}$ é singular em t_0 se e somente se $\gamma(t_0)$ é um rabo de andorinha. Assim, a curva rib consistindo de arestas cuspidais é uma curva regular.*

Demonstração: Como a ridge e direções principais são objetos que independem da parametrização, podemos supor, sem perda de generalidade, que S está parametrizada

por s de forma especial e, portanto, o campo de vetores constante $\eta(t) = (1, 0)$ é um campo de vetores nulo (conforme a Observação 3.5.2(iii)).

Dessa maneira, sendo $q = \gamma(t_0), t_0 \in I$, a proposição é equivalente a provar que:

- (i) O ponto $\psi(\gamma(t_0))$ é uma aresta cuspidal se e somente se os vetores $\gamma'_r(t_0)$ e $s_u(\gamma(t_0))$ são linearmente independentes ou, equivalentemente, $v'(t_0) \neq 0$ (isto é, a direção singular não é paralela ao eixo- u), uma vez que

$$s_u(\gamma(t_0)) = ds_{\gamma(t_0)}(1, 0) \text{ e } \gamma'_r(t_0) = ds_{\gamma(t_0)}(u'(t_0), v'(t_0))$$

e s é uma imersão.

- (ii) O ponto $\gamma(t_0)$ é um rabo de andorinha se e somente se os vetores $\gamma'_r(t_0)$ e $s_u(\gamma(t_0))$ são paralelos e as curvas ridge e coordenadas tem uma tangencia ordinária ou, equivalentemente, $v'(t_0) = 0$ (isto é, a direção singular é paralela ao eixo- u) e $v''(t_0) \neq 0$.
- (iii) A rib $\hat{\gamma}$ é singular em t_0 se e somente se $v'(t_0) = 0$.

Considerando que $\eta(t) = (1, 0)$ é uma direção nula e $\gamma'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0))$ é direção singular, então os dois primeiros itens seguem diretamente do Teorema 1.3.10.

Para (iii), temos

$$\hat{\gamma} = \psi \circ \gamma \Rightarrow \hat{\gamma}' = u'\psi_u + v'\psi_v = v'\psi_v.$$

Logo, a rib é singular em t_0 se e somente se v' se anula em t_0 . □

A Figura 3.4 esboça as situações (i) e (ii) da proposição anterior.

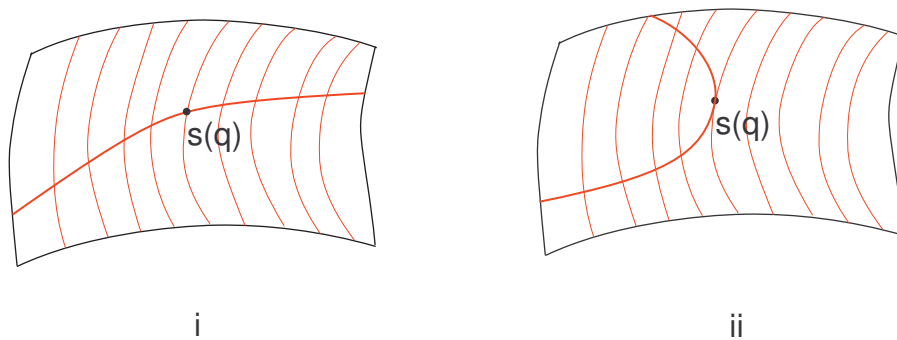


Figura 3.4: Configuração da ridge e das linhas de curvaturas de mesma cor em S . Em (i), $\psi(q)$ é uma aresta cuspidal e em (ii), um rabo de andorinha.

O próximo resultado fornece critérios sobre a curvatura principal κ_1 sobre a curva singular, quando s é uma parametrização especial de S .

Corolário 3.6.2 *Suponha que S esteja parametrizada de forma especial por s e seja q um ponto singular não degenerado de ψ . Então:*

- (a) q é uma aresta cuspidal se, e somente se, $\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial u^2}(q) \neq 0$, isto é, $\lambda_u(q) \neq 0$.
- (b) q é um rabo de andorinha se, e somente se, $\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial u^2}(q) = 0$ e $\frac{\partial^3 \kappa_1}{\partial u^3}(q) \neq 0$, isto é, $\lambda_u(q) = 0$ e $\lambda_{uu}(q) \neq 0$.

Demonstração: Primeiramente, note que, em pontos singulares de ψ ,

$$d\lambda = (\lambda_u, \lambda_v) = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1^3} \sqrt{G} \left(\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial u \partial v} \right). \quad (3.16)$$

Como $\Sigma = \lambda^{-1}(0)$ e γ é uma parametrização para Σ , então o vetor $(\lambda_u(q), \lambda_v(q))$ é normal à curva singular γ em q . Logo, $\gamma'(t_0)$ e a direção nula $\eta(t_0) = (1, 0)$ são linearmente independentes se, e somente se, $(\lambda_u(q), \lambda_v(q))$ e $(0, 1)$ são linearmente independentes, ou seja, se e somente se, $\lambda_u(q) \neq 0$ ou, equivalentemente, por (3.16), $\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial u^2}(q) \neq 0$. Pelo Teorema 1.3.10(a), isso conclui a afirmação (a).

Do mesmo modo, temos que as direções singular e nula são paralelas em q se, e somente se, $\lambda_u(q) = 0$. Falta mostrar que $\frac{\partial^3 \kappa_1}{\partial u^3}(q) \neq 0$. Temos

$$\lambda_{uu}(q) = \frac{\partial^3 \kappa_1}{\partial u^3}(q) \frac{\kappa_1(q) - \kappa_2(q)}{\kappa_1^3(q)} \sqrt{G(q)}.$$

Além disso, o vetor $(-\lambda_v(q), \lambda_u(q))$ é tangente a curva singular em q , isto é,

$$\gamma'(t_0) = (u'(t_0), v'(t_0)) = c(-\lambda_v(t_0), \lambda_u(t_0)),$$

com $0 \neq c \in \mathbb{R}$.

Assim $\det(\gamma'(t), (1, 0)) = c\lambda_u(q)$, para algum c não nulo e

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \det(\gamma'(t), \eta(t)) = c u'(t_0) \lambda_{uu}(q),$$

já que $v'(t_0) = 0$, pois $\psi(q)$ é um rabo de andorinha.

Portanto, como $u'(t_0) \neq 0$, pois γ é uma curva regular, segue que as curvas singular e coordenada em q tem uma tangencia ordinária se e somente se $\lambda_{uu} \neq 0$. Logo, o resultado segue do Teorema 1.3.10(b). $\square$

Podemos, usando os resultados vistos até agora, em especial as Proposições 3.1.5 e 3.6.1, caracterizar as singularidades genéricas da função distância ao quadrado sobre S em termos da superfície focal de S .

Teorema 3.6.3 ([14] p. 189) *Sejam S uma superfície genérica, $\mathcal{F}$ sua superfície focal e $p = s(q)$. Então as singularidades da função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ em $q \in S$ são*

caracterizadas como segue:

$A_1 \Leftrightarrow \mathbf{u}$ pertence à reta normal a S em q , mas não à sua superfície focal $\mathcal{F}$.

$A_2 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{F}$, mas p não é um ponto de ridge.

$A_3 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{F}$, p é um ponto de ridge e a curva ridge é transversal à linha de curvatura de mesma cor por p .

$A_4 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{F}$, p pertence a uma curva ridge e a mesma tem tangência ordinária com a linha de curvatura de mesma cor por p .

$D_4 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{F}$ e p é um ponto umbílico.

3.7 Algumas propriedades das curvas especiais

Estudaremos, nesta seção, algumas propriedades geométricas das curvas ridge, rib e linhas de curvatura de S .

Proposição 3.7.1 ([9] p. 190) *Seja S uma superfície sem pontos parabólicos e umbílicos. A ridge vermelha de S é dada pelo conjunto de pontos onde a curvatura principal κ_1 tem um extremo ao longo da linha de curvatura vermelha.*

Demonstração: Como essa propriedade independe da parametrização, podemos supor que s é uma parametrização especial de S . Dessa maneira, as linhas de curvatura vermelhas de S são as curvas coordenadas de s paralelas ao eixo- u e, devido à Observação 3.3.2, o resultado é equivalente a mostrar que

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial u}(q) = 0,$$

o que segue das equações (3.12), (3.13) e do fato de não haver pontos umbílicos em S . $\square$

Exemplo 3.7.2 Seja S uma superfície dada por $s(u, v) = (u, v, v^2)$. Fazendo os cálculos, concluímos que s é uma parametrização especial de S e, para todo ponto $q \in \mathbb{R}^2$, $\kappa_1(q) = 0$ e $\kappa_2(q) = \frac{n(q)}{G(q)}$. Tome a curva coordenada dada por $s(c, t) = (c, t, t^2)$, cuja imagem é uma parábola contida no plano $x = c$. A curvatura κ_2 ao longo desta curva é dada por

$$\kappa_2(c, t) = \frac{n(c, t)}{G(c, t)} = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

que tem sua derivada nula somente em $t = 0$, isto é, o único ponto de ridge sobre a curva $s(c, t)$ é o ponto $(c, 0)$ e, considerando isso para todo $c \in \mathbb{R}$, concluímos que $\Sigma =$ eixo- u e a curva coordenada $s(t, 0) = (t, 0, 0)$ (eixo- x) é a ridge de S . Na Figura 3.5 estão representadas a superfície S e seu conjunto focal. $\square$

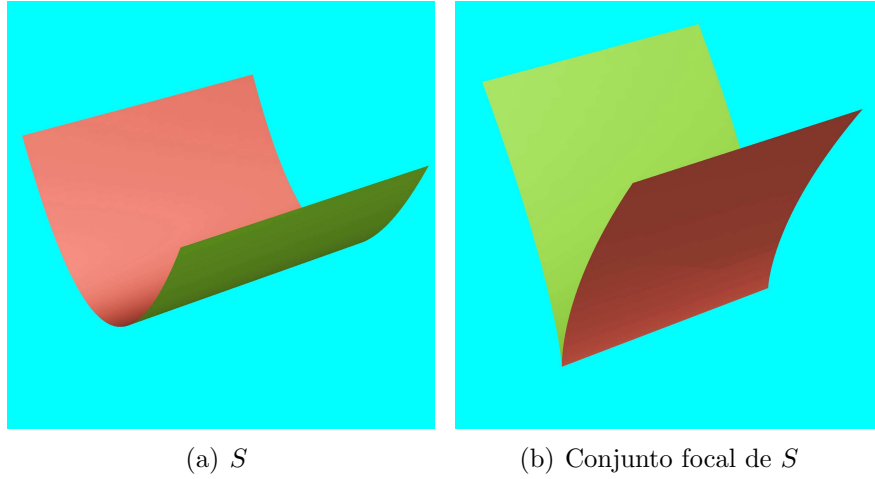


Figura 3.5: A superfície S do Exemplo 3.7.2 e seu conjunto focal.

É interessante saber como as curvas na superfície focal $\mathcal{F}$ de S relacionadas às linhas de curvatura de S se comportam. A seguinte proposição mostra que tais curvas são geodésicas da superfície focal.

Proposição 3.7.3 ([14] p. 176) *Seja S uma superfície sem pontos parabólicos nem umbílicos, $\mathbf{a} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva tal que $s \circ \mathbf{a}$ é uma linha de curvatura vermelha de S e $\beta(t) = \psi \circ \mathbf{a}(t)$. Então, em pontos regulares de β , o vetor normal principal de β no ponto $\beta(t)$ é paralelo ao vetor normal da superfície focal, para todo $t \in I$, isto é, β é uma geodésica de $\mathcal{F}_1$.*

Demonstração: Como a propriedade independe da parametrização, podemos supor que S está parametrizada por s de forma especial. Assim, o traço da curva $\mathbf{a}$ é uma reta paralela ao eixo- u e, portanto, a curva $\mathbf{a}$ é dada na forma $\mathbf{a}(t) = (f(t), v)$, onde f é uma função real que podemos supor crescente e $v \in \mathbb{R}$ é constante. Seja $t_0 \in I$ um ponto regular da curva β , que podemos supor estar parametrizada pelo comprimento de arco, $q = (t_0, v)$ e $p = s(q)$.

Sabemos, pela equação (3.7), que $\psi_u(q) = cN(q)$, com $c \in \mathbb{R}$. Logo

$$\beta'(t) = \frac{d\psi_q(1, 0)}{\|d\psi_q(1, 0)\|} = \frac{\psi_u(q)}{\|\psi_u(q)\|},$$

onde $q = (f(t), v)$, é ortogonal a $\bar{\nu}(q)$, dado em (3.15), ou seja,

$$\langle \beta'(t), \bar{\nu}(q) \rangle = 0.$$

Derivando esta igualdade em t , obtemos

$$\langle \beta''(t), \bar{\nu}(q) \rangle + \langle \beta'(t), f'(t)\bar{\nu}_u(q) \rangle = 0.$$

Afirmamos que a segunda parcela da soma é nula. De fato, novamente pela equação (3.7),

$$\begin{aligned}\langle \beta'(t), f'(t) \bar{\nu}_u(q) \rangle &= f'(t) c \langle N(q), \bar{\nu}_u(q) \rangle = f'(t) c \langle -N_u(q), \bar{\nu}(q) \rangle = \\ &= f'(t) c II_p(s_u, \bar{\nu}) = \frac{-f'(t) c \kappa_2}{\sqrt{G}} \langle s_u(q), s_v(q) \rangle = 0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Logo, $\langle \beta''(t), \bar{\nu}(q) \rangle = 0$. Dessa igualdade e de $\langle \beta'(t), \bar{\nu}(q) \rangle = 0$ e $\langle \nu(q), \bar{\nu}(q) \rangle = 0$, os vetores $\beta'(t)$, $\beta''(t)$ e $\nu(q)$ são coplanares. Além disso, $\nu(q)$ e $\beta''(t)$ são perpendiculares a $\beta'(t)$, logo são paralelos, para todo $t \in I$. Como, por (1.14),

$$\kappa_g = \frac{1}{\|\beta'\|^3} \langle \beta'', \beta' \times N \rangle,$$

então $\kappa_g = 0$ para todo $t \in I$. Portanto, β é uma geodésica da folha vermelha da superfície focal. $\square$

3.7.1 Geometria da rib

Estudaremos, agora, mais detalhadamente, o comportamento da curva rib da superfície focal, quando esta for uma curva regular, isto é, na vizinhança de arestas cuspidais. Como a rib contém apenas pontos singulares de ψ , suas curvaturas normal e geodésica não estão definidas. Veremos aqui que é possível definir funções curvaturas para a rib de maneira análoga ao que é feito para curvas sobre superfícies regulares. Estas curvaturas foram consideradas por Morris em [13], porém aqui apresentamos um estudo mais completo, onde consideramos também o tratamento dado em [15] para frentes de onda. Definiremos também curvas nulas, que ajudam a entender significados geométricos da curvatura geodésica de uma rib.

Recorde que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\hat{\gamma} = \psi \circ \gamma$ e $\gamma_r = s \circ \gamma$ são parametrizações para a curva singular, rib e ridge, respectivamente.

Continuaremos supondo, nesta seção, que S não contém pontos umbílicos nem parabólicos. Logo, ψ é uma frente de onda. Além disso, suporemos que a curva singular é formada apenas por pontos não degenerados de ψ , isto é, $(\lambda_u, \lambda_v) \neq 0$ para todo ponto sobre a curva singular, sendo estas arestas cuspidais.

Recordemos que as curvaturas normal e geodésica de uma curva regular α sobre uma superfície regular são dadas, respectivamente, por

$$\kappa_n = \frac{\langle \alpha'', N \rangle}{\|\alpha'\|^2} \quad \text{e} \quad \kappa_g = \frac{\langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle}{\|\alpha'\|^3}.$$

Quando α está parametrizada pelo comprimento de arco, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal ao vetor $\alpha'(t)$ e, assim, obtemos que $\kappa_n(t)$ e $\kappa_g(t)$ são as componentes de $\alpha''(t)$ na direção de

$N(t)$ e $N(t) \times \alpha'(t)$, respectivamente.

Da mesma maneira que fazemos para N , denotaremos $\nu \circ \gamma$ apenas por ν , com abuso de notação, desde que esteja claro no contexto seu significado.

Seja η um campo de vetores nulo ao longo de γ tal que $\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ seja uma base positivamente orientada ao longo da curva singular. Definimos

$$\kappa_\nu(t) := \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \nu(t) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^2} \quad \text{e} \quad \kappa_s(t) := \text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \nu(t) \times \hat{\gamma}'(t) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3} \quad (3.18)$$

sobre a curva singular, as quais chamamos de **curvatura normal limitante** e **curvatura geodésica limitante** de $\hat{\gamma}$, respectivamente. Estas definições são dadas em [15], p. 515 e 496, respectivamente, para a curva singular de uma frente de onda consistindo de arestas cuspidais. No mesmo trabalho, a curvatura geodésica limitante é chamada de **curvatura singular**, e usaremos esta nomenclatura no que segue. Nesta seção, trataremos apenas da curvatura singular. Resultados sobre a curvatura normal limitante estão discutidos em seções posteriores.

Observemos que Morris, em [13], define estas curvaturas, porém desconsidera o sinal de $d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))$ para a curvatura singular κ_s . Aqui optamos por definir κ_s com sinal, pois veremos que ele tem uma importante interpretação geométrica.

Note que

$$\text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) = \text{sgn}\langle \nabla \lambda(\gamma(t)), \eta(t) \rangle = \begin{cases} +1, & \text{se o lado esquerdo de } \gamma \text{ é } U_+ \\ -1, & \text{se o lado esquerdo de } \gamma \text{ é } U_- \end{cases},$$

onde ∇ denota o vetor gradiente de uma função. De fato $\nabla \lambda(\gamma(t))$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ e aponta na direção de U_+ . Por outro lado, como $\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ é uma base positiva para $\mathbb{R}^2$, então $\eta(t)$ aponta para o lado esquerdo de γ . Assim, supondo que o lado esquerdo de γ é U_+ , então $0 < \cos \theta < \frac{\pi}{2}$, onde θ é o ângulo entre $\nabla \lambda(\gamma(t))$ e $\eta(t)$. Assim, $\text{sgn}\langle \nabla \lambda(\gamma(t)), \eta(t) \rangle = +1$. Com um raciocínio, análogo, concluímos que, se U_- é o lado esquerdo de γ , então $\text{sgn}\langle \nabla \lambda(\gamma(t)), \eta(t) \rangle = -1$.

Tomando um sistema de coordenadas adaptado $(U; u, v)$ na vizinhança de um ponto singular não degenerado de ψ , vamos supor $\gamma(t) = (u(t), 0)$, com $u(t)$ uma função suave crescente. Neste caso, temos o campo de vetores nulo $\eta(u, 0) = (0, e(t))$, onde $e(t) > 0$, uma vez que $\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ é uma base positiva para $\mathbb{R}^2$. Logo

$$\text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) = \text{sgn}(\lambda_v(t)).$$

Neste sistema de coordenadas, podemos reescrever a curvatura singular como:

$$\kappa_s = \text{sgn}(\lambda_v) \frac{\langle \psi_{uu}, \nu \times \psi_u \rangle}{\|\psi_u\|^3} = \text{sgn}(\lambda_v) \frac{\det(\psi_{uu}, \nu, \psi_u)}{\|\psi_u\|^3}, \quad (3.19)$$

uma vez que $\hat{\gamma}' = u'\psi_u$ e $\hat{\gamma}'' = u'^2\psi_{uu} + u''\psi_u$, pois $\psi_v(u, 0) = 0$, conforme Observação 3.5.5.

Seja $\alpha : I \rightarrow U_+$ uma curva regular. Então temos a curva regular $\hat{\alpha} = s \circ \alpha$ sobre a superfície focal e a curvatura geodésica de $\hat{\alpha}$ em t pode ser computada de modo usual por

$$\kappa_g(\hat{\alpha}(t)) = \frac{\langle \hat{\alpha}''(t), N_\psi(t) \times \hat{\alpha}'(t) \rangle}{\|\hat{\alpha}'(t)\|^3},$$

com

$$N_\psi = \frac{\psi_u \times \psi_v}{\|\psi_u \times \psi_v\|} = \frac{\lambda\nu}{\|\lambda\nu\|} = \text{sgn}(\lambda)\nu = \nu,$$

uma vez que $\alpha(t) \in U_+, \forall t \in I$. Logo,

$$\kappa_g(\hat{\alpha}(t)) = \frac{\langle \hat{\alpha}''(t), \nu(t) \times \hat{\alpha}'(t) \rangle}{\|\hat{\alpha}'(t)\|^3}.$$

Por outro lado, se $\alpha \in U^-$, então

$$\kappa_g(\hat{\alpha}(t)) = \frac{\langle \hat{\alpha}''(t), -\nu(t) \times \hat{\alpha}'(t) \rangle}{\|\hat{\alpha}'(t)\|^3}.$$

Então κ_s pode ser considerada como a curvatura geodésica limitante das curvas regulares sobre a superfície focal tais que suas pré-imagens em U esteja à esquerda de Σ . De fato, se U_+ está do lado esquerdo da curva singular, então $\nu(t) = N_\psi(t)$ e $\text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}\eta(t)) = 1$ e, caso contrário, $\nu(t) = -N_\psi(t)$ e $\text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}\eta(t)) = -1$.

Teorema 3.7.4 ([15], p.497) *A definição de curvatura singular em (3.18) não depende da escolha de ν nem da orientação da curva singular.*

Demonstração: Se escolhermos outro ν , isto é, trocarmos seu sinal, então as regiões U_+ e U_- se alternam e, portanto, o sinal de $d\lambda_\gamma(\eta)$ também é trocado. Por outro lado, se mudarmos a orientação de γ , então γ' e η trocam de sinal. Em ambos os casos, o valor de κ_s é mantido. $\square$

Apresentamos a seguir uma fórmula intrínseca para a curvatura singular, o qual vale em geral para frentes de onda. Não faremos sua demonstração aqui, pois envolve alguns conceitos que não foram estudados neste trabalho.

Proposição 3.7.5 ([15], p. 497) *Seja $\psi(q)$ uma aresta cuspidal de $\mathcal{F}_1$ e suponha que $(U; u, v)$ é um sistema de coordenadas adaptado com respeito a q . Então a curvatura singular é dada por*

$$\kappa_s = \frac{-F_v E_u + 2E F_{uv} - E E_{vv}}{E^{\frac{3}{2}} \lambda_v},$$

onde E e F são os coeficientes da primeira forma fundamental da frente de onda ψ , definidos na Seção 1.3 e λ a função densidade de área.

No que segue, veremos uma outra interpretação geométrica da curvatura singular.

Definição 3.7.6 *Uma curva regular $\sigma : I \rightarrow U$ é chamada de **curva nula** de ψ se $\sigma'(t)$ é uma direção nula em cada ponto singular de ψ .*

Se $\sigma(t) \in \Sigma$, temos

$$\hat{\sigma}'(t) = (\psi \circ \sigma)'(t) = d\psi_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) = 0$$

pois σ' é uma direção nula de ψ . Além disso, σ e a curva singular são transversais em cada ponto de sua interseção, já que estamos supondo haver somente arestas cuspidais em $\mathcal{F}$. Assim, a curva $\hat{\sigma}(t) = \psi(\sigma(t))$ é uma curva “transversal” a aresta cuspidal.

Teorema 3.7.7 ([15], p 501) *Seja $q \in \Sigma$ tal que $\gamma(0) = q$ e $\hat{\gamma}(0) = \psi(q)$ é uma aresta cuspidal, com γ parametrizada pelo comprimento de arco. Seja também $\sigma(s) = (u(s), v(s))$ uma curva nula passando por $q = \sigma(0)$. Então o sinal de $\langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle$ coincide com o sinal da curvatura singular $\kappa_s(q)$.*

Demonstração: Tomemos um sistema de coordenadas adaptado em q . Assim, pela Observação 3.5.5, $\psi_v = 0$ e, conseqüentemente, $\psi_{uv} = 0$ sobre o eixo- u . Por outro lado, como γ está parametrizada pelo comprimento de arco, o Teorema 3.7.4 nos permite supor $\gamma(t) = (t, 0)$. Assim $\hat{\gamma} = \psi \circ \gamma$, $\hat{\gamma}' = \psi_u$, $\hat{\gamma}'' = \psi_{uu}$ e

$$\langle \psi_u, \psi_{uu} \rangle = \langle \hat{\gamma}', \hat{\gamma}'' \rangle = 0 \quad (3.20)$$

sobre o eixo- u .

Agora seja $\sigma(s) = (u(s), v(s))$ uma curva nula tal que $\sigma(0) = q$. Como $\sigma'(0)$ é uma direção nula, ou seja, é paralelo a $(0, 1)$, segue que $u'(0) = 0$. Além disso, como $\psi_v(q)$ e $\psi_{uv}(q)$ também se anulam na origem, então

$$\hat{\sigma}'(0) = \psi_u(q)u'(0) = 0, \quad \hat{\sigma}''(0) = u''(0)\psi_u(q) + v'^2(0)\psi_{vv}(q)$$

e, por (3.20),

$$\langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle = \langle u''(0)\psi_u(q) + v'^2(0)\psi_{vv}(q), \psi_{uu}(q) \rangle = v'^2(0)\langle \psi_{vv}(q), \psi_{uu}(q) \rangle. \quad (3.21)$$

Por outro lado, sabemos que $\{\psi_u(q), \nu(q), \psi_u \times \nu(q)\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ em qualquer ponto $q \in U$. Assim, se escrevemos

$$\psi_{vv} = a\psi_u + b\nu + c(\psi_u \times \nu),$$

onde a, b e c são reais, segue que, sobre o eixo- u ,

$$b = \langle \psi_{vv}, \nu \rangle = (\langle \psi_v, \nu \rangle)_v - \langle \psi_v, \nu_v \rangle = 0,$$

já que $\langle \psi_v, \nu \rangle$ se anula em U , e

$$c = \langle \psi_{vv}, \psi_u \times \nu \rangle = (\langle \psi_{vv}, \psi_u \times \nu \rangle)_v = -\lambda_v,$$

pois $\lambda = \det(\psi_u, \psi_v, \nu)$ e $\psi_v = 0$.

Portanto, em 0, temos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\gamma}'', \hat{\sigma}'' \rangle &= v'^2 \langle a\psi_u - \lambda_v(\psi_u \times \nu), \psi_{uu} \rangle = -v'^2 \lambda_v \langle \psi_u \times \nu, \psi_{uu} \rangle = v'^2 \lambda_v \langle \psi_u \times \psi_{uu}, \nu \rangle = \\ &= v'^2 \lambda_v \langle \hat{\gamma}' \times \hat{\gamma}'', \nu \rangle = v'^2 \lambda_v \frac{\kappa_s}{\text{sgn}(\lambda_v)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde na penúltima igualdade usamos a equação (3.19).

Logo

$$\langle \hat{\sigma}''(0), \hat{\gamma}''(0) \rangle = v'^2(0) |\lambda_v(q)| \kappa_s(0).$$

de onde segue que

$$\text{sgn}(\langle \sigma''(0), \gamma''(0) \rangle) = \text{sgn}(\kappa_s(0)),$$

como queríamos. $\square$

Recorde da geometria diferencial que, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva regular, então o plano retificante de α em t é gerado pelos vetores, $\mathbf{t}(t) = \alpha'(t)$ e $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$, onde $\mathbf{n}(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$. Um resultado conhecido é que, na vizinhança de um ponto da curva α em que a curvatura não se anula, o traço da curva não cruza o seu plano retificante naquele ponto e, ainda mais, o traço da curva está contido no semi-espaco determinado pelo plano retificante em que aponta o vetor normal principal $\mathbf{n}$. O seguinte corolário é um resultado análogo a este, apresentado em [15] para frentes de onda.

Corolário 3.7.8 ([15], p. 502) *Seja $\psi(q)$ um ponto de aresta cuspidal e γ a curva singular com $\gamma(0) = q$. Seja T o plano retificante de $\hat{\gamma}$ em $\psi(q)$. Se a curvatura singular em q é positiva (resp. negativa) então, para toda curva nula σ , com $\sigma(0) = q$, $\hat{\sigma}(s)$ pertence ao mesmo semiespaço D_+ (resp. o semiespaço oposto D_-) delimitado por T que contém o vetor normal principal $\mathbf{n}(0)$, para s suficientemente pequeno. Ainda mais, se a curvatura singular é positiva em q , a superfície focal $\mathcal{F}_1$, numa vizinhança de q , está contida em D_+ (ver Figura 3.6).*

Demonstração: Consideramos o mesmo sistema de coordenadas do Teorema 3.7.7 e supomos $q = (0, 0)$ e $\psi(0, 0) = (0, 0, 0)$. Temos, portanto, lembrando que $\psi_{uv}(0, 0) = 0$, que a expansão de Taylor na origem de ψ é dada por

$$\psi(u, v) = \psi_u(0, 0) + \frac{1}{2}(\psi_{uu}(0, 0)u^2 + \psi_{vv}(0, 0)v^2) + o(u^2 + v^2). \quad (3.23)$$

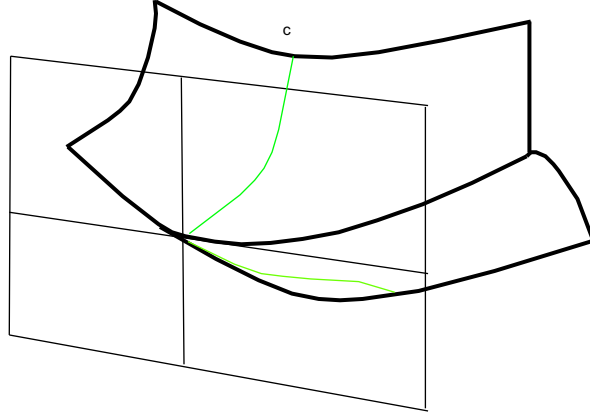


Figura 3.6: Exemplo de curvatura singular positiva, onde localmente a superfície focal está contida em um dos semi-espacos determinados pelo plano retificante da rib.

Logo

$$\langle \psi(u, v), \psi_{uu}(0, 0) \rangle = \frac{1}{2}u^2 \|\psi_{uu}\|^2 + \frac{1}{2}v^2 \langle \psi_{vv}(0, 0), \psi_{uu}(0, 0) \rangle + o(u^2 + v^2),$$

uma vez que $\langle \psi_u, \psi_{uu} \rangle = 0$ sobre o eixo- u .

Se $\kappa_s(0) > 0$, então, pelo Teorema 3.7.7 e por (3.21), $\langle \psi_{vv}(0, 0), \psi_{uu}(0, 0) \rangle > 0$ e, portanto, $\langle \psi(u, v), \psi_{uu}(0, 0) \rangle > 0$ em uma vizinhança da origem. Ou seja, $\mathcal{F}_1$ está contido no semiespaço determinado pelo plano perpendicular a $\psi_{uu}(0, 0)$ e que contém $\psi_{uu}(0, 0)$. Como o traço de γ é o eixo- u e γ está parametrizada pelo comprimento de arco, então $\psi_{uu}(0, 0) = \hat{\gamma}''(0)$ é paralelo a $\mathbf{n}(0)$ e tem o mesmo sentido de $\mathbf{n}(0)$, o que prova o resultado.

Agora suponha que $\kappa_s < 0$ e σ uma curva nula com $\sigma(0) = q$. Então existe uma mudança de coordenadas tal que $\sigma(t) = (0, t)$. Assim, usando (3.23), segue que

$$\langle \psi(0, v), \psi_{uu}(0, 0) \rangle = \frac{1}{2}v^2 \langle \psi_{vv}(0, 0), \psi_{uu}(0, 0) \rangle + o(v^2)$$

é negativo, pelo Teorema 3.7.7. Pelo mesmo argumento do caso anterior, o resultado segue. $\square$

Definição 3.7.9 *O semiespaço definido no corolário anterior, delimitado pelo plano retificante de $\hat{\gamma}$ e o qual as curvas nulas pertencem é chamado de **semi-espaco principal da aresta cuspidal**.*

Finalizaremos esta seção com um exemplo que não é necessariamente superfície focal, porém é frente de onda, onde calculamos sua curvatura singular.

Exemplo 3.7.10 Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(u, v) = (au^2 + v^2, bv^2 + v^3, u) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Temos

$$f_u(u, v) = (2au, 0, 1) \text{ e } f_v(u, v) = (2v, 2bv + 3v^2, 0).$$

Isso significa que o eixo- u é a curva singular e que a direção nula é o eixo- v , ou seja, f está em um sistema de coordenadas adaptado. Fazendo os cálculos, temos que

$$\nu = \frac{1}{\delta}(-3v - 2b, 2, 2au(3v + 2b)), \text{ com } \delta = \sqrt{4 + (1 + 4a^2u^2)(4b^2 + 12bv + 9v^2)}$$

é um campo de vetores normais unitários a f . Como f_v se anula sobre o eixo- u e ν_v nunca, então f é uma frente de onda, e cada ponto do eixo- u é uma aresta cuspidal. Usando a Proposição 3.7.5, a curvatura singular é dada por

$$\kappa_s(u) = \frac{2a}{(1 + 4a^2u^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + b^2(1 + 4a^2u^2)}}$$

Quando $a > 0$ (resp. $a < 0$), sua curvatura singular é positiva (resp. negativa) e dizemos que f é uma cuspidal elíptica (resp. hiperbólica), já que sua imagem parece um parabolóide elíptico (resp. hiperbólico). Ver Figuras 3.7 e 3.8. $\square$

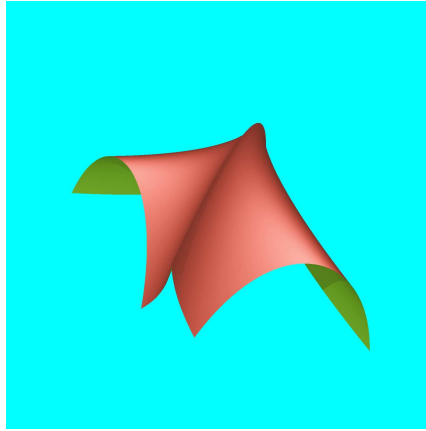


Figura 3.7: Aresta cuspidal com curvatura singular positiva. Superfície do Exemplo 3.7.10, caso $a = 1$.

3.8 Curvatura Gaussiana e curvas sub-parabólicas

Podemos obter mais informações sobre a superfície focal considerando sua curvatura Gaussiana. Em [13], Morris apresenta uma fórmula explícita para a curvatura Gaussiana da superfície focal, a qual apresentamos nesta seção. Supondo que S não tenha pontos parabólicos nem umbílicos, já vimos que $\mathcal{F}_1$ é uma frente de onda e suas singularidades são genericamente arestas cuspidais e rabos de andorinhas. Portanto, podemos considerar

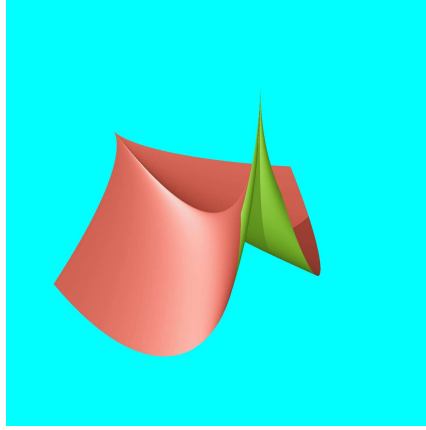


Figura 3.8: Aresta cuspidal com curvatura singular negativa. Superfície do Exemplo 3.7.10, caso $a = -1$.

a primeira e segunda formas fundamentais definidas para uma frente de onda na Seção 1.3. Em [15], temos alguns resultados sobre a curvatura Gaussiana de uma frente de onda. Durante esta seção, usaremos tais resultados no estudo da superfície focal.

Nesta seção, portanto, estaremos sempre supondo S uma superfície regular sem pontos umbílicos ou parabólicos. Os seguintes resultados nos revelam uma forma explícita para a curvatura Gaussiana de $\mathcal{F}$, quando S está parametrizada na forma especial.

Proposição 3.8.1 ([9], p.195) *Seja $s : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização local especial de S . Então os coeficientes da primeira forma fundamental de $\mathcal{F}_1$ são dados por*

$$E_\psi = \frac{1}{\kappa_1^4} \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \right)^2, \quad F_\psi = \frac{1}{\kappa_1^4} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \frac{\partial \kappa_1}{\partial v} \quad e \quad G_\psi = \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1} \right)^2 G + \frac{1}{\kappa_1^4} \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} \right)^2$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental de $\mathcal{F}_1$ são dados por

$$l_\psi = \frac{\sqrt{E}}{\kappa_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}, \quad m_\psi = 0 \quad e \quad n_\psi = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1} \right) \frac{G_u}{2}.$$

Por outro lado, os coeficientes de $\mathcal{F}_2$ são dados por

$$E_\varphi = \frac{1}{\kappa_2^4} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \right)^2, \quad F_\varphi = \frac{1}{\kappa_2^4} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \frac{\partial \kappa_2}{\partial u}, \quad G_\varphi = \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2} \right)^2 E + \frac{1}{\kappa_2^4} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial u} \right)^2,$$

$$l_\varphi = \frac{\sqrt{G}}{\kappa_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v}, \quad m_\varphi = 0 \quad e \quad n_\varphi = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2} \right) \frac{E_v}{2}.$$

Demonstração: Os coeficientes da primeira forma fundamental são facilmente calculados usando as fórmulas dadas em (3.7) e (3.8).

Além disso, temos

$$\begin{aligned}\psi_{uu} &= \left(\frac{2(\kappa_1)_u^2}{\kappa_1^3} - \frac{(\kappa_1)_{uu}}{\kappa_1^2} \right) N + \frac{(\kappa_1)_u}{\kappa_1} s_u, \\ \psi_{uv} &= \left(\frac{2(\kappa_1)_v(\kappa_1)_u}{\kappa_1^3} - \frac{(\kappa_1)_{uv}}{\kappa_1^2} \right) N + \frac{(\kappa_1)_u \kappa_2}{\kappa_1^2} s_v \quad \text{e} \\ \psi_{vv} &= \frac{2\kappa_2(\kappa_1)_v - \kappa_1(\kappa_2)_v}{\kappa_1^2} s_v + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1} s_{vv} + \left(\frac{2(\kappa_1)_v^2}{\kappa_1^3} - \frac{(\kappa_1)_{vv}}{\kappa_1^2} \right) N.\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos, usando (3.14), obtemos os valores desejados para os coeficientes da segunda forma fundamental de $\mathcal{F}_1$.

Para $\mathcal{F}_2$ as contas são feitas de modo análogo. $\square$

Podemos justificar o nome da função densidade de área, dada na Definição 1.3.6 por

$$\lambda = \langle \psi_u \times \psi_v, \nu \rangle.$$

De fato, usando a proposição anterior e as igualdades (3.7), (3.8) e (3.14), podemos verificar que

$$\lambda = \sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2}.$$

Assim como os pontos na superfície S relativos aos pontos singulares da superfície focal, os relativos aos pontos parabólicos também são de grande importância.

Definição 3.8.2 *Um ponto $s(q) \in S$ tal que $\psi(q)$ (resp. $\varphi(q)$) é parabólico em $\mathcal{F}_1$ (resp. em $\mathcal{F}_2$) é chamado de **sub-parabólico vermelho** (resp. **sub-parabólico azul**).*

Queremos investigar o comportamento da curvatura Gaussiana da superfície focal $\mathcal{F}_1$ próximo de pontos singulares. Morris mostrou em [13] relações entre um ponto sub-parabólico e o comportamento da curvatura Gaussiana da superfície focal, como veremos a seguir.

Teorema 3.8.3 ([13], Teorema 4) *Seja S uma superfície regular parametrizada de forma especial por s . A curvatura Gaussiana da superfície focal $\mathcal{F}_1$ em um ponto regular é dada por*

$$K_\psi = - \frac{\kappa_1^4 G_u}{2(\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_1)_u G}. \quad (3.24)$$

Demonstração: Basta substituir os coeficientes dados na Proposição 3.8.1 na fórmula

$$K_\psi = \frac{l_\psi n_\psi - m_\psi^2}{E_\psi G_\psi - F_\psi^2},$$

observando que $G_u = 2\langle s_{uv}, s_v \rangle = -2\langle s_u, s_{vv} \rangle$, já que, como $\langle s_u, s_v \rangle = 0$, temos $\langle s_{uv}, s_v \rangle + \langle s_u, s_{vv} \rangle = 0$. $\square$

Concluimos da fórmula para a curvatura Gaussiana de $\mathcal{F}_1$ que seu conjunto parabólico é o conjunto dos pontos $\psi(q) \in \mathcal{F}_1$ tal que

$$G_u(q) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\langle s_{uv}, s_v \rangle = \langle s_u, s_{vv} \rangle = 0 \text{ em } q. \quad (3.25)$$

Note que $(\kappa_1)_u = \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \neq 0$ em q se e somente se q é um ponto regular de $\mathcal{F}_1$ e $\kappa_1 - \kappa_2 \neq 0$ e $\kappa_1 \neq 0$ em U , pois S não contém pontos umbílicos nem parabólicos, por hipótese. Além disso, pela Observação 3.5.5, a função λ muda de sinal quando cruza a curva singular e, portanto, $(\kappa_1)_u$ e, conseqüentemente, K_ψ também muda. Podemos, portanto, concluir o seguinte resultado:

Corolário 3.8.4 ([13]) *Genericamente, temos:*

- (a) *A curvatura Gaussiana K_ψ diverge para o infinito em pontos singulares, tendo sinais opostos em cada lado da curva singular.*
- (b) *A curvatura Gaussiana K_ψ muda de sinal ao passar por uma curva parabólica de $\mathcal{F}_1$.*

A curvatura Gaussiana K_ψ de $\mathcal{F}_1$ fornece, portanto, uma maneira de segmentar U em partes rotuladas de acordo com o sinal de K_ψ , conforme Figura 3.9. De fato, o sinal de K_ψ muda ao cruzar a ridge vermelha ou uma curva sub-parabólica vermelha.

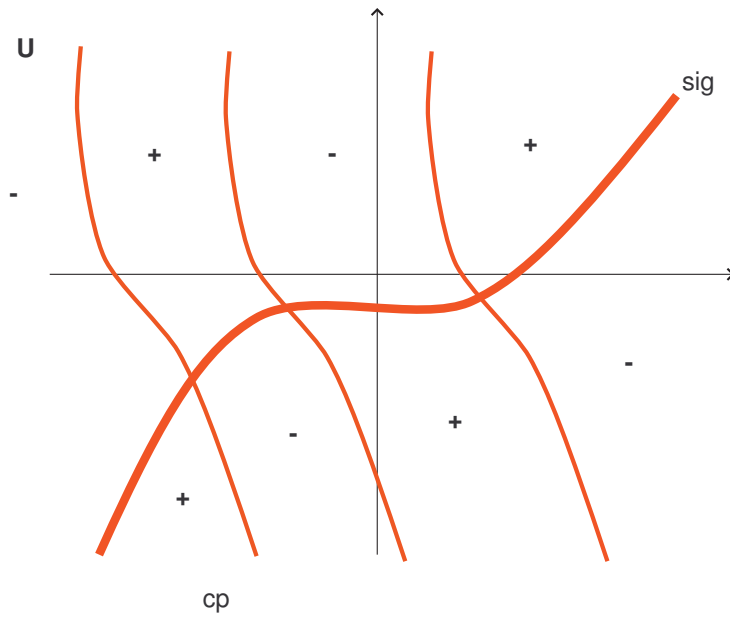


Figura 3.9: Partição de U segundo o sinal da curvatura Gaussiana de $\mathcal{F}_1$.

Morris, em [13], define a curva sub-parabólica como o conjunto dos pontos tais que $\frac{\partial \kappa_2}{\partial u} = 0$. Vale notar que o autor supõe que S está parametrizada de forma especial. Neste caso, essa definição é equivalente à Definição 3.8.2, como veremos a seguir.

Teorema 3.8.5 ([9], p. 196) *Fora de pontos de ridge, a curva sub-parabólica vermelha em S é o conjunto dos pontos $s(u, v)$ tais que a curvatura principal κ_2 tem um extremo em $s(u, v)$ ao longo da linha de curvatura vermelha.*

Por outro lado, a curva sub-parabólica azul em S é o conjunto dos pontos $s(u, v)$ tais que a curvatura principal κ_1 tem um extremo em $s(u, v)$ ao longo da linha de curvatura azul.

Demonstração: Tais propriedades independem da parametrização e, portanto, podemos supor que s é uma parametrização especial local de S . Segue do Teorema 3.8.3, que K_ψ se anula se e somente se

$$\frac{G_u}{2} = \langle s_v, s_{uv} \rangle$$

se anula.

Diferenciando $F = \langle s_u, s_v \rangle = 0$ com respeito a v , temos

$$\langle s_{uv}, s_v \rangle = -\langle s_u, s_{vv} \rangle. \quad (3.26)$$

Por outro lado, por (1.9), $-m = \langle N_u, s_v \rangle = 0$. Diferenciando esta igualdade parcialmente com respeito a v , obtemos

$$\langle N_{uv}, s_v \rangle + \langle N_u, s_{vv} \rangle = 0.$$

Assim, por (1.8),

$$\langle N_{uv}, s_v \rangle = -\langle N_u, s_{vv} \rangle = \kappa_1 \langle s_u, s_{vv} \rangle. \quad (3.27)$$

Derivando a expressão $N_v = -\kappa_2 s_v$ com respeito a u , temos $N_{uv} = -\frac{\partial \kappa_2}{\partial u} s_v - \kappa_2 s_{uv}$. Assim,

$$-\langle N_{uv}, s_v \rangle = \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} \langle s_v, s_v \rangle + \kappa_2 \langle s_{uv}, s_v \rangle,$$

ou, equivalentemente,

$$\langle N_{uv}, s_v \rangle + \kappa_2 \langle s_{uv}, s_v \rangle = -\frac{\partial \kappa_2}{\partial u} G \quad (3.28)$$

Usando as equações (3.26) e (3.27), a equação (3.28) é equivalente a

$$(\kappa_1 - \kappa_2) \langle s_v, s_{uv} \rangle = \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} G.$$

Logo, como não há pontos umbílicos em S , um ponto $s(q) \in S$ é sub-parabólico se e somente se $\frac{\partial \kappa_2}{\partial u}(q) = 0$. Assim, $s(q)$ é um ponto sub-parabólico se e somente se κ_2 tem um extremo ao longo da curva coordenada que, como supomos s uma parametrização especial, é a linha de curvatura por $s(u, v)$. A outra parte segue de modo análogo. $\square$

Teorema 3.8.6 ([13], Teorema 8) *A curva sub-parabólica vermelha de S é o lugar geométrico das inflexões geodésicas das linhas de curvaturas azuis (correspondentes a curvatura principal κ_2).*

Demonstração: Podemos supor que s seja uma parametrização especial local de S . Neste caso, a linha de curvatura azul pode ser parametrizada por $\alpha(t) = s(c, t)$, onde c é constante. Pela equação (1.14) sua curvatura geodésica é dada por

$$\kappa_g = \frac{1}{\|\alpha'\|^3} \langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle.$$

Temos que $\alpha' = s_v$ e $\alpha'' = s_{vv}$. Substituindo na fórmula acima, obtemos

$$\kappa_g = \frac{1}{G^{\frac{3}{2}}} \langle s_{vv}, N \times s_v \rangle = \frac{1}{G^{\frac{3}{2}}} \langle s_{vv}, -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} s_u \rangle,$$

pois, como $\frac{s_u}{\sqrt{E}} \times \frac{s_v}{\sqrt{G}} = N$, então $N \times s_v = -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} s_u$. Logo

$$\kappa_g = \frac{-\sqrt{G}}{G^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}} \langle s_{vv}, s_u \rangle = -\frac{1}{G \sqrt{E}} \langle s_{vv}, s_u \rangle.$$

Diferenciando $F = \langle s_u, s_v \rangle = 0$ com respeito a v , temos

$$-\langle s_{vv}, s_u \rangle = \langle s_v, s_{uv} \rangle = \frac{G_u}{2}.$$

Assim,

$$\kappa_g = 0 \Leftrightarrow G_u = 0 \Leftrightarrow K_\psi = 0 \quad (3.29)$$

pelo Teorema 3.8.3. Consequentemente, $\kappa_g(t)$ se anula se e somente se $\alpha(t)$ é um ponto sub-parabólico de S . $\square$

Sabemos do Corolário 3.8.4 que, genericamente, a curvatura Gaussiana K_ψ diverge para o infinito quando atravessa um ponto singular, isto é, se tomarmos uma curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, com $\beta(0) = q \in \Sigma$ e $\beta(t) \notin \Sigma, \forall t \neq 0$, então $K_\psi(t) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow 0$. Portanto K_ψ não é limitada em uma vizinhança da curva singular. Além disso, os sinais de K_ψ são opostos em cada lado da curva singular. Buscamos por condições que nos digam quando K_ψ é limitada.

A próxima definição é inspirada na definição de aresta cuspidal genérica dada em [15], p. 514.

Definição 3.8.7 *Dizemos que um ponto singular $q \in U$ de ψ é **genérico** se os coeficientes da segunda forma fundamental de ψ não se anulam simultaneamente em q .*

Teorema 3.8.8 ([15], p. 509) *Seja $q \in U$ um ponto singular não degenerado de ψ e γ uma parametrização para a curva singular definida num intervalo I , consistindo de*

pontos não degenerados de ψ . A curvatura Gaussiana K_ψ é limitada em uma vizinhança suficientemente pequena de $\gamma(I)$ se e somente se todos os pontos de $\gamma(I)$ nessa vizinhança são não genéricos de ψ .

Demonstração: Tome $(U; u, v)$ um sistema de coordenadas adaptado em $q = \gamma(0)$. Como, em pontos singulares, ψ_u e ψ_v são linearmente dependentes, então $\psi_v = c\psi_u$ e a matriz da segunda forma fundamental é dada por

$$\begin{bmatrix} l_\psi & m_\psi \\ m_\psi & n_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \langle \psi_u, \nu_u \rangle & \langle \psi_u, \nu_v \rangle \\ \langle \psi_v, \nu_u \rangle & \langle \psi_v, \nu_v \rangle \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \langle \psi_u, \nu_u \rangle & \langle \psi_u, \nu_v \rangle \\ c\langle \psi_u, \nu_u \rangle & c\langle \psi_u, \nu_v \rangle \end{bmatrix}.$$

Logo, $l_\psi n_\psi - (m_\psi)^2 = c\langle \psi_u, \nu_u \rangle \langle \psi_u, \nu_v \rangle - c\langle \psi_u, \nu_v \rangle \langle \psi_u, \nu_u \rangle = 0$ sobre a curva singular. Por outro lado, em um sistema de coordenadas adaptado, a função λ também se anula sobre o eixo- u . Logo, pelo Lema 3.5.4, existem funções $g_1, g_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda(u, v) = v g_1(u, v) \quad \text{e} \quad l_\psi n_\psi - m_\psi^2 = v g_2(u, v). \quad (3.30)$$

Note que $\lambda_u(u, v) = v(g_1)_u(u, v)$ se anula no eixo- u . Como os pontos singulares de ψ são não degenerados, então

$$\lambda_v(u, 0) = g_1(u, 0) \neq 0 \quad (3.31)$$

em uma vizinhança do eixo- u .

Primeiro consideremos o caso onde só há arestas cuspidais em $\mathcal{F}_1$. Assim, $\psi_v(u, 0) = 0$ sobre o eixo- u e, portanto, $m_\psi = n_\psi = 0$.

Sabemos que

$$K_\psi = \frac{l_\psi n_\psi - m_\psi^2}{E_\psi G_\psi - F_\psi^2} = \frac{l_\psi n_\psi - m_\psi^2}{\lambda^2}$$

e, por (3.30)

$$K_\psi = \frac{g_2(u, v)}{v g_1^2(u, v)}.$$

Assim, a curvatura Gaussiana é limitada em uma vizinhança do eixo- u se, e somente se, $g_2(u, 0) = 0$ sobre o eixo- u . Note que

$$g_2(u, 0) = (l_\psi n_\psi - (m_\psi)^2)_v|_{v=0} = l_\psi(u, 0)(n_\psi)_v(u, 0).$$

Vamos mostrar que $(n_\psi)_v(u, 0) \neq 0$, assim K_ψ é limitada se e somente se $l_\psi = 0$ e, como já vimos que, neste caso $n_\psi = m_\psi = 0$, o resultado segue.

Usando que $\psi_v = 0$ sobre a curva singular, temos que $\lambda_v = \det(\psi_u, \psi_{vv}, \nu) \neq 0$ (por (3.31)), o que implica que $Z = \{\psi_u, \psi_{vv}, \nu\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes. Fazendo o produto interno de ν_v com cada um dos componentes de Z , temos:

$$\langle \nu_v, \psi_u \rangle = -m_\psi = 0 \quad \text{e} \quad \langle \nu_v, \nu \rangle = 0,$$

já que $\langle \nu, \nu \rangle = 1$. Assim,

$$\nu_v = 0 \Leftrightarrow \langle \nu_v, \psi_{vv} \rangle = 0.$$

Agora, como ψ é uma frente de onda e $\psi_v = 0$, então $\nu_v \neq 0$ e, portanto, $\langle \nu_v, \psi_{vv} \rangle \neq 0$. Por fim, temos que

$$(n_\psi)_v(u, 0) = -(\langle \psi_v, \nu_v \rangle)_v|_{(u,0)} = \langle \psi_{vv}, \nu_v \rangle(u, 0) \neq 0.$$

Suponha agora que $\psi(q)$ não seja uma aresta cuspidal. Assim, a direção nula em q está na direção do eixo- u , ou seja, $\psi_u(q) = 0$. Com isso, $m_\psi(q) = l_\psi(q) = 0$.

Temos agora a seguinte expressão para g_2 :

$$g_2(q) = (l_\psi n_\psi - (m_\psi)^2)_v(q) = (l_\psi)_v(q) n_\psi(q).$$

Pela mesma razão que o primeiro caso, basta apenas mostra que $(l_\psi)_v(q) \neq 0$.

Usando o fato de que $\psi_u(q) = 0$, temos que $\lambda_v(q) = \det(\psi_{uv}, \psi_v, \nu)(q) \neq 0$ (por (3.31)), o que implica que $Z = \{\psi_{uv}, \psi_v, \nu\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes quando aplicado q . Fazendo o produto interno de ν_u com cada um dos componentes de Z e aplicando em q , temos:

$$\langle \nu_u, \psi_v \rangle = -m_\psi = 0 \quad \text{e} \quad \langle \nu_u, \nu \rangle = 0,$$

já que $\langle \nu, \nu \rangle = 1$. Assim,

$$\nu_u = 0 \Leftrightarrow \langle \nu_u, \psi_{uv} \rangle = 0.$$

Agora, como ψ é uma frente de onda e $\psi_u(q) = 0$, então $\nu_u(q) \neq 0$ e, portanto, $\langle \nu_u, \psi_{uv} \rangle(q) \neq 0$. Por fim, temos que

$$(l_\psi)_v(q) = -(\langle \psi_u, \nu_u \rangle)_v(q) = \langle \psi_{uv}, \nu_u \rangle(q) \neq 0,$$

o que completa a demonstração. $\square$

Para o próximo teorema, que relaciona os sinais da curvatura singular e de K_ψ , quando este é limitado, vamos considerar um novo sistema de coordenadas, definido e provado sua existência em [15].

Lema 3.8.9 ([15], p. 510) *Seja $q \in U$ um ponto singular tal que $\psi(q) \in \mathcal{F}_1$ seja uma aresta cuspidal. Então existe um sistema de coordenadas adaptado $(U; u, v)$ numa vizinhança de p com as seguintes propriedades:*

1. $\langle \psi_u, \psi_u \rangle = 1$ sobre o eixo- u ;
2. $\lambda_v = 1$ sobre o eixo- u ;

3. $\{\psi_u, \psi_{vv}, \nu\}$ é uma base ortonormal positiva ao longo do eixo- u .

Chamaremos tal sistema de coordenadas uma **sistema de coordenadas adaptado especial**.

Teorema 3.8.10 ([15], p. 509) Com as mesmas hipóteses do Teorema 3.8.8, suponha que K_ψ é limitado. Se K_ψ é não negativo em $U - \gamma(I)$, em uma vizinhança de q , então a curvatura singular é não positiva. Além disso, se K_ψ é inferiormente limitado por uma constante positiva em $U - \gamma(I)$, então a curvatura singular em p assume valores estritamente negativos.

Demonstração: Suponha que $K_\psi \geq 0$. Tomemos um sistema de coordenadas adaptado especial e funções g_1 e g_2 como em (3.30). Como K_ψ é limitado, já vimos que $g_2(u, 0) = 0$, logo

$$l_\psi n_\psi - m_\psi^2 = v^2 g_3,$$

o que implica que

$$K_\psi = \frac{g_3}{g_1^2}.$$

Como $K_\psi \geq 0$, então $g_3(u, 0) \geq 0$. Sabemos, pelo Teorema 3.8.8, que $l_\psi = m_\psi = n_\psi = 0$ sobre o eixo- u . Assim, sobre o eixo- u

$$0 \leq 2g_3 = (l_\psi n_\psi - m_\psi^2)_{vv} = 2((l_\psi)_v (n_\psi)_v - ((m_\psi)_v)^2) \leq 2(l_\psi)_v (n_\psi)_v. \quad (3.32)$$

Aqui, $\{\psi_u, \psi_{vv}, \nu\}$ forma uma base ortonormal. Além disso, como $\langle \psi_u, \psi_u \rangle = 1$, então $\langle \psi_{uu}, \psi_u \rangle$ se anula sobre o eixo- u , assim como $l_\psi = \langle \psi_{uu}, \nu \rangle$. Logo,

$$\psi_{uu} = \langle \psi_{uu}, \psi_{vv} \rangle \psi_{vv}. \quad (3.33)$$

Da mesma maneira, como $2\langle \nu_v, \nu \rangle = (\langle \nu, \nu \rangle)_v = 0$ e $\langle \nu_v, \psi_u \rangle = -m_\psi = 0$, temos

$$\nu_v = \langle \nu_v, \psi_{vv} \rangle \psi_{vv}. \quad (3.34)$$

Como $\lambda_v = 1 > 0$ e $\|\psi_u\| = 1$, podemos utilizar curvatura singular dada em 3.19, da seguinte maneira:

$$\kappa_s = \langle \psi_{uu} \times \nu, \psi_u \rangle = \langle \psi_{uu}, \psi_{vv} \rangle \langle \psi_{vv} \times \nu, \psi_u \rangle = \langle \psi_{uu}, \psi_{vv} \rangle = \frac{\langle \psi_{uu}, \nu_v \rangle}{\langle \psi_{vv}, \nu_v \rangle}, \quad (3.35)$$

onde na penúltima igualdade usamos que $\{\psi_{vv}, \nu, \psi_u\}$ é uma base ortonormal e na última igualdade usamos as equações (3.33) e (3.34).

Por outro lado, sobre o eixo- u , $m_\psi = 0$ e, pelo Lema 3.5.4, $(m_\psi)_u$ também se anula

sobre o eixo- u . Assim

$$-\langle \psi_u, \nu_{uv} \rangle = -(\langle \psi_u, \nu_v \rangle)_u + \langle \psi_{uu}, \nu_v \rangle = (m_\psi)_u + \langle \psi_{uu}, \nu_v \rangle = \langle \psi_{uu}, \nu_v \rangle. \quad (3.36)$$

Além disso,

$$-(l_\psi)_v = \langle \psi_u, \nu_u \rangle_v = \langle \psi_{uv}, \nu_u \rangle + \langle \psi_u, \nu_{uv} \rangle = \langle \psi_u, \nu_{uv} \rangle. \quad (3.37)$$

Como

$$-(n_\psi)_v = \langle \psi_v, \nu_v \rangle_v = \langle \psi_{vv}, \nu_v \rangle + \langle \psi_v, \nu_{vv} \rangle = \langle \psi_{vv}, \nu_v \rangle$$

sobre o eixo- u , as equações (3.32), (3.35), (3.36) e (3.37) implicam que

$$\kappa_s = \frac{\langle \psi_{uu}, \nu_v \rangle}{\langle \psi_{vv}, \nu_v \rangle} = -\frac{(l_\psi)_v}{(n_\psi)_v} = -\frac{(l_\psi)_v (n_\psi)_v}{(n_\psi)_v^2} \leq 0.$$

Por fim, se $K_\psi \geq \delta > 0$ em uma vizinhança de p , então $g_3(u, 0) > 0$, a equação (3.32) implicaria que $0 < (l_\psi)_v (n_\psi)_v$ e, portanto, $\kappa_s < 0$. $\square$

O Teorema 3.8.8 implica que a superfície focal com curvatura Gaussiana limitada tem apenas pontos singulares não genéricos de ψ .

Suponha que $\psi(q)$ seja uma aresta cuspidal. Como podemos supor $(U; u, v)$ um sistema de coordenadas adaptado especial, então $\langle \psi_u, \psi_{uu} \rangle = 0$ sobre o eixo- u , assim como m_ψ e n_ψ . Se $l_\psi(q) = 0$, então $\langle \nu(q), \psi_{uu}(q) \rangle = l(q) = 0$. Logo, $l_\psi(q) = 0$ se e somente se $\psi_{uu}(q)$ é perpendicular a $\nu(q)$ e $\psi_u(q)$ simultaneamente. Como ν e ψ_u também são perpendiculares, então $\{\psi_u, \psi_{uu}, \nu\}$ forma uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em q . Além disso, como ψ_u é uma direção tangente à rib $\hat{\gamma}$ e ψ_{uu} uma direção normal principal, então ν é a direção binormal e, portanto, o plano osculador de $\hat{\gamma}$ coincide com o plano tangente limitante, de onde segue o seguinte corolário:

Corolário 3.8.11 ([15], p.515) *Um ponto de aresta cuspidal $\psi(q)$ é genérico se, e somente se, o plano osculador de $\hat{\gamma}$ não coincide com o plano tangente limitante em $\psi(q)$.*

Finalizamos esta seção com um resultado sobre a curvatura normal limitante, dado em [13], o qual caracteriza os pontos de interseção da ridge com as curvas sub-parabólicas de mesma cor. Primeiramente, recordemos sua definição:

$$\kappa_\nu := \frac{\langle \hat{\gamma}'', \nu \rangle}{\|\hat{\gamma}'\|^2}.$$

Vamos denotar por $\Omega(\nu)$ (resp. $\Omega(-\nu)$) o semi-espço fechado delimitado pelo plano tangente limitante para o qual ν (resp $-\nu$) aponta.

Seja $\gamma : I \rightarrow U$ uma parametrização para a curva singular e $q = \gamma(0)$. Segue da

definição de curvatura normal limitante que, em uma vizinhança de $\psi(q)$, a rib está contida em $\Omega(\nu)$, quando $\kappa_\nu(0) > 0$ e em $\Omega(-\nu)$, quando $\kappa_\nu(0) < 0$.

Proposição 3.8.12 ([13], Lema 7) *A curvatura normal limitante da rib é nula se e somente se o correspondente ponto da ridge é sub-parabólico.*

Demonstração: Suponha que s seja uma parametrização especial de S e que a curva singular $\hat{\gamma}$ esteja parametrizada pelo comprimento de arco, com $q = \gamma(t)$ e $w = \gamma'(t) = (a, b)$. Derivando, em 0, a expressão $\langle \hat{\gamma}', \nu \rangle = 0$, temos que $\langle \hat{\gamma}'', \nu \rangle = -\langle \hat{\gamma}', d\nu_q(w) \rangle$. Então, pela definição,

$$\begin{aligned}\kappa_\nu &= \langle \hat{\gamma}'', \nu \rangle = -\langle \hat{\gamma}', d\nu_q(w) \rangle = -\langle d\psi_q(w), d\nu_q(w) \rangle = \\ &II_\psi(w, w) = a^2 l_\psi + 2ab m_\psi + b^2 n_\psi,\end{aligned}$$

onde II_ψ é a segunda forma fundamental de ψ em $\psi(q)$, definida em (1.15). Assim, pela Proposição 3.8.1, segue que

$$\kappa_\nu = b^2 n_\psi = b^2 \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1} \right) \frac{G_u}{2}. \quad (3.38)$$

Se b é nulo, então pela Observação 3.5.2(iii), a direção singular coincide com a direção nula e, portanto, ψ é um rabo de andorinha, pelo Teorema 1.3.10, o que é um absurdo. Logo $b \neq 0$ e o resultado segue do Teorema 3.8.3. $\square$

Dos resultados anteriores, podemos obter a seguinte propriedade:

Corolário 3.8.13 *Seja $\psi(q)$ um ponto de aresta cuspidal. O ponto $s(q)$ é uma interseção da ridge com uma linha sub-parabólica de mesma cor se e somente se os planos osculador e tangente limitante da rib em $\psi(q)$ coincidem.*

Demonstração: Já sabemos, pelo Corolário 3.8.11, que $\psi(q)$ é um ponto singular não genérico se e somente se os planos osculador e tangente limitante coincidem em $\psi(q)$. Além disso, por (3.38) $\psi(q)$ é uma aresta cuspidal não genérica se e somente se κ_ν se anula, já que s é uma parametrização local especial e, neste caso, l_ψ e m_ψ se anulam. Por fim, pela Proposição 3.8.12, κ_ν é nulo se e somente se as curvas ridge e sub-parabólica se intersectam. $\square$

3.9 Pontos especiais sobre a superfície

Nesta seção, vamos examinar alguns pontos que podem ocorrer na superfície S . Por exemplo, interseções de curvas especiais, como ridges e linhas de curvatura e sub-parabólicas.

Para isso, vamos supor que S está parametrizada de forma especial por s . Alguns dos casos apresentados aqui estão feitos em [13], outros obtemos como conclusão das seções anteriores. Quando se tratar de curvas ridges, estamos supondo na vizinhança de arestas cuspidais.

1. A ridge vermelha é transversal (ou tangente) a uma linha de curvatura vermelha.

Este caso está considerado na Proposição 3.6.1, onde $\psi(q)$ é uma aresta cuspidal, no caso transversal, ou um rabo de andorinha, no caso de tangência (ver Figura 3.10(a)).

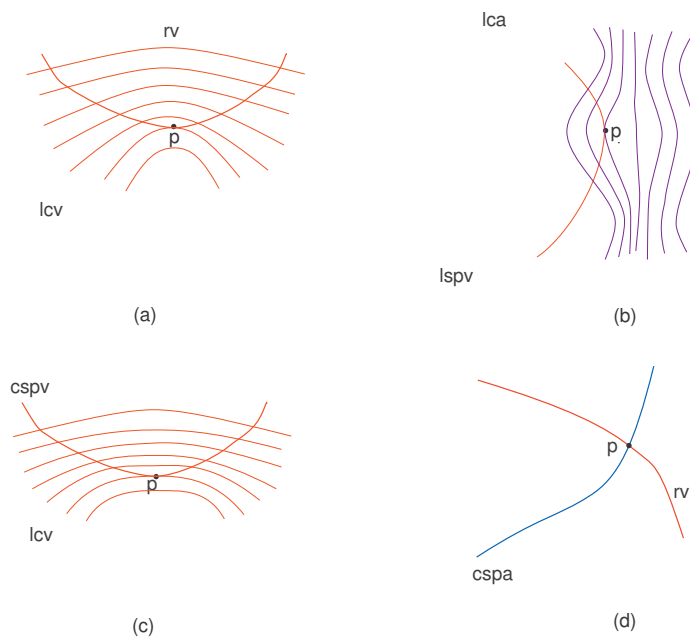


Figura 3.10: Casos especiais que ocorrem na superfície S : curvas especiais que se intersectam.

2. A curva sub-parabólica vermelha intersecta uma linha de curvatura azul. (ver Figura 3.10(b)).

Primeiramente, considere a seguinte definição:

Definição 3.9.1 *Seja $p \in S$ e $\beta : I \rightarrow S$ uma curva regular sobre S tal que $\beta(0) = p$. Dizemos que β tem uma **inflexão geodésica maior** em p se, $k_g(0) = k'_g(0) = 0$, onde κ_g é a curvatura geodésica de β .*

Sabemos, do Teorema 3.8.6, que quando uma curva sub-parabólica vermelha intersecta uma linha de curvatura azul, então a linha de curvatura azul tem uma inflexão geodésica. Quando tal intersecção é, na verdade, uma tangência, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.9.2 ([13], Teorema 8) *Seja $q \in U$ um ponto não singular sobre uma curva sub-parabólica vermelha. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) A curva sub-parabólica vermelha tangencia a linha de curvatura azul em $p = s(q)$.
- ii) A linha de curvatura azul tem um inflexão geodésica maior.

Demonstração: Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{b} : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{b}(t) = (u, v(t))$, u constante, tais que $\beta(0) = \mathbf{b}(0) = q$, $s \circ \beta$ seja uma curva sub-parabólica vermelha e $s \circ \mathbf{b}$ uma parametrização para a curva coordenada azul parametrizada pelo comprimento de arco.

Suponha que β seja tangente à curva $\mathbf{b}$ no ponto q , ou seja, $\mathbf{b}'(0) = \xi\beta'(0) = (0, v_0)$, $v_0, \xi \in \mathbb{R}$. Da equação (3.29), temos que, sobre as linhas de curvatura azul,

$$\kappa_g = 0 \Leftrightarrow G_u = 0.$$

Assim, $\kappa_g^{-1}(0)$ coincide com as curvas sub-parabólicas e, portanto,

$$\kappa'_g(0) = d(\kappa_g)_q(\mathbf{b}'(0)) = \xi d(\kappa_g)_q(\beta'(0)) = 0$$

Suponhamos agora que $s \circ \mathbf{b}$ tenha uma inflexão geodésica maior em p , isto é, $\kappa'_g(0) = d(\kappa_g)_q(\mathbf{b}'(0)) = 0$. Já sabemos que a linha sub-parabólica $s \circ \beta$ é o lugar geométrico das inflexões geodésicas das linhas de curvaturas azuis, ou seja, é dada implicitamente por $\kappa_g = 0$, onde κ_g é a curvatura geodésica de uma linha de curvatura azul. Quando tal curva é não singular em q (que é o caso), existe apenas uma direção r no qual $d(\kappa_g)_q(r) = 0$ e é exatamente a tangente da curva β . Logo, $\beta'(0)$ é paralelo a $\mathbf{b}'(0)$ e, conseqüentemente, a linha de curvatura azul e a curva sub-parabólica vermelha se tangenciam em $s(q)$.

3. A curva sub-parabólica vermelha é tangente a uma linha de curvatura vermelha (ver Figura 3.10(c)).

Suponhamos que este caso ocorre em um ponto $q \in U$. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva tal que $s \circ \alpha$ é a curva sub-parabólica vermelha, com $\alpha(0) = q$ então $\alpha'(0)$ é paralelo ao vetor $(1, 0)$. Logo, o vetor tangente à curva parabólica vermelha na superfície focal, dado por $d\psi_q(u_0, 0)$, $u_0 \in \mathbb{R}$, é paralelo à $\psi_u(p)$ que, por sua vez, pela equação (3.7), é paralelo a N . Portanto, a curva parabólica na superfície focal é tangente a N . (Ver Figura 3.11(a)).

4. A ridge vermelha é transversal a uma curva sub-parabólica azul (ver Figura 3.10(d)).

Neste caso, sendo $q \in U$ o ponto de cruzamento entre estas curvas, observe que $(\kappa_1)_v = 0$, pois é sub-parabólico azul, e $(\kappa_1)_u = 0$, pois é ridge vermelha. Desta forma, $d\kappa_q(r) = 0, \forall r \in \mathbb{R}^2$, e pela equação (3.8), a aresta cuspidal na folha vermelha da superfície focal, que tem sua tangente paralela a $\psi_v(p)$, é tangente a $\bar{\nu}$ (Ver Figura 3.11(b)).

5. A ridge vermelha intersecta uma curva sub-parabólica vermelha.

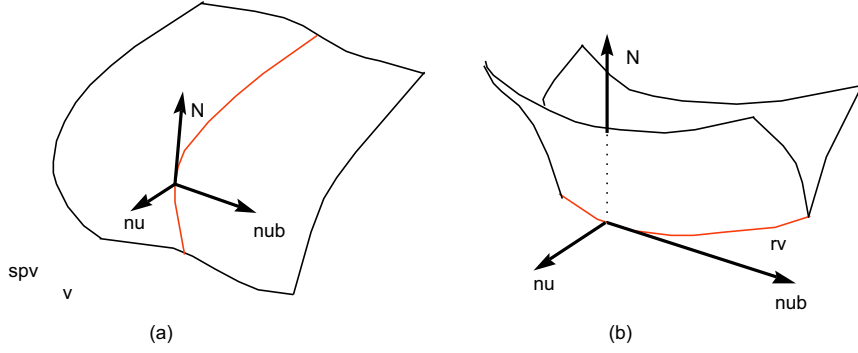


Figura 3.11: Superfície focal dos casos especiais 3 e 4, da Seção 3.9

Este caso é considerado no Corolário 3.8.11.

3.10 Um pouco sobre pontos umbílicos

Podemos notar na Figura 3.2 que, por um ponto umbílico $p = s(q)$, podem passar uma (quando p é singularidade D_4^+) ou três curvas ridges (quando p é singularidade D_4^-), isto é, em uma singularidade D_4 da superfície focal, podem passar uma ou três curvas singulares. A estrutura destas curvas está estabelecidas em [3]. O conjunto destas curvas no espaço de parâmetros é dada, a menos de difeomorfismo, pelo seguinte teorema.

Teorema 3.10.1 ([3]) *Com as notações usadas até agora. O conjunto de curvas singulares de ψ que passam por $q \in U$ é dado, a menos de difeomorfismo, por $uv(u - v) = 0$, se $\psi(q)$ é uma singularidade D_4^- e $u = 0$, se $\psi(q)$ é D_4^+ .*

Porteous, em [14], mostra que ridges podem ou não mudar de cor quando passam por um ponto umbílico. Em umbílicos elípticos (D_4^-), onde passam três ridges, existem duas configurações possíveis, uma onde todas as ridges trocam de cor (chamados de elípticos simétricos) e outra onde todas as cores se mantêm ao passar pelo ponto umbílico (elípticos assimétricos).

Uma parametrização de um ponto umbílico na forma de Monge é dada da seguinte maneira:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\kappa}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy) + \phi_4.$$

Segundo Morris, [13], os tipos de umbílico são determinados pelos termos a, b, c e d da cúbica acima e podem ser representados pelo número complexo:

$$\beta = \frac{(a + c + i(b + d))}{\omega\omega^2},$$

onde ω é uma das raízes cúbicas de $\alpha = (a - 3c + i(d - 3b))$. Com isso, o modo com que as curvas ridges e sub-parabólicas passam por um ponto umbílico é determinado por onde β está no diagrama da Figura 3.12, o que explicamos a seguir.

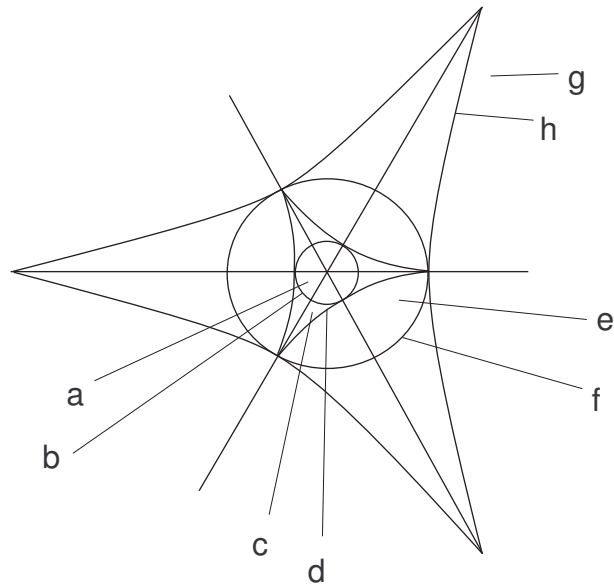


Figura 3.12: Diagrama que indica o comportamento das curvas ridges e sub-parabólicas que passam por um ponto umbílico, o círculo menor é dado por $|\beta| = 1$, o maior por $|\beta| = 3$, a tricúspide menor por $\beta = 2e^{i\theta} + e^{-2i\theta}$ e tricúspide maior por $\beta = 3(2e^{i\theta} + e^{-2i\theta})$.

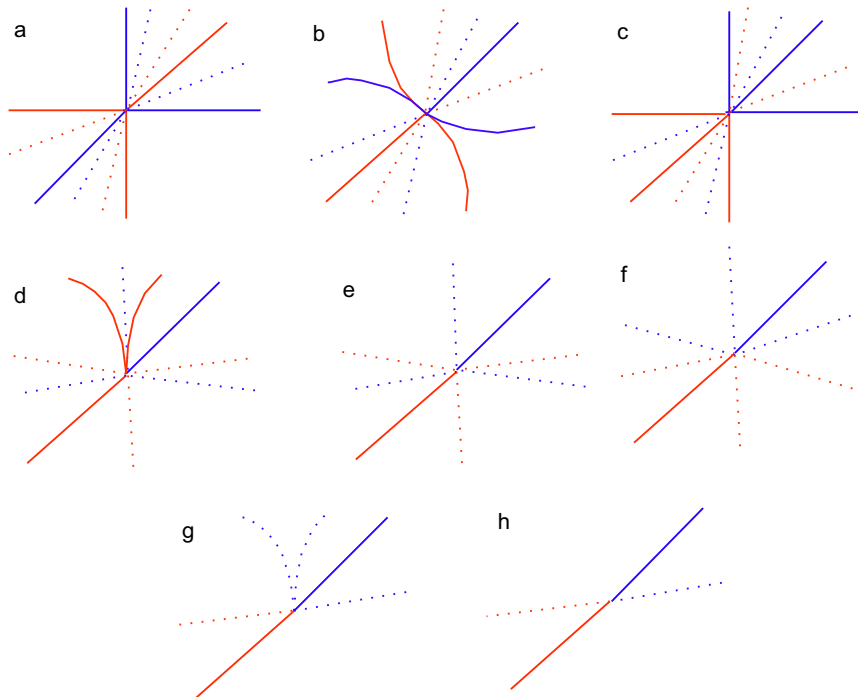


Figura 3.13: Maneiras como as curvas ridges e sub-parabólicas atravessam um ponto umbílico. As linhas contínuas simbolizam às curvas ridges e as pontilhadas às sub-parabólicas.

Dentro do círculo menor, passam 3 curvas ridges, sendo que ao passar por p trocam de cor, e sua disposição é de forma alternada (ver Figura 3.13(a)). Sobre o círculo menor,

a disposição das ridges é a mesma que dentro do círculo, só que duas das ridges de cores diferentes são tangentes (ver Figura 3.13(b)). Fora do círculo menor, mas dentro da tricúspide menor, passam 3 ridges, que também mudam sua cor ao passar por p , mas agora com as cores agrupada (ver Figura 3.13(c)). Em cima da tricúspide pequena, passa uma ridge que muda de cor e nascem duas ridges de mesma cor tangentes (ver Figura 3.13(d)). O umbílico aqui é chamado de parabólico, e é o momento de transição do tipo elíptico para hiperbólico, fora dessa tricúspide todos os umbílicos são hiperbólicos e por eles passam apenas uma ridge, sendo que diferença agora é o modo com que as curvas sub-parabólicas passam pelo ponto.

Dentro do círculo maior passam 3 sub-parabólicas, que mudam de cor ao passar pelo ponto, e estão alternadas entre vermelhas e azuis (ver Figura 3.13(e)). Fora do círculo maior, mas dentro da tricúspide maior, também passam 3 sub-parabólicas que mudam de cor, porém agora com cores agrupadas (ver Figura 3.13(f)), sobre a tricúspide maior, passa uma sub-parabólica, que mudam de cor, e nascem duas sub-parabólicas de mesma cor e tangentes (ver Figura 3.13(g)). Por fim, fora da tricúspide maior passa apenas uma sub-parabólica, que muda de cor ao passar pelo ponto (ver Figura 3.13(h)).

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOL'D, V. I.; GUSEIN-ZADE, S. M.; VARCHENKO, A. N. *Singularities of Differentiable Maps*: Vol 1. Birkhäuser, Boston. Monographs in Math. 82, 1985.
- [2] BRÖCKER, Th. ; LANDER, L. *Differentiable germs and catastrophes*. London Mathematical Society Lecture Notes series 17, Cambridge University Press, 1975
- [3] BRUCE, J. W. Generic reflections and projections. *Math. Scand.* 54, p. 36-60, 1984.
- [4] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. Generic curves and surfaces. *J. London Math Soc.*, 1981.
- [5] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. *Curves and singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. 2. ed. Cambridge University Press, 1984.
- [6] CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superficies*. 5. ed. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 619 p. (Coleção textos universitários; 4).
- [7] CAZALS, F.; POUGET, M. Differential topology and geometry of smooth embedded surfaces: selected topics. *International Journal of Computational Geometry and Applications, World Scientific Publishing*, 2005, Vol. 15, No. 5, p. 511-536.
- [8] FRANCISCO A. P. *Estrutura genérica local de curvas através de desdobramentos de funções reais*. 2015. 158 p. Dissertação - Instituto de Biociências, letras e ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2015.
- [9] FUSTER, M.C.R.; IZUMIYA, S.; RUAS, M.A.S; Tari F. *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*. World Scientific, 2015.
- [10] MONTALDI, J. A. *Contact with applications to submanifold*. Ph.D thesis, University of Liverpool, 1983.
- [11] MONTALDI, J. A. On contact between submanifolds. *Michigan Math. J.* 33, p. 81-85.

- [12] MONTALDI, J. A. On generic composites of mappings. *Bull. London math. Soc.* 23, p.81-85
- [13] MORRIS, R. The sub-parabolic lines of a surface. The Mathematics of Surfaces VI. *IMA Conf. New Series*, vol 58. Oxford Univ. Press, 1996. p. 79-102.
- [14] PORTEOUS, I. R. *Geometric differentiation. For the Intelligence of Curves and Surfaces*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [15] SAJI K.; UMEHARA M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. *Ann. of Math*, v 169, 2009. p. 491-529.
- [16] SAJI K., ROSSMAN, W.; KOKUBU, M.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Singularities at fronts in hiperbolic 3-space, *Pacific J. of Math.* **221**, 2005. p. 303-351.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 16/02/2018

Assinatura do autor