UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA: UMA PROPOSTA FAZENDO USO DE CALEIDOSCÓPIOS, SÓLIDOS GEOMÉTRICOS E *SOFTWARES* EDUCACIONAIS.

Renata Aparecida Martins

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Murari

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos e Científicos, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2003

Comissão Examinadora

_____

_____

_____

_____

_____

_____

- aluno(a) -

Rio Claro, _____ de _____ de _____

Resultado: _____

Para os professores de Matemática
do Ensino Fundamental e Médio.

AGRADECIMENTOS

À Deus, que permitiu e capacitou-me na realização desse estudo.

Ao Prof. Dr. Claudemir Murari que, desde a graduação, acreditou no meu trabalho, orientando-me com competência.

Aos Professores Dr. Geraldo Perez e Dr. Ruy Madsen Barbosa pelas sugestões e contribuições valiosas.

À Professora Maria Augusta Machado Reis, que nos deu a oportunidade de realizar a pesquisa de campo com seus alunos.

À Lenis pelas críticas e sugestões na organização e digitação do texto.

Aos meus pais, José Carlos e Jandira, pela colaboração, compreensão e apoio em todas as horas, para que eu pudesse realizar esse trabalho.

Ao CNPq pelo auxílio concedido na fase inicial da pesquisa.

A todos que, de alguma forma, participaram direta ou indiretamente no desenvolvimento e conclusão dessa obra.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 : A PESQUISA

1. Introdução 01
2. A proposta 04
3. O Problema: Por que não ensinar Geometria? 06
4. Metodologia 12
   - 4.1. Pesquisa quantitativa X Pesquisa Qualitativa 14
   - 4.2. Postura do Pesquisador 15
   - 4.3. Coleta de dados 17
     - 4.3.1. Atividades com Professores da Rede Interlink 22
     - 4.3.2. Observações gerais 26
5. Resolução de Problemas 27
6. O uso de *softwares* 34
   - 6.1. Os softwares 36
     - 6.1.1. *Geometricks* 36
     - 6.1.2. *Cabri-Géomètre II* 38
     - 6.1.3. *CorelDraw* 44
7. O jogo 48

CAPÍTULO 2 : REFERENCIAL TEÓRICO

- 2.1. Caleidoscópios 55
- 2.2. Um espelho 60
  - I. Figuras com estrutura simétrica reflexional 61
  - II. Simetria axial 63
  - III. Figuras simétricas 64
  - IV. Eixo de simetria de uma figura 65
  - V. Congruência 65
  - VI. Orientação 66
- 2.3. Dois espelhos 67

I. Espelhos Articulados 67
II. Fórmula do número de imagens 69
III. Polivértices 70
IV. Polígonos 71
V. Rotação 72
VI. Espelhos paralelos 72
2.4. Três espelhos 73
I. Regiões poligonais 75
II. Pavimentações do plano 76
III. Pavimentações do plano por polígonos regulares 78
IV. Pavimentações do plano com mais de uma configuração 84
V. Padrões caleidoscópicos 84
VI. Pavimentações uniformes 88
VII. Pavimentações uniformes e sua obtenção em caleidoscópios 89
VIII. Um estudo sobre a obtenção de bases para pavimentações do plano do tipo 1-uniforme 90
1. Bases para configuração (3^6) 91
2. Bases para configuração (6^3) 92
3. Bases para configuração (3,6,3,6) 93
4. Bases para configuração (4,6,12) 95
5. Bases para configuração (4^4) 98
6. Bases para configuração (4,8,8) 99
7. Bases para configuração (3^2,4,3,4) 101
IX. Pavimentações 2-uniforme 101
X. Bases para pavimentações do tipo 2- uniforme 103
1. Pavimentação do plano de configuração (3^2,4,3,4;3,4,6,4) 103
2. Bases para configuração (3^2,4^2;3^2,4,3,4) 107
3. Bases para configuração (3,4,3,12;3,12^2) 108
XI. Construção de uma base caleidoscópica no *software Geometricks* 108
XII. Obtenção de pavimentações no *Cabri-Géomètre II* via macros 110
XIII. Padrões ornamentais 115
XIV. Padrões ornamentais em caleidoscópios 121
XV. Obtenção de pavimentações no *CorelDraw* 123
2.5. Tesselações do espaço 125

I. Poliedros 125
II. Planificações 130
III. Poliedros semi-regulares 132
IV. Simetria no espaço 135
V. Tesselações do espaço por poliedros regulares 136
VI. Tesselações do espaço por poliedros semi-regulares 139
VII. Padrões caleidoscópicos nas faces de poliedros 140

CAPÍTULO 3 : A PESQUISA DE CAMPO
3.1. A escola 144
3.2. As atividades 147
I. Introdução ao uso do *Cabri-Géomètre II* 149
II. Um espelho 151
III. Dois espelhos 161
IV. Três espelhos e *Geometricks* 167
V. Poliedros com padrões em suas faces 177

CAPÍTULO 4 : CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONTRIBUIÇÕES 191

BIBLIOGRAFIA 198

ANEXO I
Fichas de atividades – Rede Interlink 202

ANEXO II
Questionários 214

ANEXO III
Diário de campo 216

ANEXO IV
Bases 218

ANEXO V
Planificações 225

ANEXO VI
Manual do Kit Mosaico- Cubo 238

RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi o de apresentar uma proposta alternativa para o ensino-aprendizagem da Geometria utilizando caleidoscópios, sólidos geométricos, jogos e *softwares* educacionais. A utilização conjunta desses instrumentos permitiu explorar temas como tesselações do plano (por polígonos regulares) e do espaço (por poliedros regulares com bases caleidoscópicas em suas faces). As construções geométricas (bases e planificações dos sólidos) feitas graficamente e depois no computador resultaram numa integração entre o laboratório de ensino e o de informática. São relatadas experiências com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, para os quais foram aplicadas atividades usando a Resolução de Problemas, observando-se grande interesse e participação.

ABSTRACT

The purpose of this research was to present an alternate proposal to the teaching and learning process in Geometry using kaleidoscopes, building blocks, games and educational softwares. With a parallel use of all these devices, we could explore themes as tesselations of the plan (by regular polygons) and of the space (by regular polyhedrons with kaleidoscopical bases in their sides).

Firstly, the geometrical constructions (base and flat surfaces of the solids) were made graphically and after in the computer resulting in an integration between the teaching and computer labs.

Activities, with eighth grade students, using solving problems, were applied and these experiments were reported. A great interest and participation among the students could be noticed.

CAPÍTULO 1: A PESQUISA

1. Introdução

Este trabalho iniciou-se com um projeto de Iniciação Científica desenvolvido enquanto cursávamos o terceiro e quarto anos de Licenciatura em Matemática, na UNESP, campus de Rio Claro. No terceiro ano, mais precisamente no sexto semestre, fizemos um estágio de seis meses e, posteriormente, foi realizado um pedido de bolsa para a FAPESP, que financiou nossos estudos de Iniciação Científica durante todo o quarto ano da graduação.

No projeto financiado pela FAPESP[1] o objetivo principal já era o de apresentar uma proposta alternativa na área de ensino-aprendizagem da Geometria, envolvendo o uso de caleidoscópios e sólidos geométricos. Então, fizemos os estudos preliminares de pavimentações do plano, de bases substituíveis para caleidoscópios para visualização de pavimentações e dos sólidos geométricos.

O presente estudo é mais abrangente que o anterior, pois envolve o estudo e a construção de bases substituíveis para caleidoscópios de pavimentações 1-uniformes, pesquisa e obtenção de bases substituíveis para pavimentações 2-uniformes e construção, exploração e reconhecimento de sólidos geométricos que tesselam o espaço.

Nas faces dos sólidos geométricos que tesselam o espaço, em particular dos poliedros regulares, foram colocados padrões caleidoscópicos para que no empilhamento dos mesmos, em cada lateral, se visualizasse uma pavimentação diferente. Esses mesmos padrões também foram elaborados nas dimensões do caleidoscópio para que através dele fôssem visualizadas e estudadas as pavimentações.

---

[1] Processo nº 99/11054-5

Com o uso desse material pretendeu-se alcançar vários objetivos propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, para a área de Matemática no Ensino Fundamental. Dentre eles, destacam-se em nossa proposta, a integração entre Matemática e Arte, o desenvolvimento da percepção espacial e da visualização.

Com a possibilidade da utilização de computador nas aulas de Geometria, aliamos também este aos instrumentos (caleidoscópios e sólidos geométricos) que já vínhamos utilizando. O computador surge, então, da necessidade de produzir resultados mais precisos nas construções geométricas, além da rapidez para se obter de modo gráfico, uma pavimentação do plano ou planificação de um poliedro contendo padrões em suas faces.

A escolha desses instrumentos educacionais, particularmente os caleidoscópios, baseou-se na motivação intrínseca que eles oferecem e na característica de facilitarem a visualização de uma relação ou propriedade geométrica, possibilitando assim a compreensão ou demonstração das mesmas, já que a Geometria trabalha com a percepção visual e, segundo Silva (1996), é menos abstrata que outras áreas da matemática como a Álgebra e Aritmética .

Uma das preocupações de nosso trabalho foi tornar as aulas de Geometria mais interessantes de modo a mostrar para o aluno não só a beleza da matemática, mas também fornecer um ambiente propício para a aprendizagem, além de trabalhar a expressão gráfica, a capacidade de produzir e entender imagens em Geometria.

Os jogos também fazem parte dessa proposta, originados pela manipulação dos poliedros com padrões em suas faces. É uma oportunidade de apresentar os problemas de uma forma diferente e atrativa. Pelos jogos podemos elaborar

atividades em grupo colaborando para o desenvolvimento de habilidades referentes às relações interpessoais que contribuem para a formação do cidadão [2]

Como tínhamos grande interesse pelas Artes Plásticas[3] e esse projeto proporciona uma integração com Educação Artística, incluímos nesse estudo o trabalho com mosaicos ornamentais, além das pavimentações do plano por polígonos regulares.

As idéias desenvolvidas durante a Iniciação Científica - os recursos educacionais mencionados acima, aliados à metodologia Resolução de Problemas - juntamente com a preocupação da integração da Matemática com Educação Artística, passaram a constituir nosso projeto de pesquisa.

No desenvolvimento desse estudo tivemos a oportunidade de participar de eventos de natureza científica, nos quais apresentamos vários trabalhos.

Ainda na graduação, participamos de Congressos de Iniciação Científica, Encontros, Feiras de Ciências, todos promovidos pela UNESP, em Rio Claro, Araraquara e São José do Rio Preto. Também publicamos o artigo "Pavimentação do plano de configuração (3^2, 4, 3, 4; 3, 4, 6, 4) no caleidoscópio equilátero" no Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BICMAT, Departamento de Matemática, IGCE – UNESP, Rio Claro, Vol. II, setembro/2000, p. 38-53.

---

[2] Cidadão, segundo o Dicionário de língua portuguesa de autoria de Ferreira, A.B.H. , 1985, é o "*indivíduo no gozo de seus direitos civis e políticos de um Estado, ou no desempenho de seus deveres para com este."(*p. 105).
Cidadania, para Machado (1997) é "*a construção de instrumentos legítimos de articulação entre projetos individuais e coletivos. Tal articulação possibilitará aos indivíduos, em suas ações ordinárias, em casa, no trabalho, ou onde quer que se encontrem, a participação ativa no tecido social, assumindo responsabilidades relativamente aos interesses e ao destino de toda a coletividade*."(p. 106)
Baseados nas citações acima, entendemos que cidadão é o indivíduo que exerce os direitos e deveres de um Estado, e ainda mais, participa ativamente da sociedade integrando seus interesses aos da coletividade sem com isso deixar de lado os princípios de igualdade e solidariedade humanas.

[3] "*É a utilização de elementos táteis e visuais, como volumes, cores e linhas, para se expressar por meio de esculturas*, *pinturas e desenhos".* (Guia do Estudante, 1985, p. 87)

No Mestrado, continuamos a apresentar comunicações científicas, em Encontros de Educação Matemática promovidos pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, em nível regional e nacional:

- Mosaicos Ornamentais e Poliedros Regulares (VI EPEM - FAFICA /SBEM - Catanduva - 24 a 27 de janeiro de 2001)
- Geometria e Espelhos: uma reflexão a partir da prática (VI EPEM - FAFICA /SBEM - Catanduva - 24 a 27 de janeiro de 2001)
- Tesselações espaciais com bases caleidoscópicas (VII ENEM - UFRJ/SBEM - Rio de Janeiro - 19 a 23 de julho de 2001)

Apresentamos também trabalhos promovidos pela Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional:

- Padrões caleidoscópicos no *software Cabri-Géomètre II* (XXIV CNMAC - UNI-BH/SBMAC - Belo Horizonte - 10 a 13 de setembro de 2001)
- *Cabri-Géomètre II:* o uso de macros para obtenção de pavimentações do plano através de padrões caleidoscópicos (XXIV CNMAC - UNI-BH/SBMAC - Belo Horizonte - 10 a 13 de setembro de 2001).

Os trabalhos acima mencionados foram extremamente úteis para a organização dessa pesquisa, desde a elaboração do projeto à estruturação da dissertação, uma vez que as exposições trouxeram reflexões que contribuíram de maneira significativa à execução desse estudo.

2. A Proposta

Com o uso conjunto de caleidoscópios, sólidos geométricos e *softwares* educacionais elaboramos atividades que pudessem proporcionar interesse, desafiar os alunos e principalmente, levá-los a perceber a matemática existente nos mosaicos ornamentais e pavimentações do plano e do espaço e, ao mesmo tempo, fornecer um ambiente propício para a aprendizagem de Geometria.

Como os caleidoscópios mostraram-se instrumentos capazes de despertar o interesse nos estudos das pavimentações do plano, de acordo com os resultados da pesquisa de Barbosa (1993) e Murari (1999), propomos uma integração entre caleidoscópios, sólidos geométricos e informática.

Ao justapor os poliedros que tesselam o espaço, cada um contendo padrões[4] em suas faces, obtém-se nas laterais desse empilhamento pavimentações do plano ou mosaicos ornamentais. Para isso é preciso construir as planificações de maneira adequada, o que requer vários conhecimentos de Geometria, como a obtenção de uma planificação a partir de um poliedro, construções geométricas básicas (paralelas, perpendiculares, ponto médio, etc) para a construção de cada padrão, noções de simetria e isometrias, além de outros conceitos.

Nesse estudo, tomamos por base os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN - a fim de orientarmos nosso trabalho na fase de elaboração das atividades, no que se refere aos objetivos a serem alcançados e a metodologia utilizada. Utilizamos a Resolução de Problemas em dois ambientes: o laboratório de ensino e o de informática.

O objetivo principal desse estudo é apresentar uma proposta alternativa para o ensino-aprendizagem da Geometria acerca do tema tesselações do plano e do espaço. Mas, com a utilização de caleidoscópios, sólidos geométricos e *softwares* educacionais em atividades de Geometria podemos alcançar outros objetivos: *desenvolvimento da percepção espacial e da habilidade para visualizar* (como propõe os PCN's); *motivação para estudo e exploração de propriedades* dos polígonos (especialmente relações angulares e de transformações geométricas, particularmente as relacionadas à simetria reflexional) e poliedros (algumas noções sobre poliedros envolvendo arestas, faces, vértices e planificações); *desenvolvimento de habilidades gráficas e do senso estético*. Por último, temos uma *integração multidisciplinar* com Ciências, Desenho Geométrico e Educação Artística, quando tratamos, respectivamente, de reflexão (contagem do número de imagens), construções geométricas e coloração dos padrões obtidos (levando em conta o contraste e harmonia de cores).

Também, neste estudo, obtivemos algumas bases e respectivas construções para pavimentações do tipo 2-uniforme, visando aumentar o leque de opções quando se pretende trabalhar com as pavimentações do plano por polígonos regulares. Foram obtidas também bases que quando visualizadas em caleidoscópios geram mosaicos ornamentais, construídas a partir de pequenas modificações em algumas bases que geram pavimentações do plano por polígonos regulares do tipo 1-uniforme.

Enfim, procuramos responder à pergunta central:

Pode-se ensinar Geometria fazendo uso conjunto de caleidoscópios, sólidos geométricos e informática de modo a despertar interesse e participação no aluno em relação à aprendizagem do conteúdo matemático?

Mas, além dessa pergunta principal, norteadora de nossa pesquisa, tínhamos também a intenção de verificar a ocorrência da aprendizagem (propriamente dita) dos conteúdos matemáticos apresentados. Para tanto, sempre elaborávamos as atividades levando em conta temas estudados em aulas anteriores.

A dificuldade e/ou facilidade demonstrada na execução das atividades que estavam sendo desenvolvidas era-nos o referencial quantitativo da aprendizagem ocorrida.

3. O Problema: Por que não ensinar Geometria?

O abandono do ensino da Geometria, de acordo com Pavanello (1993), vem preocupando pesquisadores e professores em todo o mundo. No Brasil, este fato tornou-se mais evidente após a promulgação da lei 5692/71, que concedia liberdade às escolas quanto à escolha dos programas das diversas disciplinas. Deste modo, alguns professores excluíram a Geometria de seus programas,

[4] Padrões que quando visualizados em caleidoscópios geram pavimentações do plano.

enquanto outros reservavam o final do ano para ensiná-la, o que, quase sempre pela falta de tempo, acabava não acontecendo.

Em suas conclusões Perez (1991) afirma que *há pouco ensino de Geometria nos níveis fundamental e médio* e *falta metodologia apropriada ao professor para que esse ensino se realize.* Lorenzato (1995) apresenta resultados de sua pesquisa que estão de acordo com muitos dos dados encontrados por Perez e enfatiza que os professores não ensinam Geometria porque não possuem conhecimento suficiente e porque ela se encontra no final dos livros didáticos adotados fazendo com que o professor se apóie na "falta de tempo" para não ensiná-la. Os programas e propostas curriculares inábeis tanto em nível de formação de professores como de alunos, também compõem este cenário.

Porém, a procura de cursos de Geometria oferecidos pelas Universidades reflete a preocupação dos professores de matemática com o abandono do ensino da Geometria, de acordo com Pavanello (1993). O abandono não se deve ao desenvolvimento da matemática e nem a conclusão de que sua contribuição para a formação do aluno não é importante, muito pelo contrário. Os Educadores Matemáticos em todo o mundo reconhecem que a Geometria tem relações importantes com diferentes áreas e que tem contribuição valiosa para a construção do conhecimento matemático.

Para entender melhor como e por quê aconteceu esse abandono, apresentaremos como se deu o desenvolvimento do ensino da Geometria no Brasil, segundo Pavanello (1993). Essa descrição envolve modificações sócio – político – econômicas e a difusão de novas idéias pedagógicas da França e dos Estados Unidos sobre a educação brasileira.

Início do século XX

O ensino da matemática na escola primária é essencialmente utilitário, aprendem-se técnicas necessárias à vida prática e às atividades comerciais.

No ensino secundário (particular), os conteúdos matemáticos são ensinados separadamente e por professores diferentes. É abstrato e não estabelece relação entre os diferentes ramos da Matemática.

O ensino sofre influências com as mudanças econômicas, políticas e sociais no país após a Primeira Guerra Mundial. Surgem medidas de combate ao analfabetismo, um dos principais problemas nacionais e a difusão da escola primária.

Ocorrem mudanças na escola elementar: expansão da escola, organização do ensino e melhoria na formação dos profissionais que nela atuam.

Pós crise de 1929 – queda da exportaąão do café

Após a crise de 1929 e a Revolução de 1930, o Governo Federal provisório cria o Ministério da Educação e adota o regime universitário para o Ensino Superior.

A escola para o povo tem caráter profissional e as escolas da elite são as escolas secundárias.

Com a instalação do Estado Novo, após o golpe de 1937, a educação não é dever do Estado, conferindo à ação estatal um caráter meramente supletivo.

A criação da Universidade de São Paulo (1934) e da Universidade do Rio de Janeiro (1935), refletiram na formação de professores em várias disciplinas e portanto, influenciaram o curso secundário e o ensino da Matemática e da Geometria.

O ensino Fundamental é organizado em cinco anos e o ensino complementar em dois anos. A matemática passou a ser ensinada por um único professor, com unidade entre os diferentes ramos da Matemática. O ensino da Geometria é iniciado intuitivamente e vai seguindo até chegar à exposição formal.

Com a instituição da Lei Orgânica do Ensino Secundário em abril de 1942, tem-se o primeiro ciclo – curso ginasial – com duração de quatro anos; segundo ciclo – clássico e científico – com d uração de três anos.

Antes dessa lei, a Aritmética, a Álgebra e a Geometria eram abordadas em cada uma das séries do curso ginasial. Agora, a Geometria passa a ser ensinada nas quatro séries, intuitivamente nas duas primeiras e dedutivamente nas duas últimas. A Geometria é priorizada no segundo ciclo e inclui-se a Trigonometria no segundo ano e a Geometria Analítica no terceiro.

1950 –1964

Nas décadas de 50 e 60 a rede escolar expande-se, mas não atende à demanda pela falta de professores.

Em 1951 e anos seguintes, a Congregação do Colégio Pedro II elabora um novo programa, que difere dos demais apenas na distribuição dos conteúdos pelas séries.

A Geometria concentra-se no primeiro ano do ginasial e não consta no segundo, estando presente no terceiro a Geometria Analítica.

O método dedutivo deve ser introduzido no curso ginasial, sendo o ensino neste nível essencialmente prático e intuitivo.

Na LDB de 1963 para o Ensino da Matemática estava escrito:

secundário[5] (nas três primeiras séries): *"será fundamentalmente de natureza instrumental" propiciando aos educandos os "conhecimentos de ordem utilitária, exigidos pelas atividades cotidianas";* **(nas finais):** *início da Geometria Plana dedutiva, demonstração dos Teoremas mais importantes e aplicações de ordem utilitária.*

O *Movimento da Matemática Moderna* (início da década de 60) preocupa-se com as Estruturas Algébricas e com a utilização da linguagem simbólica da Teoria dos Conjuntos. O ensino da Geometria adota uma abordagem dedutiva com destaque nas Transformações.

Como muitos professores não dominavam o conteúdo sobre Transformações e o enfoque nesse conteúdo não atingiu de modo significativo os livros didáticos da época no Brasil, muitos passaram a deixar de ensinar Geometria.

A LDB 5692/71 permitiu que cada professor montasse seu programa. Com isso, a maioria dos professores das quatro séries iniciais do primeiro grau trabalhavam aritmética e noções de conjunto. A geometria passou a ser ensinada

[5] O ensino secundário é organizado em dois ciclos: 1° ciclo corresponde ao curso ginasial com duração de 4 anos (atual 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental) e o 2° ciclo corresponde ao clássico, normal e científico com duração de 3 anos (atual Ensino Médio).

apenas no segundo grau ou era eliminada. O Desenho Geométrico foi substituído pela Educação Artística.

1964 em diante

A reforma Universitária modifica a estrutura interna das universidades. As principais medidas são:

- A departamentalização;
- A matrícula por disciplina (semestrais);
- A criação do curso básico;
- A institucionalização da pós-graduação;
- Unificação do vestibular (somente classificatório);
- Criação das licenciaturas curtas.

O Estado consegue, assim, o controle sobre a expansão e a orientação da demanda ao Ensino Superior através do planejamento da distribuição de vagas. Desobrigado de investir maiores recursos na expansão do ensino superior, criam-se inúmeros cursos superiores particulares.

Instituição de escola de primeiro grau de oito anos (fusão do curso primário e ginasial).

Os professores passam a trabalhar sob piores condições de trabalho:

- Remuneração rebaixada, com o aumento da carga horária;
- São pressionados pelo Estado que lembra o custo da manutenção do aluno na escola;
- Trabalha com população diferente da qual estava acostumado a lidar;
- Não contam com o apoio pedagógico ou tempo e espaço para debates e reflexões sobre seu trabalho.

É instituída a escola de segundo grau, cujo objetivo é a profissionalização, a qualificação para o trabalho e o direcionamento de parte dos alunos ao Ensino Superior, geralmente noturno.

Permanece a dualidade: escola da elite - escola onde se ensina Geometria (particular) versus onde não se ensina Geometria - escola do povo (pública).

O Ensino da Geometria ocorre nas escolas particulares e nas academias militares, sob orientações diversas. A matemática é ensinada de maneira integrada ou não.

De acordo com esse desenvolvimento histórico deve-se, segundo Pavanello (1993), caracterizar o abandono do ensino da Geometria como uma decisão equivalente às medidas governamentais.

Mas afinal, o que se perde com a ausência do Ensino da Geometria?

Na Geometria há domínio do pensamento visual e na álgebra o pensamento seqüencial, segundo Silva (1999), sendo ambos essenciais à Matemática, a ausência do ensino da Geometria prejudica a formação dos alunos neste aspecto. Para Lorenzato (1995), a Geometria exige do aluno uma maneira própria de pensar e afirma:"*ser um bom conhecedor de Aritmética ou de Álgebra não é suficiente para resolver problemas de Geometria",* apontando este como um dos maiores méritos próprios da Geometria.

Em Sherard (1993) encontramos justificativas do porquê a Geometria é uma competência básica[6]:

- É uma ajuda importante na comunicação (comunicar localizações, tamanho, forma, etc.);
- Tem aplicações importantes a problemas da vida real (medidas e leituras de mapas - coordenadas);
- Tem aplicações importantes em outros tópicos da Matemática básica. É um tema unificador. É uma rica fonte de visualização para os conceitos aritméticos, algébricos e estatísticos;

[6] "*Aquelas que um adulto precisa para sobreviver, mas principalmente as que são essenciais para se ter uma vida bem estruturada, independente e razoavelmente bem sucedida (entrar no mercado de trabalho e/ou continuar sua educação)"* Sherard (1993).

- Prepara para cursos mais avançados de Ciências e Matemática e para várias carreiras (filtro crítico);
- Oferece oportunidades para desenvolver a percepção espacial – interpretar representações bidimensionais de objetos, tridimensionais, transformações, desenvolve e refina as competências espaciais;
- Estimula e exercita habilidades gerais de pensamento ou resolução de problemas, pois oferece as oportunidades de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair, desenvolvendo a criatividade e a imaginação;
- Existem valores culturais e estéticos que advêm do seu estudo (é um meio para se ensinar estética);
- Abre ao aluno a oportunidade de um primeiro contato com o método dedutivo aplicado à Matemática;

4. Metodologia

As características do problema levaram-nos a optar pela metodologia de pesquisa qualitativa, pois segundo Stubbs e Delamont *(apud* Lúdke, André, 1986, p.15*) "a natureza dos problemas é que determina o método*, *isto é, a escolha do método dependerá do tipo de problema estudado"*.

Na abordagem qualitativa procura-se descrever um fenômeno a partir de dados obtidos do contato direto com o pesquisador, o processo é mais importante que o produto e há preocupação do pesquisador em retratar a perspectiva dos participantes. Por outro lado, a pesquisa quantitativa pode ser definida como sendo aquela em que os dados são apresentados numericamente, procura-se quantificar, representar por números um fenômeno[7]. Os métodos de coleta e análise de dados são procedimentos estatísticos. Quando se utiliza a abordagem quantitativa dentro da qualitativa procura-se entender o que os números significam e não apenas um tratamento estatístico dos mesmos.

[7] Tudo quanto é percebido pelos sentidos ou pela consciência (Ferreira, A.B.H. **Minidicionário de língua portuguesa. Rio de Janeiro:** 1985, p.218).

Problema, coleta e análise dos dados? O que isso representa? Podemos dizer que são passos de uma pesquisa. Goldenberg (1999) aborda esses passos em seu livro "*A arte de pesquisar"*, os quais incluem:

- Escolha do tema,
- Delimitação do problema,
- Definição do objeto a ser pesquisado,
- Objetivos a serem alcançados,
- Construção do referencial teórico,
- Formulação de hipóteses,
- Elaboração de instrumentos de coleta de dados,
- Análise dos dados.

Essas escolhas surgem dos interesses do pesquisador, que por sua vez sofre influências do meio social em que vive. Não é uma escolha natural: parte de sua própria história de vida. Mas, primeiro, a idéia deve ser colocada em ordem, o que é feito com o estabelecimento de um projeto de pesquisa. A elaboração de um bom projeto é uma tarefa delicada e contribui para que os dados coletados não venham favorecer uma determinada hipótese.

4.1. Pesquisa quantitativa X Pesquisa Qualitativa

Para que haja uma melhor compreensão entre uma abordagem e outra, segue um paralelo, no qual procuramos evidenciar suas diferenças.

	PESQUISA QUANTITATIVA	***PESQUISA QUALITATIVA***
CONCEITOS CHAVE	*Variáveis, operacionalização, hipóteses, confiabilidade, validade, significância, estatística.*	*Sentido, compreensão, construção social, símbolos, experiência vivida.*
DELINEAMENTO	*Estruturado, pré-determinado, detalhado.*	*Flexível, adaptável, genérico, negociado.*
AMOSTRA	*Grande, estratificada, ao acaso, controle de variáveis estranhas.*	*Pequena, intencional. Limite, pode ser n=1.*
TÉCNICAS OU MÉTODOS	*Experimentos, surveys, entrevista estruturada, observação estruturada.*	*História de vida, observação participante, entrevista aberta, documentos.*
INSTRUMENTOS	*Questionários, escalas, inventários.*	*Gravador, anotações, pesquisador em si.*
NATUREZA DOS DADOS	*Quantitativos, variáveis operacionalizadas, medidas.*	*Descritivo, texto, documentos pessoais, notas de campo, transcrições.*
NATUREZA DAS ANÁLISES	*Dedutiva, estatística, ocorre só após a coleta dos dados.*	*Indutiva, envolvente, método da comparação constante.*

Tabela reproduzida de s.n.t.

Dentre as abordagens de pesquisa (qualitativa e quantitativa) temos as empírico-analíticas, crítico-dialéticas e fenomenológico-hermenêuticas, encontradas em Perez (1991).

A empírico-analítica é uma abordagem quantitativa enquanto as crítico-dialéticas e fenomenológico-hermenêuticas são qualitativas. A primeira se enquadra perfeitamente nas características da abordagem quantitativa apresentadas na tabela acima no que se refere, principalmente, ao uso de técnicas de coleta, o tratamento e análise dos dados.

As pesquisas fenomenológico-hermenêuticas e crítico-dialéticas se utilizam de técnicas bibliográficas, entrevistas, depoimentos, vivências e narrações. Ainda nas crítico-dialéticas temos a pesquisa-ação e a pesquisa participante, ambas caracterizadas pelo interesse de transformar a realidade.

Thiollent in Rodrigues (1992) salienta que apesar de os termos "pesquisa-ação" e "pesquisa participante" serem, freqüentemente, usados como sinônimos *"não o são, porque a pesquisa-ação, além da participação, supõe uma forma de ação planejada de caráter social, educacional, técnico ou outro, que nem sempre se encontra em propostas de pesquisa participante".*

Para Rodrigues (1992), apoiado em Thiollent , toda "pesquisa-ação" é do tipo participante, porém nem toda pesquisa participante é pesquisa-ação:

"*Pesquisa participante é, em alguns casos, um tipo de pesquisa baseado numa metodologia de observação participante na qual os pesquisadores estabelecem relações comunicativas com pessoas ou grupos da situação investigada com o intuito de serem melhor aceitos. Nesse caso, a participação é sobretudo participação dos pesquisadores e consiste em aparente identificação com os valores e os comportamentos que são necessários para a sua aceitação pelo grupo considerado"*

Para Thiollent in Rodrigues (1992) uma pesquisa pode ser considerada uma "pesquisa-ação" quando houver realmente uma ação por parte das pessoas ou grupos envolvidos no problema em observação.

4.2. Postura do Pesquisador

O pesquisador pode assumir diferentes posturas:

- Participante total: o pesquisador torna-se membro do grupo a ser pesquisado, não é revelada a identidade do pesquisador (finge-se ser algo que não é).

- Participante como observador: o pesquisador revela parte dos objetivos de sua pesquisa para não influenciar o comportamento dos sujeitos.
- Observador como participante: a identidade é revelada por completo, todas as decisões são tomadas tanto pelos sujeitos quanto pelo pesquisador, os sujeitos decidem o que pode ou não tornar-se público.
- Observador total: o observador não interage com os sujeitos, podendo observar sem ser visto ou não estabelecer relações interpessoais com os mesmos.

A abordagem qualitativa carrega consigo um certo grau de subjetividade e é acusada por alguns pesquisadores *"de não apresentar padrões de objetividade , rigor e controle científico, já que não possui testes adequados de validade e fidedignidade, assim como não produz generalizações que visem a construção de um conjunto de leis do comportamento humano."* (Goldenberg, 1999, p.44).

Para Becker, citado por Goldenberg (1999), é mais fácil para o pesquisador qualitativo evitar que suas preferências pessoais influenciem na coleta ou análise dos dados do que o pesquisador quantitativo, pelo maior tempo de contato que o primeiro estabelece com os sujeitos. Mas essa consciência é necessária por parte do pesquisador a fim de evitar modelar os dados que coleta. Para tanto, é fundamental a explicitação de cada passo da pesquisa, como afirmam Max Weber, Pierre Bourdieu e Howard Becker em Goldenberg (1999).

No que se refere ao rigor é preciso que o pesquisador revele os métodos e procedimentos utilizados em uma pesquisa, para que fique explícito como os dados foram obtidos e analisados. A variedade de instrumentos de coleta de dados é sugerida para que se tenha validade dos dados, visto que não se tem "critérios absolutos e não-arbitrários para determinar o que é válido e o que não é" (André e Ludke, 1986, p.52), como há nas abordagens quantitativas.

Essa pesquisa é de abordagem qualitativa do tipo participante. Num primeiro momento observamos os sujeitos: alunos da 7ª série de uma escola pública, do período da manhã, assim como o ambiente escolar no qual estavam inseridos. Posteriormente foram "aplicadas" atividades sobre tesselações do plano e do espaço fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e *softwares*

educacionais. No decorrer das etapas foram realizadas entrevistas e questionários para complementar as observações, além das notas do caderno de campo e das atividades resolvidas pelos alunos.

4.3. Coleta de dados

Os sujeitos desse estudo foram alunos de uma 7ª série do Ensino Fundamental da escola E.E. Profª. Heloísa Lemenhe Marasca, do período matutino. Essa escola, da rede pública de ensino, localiza-se em Rio Claro à rua 14-A, no bairro Bela Vista. Esse bairro é residencial e possui alguns estabelecimentos comerciais.

A escola possui salas ambientes e um laboratório de informática com dez computadores. Dentre os *softwares* educacionais já instalados, estava o *Cabri-Géomètre II,* utilizado em nossa pesquisa.

Na fase de elaboração das atividades, aproveitamos as anotações do "período de observação" para levantarmos questões referentes ao ensino e aprendizagem dos conteúdos de Geometria, o trabalho em grupo e os aspectos sociais dos sujeitos, antes da aplicação das atividades.

Nessa etapa, tivemos a oportunidade de conhecer melhor os sujeitos de nossa pesquisa. Atuamos como observadora participante. Com o objetivo de provocar uma maior interação com os sujeitos, apresentamos os caleidoscópios com algumas bases para pavimentações do plano por polígonos regulares e bases ornamentais, aplicamos atividades introdutórias ao uso do *software Cabri-Géomètre II* e *Geometricks*, através da exploração das ferramentas e construções fundamentais.

Distribuímos um questionário aos alunos para que, através de suas respostas, pudéssemos verificar suas perspectivas em relação ao ensino-aprendizagem da Geometria.

A professora responsável pela sala qualificou sua turma como sendo bem heterogênea, com alunos fracos e fortes, sem meio termo. Na análise da

coordenadora pedagógica esta classe apresentava um baixo desempenho, era fraca em termos de nota, mas possuía liderança, era uma sala com "cara" de classe.

Nosso trabalho foi facilitado pelo fato de a escola ter adotado um livro que propunha algumas atividades com mosaicos da 5ª à 8ª séries do Ensino Fundamental. Para complementação das atividades propostas, o autor sugeria que outros trabalhos fossem desenvolvidos a fim de reforçar os conhecimentos transmitidos.

A escola contava com quatro professores de matemática, dos quais três já haviam trabalhado com mosaicos. Cada professora trabalhava de uma forma diferente com esse tema para complementar as atividades encontradas em Imenes (1998). Uma delas, Paola[8], desenvolveu um projeto, transcrito a seguir, que relacionava a escola com o cotidiano do aluno:

[8] Os nomes mencionados são fictícios, pois tínhamos o intuito de preservar o anonimato das professoras.

"PROJETO: MOSAICOS E POLÍGONOS

OBJETIVOS:
***Gerais da Matemática**:*
Priorizar a compreensão dos alunos (o que pode ser garantido quando os alunos participam da construção das idéias matemáticas).
A participação dos alunos é essencial para se atingir o conhecimento.

Do Projeto:
Desenvolver o conceito de polígonos através da percepção visual (habilidade de analisar um objeto que é apresentado visualmente).
A percepção visual é o ponto de partida para um processo de classificação.
Observar e desenhar mosaicos para construir a idéia de polígonos,
Relacionar a idéia de polígono ao seu ambiente.
Incentivar a criatividade e o prazer pelas aulas de matemática.

Da relaąão com o projeto da escola
O adolescente no mundo de hoje: um projeto de vida.
Desenvolver um cidadão ativo e participativo.
Estabelecer regras (as regras do passeio foram todas discutidas e estabelecidas antecipadamente pelos próprios alunos).
Preservação do ambiente (lixo, plantas,...).
Comportamento na rua (relacionamento com os transeuntes).

Do uso do computador:
Motivar o aprendizado, exercitar o que aprendeu, fazer descobertas, etc."

Projeto desenvolvido pela Profa. Paola em 2001, com alunos de uma 5ª série.

Para a realização do projeto, os alunos iriam para a rua observar os mosaicos existentes nas calçadas, portões, etc., como mostra a foto 1. Posteriormente, reproduziriam o material encontrado no papel, utilizando construções geométricas e coloração.



Foto 1

De volta à sala de aula, os mosaicos deveriam ser construídos através do computador, utilizando o *software Factory Game* que consiste em uma máquina de construir padrões (Foto 2). Esse *software* permite a construção de peças de mosaicos e ladrilhos utilizando conceitos matemáticos, principalmente relacionados a ângulos e transformações no plano.



Foto 2

No *Factory Game* porém, não é possível fazer a construção de mosaicos. Nele constrói-se apenas uma peça por vez, sem a possibilidade de justapor ou trabalhar com mais de uma peça ao mesmo tempo. Então, a professora solicitou aos alunos que construíssem as peças em papel cartão, usando régua e compasso,

para que pudessem obter o mosaico. Assim, os alunos puderam construir o que viram nas ruas.

Outra professora, Giovanna, solicitou aos alunos que construíssem uma porção de um mosaico utilizando cartolina e papéis decorativos (papel de presente ou outro qualquer). A confecção dos mosaicos seria feita em grupo, como tarefa de casa, sem a supervisão da professora. Para isso, utilizariam os conhecimentos obtidos nas atividades realizadas em sala de aula. Devido a beleza dos mosaicos apresentados, todos foram colocados em exposição pelos corredores e pátio da escola. Uma pequena amostra é exibida na foto abaixo:

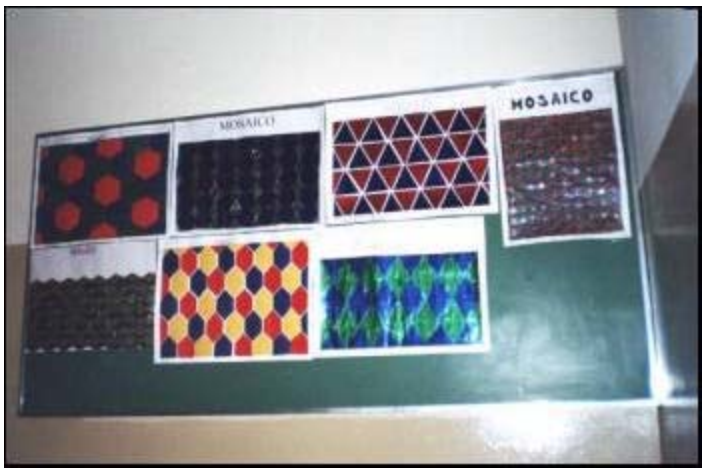


Foto 3

A construção de bases caleidoscópicas (para caleidoscópios de três espelhos), foi a opção de uma outra professora, Manuela, como forma de complementação das atividades. A escolha justificou-se em virtude de a mesma ter adquirido conhecimentos sobre caleidoscópios em atividades desenvolvidas nas reuniões da Rede Interlink em 2001.

Os mosaicos e as bases caleidoscópicas feitas pelos alunos foram colocadas nas paredes da sala de aula (foto 4).



Foto 4

4.3.1. Atividades com Professores da Rede Interlink

Participando das reuniões da Rede Interlink[9], que ocorriam no horário de HTPC, Horário de Trabalho Pedagógico e Coletivo, tivemos a oportunidade de desenvolver atividades com os Professores da escola E.E. "Heloísa Lemenhe Marasca".

Os encontros eram realizados no laboratório de informática da escola, com dez computadores, duas mesas grandes para cerca de 15 pessoas. Dentre os *softwares* educacionais destinados ao ensino de matemática dispúnhamos do *Cabri-Géomètre II, Factory Game, Graphers,* Jogos de Funções e o Fracionando.

Em três dessas reuniões apresentamos atividades usando caleidoscópios e o *software Cabri-Géomètre II*. Noutras três trabalhamos com atividades envolvendo caleidoscópios, sólidos geométricos (poliedros regulares que tesselam o espaço) e o *software Cabri-Géomètre II.*

[9] A Rede Interlink é constituída por pesquisadores, professores e futuros professores de Matemática que, por meio do trabalho colaborativo, buscam organizar e desenvolver atividades para a sala de aula que utilizem os recursos da tecnologia informática. Pesquisas vinculadas à rede Interlink objetivam conhecer o processo de mudanças que ocorrem com o professor quando este procura incorporar o uso de tecnologia informática em sua prática e levantar/analisar a demanda que a tecnologia informática coloca para os professores, sugerindo ações para serem desenvolvidas em programas de formação inicial e continuada.

O conteúdo trabalhado nesses encontros foi pautado nas notas de aula (anexo I) e desenvolvido através da metodologia Resolução de Problemas. Relataremos a seguir os aspectos mais importantes destas seis reuniões.

No primeiro encontro apresentamos o caleidoscópio com dois, três e quatro espelhos em que os professores tiveram a oportunidade de manipular esse instrumento educativo. Mostramos algumas bases ornamentais que, quando visualizadas em caleidoscópio, geram belos mosaicos. Uma das bases visualizadas nesse primeiro encontro foi a da figura 1.1, abaixo. Apresentamos também algumas bases que, com segmentos de reta em seu interior, produzem pavimentações do plano por polígonos regulares (figura 1.2). O visual "infinito" obtido quando se olha as imagens no caleidoscópio deixou os professores interessados e curiosos para conhecerem a relação entre esse instrumento e a matemática.



Figura 1.1



Figura 1.2

Após essa fase exploratória, fizemos uma breve exposição sobre caleidoscópios (o que são e para que servem); pavimentações do plano por polígonos regulares (definição, exemplos e notação); definição de base ou padrão caleidoscópico e comentamos sobre a interdisciplinaridade que o uso do caleidoscópio proporciona. Utilizamos retroprojetor, cujas transparências estão no anexo I.

Como dispúnhamos de pouco tempo não trabalhamos com um e dois espelhos. Já iniciamos as atividades com três, estabelecendo o uso de caleidoscópios para o estudo das pavimentações. O bom nível de conhecimento e maturidade dos professores, principalmente em relação à simetria, auxiliaram no desenvolvimento das atividades.

Na primeira atividade desafiamos os professores a obterem uma base que visualizada em caleidoscópio fornecesse uma pavimentação do plano por triângulos eqüiláteros de duas cores distintas. Distribuímos para cada professor lápis colorido, régua, compasso, um conjunto de três espelhos (sendo dois articulados) e folhas contendo uma base para caleidoscópio eqüilátero (Anexo I), no interior da qual deveriam construir um segmento que resultasse na base pretendida.

Descoberta a construção da base que gerava a pavimentação do plano por triângulos com duas cores diferentes, pedimos aos professores que fizessem a mesma construção no *software Cabri-Géomètre II.* Para finalizar essa atividade, foi introduzido o problema da procura de bases com maior número de cores. Assim, solicitamos que buscassem uma base que gerasse, em caleidoscópios, uma pavimentação do plano por triângulos eqüiláteros de seis cores distintas. Inicialmente, foi feito um esboço até se encontrar a base procurada. A construção propriamente dita foi realizada apenas no *software Cabri-Géomètre II*.

Em outro encontro apresentamos uma ficha (anexo I) com duas atividades para cada professor que tinham por objetivo construir uma porção da pavimentação do plano por quadrados: a primeira usando a ferramenta simetria axial a partir de um quadrado previamente construído e a segunda utilizando macro a partir do lado de um quadrado. Os professores apresentaram dificuldades no desenvolvimento dessa atividade pela falta de familiaridade com o *software Cabri-Géomètre II*. Nesse caso, foi necessário explicar, passo a passo, como chegar ao resultado solicitado.

Nos três encontros seguintes tivemos por objetivo integrar o uso de caleidoscópios e do *software Cabri-Géomètre II.*

Em uma atividade solicitamos aos professores que empilhassem um conjunto de nove cubos, formando um novo cubo, de modo que em cada lateral desse empilhamento fossem visualizados mosaicos diferentes como na figura 1.3. O material utilizado foi um conjunto de oito cubos contendo padrões em suas faces, distribuídos para cada professor. Nessa atividade pudemos trabalhar

informalmente o conceito de simetria, pois para se justapor um cubo ao lado do outro, de modo a obter um mosaico, os padrões deveriam ser simétricos.



Figura 1.3

O trabalho de empilhamento dos cubos proporcionou-nos desafiar os professores a responderem as seguintes questões:

- É possível rotacionar cada cubo de modo que continuem sendo visualizados mosaicos nas faces dos poliedros? Qual deve ser o ângulo? Qual deve ser o sentido (horário ou anti-horário)?
- Você observou a ocorrência de quais movimentos durante o empilhamento?

O desenvolvimento da atividade acima tinha por objetivo trabalhar as noções de rotação e translação no espaço e reflexão no plano. Os professores gostaram muito dessa atividade e acharam bastante interessante esse modo de trabalhar com as transformações.

A representação de um sólido geométrico no plano é feita a partir da construção de sua planificação. Então, pedimos aos professores que construíssem no *Cabri-Géomètre II,* uma planificação do cubo e que em cada face fosse construído um padrão caleidoscópico (ou base). O resultado é mostrado na figura 1.4.

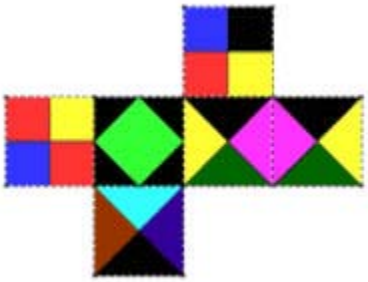


Figura 1.4

4.3.2. Observaąões gerais

Os professores mostraram-se bastante interessados em relação ao tema pavimentações, visto que já trabalhavam com a coleção Matemática[10] que explorava o trabalho com mosaicos, da 5ª à 8ª série. Quanto aos caleidoscópios, a formação de belas imagens produzidas por ornamentos despertou o interesse dos professores em relação ao seu uso na disciplina de matemática. Questões como as abaixo, surgidas logo no primeiro encontro expressaram esse interesse:

- Com quantos espelhos podemos obter um caleidoscópio?
- Como saber o número de imagens que será formado pelo caleidoscópio?
- Sua utilização em sala de aula, realmente facilita o processo de ensino-aprendizagem?
- Como os alunos reagem ao trabalho com esse instrumento educacional?

Sobre as atividades que envolviam o uso do *software Cabri-Géomètre II,* como as construções de bases e planificações, surgiram bastante dificuldades. Porém, podem ser consideradas naturais, já que este grupo de professores não sabia utilizá-lo.

---

[10] IMENES, L.M., LELLIS. *Matemática,* 1ª edição. São Paulo: Scipione, 1998. 4v de 5ª a 8ª séries, Ensino Fundamental.

O uso de fichas de atividades, por cada um dos professores, contribuiu para a realização das mesmas, principalmente quando se fez uso de *softwares*.

Embora o foco da pesquisa fosse os alunos, consideramos os professores uma rica fonte de saber, contribuindo de maneira significativa na melhor elaboração das atividades. A opinião desses educadores levou-nos a refletir sobre a clareza, objetividade e adequação dessas atividades na série em que iríamos trabalhar.

5. Resolução de Problemas

Na sociedade atual, as transformações estão ocorrendo de um modo muito veloz, devido ao uso crescente de novas tecnologias. Essas mudanças exigem também características dos indivíduos que não eram tão valorizadas tempos atrás, como, por exemplo, a capacidade de *resolver os problemas de maneira criativa, trabalhar em equipe, ter um raciocínio rigoroso e ser capaz de utilizar diferentes formas de comunicação de maneira eficiente.* De acordo com Rodrigues (1992), as características, que irão garantir a sobrevivência de um indivíduo na sociedade atual, bem como sua inserção no mundo do trabalho e das relações sociais, dependem cada vez mais de competências matemáticas. Como o papel da escola consiste em preparar as pessoas a viverem de modo produtivo em uma sociedade, na qual "aprender a aprender" torna-se cada vez mais necessário, o trabalho em sala de aula utilizando o método resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento destas competências.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) propõem a resolução de problemas para o ensino de Matemática, visando combater:

" A *prática mais freqüente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na*

atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações.
Consequentemente, o saber matemático não se tem apresentado ao aluno como um conjunto de conceitos inter-relacionados, que lhes permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível. Nesse caso, a concepção de ensino e aprendizagem subjacente é a de que o aluno aprende por reprodução/imitação" (PCN, 1998, p.40).

De acordo com este método, o processo de ensino-aprendizagem tem como ponto de partida um problema que coloque o aluno diante de situações em que precise desenvolver alguma estratégia para solucioná-las. Assim, o conceito a ser trabalhado deve ser abordado mediante a resolução e exploração de problemas, em que o que se deve valorizar é o processo de resolução e não a resposta.

O que é um problema?

" *Um problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la* " (Dante *apud* Rodrigues, 1992, p. 27).

Não basta a existência objetiva de um problema, mas seu reconhecimento pelo indivíduo. Um problema real coloca a pessoa em uma *situação de desequilíbrio,* fazendo-o sentir-se perturbado pelo fato deste não estar resolvido. Assim, o que é um problema para uma pessoa pode não ser para outra.

Os livros texto utilizados em nossas escolas trazem listas numerosas de "problemas", que podem ser resolvidos utilizando-se a mesma estratégia de um exercício já resolvido. Portanto, não contribuem para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, uma vez que se tornam tarefas mecânicas, sendo suficiente seguir um modelo.

Os problemas trabalhados pelos professores devem ser explorados e não somente solucionados. Explorar um problema é buscar soluções que diferem da natural; é analisar o problema sob diferentes pontos de vista, recorrendo às

diferentes áreas da matemática para solucioná-lo ou a qualquer outra estratégia. Desse modo, Silva (1989) e Rodrigues (1992) afirmam que os problemas ideais a serem explorados são os chamados heurísticos ou processos, isto é, aqueles que não podem ser solucionados por algoritmos ou conhecimentos matemáticos específicos, podem ser resolvidos por diversas maneiras e admitem mais de uma solução. Esses problemas também são conhecidos como problemas abertos. Existem outros tipos de problemas, que são classificados de acordo com Charles e Lester citado por Murari (1999):

- Exercícios de treinamento
- Problemas de tradução simples
- Problemas de tradução complexa
- Problemas processo ou heurístico
- Problemas de aplicação
- Problemas de quebra cabeça

Segundo Rodrigues (1992), trabalhando com o maior número possível de problemas abertos ou heurísticos em sala de aula, o professor cria condições de os alunos desenvolverem a *criatividade*[11], já que precisam elaborar alguma estratégia para solucioná-lo e conseqüentemente trabalham de maneira mais espontânea, com mais liberdade, levantando e verificando a valid ade de suas hipóteses.

Esse processo, no qual o aluno terá que desenvolver uma estratégia para solucionar seu problema, que na verdade é uma redescoberta (pois não se trata de um problema que ninguém havia pensado antes), é tão prazeroso quanto ao da descoberta de um pesquisador. Essa abordagem de ensino valoriza não somente a razão, mas também a *imaginação, a intuição e a criatividade,* pois os alunos podem expressar suas idéias e levantar hipóteses. Isso não é possível no ensino

[11] " criatividade é a habilidade para produzir métodos originais ou não usuais, aplicáveis na resolução de problemas em matemática" (Spraker *apud* Rodrigues, 1992).

tradicional em que os alunos devem aceitar e reproduzir as soluções propostas pelo(a) professor(a).

Polya (1978) sugere quatro fases para a resolução de um problema **:**

- *Compreensão do problema:* o indivíduo precisa estar motivado a resolvê-lo. Esta é a fase em que precisa entender o enunciado e identificar as partes do problema.

- *Estabelecimento de um plano:* após ter visto o problema sob diferentes aspectos, relacioná-los a situações semelhantes e dividi-los em partes, o indivíduo irá conceber um estratégia para solucioná-lo. Esta idéia pode surgir repentinamente ou após um longo período de busca.

- *Execução do plano:* é a execução do plano para solucionar o problema.

- *Retrospecto:* esta é a fase em que o indivíduo deverá testar a solução encontrada. Caso esta não seja válida deve recomeçar todo o processo de resolução do problema.

Gazire, segundo Rodrigues (1992) aborda três perspectivas de trabalho via resolução de problemas:

	Resoluąão de Problemas		
	Perspectiva 1: Um novo conteúdo	**Perspectiva 2: Aplicaąão de conteúdos**	**Perspectiva 3: Um meio de ensinar Matemática**
É baseada na crença	*"levar o aluno ao conhecimento de várias técnicas e estratégias de R.P. contribui para desenvolver nele sua habilidade de resolver problemas."*	*"aprende-se melhor um conteúdo quando ele é aplicado".*	*"se todo o conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido".*
O professor	*"Supõe que o aluno tenha conhecimento matemático necessário para resolver o problema. Seleciona e apresenta os problemas. Apresenta estratégias para solucioná-lo. Explica, analisa, discute e corrige as soluções."*	*"Seleciona, organiza, sistematiza, apresenta e explica o conteúdo a ser aprendido pelo aluno. Identifica e seleciona as técnicas para a resolução de problemas e prepara o aluno para utilizá-la."*	*"Propõe situações problema. Orienta o aluno para que ele busque o conteúdo matemático para solucionar os problemas propostos. Analisa juntamente com os alunos e os encoraja a buscar novas soluções, permitindo que este verbalize suas idéias"*
O aluno	*"Aplica as estratégias propostas pelo professor para a resolução do problema."*	*"Aprende o conteúdo que lhe é ensinado. Treina as técnicas transmitidas pelo professor. Aplica essas técnicas. Elabora, analisa e discute as soluções propostas."*	*"Ganha autonomia para decidir como atuar diante de problemas, tem liberdade para criar, experimentar e refutar estratégias e soluções".*

A resolução de problemas como um *meio de se ensinar matemática* é apontada por Rodrigues (1992) e Murari (1999) como a maneira mais adequada para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa. Os Parâmetros Curriculares Nacionais também defendem essa idéia, sugerindo, inclusive, que os conteúdos matemáticos sejam abordados a partir de situações problemas, indicando, também, alguns recursos que o professor pode utilizar para efetuar esta prática. É nessa perspectiva que pretendemos elaborar nossas atividades.

O Papel do Professor e do Aluno

Baseado em Silva (1989), Onuchic (1999) e Murari (1999) explicitaremos os papéis de professores e alunos quando se utiliza esse método:

O professor deve:

- Estimular a pesquisa e o esforço, ao invés de reforçar a atitude dos alunos em se contentar com a transmissão de soluções prontas;
- Conduzir os alunos a descobrirem o próprio erro e trabalhá-lo de maneira positiva;
- Criar condições para o bom desempenho do trabalho em grupo. Por exemplo, responder as dúvidas do grupo se todos os seus integrantes já pensaram sobre o problema em questão e não encontraram resposta, conduzir os alunos a chegarem as respostas através de questionamentos e sugestões. A lista abaixo encontrada em Polya (1978), exemplifica isso:

  " Qual a incógnita?
  Quais são as coordenadas?
  Você já resolveu um problema parecido com este antes?
  É possível fazer um desenho ou uma tabela?"

- Oferecer condições para que o aluno possa construir por si próprio o conhecimento. Portanto o professor é organizador, consultor, mediador, orientador, controlador, incentivador e não mais um transmissor de conhecimento. Geralmente, deve andar pela sala de aula percorrendo todos os grupos para observar o trabalho de seus integrantes, as estratégias que estão sendo utilizadas, devendo intervir somente quando solicitado.
- Entregar as atividades sem dar nenhuma explicação, deixando os alunos tomarem iniciativa quanto a resolução;
- Utilizar giz e lousa, ou outro recurso, para listar e organizar as idéias apresentadas pelos grupos. É preciso ter claro os conceitos trabalhados. Então cabe ao professor formalizar as idéias.

O aluno deve:

- Trabalhar em pequenos grupos;

- Ser agente da construção do seu próprio conhecimento, sendo colocado em situações em que precise desenvolver estratégias para solucioná-las;

- Expor para os outros grupos seu modo de solucionar o problema proposto;

- Interagir com o professor e com os colegas o que é fundamental na formação das capacidades cognitivas e afetivas. Portanto, é necessário desenvolver as atividades utilizando como estratégia o trabalho em grupo.

Nasser conforme Rodrigues (1992, p.29) lista a importância da utilização da Resolução de Problemas:

- *A resolução de problemas desenvolve o raciocínio dos estudantes;*
- *A resolução de problemas ajuda a desenvolver a criatividade;*
- *A resolução de problemas motiva os estudantes a aprender matemática;*

- *A matemática só tem sentido se é usada para resolver problemas reais;*
- *A resolução de problemas é uma boa maneira de avaliar aprendizagem;*
- *Através da resolução de problemas os alunos aprendem a trabalhar em grupo.*

Dante *apud* Murari (1999, p.41) *define os objetivos da Resolução de problemas:*

- *"fazer o aluno pensar produtivamente;*
- *Desenvolver o raciocínio do aluno;*
- *Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;*
- *Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática;*
- *Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;*
- *Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;*
- *Dar uma boa base matemática às pessoas".*

Como citamos, inúmeros são os objetivos alcançados quando se utiliza Resolução de Problemas e muitos são os educadores que sugerem sua utilização, razão pela qual também o fizemos, tendo em vista a adequação desse método à natureza do nosso trabalho.

6. O uso de Softwares

As tecnologias, em suas diferentes formas e uso, são agentes principais de transformação da sociedade, como aponta os PCN's. Com o surgimento da informática a escola passa a enfrentar mais um desafio: o de incorporar o uso das novas tecnologias em um trabalho tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita. Com isso tem-se novas formas de se comunicar e adquirir conhecimento.

Borba (1999) enfatiza o papel do computador visto como uma nova mídia, defendendo a idéia de que o que conhecemos e como conhecemos está ligado às mídias disponíveis, assim como Lévy (1993) que afirma que nenhum tipo de conhecimento independe do uso de tecnologias intelectuais [12].

Considerando o conhecimento intrínseco à tecnologia, os ambientes de aprendizagem devem utilizar as diferentes mídias disponíveis. O computador e a calculadora, por exemplo, podem favorecer o processo de ensino e aprendizagem da matemática, permitindo atividades experimentais mais ricas, sem que a máquina modele ou solucione problemas ao aluno.

Existem materiais que são utilizados como recursos de visualização para enriquecer a aprendizagem de conceitos matemáticos, como a representação do teorema de Pitágoras através de figuras que permitam "ver" a relação do quadrado da hipotenusa como sendo a soma dos quadrados dos catetos. Alguns *softwares* vêm enriquecer trabalhos deste tipo antes limitados, como a visualização de lugares geométricos.

Em Educação Matemática as imagens podem permitir a compreensão ou demonstração de uma relação ou propriedade. Cabe ao professor refletir sobre sua prática e utilizar os recursos mais adequados a cada conceito.

Por outro lado, a inserção dos computadores na escola não é tarefa fácil, uma vez que os professores não estão acostumados com essa nova ferramenta, embora esteja cada vez mais presente em nosso cotidiano. Essa inserção exige do professor novos conhecimentos e ações e provoca uma mudança na dinâmica da sala de aula, como aponta Penteado (1999).

Em nosso estudo optamos pelo uso de *softwares (Geometricks, Cabri-Géomètre II e CorelDraw)* que permitem a elaboração de atividades para as séries finais do Ensino Fundamental, integrados aos recursos disponíveis em um laboratório de Ensino da Matemática, em situações desafiadoras para o aluno. Em nosso caso, os caleidoscópios e os sólidos geométricos (materiais educativos) são recursos que, integrados à informática, ampliam as possibilidades de se criar um

[12] A oralidade, a escrita e a informática – Lévy (1993, p.75)

ambiente de aprendizagem no qual o aluno é o agente principal na construção do conhecimento.

6.1. Os softwares

6.1.1.Geometricks

Esse *software* foi desenvolvido pelo Prof. Viggo Sadolin, da Escola Real dinamarquesa de Estudos Educacionais (The Royal Danish School of Educational Studies) em Copenhague, Dinamarca. Os responsáveis pela versão do Geometricks em português e autores do manual são os professores Dr. Marcelo C. Borba e Dra. Miriam Penteado, do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, GPIMEM, da UNESP, Campus de Rio Claro – SP. Abaixo, apresentamos a janela principal do *Geometricks*.

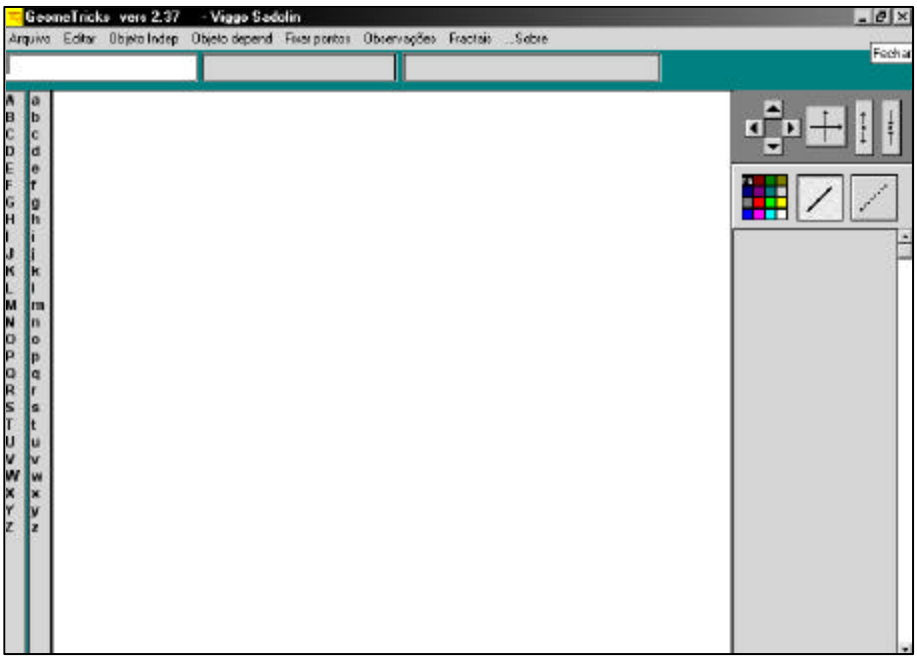


Figura 1.5

Assim como o *Cabri-Géomètre II* esse é um *software* de Geometria dinâmica, isto é, permite ao aluno fazer deformações nas figuras construídas a partir de seus elementos de base, conservando as suas propriedades. Por exemplo, ao construir um quadrado considerando que tem quatro ângulos retos e os quatro

lados congruentes, ao movimentar seus vértices quando a construção está correta a deformação não é possível, pois a figura torna-se rígida. Em outros casos, pode-se fazer atividades de investigação, em que o aluno é levado a descobrir as propriedades de uma figura geométrica.

Por permitir efetuar as construções fundamentais o *Geometricks* foi utilizado em nosso estudo para fazer as construções das bases caleidoscópicas que geram pavimentações do plano por polígonos regulares. Porém, para se obter as pavimentações do plano é preciso construir cada padrão, um ao lado do outro, o que se torna uma atividade exaustiva comparando-se à construção gráfica de uma pavimentação utilizando régua e compasso.

Menus e ferramentas

Nos **menus** encontramos as ferramentas que nos permitem fazer as construções geométricas. Esse *software* trabalha a partir dos chamados "objetos independentes", com os quais realizamos outras construções através dos chamados "objetos dependentes". Ponto na grade, ponto livre, par de pontos com distância fixa e reta são os objetos independentes. Reta definida por dois pontos, semi-reta, segmento de reta, etc., são exemplos de objetos dependentes.

Este *software* permite fazer as construções elementares da geometria euclidiana, assim como visualizar lugares geométricos e construir fractais.

Apresentamos abaixo os menus disponíveis e suas possibilidades. Maiores detalhes são encontrados no manual do Geometricks (1999).

MENUS

- **Arquivo:** apagar tudo, salvar figura, abrir figura, imprimir, sair.
- **Editar:** apagar último objeto, esconder um objeto (click), mostrar todos os objetos, limpar desenho, apagar nome (click), cor/estilo (click), copiar o desenho para área de transferência.
- **Objeto Indep:** ponto na grade (click), ponto livre (click), par de pontos - com distância fixa (click), reta (click,click).

- **Objeto depend:** reta definida por dois pontos (po,po), semi-reta (po,po), segmento (po,po), mediatriz (po,po), perpendicular (po,re), ponto médio (po,po), paralela (po,re), bissetriz (re,re), ângulo (po,re,medida), circunferência (ce,po), circunferência (ce,raio), interseção (re,re), interseção (re,ci), interseção (ci,ci).
- **Fixar pontos:** fixar ponto livre na reta (re,po), fixar ponto livre no círculo (ci,po), liberar todos os pontos fixados.
- **Observações:** lugar geométrico do ponto (po), (x,y) (po), y=ax+b (re), distância (po,po), ângulo (po,po,po), ângulo (re,re), área (po,po,po), soma das distâncias (po,po), soma das áreas (po,po,po), apagar todas as observações.
- **Fractais**: definir fractal, níveis, desenhar fractal, entre com o número de ternas, entre com o número de níveis, apagar desenho do fractal.

6.1.2.Cabri-Géomètre II

O *software Cabri-Géomètre II* foi desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain, no laboratório do Instituto de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Joseph Fourier de Grenoble, França, em colaboração com o Centro Nacional de Pesquisas Científicas (CNRS) e a Texas Instruments.

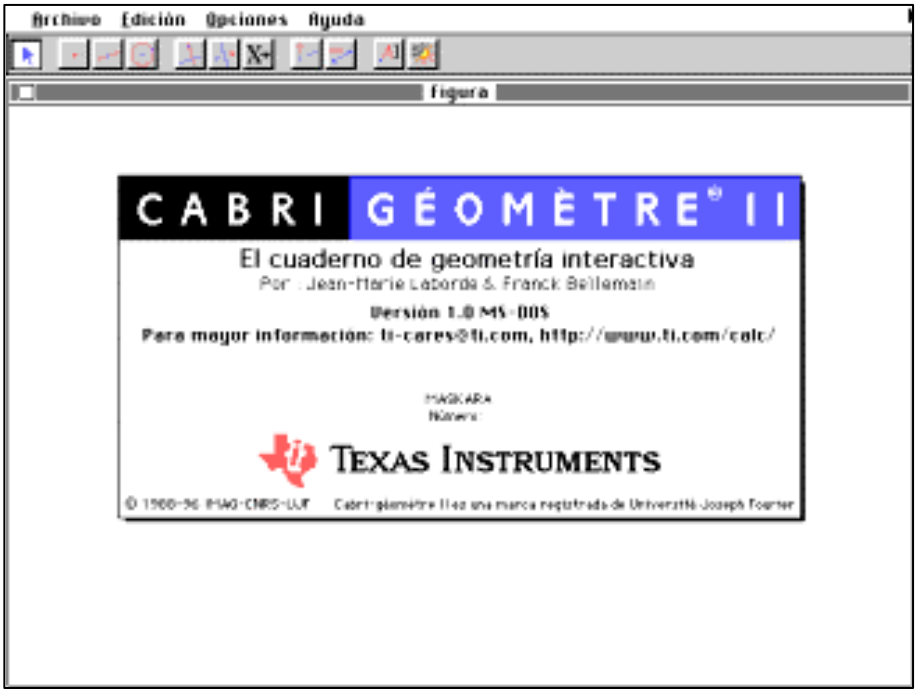


Figura 1.6

Esse *software* possibilita efetuar construções e explorações em Geometria elementar de maneira semelhante ao que se faz com régua e compasso. O *Cabri-Géomètre II* é um *software* de Geometria Dinâmica, com o qual pode-se construir figuras e deformá-las conservando ainda suas propriedades.

No *Cabri-Géomètre II,* diferentemente dos recursos da régua e compasso, pode-se visualizar lugares geométricos e construir macros. Com este último recurso ganhamos em rapidez e podemos fazer atividades antes praticamente impossíveis com régua e compasso. Por ser um *software* de Geometria Dinâmica possibilita a compreensão pelo aluno a partir da visualização e exploração das propriedades do objeto geométrico.

Podemos contar com os recursos que produzem um melhor acabamento, ocultando objetos auxiliares nas construções, colorindo linhas e regiões.

Fazendo uma comparação entre o uso do computador e da régua e compasso, segundo Henriques (1999), no *Cabri-Géomètre II* fazemos a construção e redefinimos um objeto de modo rápido em relação às realizadas com

régua e compasso. Pode-se deformar, movimentar uma figura, construir macros e visualizar lugares geométricos, o que é impossível utilizando apenas régua e compasso. Pode-se validar propriedades que no universo do lápis e papel é bastante limitado.

Quando falamos em validação não estamos querendo dizer demonstração, são coisas diferentes. Validação é o processo que o aluno faz para se chegar a uma determinada conclusão, já a demonstração matemática deve ser realizada com lápis e papel.

Em nossa proposta uma mesma atividade pode ser desenvolvida tanto pelo computador (laboratório de informática) quanto através de régua e compasso (laboratório de ensino). Existem recursos que são mais adequados do ponto de vista pedagógico em um ambiente do que em outro. O professor assume, então, um papel importante na medida em que é responsável pelo uso desse ou daquele material na exploração de um conceito.

Quando as atividades são elaboradas de modo a integrar os laboratórios de ensino e de informática, possibilita-se uma aprendizagem participante, motivadora e significativa.

Menus e ferramentas

No manual Texas Instruments Incorporated (1997) encontramos a figura abaixo que mostra a janela do *Cabri-Géomètre II*, contendo os elementos essenciais desse software.

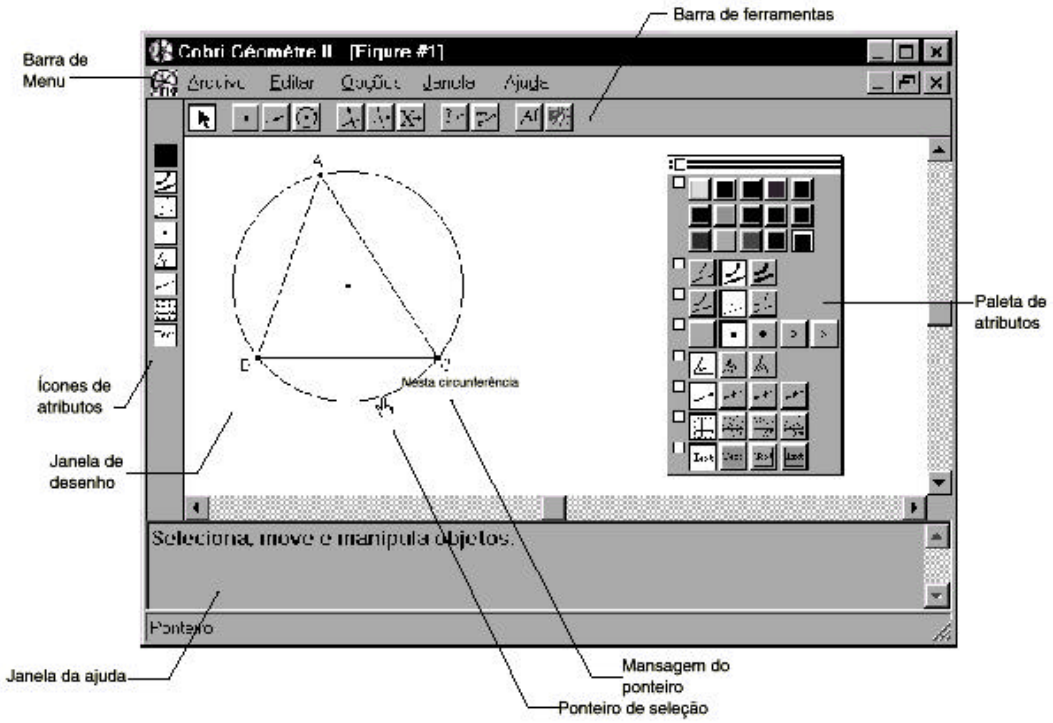


Figura 1.7

No referido manual são descritos os elementos onde encontramos:

- ***Janela de desenho:*** *esta região é onde se fazem as construções geométricas.*
- ***Barra de menu:*** *a barra de menu contém menus de interface gráfica comuns para o usuário para o gerenciamento e edição de arquivos, em conjunto com as opções do Cabri-Géomètre II.* Os menus são*: ícones de atributos, barra de menu, barra de ferramentas, janela da ajuda, janela de desenho, ponteiro de seleção, paleta de atributos, mensagem do ponteiro.*
- ***Barra de Ferramentas:*** *A barra de ferramentas contém as ferramentas de construção. Onze caixas de ferramentas são residentes na barra de ferramentas (ver ilustração abaixo). Para acessar uma caixa de ferramenta, deve-se pressionar e manter pressionado o botão do mouse sobre o ícone.*

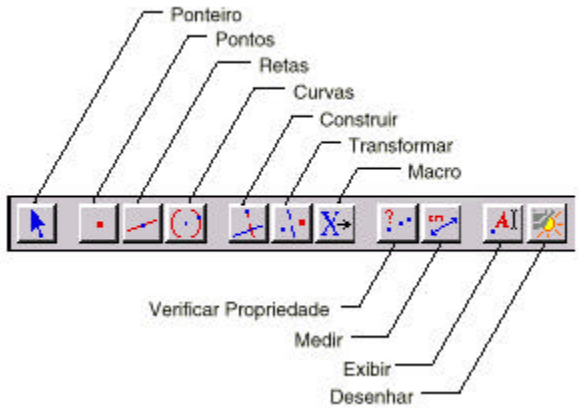


Figura 1.8

- ***Ícones de atributos:*** *Os Ícones de atributos somente serão exibidos se selecionado o comando Mostrar Atributos, no menu Opções da barra de menu. Estes permitem modificar a aparência de objetos. Pode-se criar uma paleta de atributo (menu de divisão) arrastando um ícone dos Ícones de atributos para a janela de desenho.*
- ***Opção do menu Ajuda:*** *Clicar na opção de menu Ajuda e selecionar Ajuda ou pressionar a tecla F1 para alternar a janela de ajuda entre ATIVADA e DESATIVADA.*
- ***Ponteiro de seleção:*** *O ponteiro de seleção é a ferramenta primária para selecionar menus e para construir figuras geométricas. A forma do ponteiro se modificará de acordo com a operação e a localização do momento.*
- ***Caixa fechar:*** *Essa caixa fecha a janela e cria a caixa de diálogo que permite salvar o trabalho.*
- ***Caixa de zoom:*** *A caixa de zoom alterna o tamanho da janela entre o atual e o tamanho tela cheia. Arrastando a caixa tamanho para um novo local redimensiona a janela de desenho.*
- ***Barras de rolagem:*** *Ao clicar nas barras de rolagem e nas setas de rolagem move-se, verticalmente ou horizontalmente, o conteúdo da janela de desenho.*

Nos **menus e caixas de ferramentas** encontramos os elementos que nos permitem fazer as construções geométricas. Esse *software* trabalha a partir de objetos básicos da Geometria Euclidiana como ponto, reta, segmentos e círculos e nele podemos estudar certas relações geométricas como intersecção, paralelismos, perpendicularismo, lugar geométrico, etc.

Abaixo apresentamos os menus e caixas de ferramentas do *Cabri-Géomètre II.* Os detalhes de cada um também são encontrados no manual da Texas Instruments Incorporated (1997):

MENUS

- ***Arquivo:*** *comandos para abrir, fechar, salvar ou imprimir construções.*
- ***Editar:*** *comandos para selecionar ou copiar objetos, atualizar a janela de desenho ou exibir novamente as construções.*
- ***Janela:*** *opções padrão para exibição no Windows.*
- ***Ajuda:*** *opções de Ajuda.*

CAIXAS DE FERRAMENTAS

- ***Ponteiro:*** *seleção ou transformações a mão livre.*
- ***Pontos:*** *construindo pontos.*
- ***Retas:*** *construindo objetos retilíneos.*
- ***Curvas:*** *construindo circunferências, arcos ou cônicas.*
- ***Construir:*** *construções da geometria Euclidiana.*
- ***Transformar:*** *geometria de transformação.*
- ***Macro:*** *montando macros. As novas macros passam a fazer parte desta caixa de ferramenta.*
- ***Verificar Propriedade:*** *verificação de propriedades das construções baseando-se na geometria Euclidiana.*
- ***Medir:*** *medidas ou cálculos.*
- ***Exibir:*** *marcar suas construções ou animar objetos.*

- ***Desenhar:*** *modificar a aparência de objetos ou mostrar o sistema de coordenadas.*

6.1.3.CorelDraw

O *CorelDraw* é um programa baseado em vetores, para trabalhos de texto e desenho de precisão. Possui uma interface intuitiva o que facilita a aprendizagem dos comandos, conforme mostra a figura 1.9.

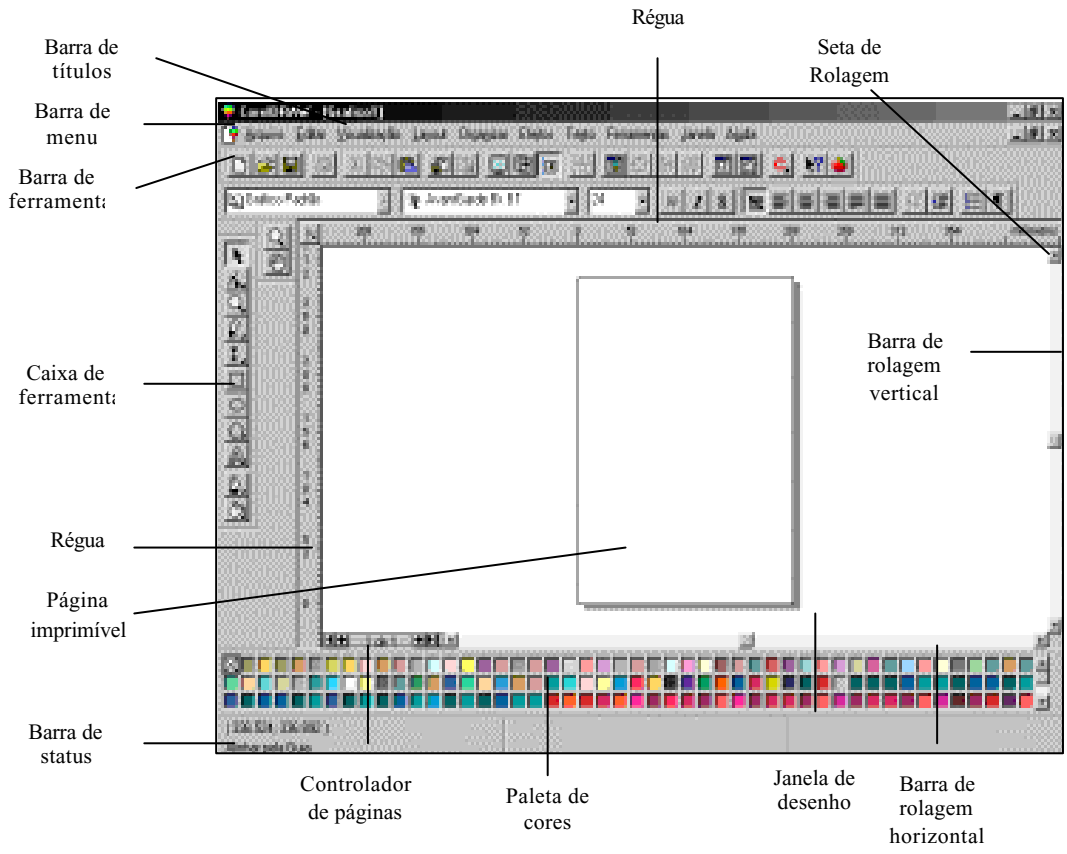


Figura 1.9

A vantagem do seu uso consiste na possibilidade de se transformar uma imagem ou texto num objeto curvo (fig. 1.10), além do zoom que permite

aumentar a visualização, sem alterar o tamanho da figura. Os efeitos de coloração, bem como outros recursos, são bastante úteis na construção de padrões.

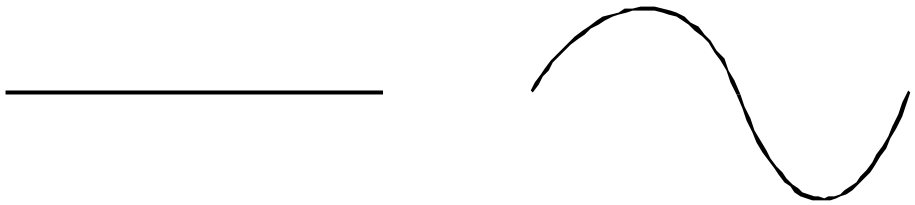


Figura 1.10

Além de produzir um melhor acabamento, pode-se efetuar reflexões, translações e rotações de maneira simples e rápida, bastando entender como cada transformação funciona em termos matemáticos elementares. Construído um determinado padrão pode-se obter um mosaico a partir da transformação desejada usando a ferramenta *organizar, transformar*.

MENUS

- **Arquivo:** novo, abrir, fechar, gravar, gravar como, gravar tudo, importar, exportar, enviar, imprimir, impressão me sclada, sair.
- **Editar:** desfazer, refazer, repetir, cortar, copiar, colar, colar especial, excluir, duplicado, clone, selecionar tudo, copiar propriedade de..., selecionar pelas propriedades, inserir novo objeto, inserir códigos de barra, inserir notas, objeto, ligações.
- **Visualizaąão:** aramado, visualização de tela cheia, visualizar somente itens selecionados, barras de ferramentas, barras de status, réguas, paleta de cores, bitmaps, correção de cor e propriedades.
- **Layout:** inserir página, excluir página, ir para a página, configurar página, gerenciador de camadas, gerenciador de estilos, estilos, configuração da grade e da régua, configuração de guias, alinhar pela grade, alinhar pelas linhas de grade, alinhar pelos objetos, alinhar por todos, alinhar por nenhum.

- **Organizar:** transformar, limpar transformações, alinhar e distribuir, ordem, agrupar, desagrupar, combinar, separar, interseção, aparar, soldar, separar, converter em curvas.
- **Efeitos:** adicionar perspectiva, envelope, misturar, extrusão, contornar, power line, lente, máscara de cores do bitmap, power clip, limpar efeito, copiar, clone.
- **Texto:** caractere, parágrafo, colunas, opções de texto, ajustar texto no caminho, alinhar pela linha de base, endireitar texto, exibir caracteres não imprimíveis, estatística, revisão, thesaurus, assistente de digitação, localizar, substituir, mudar maiúsculas/minúsculas, converter, editar texto.
- **Ferramentas:** opções, personalizar, gravar configurações, grupo de cortinas, gerenciador de visualização, gerenciador de cores, símbolos, pré-definidos, dados do objeto, dimensões, andamento da tarefa, criar, extrair, mesclar de volta, scripts.
- **Janela:** nova janela, cascata, ladrilho horizontal, ladrilho vertical, organizar ícones, atualizar janela.
- **Ajuda:** tópicos de ajuda, o que é isto, tutorial, notas de tutorial, suporte técnico, sobre o *CorelDraw.*

Utilizamos a caixa de ferramentas para efetuar nossas construções. No nosso caso elas foram mais importantes. Sobre essas construções é que usávamos o menu.

CAIXA DE FERRAMENTAS

Ferramentas:

- **Seleção:** seleciona objetos ou grupo de objetos, move, estica, gira e inclina os objetos.
- **Forma:** permite dar forma (reta ou curva) a linhas, textos, bitmaps, retângulos e elipse.
- **Zoom:** amplia e reduz parte da tela escolhida.
- **Mão livre:** um estilo de desenho tipo clique e arraste, semelhante ao lápis sobre papel.

- **Dimensão:** permite desenhar linhas de dimensões verticais, horizontais, entre outras.
- **Retângulo:** permite desenhar retângulos e quadrados.
- **Elipse:** permite desenhar elipse e círculos.
- **Polígono:** permite desenhar polígonos, estrelas e polígonos com estrelas.
- **Texto:** permite digitar textos diretamente na tela como cadeia de textos artísticos.
- **Contorno:** permite alterar a aparência de uma linha, como cor, espessura, tracejado, etc.
- **Preenchimento:** permite colorir a fronteira e o interior de uma região.

Para construir padrões que contenham apenas construções geométricas com segmentos retilíneos é mais fácil e didático utilizar-se o *Cabri-Géomètre II*. Porém, se o padrão a ser construído for ornamental, tiver curvas, usa-se o *CorelDraw.*

No *Cabri-Géomètre II,* para se obter uma pavimentação pode-se utilizar macros e a ferramenta *simetria axia*l, dependendo do objetivo da atividade, cujos recursos não são encontrados no *Geometricks.* Já, no *CorelDraw* utiliza-se a ferramenta *transformações* para obtenção de uma pavimentação.

A seguir, apresentamos um quadro explicativo sobre o uso da régua e compasso e dos diversos *softwares* em nossas atividades, no que se refere a possibilidades e resultados.

Material	Padrão	Pavimentaação	Planificaações de Poliedros com padrões nas faces
Régua e compasso	Permite	Permite, mas é bastante trabalhoso e demorado.	Permite, mas requer muito tempo.
Geometricks	Permite, mas sem coloração de regiões interiores.	Permite, mas requer muito tempo.	Permite, mas é trabalhoso.
Cabri-Géomètre II	Permite inclusive a coloração de regiões interiores não curvas e círculos	Permite de um modo rápido	Permite de um modo rápido
Corel Draw	Permite com a coloração de regiões quaisquer	Permite de um modo rápido	Permite de um modo rápido

Nas atividades com os alunos não utilizamos o *CorelDraw,* somente o *Geometricks* e o *Cabri-Géomètre II*, porque a escola não possuía tal *software*. Todavia, para elaborarmos o material a ser utilizado pelos alunos precisávamos construir padrões ornamentais que eram constituídos por curvas, o que só era possível através do *CorelDraw.* Nele construímos padrões caleidoscópicos (bases para caleidoscópios) ornamentais e planificações cujas faces continham também padrões ornamentais.

A seguir falaremos um pouco sobre jogos, outro recurso utilizados em nossa proposta educacional.

7. O jogo

Como já dissemos, o jogo faz parte de nossa proposta pedagógica e faz-se necessário justificar seu uso e sua importância no ensino da matemática.

O jogo do latim *Iocu,* que significa gracejo, zombaria, foi um termo empregado no lugar de *lude,* brinquedo, jogo, divertimento e passatempo. É definido por Gove, citada em Kamii (p.3, 1991), como sendo: "... *uma competição física ou mental conduzida de acordo com regras na qual cada participante joga em direta oposição aos outros, cada um tentando ganhar ou impedir que o adversário ganhe"*. Mas, ainda segundo Kamii, para que o jogo seja útil no processo educacional, ele deverá:

- *"Propor alguma coisa interessante e desafiadora para as crianças resolverem;*
- *Permitir que as crianças possam se auto-avaliar quanto a seu desempenho;*
- *Permitir que todos os jogadores possam participar ativamente do começo ao fim do jogo."*

Em nossa pesquisa de campo, o jogo teve esses critérios, sendo, portanto útil no processo educacional. O próprio material (conjunto de poliedros com padrões em suas faces) despertava bastante interesse nos alunos. A montagem do conjunto de poliedros, como descrito nas atividades do capítulo 3, representou um desafio para os alunos, gerando grande competição entre eles. Quando um aluno começava a se desanimar outro integrante do grupo avançava um passo até finalizar a tarefa, desencadeando, assim, uma participação ativa de todos. Eles próprios verificavam onde estavam errando, comparando os resultados com os dos amigos (tanto em relação ao tempo, quanto aos acertos) e tinham no caleidoscópio um instrumento para validar suas tentativas.

De acordo com Moura (1992), vários estudos realizados sobre o jogo destacam o seu valor como fator de aprendizagem. Entre eles estão Piaget, Vygotsky, Elkonin, Leontiev, Rosário, Kamii e De Vrires.

A utilização de jogos em sala de aula é recomendada pelo fato de que os sujeitos aprendem por ele, bem como o raciocínio advém dele. Nas primeiras ações, os professores da linha construtivista tentavam organizar os ambientes de ensino de modo a torná-los bastante ricos em quantidade e variedade de jogos. Desse modo, os alunos poderiam descobrir conceitos inerentes aos jogos através de sua manipulação.

Utilizando os jogos podemos atingir vários objetivos do ensino da Matemática. Transcrevemos abaixo, os objetivos cognitivos encontrados em Grando (1995):

- "*Introduzir os alunos nos procedimentos utilizados em Matemática na medida em que a forma do jogo, suas regras e tomadas de decisões, em cada*

movimento, são equivalentes aos elementos, definições e procedimentos de raciocínio necessários ao pensamento matemático."

- *Aprender e aplicar formas heurísticas de raciocínio, úteis na resolução de problemas. Neste sentido, pode-se constatar que as heurísticas no jogo são muito parecidas com as heurísticas na resolução de problemas.*
- *Aprender a elaborar estratégias diversificadas e a julgar, dentre as várias possibilidades, qual é mais vantajosa para se ganhar o jogo. Este aspecto é fundamental para a vida do aluno, pois, em várias situações cotidianas, ele necessita tomar decisões e se posicionar frente a diversas opções, algumas mais vantajosas, outras menos. Assim, as situações de jogo habituam o aluno a refletir, analisar e tomar decisões frente às diversas possibilidades de ação;*
- *Acumular resultados cognitivos relacionados com os objetivos educativos do jogo. E, neste sentido, garantir que tais resultados possam ser assimilados e, possivelmente, aplicados a novas situações;*
- *Desenvolver a memória e a estimativa de cálculo mental. Estes fatores se apresentam como fundamentais à aprendizagem matemática na medida em que, mais importante que a exatidão do resultado de um problema em si está a estimativa em saber se ele é mais ou menos coerente com a situação-problema proposta;*
- *Auxiliar na elaboração e compreensão da linguagem matemática e de sua estrutura lógica. Isto se apresenta como possível a partir da valorização da construção de uma linguagem própria do aluno."*

(Grando, 1995, p.103)

Na educação matemática o jogo passa a ser material de ensino quando considerado promotor de aprendizagem. É o nosso caso: temos um material que não só promove, por si próprio, o interesse dos alunos, mas com sua manipulação é possível adquirir noções de rotação, translação e reflexão, conteúdos de Geometria por nós abordados.

Sendo educativo, exige o uso intencional do material, o que requer um plano de ação que permita a aprendizagem de conhecimentos matemáticos e

culturais, de um modo geral. Dessa forma o jogo é desenvolvido com a finalidade de trabalhar com resolução de problemas.

Nessa abordagem o aluno tem que estabelecer planos e estratégias para atingir determinadas metas, executar esse plano e avaliar sua eficácia. Esses objetivos estão em harmonia com a metodologia por nós utilizada: a "Resolução de Problemas", na qual o aluno precisa desenvolver estratégias, utilizá-las e validá-las para encontrar a solução de um determinado problema matemático.

Para Moura (1992), psicologicamente falando, o jogo desestrutura o sujeito que parte em busca de estratégias que o levem a participar dele. Define o jogo como um problema em movimento: "*Problema porque envolve a atitude pessoal de querer jogar tal qual o resolvedor de problemas que só os tem quando estes lhe exigem busca de instrumentos novos de pensamento. O jogo faz esta exigência ao desafiar o sujeito para superar o outro. Esse é o sentido inicial do jogo. O jogador busca as regras e lançando mão delas procurará atingir um objetivo: a satisfação pessoal de ganhar o jogo. Ganhar, aqui, tem o sentido mais geral da necessidade da satisfação de participar e cumprir certas etapas que o levarão a um fim. Neste sentido, poderíamos assemelhar as etapas do jogo àquelas defendidas por Polya (1977), que vê na solução de problemas quatro momentos distintos: compreensão do problema, estabelecimento de um plano de solução, execução do plano e retrospecto. Este último, no caso do jogo, pode significar avaliação dos resultados obtidos."*

(Moura, p.53, 1992)

Grando (1995), buscando estabelecer uma ponte entre a ação do jogo e a resolução de um problema, concluiu que o jogo pode ser trabalhado pelo professor, como estratégia de ensino, da mesma forma que o problema é trabalhado na metodologia resolução de problemas. Assim, define jogo, no contexto do processo ensino-aprendizagem da Matemática, como "*um gerador de situações-problema, de real desafio para o aluno, e como um desencadeador de sua aprendizagem, tanto na construção de um novo conceito, quanto na fixação/aplicação de um já desenvolvido*".

Quando utilizamos a palavra jogo estamos nos referindo ora à brinquedo, ora à material educativo, que para nós não são sinônimos. Em nosso trabalho, inicialmente, apresentávamos o material pedagógico que poderia ser explorado livremente, o que seria o momento lúdico de sua utilização como brinquedo. Já num segundo momento, estruturávamos atividades de modo que o brinquedo tornava-se, realmente, um material educativo.

Com isso, do lúdico – jogo de brincadeira – ao material educativo – jogo sério – tínhamos também por objetivo desenvolver habilidades cognitivas e emocionais que são fundamentais para a formação do indivíduo, uma vez que o jogo proporciona *prazer, trabalha com o risco, a busca, a surpresa e a curiosidade,* que segundo Fazenda *(apud* Emerique, 1999, p.189) *"envolvem tanto o brincar da criança quanto o trabalho do cientista".* Estes mesmos elementos aliados ao erro, à socialização e ao respeito mútuo, encontrados nas atividades lúdicas (jogar e brincar), também fazem parte do cotidiano de um adulto.

CAPÍTULO 2: REFERENCIAL TEÓRICO

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos o embasamento matemático de nossa pesquisa que envolve a obtenção de pavimentações do plano geradas em caleidoscópios (através de bases neles colocadas) e o estudo das tesselações planas e espaciais.

Para isso estudaremos como se processa a reflexão de um ponto objeto em um, dois e três espelhos; como pavimentar o plano e o espaço com polígonos e poliedros regulares, respectivamente; as pavimentações produzidas em caleidoscópios; bases caleidoscópicas que geram pavimentações do plano por polígonos regulares; poliedros que quando empilhados geram pavimentações em suas laterais e algumas bases que fornecem pavimentações quando colocadas nas laterais de um poliedro.

Apresentaremos também algumas das pavimentações do tipo 2-uniformes que são visualizadas em caleidoscópios de três e quatro espelhos e algumas novas bases para essas pavimentações, efetuando a construção gráfica das mesmas. Estudaremos o processo de obtenção de pavimentações do plano a partir de uma base caleidoscópica no *software Cabri-Géomètre II,* através de *macros* e da ferramenta *simetria axial*.

No decorrer de nosso trabalho nos interessamos pelos padrões ornamentais, o que nos levou a utilizar o *CorelDraw* para fazer algumas das construções dos mesmos e também a obtenção dos mosaicos utilizando a ferramenta *transformação, reflexão* desse software.

Alguns padrões ornamentais caleidoscópicos foram obtidos por pequenas modificações em bases que geram pavimentações do plano por polígonos regulares. Para efetuarmos a construção de outros padrões ornamentais nos baseamos nas idéias de Escher em Maletsky (1974).

Ao trabalhar com o tema tesselações um de nossos objetivos foi o de fornecer ao professor de matemática material pedagógico que o auxiliasse a tratar temas matemáticos pouco explorados.

Os caleidoscópios, segundo Murari (1999), proporcionam uma integração entre Ciências e Física, na exploração de simetrias e contagem do número de imagens em espelhos; entre Matemática e Desenho Geométrico, em atividades de construções gráficas relacionadas a figuras e simetrias reflexionais; com Educação Artística em relação ao senso estético, principalmente quando se estuda o contraste e harmonia de cores.

Em relação aos poliedros Kallef (1998) escreve:

"*os quebra-cabeças espaciais se apresentam como um bom recurso pedagógico para o desenvolvimento da habilidade de visualização, pois observa-se que eles exercem uma grande atração sobre os alunos, principalmente sobre os mais jovens, os quais são estimulados pela beleza das cores das peças do jogo; pelo desafio representado pelo reconhecimento das formas das peças e pela dinâmica pertinente a sua manipulação. Assim sendo, a atração inerente a esse tipo de jogo tem se mostrado como um forte incentivo à sua aplicação em sala de aula.*"

Sobre os poliedros ainda, Kallef (1998) atenta para a importância da visualização espacial e das representações gráficas na aprendizagem e da grande possibilidade de relacionar seu estudo com o mundo real.

Além de dotar o aluno de novos conhecimentos, o uso de informática em nossa proposta surgiu também da necessidade de realizar construções mais precisas, com um melhor acabamento e possibilitar construções e atividades antes impraticáveis com régua e compasso.

O referencial teórico foi dividido em quatro partes:

1. Estudo básico sobre caleidoscópios, pavimentações do plano por polígonos regulares, tesselações do espaço por poliedros regulares, simetria, rotação e translação, estudo das bases caleidoscópicas que geram pavimentações do plano por polígonos regulares e de padrões ornamentais do tipo Escher;

2. Pesquisa e construção geométrica de algumas bases para pavimentações do tipo 2-uniforme;
3. Construção, exploração e reconhecimento dos sólidos geométricos que tesselam o espaço. Buscamos descobrir quais padrões caleidoscópicos poderiam ser colocados nas faces dos sólidos geométricos para que, quando empilhados, formassem as pavimentações laterais.
4. Exploração dos *softwares* educacionais utilizados no desenvolvimento de atividades envolvendo tesselações planas e espaciais.

Assim, a seguir, trataremos de forma pormenorizada os temas relacionados nos itens acima, começando pelo caleidoscópio, instrumento fundamental em nossa pesquisa.

2.1. Caleidoscópios

Caleidoscópio é qualquer conjunto de espelhos planos, perpendiculares a um mesmo plano, que possibilite a reflexão perfeita de imagens. Existem caleidoscópios com dois, três e quatro espelhos. Em nosso trabalho o de três espelhos foi o mais utilizado. Nos caleidoscópios são formadas imagens múltiplas, pois as imagens produzidas pelas reflexões em dois espelhos são refletidas no outro e assim, sucessivamente, estendendo-se por todo o plano (fig.2.1).

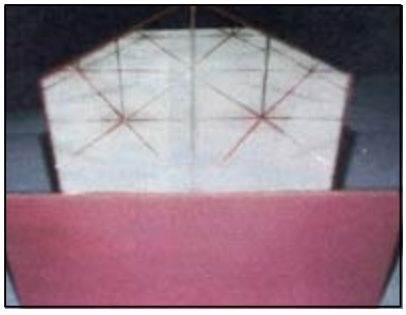


Figura 2.1

O nome caleidoscópio origina-se das palavras gregas *kalos* (belo); *eidos* (formas); *skopein* (ver); denominação dada por Sir David Brewester, em seu livro A Treatise On The Kaleidoscope.

Os caleidoscópios surgiram como material didático por volta de 1950/1960 nas disciplinas de Ciências e Física. Nas décadas de 70 e 80, encontramos obras de (Jacobs (1974), O'Daffer & Clemens (1977), Ball & Coxeter (1987)) que o incluem em atividades educacionais de matemática.

Através do estudo de pavimentações do plano por polígonos regulares via caleidoscópios podemos explorar vários conceitos geométricos como simetrias, ângulos, construção de polígonos, paralelismo e perpendicularismo, congruência, etc.

Encontramos em Daffer e Clemens (1977), Barbosa (1993) e Murari (1999) atividades com 1, 2 , 3 ou 4 espelhos que podem ser desenvolvidas com alunos de qualquer nível escolar e professores (em cursos de atualização), que possibilitam o desenvolvimento da percepção espacial, de habilidades gráficas e da criatividade. Em Murari (1999), temos várias atividades aplicadas a uma classe de 8ª série do ensino fundamental e em cursos de atualização de professores, utilizando o método Resolução de Problemas.

No comércio encontramos, normalmente, o *caleidoscópio popular* do tipo equilátero envolto por uma superfície cilíndrica (fig. 2.2). Uma das extremidades possui um orifício para observação e na outra se encontram pequenos objetos que produzem belas imagens, porém imprevisíveis.



Figura 2.2

O *caleidoscópio educacional individual* é semelhante ao popular, mas gera imagens previsíveis. Uma de suas extremidades é aberta para a substituição de "desenhos" (bases) que irão produzir, através das reflexões nos espelhos, o visual desejado. Outra extremidade possui um orifício para observação. A fig. 2.3 mostra esse tipo de caleidoscópio na forma equilátera.

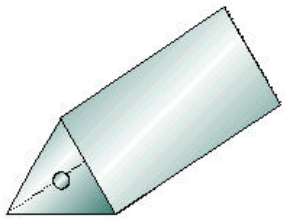


Figura 2.3

Segue-se, consoante Barbosa (1993), a construção do caleidoscópio educacional individual dos três tipos existentes: eqüilátero, isósceles e escaleno.

Material: nove lâminas de espelhos retangulares:

- 5 lâminas de 30 cm por 6 cm;
- 1 lâmina de 30 cm por 8,48 cm;
- 1 lâmina de 30 cm por 4 cm;
- 1 lâmina de 30 cm por 6,92 cm.

Montar cada caleidoscópio fixando as lâminas com fita gomada (durex, esparadrapo, etc.), de modo que as faces espelhadas fiquem voltadas para o interior. Entre as lâminas, deixe um espaço um pouco maior do que o correspondente à espessura dos espelhos, para ajuste dos mesmos e por conseqüência, possibilitar a formação dos ângulos.

Os espelhos deverão formar ângulos de (60^o,60^o,60^o), (90^o,60^o,30^o) e (90^o,45^o,45^o). Envolver os espelhos externamente com papel adesivo, tipo Contact, para evitar a entrada de luminosidade por vãos laterais.

Construir três bases superiores com papel cartão ou cartolina contendo um pequeno orifício. As bases inferiores devem permanecer provisoriamente abertas,

para que possam ser colocados padrões para se obter as diversas pavimentações do plano.

A base inferior do caleidoscópio pode ser apoiada num vidro plano colocado em cima de dois pequenos suportes de madeira, para que seja possível a entrada de luminosidade por baixo. As bases (padrões) são colocadas sobre o vidro e sob o caleidoscópio que será disposto perpendicularmente ao vidro (fig. 2.4). Esse modo permite que várias pessoas observem o resultado, sucessivamente, sem que haja a troca da base (padrão).

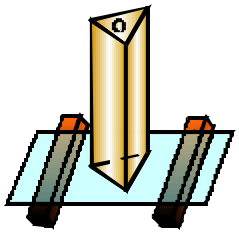


Figura 2.4

Murari (1995) sugere a construção do *caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo.* Devido à sua dimensão, ele pode ser utilizado, simultaneamente, por um grupo de alunos, variando o posicionamento para observação e a luminosidade provém do próprio ambiente.

A confecção e coloração das bases substituíveis nele utilizadas são facilitadas pelo seu tamanho, permitindo um acompanhamento das simetrias em razão do grande visual que ele pro porciona.

Construção do caleidoscópio modificado para trabalho em grupo [1]

Material:

- 3 espelhos planos retangulares, sendo dois de medidas 25 cm x 22 cm, e um de 35 cm x 15 cm;
- 2 pedaços de papelão para envolver os dois espelhos;
- uma folha de papel colorido ;

[1] Construção consoante Murari (1999)

- cola e tesoura;

Construção:

Cortar o papelão de modo que seja possível envolver os dois espelhos, superpostos, com a parte espelhada para o interior. Seria o mesmo que encapar um livro. Assim é possível articular-se os espelhos. Com o outro pedaço de papelão, envolver o outro espelho. É preciso fixar com cola os espelhos nos papelões.

As bordas dos espelhos devem ser lixadas para que este instrumento não fique cortante. Colar papel colorido na parte coberta por papelão a fim de obter-se um melhor acabamento (opcional).

A disposição dos espelhos é mostrada na fig. 2.5. A abertura dos espelhos articulados é que determinará o tipo de caleidoscópio pretendido. O equilátero terá uma abertura de 60^o, formando com o terceiro espelho ângulos de 60^o e 60^o. Para os caleidoscópios escaleno e isósceles, os ângulos deverão ser de (90^o,60^o,30^o) e (90^o,45^o,45^o), respectivamente.

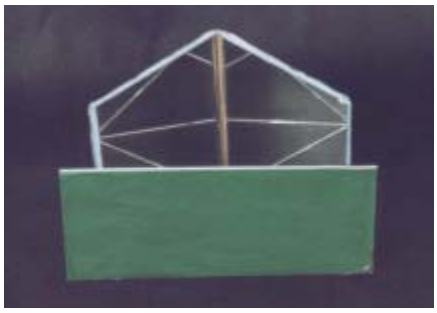


Figura 2.5

Pode-se construir um caleidoscópio com quatro espelhos (fig.2.6) utilizando-se dois conjuntos de espelhos articulados do caleidoscópio educacional modificado ou ainda quatro espelhos de dimensões 35 cm x 15 cm.



Figura 2.6

Em nossa pesquisa optamos pela utilização do *caleidoscópio educacional modificado* pelas vantagens que oferece e pelo fato de que através dele obtém-se os três tipos de caleidoscópios existentes (eqüilátero, isósceles e escaleno).

Como nosso trabalho envolve a visualização de pavimentações em caleidoscópios formados por três ou quatro espelhos, para um melhor entendimento sobre o comportamento das reflexões, faremos um estudo de como elas se processam, iniciando por um espelho:

2.2. Um espelho

A geração de imagens em um espelho, ou seja, a *reflexão*, é explicada pelas leis da ótica geométrica:

" *1ª) O raio incidente, a normal à superfície no ponto de incidência e o raio refletido estão num mesmo plano.*

2ª) O ângulo de incidência i (do raio incidente com a normal) é igual ao ângulo de reflexão (do raio refletido com a normal): i = r.

Em particular, se o raio incidente já é a normal ao espelho, o raio refletido volta na mesma direção.

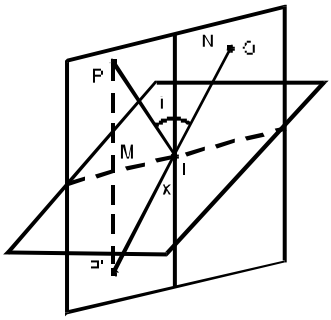
Quando a superfície é plana, dizemos que o espelho é plano.

A imagem de um ponto é o encontro dos raios refletidos ou de seus prolongamentos, como no caso dos espelhos planos; essas imagens são chamadas, então, virtuais.

Um ponto objeto P em frente a um espelho plano sendo visto por um observador (olho) O através do espelho, parece ao observador estar em P', atrás do espelho (sua imagem virtual), impressão causada pelo fato de O receber o raio luminoso refletido e que, vindo de P, incide no espelho e, segundo as duas leis dadas, reflete-se atingindo O.

Em razão da primeira lei, os pontos P, I, O e também P' estão num mesmo plano; e em razão da segunda, resulta que P' é o simétrico de P em relação à reta intersecção desse plano com o plano do espelho (fig. 2.7) .

Fica, então, justificada a denominação simetria reflexional ou reflexão dada a simetria axial."



(Barbosa, 1993, p.38)

Figura 2.7

I. Figuras com estrutura simétrica reflexional

Quando uma figura geométrica puder ser dividida em duas partes congruentes por meio de uma reta (eixo de simetria), dizemos que ela apresenta estrutura simétrica. Caso contrário, dizemos que a figura tem estrutura assimétrica.

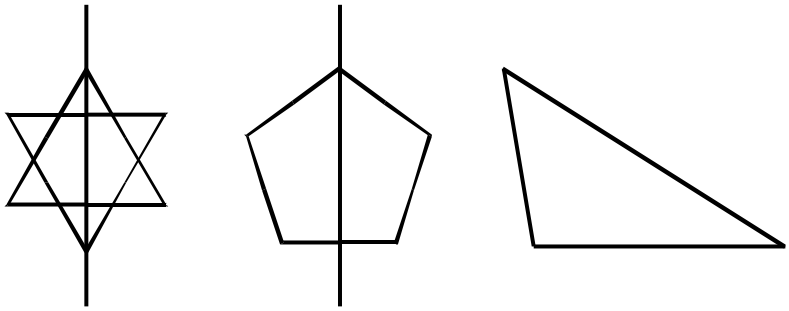


Figura 2.8

Se uma figura geométrica tiver uma estrutura simétrica (linhas de simetria), pode-se deslocá-la sem retirá-la do plano e fazê-la coincidir com sua imagem refletida em um espelho (fig.2.9).

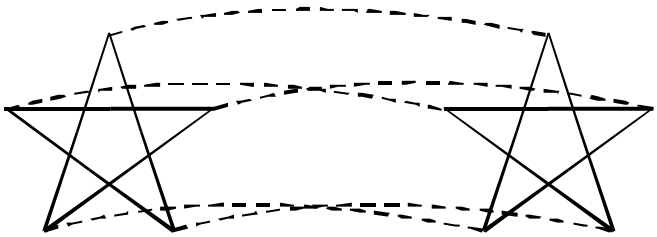


Figura 2.9

Por outro lado, quando a figura geométrica não possui linha de simetria (estrutura assimétrica), é impossível deslocá-la sem retirá-la do plano e fazê-la coincidir com sua imagem (fig.2.10).

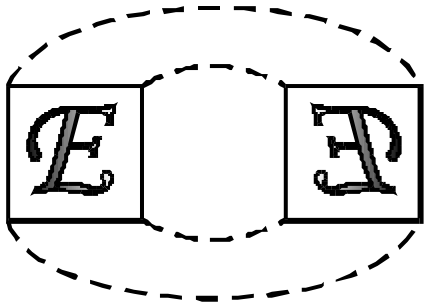


Figura 2.10

No caso de figuras sem linha de simetria, dizemos que a imagem e a figura possuem *isometrias opostas* (indiretas) ou *inversamente congruentes* ou *enantiomorfas.*

Duas figuras planas isométricas por reflexão dizem-se *enantiomorfas* se não podem ser superpostas por nenhum movimento rígido contínuo (isometria direta) sobre o plano[2].

No item 2.5. I (poliedros), veremos a importância desse conceito em nosso estudo para a obtenção de cubos com padrões caleidoscópicos em suas faces que, quando empilhados, produzem porções de pavimentações laterais.

Fazendo uso de um espelho podemos trabalhar de maneira concreta e informal com ponto simétrico, figuras simétricas, congruência de triângulos, eixo simétrico de figuras geométricas e orientação.

II. Simetria axial

"Consideremos uma reta r e P um ponto não pertencente a r.

Seja P' tal que P'M = PM e PP' ⊥ r.

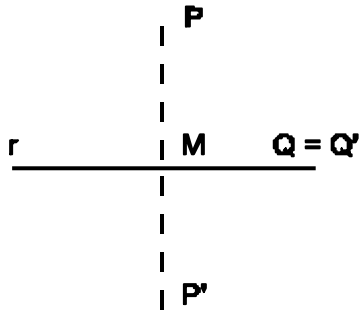


Figura 2.11

Então, dizemos que P' é o simétrico de P em relação a r considerada eixo; essa simetria é chamada axial.

Se Q ∈ r, então o seu simétrico, Q', coincide com Q.

Sejam A' e B' os simétricos de A e B em relação a r (fig.2.12).

[2] Consoante Murari (1999, p.91) nenhuma isometria direta aplica uma figura sobre a outra.

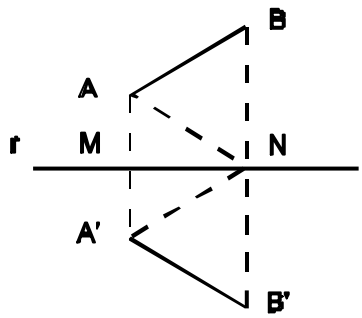


Figura 2.12

Então, MA' = MA e NB' = NB. Consideremos os triângulos ΔAMN *e* $\Delta A'MN$.

Como $MA' = MA$ *e* $A\hat{M}N = A'\hat{M}N = 90^o$, *MN comum, segue que* $\Delta AMN \cong \Delta A'MN$ *(congruentes) e NA' = NA, bem como ,* $M\hat{N}A' = M\hat{N}A$.

Como $M\hat{N}B = M\hat{N}B' = 90^o$ *, segue que* $A'\hat{N}B' = A\hat{N}B$.

De $AN = A'N$, $BN = B'N$ *e* $A'\hat{N}B' = A\hat{N}B$, *temos o triângulo* $\Delta ANB \cong \Delta A'NB'$. *Assim, A'B' = AB.*

Tomando r como eixo, dizemos que a simetria axial conserva as distâncias."

(Murari, 1999, p.85-86)

III. Figuras simétricas

Segundo Murari (1999) *"quando todos os pontos de uma figura geométrica tem seu simétrico em relação a uma reta r (espelho), dizemos que a figura formada pelos simétricos é simétrica em relação a figura original."*

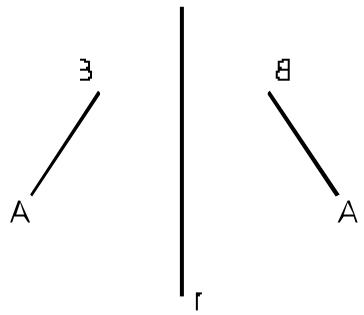


Figura 2.13

IV. Eixo de simetria de uma figura

Uma figura possui eixo de simetria quando ela possui estrutura simétrica (item I). Na fig. 2.14, o eixo de simetria divide a figura em duas partes idênticas (simetria axial). Em atividades educacionais esse eixo pode ser representado por espelhos (simetria reflexional).

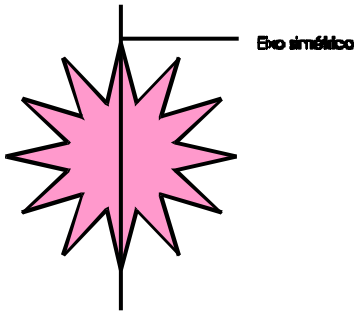


Figura 2.14

V. Congruência

Fazendo uso de um espelho, podemos estudar congruência de figuras geométricas. Por exemplo, colocando um espelho sobre o segmento de reta EE', obtemos, por reflexão, um triângulo congruente ao triângulo ABC.

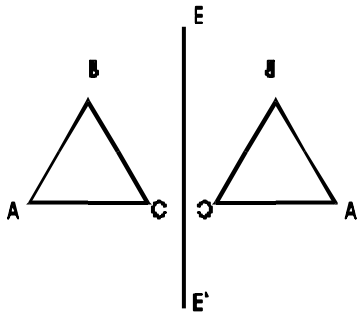


Figura 2.15

Note que para dois triângulos serem congruentes seus lados e ângulos correspondentes devem ser iguais e a reflexão preserva essas propriedades (observe a figura 2.15). Porém, uma propriedade não é preservada, veja a seguir:

VI. Orientação

Observe a figura abaixo, onde E representa um espelho (eixo simétrico).

Dizemos que as figuras abaixo possuem orientações opostas.

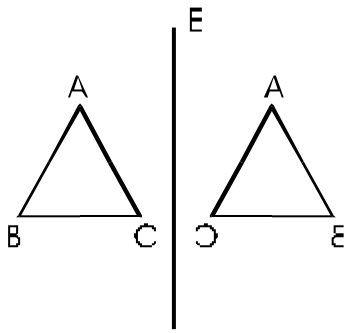


Figura 2.16

Ao traçar o triângulo ΔBAC na seqüência de B para A, de A para C e de C para B, o deslocamento se dá no sentido horário. Ao caminhar de B para A, de A para C e de C para B na imagem refletida no espelho, o deslocamento ocorre no sentido anti-horário. Assim, dizemos que os triângulos têm orientação horária e anti-horária, respectivamente.

OBS: Note que a orientação de uma figura geométrica depende da ordem em que nomeamos seus vértices.

2.3. Dois Espelhos

I. Espelhos Articulados

Com dois espelhos articulados, como o formato de um livro aberto, teremos o surgimento de espelhos virtuais, que são as reflexões de um espelho original no outro e reflexões dos espelhos virtuais nos originais. Para entendermos melhor como isso se processa, representaremos os espelhos por E_1 e E_2, segmentos de reta, onde O é a intersecção de E_1 com E_2, formando um ângulo $\hat{z}$.

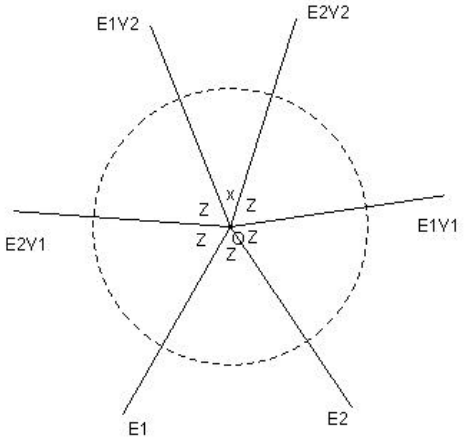


Figura 2.17

- E_1 refletido em E_2 gera o espelho virtual E_1V_1;
- E_2 refletido em E_1 gera o espelho virtual E_2V_1;
- E_1V_1 refletido em E_1 gera o espelho virtual E_1V_2;
- E_2V_1 refletido em E_2 gera o espelho virtual E_2V_2;

O espelho virtual E_1V_2 não será refletido por E_2, pois o ângulo entre eles é maior que 180°. O mesmo ocorre para E_2V_2 em E_1. Logo, teremos mais espelhos virtuais quando o angulo $\hat{x}$ ($\hat{x} = E_1V_2\ \hat{O}\ E_2V_2$) for maior que $\hat{z}$, ou seja, quanto menor $\hat{z}$, maior o número de espelhos virtuais.

Ao colocarmos um *ponto objeto* entre dois espelhos articulados, teremos a produção de imagens conforme encontrado em Barbosa (1993):

Seja P um *ponto objeto* entre dois espelhos, E_1 e E_2 na figura abaixo, este ponto e suas imagens pertencerão a uma circunferência de centro O e raio OP, cujo centro representa o ponto em que os espelhos se interceptam. A interseção desta circunferência com cada espelho é representado pelos pontos A e B. Seja $\overset{\frown}{AB} = \hat{z}$ o arco de abertura dos espelhos, tal que $\overset{\frown}{PA} = x$ e $\overset{\frown}{PB} = y$. A partir das reflexões de P nos espelhos obtemos suas imagens Q e R. Por sua vez, Q gera S e como a simetria reflexional é uma isometria[3], teremos RS = 2 x. De modo análogo, a reflexão de R produz T, com QT = 2y. Obtemos U a partir de S, com TU = 2x; e V a partir de T, com SV = 2y; e assim sucessivamente.

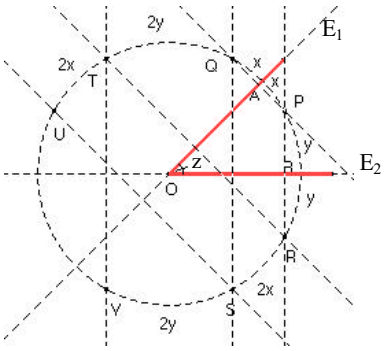


Figura 2.18

Desse modo, a partir de P as imagens se distribuem na circunferência, sendo marcados 2x e 2y alternadamente num sentido e no outro. Assim, cada vez que marcamos $2x + 2y = 2(x + y) = 2\ \hat{z}$ obtemos duas imagens.

Ao marcar-se as imagens nos dois sentidos, haverá certamente ocasiões em que elas se tornam improdutivas, pois se localizam atrás dos espelhos (de frente para a face não espelhada), não mais se produzindo novas imagens. Logo, não se pode continuar marcando 2x ou 2y, a menos que $2\hat{z}$ seja divisor de 360°, em que temos a coincidência de imagens. Em particular, para $\hat{z}$ divisor de 360° temos a coincidência de imagens, quando x = y (fig 2.19).

---

[3] Segundo Murari (1999, p. 86) uma isometria é uma transformação geométrica entre pontos do plano (ou do espaço) que preserva distâncias, isto é, se *(P, P')* e *(Q,Q')* são pares de pontos correspondentes pela transformação, temos $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

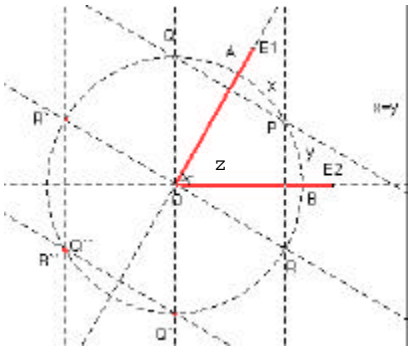


Figura 2.19

II. Fórmula do número de imagens

Considere E e E' espelhos articulados, tal que $\hat{a}$ seja o ângulo entre eles, como mostra a figura 2.20. Sejam A um ponto objeto na circunferência e $\hat{b}, \hat{c}$ ângulos, tal que $\hat{b} + \hat{c} = \hat{a}$.

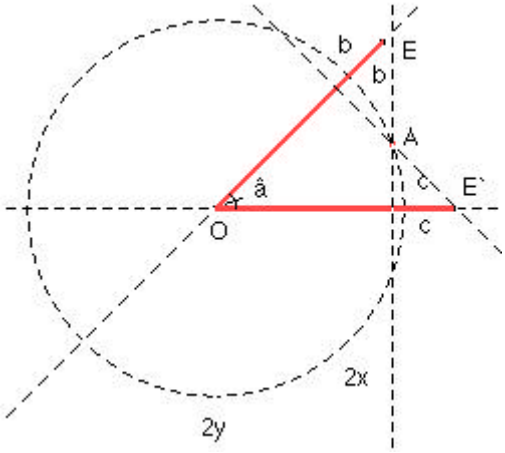


Figura 2.20

Em Barbosa (1957), encontramos a seguinte fórmula para o número de imagens: $n = \frac{360° - R}{\hat{a}} + n'$, sendo n' = *-1, 0, 1* ou 2 conforme seja R = *0,* $0 < R \leq 2b$, $2b < R \leq 2c$ ou $2c < R < 2a$, onde R é o resto da divisão de 360° por $2\hat{a}$.

Exemplificando: se $\hat{a} = 60°$ então $R = 0$ e $n' = -1$ $\Rightarrow n = \frac{360°}{60°} - 1 = 6 - 1 \Rightarrow n = 5$.

Com dois espelhos articulados vários conceitos geométricos podem ser estudados como obtenção de polivértices e polígonos, rotação, etc.

III. Polivértices

Considerando dois espelhos com ângulo $\hat{z}$ entre eles, e um *ponto objeto* entre esses espelhos, obtém-se um polivértice (vértices que ligados fornecem polígonos).

Tomando $\hat{z} = 60°$ e um ponto objeto entre os espelhos, obtém-se seis vértices, justificado pela fórmula do número de imagens $n = \frac{360^o}{60^o} - 1 = 6 - 1 = 5$ (polivértice angular gerado pelo ponto objeto e as imagens possui: 5 + 1 = 6 vértices). Se esse ponto pertencer à bissetriz do ângulo formado pelos espelhos, então teremos um hexavértice regular (fig.2.21). Caso contrário, teremos um hexavértice irregular (fig.2.22).

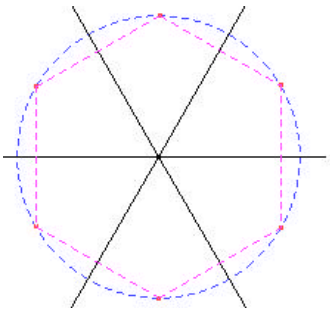


Figura 2.21

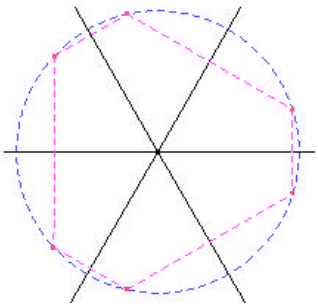


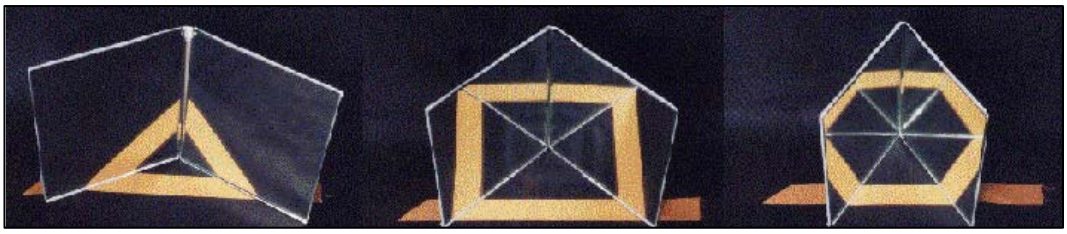
Figura 2.22

Obs.: Se o ponto objeto estiver muito próximo aos espelhos obteremos um trivértice regular.

IV. Polígonos

Se colocarmos um objeto (madeira, régua, fita, canudinho, etc.) que represente um segmento de reta entre dois espelhos articulados, de modo a formar um triângulo isósceles, obteremos polígonos regulares através das reflexões do objeto nos espelhos. Experimentalmente, podemos observar que quanto maior o ângulo entre os espelhos, menor o número de lados do polígono e vice-versa, mas para isso o dobro do ângulo entre os espelhos deve ser divisor de 360°.

A figura 2.23 mostra que, por exemplo, abrindo os espelhos articulados num ângulo de 120°, obteremos triângulos equiláteros; com ângulos de 90° teremos quadrados e com ângulos de 60° obteremos hexágonos.



Figuras 2.23

Na tabela abaixo encontramos as possibilidades de obtenção de polígonos regulares variando o ângulo entre os espelhos articulados e utilizando uma fita, como um segmento de reta.

ÂNGULO	IMAGENS	POSSIBILIDADES DE CONSTRUÇÃO
180º	2	Linhas paralelas e círculos
120º	3	Triângulos e círculos
90º	4	Quadrados, paralelogramos, linhas paralelas e círculos.
72º	5	Pentágonos e círculos
60º	6	Hexágonos, triângulos e círculos
≅ 51º	7	Heptágonos e círculos
45º	8	Octógonos, quadrados e círculos
40º	9	Eneágonos e círculos
36º	10	Decágonos, pentágonos e círculos

Tabela 2.1:Tabela encontrada em Alspaugh (1976)

V. Rotação

Considere o triângulo ΔABX entre dois espelhos articulados E e E', com ângulo $\hat{\alpha}$, apresentados abaixo:

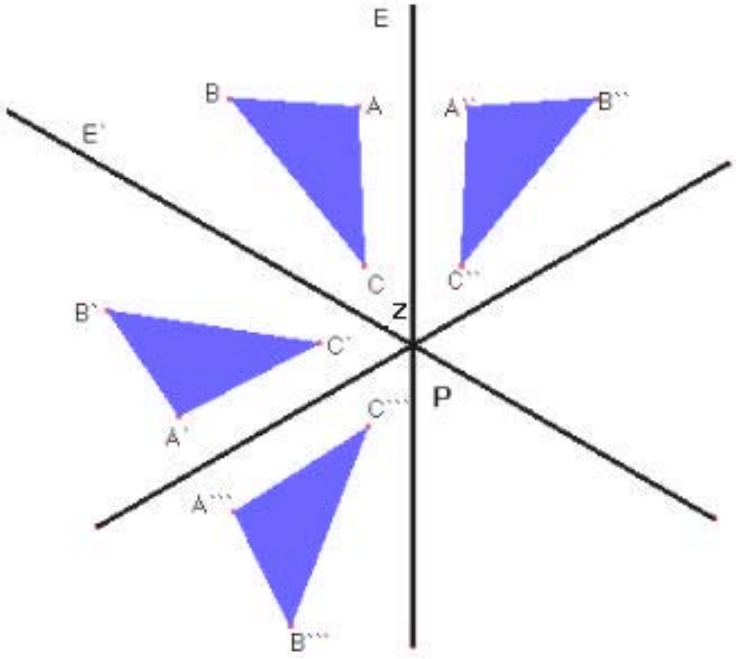


Figura 2.24

O triângulo $\Delta A'B'X'$ é a reflexão do triângulo ΔABX em E, o triângulo $\Delta A''B''X''$ é a reflexão do triângulo $\Delta A'B'X'$ em E e o triângulo $\Delta A'''B'''X'''$ é a reflexão do $\Delta A''B''X''$ em E. Podemos considerar o triângulo $B'''X'''$ como a rotação do triângulo ΔABX com centro em P de ângulo 2ζ.

VI. Espelhos paralelos

Considere o triângulo ΔABX entre dois espelhos paralelos E e E'. Nesses espelhos serão geradas infinitas imagens tanto dos primeiros espelhos, quanto do triângulo. A figura 2.25 representa esse processo que produz reflexões e translações do triângulo.

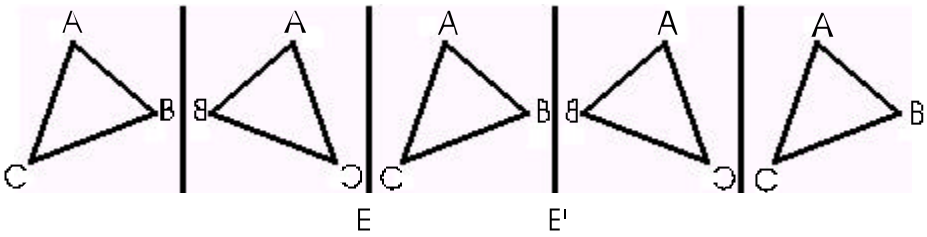


Figura 2.25

Com dois espelhos planos paralelos desenvolve-se atividades em que os conceitos de *orientação* e *translação* podem ser muito bem explicitados.

2.4. Três espelhos

Para três espelhos articulados, analogamente ao caso em que temos dois, para que haja a repetição perfeita de imagens cada ângulo deve satisfazer a condição de o dobro ser divisor de 360º, ou seja, $\frac{2\pi}{2l}=\frac{\pi}{l}=a,\ \frac{2\pi}{2m}=\frac{\pi}{m}=b,\ \frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}=c$ (i). Portanto, sendo l, m e n os ângulos dos espelhos, temos: $l+m+n=\pi \overset{(i)}{\Rightarrow} \frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{b}+\frac{\pi}{c}=\pi \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$

Supondo a < b < c , com a ≥ 2 (para que seja possível a obtenção de polígonos) e tomando a = b = c, temos: $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\geq 1 \Rightarrow \frac{3}{a}\geq 1 \Rightarrow a\leq 3.$

Logo, $2 = a = 3$.

Para $a = 2$ temos, $\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \quad \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$ (I)

para b = c segue que, $\frac{2}{b}\geq\frac{1}{2}$ *ou* $b\leq 4$

mas b = 2, logo 2 = b = 4.

Para a = 2 temos b =3 ou b = 4 (se b = 2 não teríamos triângulo)

Fazendo a = 2, b = 3 e substituindo na equação (*I*), obtemos c = 4; analogamente para a = 2 e b = 4 obtenho c = 4 e para a = 3 segue que a = b = c.

Portanto, temos as seguintes soluções para a, b e c: (3,3,3), (2,4,4) e (2,3,6) que correspondem aos ângulos (l, m, n) = (60º,60º,60º), (90º,45º,45º) e (90º,60º,30º), fornecendo os caleidoscópios equilátero, isósceles e escaleno, respectivamente (fig. 2.26).

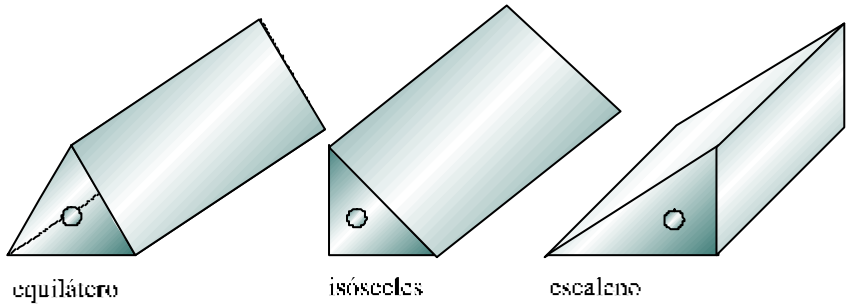


Figura 2.26

Analogamente, para quatro espelhos, tomando $\frac{180^0}{\hat{a}_i} = n_i \quad (n_i \in \aleph, n_i \geq 2)$, *com* $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 = 360^0$ *temos* $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 2,$ *encontramos a única solução:*

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$$

de onde obtém-se (90º,90º,90º,90º) que corresponde ao caleidoscópio quadrangular ou retangular.

Segundo Murari (1999), para k espelhos temos à desigualdade $\frac{k}{n_i} \geq k - 2 \quad (n_i \geq 2)$, que resulta $k \leq 4$, isto é, 4 é o número máximo de espelhos para obtenção de caleidoscópios.



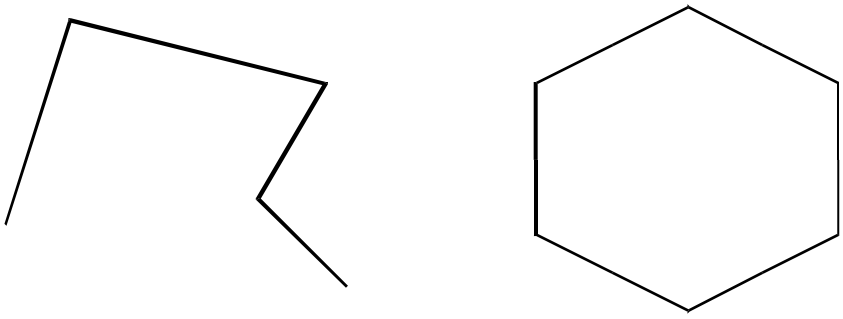
Figura 2.27

Entre os temas matemáticos que podem ser estudados com três espelhos (caleidoscópios) estão as pavimentações do plano por polígonos regulares e irregulares, que envolve o estudo das linhas de simetria e construções gráficas de bases que geram pavimentações. A seguir, discorreremos um pouco sobre pavimentações do plano, em particular, sobre as constituídas por polígonos regulares.

I. Regiões poligonais

Linhas poligonais são curvas formadas por segmentos de reta e podem ser abertas ou fechadas (fig.2.28).

As linhas poligonais abertas são curvas abertas formadas por dois ou mais segmentos de reta, como a figura 2.28 (a). As linhas poligonais fechadas são curvas fechadas formadas por segmento de reta, como a figura 2.28 (b).



(a) **(b)**

Figura 2.28

Uma curva fechada simples divide o plano em duas regiões, sem pontos comuns: a região interior e exterior. A poligonal é chamada fronteira. A união do interior com a fronteira é chamada polígono ou região poligonal simples/fechada.

Os vértices de um polígono ABC são os pontos A, B e C. Os lados ou arestas desse polígono são os segmentos AB, BC e CA; vide fig.2.29.

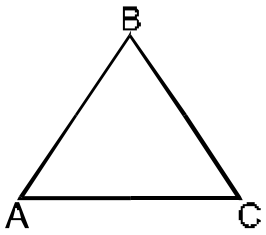


Figura 2.29

II. Pavimentações do plano

Definimos pavimentação do plano euclidiano, conforme Grunbaum (1989), como sendo uma família enumerável de conjuntos fechados que cobrem o plano sem lacunas ou sobreposições. Considerando uma família de polígonos quaisquer, podemos tomar as seguintes definições.

Definição 1: Nós ou vértices da pavimentação são os vértices dos polígonos.

Definição 2: Arestas são segmentos de reta que tem por extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado do polígono (fig. 2.30). Uma aresta de um polígono pode ser a reunião de duas ou mais arestas.

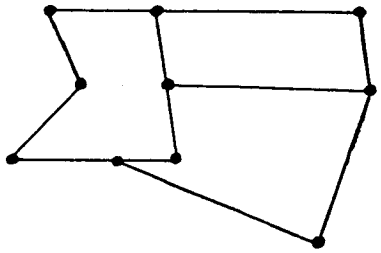
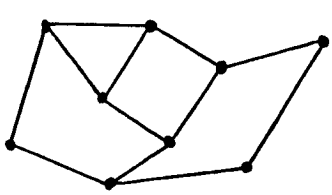
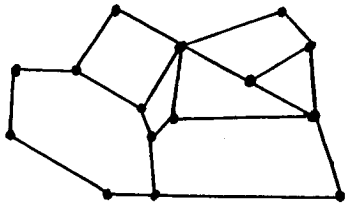


Figura 2.30

Definição 3: Uma pavimentação é lado-lado se, e somente se, toda aresta é lado comum a dois polígonos, como mostra a fig. 2.31. Nessa mesma figura observamos também uma pavimentação que não é lado-lado.



Lado-a-lado



Não lado-a-lado

Figura 2.31

Definição 4: Uma pavimentação é arquimediana quando os nós apresentam-se todos com o mesmo número de arestas concorrentes (fig. 2.32).

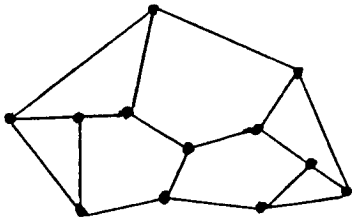


Figura 2.32

Definição 5: Uma pavimentação diz-se uniforme quando for arquimediana, lado-lado e todos os polígonos ao redor de um nó forem os mesmos e estiverem na mesma disposição (fig. 2.33).

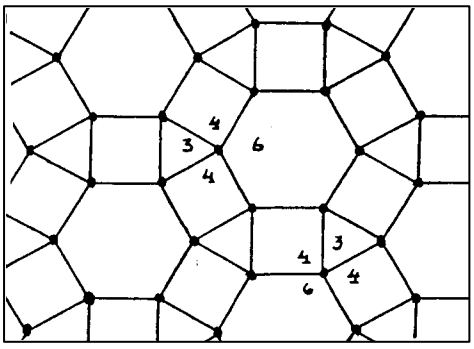


Figura 2.33

Definição 6: Uma pavimentação platônica é a que for arquimediana e lado-lado, onde todos polígonos possuem o mesmo número de lados (fig. 2.34).

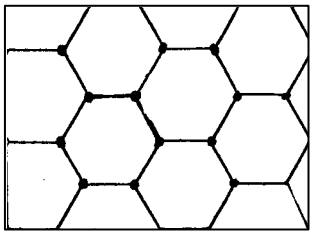


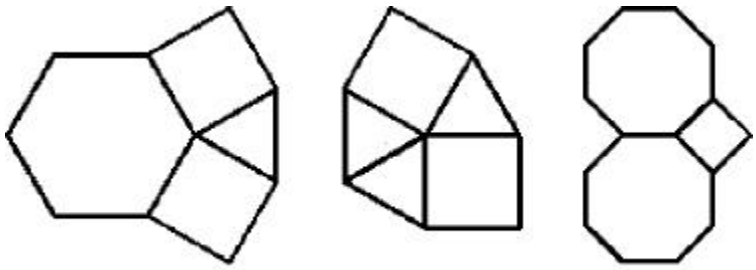
Figura 2.34

III. Pavimentações do plano por polígonos regulares

As pavimentações do plano por polígonos regulares podem ser constituídas por polígonos de um só tipo ou por vários tipos de polígonos.

As pavimentações do plano por polígonos regulares congruentes e de um só tipo podem ser obtidas pelo estudo dos ângulos ao redor de seus vértices, como veremos posteriormente.

Notação: denotamos por (3,4,6,4) a pavimentação do plano (fig. 2.35) constituída por triângulos, quadrados e hexágonos onde há ao redor de cada nó ou vértice um triângulo, um quadrado, um hexágono e um quadrado, nessa ordem (sentido horário ou anti-horário). A notação (3,4,3,3,4) refere-se à pavimentação do plano formada por triângulos e quadrados na ordem e (4,8,8) à pavimentação constituída por quadrados e octógonos. No caso de pavimentação de polígonos de mesmo tipo, como por exemplo hexágonos, podemos denotá-la de dois modos: (6,6,6) ou (6^3).



(3,4,6,4) **(3,4,3,3,4)** **(4,8,8)**

Figura 2.35

Proposição 1: Os únicos polígonos regulares congruentes de mesmo tipo que pavimentam o plano são os triângulos, quadrados e hexágonos.

Prova: *Seja K o número de polígonos congruentes e i a medida do ângulo interno de cada polígono*

A medida i do ângulo interno é dada por $i = \frac{(n-2)180^0}{n}$ *onde n é o número de lados do polígono regular. Para que ocorra pavimentação parcial do plano devemos ter K.i* = 360°. Então,

$$K.i = 360^0; \quad K \in \aleph \quad \Rightarrow \quad \frac{K(n-2)180^0}{n} = 360^0; \quad K \geq 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{360^0(n)}{180^0(n-2)} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2n}{n-2}$$

$$\text{Como} \quad K \geq 3 \quad \text{segue} \quad \text{que} \quad \frac{2n}{n-2} \geq 3, \quad \text{ou} \quad \text{seja}, \quad n \leq 6$$

Como n > 2, temos os seguintes valores para n: 3, 4 e 6.

Portanto, somente triângulos, quadrados e hexágonos pavimentam o plano.

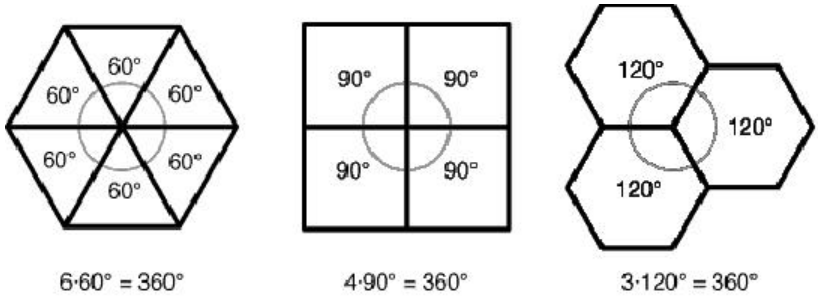


Figura 2.36

Proposiąão 2: Existem 21 possibilidades de se adaptarem polígonos regulares ao redor de um ponto de modo que não haja vazios nem sobreposições.

Prova[4]: *Seja K o número de polígonos ao redor de um ponto.*

O menor ângulo interno de um polígono regular é 60º, portanto o maior valor de K é dado por 360º/60º = 6. Mas K deve ser maior que 2, logo,

$$3 \leq K \leq 6,\ K \in \mathbb{N}$$

Analisemos cada caso:

I. ***K = 3***

Sejam os polígonos regulares com números de lados a, b e c respectivamente.

Assim, a soma dos ângulos internos ao redor de um ponto é dado por

$$\frac{(a-2)180^0}{a} + \frac{(b-2)180^0}{b} + \frac{(c-2)180^0}{c} = 360^0$$

efetuando os cálculos temos $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + = \frac{1}{2} \quad (I)$

Supondo, sem perda de generalidade, $a \leq b \leq c$, *substituindo em (I) b e c por a e efetuando os cálculos obteremos* $a \leq 6$.

Teremos o menor valor de a para o triângulo equilátero, ou seja, $a \geq 3$.

Logo, $3 \leq a \leq 6$.

De (I) segue que : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{(a-2)}{2a} \quad (II)$

[4] Prova segundo Barbosa (1993).

substituindo c por b, em (II) teremos:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\geq\frac{(a-2)}{2a} \quad ou \quad b\leq\frac{4a}{(a-2)} \quad (III)$$

para o caso em que a = 3 tem-se da equação (II) e (III) que $7 \leq b \leq 12$

Atribuindo os possíveis valores a e *b encontro os de c.*

Fazendo o mesmo para os outros valores de a, então obteremos:

a	***b***	***c***
3	*7*	*42*
3	*8*	*24*
3	*9*	*18*
3	*10*	*15*
3	*12*	*12*

a	***b***	***c***
4	*5*	*20*
4	*6*	*12*
4	*8*	
5	*5*	*10*
6	*6*	

8

6

II. ***K = 4***

Teremos a equação: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$, onde *a, b, c* e *d* são os lados dos polígonos.

Análogo ao caso em que K = 3, obteremos os valores abaixo:

a	***b***	***c***	***d***
3	*3*	*4*	*12 **
3	*3*	*6*	*6 **
3	*4*	*4*	*6 **
4	*4*	*4*	

4

III. ***K = 5***

Com os lados a, b, c, d e *e obteremos a equação:*

$$\frac{(a-2)180^0}{a}+\frac{(b-2)180^0}{b}+\frac{(c-2)180^0}{c}+\frac{(d-2)180^0}{d}+\frac{(e-2)180^0}{e}=360^0$$

de onde obtemos: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=\frac{3}{2}$

Analogamente ao caso que K = 3, obterei os seguintes valores:

a	***b***	***c***	***d***	***e***	
3	*3*	*3*	*3*	*6*	
3	*3*	*3*	*4*	*4*	*

IV. ***K = 6***

Temos o caso de seis triângulos ao redor de um vértice ou nó.

Portanto, obtemos a = b = c = d = e = f = 3

Assim, temos 17 possibilidades de ajustar polígonos regulares de tipos distintos (incluímos também as de mesmo tipo) ao redor de um ponto. Mas as configurações em que há um asterisco os polígonos podem ser arranjados seguindo uma ordem diferente, por exemplo, (3,3,6,6) e (3,6,3,6) (fig. 2.37).

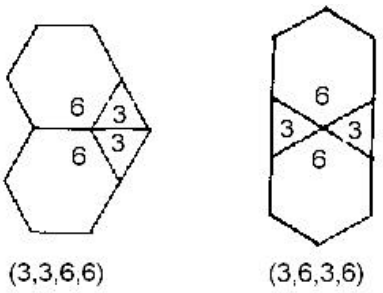


Figura 2.37

Logo, temos 21 possibilidades de configurações, como mostra a figura 2.38.

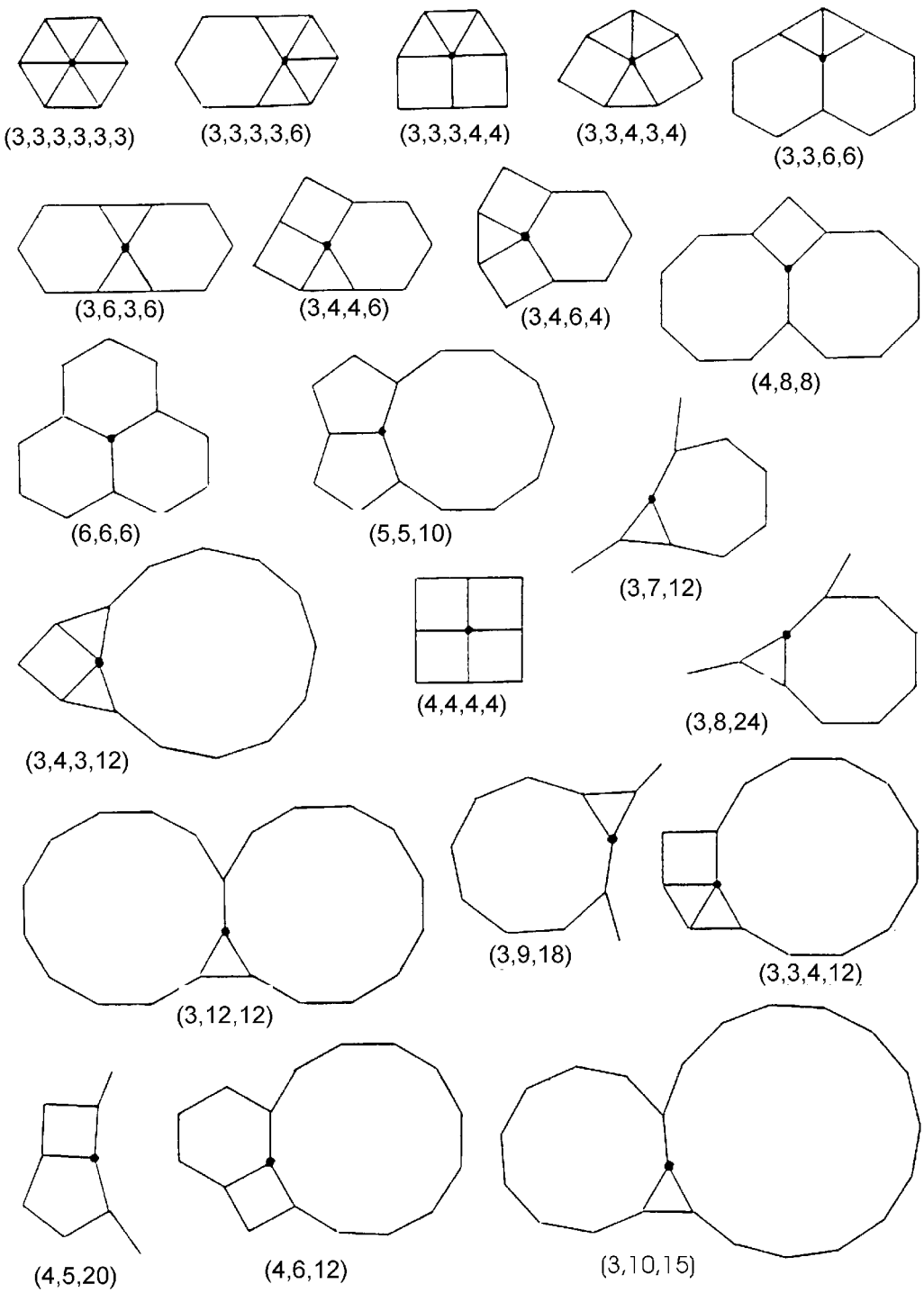
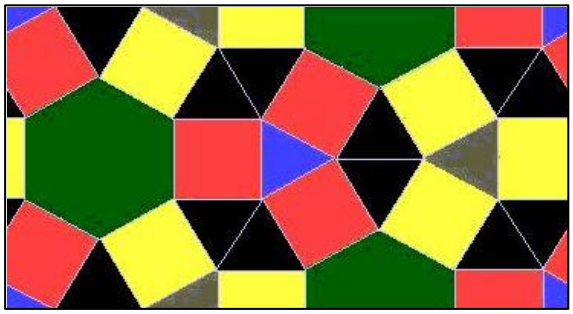

(3,3,3,3,3,3)
(3,3,3,3,6)
(3,3,3,4,4)
(3,3,4,3,4)
(3,3,6,6)
(3,6,3,6)
(3,4,4,6)
(3,4,6,4)
(4,8,8)
(6,6,6)
(5,5,10)
(3,7,12)
(3,4,3,12)
(4,4,4,4)
(3,8,24)
(3,9,18)
(3,3,4,12)
(3,12,12)
(4,5,20)
(4,6,12)
(3,10,15)

Figura 2.38

IV. Pavimentaações do plano com mais de uma configuração

Nem todas essas 21 configurações pavimentam o plano[5], mas algumas delas quando combinadas pavimentam, gerando uma nova configuração. Por exemplo, combinando as configurações $(3^2,4,3,4)$ e (3,4,6,4) teremos uma pavimentação denotada por $(3^2,4,3,4;\ 3,4,6,4)$ que apresenta dois tipos de nós. A figura 2.39 mostra uma porção dessa pavimentação.

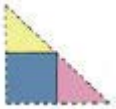


$(3^2,4,3,4;\ 3,4,6,4)$
Figura 2.39

V. Padrões caleidoscópicos

Como os polígonos regulares possuem linhas de simetria e os caleidoscópios dão padrões simétricos, é possível, através desses instrumentos, obter-se pavimentações do plano por polígonos regulares. Para isso, são colocados no interior dos caleidoscópios figuras (padrões) que, por reflexões nos espelhos, fornecem a visualização da pavimentação. Esses padrões, que são denominados *bases substituíveis,* são figuras construídas com segmentos apropriados, os quais refletidos nos espelhos irão produzir pavimentações do plano (mosaicos). A fig.2.40 mostra uma base da pavimentação (4,4,4) que visualizada em caleidoscópio fornece uma pavimentação do plano por quadrados de três cores.

[5] As configurações (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15), (4,5,20) e (5,5,10) não pavimentam o plano. Maiores detalhes consultar Barbosa (1993) p. 29-34.

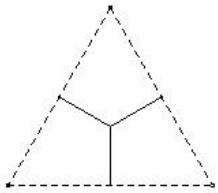


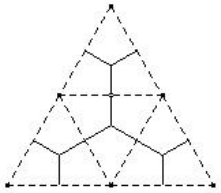


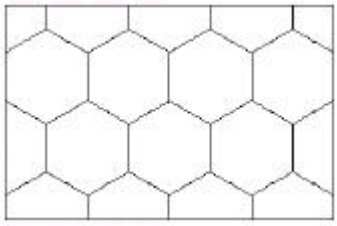
Base **Pavimentação visualizada em caleidoscópio**

Figura 2.40

Uma pavimentação visualizada em caleidoscópio possui bases geradoras e transformadas. As bases *geradoras* são bases que não contém propriamente nenhuma outra base. As bases *transformadas* são bases que provém de bases geradoras. Na fig.2.41 temos um exemplo de bases para pavimentação (6,6,6) e seu visual caleidoscópico. Note que a base transformada é constituída por quatro bases geradoras justificando sua definição.







Base geradora **Base transformada** **Visual caleidoscópico Pavimentação do plano por hexágonos**

Figura 2.41

Segundo Murari (1999), existem três métodos para obtenção de bases:

Método I:

Sabendo de antemão qual o visual a ser gerado por segmentos em relação aos ângulos dos espelhos, podemos construir a base substituível com os segmentos apropriados para que nas simetrias reflexionais dos espelhos possamos obter, através das regiões delimitadas por estes segmentos, os polígonos regulares desejados.

Quando nos utilizamos deste método, nosso objetivo é o desenvolvimento da percepção espacial por parte dos alunos, com exploração de simetrias e construções geométricas adequadas na determinação das bases.

Método II:

Vimos que o triângulo-base dos espelhos mais os seus virtuais formados pelas reflexões acabam recobrindo todo o plano. Assim, todo conjunto de segmentos de retas desenhados no triângulo formado pelos espelhos originais serão reproduzidos (réplicas) também nos triângulos virtuais, respeitando as reflexões.

Trabalhando, por exemplo, com três réguas ou três esquadros para formação de triângulos (eqüilátero ou retângulo isósceles) sobre o desenho de uma pavimentação, podemos "visualizar" (descobrir) as bases substituíveis que gerem esta pavimentação, pois as réplicas triangulares da figura serão reproduzidas por todo o plano, contendo os mesmos segmentos da base encontrada. Ver figura fig. 2.42, encontrada em Daffer e Clemens (1977).

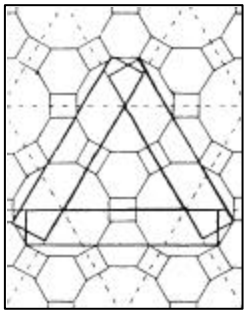


Figura 2.42

Observe que o padrão vai ser reproduzido mais cinco vezes em cada vértice do triângulo básico, gerando os polígonos que vão formar a configuração.

Para utilização deste método, as réguas que formarão os triângulos devem ser posicionadas a partir do centro dos polígonos da pavimentação em estudo, isto é, os vértices do triângulo formado pelas réguas corresponderão ao centro de três polígonos, ocorrendo isto na maioria das vezes, mas não sendo uma regra geral.

Método III:

Kingston (1957) chama a atenção para a existência de pavimentações que apresentam simetrias reflexionais em relação às mediatrizes dos lados dos polígonos.

Baseados neste fato, propomos uma nova metodologia: linha(s) de simetria de uma pavimentação que é (são) linha(s) de simetria de um ou mais polígonos distintos (configurações monoedrais[6] ou poliedrais[7] conforme o caso) dessa pavimentação, formarão "redes" de triângulos congruentes com os mesmos padrões de segmentos de reta formados em cada triângulo da tal rede.

Tais segmentos podem ser provenientes dos lados dos polígonos que compõem a configuração, isto é, os triângulos conterão segmentos (múltiplos) de lados (um ou mais) de polígonos que formam a pavimentação ou partes das linhas de simetria da pavimentação. Descobrindo, numa porção da pavimentação, triângulos eqüiláteros (para configurações: (3^6), $(3,12^2)$, (4,6,12), (3,4,6,4), (6^3) e (3,6,3,6)) e isósceles (configurações (4^4) e (4,8,8)), formados pelas linhas de simetria das redes, teremos, então, reveladas as bases para pavimentações do plano.

Exemplo: configuração (3,4,6,4), fig. 2.43. Observe que existem linhas de simetria de polígonos que não são linhas de simetria da pavimentação (diagonais dos quadrados, por exemplo).

---

[6] Pavimentações com um só tipo de polígono.
[7] Pavimentações com diversos tipos de polígonos regulares.

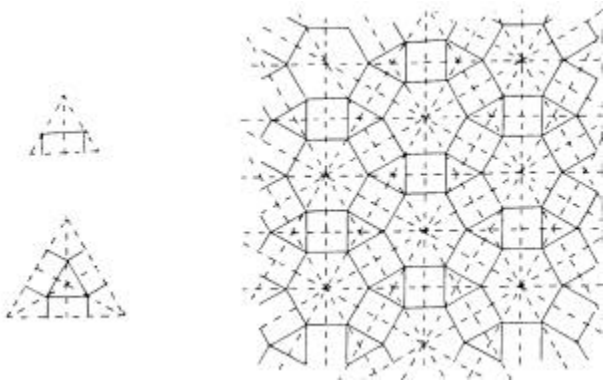


Figura 2.43

Em nosso estudo utilizamos mais o método III (algoritmo) e no trabalho com os alunos o método I foi o mais adequado.

VI. Pavimentações uniformes

Segundo Grunbaum and Shepard (1989) uma pavimentação do plano por polígonos regulares é dita *k-uniforme* se apresenta *k* tipos de nós. Por exemplo, uma pavimentação é dita 1-uniforme quando apresenta apenas um tipo de nó, como a pavimentação de configuração (3,4,6,4). Será chamada 2-uniforme quando apresentar dois tipos de nós, como a pavimentação de configuração (3^6; 3^4,6), em que temos dois nós, um de configuração (3^6) e outro de configuração (3^4,6).

Pavimentaação 1-uniforme

Existem onze tipos (configurações) de pavimentações do plano 1-uniforme (fig. 2.44), obtidas dos 21 tipos de vértices (consultar Barbosa (1993)).

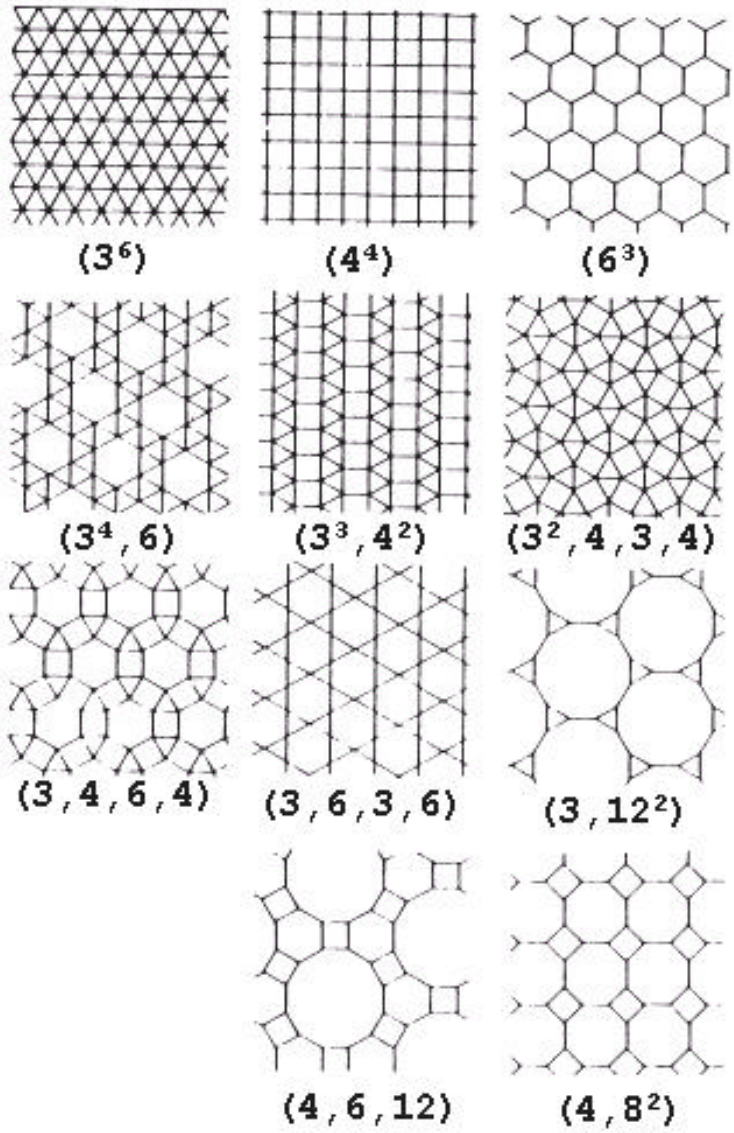


Figura 2.44

VII. Pavimentações uniformes e sua obtenção em caleidoscópios

Kingston (1957) obteve as configurações (3,3,3,3,3,3), (3,6,3,6) e (6,6,6) no caleidoscópio equilátero; (4,4,4,4) e (4,8,8) no isósceles e as configurações (3,12,12), (3,4,6,4) e (4,6,12) no escaleno, além das mesmas obtidas no equilátero.

Barbosa (1993) obteve padrões para as configurações (6,6,6), (3,12,12), (3,4,6,4) e (4,6,12) no caleidoscópio equilátero.

Murari (1999) obteve novas bases para as configurações (3,3,3,3,3,3), (3,12,12) e (4,6,12) em caleidoscópios equiláteros e (4,4,4,4) no isósceles.

A tabela abaixo mostra em que tipo de caleidoscópio determinada configuração pode ser visualizada.

Configuraąão	**Tipo de caleidoscópio em que é visualizada**
(3,3,3,3,3,3), (6,6,6), (3,12,12), (4,6,12), (3,6,3,6) e (3,4,6,4)	Eqüilátero
(4,4,4,4) e (4,8,8)	Isósceles
(3,3,4,3,4)	Quadrangular
(3,3,3,4,4)	Retangular
(3,3,3,3,6)	Não apresenta eixo de simetria

Tabela 2.2

OBS: As configurações visualizadas no caleidoscópio equilátero podem ser obtidas no escaleno, segundo prova encontrada em Murari (1999)

VIII. Um estudo sobre a obtenção de bases para pavimentações do plano do tipo 1-uniforme

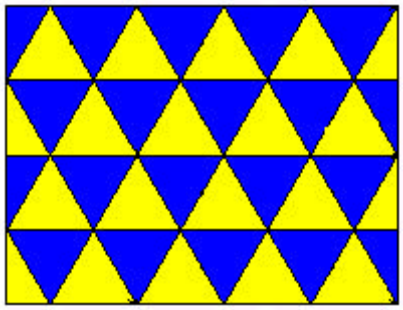
Neste nosso estudo apresentamos as construções de algumas bases que utilizamos em nossa pesquisa de campo. Elas são do tipo 1-uniforme de configurações (3^6), (3,4,6,4), (3,6,3,6), (4,6,12), (4,4,4,4) e (4,8,8) , encontradas em Murari (1999). Nessa mesma obra, o leitor interessado poderá saber mais sobre a construção de bases para outras configurações de pavimentação do tipo l-uniforme.

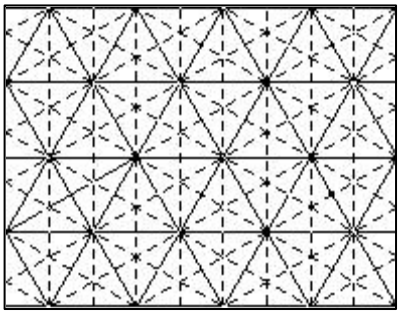
As construções auxiliares das bases (letras e linhas tracejadas) deverão ser sempre apagadas, permanecendo somente os traços contínuos a serem visualizados em caleidoscópios. Os lados da base indicam o local onde os espelhos devem ser colocados, os quais serão construídos com traço contínuo

somente quando representarem, nas reflexões, lados dos polígonos da pavimentação.

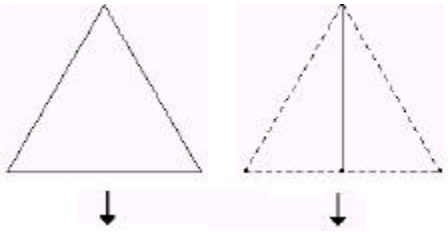
1. Bases para configuração (3^6)

PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (3^6) *ALGORITMO*

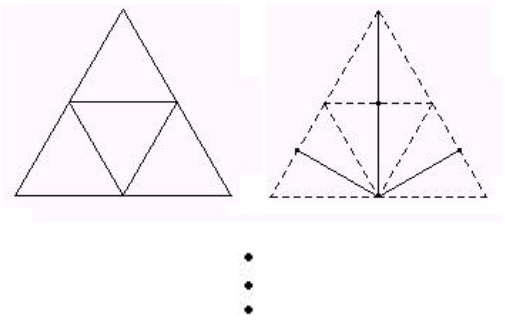




BASES GERADORAS

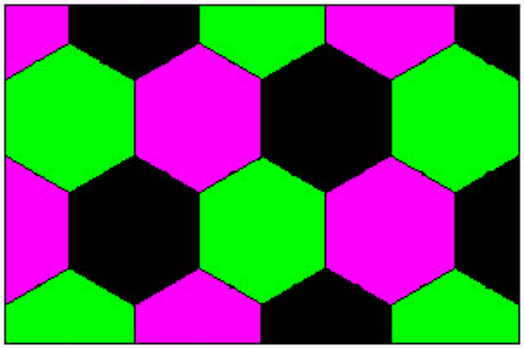


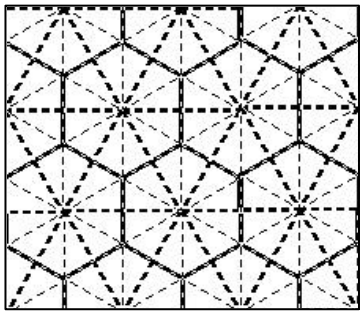
BASES TRANSFORMADAS



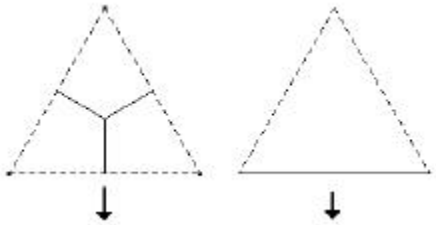
2. Bases para configuração (6^3)

PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (6^3) *ALGORITMO*

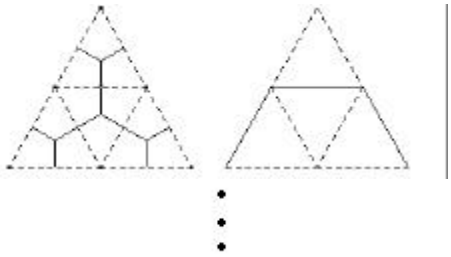




BASES GERADORAS

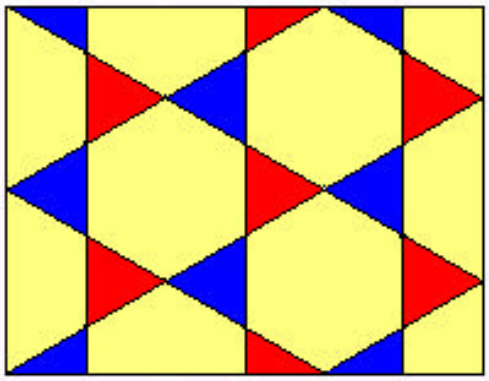


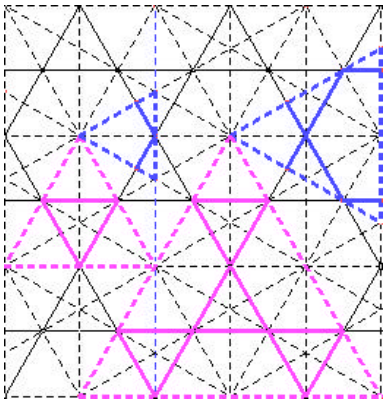
BASES TRANSFORMADAS



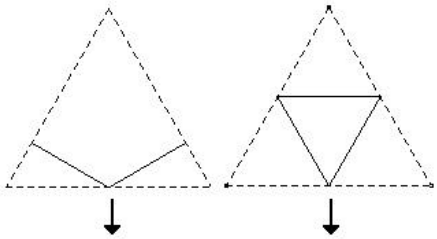
3. Bases para configuração (3,6,3,6)

PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (3,6,3,6) *ALGORITMO*

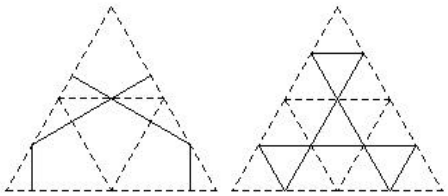




BASES GERADORAS



BASES TRANSFORMADAS



CONSTRUÇÃO:

a) Base para até 3 cores: A,B e C

Consideremos o triângulo equilátero ΔEFG. Traçar a bissetriz do ângulo $\hat{E}$ para determinar o ponto médio P de FG, e baixar perpendicular por P aos lados EF e EG, obtendo a base procurada (fig. 2.45).

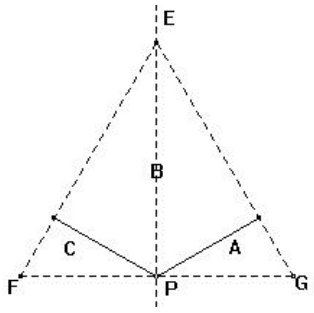


Figura 2.45

VISUAL CALEIDOSCÓPICO:

Temos apenas um tipo de nó com três cores A, B e C, onde os triângulos opostos possuem cores distintas (fig. 2.46).

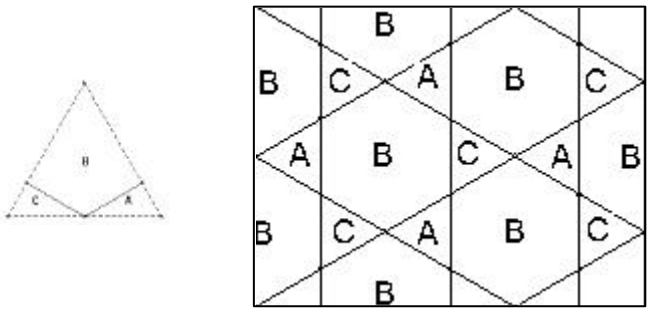


Figura 2.46

b) Base para até 4 cores: A, B, C e D

Considere o ΔEFG. Construir os três segmentos que unem os três pontos médios dos lados do triângulo ΔABC (fig. 2.47).

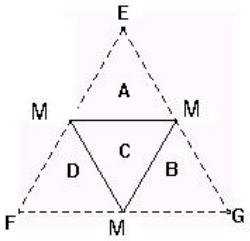


Figura 2.47

VISUAL CALEIDOSCÓPICO:

Temos um visual com três tipos de nós, cada um com 3 cores, sendo uma repetida: ACBC, ACDC e BCDC (fig. 2.48).

Os hexágonos se apresentam com três cores distintas A, B e D, rodeando os triângulos de uma só cor: C.

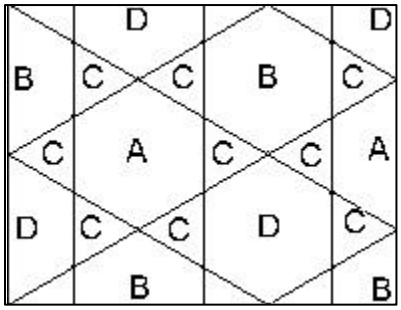
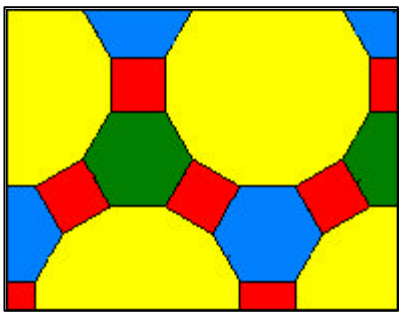
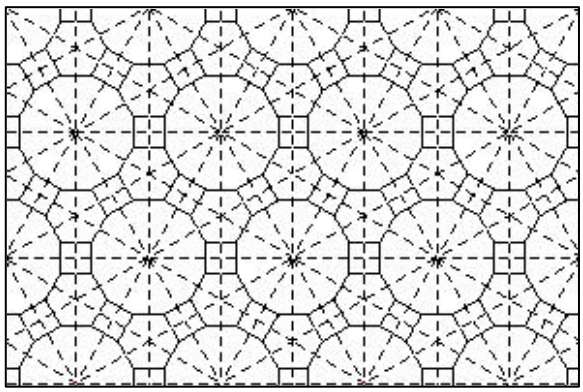


Figura 2.48

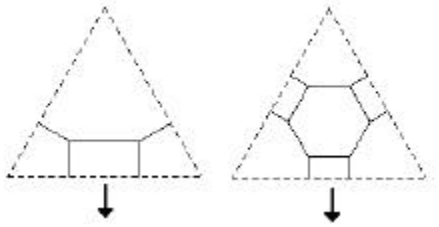
4. Bases para configuração (4,6,12)

PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (4,6,12) *ALGORITMO*

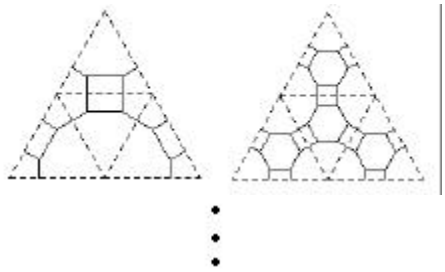




BASES GERADORAS



BASES TRANSFORMADAS



CONSTRUÇÃO

a) Base para até 4 cores: A, B, C e D

Construir as 3 medianas do triângulo equilátero ΔABC. Por P, ponto médio de BC, construir semi-retas inclinadas a 45º, determinando nas outras duas medianas os pontos M e N. Traçar o segmento MN e baixar perpendiculares por M aos lados AC e CB e perpendiculares por N aos lados AB e CB (fig. 2.49).

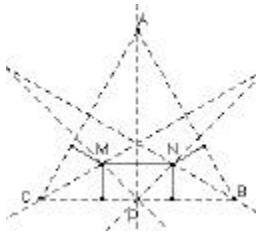


Figura 2.49

VISUAL CALEIDOSCÓPICO:

Encontramos dois tipos de nós na pavimentação gerada por esta base, cada um com 3 cores ABC e ACD. Os dodecágonos serão de cor A, os quadrados de cor C e os hexágonos de cores B e D (fig. 2.50).

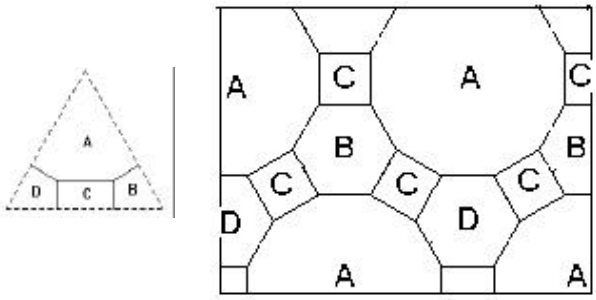


Figura 2.50

b) Base para até 7 cores

Considere o triângulo ΔABC. Construir as 3 medianas determinando os pontos médios M de BC, N de AC, e O de AB respectivamente, e também o incentro I. A partir de M construir semi-retas inclinadas a 45º ao lado BC. A seguir, construir as bissetrizes dos ângulos BÎM, MÎC, NÎC; as duas primeiras determinarão nas interseções com as semi-retas, respectivamente, os pontos P e Q. O segmento PQ será lado do hexágono central. Os outros vértices R, S, T e U do hexágono serão obtidos, sucessivamente, a partir de Q por simetria em relação às medianas e deverão pertencer às bissetrizes (dos ângulos opostos) ou a seus prolongamentos. Construir com traços contínuos os outros lados dos hexágonos, e pelos seus vértices os segmentos de perpendiculares aos lados mais próximos da base (fig. 2.51).

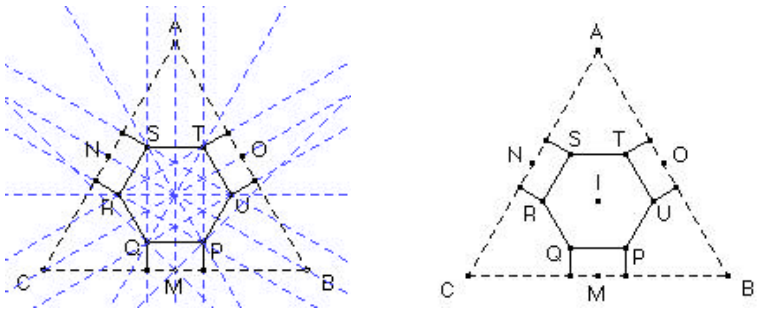


Figura 2.51

VISUAL CALEIDOSCÓPICO

Os hexágonos serão de cor A; os dodecágonos de cor B, C e D; os quadrados de cor E , F e G (fig. 2.52).

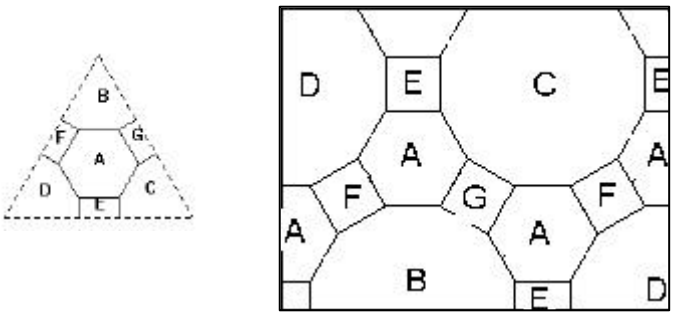
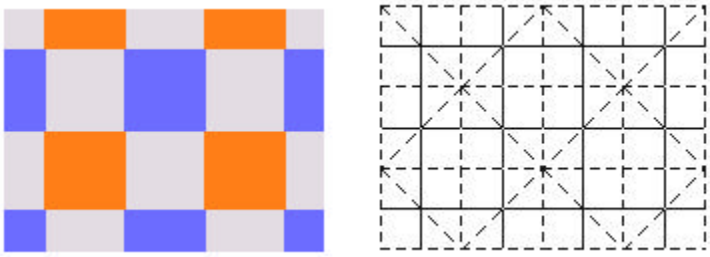


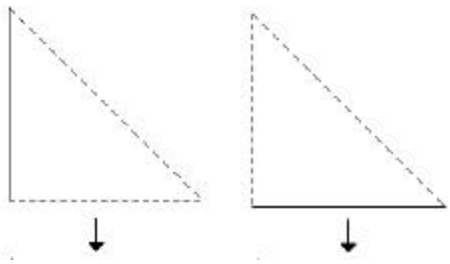
Figura 2.52

5. Bases para configuração (4^4)

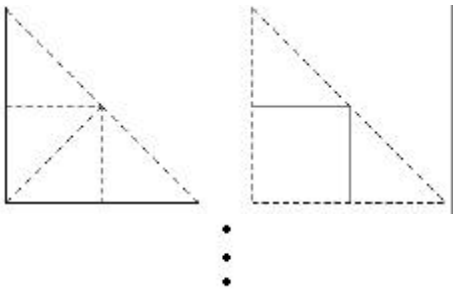
PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (4^4) *ALGORITMO*



BASE GERADORA

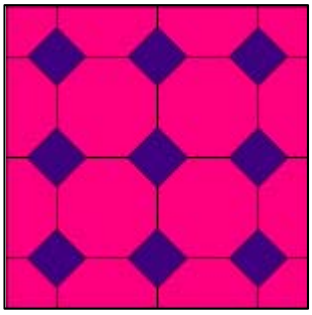


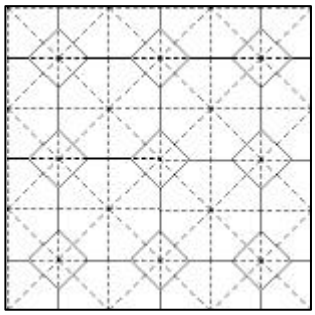
TRANSFORMADAS



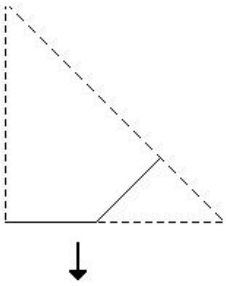
6. Bases para configuração (4,8,8)

PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (4,8,8) ALGORITMO

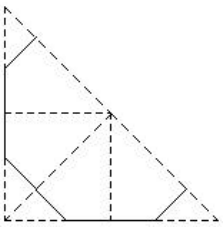




BASE GERADORA



BASE TRANSFORMADA



CONSTRUÇÃO

a) Base para até 2 cores

Considere o triângulo isósceles ΔABC. Construa a bissetriz de Â, determinando o ponto P. Traçar uma perpendicular ao lado AC por P, obtendo Q. Note que BP = PQ, pois AP é bissetriz (fig. 2.53).

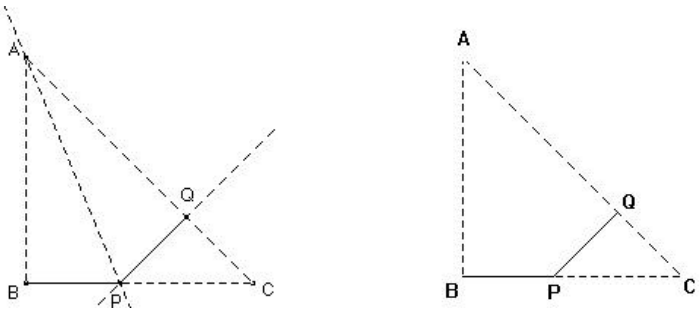
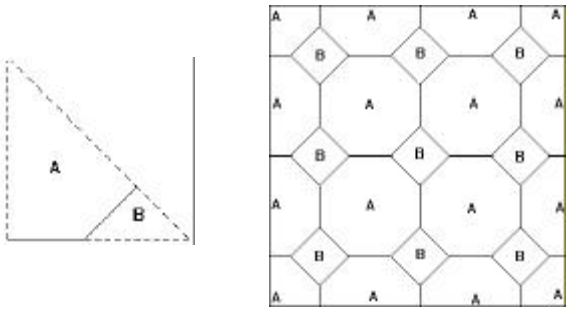


Figura 2.53

VISUAL CALEIDOSCÓPICO

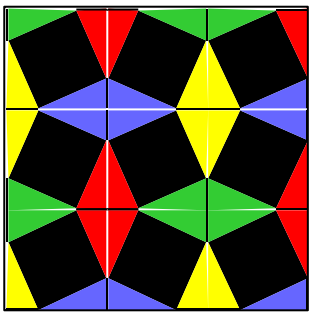
Os segmentos BP e PQ geram octógonos em relação ao ângulo Â = 45º, e PQ produz quadrados em relação ao ângulo C = 45º.

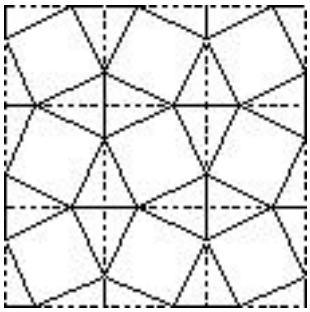
Temos um tipo de nó com 2 cores: A e B. Cada quadrado de cor B é rodeado por octógonos de cor A.



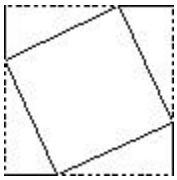
7. Bases para configuração (3^2,4,3,4)

PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (3^2,4,3,4) *ALGORITMO*

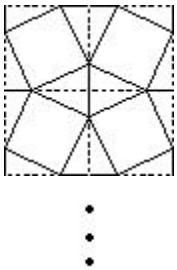




BASE GERADORA



BASES TRANSFORMADAS



IX. Pavimentações 2-uniforme[8]

Segundo Grunbaum and Shepard (1989) existem 20 tipos de pavimentações do tipo 2-uniforme:

[8] A definição se encontra na página 88.

$(3^6;3^4,6)_1$, $(3^6;3^4,6)_2$, $(3^6;3^3,4^2)_1$, $(3^6;3^3,4^2)_2$, $(3^6;3^2,4,3,4)$, $(3^6;3^2,4,12)$, $(3^6;3^2,6^2)$, $(3^4,6;3^2,6^2)$, $(3^3,4^2;3^2,4,3,4)_1$, $(3^3,4^2;3^2,4,3,4)_2$, $(3^3,4^2;3,4,6,4)$, $(3^3,4^2;4^4)_1$, $(3^3,4^2;4^4)_2$, $(3^2,4,3,4;3,4,6,4)$, $(3^2,6^2;3,6,3,6)$, $(3,4,3,12;3,12^2)$, $(3,4^2,6;3,4,6,4)$, $(3,4^2,6;3,6,3,6)_1$, $(3,4^2,6;3,6,3,6)_2$, $(3,4,6,4;4,6,12)$.

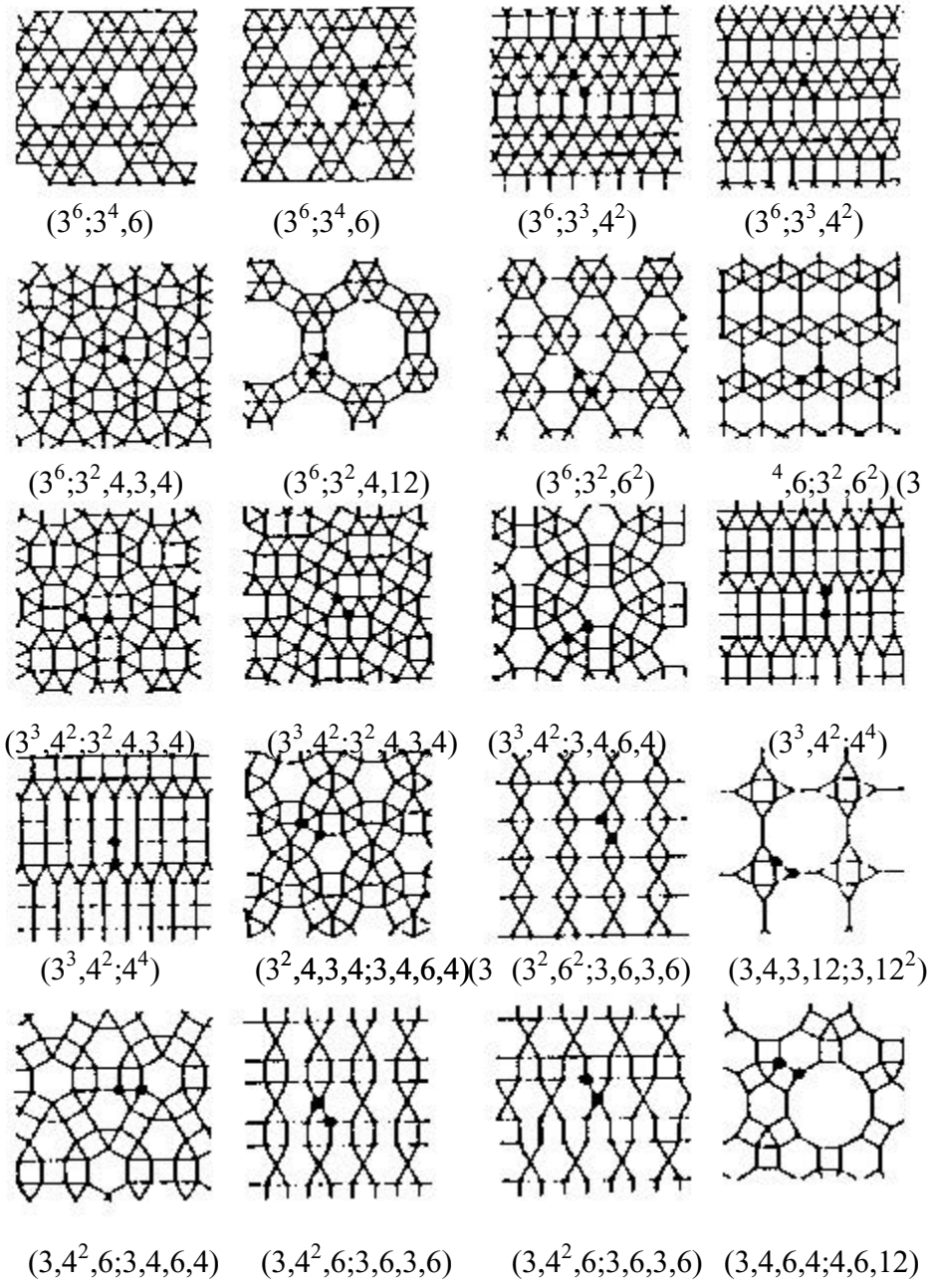
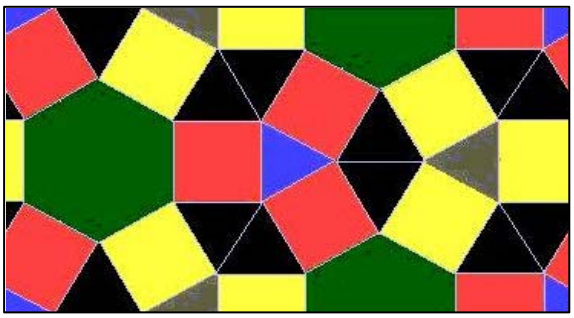


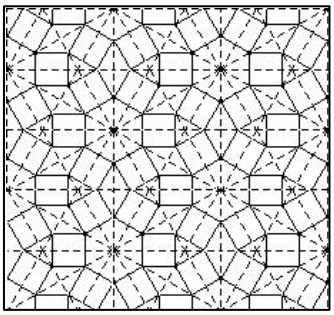
Figura 2.54

X. Bases para pavimentações do tipo 2-uniforme

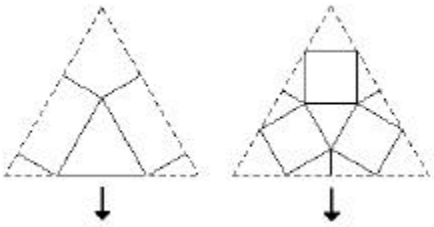
1. Pavimentação do plano de configuração (3^2,4,3,4;3,4,6,4)



ALGORITMO



BASES GERADORAS



BASES TRANSFORMADAS

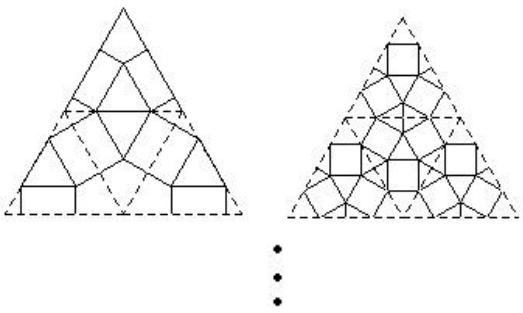


Figura 2.55

Bases geradoras:

A. Para até 6 cores:

1. Considere o triângulo equilátero ?ABC como sendo a base do caleidoscópio;
2. Construir a bissetriz do ângulo Â tal que sua interseção com BC seja M ;
3. Construir a bissetriz do ângulo MÂC determinando P em BC;
4. Construir perpendicular por P em relação a AC determinando o ponto R;
5. Levantar perpendicular por P em relação a PR tal que sua interseção com a bissetriz de Â seja o ponto S;
6. Construir um segmento paralelo a PR passando por S, determinando o ponto K em AC;
7. Analogamente fazer as construções para o triângulo ΔAMB para determinar os segmentos JS, SL e JI;
8. Traçar o segmento PJ;

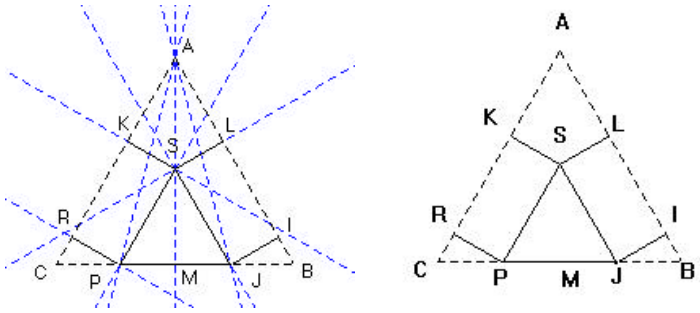


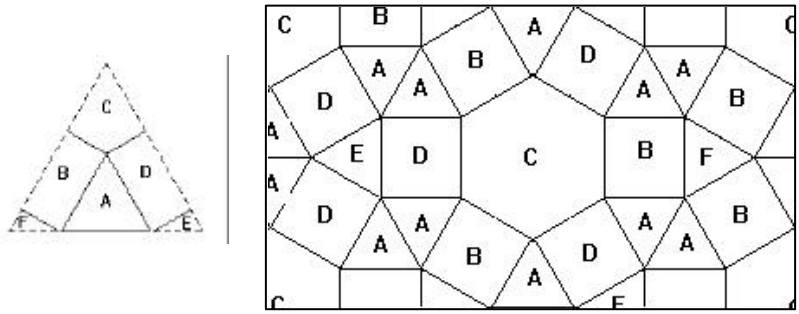
Figura 2.56

As reflexões desses segmentos nos três espelhos irão formar a pavimentação (3,3,4,3,4;3,4,6,4). Observe que o par de segmentos LS e SK gera um hexágono regular em relação ao ângulo Â. O segmento JI gera um triângulo em relação ao ângulo $\hat{B}$ (o mesmo ocorre para o segmento PR em relação ao ângulo $\hat{C}$). Os segmentos JS, SL e JI geram um quadrado em relação a BA da mesma maneira SP, PR e SK em relação a AC. Os segmentos JS, SP e PJ geram um triângulo em relação a BC. Assim, pelas reflexões nos três espelhos, simultaneamente, obteremos a pavimentação de configuração (3,3,4,3,4;3,4,6,4).

Visual caleidoscópico:

Temos um visual com três tipos de nós:

- Um com quatro cores distintas: ABCD;
- Dois com três cores diferentes, sendo duas repetidas: AABFB, ADEDA;



B. Para até 13 cores:

Construção

1. Construir as bissetrizes a, b, e c da base equilátera ABC, determinando os pontos A', B' e C'; respectivamente em BC, AC e AB, e o ponto O, interseção de a, b e c.
2. Construir o segmento C'B';
3. Construir a bissetriz do ângulo C'B'O determinando o ponto E na interseção com a bissetriz a;
4. Construir perpendicular por E em relação ao segmento AA', determinando os pontos F e G nas bissetrizes c e b, respectivamente;
5. Com centro em O e raio OF determinar o ponto H em AA' e construir o triângulo equilátero ?FGH ;
6. Transportar a medida do segmento HG com centros nos vértices A, B e C, determinando os pontos I, J, M, N, K e L
7. Traçar os segmentos IJ, MN e LK e construir os quadrados FMNH, HLKG e FIJG;
8. Construir os segmentos FC', A'H e GB' (perpendiculares aos lados AB, CB e AC, respectivamente);

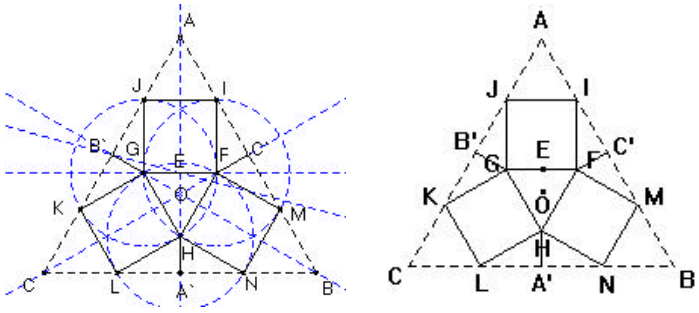


Figura 2.57

As reflexões do segmento IJ em relação ao ângulo Â geram um hexágono regular (o mesmo ocorre para MN e LK, em relação aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ respectivamente).

Observe que os segmentos:

-IF, C'F e MF geram triângulos em relação a AB;

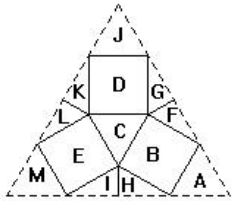
-JG, B'G e GK geram triângulos em rela ção a AC;

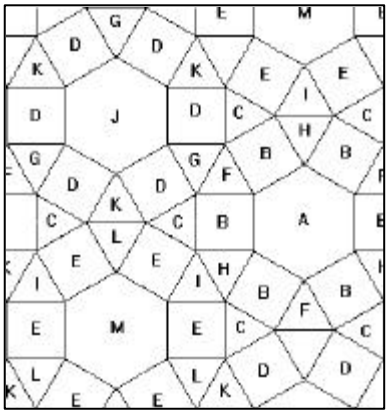
-NH, A'H e HL geram triângulos em relação a BC;

Visual caleidoscópico:

Temos um visual com nove tipos de nós:

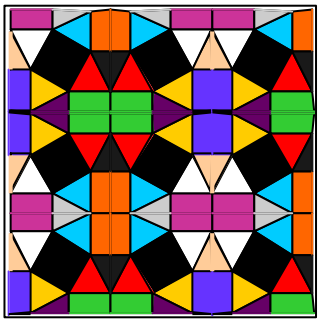
- 3 com 5 cores distintas: CBHIE, CELKD, CDGFB;
- 6 com 3 cores diferentes, sendo que uma se repete: BABH, EMEI, EMEL, DKDJ, DJDG, BFBA;

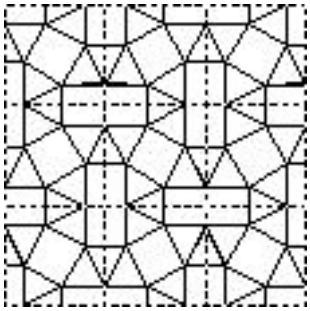




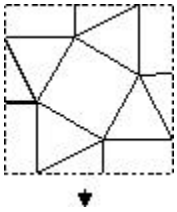
2. Bases para configuração *(3^2,4^2; 3^2,4,3,4)*

PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (3^2,4^2; 3^2,4,3,4) *ALGORITMO*

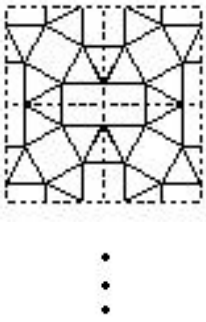




BASE GERADORA

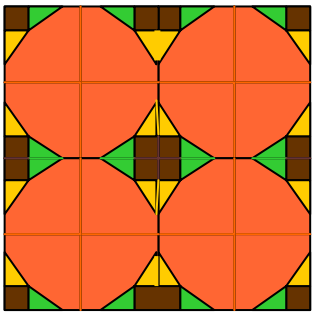


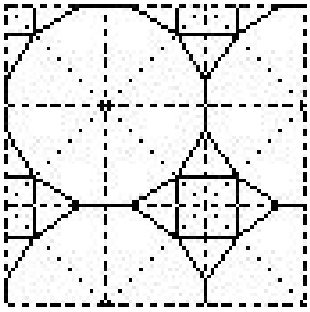
BASES TRANSFORMADAS



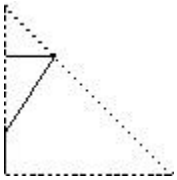
3. Bases para configuração *(3,4,3,12;3,12²)*

PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (3,4,3,12;3,12²) *ALGORITMO*

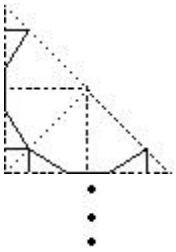




BASE GERADORA



BASES TRANSFORMADAS



XI. Construção de uma base caleidoscópica no *software Geometricks*

Faremos a construção de uma base caleidoscópica no *Geometricks,* apresentando os passos necessários para sua construção. Indicamos entre parênteses a ferramenta do *Geometricks* utilizada em cada passo da construção.

Construção de uma base geradora para pavimentação de configuração (4,6,12):

Construir:

a. Dois pontos livres A e B (objeto independente, ponto livre);

b. O segmento AB (objeto dependente, segmento);

c. Uma circunferência de centro A e raio AB e outra de centro B e raio AB (objeto dependente, circunferência (ce, po));

d. C o ponto de intersecção entre as circunferências construídas em (c) (objeto dependente, intersecção (ci,ci));

e. Os segmentos AC e BC (objeto dependente, segmento);

f. M o ponto médio de AB (objeto dependente, ponto médio (po, po));

g. O segmento CM (objeto dependente, segmento);

h. As bissetrizes *b* e *b'* dos ângulos CÂM e C$\hat{B}$M (objeto dependente, bissetriz (re,re));

i. As bissetrizes *m* e *m'* dos ângulos C$\hat{M}$A e C$\hat{M}$B (objeto dependente, bissetriz (re,re));

j. $P \in b \cap m$ e $R \in b' \cap m'$ (objeto dependente, intersecção (re,re));

k. Perpendicular: por P em relação a AB, por R em relação a AB, por P em relação a AC e por R em relação a CB (objeto dependente, perpendicular (po,re));

l. Os pontos Q, O, S e N da intersecção das perpendiculares construídas em (k) com os lados AB, BC e CA (objeto dependente, intersecção (re,re));

m. Os segmentos QP, PS, PR, RN e RO (objeto dependente, segmento (po, po));

n. Esconder as construções auxiliares e pontilhar o triângulo ABC;

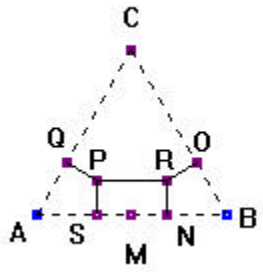


Figura 2.58

XII. Obtenção de pavimentações no *Cabri-Géomètre II* via macros

Apresentaremos a construção das bases caleidoscópicas de configurações (4,6,12) e (4,8,8) e do padrão ornamental Torre de Comares no *Cabri-Géomètre II*, sua macro e a obtenção de uma porção da pavimentação do plano. Para facilitar o entendimento, as ferramentas utilizadas nas construções neste *software* aparecerão entre parênteses.

Obtenção da pavimentação de configuração (4,6,12)

Construção de uma base geradora para pavimentação de configuração (4,6,12):

Construir:

a. Um triângulo eqüilátero ΔABC (polígono regular);

b. Ponto médio M do segmento $\overline{AC}$ (ponto médio);

c. Bissetrizes b e b' dos ângulos $A\hat{M}B$ e $B\hat{M}C$ (bissetriz);

d. Bissetrizes a e a' dos ângulos $B\hat{A}M$ e $B\hat{C}M$ (bissetriz);

e. $P \in b \cap a$ e $R \in b' \cap a'$ (ponto(s) de intersecção);

f. Perpendiculares por P em relação à $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, *determinando* S e Q, respectivamente;

g. Perpendiculares por R em relação à $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, determinando, respectivamente, N *e* O;

h. Os segmentos $\overline{NR}, \overline{RO}, \overline{RP}, \overline{PS}$ e $\overline{PQ}$ (segmento);

i. O triângulo ΔABC com traço pontilhado (polígono);

j. Esconder construções auxiliares (esconder/mostrar);

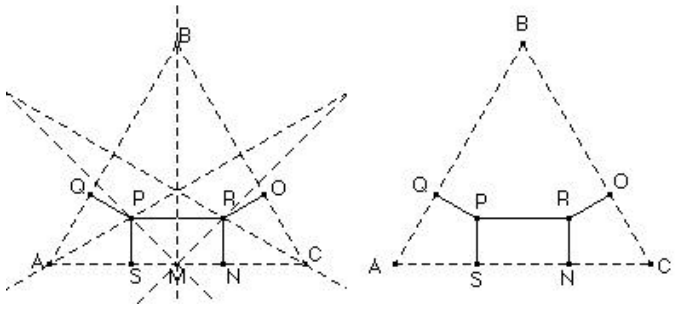


Figura 2.59

Construção da Macro[9]:

a. Objetos Iniciais: o triângulo ΔABC construído em (a);

b. Objetos Finais: segmentos construídos em (h) e o triângulo ΔABC pontilhado construído em (i);

Usando a Macro para obter uma porção da Pavimentação:

a. Obter réplicas dos triângulos ΔABC, formando uma pavimentação do plano por triângulos construídos em (a) (transformação, s imetria axial);

b. Use a macro em cada réplica, conforme a figura 2.60.

[9] A Macro serve para refazer rapidamente construções já criadas, pois salva os procedimentos realizados a partir da definição dos objetos iniciais e finais de uma construção, permitindo que com apenas um click no objeto inicial obtenhamos até mesmo uma construção complexa. Assim, para obtermos um mosaico, podemos construir um padrão, em seguida obter sua macro, para através dela obter outros padrões gerando rapidamente todo o Mosaico.

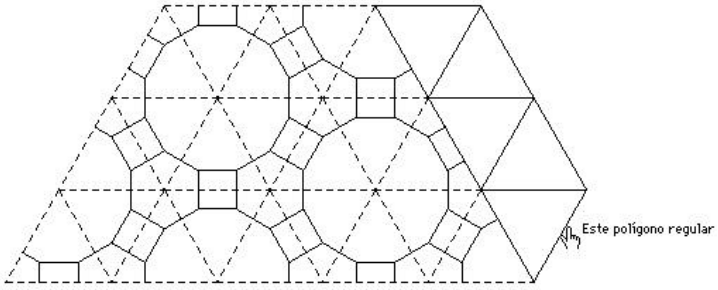


Figura 2.60

OBS: Note que essa construção gera uma pavimentação cujas linhas de simetria (tracejadas) ficam aparentes. Pode-se apagá-las ao final da construção, embora seja trabalhoso.

Obtenção da pavimentação de configuração (4,8,8)

Construção de uma base geradora para pavimentação de configuração (4,8,8):

Construir:

a. Um triângulo retângulo ΔABC (polígono regular/bissetriz)[10];

b. A bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do triângulo ΔABC, obtendo o ponto P em $\overline{BC}$ (bissetriz);

c. Perpendicular em relação à AC do triângulo ΔABC por P, obtendo o ponto Q em $\overline{AC}$ (perpendicular);

d. Os segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{PQ}$ (segmento);

e. O triângulo ΔABC com traço pontilhado (polígono);

f. Esconder construções auxiliares (esconder/mostrar);

[10] Usa-se a ferramenta polígono regular para construir um quadrado e posteriormente obter o triângulo retângulo, através de uma de suas diagonais. Para a construção da diagonal usa-se a ferramenta bissetriz.

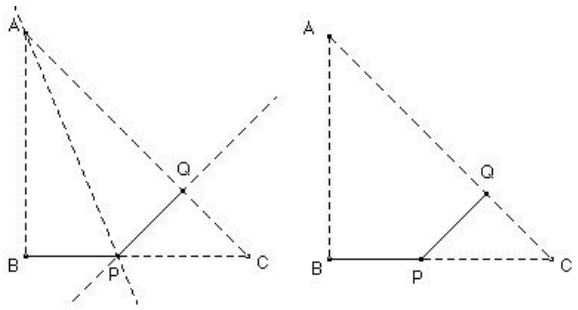


Figura 2.61

Construção da Macro:

a. Objetos Iniciais: o triângulo ΔABC construído em (a);

b. Objetos Finais: segmentos construídos em (d) e o triângulo ΔABC pontilhado construído em (e);

Usando a Macro para obter uma porção da Pavimentação:

Obter réplicas dos triângulos ΔABC construídos em (a) (transformação, simetria axial);

a. Use a macro em cada réplica, conforme a figura 2.62;

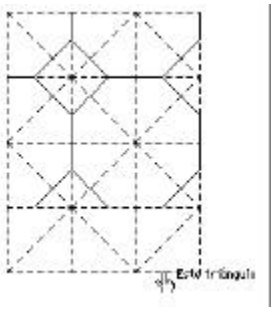


Figura 2.62

As duas construções mostradas referem-se às pavimentações do plano constituídas por polígonos regulares. A seguir apresentaremos a maneira como obter um mosaico ornamental usando o *software Cabri-Géomètre II.*

Obtenção do mosaico Torre de Comares

Construção de uma base geradora para o mosaico Torre de Comares:

O mosaico da Torre de Comares é um dos ornamentos do Palácio de Alhambra, Granada – Espanha. Foi fornecido por Escher quando de sua visita a Alhambra em 1936 e foi obtido por Barbosa e Murari em caleidoscópio de quatro espelhos.

Construir:

a. Um quadrado ? *ABCD* pontilhado (polígono regular);

b. Os pontos médios dos lados do quadrado ? *ABCD: E, F, G* e *H* (ponto médio);

c. Segmentos pontilhados unindo os pontos médios *E, F, G* e *H* como mostra a figura 2.63 (perpendicular);

d. Os pontos médios dos segmentos $\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$ e $\overline{\text{HE}}$ (segmentos);

e. Segmentos unindo os pontos médios obtidos em (d) como mostra a figura 2.63;

f. Perpendicular pelos pontos obtidos em (d) em relação ao lado do quadrado conforme a figura 2.63;

g. O quadrado ? *ABCD* com traço pontilhado (polígono);

h. Esconder construções auxiliares (esconder/mostrar);

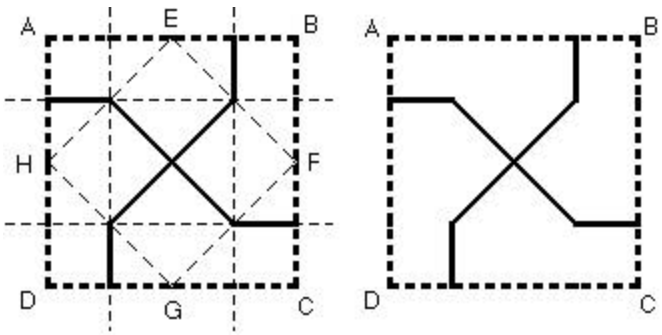


Figura 2.63

Construção da Macro:

a. Objetos Iniciais: o quadrado *ABCD* construído em (a);

b. Objetos Finais: segmentos construídos em (e) e (f) e o quadrado pontilhado construído em (g);

Usando a Macro para obter uma porção da Pavimentação:

a. Obter réplicas dos quadrado construídos em (a) (transformação, simetria axial);

b. Use a macro em cada réplica, conforme a figura 2.64;

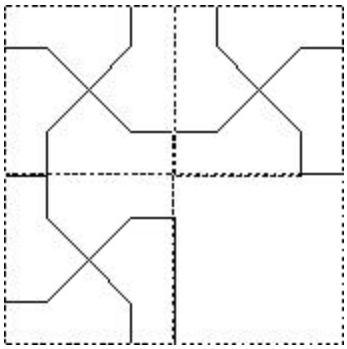


Figura 2.64

OBS: Note também que essa construção gera uma pavimentação cujas linhas de simetria (tracejadas) ficam aparentes, as quais podem ser apagadas ao final da construção apesar de demandar um certo tempo.

XIII. Padrões ornamentais

Silva e outros (1994) afirmam que a teoria da pavimentação do plano revela, entre outras, uma íntima relação com a arte, conforme mostram os trabalhos de Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Neles podem ser explorados grupos de simetrias, sistemas de divisão e recobrimento regular do plano, além da própria beleza que intrigam alguns estudiosos interessados pela obra desse artista holandês.

Com o objetivo de não restringir nosso trabalho apenas às pavimentações do plano por polígonos regulares e propiciar uma maior integração com a Educação Artística, estendemos nossas atividades aos mosaicos em geral, constituídos por padrões ornamentais.

Segundo Daffer e Clemens (1977), durante séculos filósofos, matemáticos e alguns artistas têm reconhecido e enfatizado aspectos artísticos da matemática. Hardy (apud Daffer and Clemens, 1977, p. 14) escreve:

"Um matemático, assim como um pintor ou um poeta, é fabricante de padrões. Se os padrões deles forem mais permanentes que os seus, é porque eles são feitos com idéias.

Os padrões dos matemáticos, assim como o dos pintores ou poetas, devem ser belos; as idéias, assim como as cores ou as palavras, têm que se justapor de um modo harmonioso. A beleza é o primeiro teste; não há lugar permanente no mundo para matemática feia".

Já Russell (apud Daffer and Clemens, 1977, p. 15) diz:

"A matemática possui não só verdade, mas beleza suprema - uma beleza fria e austera, como a de uma escultura, sem qualquer atração para nossa natureza mais fraca... sublimemente pura, e capaz de perfeição dura como só a maior arte pode mostrar".

Na primeira citação é colocada em evidência a relação *beleza* e *matemática*, fundamentando a idéia de mostrar a matemática aparentemente escondida em belos mosaicos, ou seja, explicita que a beleza é uma propriedade inerente a matemática e, portanto, está presente nela.

Em visitas a museus ou mesmo nas propagandas da televisão, pode-se perceber o uso de figuras ou conceitos geométricos para a criação de logotipos, pinturas ou esculturas, bem como outros objetos de artes. Mas afinal, o que é arte (artes plásticas)?

"*Capacidade que tem o homem de, dominando a matéria, pôr em prática uma idéia"* (Ferreira, p 41)[11].

"Artes plásticas é a utilização de elementos táteis e visuais, como volumes, cores e linhas, para se expressar por meio de esculturas, pinturas e desenhos"

(Guia do Estudante, p. 87)[12].

Ao se propor uma integração entre a matemática e as artes plásticas, queremos não só explorar mosaicos no plano, como encontramos nas obras de Escher, mas estender a idéia de padrão no espaço, como podemos observar nas obras de Landry comentadas adiante.

Padrões tipo Escher

M. C. Escher foi um artista gráfico holandês mais conhecido por suas obras de ilusões espaciais (fig. 2.65 e 2.66), como edifícios que não existem na realidade, padrões geométricos que geram pavimentações do plano e suas técnicas incríveis de trabalho em litografia.

M. C. Escher nasceu em junho de 1898 e morreu em março de 1972, mas seu trabalho ainda continua fascinando as pessoas de variados interesses e de qualquer idade. Ele foi um homem admirado e respeitado por matemáticos, cientistas e cristalógrafos, embora não tivesse nenhuma formação formal em ciências ou matemática e nem mesmo se considerava, ele próprio, um artista.

Em seus trabalhos encontramos a repetição de padrões complicados, com estruturas matemáticas complexas e perspectivas no espaço (fig. 2.66). Certamente, é preciso um "segundo olhar" para ver seu trabalho, não é em uma

---

[11] FERREIRA, A.B.H. **Minidicionário de língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1985.

[12] GUIA DO ESTUDANTE. São Paulo: Editora Abril, 1985.

primeira vez que se percebe essas características e complexidades, é preciso olhar com atenção.

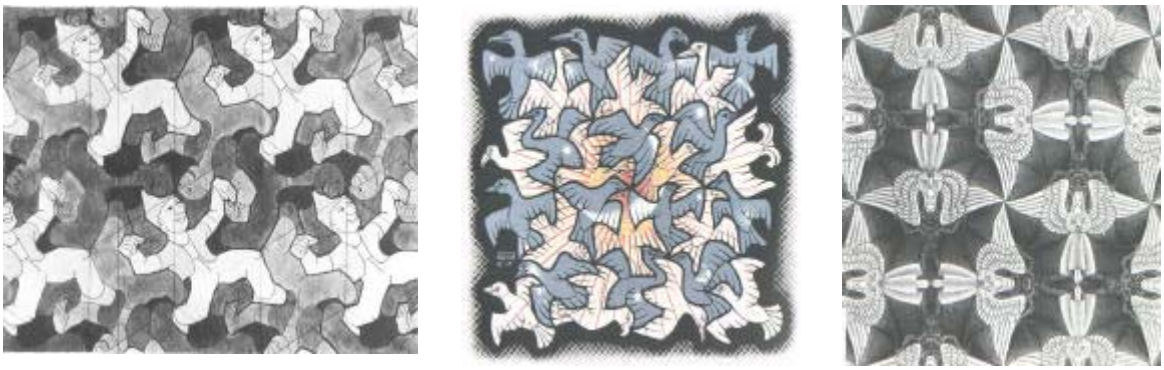


Figura 2.65

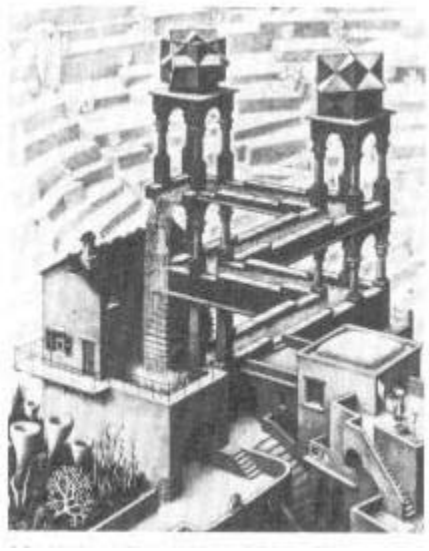


Figura 2.66

Modelos de Landry

K. E. Landry é outro artista gráfico, que também fez suas obras como as de Escher. Aliás, ele mesmo fixou seu próprio desafio artístico: seguir o caminho do artista M. C. Escher sobre as tesselações. Os trabalhos de Landry resultam de décadas de estudo auto-didático intensivo e de prática. Desde 1994, Landry se aventurou além da mídia de duas dimensões, lápis e papel, e se concentrou em

adaptar padrões que ladrilham o plano infinitamente para as superfícies de papel de modelo poliédrico. O resultado foi uma mistura de origami, arte-gráfica e uma fusão geométrica com a estrutura natural. Esses modelos, em três dimensões, são visualmente atordoantes e é coletivamente conhecido como "Poliedro Enfeitado".

Hoje ele tem mais de 120 imagens de tesselações planas, inspiradas no trabalho de Escher. Em 1985, com a aquisição de um computador, Landry passou a trocar sua técnica. Isso, além de trazer benefícios econômicos, trouxe exatidão que nunca foram possíveis em lápis e papel. Agora todas as suas imagens são arquivadas em formato digital. Dois de seus trabalhos são apresentados na fig. 2.67:

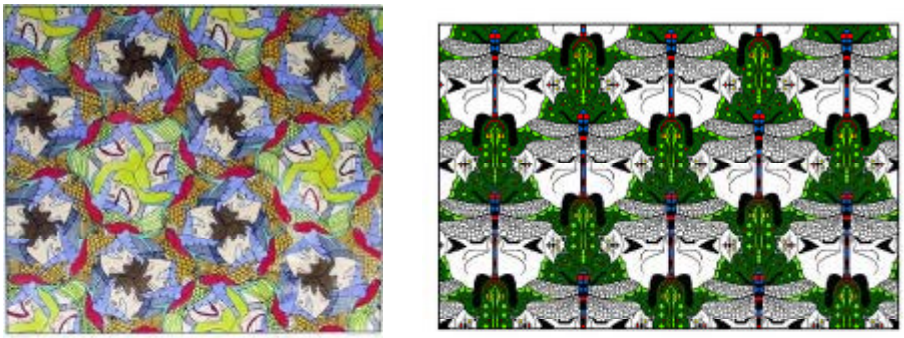


Figura 2.67

A partir de 1994, começou a decorar poliedros, baseados nos Kaleidociclos de Doris Schattschneider (1977). A idéia do Kaleidociclo é de que a tesselação se estenda de duas dimensões para a infinidade. *"Se eu crio um padrão que tessela o plano em uma folha de papel e transformo a folha plana em um cilindro de maneira que o padrão continua se repetindo sem interrupção enquanto o cilindro gira ao redor de seu eixo, eu alcanço a infinidade em uma só dimensão"* (Landry[13]). Isso nos dá um motivo que não tem começo e nem fim aparente, resultando numa ilusão que estende a infinidade em três dimensões.

[13] Trecho extraído do site http://www.landryart.com/



Figura 2.68

Nos trabalhos desses dois artistas mencionados anteriormente, está implícita a idéia de tomar um polígono que tessela o plano, deformá-lo de modo a manter a mesma área, como é exemplificado na fig. 2.69. Observe que cópias congruentes do resultado da deformação desse polígono, devidamente ajustadas, irão formar uma porção de pavimentação do plano (fig.2.70).

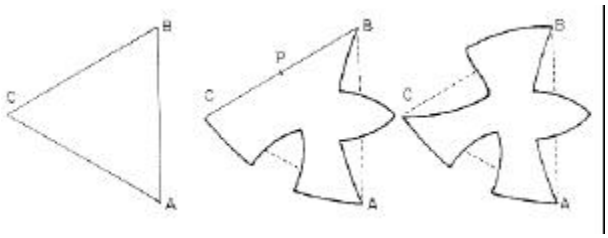


Figura 2.69

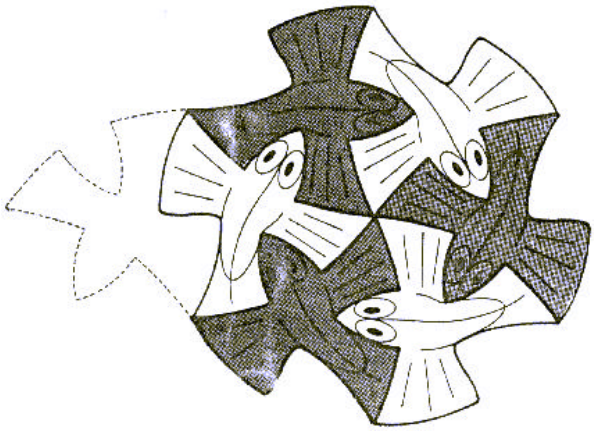


Figura 2.70

XIV. Padrões ornamentais em caleidoscópios

Como já dissemos, os mosaicos obtidos por Escher provinham, geralmente, da transformação de um polígono em um padrão de mesma área, conforme consta na página 118. Baseados na idéia de transformação, Barbosa e Murari (1996) obtiveram alguns "padrões ornamentais" através de pequenas alterações (modificações e/ou complementações) das bases (ou padrões caleidoscópicos) que geram pavimentações do plano por polígonos regulares visualizadas em caleidoscópios (de 2, 3 ou quatro espelhos). Tentando reunir essas duas idéias, construímos padrões com as características de Escher, efetuando as transformações nos segmentos que pertencem somente ao interior da base caleidoscópica, de modo a preservar a área delimitada por esses segmentos, o padrão *infantil* (fig.2.75) é um exemplo disto.

Observemos como se dá a origem de alguns padrões, que envolvem as idéias citadas acima:

Sala de los Reyes, obtido por Barbosa e Murari, do mosaico encontrado no Palácio de Alhambra, Granada - Espanha. Pode ser visualizado em caleidoscópio de três espelhos.

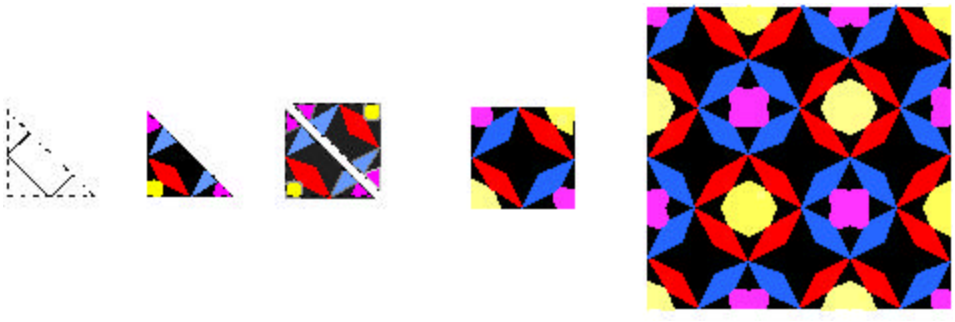


Figura 2.71

Sucessão de Quadrados Inscritos, obtido por Murari, é visualizado em caleidoscópio de três espelhos. Gera um visual de quadrados inscritos repetidos por todo o plano.

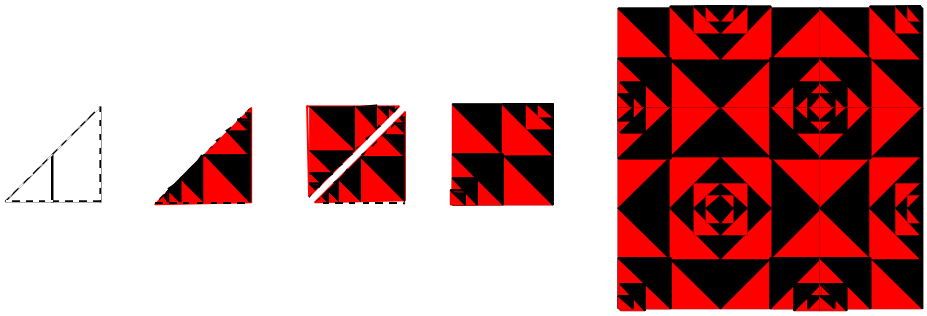


Figura 2.72

Torre de Comares, obtido por Barbosa e Murari, do mosaico fornecido por Escher do Palácio de Alhambra, Granada – Espanha. Pode ser visualizado em caleidoscópio de quatro espelhos.

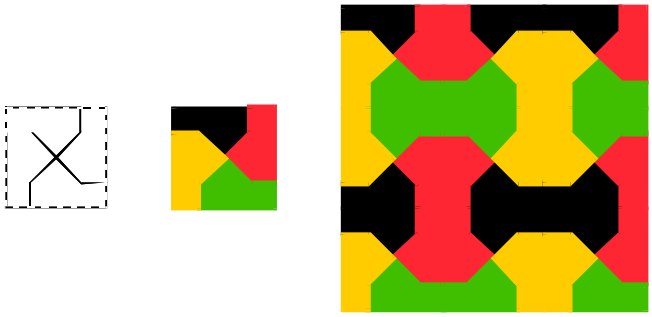


Figura 2.73

Pétalas e Pontas, obtido por Martins, de modificações de um padrão que gera pavimentação do plano por quadrados e octógonos. É visualizado em caleidoscópio de três espelhos.

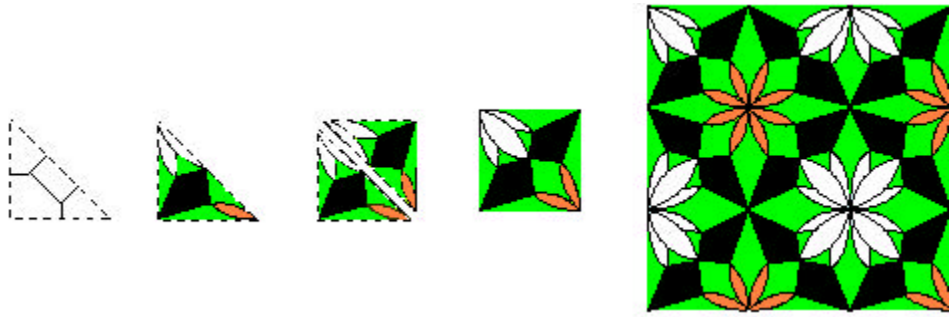


Figura 2.74

Padrão ***Infantil,*** obtido por Martins e visualizado em caleidoscópio de quatro espelhos.

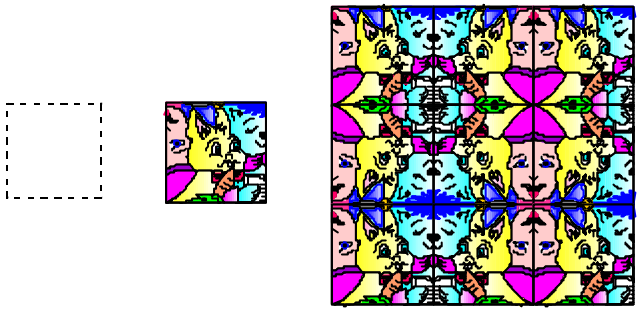


Figura 2.75

XV. Obtenção de pavimentações no *Corel Draw*

Descreveremos a construção no Corel Draw de um padrão ornamental. Esse mesmo padrão quando visualizado em caleidoscópio gera uma porção de pavimentação do plano. Primeiro, devemos construir um padrão ornamental usando as ferramentas *mão livre*, *retângulo ou polígono.* Com a ferramenta *mão livre* podemos desenhar retas e curvas (clique-arraste-clique). Para editar curvas usamos a ferramenta *forma,* que transforma a reta em uma curva e vice-versa. As

ferramentas *polígono* e *retângulo* nos dão a possibilidade de construir formas pré-definidas, agilizando o processo de uma construção.

Na figura 2.76, temos a construção de um padrão realizada no *CorelDraw*. Primeiramente construímos o quadrado com a ferramenta *retângulo* (*retângulo + ctrl)*, em seguida construímos segmentos de reta as quais deram origem a cinco regiões poligonais (branca, azul, verde, rosa e preta), cujo contorno é curvo (fig.2.76). Para isso utilizamos as ferramentas *mão livre* e *forma*. Para colorir o interior da figura clicamos com o botão direito do *mouse* na cor desejada da paleta de cores e para colorir a fronteira, clicamos com o botão direito do *mouse* na cor desejada da paleta.



Figura 2.76

Usando a ferramenta *organizar, transformar, escala-espelho* obtemos réplicas dos padrões através da reflexão em relação a um dos lados do quadrado (fronteira do padrão), obtendo o mosaico ornamental (fig.2.77).

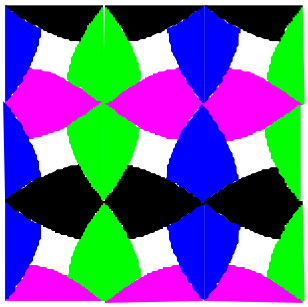
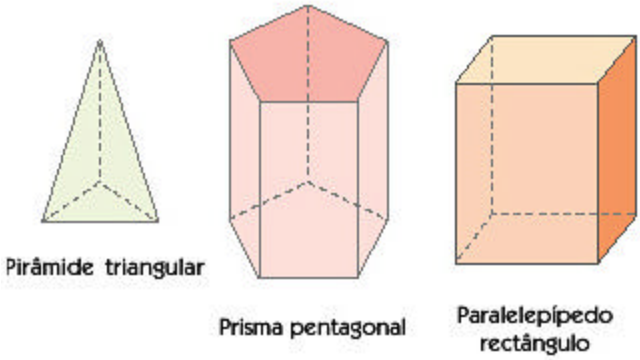


Figura 2.77

2.5. Tesselações do espaço

I. Poliedros

Poliedro, do grego *poli* = muitos e *edro* = faces, muitas faces, é um sólido geométrico em que as faces são polígonos que tem, dois a dois, um lado comum. Os vértices e as arestas dos polígonos que constituem o poliedro são vértices (nó) e arestas do poliedro. Pirâmides, prismas e antiprismas são exemplos familiares de poliedros.



Figuras 2.78

Um poliedro é dito regular (convexo regular) se suas faces são regiões poligonais regulares, todas com o mesmo número de lados, e se em todo vértice do poliedro converge o mesmo número de arestas. Podemos definir isto de outro modo: um poliedro é regular se todas figuras vértices do poliedro forem polígonos regulares de mesmo tipo.

Figura vértice de um poliedro é um polígono cujos vértices são os pontos médios das arestas emanadas de um vértice do poliedro. Por exemplo, no cubo a figura vértice é um triângulo eqüilátero (fig. 2.79).

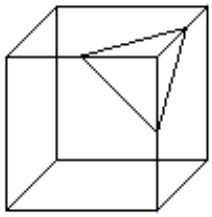
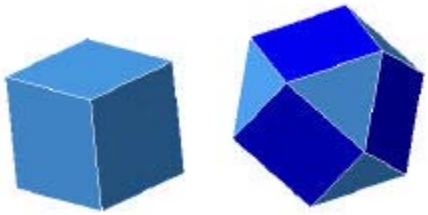


Figura 2.79

Denotaremos o poliedro regular pelo símbolo { p, q }ou p^q , onde *q* é o número de polígonos ao redor de cada vértice e *p* é o número de lados dos polígonos que constitui o poliedro.

Um poliedro é dito uniforme se suas faces são regulares e se todos os seus vértices possuem as mesmas características, ou seja, se cada vértice apresenta o mesmo número de arestas convergentes, o mesmo número de polígonos ao redor de seu vértice, dispostos na mesma ordem, isto é, possui a mesma configuração. Por exemplo, todo vértice do cubo tem a mesma característica: possui três arestas convergentes e três quadrados ao redor de um nó; o cubo-octaedro também apresenta vértices com a mesma característica: possui quatro arestas convergentes e um quadrado, um triângulo, um quadrado e um triângulo, nesta ordem, ao redor de cada vértice.



Cubo **Cubo-octaedro**

Figura 2.80

Os poliedros platônicos (poliedros regulares) são exemplos de poliedros uniformes (fig. 2.81).



Figura 2.81

Mas, afinal, quantos poliedros regulares existem? Para responder a essa questão podemos fazer a seguinte investigação:

Tomemos, primeiramente, poliedros regulares cujas faces sejam triângulos eqüiláteros. Ao estudar as tesselações do plano vimos que seis triângulos pavimentam o plano (fig. 2.82). Assim, para obter uma figura espacial (um poliedro) devemos ter até cinco triângulos eqüiláteros ao redor de um vértice (nó), ou seja, a soma dos ângulos internos de um polígono deve ser menor que 360°.

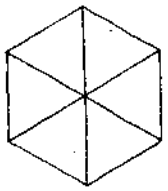


Figura 2.82

Consideremos, então, cinco triângulos eqüiláteros ao redor de um vértice, como mostra a figura 2.83. Juntando as faces A e B, obtemos um "telhado" tridimensional que compõe um poliedro regular de vinte faces.

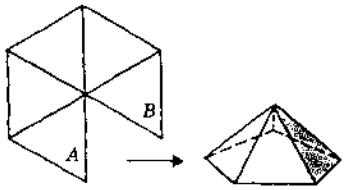


Figura 2.83

Tomando quatro triângulos eqüiláteros ao redor de um vértice e unindo as faces A e B, como mostra a figura 2.84, temos um "telhado" tridimensional que gera um poliedro regular de oito faces.

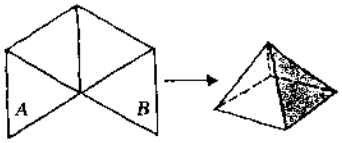


Figura 2.84

Para o caso em que temos três triângulos eqüiláteros ao redor de um nó, obtemos um "telhado" tridimensional para o poliedro regular de quatro faces.

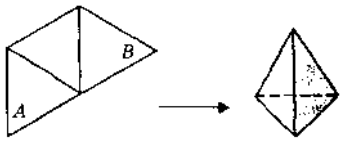


Figura 2.85

Da maneira análoga, quatro quadrados tesselam o plano, então, três irão formar um "telhado" tridimensional que compõe um poliedro regular de seis faces.

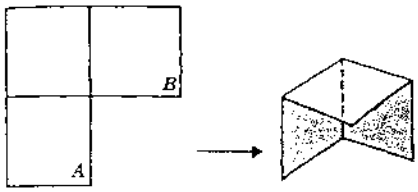
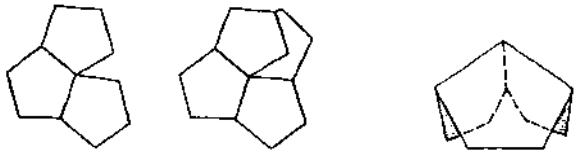


Figura 2.86

Os pentágonos são polígonos regulares que não pavimentam o plano (fig.2.87 a), porém, reunindo três dessas figuras geométricas obtemos um "telhado" tridimensional que gera um poliedro regular de doze faces (fig. 2.87 b).



(a) **(b)**

Figura 2.87

Essa consideração intuitiva de "telhados" usada em Daffer e Clemens (1977), segundo os autores, sugere que existem exatamente cinco poliedros regulares; porém pode-se fazer uma explanação mais formal, como segue abaixo:

Proposiąão: Existem cinco poliedros regulares.

Prova: *Suponha que exista um poliedro regular de modo que p seja o número de lados de cada face.*

O ângulo interno de cada polígono é dado por $i = \frac{180^0(p-2)}{p}$. *Se q é o número de polígonos ao redor de cada vértice, para que se tenha um poliedro, segue que:*

$$q\left[180\frac{(p-2)}{p}\right] < 360 \Rightarrow q\frac{(p-2)}{p} < 2 \Rightarrow q(p-2) < 2p \Rightarrow qp - 2q < 2p$$
$$\Rightarrow qp - 2q - 2p < 0 \Rightarrow qp - 2q - 2p + 4 < 4 \Rightarrow (p-2)(q-2) < 4$$

Os valores de p e q devem ser ambos maiores que 2, pois, caso contrário, não teríamos polígonos e poliedros. Atribuindo valores para p e q obteremos a tabela abaixo, conforme encontra-se em O'Daffer & Clemens (1977).

p	*q*	*p – 2*	*q – 2*	*(p-2)(q-2)*
3	*3*	*1*	*1*	*1*
3	*4*	*1*	*2*	*2*
3	*5*	*1*	*3*	*3*
4	*3*	*2*	*1*	*2*
5	*3*	*3*	*1*	*3*

Tabela 2.3

Portanto, temos apenas cinco tipos de poliedros regulares: três em que as faces são triângulos equiláteros – tetraedro, octaedro e icosaedro. Um constituído por faces quadrangulares – o cubo, outro em que as faces são pentágonos – o dodecaedro.

Sendo V, A e F o número de vértices, arestas e faces respectivamente, então,

{p,q}	V	A	F	Nome do poliedro
{3,3}	4	6	4	Tetraedro
{4,3}	8	12	6	Cubo
{3,4}	6	12	8	Octaedro
{5,3}	20	30	12	Dodecaedro
{3,5}	12	30	20	Icosaedro

Tabela 2.4

Na figura abaixo, temos os cincos poliedros regulares:



Figura 2.88

II. Planificações

Como vimos anteriormente, para que um conjunto de polígonos se justaponha sem que haja vazios ou superposições, é necessário que a soma dos ângulos internos desses polígonos, ao redor de um nó, seja igual a 360°.

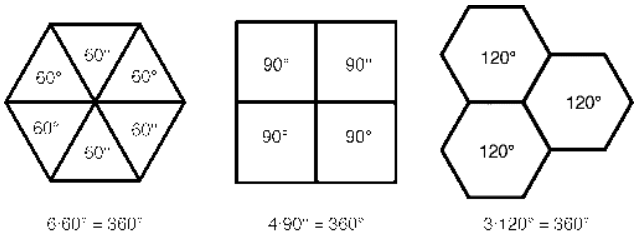


Figura 2.89

Uma porção da pavimentação do plano pode também representar uma figura espacial, quando disposta adequadamente ou dar origem a uma figura espacial através da montagem adequada. O exemplo abaixo (fig.2.90) é uma porção da pavimentação do plano de configuração (4,4,4,4) que quando dobrada forma uma figura espacial. Porém, nem todas as planificações provêm de uma porção de uma pavimentação do plano (veja na fig. 2.91 a quarta planificação, da esquerda para direita).

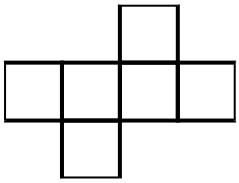


Figura 2.90

Acima, temos apenas um exemplo da planificação de um cubo, mas existem outras, as quais variam de acordo com a disposição dos polígonos que constituem as faces desse poliedro. O mesmo vale para todas as figuras espaciais.

Dizemos que a representação de uma figura espacial no plano é uma planificação. Segue abaixo as planificações de cada poliedro regular (fig. 2.91):

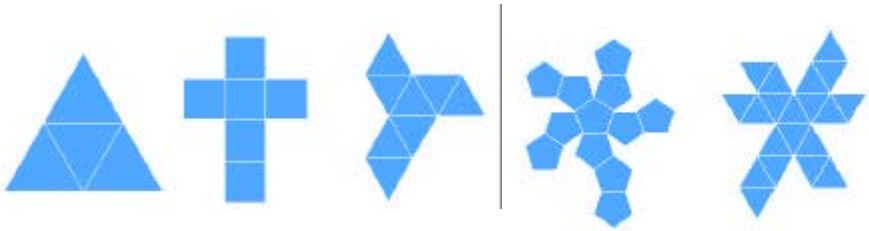


Figura 2.91

III. Poliedros semi-regulares

Um poliedro semi-regular é um poliedro construído por mais de um tipo de polígono regular de modo que todos os seus vértices sejam semelhantes.



Figura 2.92

O poliedro acima é o cuboctaedro, formado por triângulos eqüiláteros e por quadrados. Observe que ao redor de cada vértice temos dois quadrados e dois triângulos.

Alguns poliedros semi-regulares podem ser obtidos de um poliedro regular, passando um plano em cada vértice. Esse processo é denominado truncamento.

No caso do cubo-octaedro, o plano que corta o vértice é perpendicular ao eixo de simetria que passa pelo vértice. O truncamento para se obter esse poliedro pode ser realizado tanto no cubo, como no octaedro.

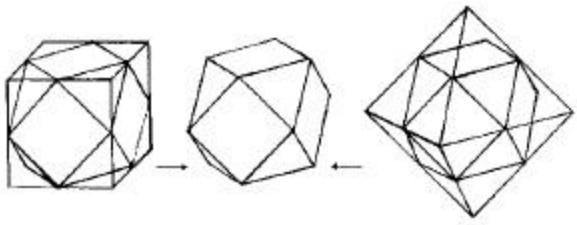


Figura 2.93

Se todos os oito vértices do cubo são truncados de modo que as faces quadradas dos cubos tornam-se octógonos regulares, o novo poliedro é chamado cubo truncado (fig.2.94).

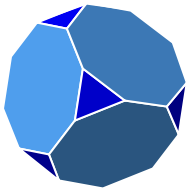


Figura 2.94

Ao truncar o octaedro de modo que as faces triangulares tornem-se hexágonos teremos o octaedro truncado (fig. 2.95).

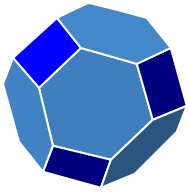
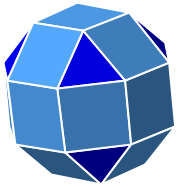


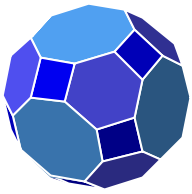
Figura 2.95

Deste modo, obtemos do cubo e do octaedro três poliedros semi-regulares (fig.2.93, fig 2.94 e fig. 2.95).

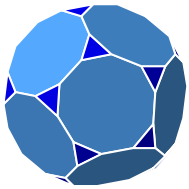
Na figura a seguir temos mais exemplos de poliedros semi-regulares:



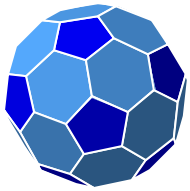
Rombicuboctaedro



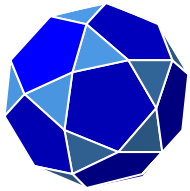
Great rombicuboctaedro



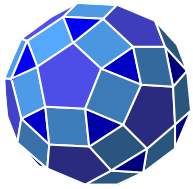
Icosadodecaedro



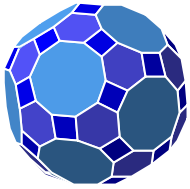
Dodecaedro truncado



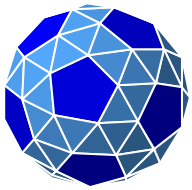
Icosaedro Truncado

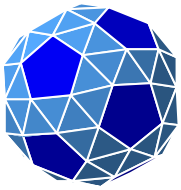


Rombicosidodecaedro



Great Rombicosidodecaedro





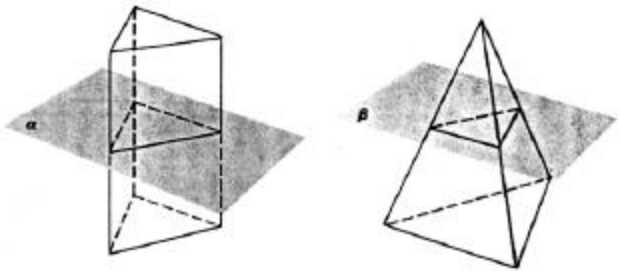
Snub dode caedro

Figura 2.96

IV. Simetria no espaço[14]

A simetria espacial é um tema importante no estudo da estrutura molecular. Os diamantes e o cloreto de sódio são estruturas simétricas, porém poucas estruturas cristalinas são.

Na figura 2.97 (*a*), *α ⌠χηαμαδο plano de simetria* do prisma triangular eqüilátero, enquanto que na figura 2.97 (*b*) *β ν©ο ⌠πλανο δε σιμετρια δε υμα πιρ®μιδε τριανγυλαρ.*



(a) ***(b)***

Figura 2.97

Tomando *α χομο σενδο υμ εσπεληοανφιγυρα 2.97ā)(* cuja face estaria voltada para cima e a parte inferior do prisma fosse removida, ao olhar no espelho a imagem refletida da parte superior do prisma tem-se a visão total desse sólido geométrico. Ou seja, o espelho nos fornece a outra metade dessa figura espacial. Deste modo *α ⌠χλασσιφιχαδο χομο υμ πλανο δε σιμετρια δο πρισμα. Απλιχανδο α μεσμα ιδ⌠ια να φιγυρα 2.97b)*, vemos que removendo a parte inferior da pirâmide, onde *β ⌠υμ εσπεληο χομ οσφε ωολταδα παρα χιμα, α ρεφλεξ©ο δα παρτε συπεριορ δα πιρ®μιδε νο εσπεληον©ο χοινχιδε χομ α παρτε ρεμοωιδα, ου σεφα, ν©ο φορνεχε α ωισυαλιζα⌡©ο δα πιρ®μιδε τοδα.*

[14] Tópico baseado em Daffer e Clemens (1977).

V. Tesselações do espaço por poliedros regulares

O termo tesselação, do inglês *tesselation*, possui sentido análogo à palavra pavimentação, mas agora não se trata de cobrir somente o plano, mas uma região qualquer.

Utilizamos tesselação e não tecelação, pois de acordo com Barbosa (1993), que já emprega este termo, tecelagem (de tecer, entrelaçar fios) não teria o mesmo sentido que o empregado por pesquisadores americanos, visto que *tesselation* deriva da palavra *tile*, peça de mosaico, que no português, corresponde ao vocábulo *tessela.*

Definimos tesselação do espaço como sendo uma família enumerável de conjuntos fechados que cobre o espaço sem lacunas. Em outras palavras, se empilharmos os poliedros, um a um, de modo que não fique espaço entre eles iremos preencher todo o espaço.

Quais poliedros regulares tesselam o espaço?

Para obtermos uma pavimentação do plano por polígonos regulares vimos que para q polígonos ao redor de cada nó ou vértice, qi = 360º, onde i é a medida do ângulo interno de cada polígono.

De modo análogo, para que ocorra uma tesselação do espaço, se s é o número de poliedros dispostos ao redor de um nó ou vértice e d o ângulo diedro[15], então ds = 360º.

Como encontrar o ângulo diedro?

Observe que seis diagonais contidas nas faces do cubo formam um tetraedro como mostra a figura 2.98.

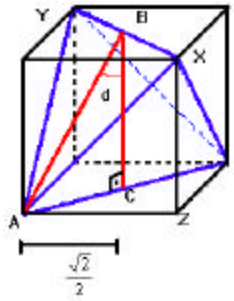
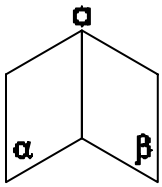


Figura 2.98

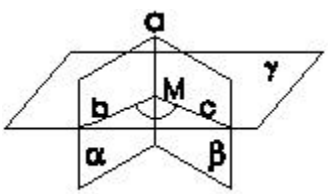
---

[15] **Def.:** Dados dois semiplanos distintos α e β de mesma origem não opostas, chama-se diedro ou ângulo diédrico a reunião de α e β, isto é, $\alpha \cup \beta$.



Def.: Dados um diedro $\alpha\beta$ chama-se diedro ou setor diedral a reunião do diedro e do interior (I), ou seja, o setor $\alpha\beta = \alpha \cup \beta \cup \mathrm{I}$.

Def. (Seção Normal de um diedro): Se por um ponto M da aresta a de um diedro $\alpha\beta$, construirmos o plano $\gamma \perp a$, a intersecção de γ e do diedro é um *ângulo* $B\hat{M}C$, onde $b = \gamma \cap \alpha$ e $c = \gamma \cap \beta$. Obteremos o ângulo diedro formado por M e as semi-retas b e c onde $b = \alpha \cap \gamma$ *e* $c = \beta \cap \gamma$



Considere que esse cubo tenha aresta de comprimento 1, onde B é ponto médio da aresta *xy* e $\overline{BC}$ é paralelo a *xz*. Disto segue que o segmento $\overline{BC}$ tem medida 1 e o segmento $\overline{AC} = \sqrt{2}/2$. Assim:

$$tg\ d = \sqrt{2}/2$$

$$tg\ d = 0.707$$

$$d = 35^{o}\ 16'$$

Assim, o ângulo diedro do tetraedro vale 2 x (35º 16') = 70º 32'. Note que este valor não é divisor de 360º, isto equivale dizer que um conjunto de tetraedros não tesselam o espaço.

Analogamente, obtemos os ângulos diedros dos outros sólidos, indicados na tabela abaixo:

Poliedro regular	***Medida do ângulo diedro (graus)***
Cubo	90º
Tetraedro	70º 32'
Octaedro	109º 28'
Dodecaedro	116º 34'
Icosaedro	138º 11'

Tabela 2.6

Se quisermos tesselar o espaço utilizando apenas um sólido, concluímos, a partir desta tabela, que somente o cubo tessela o espaço.

Podemos tesselar o espaço combinando 2 tetraedros com 1 octaedro. Basta observar que a medida do ângulo diedro do octaedro somado com a do tetraedro vale 180º, que é divisor de 360º.

De acordo com esta tabela, além dos citados, não há mais possibilidades de tesselar o espaço combinando poliedros regulares. Portanto, somente o cubo e a combinação de tetraedros e octaedros tesselam o espaço (fig.2.99).

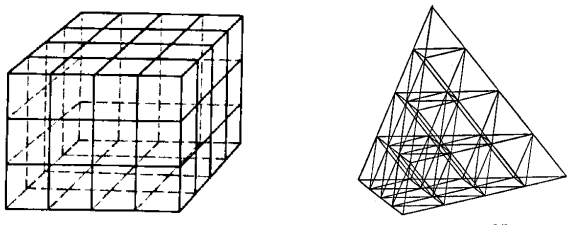
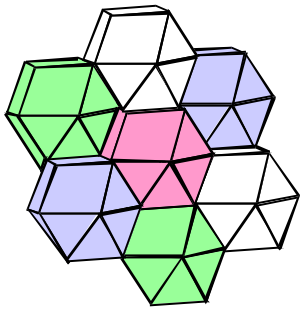


Figura 2.99

VI. Tesselações do espaço por poliedros semi-regulares

Do mesmo modo que podemos tesselar o espaço por poliedros regulares, também podemos tesselá-lo por poliedros semi-regulares e outros tipos de poliedros (fig.2.100).



Tesselação do espaço por rombic-dodecaedro

Figura 2.100

No caso dos poliedros semi-regulares temos apenas três possibilidades de tesselar o espaço: por octaedros truncados, por tetraedros e tetraedros truncados; por octaedro e cubo-octaedro.

Em nosso trabalho tivemos o interesse de trabalhar apenas com as tesselações espaciais que geram planos nas faces do empilhamento. Portanto, nas atividades, trabalhamos somente com as tesselações do espaço por poliedros regulares.

VII. Padrões caleidoscópicos nas faces de poliedros

Como as faces desses poliedros são quadradas (cubos) e triângulos equiláteros (tetraedros e octaedros), então colocamos em suas faces bases caleidoscópicas (que também possuem essas formas) de modo a gerar porções de pavimentações laterais do plano quando empilhados tais sólidos (fig.2.101).

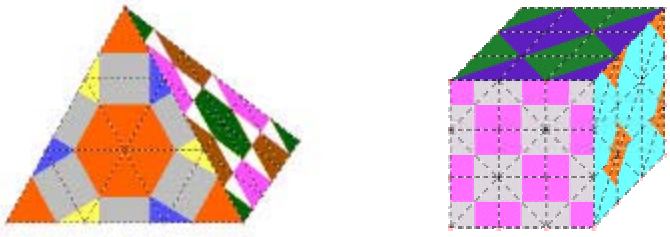


Figura 2.101

Para colocar as bases nas faces dos poliedros construímo-las em uma folha a parte (com régua e compasso ou utilizando algum *software*). Recortamos e colamos cada base na face do poliedro planificado, o qual foi dobrado e montado posteriormente.

Para se obter as tesselações do espaço e pavimentações nas faces dos sólidos como na figura 2.101 é, necessário construir-se vinte e sete cubos, onze tetraedros e 4 octaedros. Note que os números recomendados fornecerão apenas uma pequena porção da tesselação do espaço.

Os padrões da figura 2.102 podem ser visualizados em caleidoscópios isósceles, com três espelhos. Escolhemos esses seis padrões que geram as pavimentações de configurações (4,4,4,4) e (4,8,8) no caleidoscópio isósceles, para serem construídos nas faces dos poliedros.

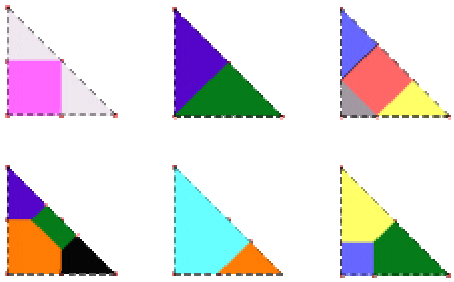


Figura 2.102

Após a construção geométrica dos padrões nas planificações de cada cubo e sua montagem, empilhamos tais sólidos obtendo as pavimentações planas nas laterais deste empilhamento.

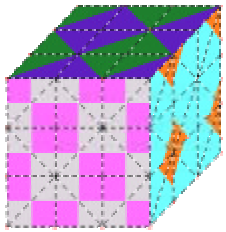


Figura 2.103

No caso da fig. 2.103, foram necessárias apenas duas planificações distintas para obtermos uma porção da tesselação do espaço por 27 cubos (fig 2.104).

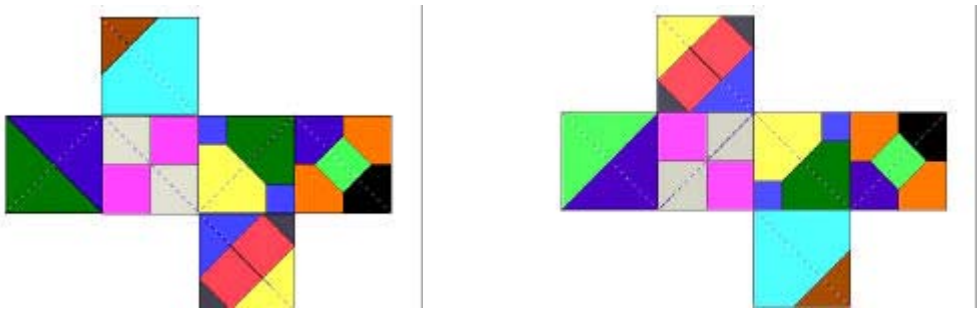


Figura 2.104

No caso das tesselações do espaço por tetraedros e octaedros, o processo realizado foi análogo à tesselações por cubos. Os padrões escolhidos (fig.2.105) geram, na ordem em que se apresentam, pavimentações do plano por polígonos regulares de configurações (3,3,3,3,3,3), (3,4,6,4), (3,6,3,6) e (4,6,12).

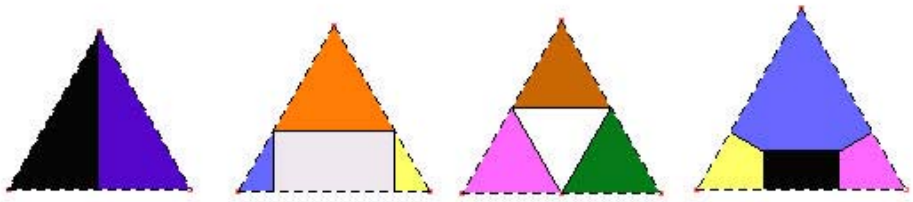


Figura 2.105

As planificações obtidas dos 15 poliedros utilizados nessa experimentação foram todos distintos (fig. 2.106).

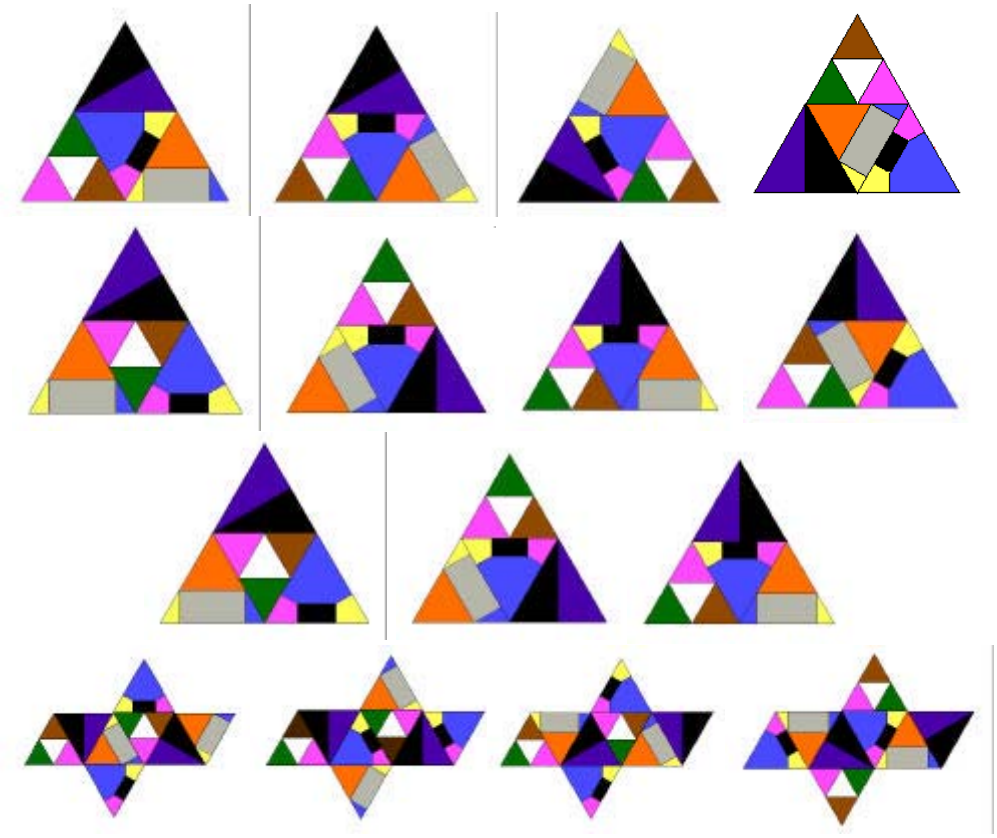


Figura 2.106

Observe na figura 2.107 uma vista em perspectiva da porção de tesselação obtida por tetraedros e octaedros.

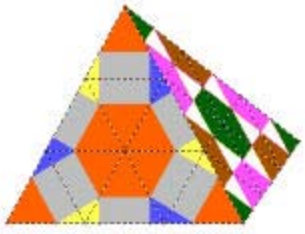


Figura 2.107

CAPÍTULO 3: A PESQUISA DE CAMPO

3.1. A escola



Figura 3.1

Neste capítulo descreveremos a pesquisa de campo. As atividades foram desenvolvidas em 36 aulas[1], durante as quais foram anotadas em um caderno de campo o relato de cada aula, registros escritos contendo as estratégias e soluções apresentadas pelos alunos, suas dificuldades e comentários relacionados a cada atividade, além dos relatos dos fatos ocorridos no ambiente escolar considerados relevantes para a pesquisa. Pretendeu-se fazer com que os alunos e a professora da sala de aula tivessem um papel ativo na pesquisa.

[1] Utilizávamos três das cinco aulas semanais da Profa. Manuela, responsável pela disciplina de Matemática por essa classe.

Realizamos entrevistas formais e informais e questionários para eventuais esclarecimentos, complementando as anotações em um caderno guiadas pelo diário de campo (anexo III). É nessa fase que se iniciou a análise do material coletado.

Nessa etapa tivemos a oportunidade de conhecer melhor os sujeitos de nossa pesquisa. Atuamos como observadora participante. Com o objetivo de provocar uma maior interação com os sujeitos utilizamos atividades introdutórias ao uso do *software Cabri-Géomètre II e ao Geometricks*, através da exploração das ferramentas e construções fundamentais.

Aplicamos um questionário aos alunos para que pudéssemos verificar suas perspectivas em relação ao ensino-aprendizagem da Geometria. Como eles já tinham noções do que era Geometria e tinham aulas dessa disciplina desde a primeira série do ensino fundamental, elaboramos as questões abaixo, das quais apresentamos algumas respostas e comentários elaborados pelos alunos:

1 – O que você espera aprender em Geometria?

"a montar várias formas geométricas"
"aprender melhor as formas geométricas"
"a medir ângulo"
"muitas coisas relacionadas com ângulo"

A grande maioria escreveu que esperava aprender tudo sobre Geometria e coisas novas. Apenas quatro alunos (respostas acima), mencionaram algum conteúdo.

2 – O que você espera das aulas de Geometria?

"Que sejam interessantes e não cansativas"
"Aprender o máximo possível"
"Espero que elas sejam divertidas"
"Espero que sejam boas e fácil de entender"

As outras respostas diferentes das apresentadas acima falavam em aprender e entender bem Geometria ou que a professora ensinasse bem essa matéria.

3 – Na sua opinião, qual o sentido de se aprender Geometria?

" ... eu acho que a Geometria aparece em vestibulares"

"Assim poderemos utilizar a Geometria em nossa vida"

"Perder aula de matemática"

"Quando você vai prestar bolsa de estudos cai muito sobre isso"

"Acho que não faz sentido, pois eu pretendo ser psicóloga"

"Sim. Mas acredito que a Geometria faz mais sentido para pessoas que pretendem arrumar empregos dentro desse aprendizado"

"Sim, tem sentido, porque depende da profissão que vai querer trabalhar"

"Faz, porque você aprende a medir ângulos"

Dos trinta questionários distribuídos, apenas um aluno deixou todas as questões em branco. Nas entrevistas realizadas após a aplicação do questionário, treze alunos que não responderam a questão número três, afirmaram que não o fizeram por não saberem a importância da Geometria em suas vidas.

Essa turma, em particular, não trabalhou com mosaicos, tema que tem sido explorado pelas professoras de matemática dessa escola. Para sabermos o que havia sido estudado em Geometria perguntamos à professora responsável pela sala e às estagiárias de Prática de Ensino (alunas da licenciatura em matemática). Em resposta às nossas perguntas, resumidamente, obtivemos o seguinte:

"*Classificação dos ângulos (reto, agudo, obtuso); classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos; ângulos opostos pelo vértice; retas paralelas cortadas por uma transversal".*

A professora responsável pela sala de aula não trabalhou conteúdos de geometria, apenas as estagiárias. Devido ao pouco tempo de estágio foram trabalhados apenas os tópicos acima e desenvolvidos da seguinte maneira:

"Utilizamos o computador e fizemos uma aula de origami. Fomos pedindo aos alunos realizarem as tarefas no computador, após feita a construção eles eram questionados a investigá-la para descobrir propriedades e depois discutirmos sobre as conclusões de cada um para finalizarmos o conceito"

Uma das estagiárias, consciente do papel da Geometria no ensino-aprendizagem, assim se expressou: *"a geometria deve ter tanta importância quanto outros tópicos da matemática, logo não deve ser deixada de lado. Deve-se aproveitar o potencial dos computadores e dos softwares de geometria dinâmica para ensiná-la".*

Os esclarecimentos acima foram importantes e se constituíram num ponto de partida para a elaboração de nossas atividades envolvendo caleidoscópios, sólidos geométricos e informática com os alunos. Ainda nesse sentido, trabalhamos na escola Heloísa Lemenhe Marasca, com os professores da rede Interlink (mencionado no capítulo 1). Com isso, tivemos a experiência desses professores auxiliando-nos a refletir sobre as atividades, permitindo uma reelaboração das mesmas. Queríamos saber se as atividades apresentadas estavam claras, alcançavam os objetivos propostos e mais, se estavam adequadas àquela série.

3.2. As atividades

Conhecendo os sujeitos de nossa pesquisa, assim como o ambiente escolar e a relação dos alunos com a Geometria sentimo-nos mais à vontade em iniciar nosso trabalho de campo.

Os alunos sentavam-se em duplas nos lugares definidos pela professora. Existiam algumas regras na sala para manter a ordem, como não mascar chicletes,

pedir para jogar objetos no lixo. Apesar disso, os alunos ainda se mostravam indisciplinados. A fig. 3.2 dá-nos uma noção espacial da localização do material existente na sala de aula:

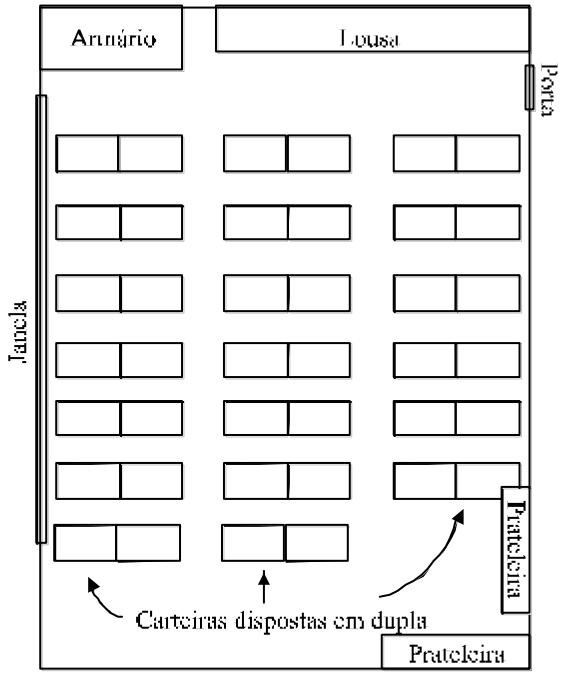


Figura 3.2

Desde o início propomos que as atividades fossem realizadas em grupos, cuja composição se deu pela professora responsável pela sala, devido à grande heterogeneidade da turma, pois existiam alunos fracos e fortes. Optou-se, então, pela formação de grupos heterogêneos. Eram sete grupos com quatro alunos cada, que chamaremos de grupos A, B, C, D, E, F e G.

As atividades foram desenvolvidas em cinco blocos, mencionados abaixo:

I. Introdução ao uso do *Cabri-Géomètre II;*
II. Um espelho;
III. Dois espelhos;
IV. Três espelhos e *Geometricks e*
V. Poliedros com padrões em suas faces.

Essa seqüência permitiu que trabalhássemos do conteúdo mais simples para o mais complexo, no qual cada novo material era integrado ao que já estava sendo utilizado em atividades anteriores. A seguir, faremos uma descrição e análise de algumas atividades desenvolvidas em cada bloco.

I. Introdução ao uso do *Cabri-Géomètre II*



Figura 3.3

O *material* utilizado foi o *software Cabri-Géomètre II* e fichas de trabalho[2]. Os alunos foram organizados em duplas[3] para trabalhar no computador. Devido à dificuldade em utilizar o *software* deixamos os alunos explorarem-no livremente para conhecerem as ferramentas e recursos que o mesmo oferece.

A partir desse momento, ficamos somente observando os alunos e tirando dúvidas apenas quando solicitavam. Construíram pontos, segmentos de reta, retas, semi-retas, circunferências, polígonos, coloriram as linhas e o interior das figuras, esconderam e apagaram objetos. Enfim, aprenderam a utilizar as principais ferramentas do *Cabri-Géomètre II,* de acordo com os recursos encontrados em cada ícone (fig 3.4.).

[2] Listas de exercícios e problemas auto-explicativos.
[3] Estavam conosco apenas uma parte da classe, ou seja, 20 alunos. A outra parte ficou em sala de aula com a professora responsável pela classe, pois havia somente dez computadores no laboratório de Informática.

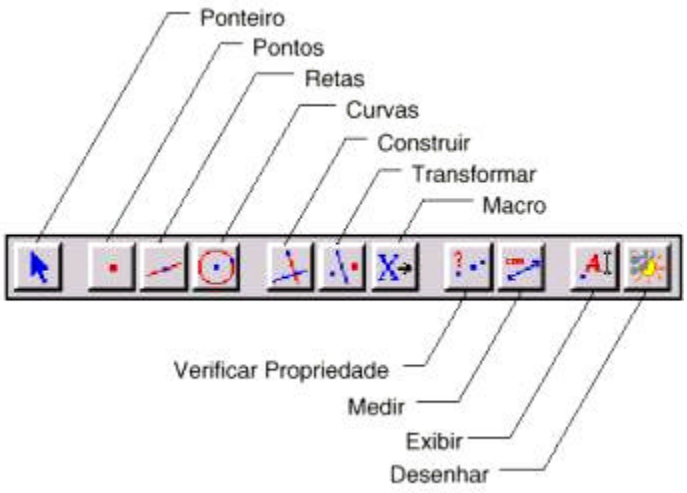


Figura 3.4

Das descobertas, a ferramenta *polígono regular* foi a que mais interessou os alunos por possibilitar a construção de polígonos estrelados, produzindo bonitas imagens, como exemplifica a figura 3.5. Empolgados, um aluno mostrava ao outro o que tinha feito, provocando assim uma maior interação entre os mesmos.



Figura 3.5

Essa oportunidade de familiarização e introdução ao uso do software *Cabri-Géomètre II* foi bastante importante porque mesmo os alunos que apresentavam uma certa intimidade com o computador apresentaram dificuldades, relativamente a apagar um objeto, nomear, colorir e arrastar (sempre esqueciam de clicar no *ponteiro*, ícone utilizado para mover os objetos).

II. Um espelho

Para a execução dessas atividades utilizamos fichas de trabalho, um espelho por grupo, régua e transferidor (para medir o ângulo entre os espelhos).

Ao entregarmos as fichas de trabalhos os alunos já perguntavam o que era para ser feito, antes mesmo de ler o que era solicitado. Aos poucos foram se acostumando e interessados pelo material, resolviam as atividades mais rápido do que o esperado. As discussões das soluções apresentadas pelos alunos não foram acompanhadas por todos (os próprios alunos admitiram isso).

Os alunos entraram em contato com o conceito de simetria conosco. Muitas dúvidas surgiram. Havia muita dependência em relação a nossa ajuda. Ao darem uma resposta, faziam-no com insegurança, olhando para nós, aguardando sempre nossa anuência ou desaprovação.

O conceito de *simetria* somente foi entendido na atividade número seis. A noção de *sentido* foi introduzida na atividade número oito. Notamos muita confusão entre *translação*, *rotação* e *simetria*. Sabiam defini-los, mas trocavam o nome. O conceito de polígono era também bastante confuso.

Ao trabalharmos com um espelho, dois alunos sentiram dificuldades em entender o conceito de ponto simétrico, alegaram ser a definição formal de ponto simétrico mais fácil:

"Quem me garante que a distância entre o estojo e o espelho é igual a distância do espelho a imagem do estojo" [o aluno mostrava com a régua e se irritava em não poder medir a imagem, já que se utilizasse régua ela (a régua) também seria imagem].

Antes de introduzirmos as fichas de trabalho, entregamos aos alunos uma folha contendo conceitos básicos de geometria como ponto, reta e plano, segmento, semi-reta, ângulo e polígono. Todos esses conceitos já haviam sido apresentados aos alunos em séries anteriores, porém achamos conveniente que eles revisassem para o início das atividades.

Na primeira atividade trabalhada com um espelho, explicamos aos alunos sobre as imagens (reflexões) de pontos e figuras obtidas em um espelho. Pedimos aos estudantes que observassem que se um ponto B é a reflexão de um ponto A através de um espelho, o ponto A é a reflexão do ponto B por este mesmo espelho, como na figura 3.6.

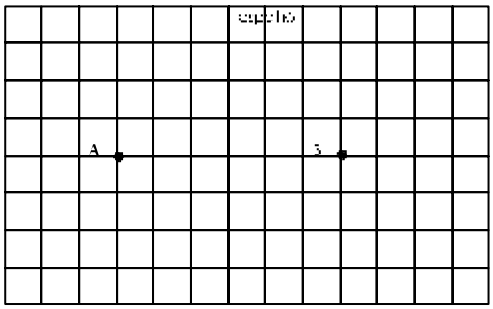


Figura 3.6

Ainda com o uso de um espelho, solicitamos que descobrissem imagens (reflexões) na foto do trabalho confeccionado por Maurits Escher (arquiteto holandês), fig. 3.7.

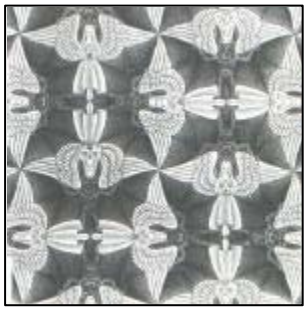


Figura 3.7

Nessa primeira atividade queríamos que os alunos percebessem reflexões e encontrassem os eixos de simetria na figura 3.7, com o auxílio de um espelho. No início eles solicitavam demasiadamente nossa ajuda por não estarem acostumados com a nossa maneira de trabalhar. Os alunos estavam muito dependentes e mal liam o que estava sendo solicitado e já perguntavam o quê fazer. Muitos afirmavam que era mais fácil agir assim do que ler o que era para ser feito.

A primeira dúvida surgida nessa atividade foi: *"Como assim descobrir imagens?"* Explicamos aos grupos o que era imagem a partir do que estava

escrito na própria ficha de trabalho, na qual definia-se *imagem*, orientando-os a ler a atividade antes de fazê-la. Depois desses esclarecimentos e auxílio quanto à utilização do espelho, os grupos chegaram aos seguintes resultados:

Grupos	*Respostas*
A, D e E	Encontraram as reflexões, mas tiveram dificuldades para encontrar os eixos de simetria.
B, C, F e G	Descobriram as reflexões e os eixos de simetria.

Assim, 57% dos alunos conseguiram atingir os objetivos propostos pela atividade, encontrando as reflexões e os eixos de simetria. Os demais (43%) tiveram dificuldades em explicitar os eixos de simetria, da figura, porém souberam dizer que as reflexões eram figuras invertidas, mostrando-nos as imagens produzidas em um espelho.

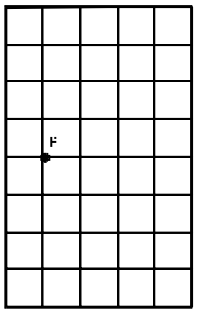
A segunda atividade é a que se segue, na qual introduzimos o conceito de *eixo-simétrico:*

Considere a figura abaixo:

A. A partir da fig.3.8, investigue se é possível, com o uso do espelho, obter-se a figura 3.9.

B. Existe alguma maneira de se comprovar sua resposta?

C. Qual o ângulo entre o espelho e a reta, que contém os pontos p e q?



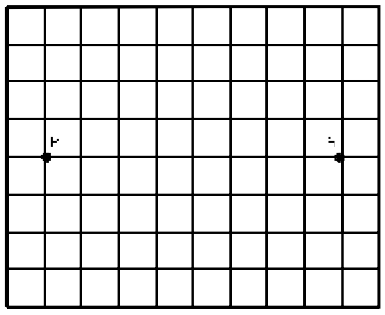


Figura 3.8 **Figura 3.9**

Observar que o lugar (a linha) em que é colocado o espelho na figura 3.8 para formar a figura 3.9 é chamado de ***Eixo de simetria****.*

Essa atividade era para ser feita usando espelhos, na qual os alunos deveriam reconhecer se os pontos p e q eram simétricos, devendo destacar qual era o eixo de simetria da figura e perceber o ângulo formado entre o espelho e a reta que contém os pontos p e q.

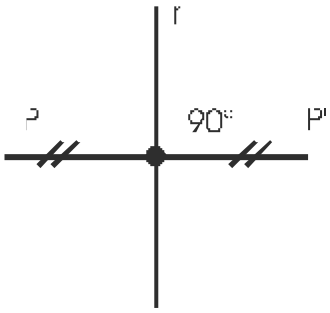
Segue abaixo as respostas apresentadas pelos grupos:

Grupos	*Respostas*
B e F	Sim, porque a figura 3.8 é a metade da 3.9.
A, D, E e G	Sim, é só colocar o espelho...
C	Sim, colocando o desenho [figura 3.8] na metade da figura 3.9.

Com base na respostas acima, podemos concluir que 100% dos alunos atingiram os objetivos propostos pela atividade, sendo que 72% recorreram ao uso do espelho para comprovar sua resposta, 14% usou a noção intuitiva de reflexão e os 14% restantes resolveram a atividade sobrepondo (imaginando) a fig. 3.8 à fig. 3.9. Quanto a medida do ângulo em questão, foi fácil perceber que era um ângulo reto, portanto, de 90°.

Na terceira atividade definimos o que é um ponto simétrico conforme segue abaixo:

Dois pontos P e P' são simétricos em relação a uma reta r quando estes pontos estão na mesma distância da reta r e o segmento PP' é perpendicular a r (fig.3.10).



Obs: O ponto P' é dito reflexão de P (imagem) através da reta r (ou espelho). Note que r é o eixo simétrico.

Figura 3.10

Em seguida, pedimos que investigassem se era possível determinar graficamente o ponto P' simétrico do ponto P, em relação ao espelho E, sendo E um espelho com a face espelhada voltada para a direção indicada pela seta.

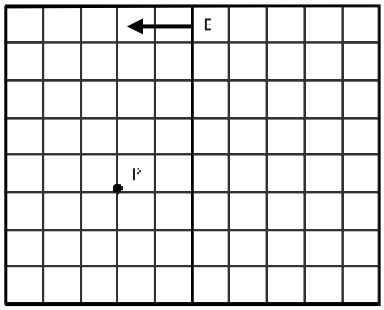


Figura 3.11

Essa atividade foi interessante porque surgiram diversas respostas, que é uma característica do método Resolução de Problemas, porém apenas 14% dos alunos não conseguiram justificar sua resposta. As soluções foram bastante satisfatórias e encontram-se na tabela a seguir:

Grupos	*Respostas*
E	Se contarmos os quadrados ao contrário obtemos a outra parte.
F	Traçamos um ângulo de 90° em relação a reta E e a linha onde está P. Encontramos o ponto P' medindo a distância do ponto P ao espelho E.
C	Para fazer o ponto no espelho tem que traçar uma perpendicular a E passando por P, com a mesma distância de P à E.
A e D	Justificaram contando os quadradinhos apenas.
B	Desconsiderou os quadradinhos e usou a régua para medir.
G	Não soube justificar.

Conversando com o grupo C pedimos que explicassem o que queriam dizer com a frase da tabela acima. Eles justificaram que o número de quadrados do ponto P ao espelho deveria ser o mesmo do espelho ao ponto P', só que a imagem ficaria invertida.

Em seguida, na quarta atividade, explicamos que:

"Quando todos os pontos de uma figura geométrica têm seu simétrico em relação a uma reta r (espelho), dizemos que a figura formada pelos simétricos é simétrica em relação à figura original."

Pedimos que observassem as figuras 3.12 e 3.13 e depois respondessem:

A. Podemos obter a partir da figura 3.12, por reflexão, a figura 3.13?

B. É possível determinar o eixo simétrico da figura 3.13?

C. Todos os pontos do segmento AB têm seu simétrico em relação ao espelho?

D. A figura 3.13 mostra uma figura simétrica do segmento AB ?

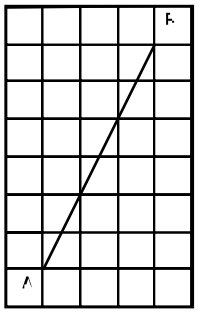


Figura 3.12

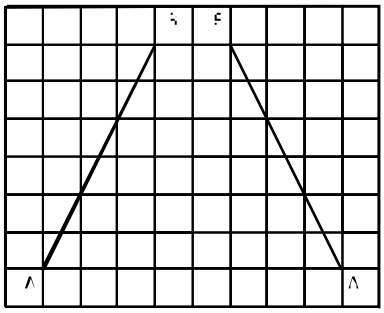


Figura 3.13

Nenhum grupo apresentou dificuldades sobre a atividade e todas as respostas foram semelhantes e bastante satisfatórias, sem erros. Segue abaixo as respostas dadas pelos grupos:

Grupos	*Respostas*
A, B, C, D, E, F e G	a) sim, colocando o espelho no eixo simétrico; b) sim, no meio da figura 3.13; c) sim, colocando o espelho vai aparecer a forma simétrica d) sim, porque do meio ao fim está indicando ao contrário da forma verdadeira.

Na próxima atividade pedíamos para os alunos investigarem quantos eixos de simetria possuíam cada figura abaixo. Sugerimos o uso de um espelho para indicar esses eixos e que anotassem abaixo de cada figura o número de eixos encontrados.

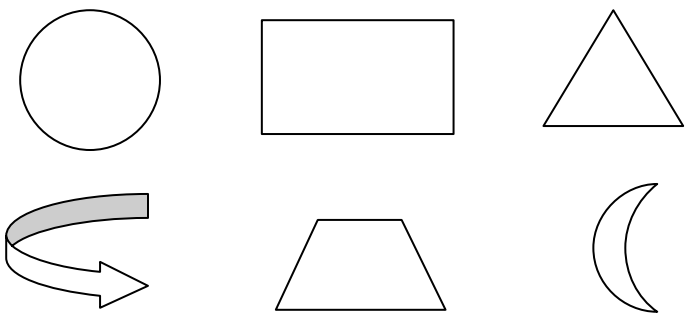


Figura 3.14

Os resultados apresentados pelos alunos seguem na tabela a abaixo:

Grupos	*Respostas*
A	Acertou o número de eixos de simetria de quatro figuras, exceto do triângulo e da seta.
B	Acertou apenas os eixos de simetria do retângulo e da lua.
C	Acertou todas as respostas.
D	Acertou os eixos de simetria de cinco figuras, exceto da circunferência, para a qual encontraram oito eixos.
E	Acertou os eixos de simetria de quatro figuras, exceto da circunferência (indicando apenas quatro eixos) e do triângulo (indicando apenas um eixo de simetria).
F	Acertou os eixos de simetria de cinco figuras, exceto da circunferência, na qual encontraram apenas quatro eixos.
G	Acertou os eixos de simetria de cinco figuras, exceto os da circunferência, encontrando apenas três eixos.

Como apenas 29% dos alunos haviam encontrado o número correto de eixos de simetria da circunferência (infinitos eixos de simetria), fizemos um debate com os alunos para que pudessem chegar a conclusão correta. Questionados sobre suas respostas, afirmavam: "*colocamos qualquer número, pois tinha vários eixos, quanto mais se procurava mais se achava"*. Nesse debate ficamos satisfeitos com as soluções apresentadas pelos alunos, visto que 58% dos alunos atingiram plenamente os objetivos da atividade e os outros 42% atingiram parcialmente nossas expectativas[4].

Aproveitamos a atividade acima para também introduzir o conceito de planificação de uma figura espacial, conceito este familiar a esta turma que já havia estudado este tema em séries anteriores. Pedimos para verificarem em quais planificações da fig.3.15 a aresta poderia ser considerada como eixo simétrico

[4] Percentuais calculados a partir dos dados coletados no debate e não nas fichas de atividades resumidos na tabela anterior.

entre duas faces. As arestas que satisfaziam essa condição deveriam ser indicadas com uma linha.

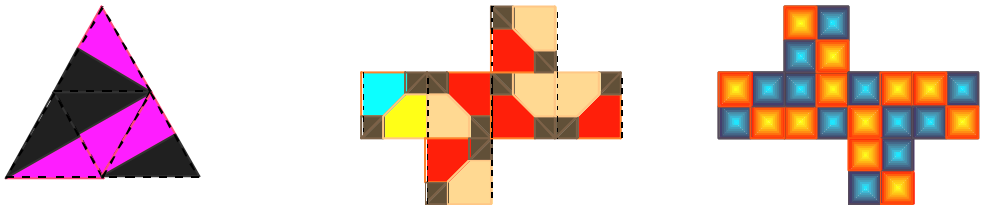


Figura 3.15

Sobre o item *eixo de simetria em uma planificação* a maioria dos alunos não havia entendido bem o que era uma planificação e uma aresta, houve confusão entre esses conceitos. Inteirados sobre o assunto e entendido o que estava sendo pedido na atividade, todos resolveram e pudemos observar um grande envolvimento. O índice de acerto foi de 100%.

Na próxima atividade pedimos aos alunos que completassem as figuras (fig 3.16), em que E seria um espelho.

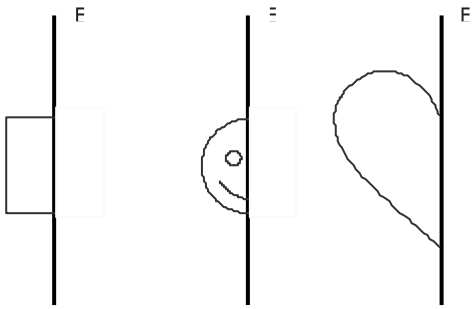


Figura 3.16

Essa atividade foi bem agradável aos alunos, principalmente para aqueles que gostavam de desenhar. Nela percebemos uma maior compreensão por parte dos alunos sobre o conceito de simetria.

Em seguida, solicitamos aos alunos que explicassem com suas próprias palavras o que é simetria. As respostas de cada grupo são apresentadas na tabela a seguir:

Grupos	*Respostas*
A	"São reflexões de figuras"
B	"São imagens ao contrário da forma verdadeira"
C	"É uma transformação de um objeto em uma reflexão no espelho"
D	"São reflexões"
E	Não respondeu
F	"È a imagem refletida"
G	"É a reflexão de um mesmo ser através do espelho"

As respostas apresentadas demonstram que, mesmo sendo à sua maneira, os alunos entendiam um pouco o conceito de simetria mas, a compreensão ainda não era total.

Na próxima atividade pedimos aos alunos que observassem o triângulo ABC e sua imagem simétrica, para introduzirmos o conceito de orientação. Daí perguntamos:

- *Qual é a orientação do triângulo original ABC?*
- *Qual é a orientação da imagem produzida por este triângulo no espelho?*

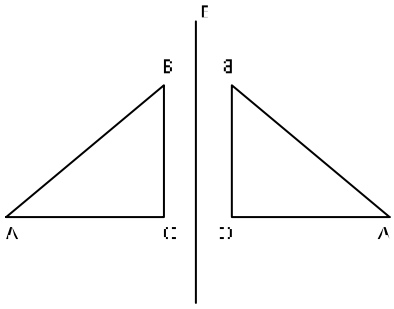


Figura 3.17

A noção de sentido horário foi novidade para a maioria dos alunos. O conceito de simetria ainda não estava bem claro e foi preciso discutir mais com os grupos sobre isso. Depois dos esclarecimentos os alunos fizeram a atividade tendo 100% de acerto.

III. Dois espelhos



Figura 3.18

Depois de trabalharmos com apenas um espelho, passamos a desenvolver as atividades utilizando dois espelhos de dois modos: paralelos e articulados.

Nessa atividade utilizamos o seguinte *material* por grupo: fichas de trabalho, dois espelhos articulados e dois outros espelhos (separados), fitas de papel colorido para a obtenção de polígonos em dois espelhos articulados, pequenos círculos feitos de papelão para o estudo da obtenção de imagens em espelhos articulados, transferidor para medir os ângulos entre os espelhos, régua e lápis colorido.

Iniciamos as atividades conceituando translação, conforme ilustrado na fig.3.19:

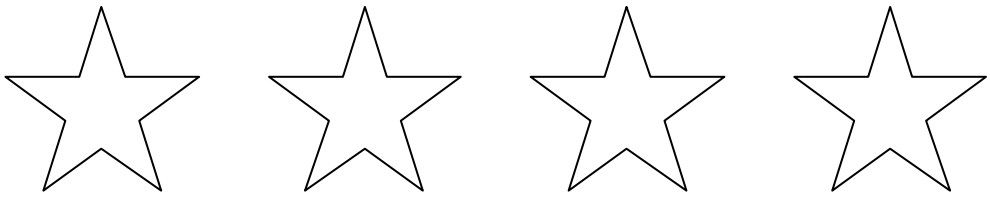


Figura 3.19

A figura da estrela é repetida a distâncias iguais, e todos os seus pontos se deslocam paralelamente a uma reta imaginaria. Então, dizemos que ***translação*** *é uma transformação em que a figura se desloca paralelamente a uma reta. Isto é, todos os pontos da figura são deslocados numa mesma direção (retilínea), com a mesma distância.*

Observe que:

A forma e o tamanho da figura original são mantidos após uma translação;

Uma translação é determinada pela direção, sentido e amplitude do deslocamento.

Posteriormente, pedimos que indicassem, através de uma seta, a direção, o sentido e a distância de cada translação nas figuras abaixo.

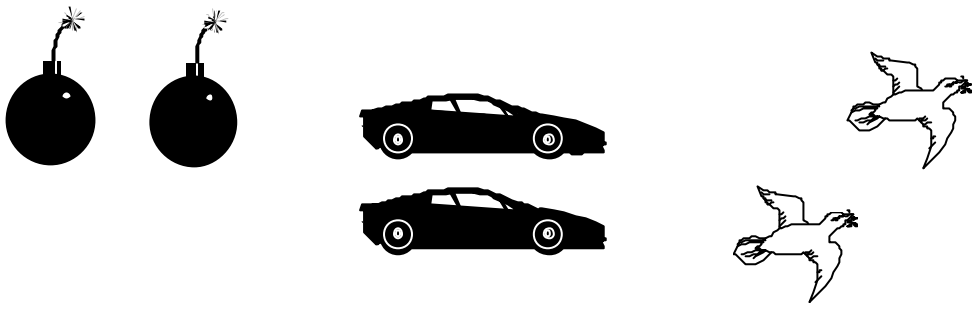


Figura 3.20

Nas respostas houve bastante confusão entre direção e sentido, o que foi esclarecido por nós. Ninguém errou essa atividade.

Na próxima atividade passamos a trabalhar com dois espelhos paralelos. Perguntamos aos alunos se poderíamos obter uma figura através de uma translação com o uso de um espelho ou mais espelhos.



Figura 3.21

Os alunos tiveram dificuldade para encontrar uma solução para a pergunta acima, já que com um espelho isso não é possível. Fizeram confusão entre *translação* e *reflexão*. Esclarecidas as diferenças, somente três grupos encontraram a solução correta. Além da *translação* e *reflexão*, o conceito de *rotação* também não estava muito bem compreendido. Então, a fim de promover um melhor entendimento, resolvemos abrir uma ampla discussão sobre esses movimentos, envolvendo todos os alunos, o que foi muito produtivo.

Na tabela abaixo são apresentados os resultados obtidos pelos alunos:

Grupos	*Respostas*
B, C e D	É só colocar um espelho em frente do outro
A, E, F e G	Não encontraram a solução.

Ainda para salientar esses conceitos, colocamos entre dois espelhos paralelos um prisma triangular de isopor com laterais amarela, vermelha e azul (fig.3.21). Através das imagens desse prisma refletidas nos espelhos pudemos apontar e diferenciar as *reflexões* das *translações* do objeto, bem como analisar sua *orientação*.

No início da atividade apenas 43% dos alunos encontraram a solução correta. Porém, após o debate e esclarecimentos, sentimo-nos bastante satisfeitos com os alunos, pois fizeram, por si próprios, experiências com outros objetos entre os dois espelhos paralelos, com bastante envolvimento, visualizando, agora mais facilmente as *translações* dos objetos nos espelhos.

Em seguida, com a intenção de trabalharmos com a rotação e também relacionarmos mais os conteúdos estudados ao cotidiano do aluno, exemplificamos o movimento circular como o movimento de uma criança num balanço. Dissemos que é um movimento de acordo com um arco de circunferência. Após esse exemplo, pedimos aos alunos que escrevessem o nome de um brinquedo encontrado num parque de diversões onde as pessoas se deslocam de acordo com um arco de circunferência. Entre os brinquedos mencionados encontramos roda gigante, carrossel, kamikaze, etc.

Depois que os alunos deram mais exemplos de brinquedos que descreviam um movimento circular, orientamos que esse tipo de transformação é chamado *rotação*. Para reforçar, demos mais um exemplo, ilustrado abaixo (fig.3.22).

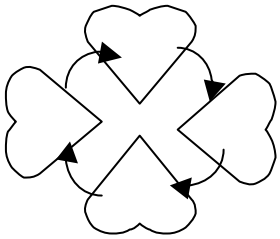


Figura 3.22

Percebendo que os alunos haviam entendido o que era uma rotação perguntamos: *É possível obter uma figura através de uma rotação, fazendo uso de espelhos? Quantos? Se for mais de um, como devem estar dispostos?*

No início os alunos acharam que não era possível obter uma rotação usando espelhos. Mas, quando um dos grupos achou a resposta os outros se motivaram. Apenas um grupo não conseguiu fazer essa atividade, ou seja, 14% dos alunos. Novamente percebemos a dificuldade em se expressar pela escrita, apesar de oralmente o fazerem bem.

Na próxima atividade solicitamos que escrevessem o nome das transformações aplicadas em cada figura (cavalo, pássaro ou peixe, por exemplo) para se obter cada mosaico abaixo:

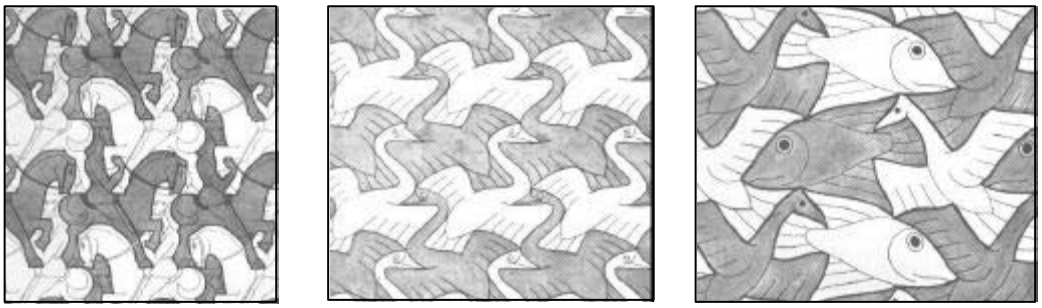


Figura 3.23

A maioria dos alunos (86%) não conseguiu fazer estar atividade. Apenas o grupo A observou que as figuras estavam invertidas. Os alunos que não conseguiram alegaram, sem exceção, que não dava para usar espelho e nem para

descobrir as transformações ocorridas. Na verdade, eles não conseguiam enxergar a composição das transformações, esse foi o problema.

Em outra atividade, passamos a estudar a relação entre o número de imagens formados em espelhos e o ângulo de abertura dos mesmos. Para isso pedimos aos alunos que colocassem o caleidoscópio (com 2 espelhos) sobre a mesa, de acordo com os ângulos de abertura dos espelhos indicados na tabela abaixo. Em cada caso, eles deveriam colocar um objeto (estojo, lápis, borracha, por exemplo) entre os espelhos e anotar na referida tabela o número de imagens obtidas.

Ângulo	*Número de imagens*
30°	
45°	
60°	
90°	
120°	

Tabela 3.1

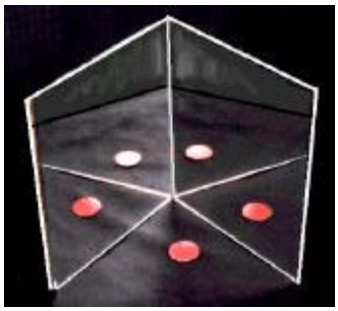


Figura 3.24

As respostas apresentadas constam na tabela abaixo:

Grupos	*Resultados*
A e G	Respostas corretas
B, C, D e F	Não fizeram a atividade
E	Acertou 60% da atividade

Questionados os alunos sobre a razão de 57% deles não terem feito a atividade soubemos que tiveram dificuldades em abrir os espelhos nas medidas estipuladas. Então, demos um auxílio a eles nesse aspecto e assim, todos os alunos conseguiram chegar à resposta correta.

Dando seqüência às atividades, pedimos aos alunos:

Usando uma fita para representar um segmento de reta, responda:.Como obter um polígono regular?

Em relação ao item acima os alunos colocaram a fita na posição ideal (formando um triângulo isósceles com os espelhos) e utilizaram as propriedades de um polígono regular para confirmarem a resposta, isso depois de diversas tentativas. Envolvidos, os alunos mostravam-se ansiosos para nos contarem suas respostas, que são apresentadas na tabela abaixo:

Grupos	*Respostas*
A, D e E	Colocando a fita assim... [como na fig. 3.24]
B e G	Na posição em que os ângulos e os lados fiquem iguais.
C	Quando as medidas forem todas iguais.
F	Colocando a fita reta...

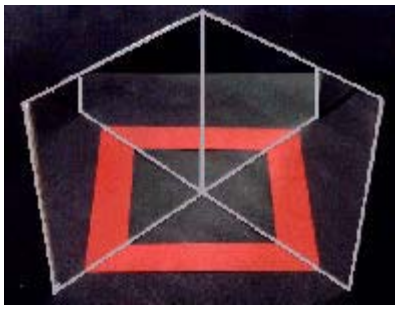


Figura 3.24

Em seguida definimos o conceito de espelhos virtuais: *Observe nas atividades anteriores que temos imagens de espelhos refletidos nos espelhos originais. Essas imagens são denominadas de espelhos virtuais.*

Na atividade posterior definimos mosaico como um tipo de ornamento que cobre o plano[5]. Veja um exemplo abaixo:

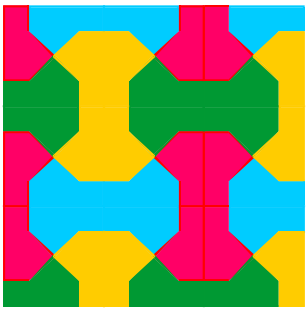


Figura 3.26

Com isso, introduzimos o conceito de *pavimentações do plano*, a fim de trabalharmos posteriormente com esse conceito através de caleidoscópios com três espelhos. Definimos também pavimentação do plano como sendo um conjunto de

[5] Veja a definição de pavimentação do plano na página 76 do referencial teórico.

figuras geométricas que cobre o plano sem lacunas ou superposições, como é o caso da fig.3.27.

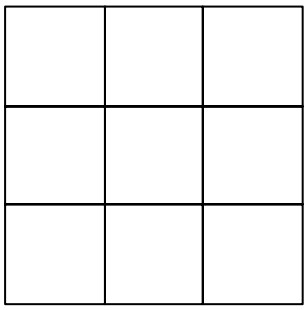


Figura 3.27

Obs: Na figura 3.27 temos uma pavimentação do plano por quadrados.

Posteriormente, pedimos aos alunos alguns exemplos de pavimentações do plano ou mosaicos. Como resposta obtivemos, entre outros: o chão, a janela (formada por retângulos), teto (placas retangulares), calçadas, etc.

IV. Três espelhos e *Geometricks*

O uso de três espelhos em nossas atividades refere-se, especificamente, ao caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo mostrado na fig.3.28. Esse instrumento é especialmente utilizado para estudos de *pavimentação do plano*. Entretanto, antes de estudarmos esse assunto (sendo até recomendável) trabalhamos com um Kit (um conjunto de polígonos regulares e irregulares feitos com papel cartão colorido, descrito abaixo) pelo qual os alunos mostraram bastante interesse. Devido ao envolvimento pelo material, às vezes, os alunos deixavam as atividades em segundo plano, utilizando o material ludicamente.



Figura 3.28

Na atividade, distribuímos um *kit*[6] de polígonos regulares a cada grupo, para formação de mosaicos. Um pouco diferente do proposto por Murari, nosso *kit* continha somente polígonos regulares, construídos através do software Cabri-Géomètre II, para maior precisão. Foram impressos em papel com espessura de cartolina ou papel cartão (próprio para uso em impressora) e recortados. Cada *kit* era composto de:

POLÍGONOS	*N° DE PEÇAS*
TRIÂNGULO	9
QUADRADO	12
PENTÁGONO	4
HEXÁGONO	8
OCTÓGONO	6
DECÁGONO	4
DODECÁGONO	4



Figura 3.29

Solicitamos que pavimentassem parcialmente o plano obedecendo às seguintes regras:

- Os vértices deveriam coincidir sempre num mesmo ponto;
- Não deveria haver espaços entre os polígonos e não poderiam ficar sobrepostos, isto é, um sobre outro;

Em seguida, pedimos que verificassem:

- Quais polígonos pavimentavam o plano?
- Quais polígonos não pavimentavam?

[6] Este material foi proposto por MURARI (1999), para entender o conceito de pavimentação do plano. O kit contém cerca de 50 polígonos regulares e irregulares, recortados em papel cartão colorido (dupla face), sendo que todas as figuras têm lados de mesma medida.

Todos os grupos realizaram essa atividade com muito envolvimento, inclusive perguntaram se isso era matemática mesmo. Alguns acharam que era uma brincadeira apenas, outros perguntaram se era aula de Educação Artística.

Como as soluções foram semelhantes transcrevemos apenas uma delas:

"Pavimentam: triângulo, hexágono, triângulo eqüilátero e quadrado. Não pavimentam: polígono de 10 lados, polígono de 8 lados, polígono de 12 lados".

Grupo A.

Na atividade acima, os alunos haviam observado que era possível pavimentar o plano por triângulos, mas por pentágonos não (fig. 3.30). Pedimos que explicassem o porquê.

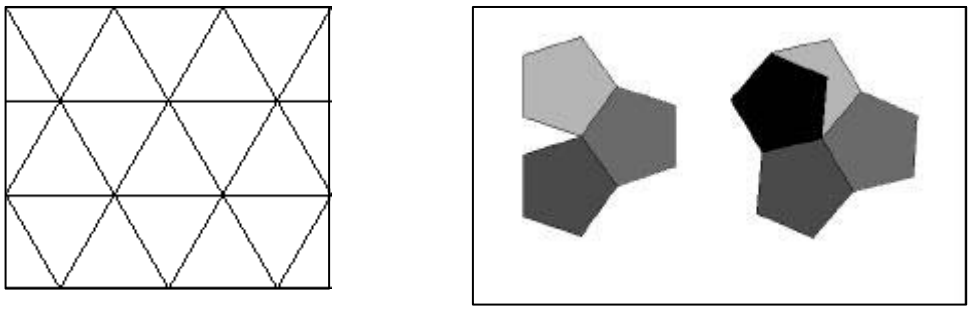


Figura 3.30

Eles diziam, em sua grande maioria, que faltava um pedacinho para completar o espaço entre os pentágonos. Justificavam que a peça estava mal feita ou que precisava de um "triângulinho" para dar certo. Como eles sabiam o que estava acontecendo e não conseguiam justificar formalmente demos um encaminhamento: calcule o ângulo interno do triângulo, quadrado, pentágono e hexágono.

Depois dessa dica os grupos não encontraram dificuldades para resolver a questão. Os alunos recorreram primeiramente ao transferidor e depois à fórmula estudada com a professora responsável pela sala de aula. Todos mostraram familiaridade com o cálculo do ângulo interno de um polígono, exceto um grupo, o qual tivemos que explicar como era feito esse cálculo. Apenas dois grupos não concluíram a atividade (o que corresponde a 28% dos alunos) por demorarem excessivamente na atividade anterior. Os demais grupos chegaram às respostas corretas que, pela similaridade na escrita, transcrevemos apenas uma delas:

"Os triângulos pavimentam o plano porque o valor dos ângulos são de 60º e juntos completam 360°. O valor dos ângulos dos pentágonos são de 108° e juntos não completam 360º"

Grupo G

Posteriormente, introduzimos o uso de três espelhos articulados para estudar pavimentações do plano. Distribuímos uma ficha de trabalho em que se pedia:

- *Abra os espelhos articulados nos ângulos determinados abaixo, coloque o terceiro espelho e depois responda ao que se pede.*

- abertura de 90º

a) Qual o valor dos outros ângulos?
b) Qual o triângulo formado?
c) Qual o visual caleidoscópico (o que você está vendo no caleidoscópio)?



Figura 3.31

As respostas apresentadas na tabela abaixo mostram que apenas o grupo E não acertou o tipo de triângulo formado:

Grupos	*Respostas*
A, B, C e D	a) O valor dos outros ângulos é 45°.
	b) Triângulo isósceles.
	c) Podemos observar um ladrilhamento de triângulos.
E	a) 45°
	b) Equilátero
	c) Milhares de triângulos.
F	a) 45º
	b) Isósceles
	c) Vários triângulos e espelhos.
G	a) 45°.
	b) isósceles.
	c) Vários triângulos formando quadrados.

- abertura de 60°

a) Qual o valor dos outros ângulos?

b) Qual o triângulo formado?

c) Qual o visual caleidoscópico?

Os resultados obtidos pelos alunos são resumidos na tabela abaixo, demonstrando 100% de entendimento:

Grupos	*Respostas*
A, B, C	a) O valor dos ângulos são de 60°, porquê os ângulos são iguais.
	b) Triângulo equilátero.
	c) Podemos observar um ladrilhamento.
D	a) Todos os ângulos são de 60°.
	b) Equilátero.
	c) Nós vimos vários desenhos que se complementam, seria o tipo de ladrilhos juntos.
E e F	a) 60°, porque são polígonos regulares.
	b) Equilátero.
	c) Milhares de triângulos.
G	a) Os três ângulos medem 60°.
	b) Triângulo equilátero.
	c) Triângulos infinitos.

Todos resolveram a atividade, uns mais rápidos, outros menos. Apenas dois grupos calcularam o valor dos ângulos pedidos. Os outros mediram com o transferidor. Aos alunos que usaram transferidor perguntamos se sabiam calcular. Todos disseram que sim, lembrando-se de que a soma dos ângulos internos do triângulo deveria ser de 180° e do fato de os lados dos espelhos articulados serem iguais.

Para responderem sobre o visual caleidoscópico, os alunos resolveram contornar as arestas da base[7] com três cores diferentes, como mostra a figura 3.32,

[7] Conceito descrito no capítulo 2. Para melhor compreensão ler páginas 84 à 88 do Referencial Teórico.

que corresponde à abertura dos espelhos articulados num ângulo de 60^o. Feito isso, afirmaram ver uma pavimentação do plano constituída por triângulos de lados de cor diferente.

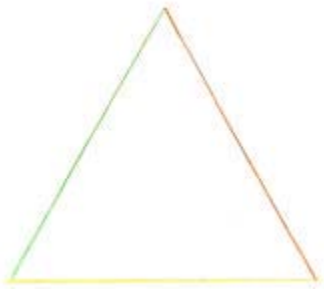


Figura 3.32

Considerando o recurso de contornar a base utilizado por eles, sugerimos que ao invés de pintar cada lado do triângulo de cor diferente, que agora fosse pintado todo o seu interior com uma só cor. Depois, se observasse o visual caleidoscópico, comparando com o anterior.

Os alunos puderam verificar que enquanto o primeiro visual caleidoscópico apresentava triângulos de lados de cores diferentes pavimentando o plano, nesse último caso a pavimentação ocorria com triângulos de mesma cor.

Aproveitamos a oportunidade de salientar que o contorno dos espelhos (feito por eles de uma maneira casual), era exatamente o que chamamos de *"bases caleidoscópicas"*, que são figuras especialmente desenhadas para que quando colocadas sob os caleidoscópios gerem a pavimentação desejada.

Assim, lançamo-los o desafio de desenharem uma base caleidoscópica que, quando visualizada, gerasse uma pavimentação com triângulos de duas cores.

Os alunos sentiram um pouco de dificuldade, mas acabaram encontrando a base adequada. Inicialmente fizeram esboços a lápis. Demoraram para chegar à conclusão de que o segmento procurado era uma *bissetriz* (fig.3.33), mas no final nenhum aluno deixou a atividade em branco e todos construíram corretamente a base.

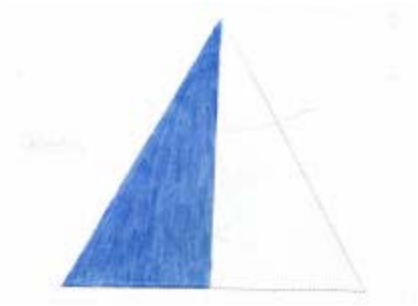


Figura 3.33

Na aula seguinte, entregamos uma folha com o contorno da base caleidoscópica tracejado e desafiamos os alunos: *é possível obter uma base que gera pavimentações por triângulos com seis cores distintas?*

A procura dessa base demorou cerca de 40 minutos. Os alunos utilizaram espelhos e fizeram vários esboços até encontrar a base pedida (fig.3.34, apresentada pelo grupo B). Pedimos que fizessem a construção geométrica com régua e compasso. A base com seis cores distintas foi mais difícil para se chegar à solução porque envolvia a construção de vários segmentos em seu interior. Na verdade, apenas uma aluna do grupo B encontrou a solução. Os outros alunos fizeram a base após receberem a instrução do grupo B, fazendo apenas a construção geométrica (sem colori-la), que era um dos principais objetivos dessa atividade: a construção das *bissetrizes.*

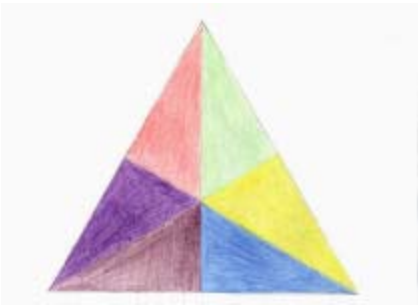


Figura 3.34

Essas duas últimas atividades também foram realizadas no laboratório de informática, onde os alunos puderam entender melhor o que fizeram com régua e compasso. No *Cabri-Géomètre II* os alunos mediram os ângulos com maior

precisão do que na sala de aula, bem como deram um melhor acabamento no desenho, como mostram as fig.3.35 e fig 3.36:

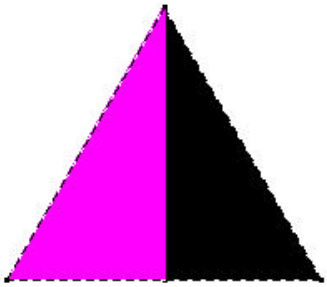


Figura 3.35

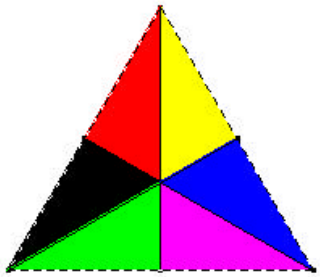


Figura 3.36

Os alunos levaram cerca de 50 minutos para a construção dessas bases, porque os alunos não tinham domínio completo do *software*. As construções foram realizadas por todos os alunos, sendo que apenas 14% não conseguiram realizá-las sem nosso auxílio.

Prosseguindo, solicitamos aos alunos que construíssem bases caleidoscópicas que gerassem pavimentações do plano por quadrados com duas cores distintas. Demos uma folha (em anexo IV) com um triângulo retângulo com as mesmas dimensões do caleidoscópio isósceles para os alunos esboçarem a base e confirmarem suas respostas através dos caleidoscópios.

Agora, com menores dificuldades, encontraram a base solicitada (fig.3.37), cuja construção geométrica foi realizada no *Cabri-Géomètre II*.

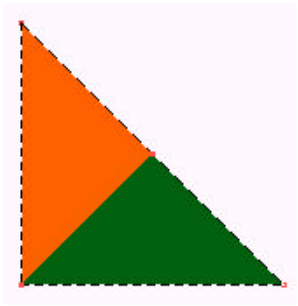


Figura 3.37

Já que os alunos estavam utilizando o computador para fazer a construção das bases, aproveitamos para apresentar também o *software Geometricks* para ser explorado. Após terem conhecido seus recursos, demos a seguinte atividade:

Dada uma base para a pavimentação do plano de configuração (4,6,12),

realizar sua construção no *software Geometricks* seguindo o passo a passo descrito na folha de atividade entregue. O resultado deveria ser o da figura 3.38. Diferente das anteriores em que os alunos deveriam encontrar as bases solicitadas, nessa atividade eles já teriam a base pronta para efetuar a construção.

Passos da construção:

1. um triângulo eqüilátero ABC;

2. ponto médio M do segmento AC;

3. bissetrizes b e c dos ângulos AMB e BMC respectivamente;

4. bissetrizes a e d dos ângulos BAM e BCM

5. $P \in b \cap a$ e $R \in c \cap d$;

6. perpendicular por P em relação à AC, determinando S e por P em relação à AB determinando Q ;

7. perpendicular por R em relação à AC determinando N e por R em relação à BC determinando O;

8. os segmentos NR, RO, RP, PS e PQ ;

9. pontilhar o triângulo ABC;

10. esconder construções auxiliares sempre que necessário.

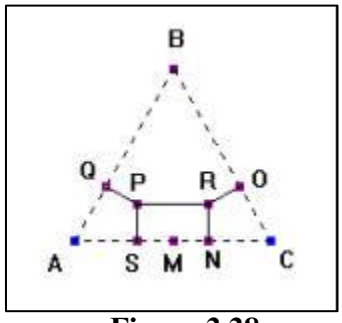


Figura 3.38

A linguagem presente nessa construção trazia símbolos desconhecidos pelos alunos, como o de intersecção. 90% dos alunos tiveram dificuldades em nomear os objetos e fazer a construção como um todo. Porém, essa foi uma atividade bastante proveitosa, em que pudemos discutir muitos conceitos matemáticos, como o de intersecção, bissetriz e perpendicular devido à maneira como foi colocada, em uma linguagem simbólica.

Numa análise comparativa entre os dois softwares, ao utilizar *o Cabri-Géomètre II* os alunos disseram haver muitos detalhes e sempre que queriam apagar alguma coisa apagavam outras, até mesmo a figura toda, como aconteceu com um dos alunos. Na coloração dos desenhos achavam que precisariam estar mais familiarizados com esse software para que as atividades fossem melhor desenvolvidas. Para a maioria o problema foi a falta de conhecimento para usar as ferramentas do *Cabri-Géomètre II* e não a parte matemática.

Já no *Geometricks*, operacionalmente, as dificuldades foram menores e surgiram mais em relação ao conteúdo matemático. O problema foi lembrar alguns conceitos explorados anteriormente como bissetriz, perpendicular, ponto médio, etc.

Terminada essa atividade, mostramos outras bases caleidoscópicas aos alunos. Entre elas haviam alguns ornamentos. Deixamos os alunos livres para que pudessem construir alguma base, como mostra a figura 3.39.



Figura 3.39

Ao final desse bloco de atividades apresentamos o caleidoscópio com quatro espelhos e algumas bases para visualização. Entretanto, devido ao pouco tempo que dispúnhamos, não realizamos nenhuma atividade com esse tipo de caleidoscópio.

V. Poliedros com padrões em suas faces

Apresentamos os poliedros regulares e semi-regulares aos alunos, com suas respectivas planificações. Assim, os alunos tiveram oportunidade de manipular os sólidos geométricos, obtendo a figura espacial a partir de uma planificação dada e vice-versa. Também foram apresentados a esfera e o cilindro como exemplo de figuras espaciais.



Figura 3.40



Figura 3.41

Foram realizadas atividades com cubos e tetraedros e octaedros cujas faces continham padrões caleidoscópicos (fig. 3.40 e 3.41), integrando o uso de material concreto (os sólidos geométricos), caleidoscópios e *softwares* educacionais.

Inicialmente, ao apresentarmos alguns poliedros aos alunos, os definimos "*como sendo um sólido constituído por polígonos que tem, dois a dois, um lado comum.*". Como mostra a fig 3.42, explicitamos também vértices e arestas: *os vértices e arestas do poliedro são as arestas e vértices dos polígonos que o formam. Os polígonos são as faces do poliedro.*

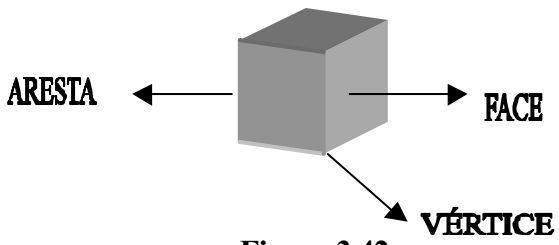


Figura 3.42

Depois de apresentarmos alguns exemplos de poliedros e explicarmos sobre eles, perguntamos quais das figuras abaixo eram poliedros, justificando suas respostas.

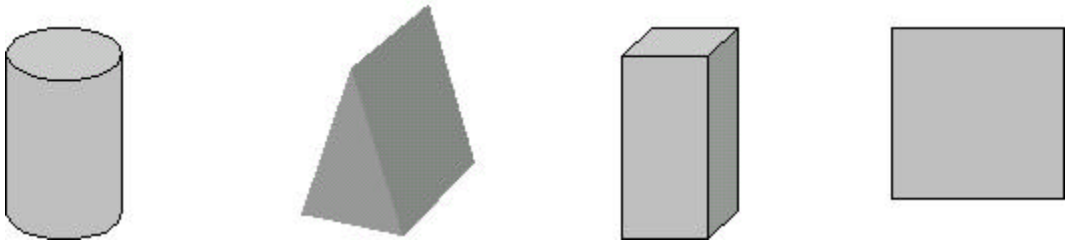


Figura 3.43

Essa atividade foi feita sem nenhum problema pela maioria dos alunos. Muitos mostraram familiaridade com esse tipo de atividade. Os alunos já haviam estudado os poliedros em séries anteriores, sendo que nossas explicações vieram apenas recordar esse conhecimento. As respostas apresentadas pelos alunos seguem abaixo:

Grupos	*Respostas*
G	O cilindro e o quadrado não são poliedros, pois no cilindro o lado não é plano e o quadrado é apenas um plano.
E	O cilindro e o quadrado não são poliedros, porque não são figuras formadas por polígonos que são suas faces.
A, B, C, D e F	O cilindro não é poliedro porque rola e o quadrado não é poliedro porque é plano.

De acordo com as respostas acima, pudemos verificar que 100% dos alunos sabiam reconhecer um poliedro (de uma forma ou de outra), o que levou-nos a concluir que poderíamos avançar no estudo dos poliedros. Começamos, então, a estender o nosso estudo às tesselações do espaço. Utilizando paralelepípedos feitos de papel cartão, solicitamos aos alunos a construção de paredes através da repetição de padrões geométricos. Para isso demos as dicas abaixo:

A parede pode ser atravessada por planos horizontais sem que estes interceptem (cortem) os sólidos;

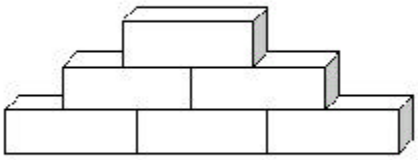


Figura 3.44

A parede pode ser atravessada por planos horizontais e verticais sem interceptar os paralelepípedos;

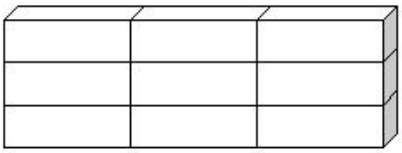


Figura 3.45

Construa outra parede obtendo um padrão diferente com os paralelepípedos.

Os alunos acharam essa atividade muito elementar, pois a fizeram com muita facilidade. Para finalizar, mostramos outras "paredes" aos alunos utilizando outros poliedros regulares e semi-regulares. Com isso introduzimos o conceito de tesselação espacial.

Passamos então a definir um poliedro regular: *um poliedro é dito regular se suas faces são regiões poligonais regulares, todas com o mesmo número de lados, e se em todo vértice do poliedro converge o mesmo número de arestas.*

Definimos também tesselação do espaço: *dizemos que um conjunto de poliedros tesselam o espaço se cobri-lo sem lacunas ou superposições.*

Na seqüência, distribuímos um conjunto de planificações de poliedros regulares e semi-regulares para que os alunos recortassem e montassem a figura

espacial (fig. 3.46). Posteriormente, invertemos o processo: mostramos alguns poliedros e pedimos que esboçassem sua planificação. Essa atividade mostrou grande envolvimento por parte dos alunos, principalmente por apresentarmos poliedros com desenhos em suas faces.



Algumas figuras espaciais montadas pelos alunos

Figura 3.46

Prosseguindo, distribuímos a cada grupo um cubo (com padrões caleidoscópicos em suas faces) juntamente com uma folha que continha quatro planificações diferentes (fig.3.47). Lembrando-lhes que a planificação do cubo dado era igual ou enantiomorfa[8] a uma das quatro planificações apresentadas, pedimo-lhes que encontrassem a que fosse correta.

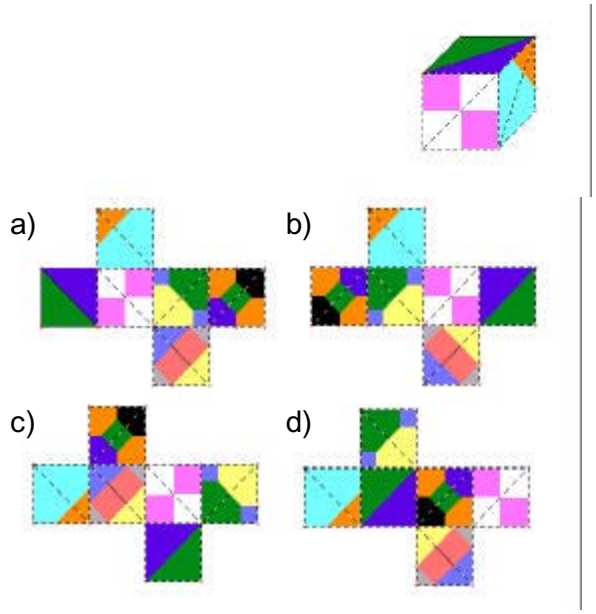


Figura 3.47

[8] Ver definição no capítulo 2, página 63.

Muitos alunos disseram que era fácil ver qual era a planificação. Todos os grupos assinalaram a alternativa *(a)* como sendo a correta. Alegaram que as figuras das faces facilitavam ver qual era a planificação do cubo. Assim todos os grupos chegaram a solução correta.

Explorando um pouco mais sobre planificações sugerimos a seguinte atividade:

Faça o desenho abaixo no papel quadriculado e pinte-o conforme o modelo.

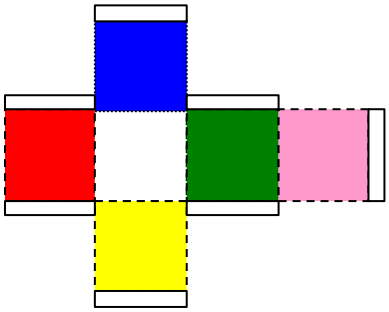


Figura 3.48

Depois disso, fornecemos para cada grupo um cubo já montado, construído por nós. Tínhamos por objetivo que os alunos observassem bem a planificação de um cubo, entendendo a relação entre a sua planificação e o objeto tridimensional (o cubo). Pedimos também que verificassem as faces do cubo, relacionando suas cores; por exemplo, que a face vermelha era oposta à verde. Então perguntamos:

a face branca é oposta a _____
a face amarela é oposta a _____

Todos os alunos consideraram essa atividade fácil, ninguém errou. As cores facilitaram muito a linguagem.

Na próxima atividade distribuímos, para cada grupo, um conjunto de 27 cubos com as faces coloridas. Solicitamos que com esses cubos construíssem uma porção de tesselação espacial. Cada lado dessa parede deveria ser de uma cor diferente. O resultado final deveria ser semelhante ao da fig. 3.49.

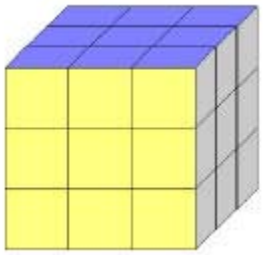


Figura 3.49

Cerca de 93% dos alunos fizeram a atividade com muito envolvimento, apesar de sentirem um pouco de dificuldade no início.

Outra atividade semelhante foi a de empilhar um conjunto de vinte e sete cubos, formando um novo cubo, de modo que *em cada lateral desse empilhamento fosse visualizado um mosaico diferente.* Os cubos agora não tinham apenas faces coloridas, mas padrões caleidoscópicos em cada face. Para que fosse realizada com sucesso demos algumas etapas e um encaminhamento: *empilhar os sólidos de modo que faces pertencentes ao mesmo plano fossem simétricas.*

- *1ª etapa: dispor 4 cubos na forma de uma placa;*
- *2ª etapa: empilhar 8 cubos, gerando assim um cubo maior;*
- *3ª etapa: empilhar os 27 cubos.*

Obtidos os mosaicos, utilize caleidoscópios, com as mesmas bases[9] *contidas nas faces dos cubos, que geraram tais mosaicos. Isso permitirá verificar se as pavimentações obtidas pelas faces dos cubos correspondem às fornecidas pelos caleidoscópios (que são as corretas).*

Tivemos que lembrar, várias vezes, que o empilhamento dos cubos deveria resultar num mosaico em cada lateral, inclusive nas internas. Esse procedimento não estava sendo entendido por todos.

Cerca de 64% dos alunos mostraram-se bastante interessados no material apesar de pensarem, em algum momento que não iria dar certo ou que tinha peça

[9] Haviam bases (as mesmas contidas nas faces dos cubos) nas dimensões dos caleidoscópios para que os alunos pudessem visualizar os mosaicos a serem obtidos nas laterais do empilhamento dos cubos, antes mesmo de empilharem os vinte e sete cubos.

errada, às vezes, até se irritando. Alguns desmotivaram-se após diversas tentativas de colocação da peça correta para obtenção do empilhamento desejado. Como havia três modelos de cubos diferentes, cada grupo escolheu com qual conjunto queria trabalhar.

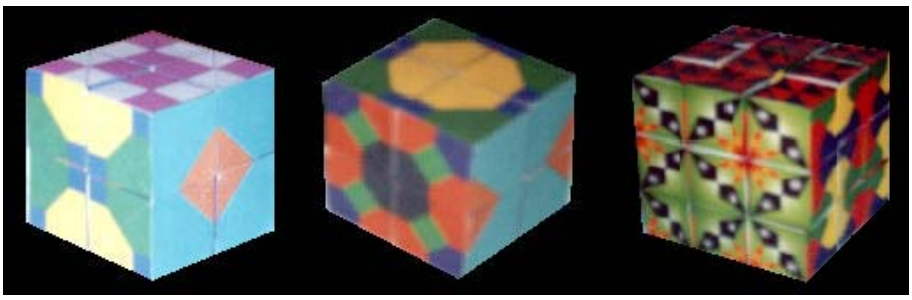


Figura 3.50

Foi necessário relembrar o processo de montagem dos cubos com faces coloridas feito na atividade anterior, para que pudessem montar corretamente o que continha padrões caleidoscópicos em suas faces.

Após o empilhamento correto dos cubos com padrões que geraram os mosaicos (fig.3.50), pedimos aos alunos para investigarem se era possível rotacionar cada cubo e ainda obter mosaicos em cada lateral, como na atividade anterior. Caso possível, deveriam indicar o ângulo e a direção e ainda informar se houve necessidade de utilizar reflexões ou translações na obtenção dos resultados.

No movimento das peças, nenhum grupo apresentou dificuldade (apenas no início) nem deixou de fazê- la. Todos chegaram à mesma solução:

Grupos	*Respostas*
A, B, C, D, E e F	Rotacionar cada cubo em sentido oposto ao vizinho num ângulo de 90°

Com isto, pudemos trabalhar noções de rotação e translação no espaço de modo que os alunos estiveram bastante envolvidos, gerando até uma competição entre eles para ver quem terminava a atividade primeiro. Mas, para finalizá-la , os alunos teriam que observar se os mosaicos obtidos nas laterais do empilhamento poderiam ser visualizados em caleidoscópios. Pudemos perceber, no decorrer da atividade, que os alunos já tinham dominado os conceitos de rotação, reflexão e

translação, indicando essas transformações a cada momento que ocorriam no empilhamento correto dos cubos.

Após essa atividade, pedimos para os alunos que representassem os cubos no plano, esboçando suas planificações, em cujas faces tinham padrões caleidoscópicos. Perguntamos quantas planificações diferentes haviam naquele conjunto de 27 cubos que, quando empilhados, produziam mosaicos em suas laterais. Os estudantes apresentaram alguma dificuldade para chegar às respostas. Então, foi necessário que alguns desmontassem um dos cubos ou recorressem às planificações daqueles cubos coloridos (já trabalhados por eles). Feito isso entenderam como era a planificação de um cubo, compararam com os outros e não precisaram desmontar mais nenhum.

A simetria entre as faces foi percebida por todos. Alunos de dois grupos perceberam que uma fila de cubos era diferente da outra, mas igual à próxima, havendo translação de filas na horizontal e vertical.



Figura 3.51

A construção geométrica de uma planificação de um cubo com padrões em suas faces é relativamente trabalhosa no universo "lápis e papel". Por isso é que utilizamos o computador para tal construção, o que tornou a atividade adequada e motivadora nesse ambiente.

Para acelerar a construção da planificação mencionada acima, decidimos, antes, construir macros[10] dos padrões que seriam colocados nas faces da planificação do cubo. Pedimos, então, que os alunos construíssem a macro de um padrão que eles já tinham construído anteriormente[11] no *Cabri-Géomètre II* e, em seguida, obtivessem uma parte da pavimentação do plano. Obtida essa porção de pavimentação do plano no *Cabri-Géomètre II* os alunos puderam visualiza-la no computador ao mesmo tempo em que aprenderam a utilizar a macro.

Para o uso da macro, porém foi necessário um encaminhamento*: Obter réplicas dos triângulos por simetria axial e em seguida use a macro em cada réplica.* Essa orientação foi bastante útil na execução da atividade. Apresentamos também uma ficha de trabalho (individual) com uma base contendo um passo a passo da construção até o uso da *macro*[12].

A introdução de símbolos matemáticos foi produtiva, uma vez que quando não entendiam, solicitavam nossa presença e, através do diálogo, informalmente, íamos introduzindo os conceitos (intersecção, por exemplo). Muito do que sabiam vinha à tona, bem como dúvidas e conceitos com significados diferentes do saber matemático, por exemplo: vendo o símbolo de perpendicular, perguntavam-nos o que era aquele símbolo. Ao tempo em que respondíamos, abríamos uma discussão quanto à questão conceitual da pergunta: "*esse símbolo representa reta perpendicular. Mas o que é uma reta perpendicular?".* Nessa resposta um dos alunos confundiu com o conceito de reta paralela. Assim, podíamos também dialogar com os alunos de modo que eles ficassem menos inibidos.

Na fig.3.52 são apresentadas bases e partes de pavimentações obtidas por macros, construídas pelos alunos. Somente 7% dos alunos não conseguiram construir e utilizar macros, pois tinham dificuldades em utilizar o *mouse* (falta de prática).

---

[10] Os alunos construíram a macro com a nossa orientação, pois não sabiam fazer isso até o momento.
[11] Os alunos salvavam em disquete cada construção realizada no laboratório de informática.
[12] A construção da base, de sua macro e do uso da macro encontra-se na página 110, capítulo 2.

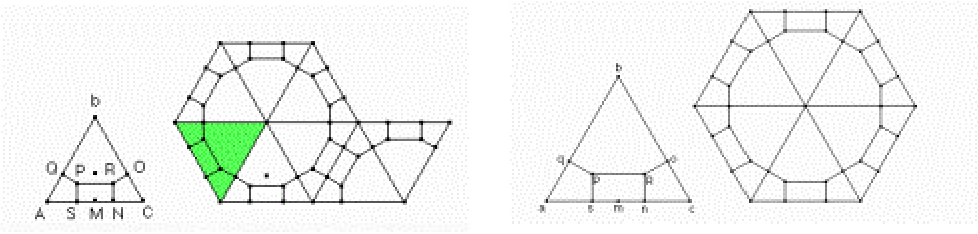
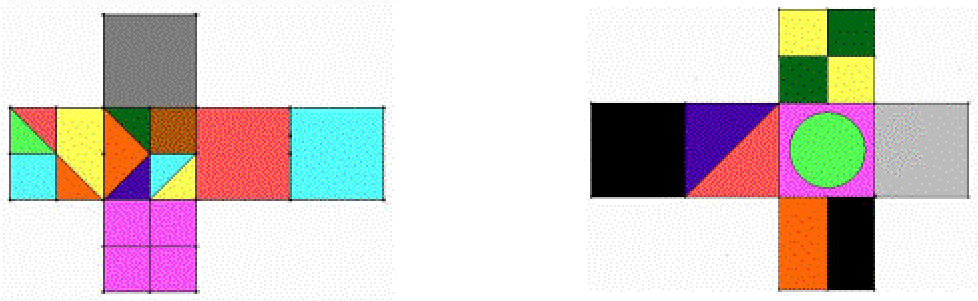


Figura 3.52

Somente quando os alunos souberam fazer e usar uma macro é que passamos, de fato, para a construção de uma planificação com padrões em suas faces. Solicitamos que construíssem outras planificações de outros cubos que permitissem obter um empilhamento cujas faces gerassem mosaicos. Foi necessário darmos um encaminhamento: *construir um quadrado usando a ferramenta polígono regular. Por simetria axial, obter réplicas formando uma planificação do cubo. Em cada face construir um padrão. Para colorir uma região ela deve ser contornada usando a ferramenta polígono.*

Assim, os alunos construíram seus próprios padrões, através de construções geométricas realizadas no *software Cabri-Géomètre II.* Deveriam desenhar padrões envolvendo construções geométricas que pudessem ser realizadas com régua e compasso, explicando o processo de construção. Na fig.3.53 temos algumas das planificações apresentadas:



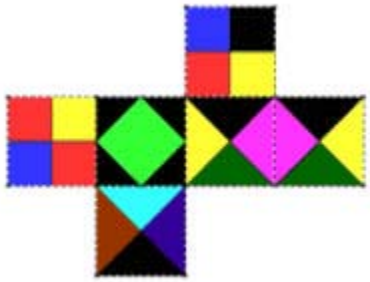


Figura 3.53

A maioria dos alunos, 85%, sentiu alguma dificuldade nas construções e colorações por falta de prática[13] no uso do software. Mas, mesmo assim, acharam mais rápido, fácil e bonito do que se fosse construído com régua e compasso. Por comparação, citaram o exemplo de bases que foram construídas anteriormente tanto com régua e compasso como no *Cabri-Géomètre II*.

Às vezes, alguns alunos ficavam um tanto impacientes quando iam colorir ou apagar um objeto, mas logo ficavam felizes com o resultado final e iam interiorizando os conceitos trabalhados nas construções. Propositadamente, estabelecíamos um diálogo informal a fim de ir explorando conceitos e propriedades geométricas relacionadas à construção dos padrões caleidoscópicos e das planificações.

Ao final apresentamos um conjunto de tetraedros e octaedros que quando empilhados formavam uma pirâmide, apresentando mosaicos em suas faces. Pretendíamos, com esse material, desenvolver várias atividades, assim como fizemos com o conjunto de cubos. Porém, isso não foi possível, embora tivesse provocado bastante entusiasmo pela beleza, sua montagem se mostrou muito difícil[14].

---

[13] A prática da qual trato aqui é o aprimoramento da coordenação motora fina, visto que é preciso trabalhar um bom tempo com o mouse para adquirir a habilidade adequada para utilizá-lo com segurança e destreza.

[14] Para montar a pirâmide com mosaicos em suas faces, era preciso justapor adequadamente tetraedros e octaedros. Cada peça, das 15 apresentadas a cada grupo, apresentava uma planificação diferente, fazendo com que tínhamos pouquíssimas maneiras de montá-las tornando a tarefa bastante complexa.




Figura 3.54

Decidimos, então, apresentar outros empilhamentos de poliedros, agora com poliedros semi-regulares (fig. 3.55), apenas para que os alunos tivessem uma visão mais ampla sobre tesselações espaciais.

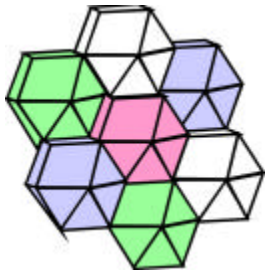


Figura 3.55

Discussão ao final das atividades

Ao distribuirmos as atividades, íamos de grupo em grupo tirar as dúvidas. Os alunos eram falantes e não se intimidavam em dizer quando não sabiam resolver as questões. Diziam que não apreciavam muito as aulas de matemática, mas gostavam das nossas atividades, especialmente aquelas relacionadas com Educação Artística.

Ao término de cada aula reuníamo-nos em círculo para a discussão das atividades realizadas naquele dia e se faltasse tempo, as questões eram refeitas na aula seguinte. Na argumentação escrita de suas respostas era marcante a dificuldade que tinham de se expressar dessa forma. Muitas vezes entendiam o assunto que estava sendo discutido, mas não sabiam expressar-se de maneira

satisfatória através da escrita, fazendo com que a resposta escrita não correspondesse à falada.

O aparente descaso de algumas atividades mal respondidas se revelava a cada correção como um indicativo de que os alunos estavam interessados em aprender, porém não sabiam se expressar corretamente. As discussões entre os elementos do grupo eram muito produtivas. Os alunos passaram a se mostrar cada vez menos dependentes.

Algumas tarefas não realizadas mostraram que a questão não foi bem entendida. Com esclarecimentos os alunos acabavam fazendo com sucesso. Após refazerem as atividades reuníamo-nos novamente para discutir, agora, com mais clareza. Aos poucos não precisamos refazer as atividades, as reuniões ao final de cada aula eram suficientes.

Relatamos apenas algumas atividades procurando tratar os aspectos mais significativos ocorridos no desenvolvimento das mesmas, que serviram para ratificar os pressupostos de nossa pesquisa.

As atividades realizadas na experiência em sala de aula foram embasadas no referencial teórico – capítulo 2. Desenvolvê-las totalmente (os conteúdos que constam nesse capítulo) tornaria o trabalho muito extenso. Outros tipos de atividades também foram feitas, como por exemplo uma visita ao **caleidoscópio "gigante"** desenvolvido por Murari e em exposição no Departamento de Matemática - IGCE - UNESP – Rio Claro, como mostram as fotos abaixo.





Alunos visitando o caleidoscópio "gigante" na UNESP – Rio Claro – SP.

Finalizamos este capítulo apresentando fotos ilustrativas de empilhamentos de poliedros (cubos e tetraedros e octaedros), material por nós produzidos e utilizados.



Kit Mosaico-cubo



Kit Mosaico-pirâmide

CAPÍTULO 4: CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONTRIBUIÇÕES

O objetivo de nossa pesquisa era investigar se "*poderíamos ensinar Geometria fazendo uso conjunto de caleidoscópios, sólidos geométricos e informática*[1] *de modo a despertar mais interesse e participação no aluno em relação à aprendizagem do conteúdo matemático"*. Para isso mesclamos nosso trabalho em sala de aula ora deixando os alunos mais à vontade para explorarem os materiais educativos utilizados e ora distribuindo fichas de trabalho que incluíam atividades que direcionavam o uso do material para a aquisição de alguns conceitos de Geometria tratados no capítulo 2 (referencial teórico) e que constam nas atividades descritas no capítulo 3 (a pesquisa de campo).

Como metodologia de ensino optamos pela Resolução de Problemas e também incluímos alguns jogos educacionais em nossa proposta, como o *kit de polígonos, os kits mosaico-cubo e mosaico-pirâmide,* a fim de promover uma aprendizagem mais significativa e interessante ao aluno.



Figura 4.1

[1] *Softwares Cabri-Géometre II e Geometricks.*

Os *softwares* foram utilizados paralelamente a algumas atividades realizadas em sala de aula [2] que se iniciou com os caleidoscópios e o *kit de polígonos*. Depois passamos a trabalhar com os poliedros e no final com os poliedros regulares cujas faces continham padrões caleidoscópicos. Notamos por parte dos alunos grande interesse nos materiais (caleidoscópios, poliedros e *softwares* educacionais). No início eles diziam que as aulas de Geometria[3] mais pareciam aulas de Educação Artística e não de Matemática, integração que era um de nossos objetivos.



Figura 4.2

A integração com o Desenho (Ed. Artística, Artes Plásticas), bastante nítida para os alunos, mostrou-se um ponto forte para a realização de nossa pesquisa com essa turma, pois esses alunos gostavam muito de desenhar, chegando até mesmo a atrapalhar as aulas das outras disciplinas conforme relato da professora responsável pelas aulas de matemática. Com isso, podíamos perceber claramente o *interesse* dos alunos em atividades nas quais pedíamos para

[2] que por sua natureza também denominamos de laboratório de ensino e aprendizagem, mais aprendizagem do que ensino, pois muitas vezes os alunos aprendiam por si só certos conceitos simplesmente pela manipulação do material, às vezes, sem nossa ajuda. Por exemplo, uma aluna ao manipular as peças do *kit mosaico-cubo* resolveu, por antecipação, duas atividades que iríamos propor à sala (atividade descrita na p. 182, cap. 3) antes mesmo que a apresentassemos.

[3] Aulas em que realizávamos nossa pesquisa de campo, isto é, desenvolvíamos as atividades com os alunos.

construírem uma base caleidoscópica ou visualizá-la em caleidoscópios. Os poliedros com padrões em suas faces, por possuírem cores harmoniosas e formas geométricas ou ornamentais, também deixavam os alunos muito curiosos para saberem que tipo de conhecimento poderiam aprender com o mesmo.



Figura 4.3

Com o decorrer do tempo, os alunos foram demostrando maior independência em relação a nossa ajuda na resolução dos exercícios e problemas propostos. No início eles me perguntavam o que era para ser feito antes mesmo de lerem o que estava escrito no papel. Com o tempo as perguntas eram mais em relação a dúvidas que não conseguiam esclarecer, como soluções diferentes que surgiam no grupo, ao invés de perguntas do tipo "*o que é para se fazer agora"*.

Pudemos perceber o envolvimento e empenho dos alunos na realização das atividades, exceto quatro alunos que não estavam dispostos a trabalhar. Muitas vezes compararam a resolução de um problema usando o material (o espelho, por exemplo) e a definição (ponto simétrico, por exemplo), agora sem o uso do material. Isso foi um fato que os alunos me chamaram a atenção desde a primeira atividade e no decorrer do desenvolvimento de nossa pesquisa, fomos percebendo que o material muitas vezes servia também para validar as respostas que eles haviam encontrado por outro meio.

De um modo geral, os alunos falavam bastante sobre as atividades. Cada questão apresentada ao grupo era devolvida de uma forma bem agradável, com conjecturas, respostas ou perguntas. A expressão escrita era mais complicada para eles, o que levou-nos muitas vezes a achar que eles não sabiam resolver determinada atividade, quando na verdade o problema era de expressão gráfica. Pudemos constatar muitas vezes, pela fala dos alunos, que eles *aprenderam os conceitos estudados*. Inclusive, uma das alunas veio nos contar que na avaliação do SARESP[4] ao ser perguntado sobre o conceito de bissetriz ela teve facilidade

[4] Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

em responder à pergunta, lembrando-se de que havia estudado em nossas atividades com espelhos.

O trabalho com caleidoscópios, poliedros e *softwares* educacionais (*Cabri-Géomètre II* e *Geometricks)* proporcionou interessantes atividades educacionais e foi uma integração que originou até mesmo atividades que poderiam ser exploradas no nível superior. Com essa integração pudemos explorar os conceitos descritos no capítulo 2 (referencial teórico) e também perceber as possibilidades de avançar para outras áreas da matemática, como a probabilidade, combinatória, geometria projetiva e teoria dos grupos.

Também gostaríamos de registrar que como fruto de nosso trabalho, surgiu a possibilidade de se comercializar um conjunto de cubos com padrões caleidoscópicos em suas faces (Mosaico-cubo) constituindo-se num jogo educacional. Estamos, no momento, tratando de viabilizar essa produção.

Enfim, podemos afirmar que é perfeitamente exeqüível nossa proposta de ensinar alguns conceitos de Geometria integrando os caleidoscópios, os sólidos geométricos e os softwares educacionais por nós utilizados. Além disso, fazendo parte dos objetivos a serem alcançados, pudemos concluir que os alunos estavam diante de atividades capazes de desenvolver:

- a percepção espacial, quando da visualização oferecida pelos caleidoscópios e manipulação dos poliedros e dos *softwares* que também são recursos visuais;
- o senso estético, no trabalho de coloração de padrões e das planificações;
- a criatividade, na construção e obtenção das bases caleidoscópicas.

No que se refere ao desenvolvimento da percepção espacial, notamos um crescimento do aluno desde a primeira atividade com um espelho até a manipulação dos cubos para obter-se um empilhamento com mosaicos em suas laterais. Por exemplo, a princípio não percebiam a diferença entre a rotação e a reflexão de um padrão no plano, o que foi sendo pouco a pouco assimilado, naturalmente, pelos alunos.

O uso de um espelho, progressivamente, foi deixando de ser essencial para resolver as atividades sobre reflexão, demonstrando que os alunos já conseguiam

imaginar qual figura seria obtida, fornecendo rapidamente os resultados desse tipo de transformação.

Ao trabalharmos com dois, três espelhos e, também, com pavimentações no laboratório de informática, ficou claro que os alunos já podiam prever o visual a ser obtido por um determinado padrão, o que no início não faziam ou não acertavam.

No que se refere ao senso estético e à criatividade notamos nas últimas atividades que os alunos trabalhavam mais livremente, criando belos padrões e planificações com padrões em suas faces, resultando em trabalhos harmoniosos, cuja qualidade era muito superior à daqueles inicialmente apresentados.

Além disso, observamos que houve aprendizagem de muitos conceitos envolvidos nas construções geométricas dos padrões (como ponto médio, perpendicular, paralela, bissetriz, entre outros). O fato de as construções serem realizadas por eles, tanto com régua e compasso, como no *software Cabri-Géomètre II e Geometricks,* vieram a reforçar esses conceitos. Após terem sido feitas no papel, cerca de 30% dos alunos faziam as construções no computador, sem nenhuma ajuda nossa, apenas com orientações referentes às ferramentas dos *softwares,* significando ocorrência de aprendizagem, já que para a realização das atividades era necessário recorrer-se aos conceitos anteriormente apresentados. Os demais alunos, apesar de necessitarem de nossa intervenção (alguns mais, outros menos), na sua maioria, apresentaram um bom nível de aprendizado.

Na utilização de macros, cujas atividades estão relatadas no capítulo 3, cerca de 56 % o fizeram com êxito e relativa autonomia. Tirávamos as dúvidas somente quando solicitavam, deixando-os trabalhar o mais livremente possível.

Para finalizar, com o propósito de reforçar nossas afirmações, registramos abaixo algumas opiniões de alunos, colhidas ao final de nosso trabalho:

"Eu gostei das aulas porque eram coisas que eu não sabia e tinha curiosidade em aprender. Deu para aprender bastante coisa, mas acho que tem muito mais a aprender ainda. Tomara que as aulas continuem o ano que vem para aprender o que falta."

Aluno A

"Na minha opinião as aulas de Geometria foram diferentes. Eu não conhecia o trabalho que nós fizemos com espelhos, e achei um pouco complicado. A respeito dos cubos eu achei muito interessante, porque tem que pensar muito. (...) Eu aprendi coisas diferentes.

Aluna B

"(...)Nas primeiras aulas que foi no Cabri-Géomètre II eu não entendia muito bem, mas depois com o passar das aulas eu fui aprendendo. (...) Na UNESP [no *Cabri-Géomètre II,* no laboratório de informática do Departamento de Matemática] *eu aprendi a fazer os mosaicos de maneiras mais fáceis".*[5]

Aluna C

"(...) Curti a atividade que tinha que montar os cubos com os lados iguais e que rodando cada cubo ainda tínhamos as figuras todas iguais."

Aluno D

"Eu achei muito legal ter aulas com espelhos (1, 2 e 3) pois aprendi várias coisas sobre simetria...

Quando fomos no computador também foi super legal, pois estávamos fazendo mosaicos com simetria. É importante porque aprendemos brincando com cubos usando simetria (...)"

Aluna E

[5] Aqui a aluna se refere a aula em que trabalhamos com macros para obtenção de mosaicos.

"Quanto aos espelhos, eu gostei mais de trabalhar com três, achei mais interessante a visão que a gente tem.

No Cabri-Géomètre II, achei interessante as "montagens" que nós fizemos, apesar de, às vezes, serem um pouco complicadas de apagarem.

Com os cubos foi um pouco mais complicado, pois de um lado fica certo, mas depois vira do outro lado e daí estava errado.

Aprendi tudo, mas no começo eu não entendia muito bem."

Aluna F



Figura 4.4

BIBLIOGRAFIA

- ALMEIDA. S.T., MARTINS, R.A., MURARI, C. **Obtenąão de bases substituíveis para caleidoscópio no Cabri--Géomètre II**, In: Workshop de Informática Aplicada à Educação, 2000, Araraquara - UNIARA-SBEM/SP. Resumos, pAI.

- ALSPAUGH, C. A., **Kaleidoscope Geometrv.** Arithmetic Teacher, p.l 16 - 117, 3 .ed., 1976.

- ANDRE M.E.D.A., LUDKE M. **Pesquisa em Educaąão: Abordagens Qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

- BALL, R. & COXETER, M.C.H. **Mathematical Recreations and Essays.** Univ. Toronto, 1974, republication by Dover. New York., 1987.

- BARBOSA, R. M. **Descobrindo Padrões em Mosaicos. São Paulo: Atual, 1993.**

- _____ **. Determinaąão do Número de Imagens para Espelhos Planos.** Atividades Pedagógicas. p.5-8, 1957.

- BARBOSA, R.M., MURARI, C. **Mosaicos Ornamentais em caleidoscópio equilátero e isósceles.** In: EPEM/SBEM- PUC/SP. 4, 1996. Anais....São Paulo, 1996. p. 187 - 193.

- _____. **Aprendendo construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos.** Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, p.57-66, 1998.

- _____. **Pavimentaąões do plano de Configuraąão (4,4,4,4) Usando o Caleidoscópio Isósceles, para Coloraąões Múltiplas.** In: EPEM/SBEM - PUC/SP, 4, 1996. Anais....São Paulo, 1996. p. 256-262.

- BORBA, M.C. **Tecnologias informáticas na Educaąão Matemática e reorganizaąão do pensamento.** Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas, São Paulo:285-295, 1999.

- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educaąão Fundamental.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

- COXETER, H.S.M., **Introduction to GEOMETRY.** N.Y. John Wiley & Sons, Inc., 1961.

- CLEMENS, R.S., DAFFER, P.G.O'. **Geometry: An Investigative Approach.** Marlo Park, California: Addison- Wesley, 1977.

- EMERIQUE, P.S. **Isto e aquilo. jogo e "ensinagem" Matemática.** Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas, São Paulo:185- 198, 1999.

- GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** Rio de Janeiro: Record, 1999.

- GRUNBAUM, B. and SHEPARD, G.C. **Tillings and patterns: an introduction.** Freeman. New York., 1989.

- GRANDO, R. C. **O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática.** Campinas, SP, 1995. 175p. Dissertação (Mestrado em Educação na Área de Metodologia de Ensino) - Faculdade de Educação, UNICAMP.

- HENRIQUES, A. **Ensino e Aprendizagem da Geometria Métrica. Uma sequência didática com auxílio do sofiware Cabri-Géomêtre II.** Rio Claro, 1999. Mestrado - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista.

- JACOBS, H.J. **Geometry.** W. H. Freeman and Company. New York, San Francisco, 1974.

- KALLEF, A. M. R. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeaas e outros materiais concretos.** Niterói: EdUFF, 1998.

- KAMII, C. **Jogos em grupo na educaação infantil: implicaações da teoria de Piaget.** São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

- KINGSTON. M. **Mosaics by Reflections.** The Mathematics Teacher, p.28O-286, 1957.

- LEVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.** São Paulo: Editora 34, 1993.

- LINDQUIST, M.M. e SHULTE, A.P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**, tradução de Hygino H.Domingues, São Paulo: Atual, 1994.

- LOPES, M.L.M.L., NASSER, L. **Geometria na era da imagem e do movimento.** Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

- LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** SBEM, 1° SEM. 1995, p.3-13.

- MACHADO, N. J. **Ensaios transversais: Cidadania e Educaąão.** São Paulo: Escrituras Editora, 1997.

- MALETSKY. **Designs with tessellations.** s.l., s.e., 1974.

- MOURA, M.O. **A Construąão do Signo Numérico em Situaąão de Ensino.** São Paulo: USP, 1992, Tese de Doutorado.

- MURARI, C. **Brincando, Colorindo e Aprendendo com Caleidoscópio Equilátero em Pavimentaąões de Configuraąão (3,3,3,3,3,3).** Educação Matemática em Revista/ SBEM. 1995.

- _____. **Um Caleidoscópio Educacional Modificado para Trabalhos em Grupo.** Revista de Educação Matemática, SBEM. Regional de São Paulo, p.l 1 - 15, 1995.

- _____. **Pavimentaąão do Plano de Configuraąão, (4,6,12), Usando Caleidoscópios Equiláteros para Coloraąão Múltiplas.** In: EPEM/SBEM - PUC/SP, 4, 1996, s. 1. Anais....São Paulo, 1996. p. 263-268.

- _____. **Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7" e 8" séries, via caleidoscópios.** Rio Claro, 1999. 2.v. Doutorado-Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista.

- ONUCHIC, L.R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resoluąão de Problemas.** Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas, São Paulo:199-218, 1999.

- PAVANELO, R.M. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Conseqüências.** Zetetiké, UN1CAMP, 1993.

- PENTEADO, M.G. **Novos atores, novos cenários: discutindo a inserąão dos computadores na profissão docente.** Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas, São Paulo:297-313, 1999.

- PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da Geometria para as camadas populares.** Campinas, 1991. Doutorado – Faculdade de Educação – UNICAMP.

- POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

- POLYA, G. **Didática da resoluação de problemas de Matemática.** 1ed. São Paulo: Ática, 1991.

- RODRIGUES. V., **Resoluação de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática.** Rio Claro, 1992. Mestrado-Instituto de Geociências e Ciências Exatas-Universidade Estadual Paulista.

- SCHATTSCHNEIDER, D., WALKER W. **Caleidociclos de M. C. Escher**, 1977. Germany: ISBN, 1977.

- SHERARD, W. **Porque a Geometria é uma competência básica?** In: FONSECA, M.C.F.R., GOMES, M.L.M., Matemática e Escola, UFMG, 1993.

- SILVA , V.C. **Ensino de Geometria através de ornamentos.** Rio Claro, 1996. Mestrado-Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista.

- SILVA, M.G.P. **Resoluação de Problemas uma perspectiva de trabalho em sala de aula.** Rio Claro, 1989. Mestrado-Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista.

Anexo I

Caleidoscópios X Cabri-Géomètre II.

O que são e para que servem os Caleidoscópios?

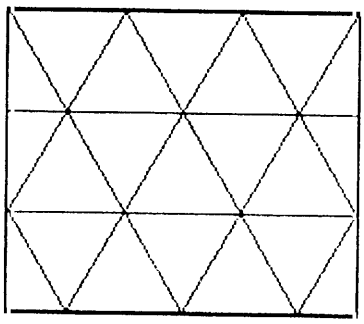
O QUE SÃO?

Qualquer conjunto de espelhos planos pode ser classificado como caleidoscópio desde que possibilite a obtenção repetida perfeita de imagens. Assim temos caleidoscópios com 2, *3* e *4* espelhos.

PARA QUE SERVEM?

Os caleidoscópios são instrumentos facilitadores no ensino aprendizagem de Geometria. Através deles podemos explorar conceitos geométricos como, por exemplo, simetrias, ângulos, polígonos regulares, etc.

Pavimentação do plano por polígonos regulares

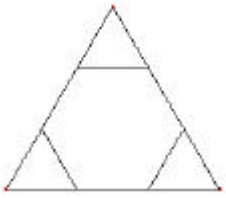


- Um conjunto de polígonos será uma **PAVIMENTAÇÃO** (tesselação) **DO PLANO** se, e somente se, o conjunto de polígonos cobrir o plano sem lacunas ou superposições.

Ex.: Um conjunto de triângulos pavimentam o plano.

Denotamos por *(3,3,3,3,3,3)* a configuração da pavimentação do plano onde há somente triângulos ao redor de cada vértice ou nó.

- **BASE OU PADRÃO CALEIDOSCÓPICO:** é uma região poligonal construída que colocada no caleidoscópio geram as pavimentações.(Fig. ao lado)



Utilizando três espelhos

O estudo da descoberta de bases para pavimentação do plano por polígonos regulares utilizadas no caleidoscópio nos proporciona uma maneira diferente de ensinar geometria no qual os conceitos geométricos são apresentados de maneira quase informal, além de fornecer recursos que permitem uma interdisciplinaridade com física ou ciências (reflexões de imagens em espelhos) e com educação artística (harmonia e contraste de cores).

Podemos encontrar várias pavimentações por polígonos regulares no caleidoscópio através de bases substituíveis. Colorindo as regiões formadas pelos segmentos nas bases substituíveis tais regiões vão produzir nas reflexões dos espelhos um visual desejado.

A busca de bases para colorações múltiplas introduz o problema matemático educacional de ampliação do número de cores.

Atividade 1

- Abra os espelhos articulados num ângulo de 60° e coloque o terceiro espelho;
- Coloque o caleidoscópio sobre a folha n°2 (pág. 212) , e obtenha com apenas este segmento uma pavimentação do plano por triângulos;
- Como se chama este segmento?_____
- Faça sua construção no *software Cabri-Géomètre II.*
- Com uma _____(nome do segmento) conseguimos uma base que nos forneceu uma pavimentação por triângulos com duas cores distintas. Seria possível encontrar uma base que nos fornecesse uma pavimentação com 6 cores ? (faça um rascunho antes de fazer a construção no *software Cabri-Géomètre II);*

Atividade 2

- Construa no *software Cabri-Géomètre II* uma base e obtenha seu visual caleidoscópico utilizando a opção simetria axial:

- Clique em simetria axial
- Clique na figura que você quer replicar (obter figura simétrica)
- Clique no eixo de simetria
- Colorir a base e colocar as cores correspondentes no visual caleidoscópico.

Obtenção da pavimentação (porção) do plano por quadrados a partir de um polígono através do *Software Cabri-Géomètre II*

ATIVIDADE 1.

1. Construir um quadrado usando a ferramenta polígono regular;
2. Obter uma porção da pavimentação do plano usando simetria;

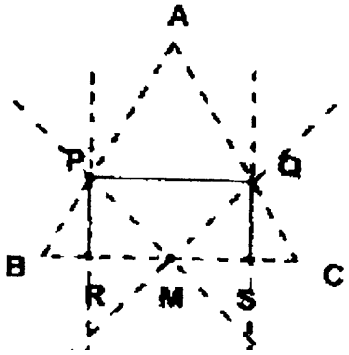
ATIVIDADE 2.

1. Construir um segmento *AB*
2. Por A levantar perpendicular em relação ao segmento ***AB***
3. Construir circunferência de centro A e raio ***AB ,*** determinando o ponto C;
4. Traçar perpendicular em relação a ***AC*** por C;
5. Levantar perpendicular em relação a ***AB*** por B, determinando D;
6. Usando a ferramenta esconder/ocultar esconder as retas e circunferência construídas deixando somente os pontos e o segmento ***AB***
7. A partir destes pontos e fazendo uso da ferramenta polígono construir um quadrado;

8. Obter a pavimentação por macros:
- Definir o segmento ***AB*** como objeto inicial;
- Definir o polígono (construído no "passo" 7) como objeto final;
- Clicar em definir macro;
- A partir do(s) lado(s) do quadrado obter a porção da pavimentação;

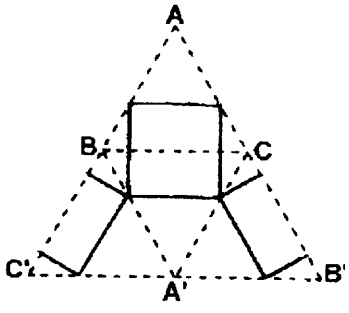
Atividade 3 - Obtenąão de bases da pavimentaąão do plano de configuraąão (3,4,6,4).

Construąão da base geradora:



- Construir um triângulo equilátero ABC [polígono regular] com traços pontilhados;
- Construir o ponto médio M de BC;
- Traçar as bissetrizes dos ângulos AMB e AMC, determinando P e Q nas interseções com os lados AB e *A* C respectiva mente;
- Pelos pontos P e Q baixar perpendicular ao lado BC, determinando R e S respectivamente;
- Construir os segmentos RP, PQ e QS;
- Esconder todas as construções auxiliares, devendo permanecer apenas os segmentos RP, PQ e QS e o triângulo pontilhado;

Construção da base transformada (base que contém a geradora):

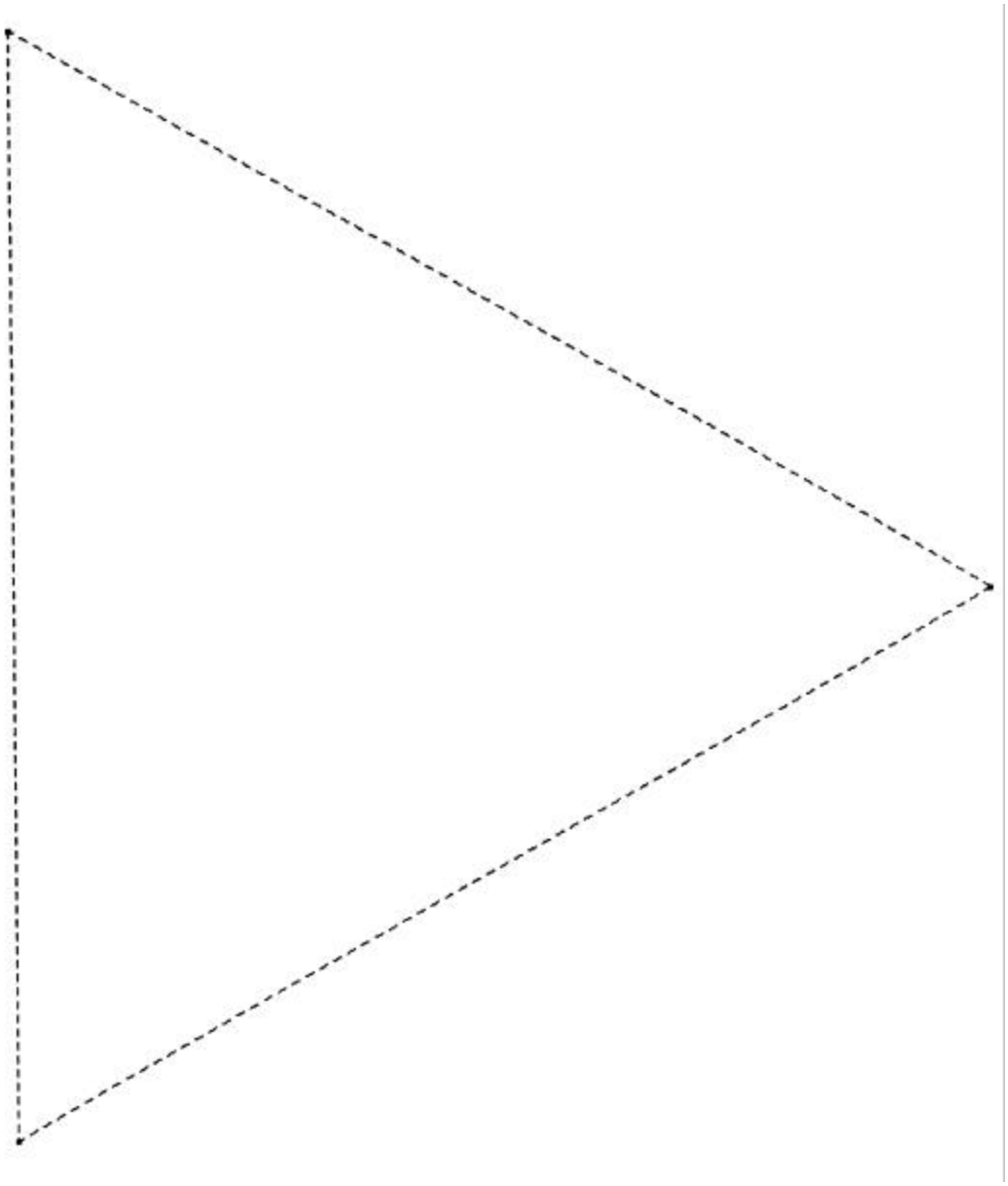


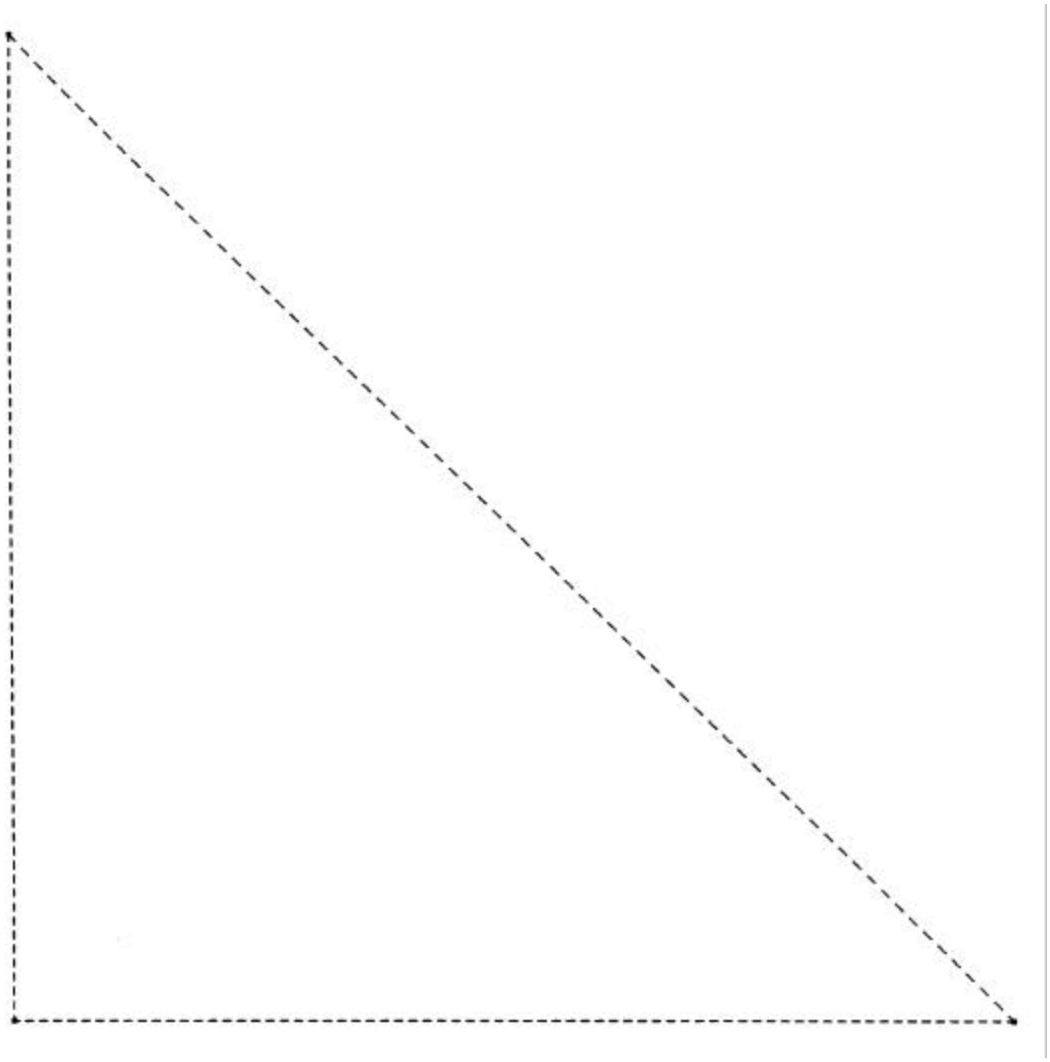
- Por simetria axial, fazer simétricos do triângulo pontilhado ABC;

- Também por simetria axial, obter simétricos dos três segmentos da base geradora (RP, PQ e QS);

- Construir o triângulo pontilhado pelos vértices A, C' e B';
- Esconder as letras e os segmentos auxiliares do interior
da base;

Observe no caleidoscópio que as duas bases construídas geram o **mesmo tipo de pavimentaąão. Também, pode-se verificar este fato replicando as mesmas a fim de obter uma porąão da pavimentaąão do plano.**





Anexo II

Questionário aplicado com os alunos

Dados Pessoais

Nome (opcional): _____

Endereço: _____ n° _____ Bairro: _____

Você trabalha?

( ) Sim Em quê? Onde?

( ) Não

	Escolaridade	Profissão
Mãe		
Pai		
Irmãos		

Questões:

1. O que você espera aprender em Geometria?
2. O que você espera das aulas de Geometria?
3. Na sua opinião, qual é o sentido de se aprender Geometria? Faz sentido?

Anexo III

Diário de campo (modelo)

DATA: ___/___/___ FICHA N° ____ ATIVIDADE N°____.

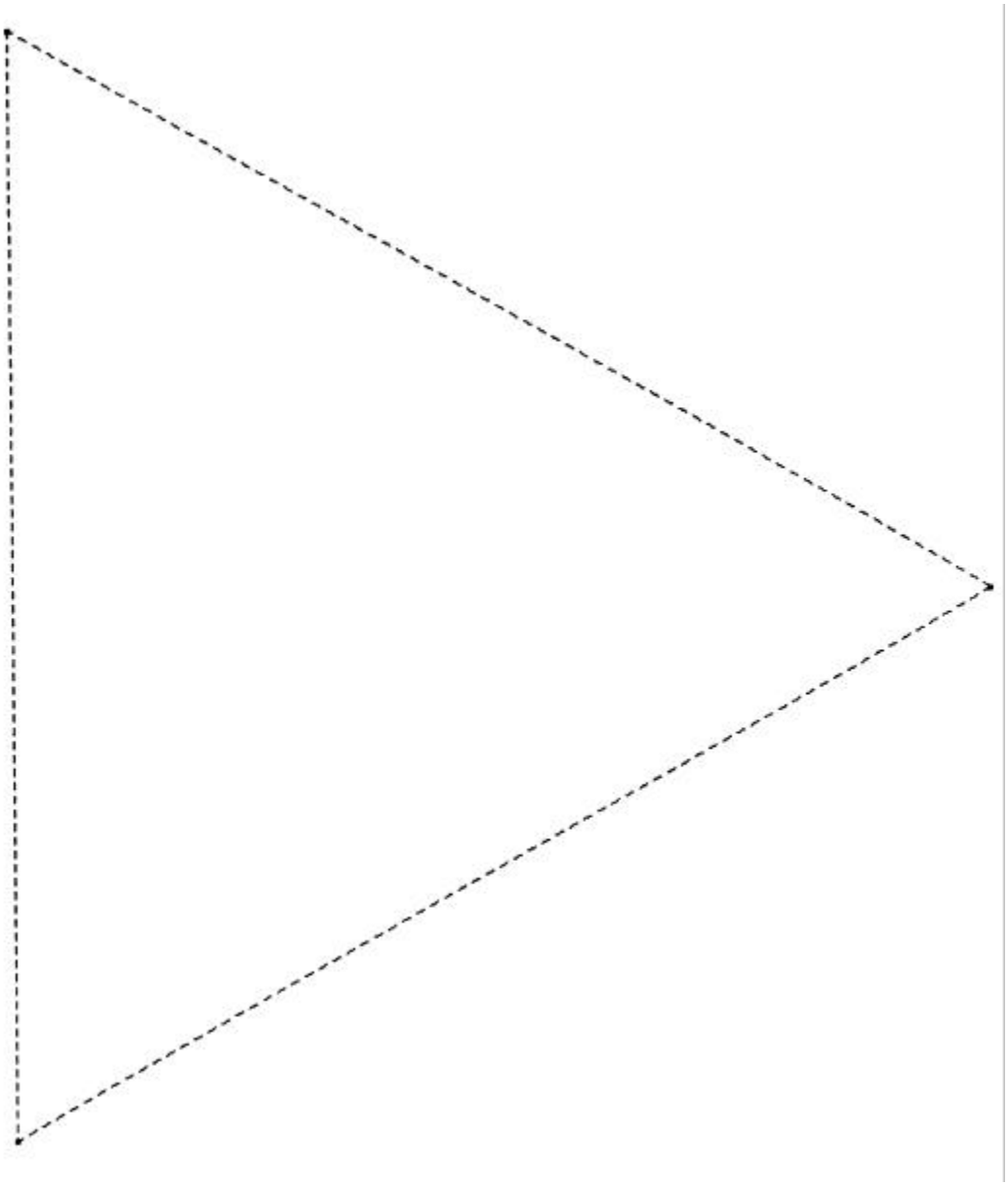
1. Atmosfera da sala de aula: ( ) livre ( ) carregada de tensões emocionais.
2. Algum fato modificou a "rotina" das aulas ( ) N ( ) S_____ _____.
3. Ansiedade ou curiosidade antes do início das aulas

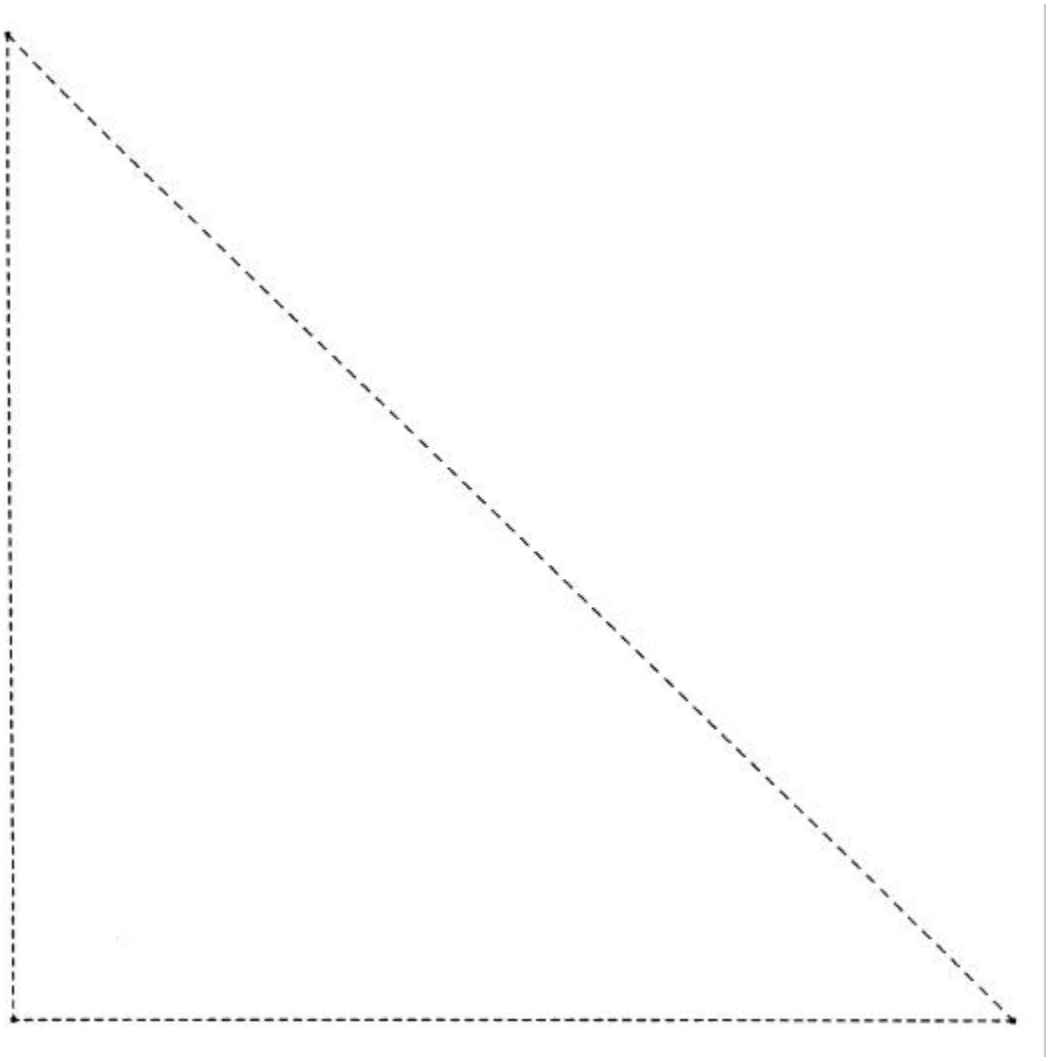
( ) N ( ) S_____.

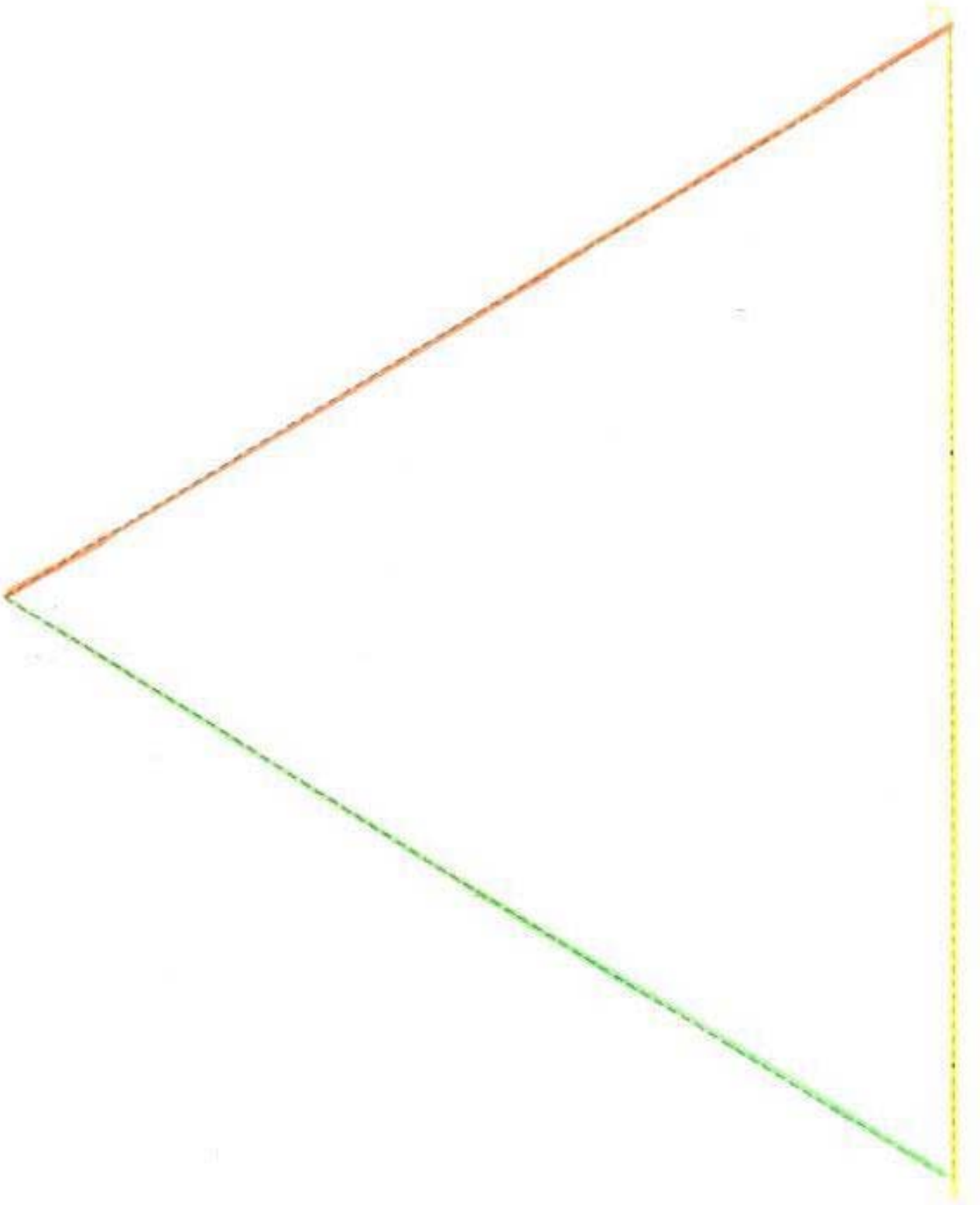
4. Conhecimento do assunto pelos alunos_____.
5. Familiaridade com o material utilizado ( )0 ( )1 ( )2 ( ) 3_____.
6. Autonomia nas atividades ( )0 ( )1 ( )2 ( ) 3_____.
7. Nível de discussão entre os alunos ( )0 ( )1 ( )2 ( ) 3_____.
8. Nível de intervenção da pesquisadora no encaminhamento para resolver as atividades ( )0 ( )1 ( )2 ( ) 3_____.
9. Equilíbrio entre os elementos do grupo (participação).
10. Distanciamento entre os grupos.
11. Estratégias apresentadas pelos diferentes grupos.
12. Bagunça e discussão produtiva.
13. Participação e desinteresse.
14. Que outros saberes enriqueceram a aula?
15. Houve necessidade de aula expositiva ou outra estratégia?
16. O erro serviu de ponto de partida para a aprendizagem?
17. Houve alguma atividade que se tornou desafio para o aluno? Qual o motivo que levou a isso?
18. Nível da escrita e oralidade (linguagem) para expressar uma idéia matemática.

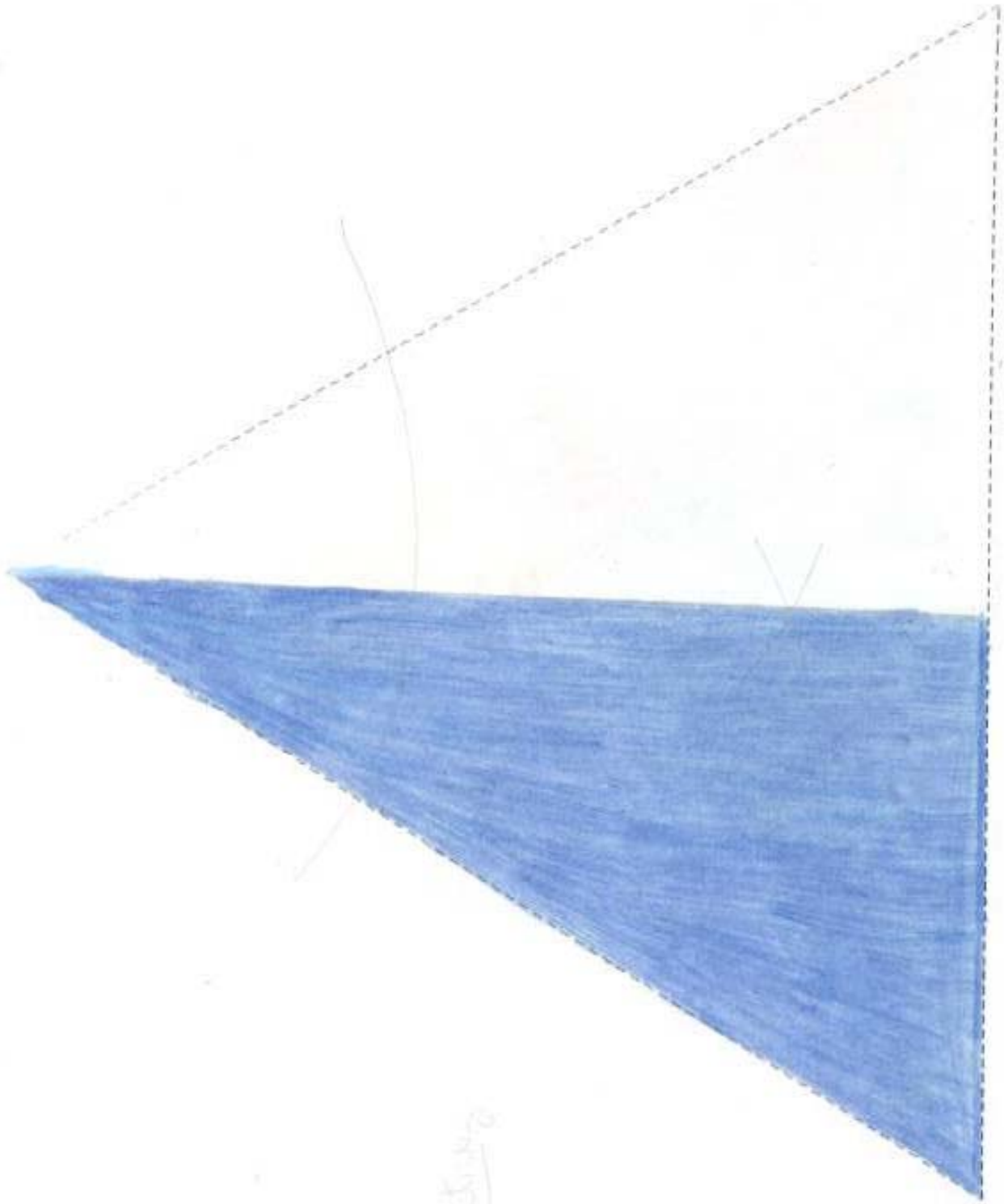
Legenda: ( )0 – nenhum; ( )1 – pouco; ( )2 – bom; ( ) 3 – ótimo.

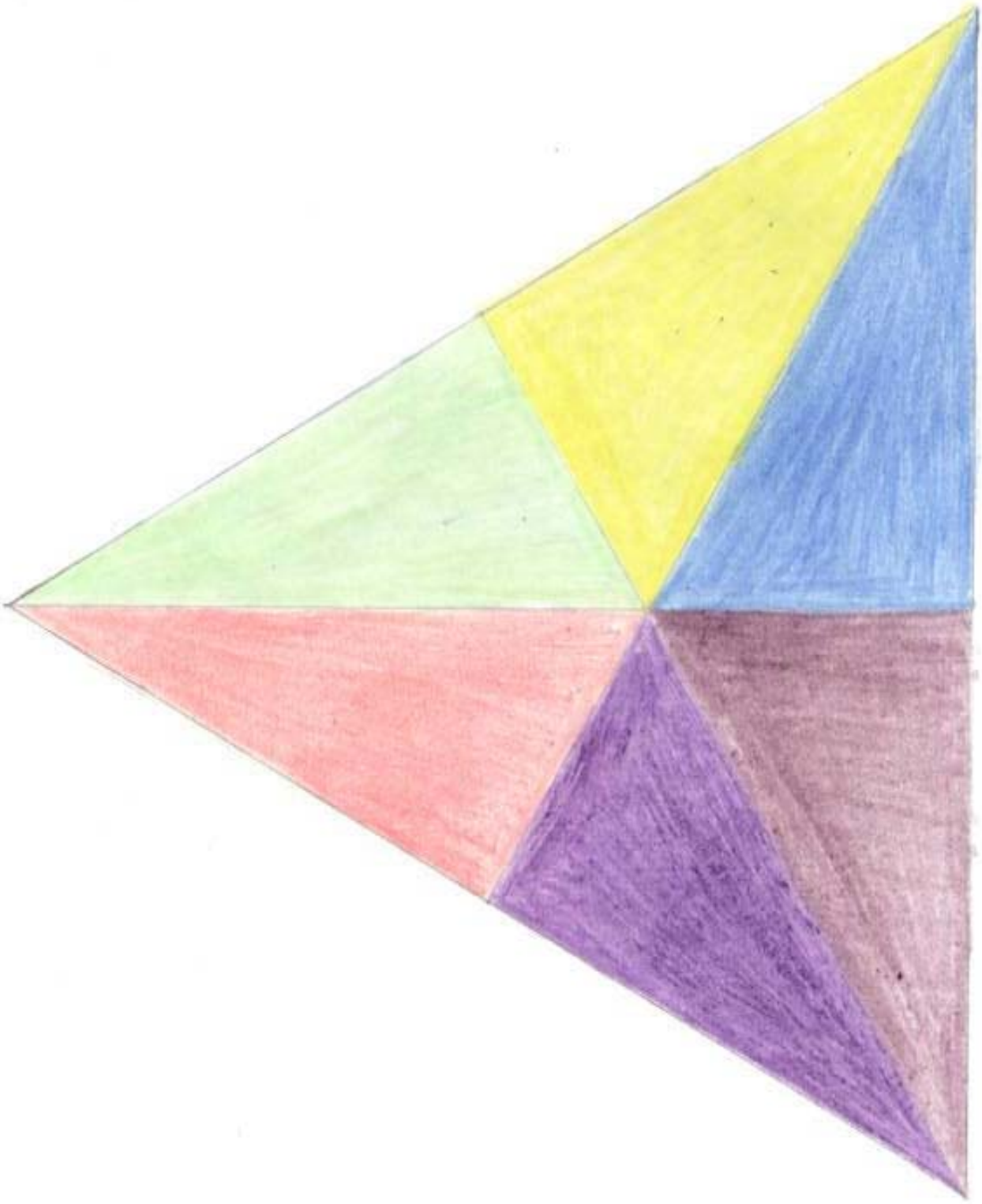
Anexo IV





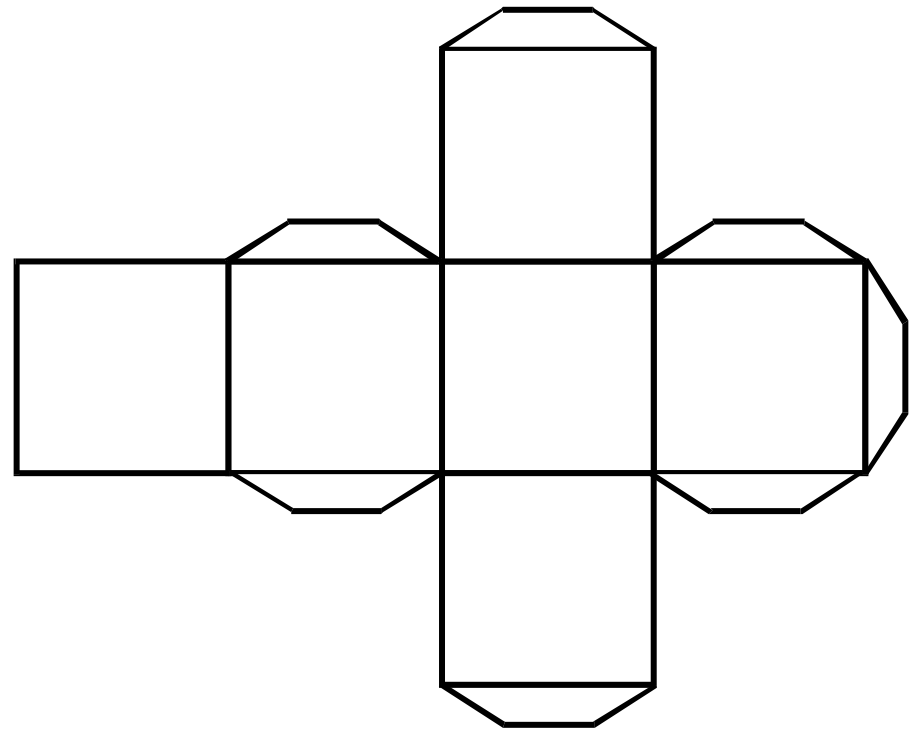


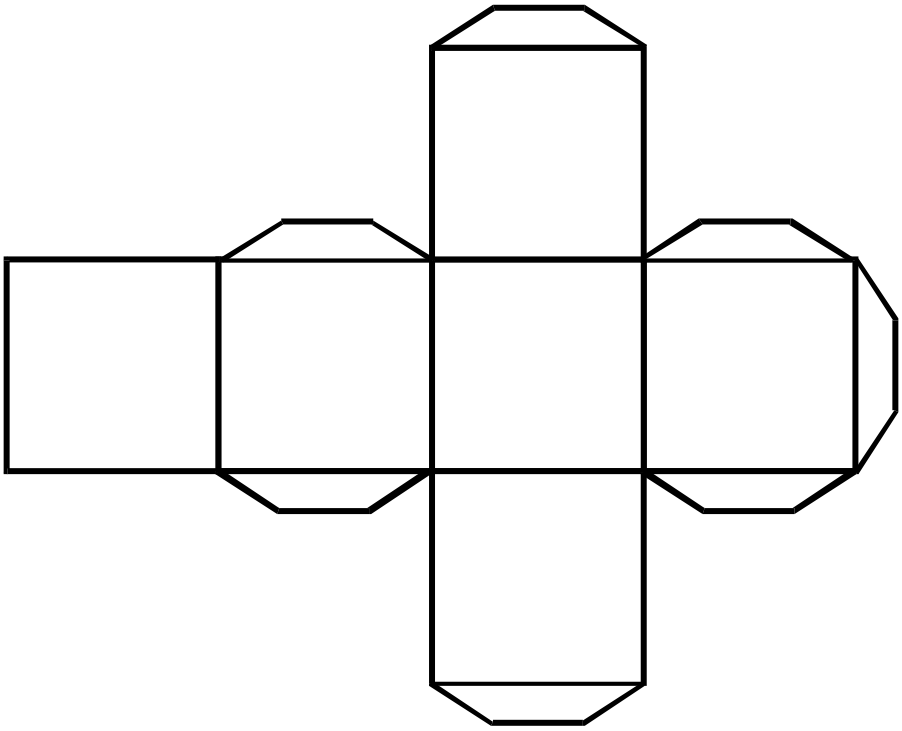


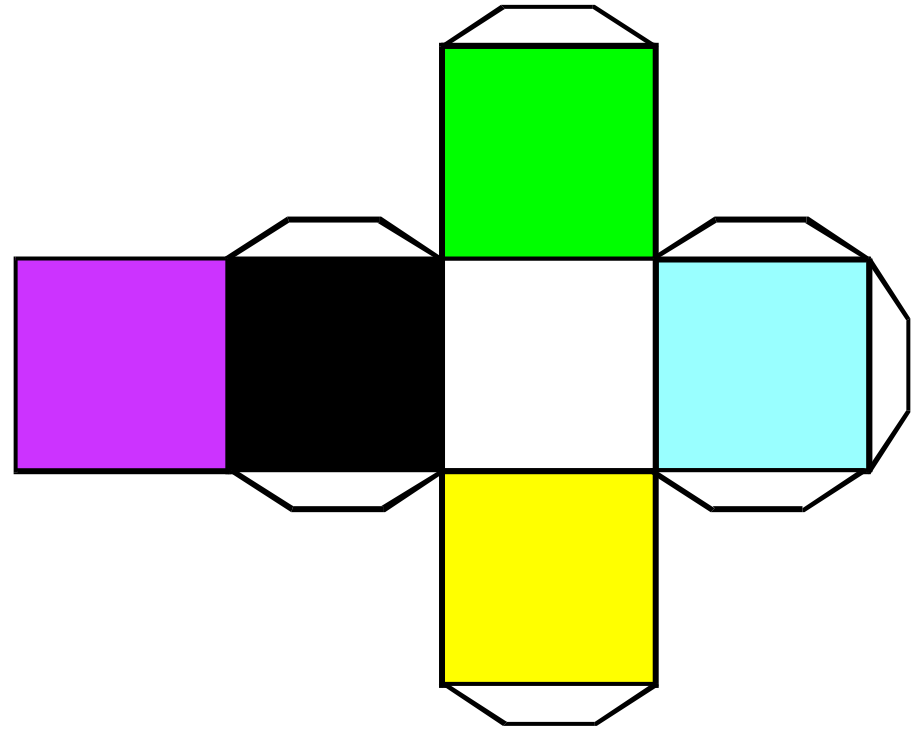


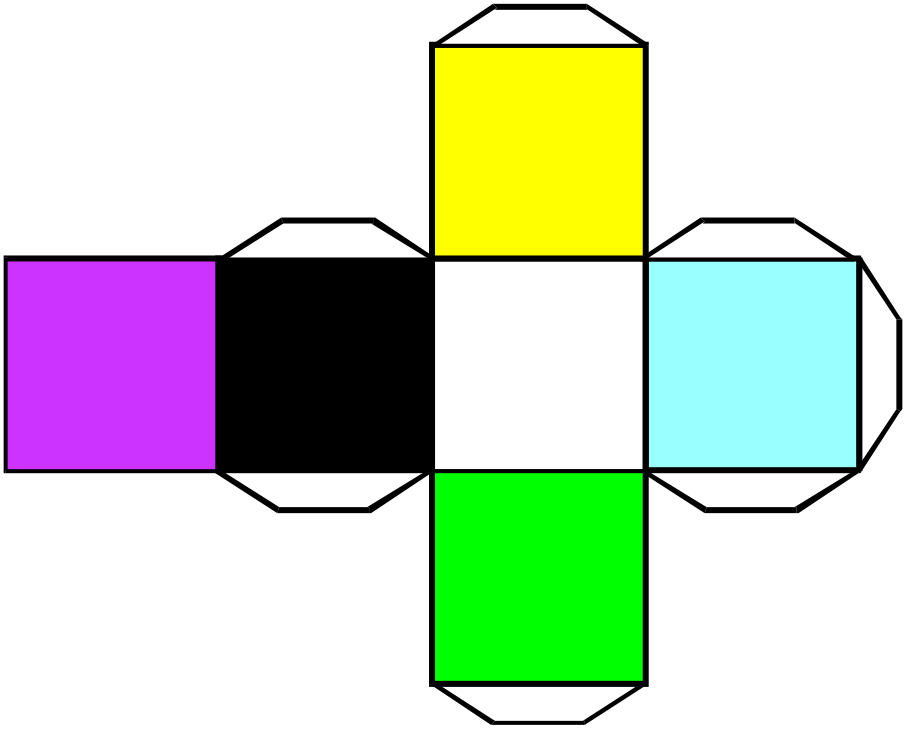


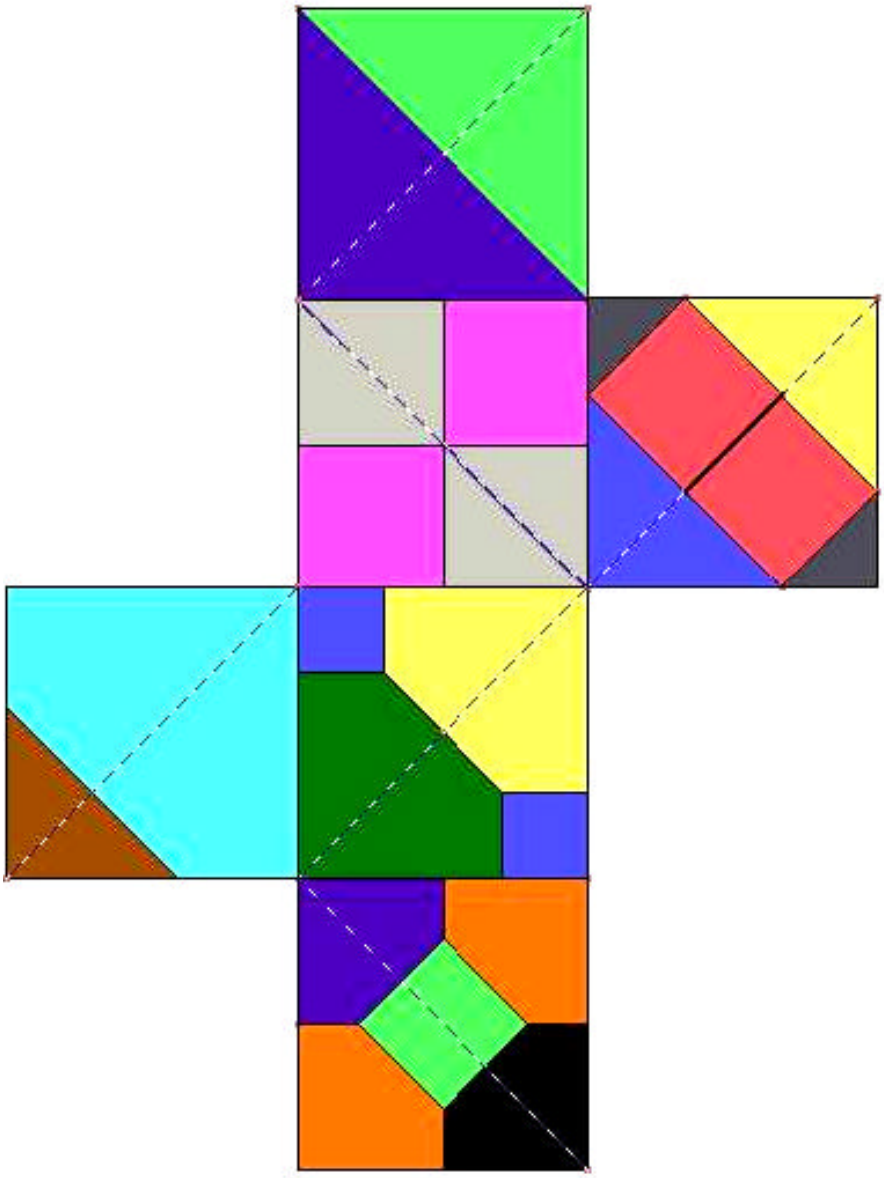
Anexo V

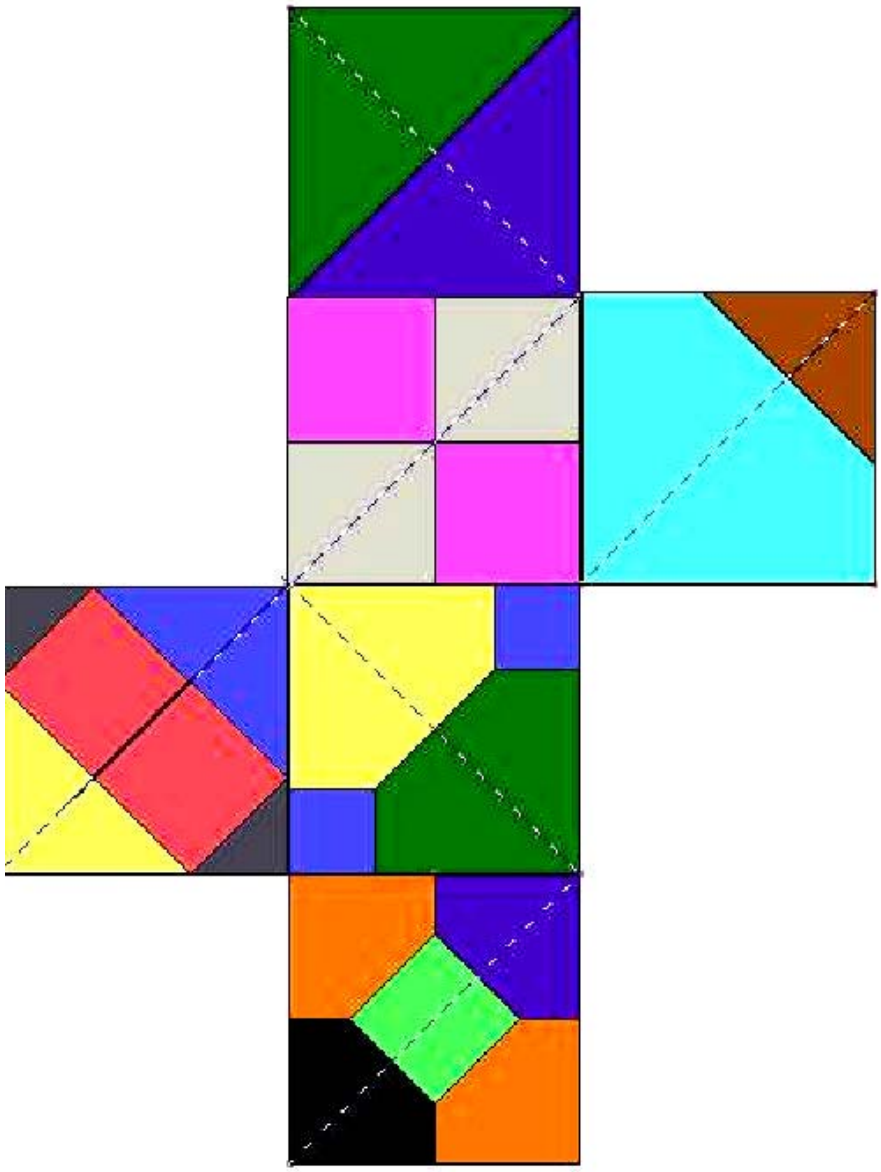


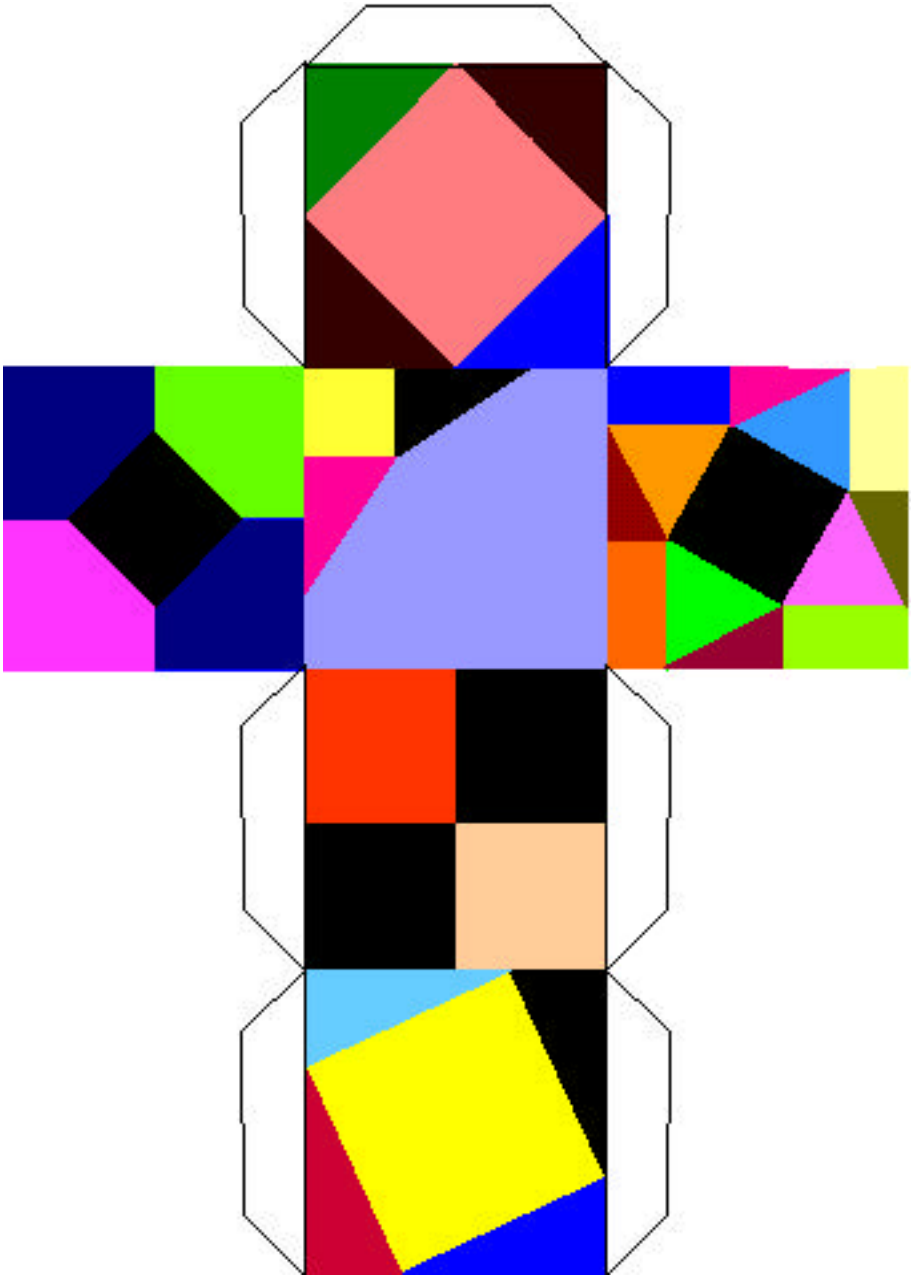


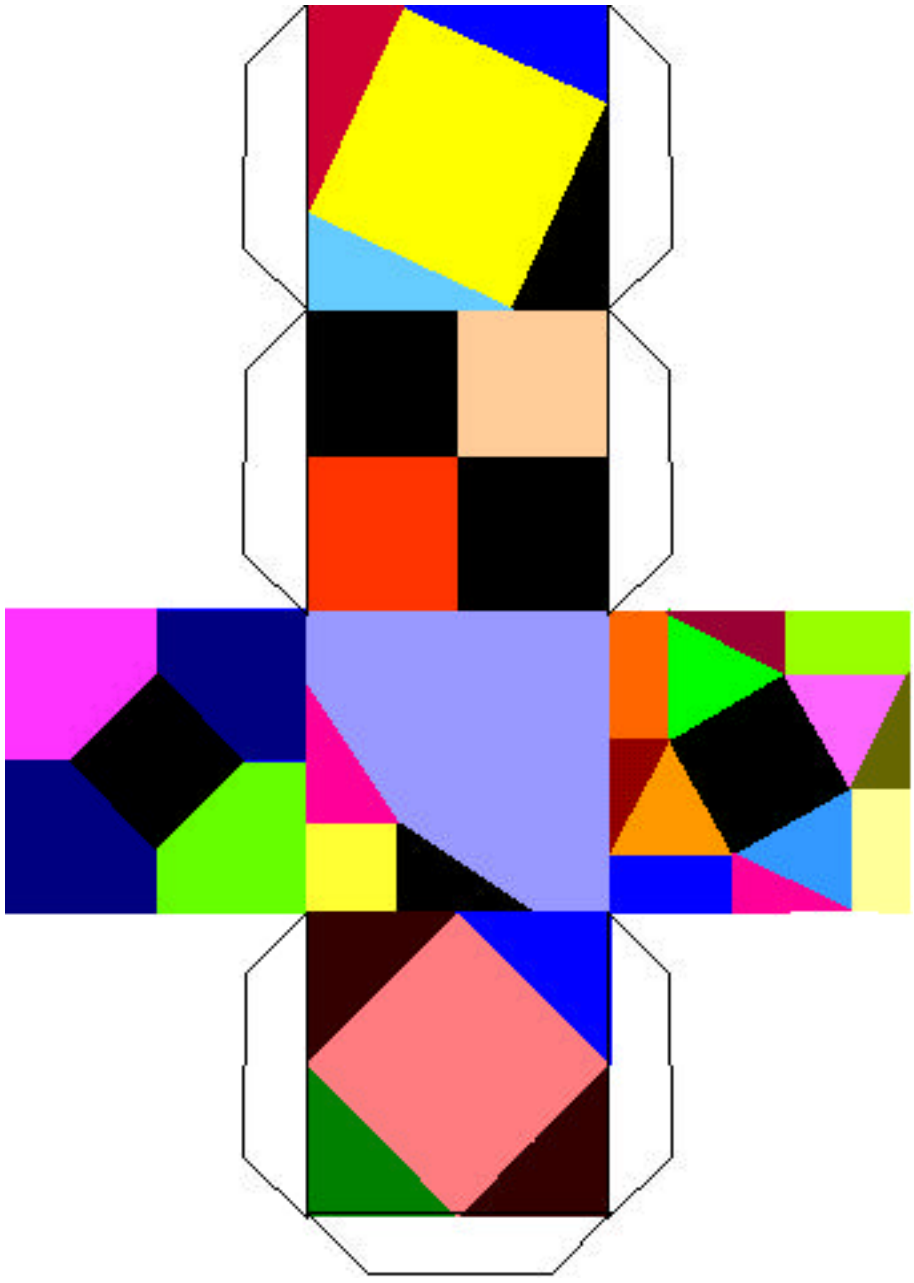


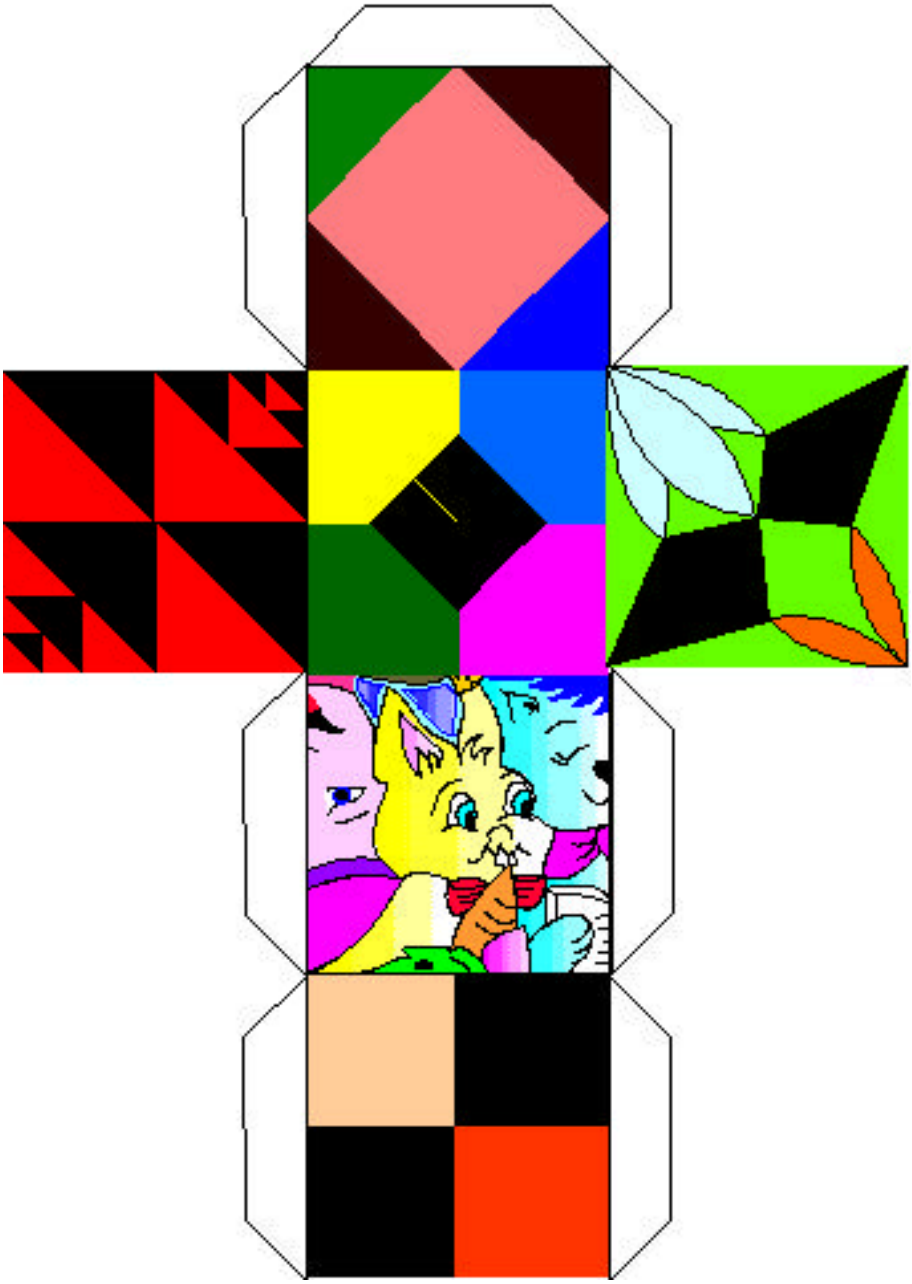


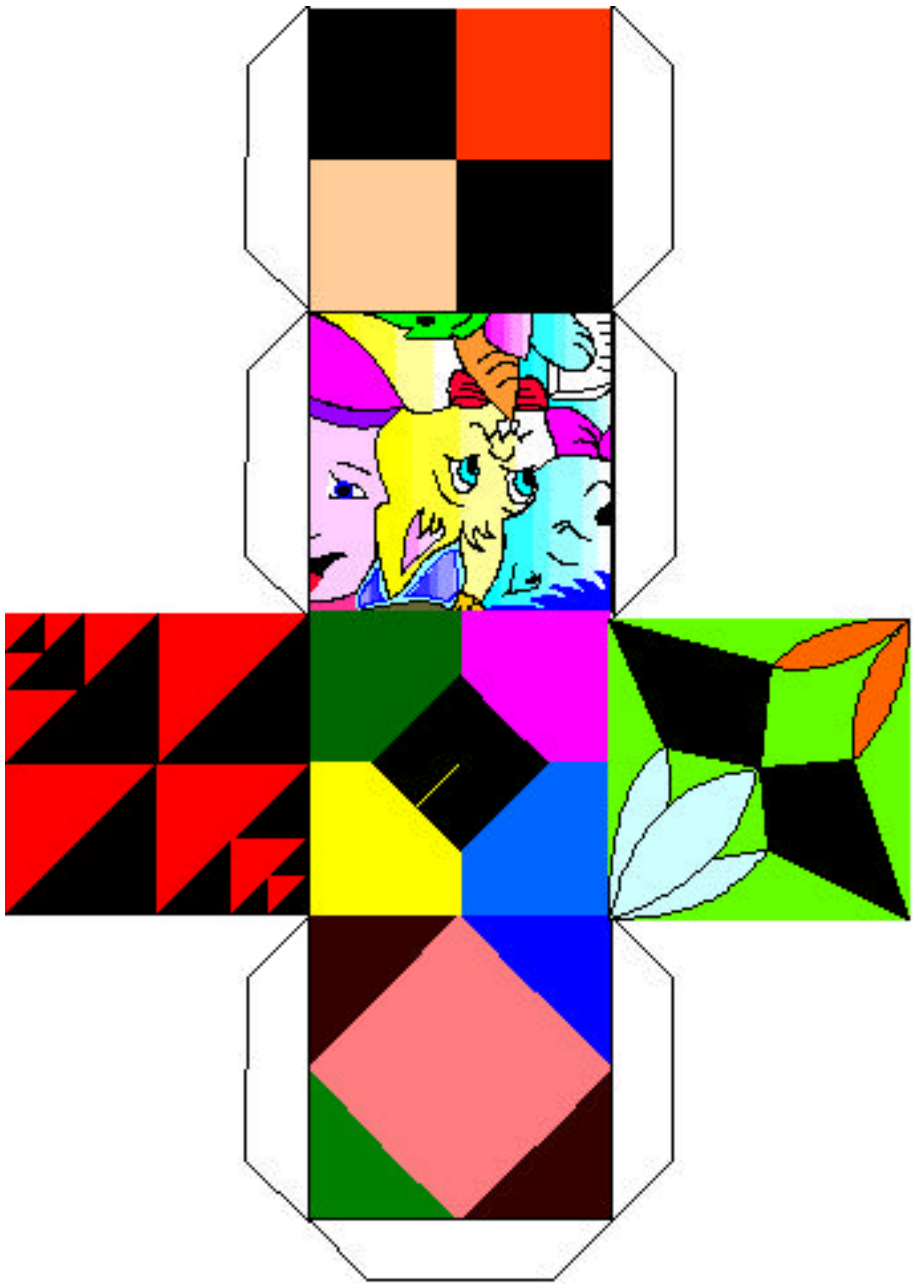


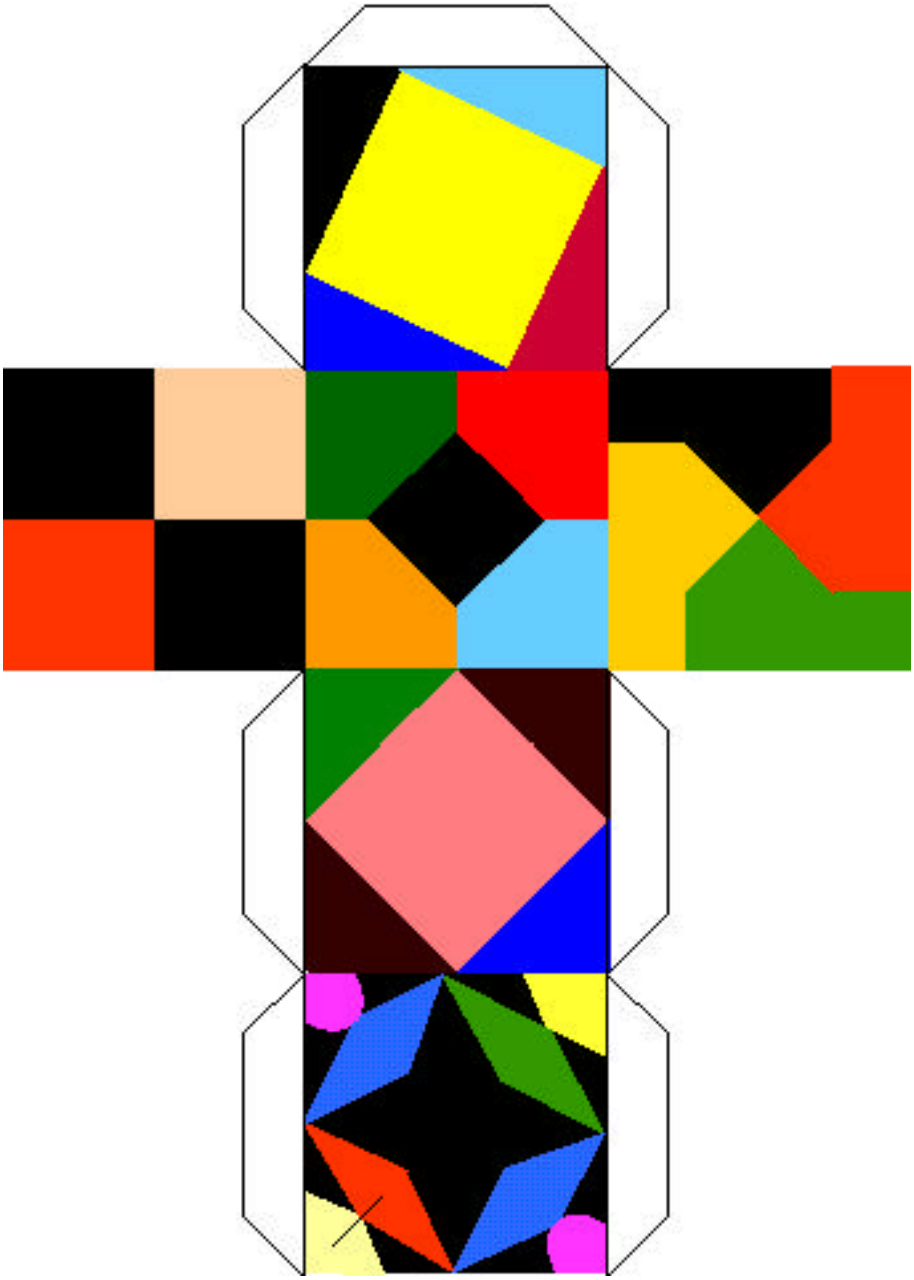


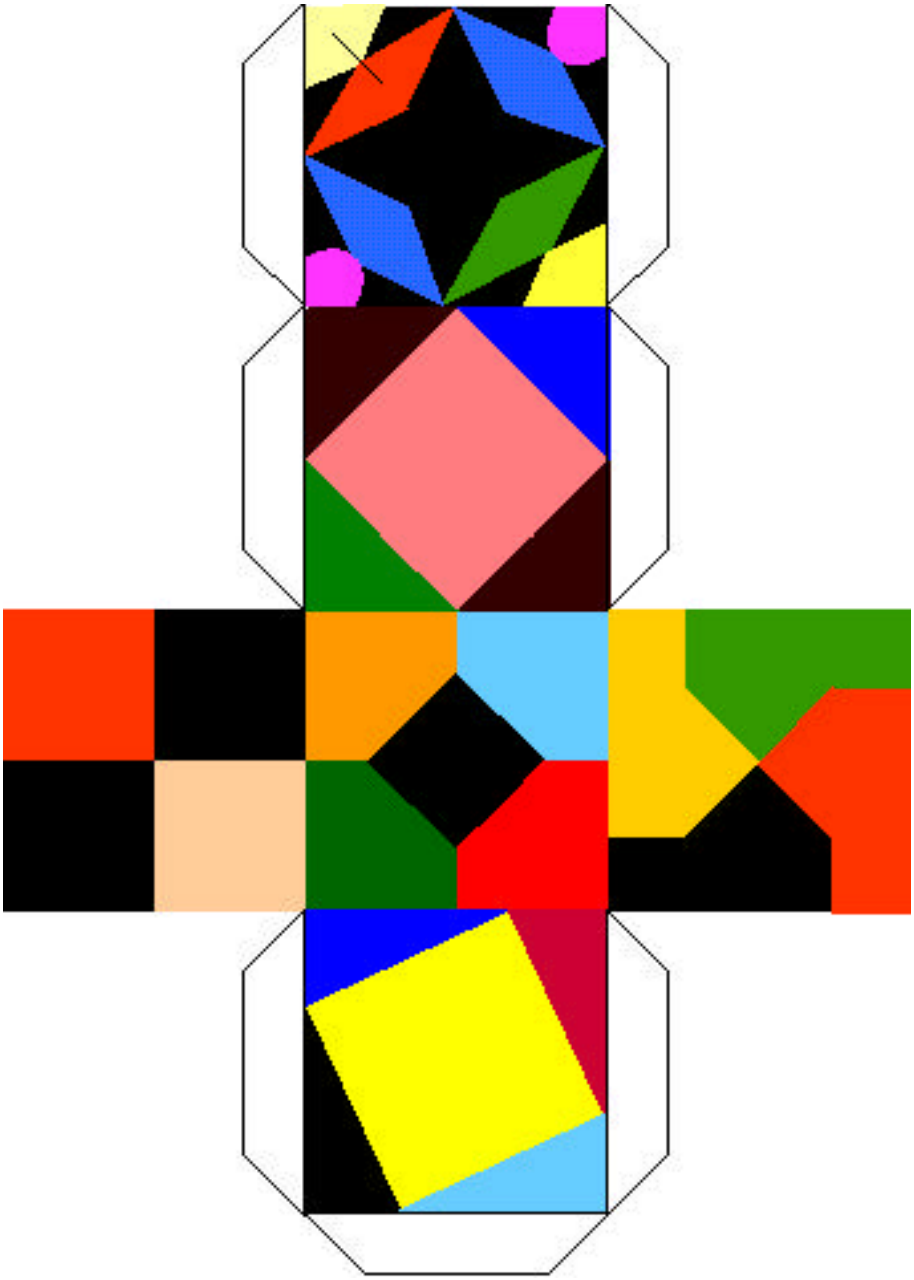


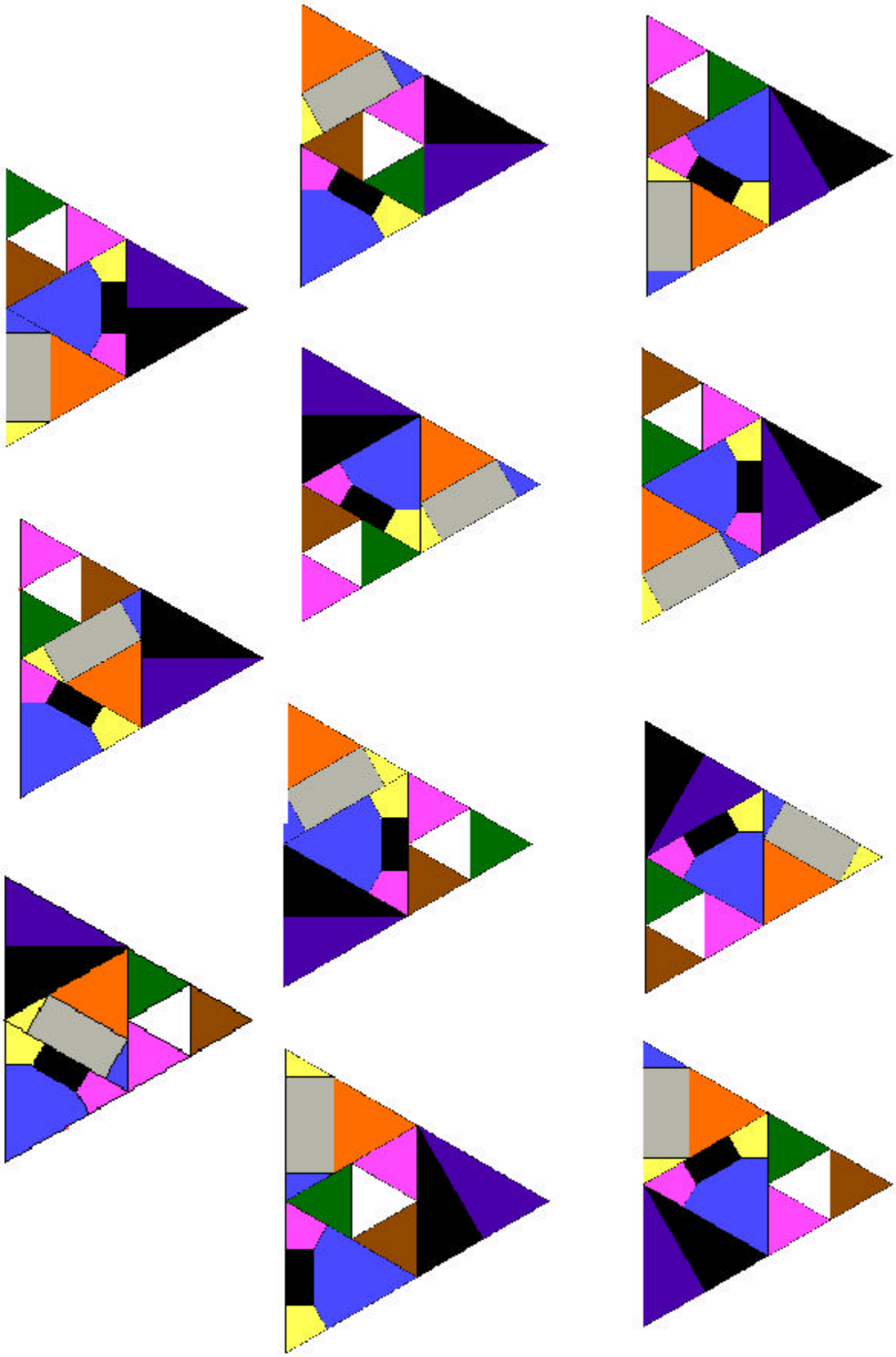


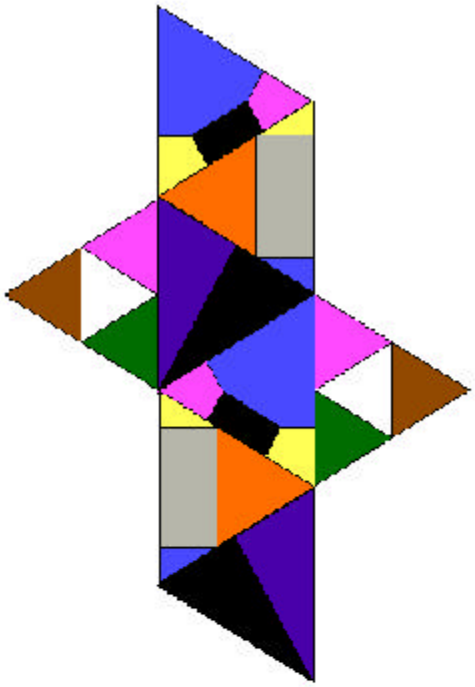


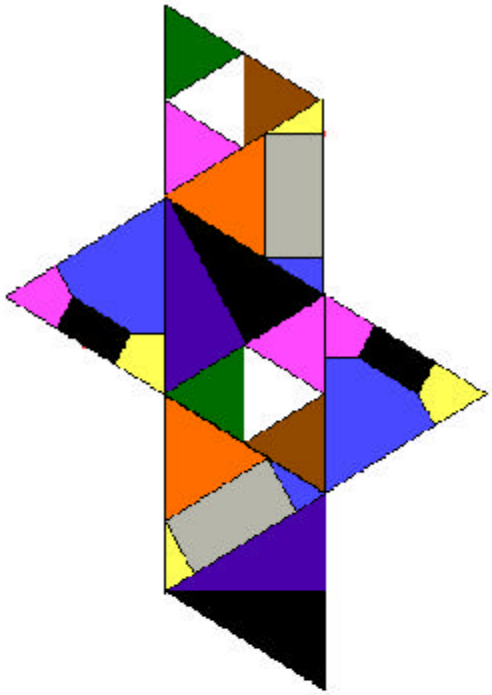


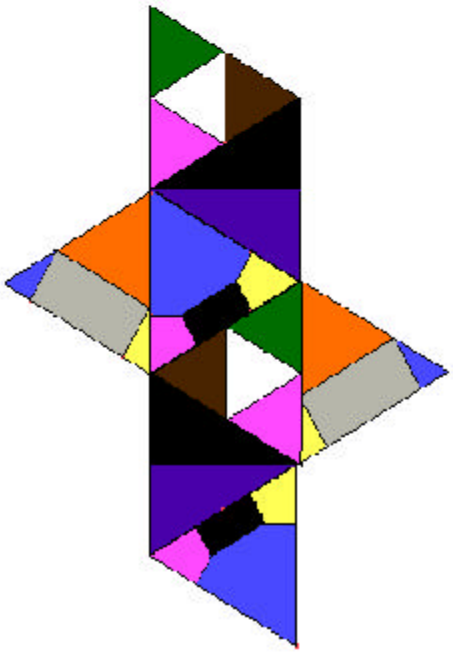


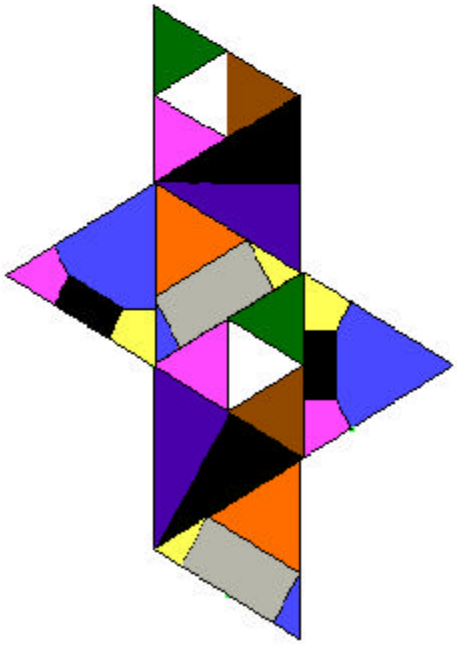


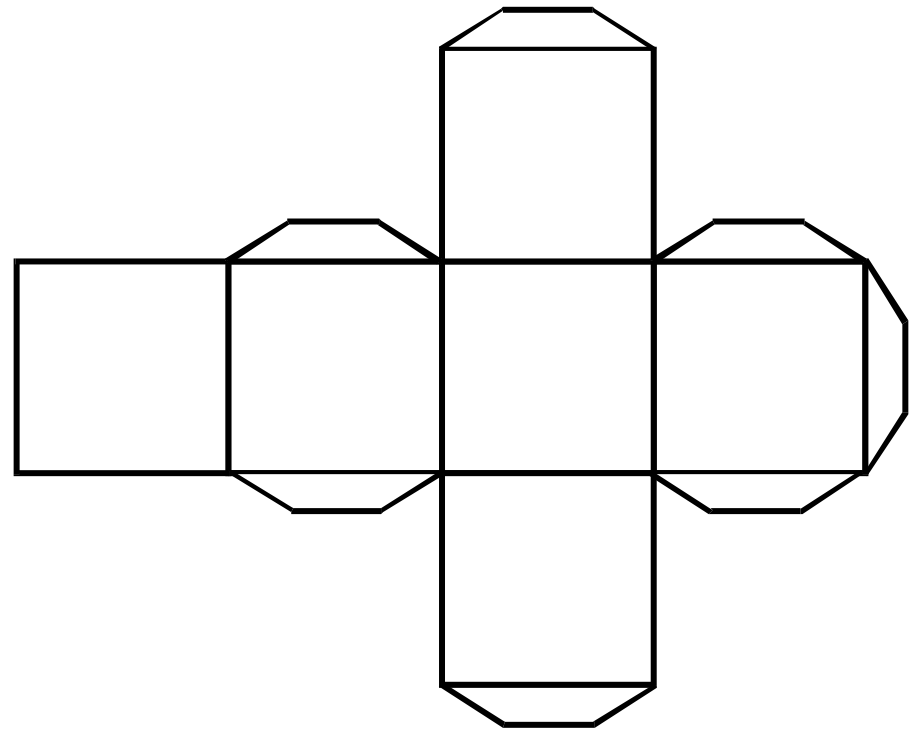


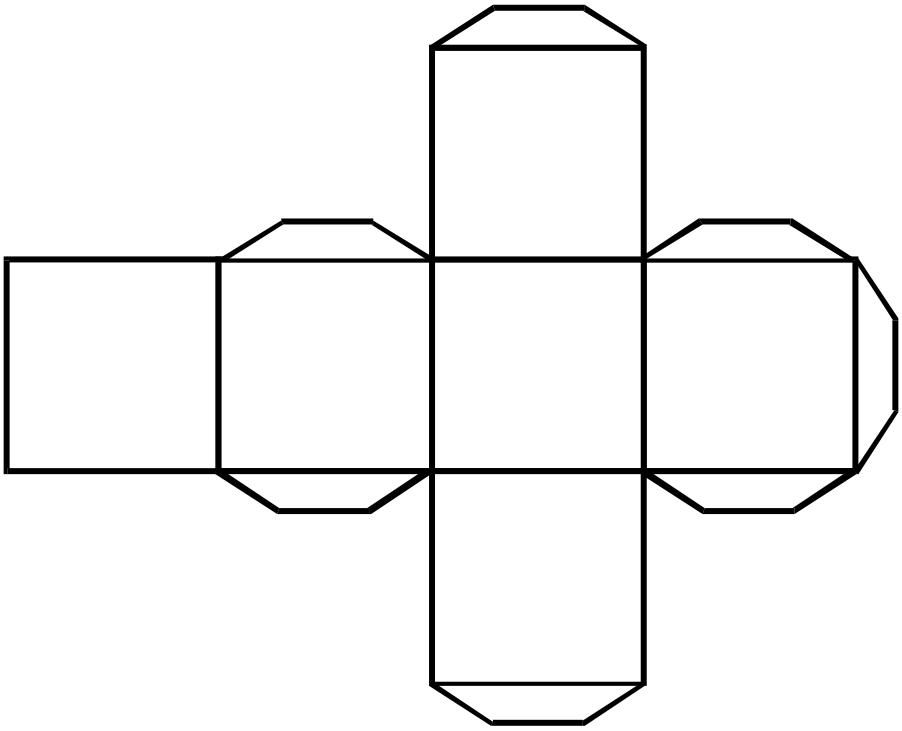


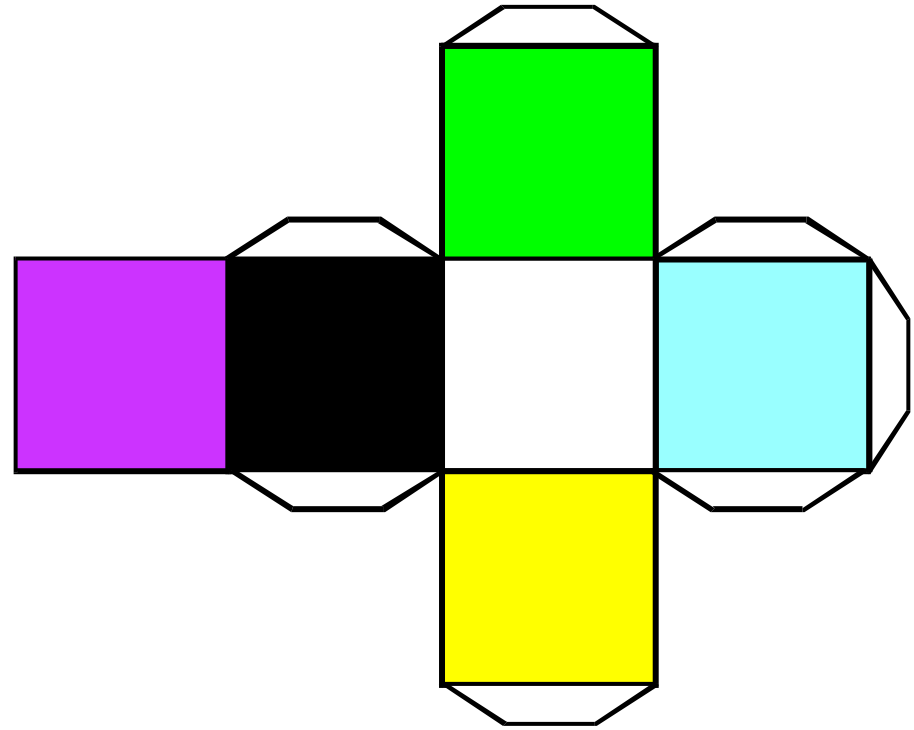


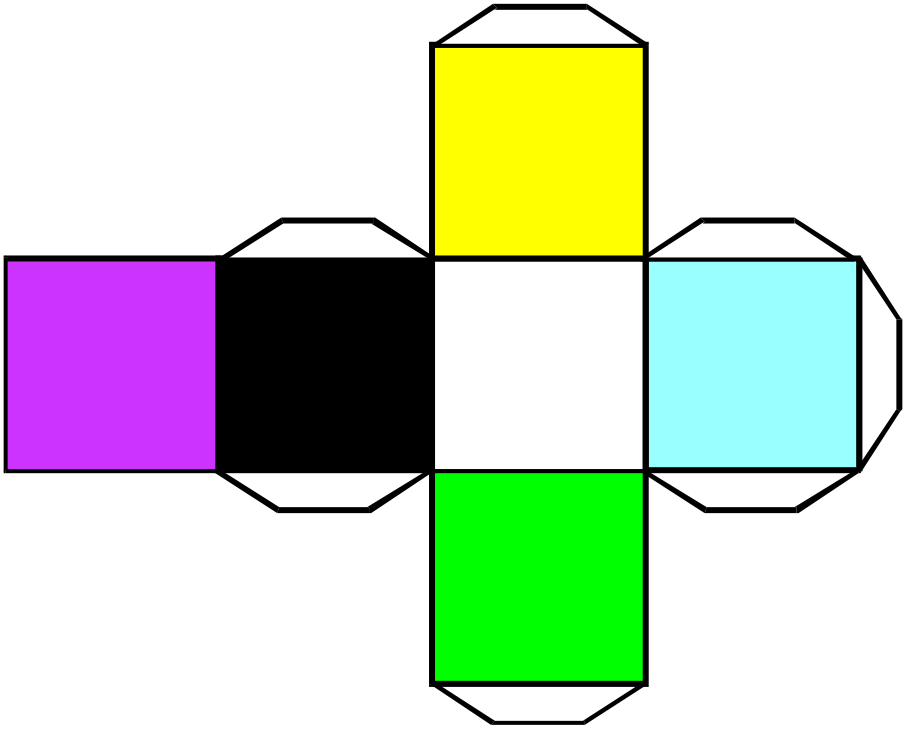


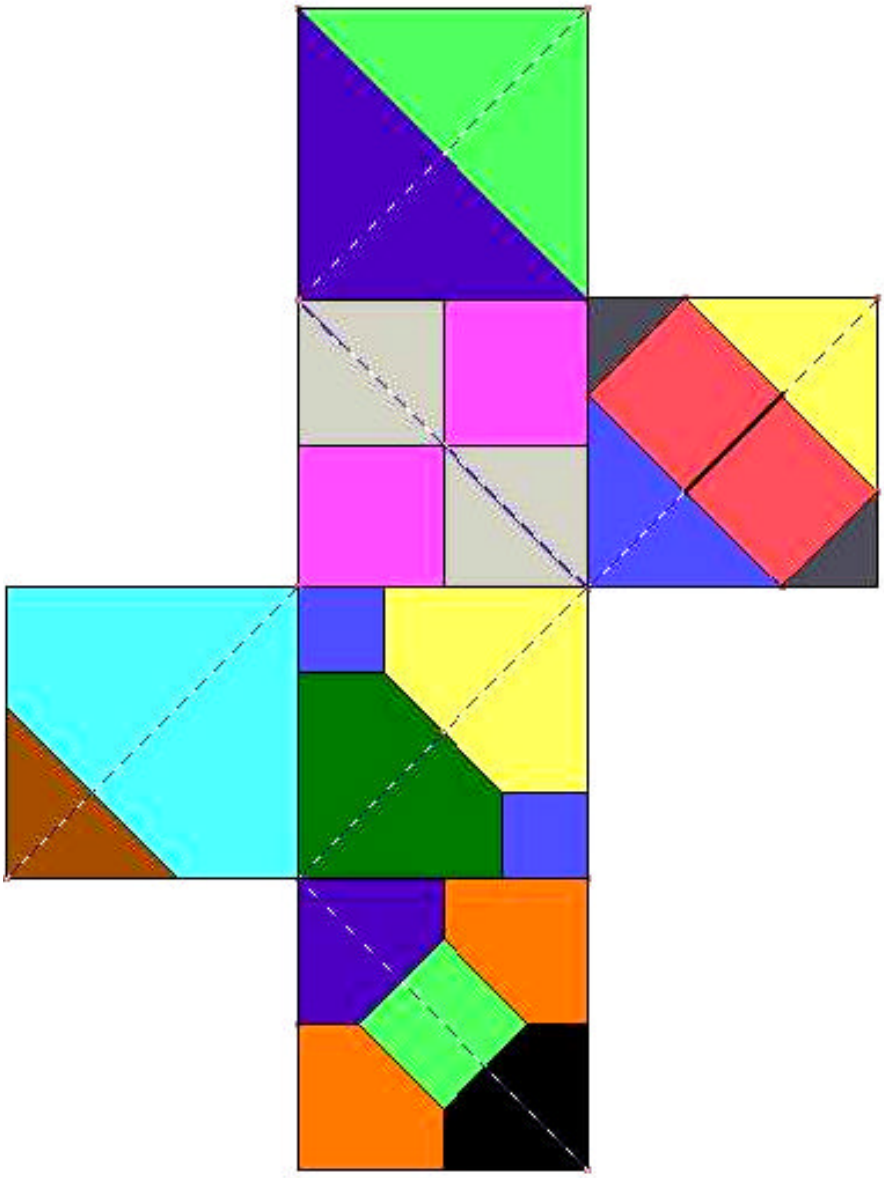


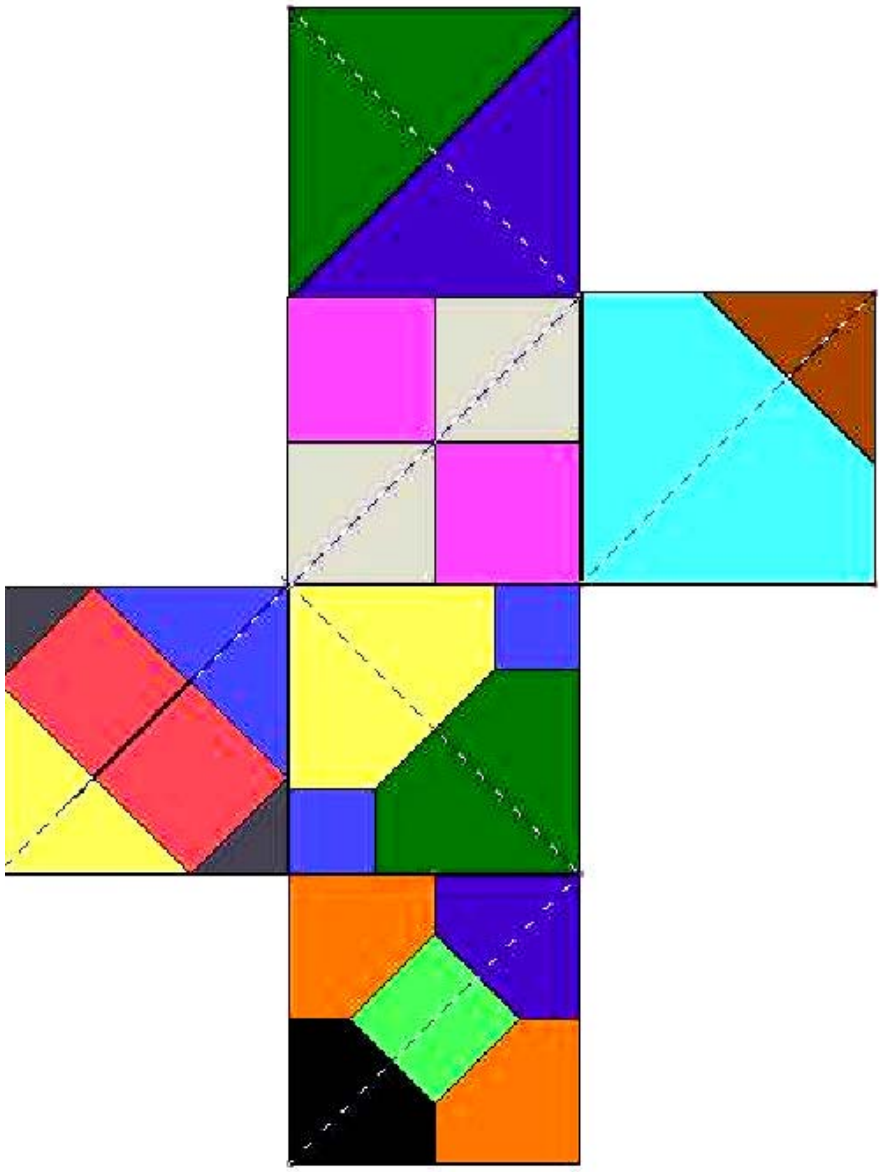


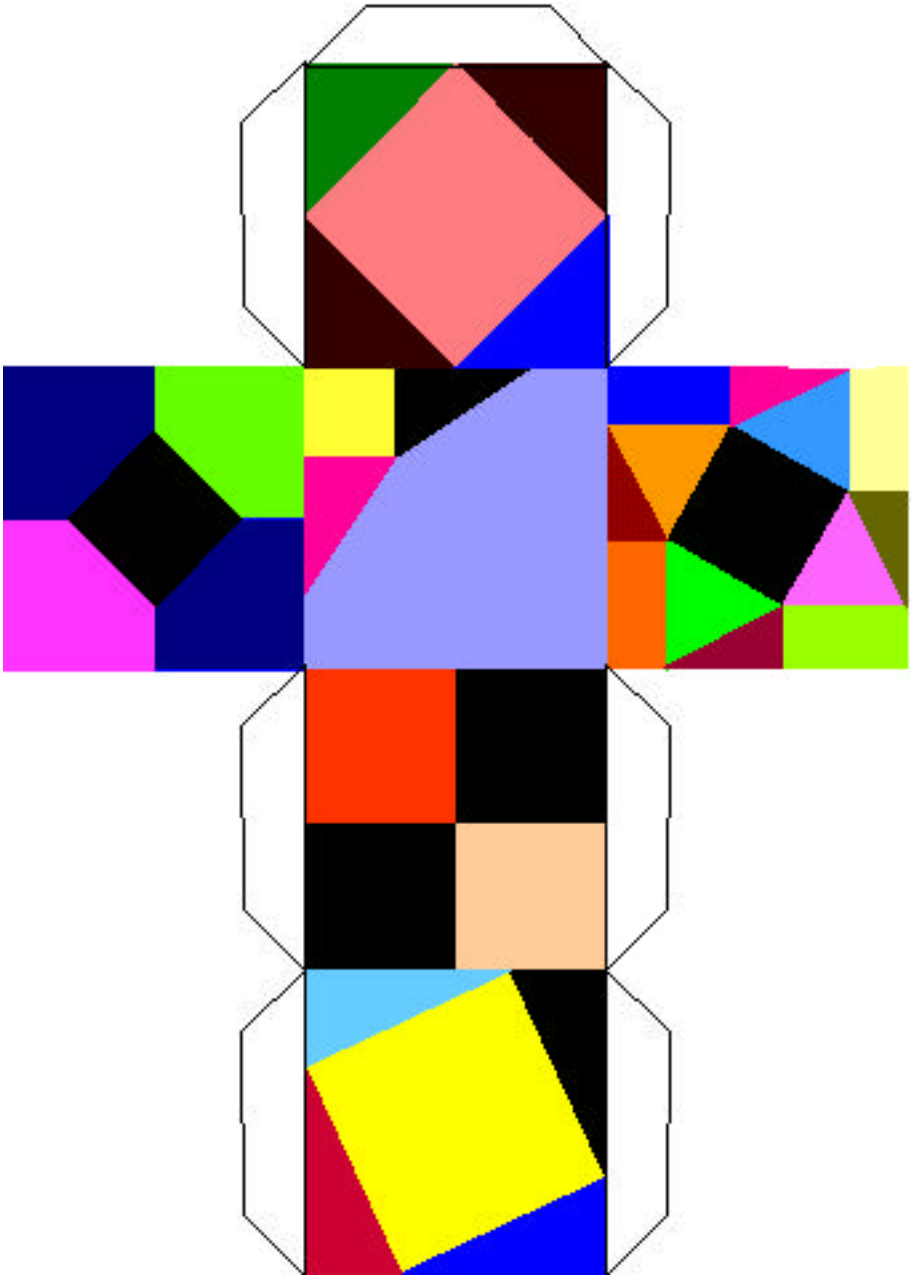


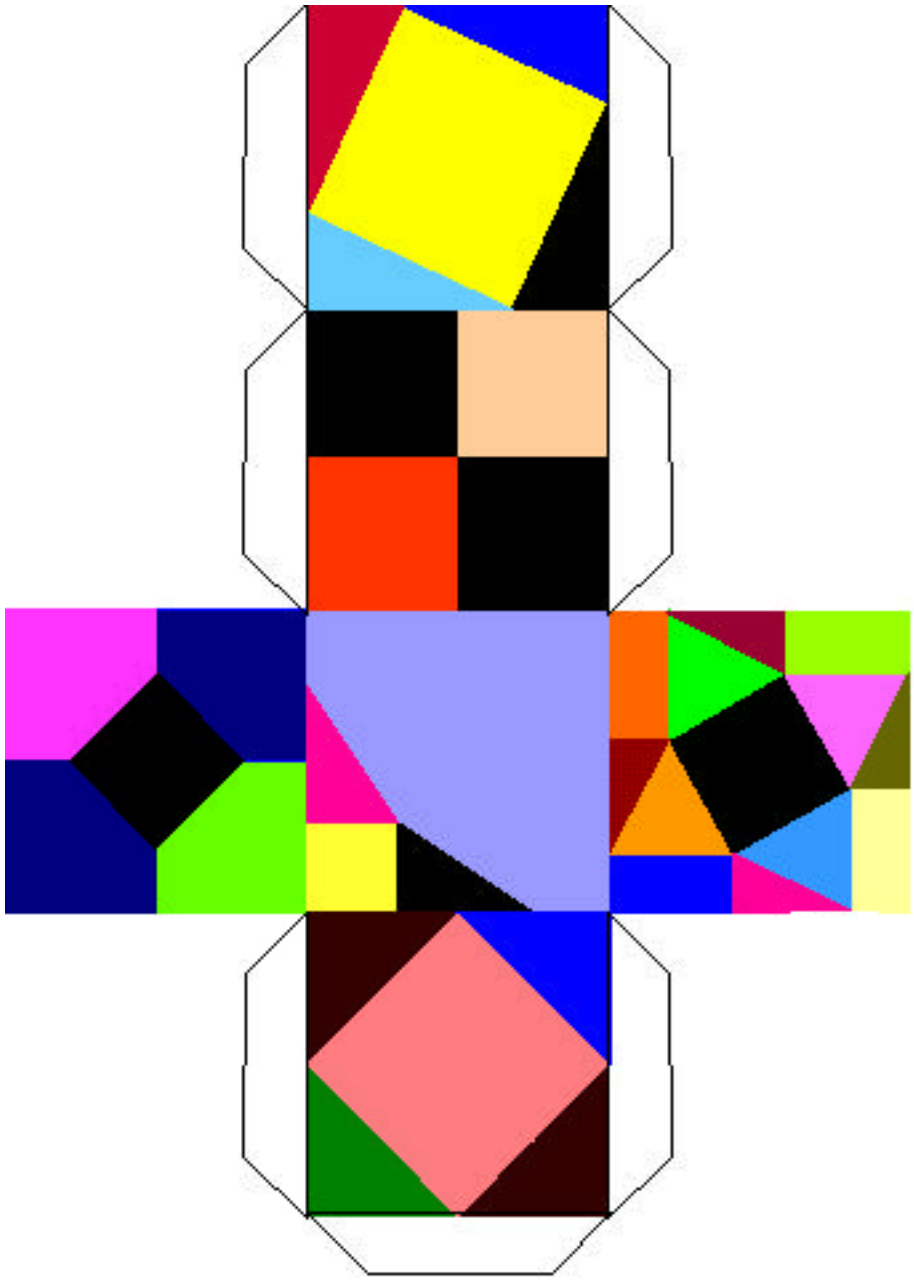


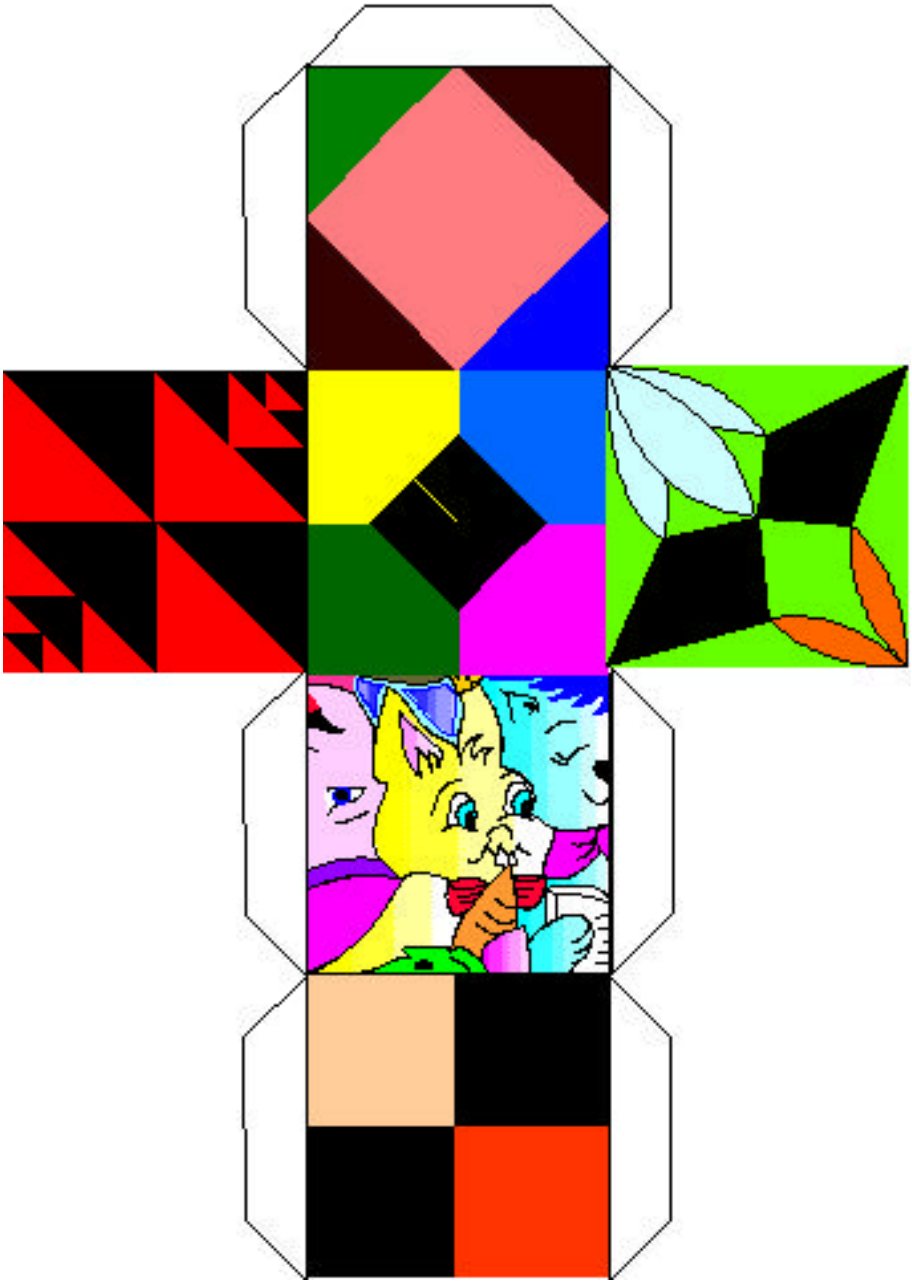


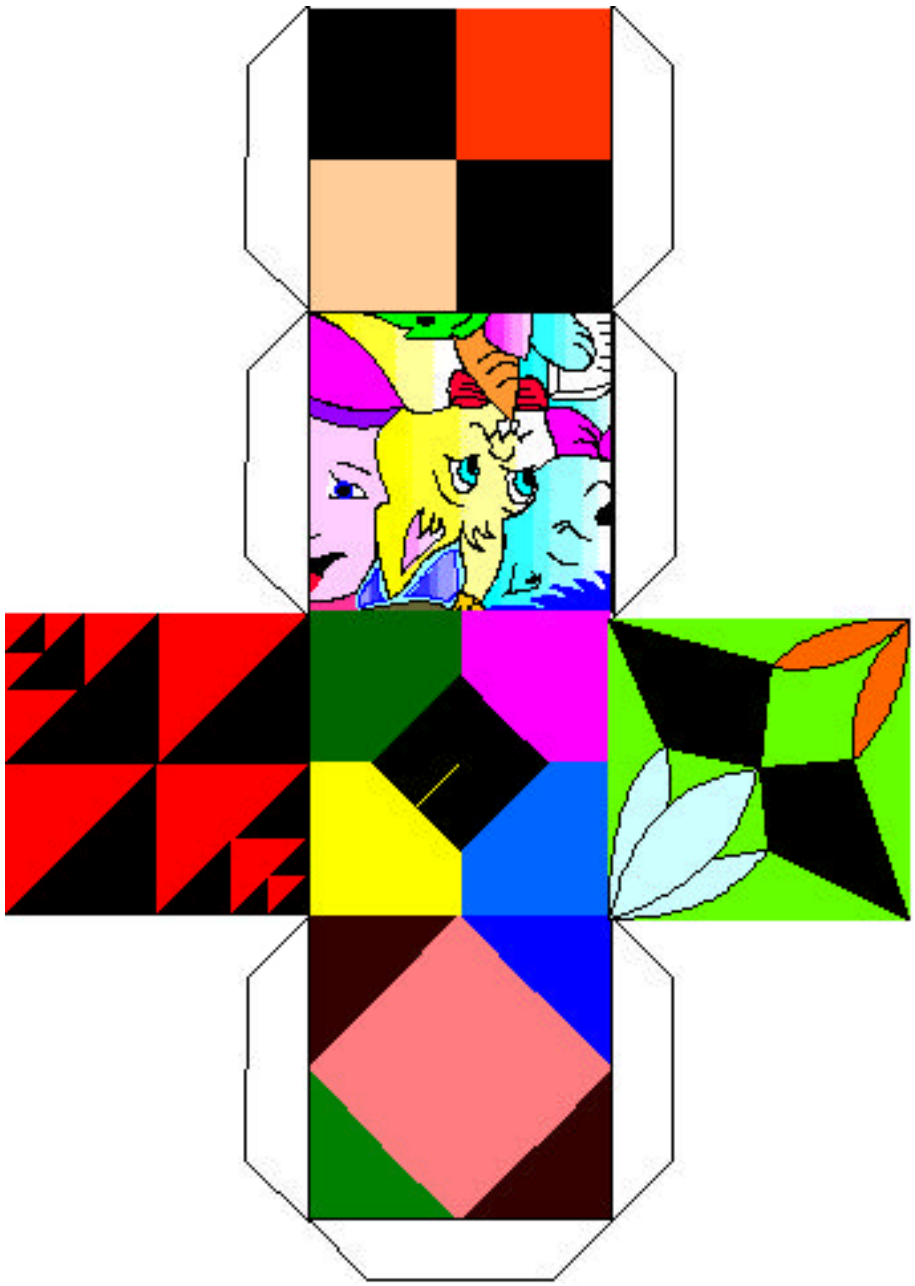


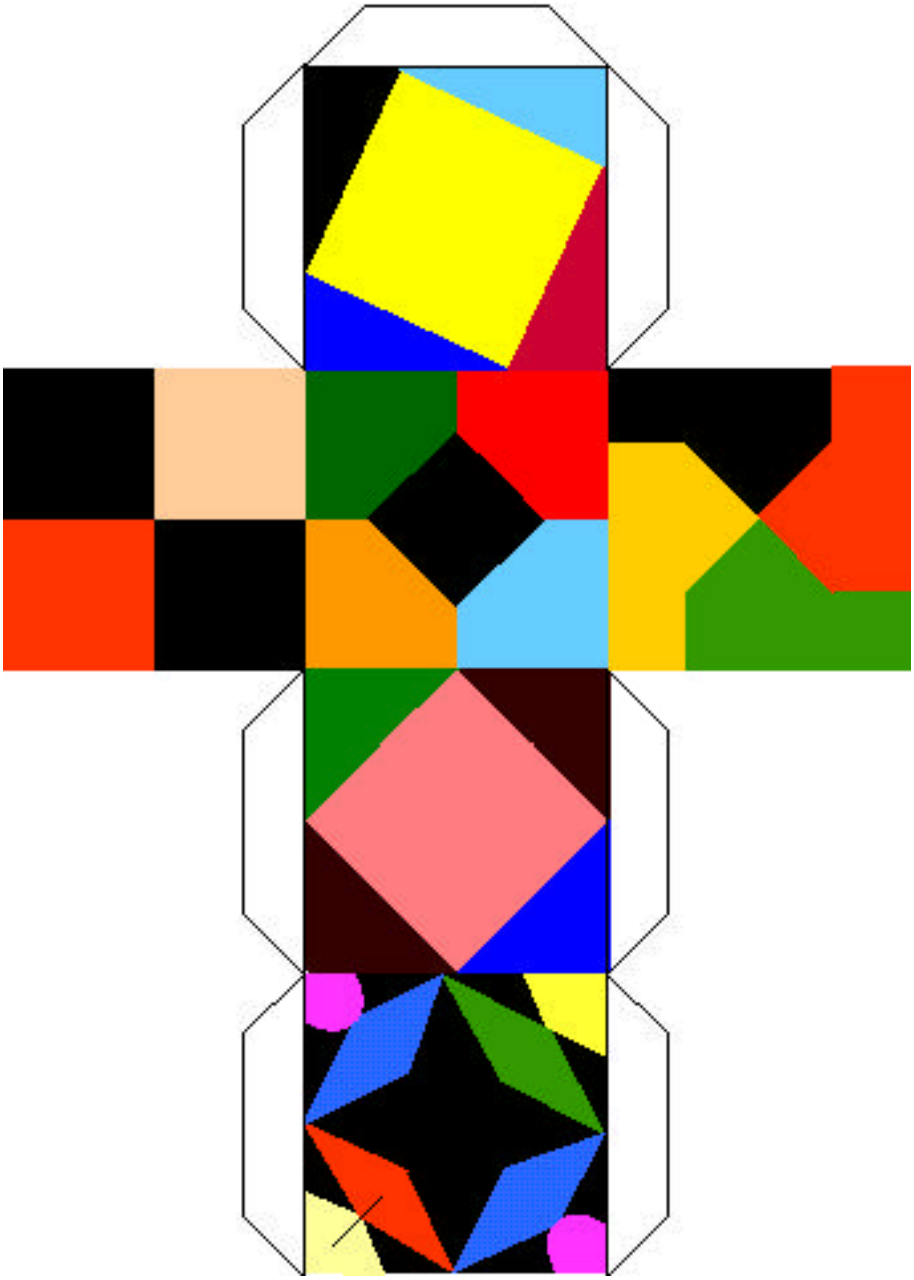


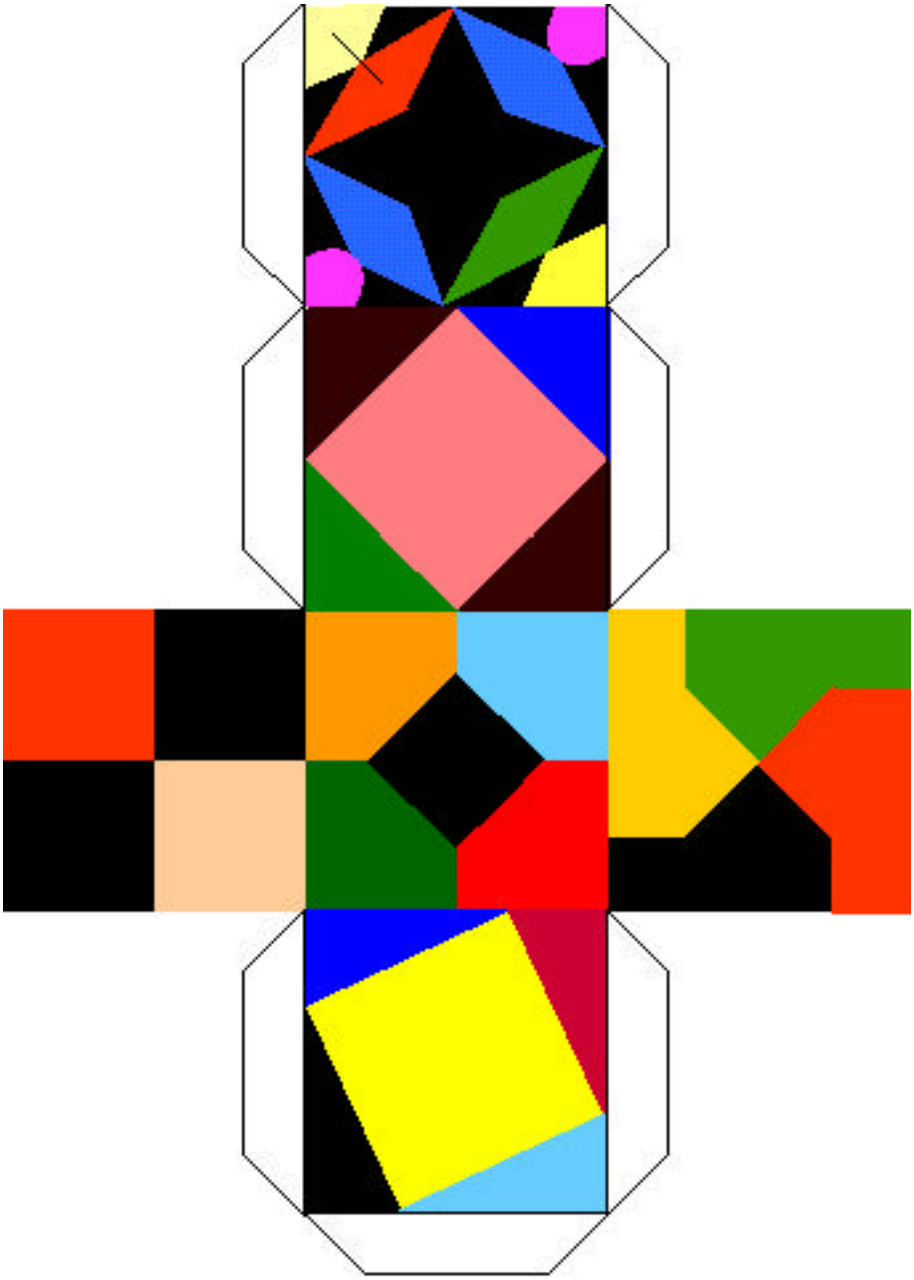


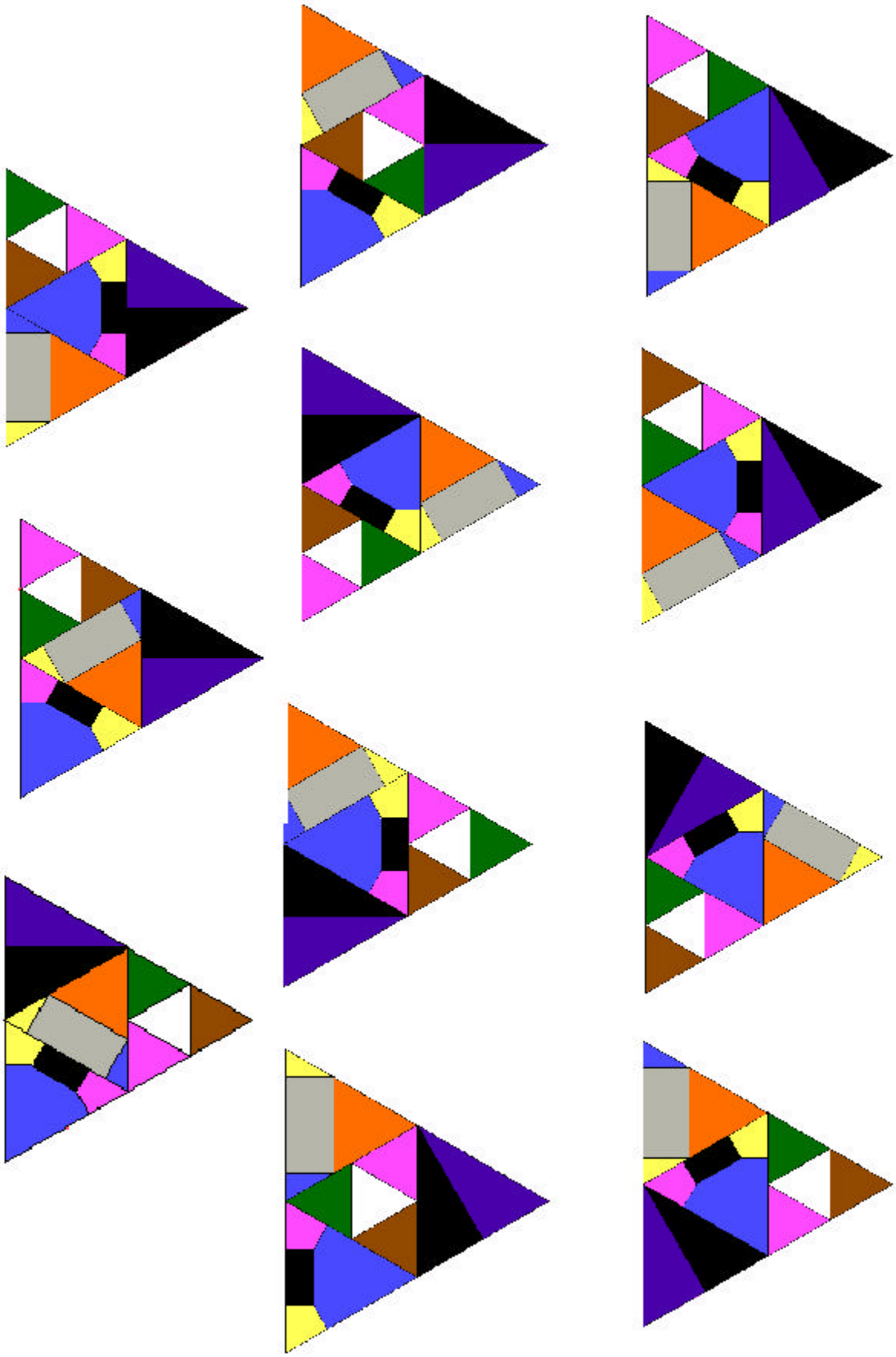


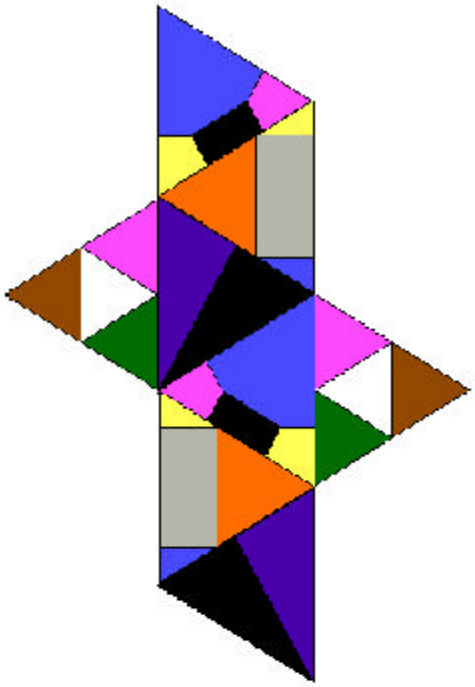


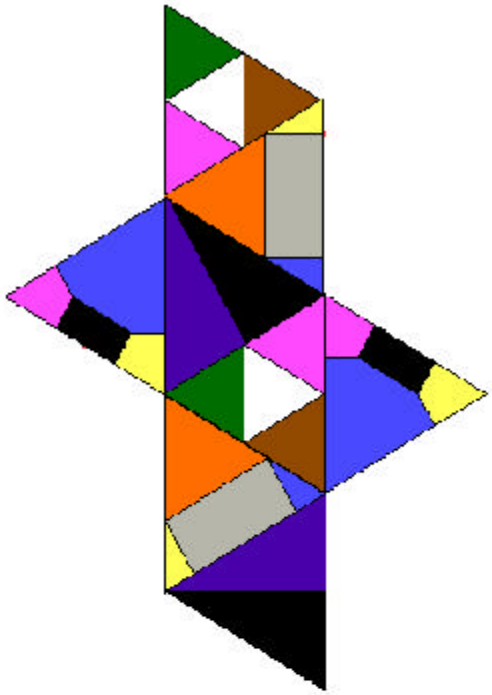


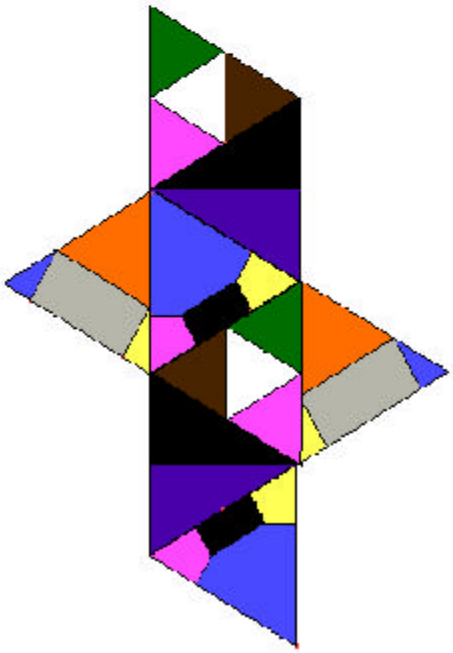


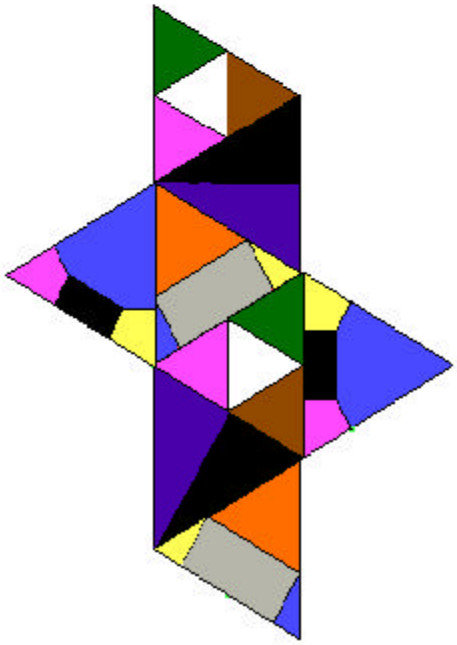












Anexo VI

MANUAL DO KIT MOSAICO-CUBO

POLIEDROS COM PADRÕES EM SUAS FACES

Claudemir Murari
Renata Aparecida Martins

1. APRESENTAÇÃO

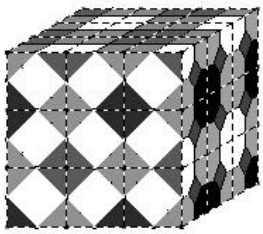


Figura 1

Apresentamos um novo material educativo: o kit Mosaico-cubo. É constituído por 27 cubos, os quais possuem em suas faces padrões diferentes.

O nome Mosaico-cubo (figura 1) originou-se pelo fato de obtermos, com as 27 peças, um cubo único com mosaicos[1] diferentes em todas as suas faces. Para tanto, é necessário o empilhamento correto de cada uma de suas peças.

O kit poderá ser utilizado, indistintamente, por pessoas de todas as idades de maneira lúdica ou em atividades educacionais. Originalmente, nosso propósito principal foi o de fornecer ao professor um recurso pedagógico diferente, de modo que possa trabalhar temas matemáticos pouco abordados, como as *"tesselações do plano e do espaço"*.

Ao ser explorado em sala de aula, proporciona ao aluno desenvolver sua capacidade de visualização, representação gráfica e habilidades de percepção espacial adquirindo, ao mesmo tempo, o conhecimento de alguns conceitos e propriedades geométricas. Pode servir de ponto de partida para uma aprendizagem significativa e eficiente, tendo o aluno como agente na construção do seu próprio conhecimento.

Esse novo instrumento educativo é especialmente indicado como auxiliar no estudo de *simetrias*, *rotações* e *translações* no plano e no espaço. Sua principal característica é possibilitar a interdisciplinaridade, pois nas atividades temos envolvidas as disciplinas Matemática, Ciências, Educação Artística e Desenho Geométrico. Também podem ser desenvolvidas atividades junto com outros materiais, em particular, o *Caleidoscópio* (conjunto de 2, 3 ou 4 espelhos planos).

Para melhor entender e justificar a origem e importância dos padrões utilizados nas faces das peças (cubos), vamos fazer uma breve explanação sobre os *Caleidoscópios*:

2. CALEIDOSCÓPIOS

Caleidoscópio é qualquer conjunto de espelhos planos articulados, perpendiculares a um mesmo plano, que possibilite a repetição perfeita de imagens. Têm-se caleidoscópios de 2, 3 e 4 espelhos. Neles são colocadas figuras, denominadas *bases* ou *padrões caleidoscópicos*, que através da reflexão nos espelhos irão produzir visuais interessantes.

A Figura 2 mostra um caleidoscópio de 3 espelhos (isósceles-retângulo) no interior do qual foi colocado o padrão caleidoscópico que está ao seu lado, que gera o visual de uma pavimentação por quadrados de três cores.

---

[1] Os termos ***Mosaico***, ***Tesselação*** e ***Pavimentação*** são sinônimos. São utilizados quando se pretende preencher o plano ou o espaço com figuras geométricas, sem que haja vazios ou sobreposições. Algumas vezes o termo mosaico é utilizado para designar o preenchimento de uma pequena porção do plano.



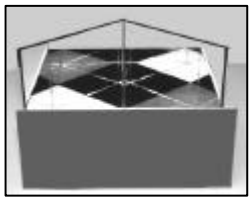
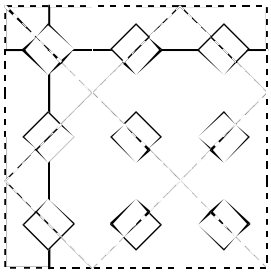


Figura 2

Para melhor entendimento, segue abaixo dois exemplos de porções de tesselações (mosaicos). A Figura 3 constituída por polígonos regulares (quadrados e octógonos) representa uma porção de tesselação do plano, enquanto que na figura 4 temos uma porção de tesselação do espaço obtida através do empilhamento de poliedros regulares (cubos).



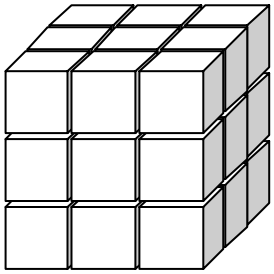


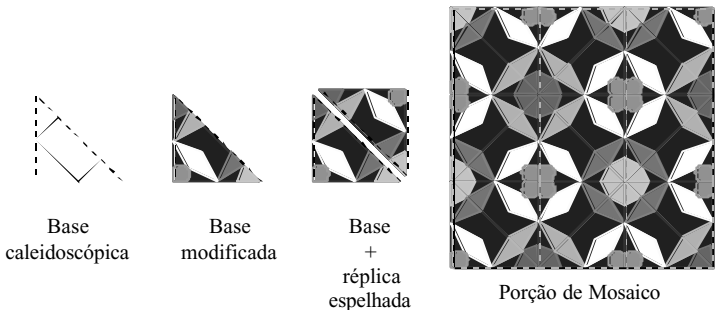
Figura 3 **Figura 4**

3. A FORMAÇÃO DOS PADRÕES

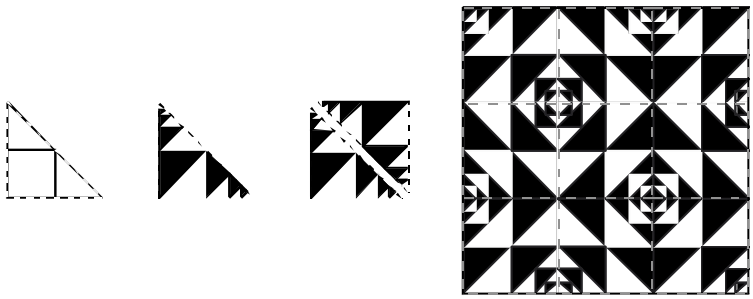
Temos três modelos do kit Mosaico-cubo disponíveis no mercado, cada um com diferentes padrões nas faces dos cubos (peças). A seguir são apresentados os padrões dos três jogos. É importante ressaltar que esses padrões não se originaram aleatoriamente.

As tesselações do plano constituem em geral, por si só, lindos mosaicos. Através de bases (ou padrões caleidoscópicos), colocadas no interior de caleidoscópios (de 2, 3 ou quatro espelhos), muitas pavimentações por polígonos regulares podem ser obtidas. Se efetuarmos alterações (modificações e/ou complementações) adequadas nesses padrões poderemos obter lindos "padrões ornamentais". Observe como é interessante a origem de alguns padrões. Na seqüência apresentaremos primeiro a base caleidoscópica que deu origem ao padrão. Se ela sofreu alguma alteração, mostraremos a base modificada. Para formar uma face do cubo foi necessário a base (original ou modificada) mais sua réplica espelhada. A porção de mosaico mostrada é o resultado do empilhamento de nove cubos, cuja visão seria da face frontal.

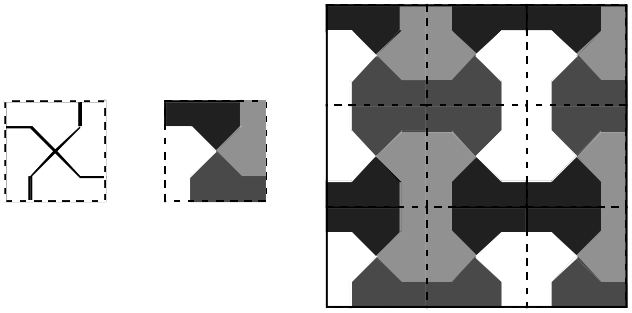
Sala de los Reyes, obtido por Barbosa e Murari, do mosaico encontrado no Palácio de Alhambra, Granada - Espanha. Pode ser visualizado em caleidoscópio de três espelhos.



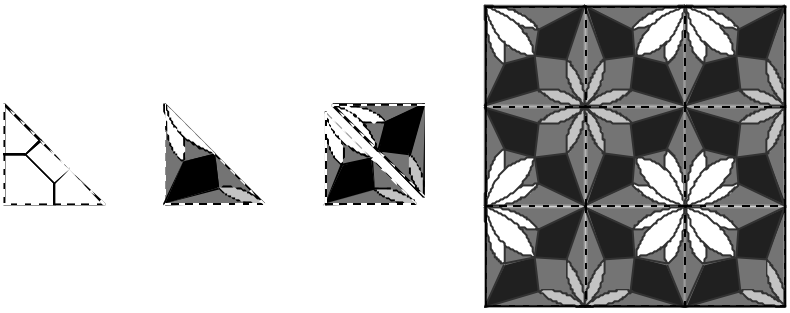
Sucessão de Quadrados Inscritos, obtido por Murari, é visualizado em caleidoscópio de três espelhos. Gera um visual de quadrados inscritos repetidos por todo o plano.



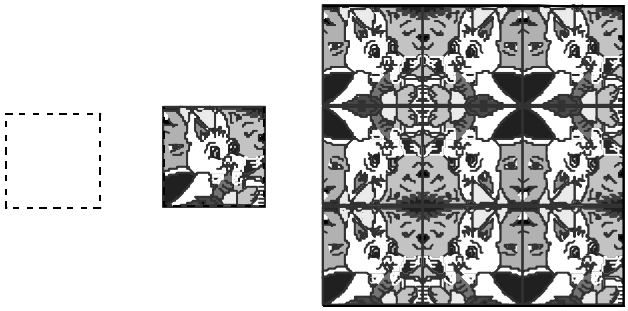
Torre de Comares, obtido por Barbosa e Murari, do mosaico fornecido por Escher do Palácio de Alhambra, Granada – Espanha. Pode ser visualizado em caleidoscópio de quatro espelhos.



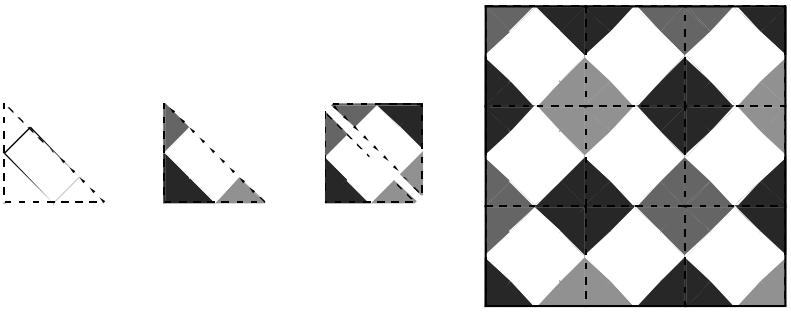
Pétalas e Pontas, obtido por Martins, de modificações de um padrão que gera pavimentação do plano por quadrados e octógonos. É visualizado em caleidoscópio de três espelhos.



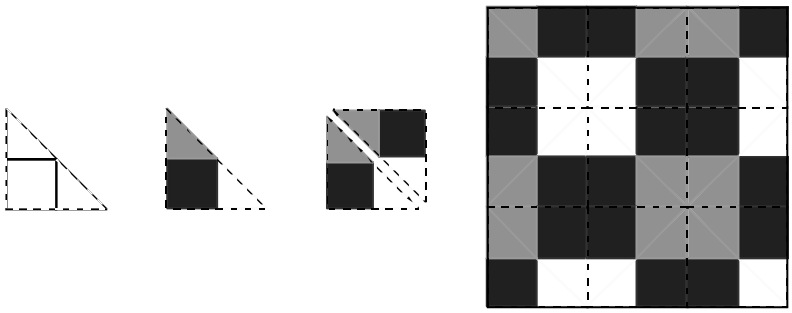
Padrão ***Infantil,*** obtido por Martins e visualizado em caleidoscópio de quatro espelhos.



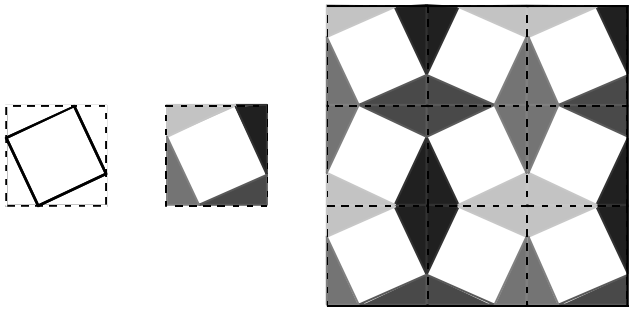
Padrão obtido por Murari que gera pavimentação do plano por quadrados, com quatro cores diferentes quando visualizado em caleidoscópio de três espelhos.



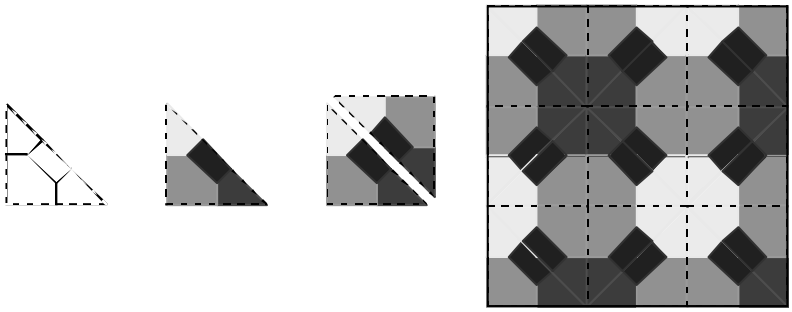
Padrão obtido por Murari que, visualizado em caleidoscópio de três espelhos, produz uma pavimentação por quadrados com três cores. Observe que os quadrados obtidos são de dimensões maiores que os do padrão anterior.



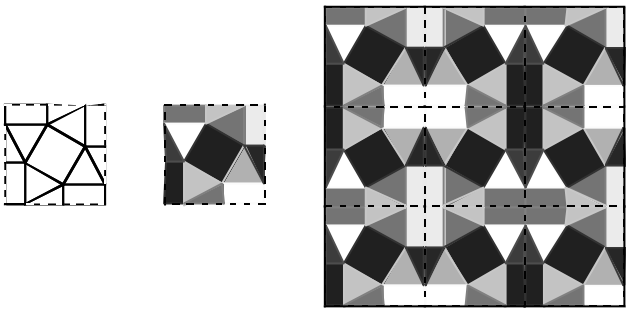
Padrão obtido por Murari que, visualizado em caleidoscópios de quatro espelhos, gera uma pavimentação do plano por quadrados e triângulos.



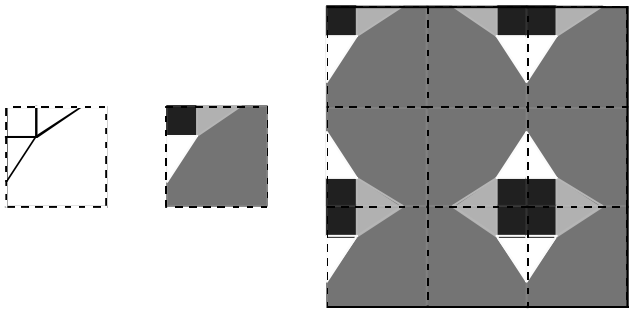
Padrão obtido por Murari que produz uma pavimentação do plano por quadrados e octógonos quando visualizado em caleidoscópio de três espelhos.



Padrão obtido por Martins, que visualizado em caleidoscópio de quatro espelhos, produz uma pavimentação por triângulos e quadrados.



Padrão obtido por Martins que gera uma pavimentação por triângulos, quadrados e dodecágonos quando colocado em caleidoscópio de quatro espelhos.



4. ATIVIDADES EDUCACIONAIS COM O KIT MOSAICOCUBO

ATIVIDADE 1

Você seria capaz de montar corretamente o Mosaico-cubo?

Aqui vai uma dica:

1) Comece com 3 peças, como sugerido na figura 5.

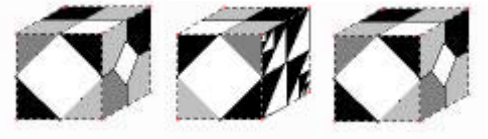


Figura 5

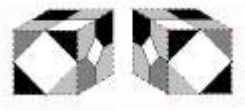


Figura 6

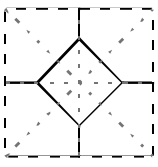
2) Juntar os três cubos de modo que todas as faces, inclusive as laterais que se encostam (fig. 5 e fig. 6) comecem a formar porções de mosaicos.

3) Se você conseguiu montar as três primeiras peças conforme foi explicado, obedecendo as mesmas regras, poderá colocar mais três cubos sobre aqueles já formados.

4) Coloque mais três peças sobre as seis já montadas, seguindo as orientações anteriores. Assim já terá obtido nove cubos montados corretamente. Prossiga dessa maneira com os dezoito restantes que você obterá seu Mosaico-cubo.

ATIVIDADE 2

Você sabia que o *eixo de simetria* de uma figura a divide em duas partes iguais?



Observe a figura ao lado, que é uma face dos cubos que você possui. Considere o eixo de simetria como se fosse uma linha imaginária dividindo o padrão em duas partes iguais. Essa linha está representada pelo segmento de reta pontilhado que corta a figura. Mas, examinando cuidadosamente poderemos encontrar mais que um eixo de simetria numa figura. No exemplo mostrado, encontramos quatro linhas de simetria. Agora, faça o que se pede:

1) Examine cada uma das faces de um cubo para descobrir a quantidade de linhas de simetria de cada figura. Não se surpreenda se não encontrar nenhuma, pois podemos ter figuras sem essa linha!
2) Empilhe corretamente 8 cubos (formando um novo cubo) e descubra as linhas de simetria das laterais.
3) Repita a atividade (considerando ou não as cores) empilhando nove e depois vinte e sete cubos.

ATIVIDADE 3

Consiste em realizar um jogo onde deverão ser ajustados os cubos de modo a formar o Mosaico-cubo. Para tanto, podem ser seguidas algumas regras:

- Colocar uma peça qualquer no centro da mesa para iniciar o jogo
- Distribuir 6 peças para cada jogador (no máximo quatro pessoas)
- As peças restantes devem ser colocadas a uma certa distância dos jogadores
- Quem na sua vez não tiver peça para colocar deverá pegá-la ***"sem olhar"*** no "monte" de peças não distribuídas. Se ao pegar a nova peça não encontrar colocação para ela, deverá passar a vez para o próximo jogador. Assim deverá ser feito até que alguém tenha peça para colocar.
- Ganhará o jogo quem acabar primeiro as peças.

ATIVIDADE 4

O seu Mosaico-cubo é grande auxiliar no estudo de "isometrias do plano". Para recordar, são: a *Reflexão*, a *Rotação* e a *Translação* e combinações.

Juntar corretamente 3 cubos, sem empilhar, um ao lado do outro, de modo que em cada lateral tenha uma porção de mosaico.

Reflexão: Apenas com essa justaposição você já pode entender o que é Reflexão. Observe que a figura de uma face do cubo comparada com a do outro ao seu lado é igual, mas invertida. Seria como se tivéssemos um espelho entre elas refletindo a figura e funcionando esse espelho como um eixo de simetria. Por isso dizemos que uma figura é simétrica à outra.

Rotação: Provocar um movimento de Rotação, com a finalidade de obter novos mosaicos com os 3 cubos. Tente descobrir como encontrar o resultado:

1) Gire 2 cubos, num mesmo sentido, num ângulo de 90^o .

2) Gire o outro em sentido contrário também num ângulo de 90^o.

3) Se você encontrou a solução deste problema, deverá ter observado que os sentidos dos cubos se alternam em direções contrárias. Então, empilhe primeiramente 9 cubos e depois todos os 27 e tente rotacioná-los obtendo sempre porções de mosaicos em suas laterais.

Dica importante: Sempre que girar uma peça deverá ajustá-la à que estiver ao seu lado para poder obter o mosaico e quando girar a peça não poderá tirá-la do plano.

Translação: Junte 3 cubos corretamente sem empilhar, obtendo porções de mosaicos em todas as laterais. Como a translação significa como que um deslizamento do objeto sobre uma reta imaginária, observe que a primeira e a terceira peça são iguais. Então dizemos que houve uma translação da figura considerada na primeira peça. Você seria capaz de responder que isometria encontramos na figura que fica entre as transladadas?

Da mesma forma, se juntarmos 9 ou 27 cubos encontraremos também essas isometrias (translação e reflexão) tanto nas fileiras quanto nas colunas.

CONCLUSÃO

Naturalmente que as atividades sugeridas não encerram todas as possibilidades de exploração desse material educativo. É só dar asas à imaginação que muito poderá ser aprendido com ele. Lembramos, especialmente aos educadores, que as propriedades dos polígonos e poliedros existentes nos jogos podem ser estudadas.

O fato de em algumas porções de mosaicos encontrarmos polígonos regulares justapostos, sem lacunas ou sobreposições, conduz ao estudo de ângulos internos desses polígonos. Analogamente, na justaposição dos poliedros (cubos) que tesselam o espaço aproveitamos a oportunidade para estudar os ângulos diedros.

Além disso, na bibliografia que se segue encontramos o estudo de outras tesselações planas e espaciais à qual o leitor interessado poderá recorrer e, assim, utilizar o Mosaico-cubo com maior propriedade e descobrir outras aplicações.

Agradecimento: Queremos ressaltar as valiosas sugestões e contribuições pedagógicas advindas dos Profs. Dr. Ruy Madsen Barbosa e Dr. Geraldo Perez que muito auxiliaram na execução desse trabalho.

Os autores:
- Prof. Dr. Claudemir Murari
Licenciado em Matemática UNESP/ Rio Claro - SP,
Mestre em Matemática/USP/São Carlos - SP,
Doutor em Educação Matemática/UNESP/Rio Claro - SP,
Professor Assistente do Departamento de Matemática e Docente Colaborador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, IGCE/UNESP/Rio Claro – SP.

- Renata Aparecida Martins
Licenciada em Matemática UNESP/Rio Claro - SP,
Mestranda em Educação Matemática/UNESP/Rio Claro – SP,
Professora da Organização Einstein de Ensino - Limeira - SP

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

- ALMEIDA, S. T. e MARTINS, R. A., **Pavimentaąão do plano de configuraąão (3, 3, 4,3,4; 3,4,6,4) no caleidoscópio equilátero**, Boletim de Iniciação Científica em Matemática – BicMat – Departamento de Matemática-IGCE-UNESP/Rio Claro, vol.II, set.2000.
- BARBOSA, R.M. **Descobrindo padrões em mosaicos.** São Paulo: Atual editora,1993 .
- BARBOSA, R.M., e MURARI.C. Aprendendo construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos**. Revista de Educaąão Matemática, SBEM-SP**, Ano 6, n.º 4, p.57-66, jul/98.
- _____. Mosaicos Ornamentais em caleidoscópios eqüiláteros e isósceles. In: **IV EPEM/SBEM**, 1996, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Atual, 1996. p.187-192.
- DAFFER, P.G.O' and CLEMENS, R.S., **Geometry: An investigative Approach,** California: Addison-Wesley, 1977.
- IMENES, L. M., LELLIS, M., **Matemática 7ª série**, São Paulo, Scipione, 1998.
- MURARI, C., **Ensino Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries , via caleidoscópios**. Vol.I e II. Tese (Doutorado), IGCE, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.
- MURARI, C. e PEREZ, G., **A Geometria na ótica do caleidoscópio**, Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, Ano 6, nº 5, dez/99, p.43-50.
- MURARI, C., PEREZ, G. e BARBOSA, R. M. **Caleidoscopios educacionales: coloraciones múltiples**, Revista Uno, nº 27, abr/2001, p.7-20.