UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE PRESIDENTE PRUDENTE
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
Programa de Pós-Graduação em Educação

RENATA VIVIANE RAFFA RODRIGUES

A CONSTRUÇÃO E UTILIZAÇÃO DE UM OBJETO DE APRENDIZAGEM ATRAVÉS DA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA NA FORMAÇÃO DO CONCEITO NÚMEROS INTEIROS

Presidente Prudente – SP
2009

RENATA VIVIANE RAFFA RODRIGUES

A CONSTRUÇÃO E UTILIZAÇÃO DE UM OBJETO DE APRENDIZAGEM ATRAVÉS DA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA NA FORMAÇÃO DO CONCEITO NÚMEROS INTEIROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP/ Campus de Presidente Prudente, na linha de Tecnologias de Informação e Comunicação e Educação, como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Klaus Schlünzen Junior

Presidente Prudente
Setembro de 2009

Rodrigues, Renata Viviane Raffa.
R616c A construção e utilização de um Objeto de Aprendizagem através da perspectiva lógico-histórica na formação do conceito números inteiros / Renata Viviane Raffa Rodrigues. - Presidente Prudente : [s.n], 2009
xvii, 219 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Orientador: Klaus Schlünzen Junior
Banca: Maria do Carmo de Sousa, José Aires de Castro Filho
Inclui bibliografia

1. Objeto de aprendizagem. 2. Perspectiva lógico-histórica. 3. Números inteiros. I. Autor. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

CDD(18.ed.)370

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação – Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação - UNESP, Câmpus de Presidente Prudente.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

BANCA EXAMINADORA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM EDUCAÇÃO

____

Prof. Dr. Klaus Schlünzen Junior (FCT/UNESP)
Orientador

____

Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa
(UFSCAR - SP)

____

Prof. Dr. José Aires de Castro Filho
(UFC – CE)

____

Renata Viviane Raffa Rodrigues

Presidente Prudente, 25 de Setembro de 2009.

Resultado: ___________________________________

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Seção de Pós-Graduação
Rua Roberto Simonsen, 305 CEP 19060-900 Presidente Prudente SP
Tel 18 3229-5352 fax 18 3223-4519 posgrad@fct.unesp.br

DEDICO

À presença confortante de minha mãe, Ivani Raffa Rodrigues.
Às palavras otimistas de meu pai, Antonio Rubens Rodrigues.
E ao sorriso de minha irmã, Fernanda Augusta Raffa Rodrigues.
O carinho, estímulo e amor que me dedicaram,
foram as armas dessa conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus por iluminar meu caminho, afastando de mim todos os medos que permearam o desconhecido.

Ao meu orientador prof. Dr. Klaus Schlünzen Junior por aceitar um novo olhar sobre a construção de um objeto de aprendizagem, por apostar na sua prática em sala de aula como meio seguro de conhecer suas potencialidades. E, principalmente por proporcionar, não só a mim, mas a vários estudantes, vivenciar o processo de humanização pelo conhecimento, criando.

À prof.ª Dr.ª Maria do Carmo de Sousa pelas sábias palavras que me despertaram o interesse em buscar caminhos que possam contribuir para a metodologia de ensino de Matemática, através da pesquisa em Educação. Pelas indicações bibliográficas e, finalmente, pelos apontamentos, discutidos no exame de qualificação, quanto à categorização e análise dos dados construídos neste estudo.

Ao prof. Dr. Wilson Massashiro Yonezawa pelas sugestões também dadas durante o exame de qualificação, que me propiciaram reflexões relevantes para a escrita da dissertação, bem como para o processo de desenvolvimento e análise da prática pedagógica com o OA.

Ao prof. Dr. José Aires de Castro Filho pela leitura atenciosa do relatório de qualificação e objetividade das orientações para estruturação da dissertação.

À prof.ª Dr.ª Esther Pacheco de Almeida Prado pelo carinho, confiança, por compartilhar seu profundo conhecimento acerca do conceito números inteiros. E, especialmente, pela qualidade do material emprestado e referenciado, essencial na fundamentação teórica desta pesquisa.

A Luciano Castro Lima pelo desprendimento em permitir a reconfiguração de algumas de suas atividades de ensino a partir de um contexto tecnológico.

Aos professores e alunos do Núcleo de Educação Corporativa (NEC), em especial a criatividade e programação de Mateus Oliveira Jerez, a originalidade, designer e narração de Douglas Vinicius Galvani Pires e aos conhecimentos técnicos e pedagógicos de Felipe Oliveira Jerez.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação, especialmente aos professores Dr. Alberto Albuquerque Gomes, Drª. Monica Fürkotter, Drª Cláudia Maria de Lima, Dr. José Milton de Lima e Drª. Renata Junqueira de Souza por tornarem suas aulas, além de um momento de produção de novos conhecimentos, uma oportunidade para compartilhar dúvidas, problemas, reflexões, risadas, semelhanças e diferenças.

À prof.ª Dr.ª Raquel Gomes de Oliveira pela paciência ao me atender e tirar muitas de minhas dúvidas metodológicas.

À direção da escola “Z” por conceder o contexto da prática pedagógica com o OA, a professora “X” por acompanhar e auxiliar a dinâmica de uso do OA. E, atenciosamente, aos alunos da 6ª série “Y”, pela atuação envolvente que me renovou as esperanças no papel da ação humana na qualidade do ensino.

Às amigas do Programa de Pós-Graduação em Educação Silvana Ferreira de Souza e Aline Ap.ª C. Fernandes Benetti por dividir com bom humor as dificuldades e aflições que acompanham um pesquisador iniciante.

À amiga Mª. Regina Ishibashi pelo afeto, generosidade e pelas correções técnicas do trabalho.

À amiga de trabalho Maria Isabel Bonfim Manoel pelo incentivo constante.

O apoio singular de cada um propiciou a concretização deste trabalho.

Nada es espontáneo. Nada está dado.
Todo es construido.

(Gaston Bachelard)

RESUMO

Esta pesquisa, referente à linha de pesquisa Tecnologias de Informação e Comunicação e Educação, consiste na construção de um Objeto de Aprendizagem (OA) fundamentado sob a perspectiva lógico-histórica e, em decorrência de sua utilização em sala de aula, na análise das potencialidades formadoras do conceito números inteiros. Proporcionar o conhecimento da constituição e extensão de um conceito matemático deve ser um desafio à implementação de qualquer recurso de natureza tecnológica no ensino da Matemática, do contrário esta ferramenta corre o risco de reproduzir técnicas esvaziadas de sentido. Para enfrentar esse desafio, o aporte teórico oferecido por Kopnin (1978), Caraça (1984), Lanner de Moura (et al 2003), Sousa (2004) e Dias (2007) mostrou o movimento histórico e intelectual de criação de conceitos como forma de pensamento e perspectiva didática na produção do conhecimento. O percurso desta investigação, concebido como um estudo de caso qualitativo dividiu-se em duas etapas. A partir dos trabalhos de Lizcano (1993/2006), Schubring (2000/2001), Lima & Moisés (1998), Prado & Moura (2007a/2007b) e Prado (2008), na primeira etapa denominada por caráter bibliográfico/laboratorial, os aspectos substanciais e simbólicos, apreendidos do desenvolvimento lógico-histórico do conceito números inteiros, aliados aos efeitos comunicacionais das novas tecnologias (BELLONI, 2000/2001) delinearam os processos teórico-metodológicos de produção do OA intitulado “O Universo e seus Contrários”. Como resultado dessa integração lógico-histórica e tecnológica, verificou-se a possibilidade de expressar, problematizar e operacionalizar o conceito números inteiros por diversas vertentes racionais e culturais. O processo histórico e social das formas de negatividade chinesa e das práticas comerciais originadas pelo Renascimento na Europa rompeu com a abordagem isolada dos aspectos simbólicos extraídos diretamente de situações cotidianas com os números inteiros, além dos recursos mnemônicos fáceis de esquecer ou confundir. Sobretudo, em contexto educacional, a prática pedagógica com o OA por uma 6ª série do Ensino Fundamental, realizada na segunda etapa desta pesquisa, apontou a relevância de situações-problema que configuram um espaço de navegação, permitindo a interferência e criatividade do utilizador nos critérios de resolução. Portanto, um olhar sobre o trânsito dos juízos e deduções suscitados em dilemas entre o conhecimento pré-existente e a apropriação de um novo saber, propiciou concluir que as problemáticas dispostas de modo flexível e interativo viabilizaram pensar e operar com os contrários qualitativa e quantitativamente, em seu movimento e contradição, com as cores vermelha e preta ou sinais “+ e –“ como um estado provisório e segundo o princípio de equivalência. Dessa forma, de um modo geral, a variedade de artifícios encontrados na perspectiva lógico-histórica resultou na manipulação, experimentação, dedução, representação, comunicação e validação de juízos que circunscrevem o número inteiro. Movimento subjacente à apreensão dos aspectos substancias e simbólicos introduzidos pelo OA.

Palavras-chave: Objeto de Aprendizagem, Perspectiva Lógico-histórica, Números Inteiros, Aspectos Substanciais e Simbólicos.

ABSTRACT

This research is connected to the research line Information and Communication Technologies and Education. The present paper is about the development of a Learning Object (LO) that is based on logical-historical approach and, due to it is applied to the classroom, on forming potentiality of whole numbers concepts. Providing knowledge about a mathematical concept constitution and extension might be a challenge for implementing any technological resource to Mathematics instruction. On the contrary, this toll may reproduce techniques with no meaning. In order to face such challenge, this paper is based on theoretical approaches offered by Kopnin (1978), Caraça (1984), Lanner de Moura (et al 2003), Sousa (2004) e Dias (2007) who point out the historical and intellectual movement of creating concepts as a way to think and a didactic perspective to produce knowledge. This investigation is a qualitative case study that was divided in two steps. The first one was based on Lizcano (1993/2006), Schubring (2000/2001), Lima & Moisés (1998), Prado & Moura (2007a/2007b) e Prado (2008) works. It had a bibliographical/laboratorial character. At this stage, theoretical and methodological processes of the LO “The Universe and its Opposites” production were outlined by substantial and symbolic aspects, apprehend from logical-historical development of whole numbers concept, joined to communicative effects of new technologies (BELLONI, 2000/2001). As a result of this logical-historical and technological integration, we observed the possibility of express, question, and accomplish whole numbers concept through different rational and cultural ways. Historical and social process of Chinese negativity forms and commercial practices of Renascence in Europe had tore not only the isolated approach according to which symbolic aspects are extracted directly from day-by-day situations involving whole numbers, but also the mnemonic resources which are easy to forget or confuse. Besides, at educational context, the pedagogical practice with the LO in a 6th grade classroom of Basic School, hold during the second stage of this research, pointed out that problem-situations are very relevant, once they are a navigation place. This allows the users to apply their creativity to solve problems. Thus, observing the reasons, judgments and deductions roused with the dilemmas between previous and new knowledge, it was possible to conclude that problems presented in a flexible and interactive way allow the user to think and operate with the opposites in a qualitative and quantitative way, considering its movement and contradiction, with red or black colors or the signs “+ and –“ as a provisory state and according to the equivalence principle. So, in a general view, the different artifices of logical-historical approach resulted in manipulation, experimentation, deduction, representation, communication and validation of judgments that involve whole number. Such movements are implied at substantial and symbolic aspects presented by the LO.

Key Words: Learning Object, Logical-historical Approach, Whole Numbers, Substantial and Symbolic Aspects

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

a.C. = Antes de Cristo

AVA = Ambiente Virtual de Aprendizagem

BIOE = Banco Internacional de Objetos Educacionais

CEFAM = Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério

CIED = Centros de Informática Educativa

d.C. = Depois de Cristo

FCT = Faculdade de Ciências e Tecnologia

FUNAP = Fundação Prof. Dr. Manoel Pedro Pimentel

MEC = Ministério da Educação

NEC = Núcleo de Educação Corporativa

OA = Objeto de Aprendizagem

OE = Objeto Educacional

OEI = Organização dos Estados Ibero-americanos

PCN = Parâmetros Curriculares Nacionais

PIE = Política de Informática Educativa

PNLD = Programa Nacional do Livro Didático

ProInfo = Programa Nacional de Informática na Educação

Proninfe = Programa Nacional de Informática Educativa

RELPE = Rede Latino-americana de Portais Educacionais

RIVED = Rede Interativa Virtual de Educação

SAI = Sala Ambiente de Informática

SEB = Secretaria de Educação Básica

SEE = Secretaria de Estado de Educação

SEED = Secretaria de Educação a Distância

TE = Tecnologia Educacional

TIC = Tecnologias de Informação e Comunicação

UFMG = Universidade Federal de Minas Gerais

UNESP = Universidade Estadual Paulista

UNICAMP = Universidade Estadual de Campinas

UFPE = Universidade Federal de Pernambuco

UFRGS = Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRJ = Universidade Federal do Rio de Janeiro

WWW = World Wide Web

SÚMARIO

INTRODUÇÃO

1. Minhas experiências com Tecnologias de Informação e Comunicação, Perspectiva lógico-histórica e números inteiros

O tema desta pesquisa tem origem em meu caminhar pessoal e acadêmico, moldado por uma trajetória de desafios, inquietações e questionamentos, que são formalizados neste trabalho. Dessa forma, considero relevante expor algumas experiências de minha infância e juventude.

Em 1994, deparei-me com uma situação particular de dificuldade em lidar com os números inteiros. O fato foi suscitado por uma prova de Matemática, na qual minha irmã, cursando a 6ª série do Ensino Fundamental, apresentou nota "D", que na época indicava que o aluno permanecera abaixo da média. Nesse momento, a família, eu e meus pais nos mobilizamos, para entender e tentar resolver o problema.

A prova consistia basicamente numa grande quantidade de expressões, com parênteses, colchetes e chaves, que continham os números inteiros e os seus sinais: positivo e negativo. Na busca por esclarecimentos, ainda que possuidora de incipiente experiência, por estar cursando a 5ª série do Ensino Fundamental, manifestei muitas dúvidas, das quais tento descrever algumas:

"Por que tantos sinais, um ao lado do outro, sem números para separá-los?"

"O que essas contas apresentam de tão difícil, que minha irmã não consegue entendê-las e resolvê-las?"

Na tentativa de solucionar o fato, uma professora particular de Matemática foi contratada, momento em que descobrimos outro percalço: na maioria das vezes, as expressões matemáticas eram transcritas erradamente, da lousa para o caderno, principalmente em relação aos sinais (+) e (-). Isso costuma ocorrer, quando não compreendemos o que estamos copiando.

Enfim, minha irmã memorizou as regras: "Primeiro se resolve o que tem dentro dos parênteses, depois dos colchetes e por último das chaves; na multiplicação de sinais: sinais iguais = positivo e sinais diferentes = negativo; na adição e subtração de números inteiros: conserva-se o sinal do maior"; ela resolveu inúmeras expressões e seu desempenho, pelo menos no que se refere à nota da prova, evoluiu.

Para cursar o Ensino Médio, optei pelo Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAM), no qual tive a oportunidade de vivenciar uma formação de professores de boa qualidade. Nessa instituição de ensino, de período integral, aprendi a conviver e a compartilhar pensamentos sobre diversas metodologias de ensino, a participar de eventos culturais e artísticos. Além disso, a multiplicidade de situações de ensino e aprendizado, encontrada nos estágios de observação, participação e regência, realizados nas primeiras séries do Ensino Fundamental, despertou em mim sentimentos de inquietação e, ao mesmo tempo, de satisfação.

No CEFAM, especificamente na disciplina de Metodologia de Ensino de Ciências e Matemática, tive o meu primeiro contato com instrumentos pedagógicos, como o material dourado e o ábaco, com os quais pude perceber que existe uma pluralidade de maneiras de se ensinar e aprender Matemática.

Diante desse envolvimento com o ensino da Matemática e com forte expectativa, em 2002, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista (FCT/UNESP), campus de Presidente Prudente.

Os primeiros anos de graduação caracterizaram-se pelo aprofundamento nos conteúdos puramente matemáticos. Nesse contexto acadêmico, fui apresentada a uma ciência exata, pura e universal, com verdades absolutas e incontestáveis.

Dentre o período que vai do início do segundo ano até meados do terceiro ano letivo, desenvolvi um estágio remunerado, no qual prestava serviços à Fundação Prof. Dr. Manoel Pedro Pimentel (FUNAP), em uma penitenciária localizada na cidade de Dracena, Estado de São Paulo, cidade onde resido até os dias atuais.

Nesse estágio, trabalhei com a escolarização nos níveis de alfabetização e Ensino Fundamental de jovens e adultos presos. Esse contexto de educação apresentava características particulares, de sorte que a elaboração das aulas não poderia partir da simples adaptação do ensino para crianças. Nesse momento, começou a nascer em mim o interesse pela pesquisa em Educação.

Em relação à Matemática, percebia em meus alunos um misto de medo – na maioria das vezes causado por fracassos escolares na infância ou juventude – com uma intensa vontade de aprender os conteúdos matemáticos.

Nesse sentido, meus estudos foram direcionados para compreender teorias que pudessem auxiliar minha prática, em sala de aula, através de disciplinas chamadas de "pedagógicas", que, de um modo geral, eram consideradas "menos" importantes do que as disciplinas puramente matemáticas.

No terceiro ano da graduação, matriculei-me na disciplina optativa "Informática aplicada à Educação", na qual tive contato com diferentes maneiras de utilizar o computador, na sala de aula e na Educação, por meio de situações-problema que me possibilitaram a exploração de diversos ambientes computacionais, tais como: simulação, tutorial, resolução de problemas, ferramentas de *software*, animação, Internet e a linguagem de programação Logo[1], fatores que me despertaram o interesse pelas Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação.

Além disso, essa disciplina me proporcionou duas experiências singulares com programa Logo e sua inter-relação com o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, mais especificamente com a geometria plana, as funções e a impressão de seus gráficos.

Primeiro, ao conhecer as potencialidades deste recurso tecnológico. Posteriormente, ao perceber o entusiasmo e contentamento dos alunos da 1ª série do Ensino Médio ao conseguirem imprimir gráficos com o auxílio do Logo.

A experiência de ensino com a 1ª série do Ensino Médio foi realizada durante o desenvolvimento de meu projeto de estágio supervisionado. Também por meio do estágio, pude conhecer a escola pública de uma maneira diferente da época em que eu era a aluna.

No último ano de graduação, participei da "Semana da Matemática 2005", evento promovido pelo Departamento de Matemática, Estatística e Computação da FCT/Unesp, em que tive a oportunidade de frequentar o minicurso intitulado "Análise de *Softwares* Computacionais no Ensino da Matemática", no qual pude perceber que muitos dos *softwares* voltados para o ensino da Matemática eram conteudistas e tecnicistas, restringindo-se a fazer uma revisão do assunto, ou um "joguinho" de reforço de conceitos, muitas vezes carregado de exercícios, ou ainda, com uma mera exposição do conteúdo.

A partir dessa realidade, passei a me questionar acerca do que poderia estar faltando nesses *softwares* computacionais desenvolvidos para o ensino da Matemática, cuja

[1] *Software* educacional cujo diferencial se identifica numa linguagem de programação com comandos adequados à linguagem da criança, desenvolvido por Seymor Papert, no final da década de 1970, segundo uma abordagem "construcionista", que prevê através da mediação do professor, a construção do conhecimento do aluno, por meio da "espiral da aprendizagem: descrição, execução, reflexão, depuração, descrição mais elaborada..." (VALENTE, 1999/2002).

ausência não permitia a inserção de novos significados aos conceitos matemáticos, repetindo os mesmos esquemas do ensino tradicional.

Concomitantemente, no último ano da graduação, as disciplinas "Didática" e "Prática de Ensino de Matemática IV – Estágio Supervisionado" apontaram-me um caminho na busca de respostas aos meus questionamentos, cujo percurso teórico-metodológico é encontrado na perspectiva lógico-histórica.

Os primeiros passos desse estudo referem-se à teoria do conhecimento desenvolvida por Kopnin (1978), o princípio da "negação da negação" explorado por Caraça (1984), o processo histórico de criação conceitual, indicado por Lima (1998) e Lanner de Moura (et al 2003), como fundamental para a aprendizagem em sala de aula e a perspectiva lógico-histórica, adotada por Sousa (2004), como forma de pensamento e perspectiva didática no ensino de álgebra.

Nos devidos termos desse aparato teórico, compreender e apresentar um conceito, por meio da perspectiva lógico-histórica, significa olhar com cuidado para o que está implicado em sua construção, identificar as bases conceituais no qual se sustenta e configurá-las em uma situação de ensino e aprendizagem, e não simplesmente acompanhá-lo retórica e continuamente. É deixar falar os argumentos, as práticas e técnicas desempenhadas para resolver os problemas surgidos no decorrer das atividades humanas.

De acordo com Kopnin (1978), assim como descreve Sousa (2009),

> [...] o histórico consiste no processo de mudança do objeto, nas etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O lógico é o meio pelo qual o pensamento realiza esta tarefa no processo de reflexão sobre o histórico, de forma que o lógico reflete os principais períodos da história do objeto. (SOUSA, 2009, p. 85)

A partir dessa perspectiva, comecei a enxergar a substância dos conceitos matemáticos, de maneira que toda aquela ideia da Matemática como ciência exata, pronta e acabada foi-se desmistificando e dando lugar a uma concepção da Matemática

> como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado as grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social. (CARAÇA, 1984)[2].

[2] Informação extraída do prefácio do livro *Conceitos fundamentais da matemática*, de Bento de Jesus Caraça (1984).

Já graduada, no ano de 2006, participei como aluna ouvinte da disciplina "História e Filosofia da Matemática", pertencente à nova grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática. Nessa disciplina, os conceitos matemáticos ganharam uma dimensão diferente: o conceito não era mais um código sem sentido real, sem vivência, porém uma síntese de um momento histórico de criação humana, cuja aprendizagem implica não apenas a apropriação de seu produto final, mas do próprio ato de criação intelectual.

Assim, foram surgindo em mim inquietações de natureza diferente: "Será que a perspectiva lógico-histórica, enquanto metodologia de ensino de Matemática, pode oferecer profundidade e diversidade conceitual necessário aos softwares, mídias, ou qualquer recurso tecnológico desenvolvido com vistas a aprimorar o ensino de Matemática?" Ou ainda: "Quais as possibilidades delineadas pela perspectiva lógico-histórica na construção de um recurso de natureza computacional e pedagógica?"

Mais consciente de minhas convicções, em 2007, ingressei no Mestrado em Educação, na linha de pesquisa Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação. Desde esse momento, passei a compartilhar de uma disparidade de olhares a respeito da pesquisa em Educação.

A seguir, relaciono as disciplinas cursadas na Pós-Graduação e sua relevância para minha pesquisa e amadurecimento acadêmico:

- **Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação Escolar**: propiciou os subsídios teóricos que me permitiram perceber e conscientizar-me sobre o impacto da tecnologia, na sociedade e na educação, especialmente em relação à mudança do papel do professor, do aluno, e dos ambientes de aprendizagem.
- **O Jogo na Formação do Professor**: propiciou-me conhecer, por meio de diferentes vertentes, os elementos teóricos sobre o papel do jogo e da brincadeira como atividades essenciais no desenvolvimento físico, psíquico e intelectual da criança.
- **Delineamento Metodológico da Pesquisa em Educação**: propiciou-me compreender o conhecimento científico por diferentes concepções teóricas. A explanação de diversas metodologias de pesquisa em Educação também me permitiu refletir sobre o caminho metodológico mais adequado para a minha pesquisa.

- **Leitura, Literatura e Interpretação de Textos no Processo de Formação de Professores:** propiciou-me reconhecer a literatura como meio de mergulhar na vida, explorá-la, senti-la, experimentá-la, ou, ainda, de resolver conflitos e se desenvolver como ser humano. Dessa forma, pude conhecer os fatores constituintes do corpo ou da matéria em que a literatura se concretiza, e utilizar os recursos narrativos e seus fatores estruturantes, na composição e contextualização dos ambientes digitais de aprendizagem.

Após o cumprimento das disciplinas, através do projeto coordenado por meu orientador, que, dentre outras atividades desenvolvidas, prevê a produção e análise de Objetos de Aprendizagem (OA) em diversas áreas do conhecimento, integrei-me ao Núcleo de Educação Corporativa (NEC)[3], na equipe pedagógica de Matemática.

O NEC é composto por equipes multidisciplinares de alunos e pesquisadores da FCT/UNESP, que contam com o apoio do programa governamental Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED)[4]. A “Fábrica Virtual”, assim como é denominada pelo programa, envolve a produção de material pedagógico multimídia, capacitação de pessoal, rede de distribuição de informações, e estratégias de avaliação da aprendizagem por meio do OA.

A elaboração de um significado para expressão “Objeto de Aprendizagem – OA” ainda traz controvérsias entre os autores, sendo um dos motivos o fato de ser um campo novo no meio científico. Porém, de um modo geral, sua concepção estende-se a “qualquer espécie de entidade digital a qual tenha a capacidade de exprimir algum conhecimento pode ser considerado um Objeto de Aprendizado” (BETTIO; MARTINS, 2004).

Baseado nos precursores dessa noção, Bettio e Martins (2004) reproduzem que “a principal ideia dos Objetos de Aprendizado é quebrar o conteúdo educacional em pequenos pedaços que possam ser reutilizados em diferentes ambientes de aprendizagem, em um espírito de programação orientada a objetos” (BETTIO; MARTINS, 2004).

No caso do campo conceitual dos números inteiros, por exemplo, assentam-se diversos conteúdos básicos, tais como a contradição e os contrários, as variações quantitativas e relativas, a representação do número inteiro e de sua ordenação na reta numérica, as operações aritméticas e suas propriedades. Dentre tantos elementos constitutivos

[3] Para maiores informações, consultar <http://www.nec.prudente.unesp.br/NEC/Home.php>.
[4] Para maiores informações, consultar <http://rived.mec.gov.br>.

do conceito, qualificados do mais simples ao mais complexo, que podem ser vislumbrados e implementados através de estratégias metodológicas sob o formato de objetos de aprendizagem.

Tavares *et. al*. (2007) entende que a construção de um OA deve aliar um conjunto de estratégias de exposição, "visuais e verbais" que permitam detalhar ao máximo as características do fenômeno ou objeto estudado. Segundo essa concepção, o autor define que o objetivo de um OA "é proporcionar o encontro do estudante com o conteúdo a que ele se refere" (TAVARES et. al. 2007, p. 125). Tais fatores associados às minhas experiências pessoais aparentemente simples com o conceito números inteiros, descritas no início desse texto, não deixaram dúvidas quanto à escolha do conteúdo matemático a ser abordado por meio da construção de um OA fundamentado na perspectiva lógico-histórica.

Com efeito, esta pesquisa propõe construir um objeto de aprendizagem pelos pressupostos da perspectiva lógico-histórica, de sorte a considerar suas potencialidades na constituição do conceito números inteiros.

Com base na perspectiva lógico-histórica e das oportunidades de construção do conhecimento, possibilitadas pela predisposição encontrada nesse ambiente de estudos, pude desenvolver uma atividade incrivelmente prazerosa, libertadora e humana: **criar**.

Portanto, a partir daqui, optamos por escrever o texto desta dissertação na primeira pessoa do plural, a fim de enunciar, pela nossa perspectiva, que há uma diversidade de vozes que instigaram essa pesquisa e que devem ser registradas e interpretadas.

2. Definição do problema

Desse modo, as experiências com tecnologias de informação e comunicação, perspectiva lógico-histórica e números inteiros, sua origem, relevância e os caminhos teóricos expostos no decorrer deste texto, conduziram-nos à formulação da seguinte questão de estudo: "Quais as possibilidades encontradas na construção de um objeto de aprendizagem através da perspectiva lógico-histórica acerca da formação conceitual dos números inteiros?"

3. Objetivos da pesquisa

- **Objetivo Geral:**

Construir um objeto de aprendizagem fundamentado na perspectiva lógico-histórica, de modo a analisar as suas potencialidades quanto à formação do conceito números inteiros.

- **Objetivos Específicos:**

1) Construir um objeto de aprendizagem que considere o lógico-histórico do conceito números inteiros a partir de seu próprio movimento de criação;

2) Configurar em um OA, os aspectos “substanciais” e “simbólicos” do conceito números inteiros, identificados no processo lógico-histórico das formas de negatividade[5] chinesa e das práticas comerciais suscitadas pelo Renascimento na Europa;

3) Tentar romper com as limitações da abordagem isolada dos aspectos simbólicos do conceito números inteiros, através do uso da informática aplicado à complexidade e diversidade de situações relativas;

4) Analisar o potencial pedagógico de cada situação-problema do OA, em termos da formação do conceito números inteiros no grupo de alunos de uma 6ª série do Ensino Fundamental.

[5] Lizcano (1993), quando se refere à matemática chinesa e a grega da antiguidade, não usa o termo “números negativos” mas “negatividade” ou “formas de negatividade”. Para ele, estas expressões referem-se a certos objetos considerados geralmente como antecedentes históricos dos números negativos.

4. Representação sintética do trabalho

A partir dos objetivos delineados, expomos as características fundamentais que o leitor encontra em cada capítulo da dissertação:

No primeiro capítulo, explicitamos os pressupostos teóricos que fundamentaram a pesquisa, momento em que discorremos sobre as principais referências que utilizamos para compreender o papel das Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação e o uso do objeto de aprendizagem como uma proposta de construção de conteúdos pedagógicos digitais. Nesse caminho vislumbramos a perspectiva lógico-histórica como metodologia de ensino e produção de conhecimento na concepção pedagógica do OA. Também, a partir da teoria do conhecimento preconizada por Kopnin (1978) apreendemos os juízos e deduções como categorias de análise das potencialidades formadoras do conceito números inteiros implicadas no OA. E, por último, discorremos sobre os desafios que cercam a abordagem do conceito números inteiros na sala de aula e quais os tratamentos indicados pelas orientações curriculares governamentais, em particular pela nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008) e as situações de aprendizagem dispostas nos Cadernos do Professor (SÃO PAULO, 2009a) e do Aluno (SÃO PAULO, 2009b), à introdução deste conceito na matemática escolar.

No segundo capítulo, partimos de uma visão geral do lógico-histórico do conceito números inteiros, através da qual fomos selecionando os contextos sócio-históricos e as abstrações mais relevantes à implementação do OA. Num segundo momento, por meio de um estudo qualitativo da visão de Lizcano (1993/2006) sobre as formas de negatividade advindas das práticas e saberes, nem sempre circunscritas ao contexto matemático, e sobre os significados das formas de pensamento da razão comum própria de cada época e de cada cultura, em particular dos primeiros Han, na China Antiga, dos gregos, na Grécia Clássica, e de Diofanto, no período alexandrino, foi possível recuperar os aspecto substanciais e simbólicos que podem contribuir para desviarmos o nosso[6] pensamento ocidental de herança grega dos princípios da não-contradição, da rigidez do pensar por abstração que opera por subtração, da separação dos contrários nos objetos e da concepção do número como grandeza ou medida de extensão.

Mediante um estudo de caso qualitativo, que orientou os princípios metodológicos que preceituaram a pesquisa, no terceiro capítulo descrevemos o

[6] O termo “nosso” compreende o pensamento dos pesquisadores e dos sujeitos da pesquisa.

desenvolvimento da primeira etapa da pesquisa, a construção do OA intitulado "O Universo e seus Contrários". Com detalhes, procuramos esclarecer como os aspectos substanciais e simbólicos, reunidos no capítulo anterior, foram configurados em ambientes e situações-problema aos recursos tecnológicos de um OA. Como resultado desta etapa da pesquisa, apresentamos algumas considerações acerca das possibilidades, encontradas na integração lógico-histórico e tecnológico, de oferecer uma nova forma ao conceito números inteiros, delineada para se pensar os contrários na natureza.

Com a finalização do OA, partimos, no quarto capítulo, para a concretização de sua prática pedagógica em uma sala de aula composta pelos alunos de uma 6ª série do Ensino Fundamental. A partir de cada uma das situações-problema do OA, foram sendo identificados os dilemas que revelaram o movimento de um juízo a outro no processo de apreensão pela ação e pela reflexão dos aspectos substancias e simbólicos do conceito números inteiros. Também foram expostos neste capítulo os instrumentos técnicos utilizados para captar os dados empíricos da pesquisa. Por fim, extraímos da dinâmica de uso do OA em contexto educacional, as principais conclusões acerca das contribuições, como também debilidades do OA no que tange seu potencial formador de uma nova referência numérica.

Através de algumas considerações, no quinto capítulo o trabalho é finalizado com um balanço crítico da pesquisa, respondendo às questões manifestadas ao longo do estudo de modo a projetá-las no âmbito da Educação, buscando esclarecer a nós mesmos para quê e para quem tais resultados podem ser profícuos.

CAPÍTULO 1 – PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Com o objetivo de tornar claros a nós mesmos os referenciais que nos guiaram e sustentaram nossas percepções e posicionamentos, a construção deste capítulo consiste em explicitar, a partir de nossos estudos, por que a integração Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) com a perspectiva lógico-histórica fundamenta nossa pesquisa.

1.1 Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação

São vários os motivos que justificam a entrada dos computadores na escola, mas não poderíamos começar este texto sem fazer um breve histórico sobre a implantação da Informática na Educação, no Brasil, a fim de identificarmos quais as concepções e perspectivas do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na Educação. Para tanto, desenvolvemos uma síntese organizada cronologicamente, com as principais fases desse processo.

As primeiras discussões acerca da informática na Educação apareceram na década de 1970, em eventos realizados em algumas universidades brasileiras, nos quais se utilizava o termo Tecnologia Educacional (TE), preocupando-se basicamente com os métodos e as técnicas a serem empregados para informatizar o ensino, de maneira a qualificar os indivíduos para que atendessem ao novo ciclo econômico surgido na época.

Dentre outros eventos, foi através do I Seminário Nacional de Informática em Educação, realizado em 1981, que se desencadearam iniciativas como o cadastramento de universidades públicas de todo o país que se interessassem por projetos incentivados pelo governo, com o objetivo de formar profissionais para o uso de recursos tecnológicos nas escolas.

Ainda na década de 80, com o desenvolvimento da Política de Informática Educativa (PIE), sem a expectativa de que o computador pudesse resolver todos os problemas de ensino, tal programa governamental tinha o intuito de avaliar a contribuição desse recurso, no processo pedagógico (CARNEIRO, 2002).

Dessas iniciativas políticas, nasceram projetos em universidades como Unicamp, UFPE, UFRGS, UFMG e UFRJ, cujo foco girou em torno do estudo e uso do programa Logo.

Em 1987, os governos federal, estadual e municipal se uniram na implantação dos projetos EDUCOM e FORMAR, a fim de capacitar e desenvolver pesquisas com professores. Assim, através dos Centros de Informática Educativa (CIED), o Ministério da Educação (MEC) disponibilizou aos municípios a inserção dos computadores no ensino, de onde acompanhava, viabilizava e implementava as decisões tomadas entre técnicos e educadores.

No final dessa década, por volta de 1989, foi instituído pelo Ministério da Educação, o Programa Nacional de Informática Educativa – PRONINFE –, que incentivou a capacitação contínua e permanente de professores, técnicos e pesquisadores no domínio da tecnologia de informática educativa. Mais tarde, já na década de 90, foi transformado no Programa do Ministério da Educação para a informatização das escolas do ensino fundamental – o PROINFO – Programa Nacional de Informática na Educação.

O PROINFO vem sendo implementado pelo MEC, desde 1997, através de sua Secretaria de Educação a Distância – SEED –, em parceria com os governos estaduais e municipais. O seu objetivo geral é promover, na escola pública (nos níveis fundamental e médio) o uso pedagógico da informática.[7]

Notamos, a partir desse processo histórico, que as preocupações expostas nos programas governamentais em relação ao uso das TIC, na Educação, passaram por diversas perspectivas políticas e educacionais.

Segundo a perspectiva dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, quanto ao uso das TIC no ensino de Matemática:

> É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, p. 46)

[7] Maiores Informações podem ser obtidas em http://portal.mec.gov.br.

Conforme orientação desse documento, o computador deve ser utilizado como uma nova “estrutura”, uma nova “linguagem” de ensino e aprendizagem de conceitos, e uma consequência disso será o acesso à variedade de aplicações da informática. Mas, apesar dessa proposta de âmbito governamental ser incompatível ao uso do computador pelo computador, de um modo geral, as fases tratadas apresentaram um caráter de evolução mais quantitativo que qualitativo, no que se refere à efetiva aprendizagem dos alunos.

Diante dessa complexidade, as justificativas da inserção da Informática na Educação tem gerado muita polêmica. A fim de esclarecermos a nós mesmos nosso posicionamento teórico-metodológico, perguntamos: Informática na escola, para quê?

1.1.1 A sociedade contemporânea, sua constituição e suas aspirações

Não podemos negar que a Informática faz parte do cotidiano das crianças e adolescentes, uma vez que o contato com o computador tem-se dado com muita frequência, quando não em casa, em *lan houses* ou casa de amigos. De alguma forma, o computador tem provocado novos tipos de relações sociais e virtuais ou, ainda, tem gerado novas formas de aprender.

Nesse contexto, consideramos importante discorrer sobre a Internet, pelo fato de ela possuir algumas características extremamente relevantes, quando se pensa em globalização, produção de cultura e conhecimento.

A Internet tem disponibilizado a tecnologia da informação a um grupo imenso de pessoas, que podem conectar-se à rede, tanto como receptoras quanto como criadoras do universo de informações organizado no mundo inteiro, compartilhando experiências em comum, participando de ambientes motivadores, interativos, colaborativos e cooperativos.

Contudo, o fato de a Internet oferecer uma infinidade de informações leva-nos a refletir sobre suas mais variadas fontes, muitas vezes de qualidade duvidosa, que são lançadas a todo instante dentro da rede e na mente de quem a acessa. Essa preocupação é levantada por Carneiro (2002), por considerar que o acesso à informação não significa a possibilidade de mais conhecimento, pois essa rapidez pode resultar em um entendimento superficial da informação, isto é, na sua assimilação direta, sem reflexão.

Por outro lado, toda essa diversidade de informações provém de acontecimentos sociais, econômicos, políticos e naturais do mundo, de sorte que não podemos ignorá-las. Na visão de Carneiro (2002), o interessante é que a escola aprenda a lidar com as informações trazidas por seus alunos, buscando sua veracidade, pertinência, profundidade e relações, transformando-as em conhecimento, estimulando, assim, o pensamento crítico dos alunos.

Esse fenômeno é fruto da transição que vivemos, de uma sociedade industrial, voltada para a produção de bens materiais, para a sociedade da informação e do conhecimento, empenhada na produção intelectual com o uso intensivo de tecnologia, acarretando em avanços tecnológicos que nos atingem a grande velocidade, modificando os sistemas financeiros, econômicos, políticos, sociais e educacionais.

Ao invés de uma sociedade homogênea, as pessoas tem criado seus próprios caminhos, em uma perspectiva de diversidade. Antes, quando a realidade era caracterizada por uma sociedade fabril, o trabalho intelectual era restrito, o pensamento era mais facilmente guiado por regras. Agora, este cenário mudou radicalmente, muito motivado pela disponibilização e acesso a informação promovida pelas tecnologias. Então, o que fazer diante da sua repercussão nos ambientes de aprendizagem? Para onde ir? A "máquina programável" já existe, não precisamos mais do homem trabalhando como um robô, de sorte que o "saber fazer" precisa ser substituído pelo "saber pensar" (LIMA, 1998).

Acreditamos que este momento contemporâneo pode ser entendido como um processo de transformação sócio-histórica que atinge os diversos modos de produção e comunicação cultural.

> Somos sujeitos comunicadores enraizados historicamente num contexto sócio-cultural. É a partir desse nosso existir que elaboramos nossas autorias comunicacionais em diferentes graus e modos de consciência, de saber, de atuação como pessoas, ao mesmo tempo emissoras e recebedoras, nas tramas do processo comunicacional de cultura. (FUSARI[8], 1994, apud BELLONI, 2001, p. 13).

Junto ao impacto do avanço tecnológico, surge a necessidade de se rever as estruturas existentes, que representam um modelo de sociedade organizada hierarquicamente, fragmentada, a qual aspira a objetividade e a racionalidade. E de buscar uma concepção que responda por essa nova ordem histórica, social, cultural e política, que há tempos não segue mais uma ordem ou sequência.

[8] FUSARI, M. *Multimídias e formação de professores e alunos*. Paper apresentado no VIIº ENDIPE, p. 6, 1994.

> A nossa ação educativa vive hoje uma profunda contradição: praticamos a educação treinadora do não pensar voltada para uma realidade - a industrial que precisava de máquinas humanas operadoras de algoritmos - que já não existe mais; em compensação temos uma nova realidade que exige mentes que a pensem para criar os novos conceitos que a tornem compreensível e administrável para a comunidade humana. Enfim, temos uma educação que forma não pensadores numa realidade que exige pensadores. (LIMA, 1998).

O que se vê é um grande descompasso entre a escola e o seu contexto social, onde os alunos estão sendo formados para uma sociedade que não existirá mais ou, ainda, que já não existe, em muitos contextos.

Todavia, discordamos da ideia de que, para estabelecer um equilíbrio entre a formação do aluno e sua realidade, a escola deva atender às constantes mudanças do mundo do trabalho. Isso significaria reduzir o conhecimento a algo passageiro, e distanciar-se do papel da escola de trabalhar crítica e reflexivamente o conhecimento.

> Confunde-se aqui a necessidade de informar-se sobre o mundo com o formar-se no mundo, dissolve-se e superficializa-se o processo de conhecer, esquecer-se da necessidade de agirmos como sujeitos, e não objetos de nossa própria história. (CARNEIRO, 2002, p. 52).

Contudo, manter-se inerte aos instrumentos pedagógicos que as TIC oferecem é entregar essa situação ao “mercado de consumo”, à “superficialidade” e ao “acesso seletivo” (CARNEIRO, 2002).

A educação, como espelho dos anseios da sociedade, é responsável pela formação do indivíduo enquanto parte integrante e ativa da mesma. Nesse sentido, cabe à escola contribuir para que as crianças e adolescentes utilizem as TIC de modo ativo, criativo e crítico, e não como meros consumidores.

> Para tanto, é necessário negar a ideia linear e mecânica sobre o uso das mídias, é preciso que professores e alunos elaborem e transformem ideias, sentimentos, atitudes, valores, utilizando articuladamente múltiplas mídias, escolares e não-escolares. (LIBÂNEO, 2002).

Quando qualidades como imaterialidade, instantaneidade, mobilidade, fluidez, adaptabilidade, coletividade, impessoalidade, multiplicidade e interatividade são empregadas em favor da grande finalidade da escola – de educar para cidadania e não apenas para o mercado de trabalho – as TIC assumem um papel transformador, na Educação. (BELLONI; CARNEIRO, 2001/2002, 2002)

Dessa forma, assumimos as TIC como ferramentas pedagógicas extremamente ricas e proveitosas, as quais, apropriadas ao sistema educacional, podem mobilizar a melhoria da qualidade do ensino e a ampliação dos referenciais de mundo dos usuários.

A partir dessa concepção, consideramos que a Informática na Educação se refere à integração do computador, no conjunto de ações que envolvem o ensino e a aprendizagem dos conteúdos escolares, em que essa tecnologia é um recurso pedagógico, o professor mediador e o aluno protagonista do seu próprio processo de aprendizagem.

Além disso, o grande potencial aglutinador e mobilizador de que as TIC dispõem é capaz de proporcionar ao usuário, através de um simples clique, associações múltiplas entre palavras, sons e imagens. Esse caráter multifacetado permite e enfatiza a interdisciplinaridade, enquanto processo de integração recíproca entre vários conceitos e áreas do saber, rompendo com a fragmentação do processo do conhecimento.

Os processos e concepções de ensino e aprendizagem devem aproveitar ao máximo as potencialidades comunicacionais e pedagógicas dos recursos tecnológicos, pois essa realização integrativo-interativa ampara o planejamento de um imenso conjunto de ações que interligam forma-conteúdo na criação de materiais digitais.

Este é o caso dos objetos de aprendizagem, compostos por atividades interativas definidas a partir de recursos digitais atraentes, apresentam-se como um instrumento auxiliar à visualização, compreensão e interpretação dos conteúdos escolares. (PRATA *et al.*, 2007)

1.1.2 Objetos de Aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico

Com a intenção de confirmar o impacto das TIC nos ambientes de aprendizagem e com isso o surgimento dos meios digitais no contexto escolar, Rodrigues e Schlünzen Junior (2008) apontam que:

> O século XXI inicia com ênfase na sociedade da informação e do conhecimento. Esse cenário tornou-se possível graças às mudanças sociais, políticas e tecnológicas que estão ocorrendo em escala mundial, modificando a sociedade nas suas formas de organização, de produção e comercialização de seus bens. Mudanças essas que colocam em xeque as formas tradicionais

> de educação, de formação, de desenvolvimento e de produção escolar. (p. 120)[9]

Nesse contexto de transformações socioculturais, fica claro que as TIC têm desafiado o próprio sistema de ensino, nos níveis de sua produção, mediatização, recepção e processamento.

"Do ponto de vista da produção de materiais pedagógicos, mediatizar significa definir as formas de apresentação de conteúdos didáticos, previamente selecionados e elaborados", de modo a utilizar ao máximo as virtudes comunicacionais das novas tecnologias (BELLONI, 2001, p. 26).

Nesse sentido, uma das iniciativas da Secretaria de Educação a Distância (SEED) e da Secretaria de Educação Básica (SEB) do Ministério da Educação (MEC) é a produção de recursos educacionais multimídia interativos, na forma de Objetos de Aprendizagem (OA), através do programa RIVED.

Na visão de Prata *et al*. (2007):

> Dentre os tantos recursos, os objetos de aprendizagem, no formato de atividades contendo animações e simulações, têm se apresentado como possibilidades de desenvolvimento de processos interativos e cooperativos de ensino e aprendizagem, estimulando o raciocínio, novas habilidades, a criatividade, o pensamento reflexivo, a autonomia e a autoria. (PRATA *et al*., 2007, p. 107)

Os objetos de aprendizagem são utilizados como ferramentas acessíveis e potencializadoras, na criação de ambientes de aprendizagem via Web. Por se tratar de um tema relativamente novo, a definição de OA não é consensual entre os autores, mas é recorrente o uso das palavras *ensino*, *conhecimento* e *reutilizável*. O pesquisador David Wiley (2000, p. 7) define OA como "qualquer recurso digital que pode ser reusado para assistir à aprendizagem".

Em seus estudos, Tarouco *et al*. (2003) apresenta os benefícios da criação de um repositório de "objetos educacionais" reusáveis, para garantir a recontextualização e acessibilidade dos quais em diversos cenários de aprendizagem. Para ela,

> Objetos educacionais podem ser definidos como qualquer recurso, suplementar ao processo de aprendizagem, que pode ser reusado para apoiar a aprendizagem. O termo objeto educacional (*learning object*) geralmente aplica-se a materiais educacionais projetados e construídos em pequenos conjuntos com vistas a maximizar as situações de aprendizagem onde o recurso pode ser utilizado.(TAROUCO *et al*., 2003, p. 2)

[9] Disponível em: <http://www.tise.cl/2008/tise_2008/tise2008.pdf#page=120>. Acesso em 18 de maio de 2009.

Contudo, a característica que será explorada nesta pesquisa não se trata da reutilização, mas sim do processo de construção de um OA, apoiado numa perspectiva lógico-histórica de formação de conceitos matemáticos.

O processo de produção de um OA envolve uma série de passos os quais são realizados por equipes multidisciplinares de Universidades Brasileiras participantes do programa "RIVED/Fábrica Virtual e Portal do Professor", no qual são definidos, implementados e testados objetos de aprendizagem. Posteriormente, após avaliação em ambientes reais de aprendizagem de escolas públicas, os OA são disponibilizados no portal do MEC[10].

Com isso, o RIVED tem subsidiado ações que visam a melhoria do ensino nas escolas, auxiliado por grupos de pesquisa de Universidades Públicas Brasileiras, dentre eles o Núcleo de Educação Corporativa (NEC)[11] da Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente (FCT/UNESP) que, desde 2004, seu corpo docente e discente tem recebido orientações e capacitações oferecidas pelo programa RIVED.

Em consequência, a equipe do NEC é responsável pelo desenvolvimento e implementação de uma quantidade significativa de objetos de aprendizagem nas áreas de Matemática, Física, Educação Física, Ciências, Química, Biologia, Língua Portuguesa e Educação Especial, com elaboração dos respectivos "Guia do Professor" e documentação relacionada. Os OA abordam temas do ensino fundamental e médio, com forte integração de mídias e com uma abordagem interdisciplinar, utilizando recursos como: Internet (HTML), som, animação interativa, *movie-clips*, voz, texto, músicas, entre outros.

Além disso, essa equipe tem estabelecido estreita parceria com escolas públicas, com o objetivo de testar e avaliar os objetos produzidos. Nesse trabalho, alunos e professores envolvem-se diretamente com o uso dos objetos em ambientes de aprendizagem, nos quais os pesquisadores realizam investigações, a fim de diagnosticar e identificar os aspectos mais relevantes no emprego do OA.

Um dos aspectos interessantes destacados pelos pesquisadores relaciona-se ao fato de que o uso dos OA tem permitido ao aluno a imersão em contextos de seu interesse, por meio de animações que utilizam a linguagem visual como recurso tecnológico, para mediatizar ideias e conceitos de uma forma diferente do texto escrito. Tal caminho possibilita libertar-se do formalismo no qual o conteúdo é tratado de um modo mecanicista, caindo nos

[10] Para conhecer o projeto "RIVED/Fábrica Virtual e Portal do Professor" acesse: http://www.rived.mec.gov.br/
[11] Maiores informações consulte: http://www.nec.prudente.unesp.br/NEC/Home.php.

métodos já consagrados de ensino, conteudistas e tecnicistas, pautados na ação do professor e não na atividade dos alunos. Em todo o desenvolvimento do processo de análise e implementação dos OA, há um constante levantamento bibliográfico na abordagem e problematização dos temas relacionados às áreas de Matemática, Física, Educação Física, Ciência Química, Biologia, Língua Português e Educação Especial, examinando-se sua importância prática e teórica, além dos métodos e processos de ensino pelos quais se obtém o conteúdo de seu conhecimento.

Em síntese, as etapas de produção de um OA são:

- Design pedagógico;
- Roteiro;
- Estudo de recursos de interatividade e acessibilidade;
- Interfaces;
- Programação;
- Guia do Professor;
- Avaliação;
- Catalogação.

As atividades são realizadas por três tipos de participantes distintos, denominados Analistas Pedagógicos, Designers e Programadores, e as ações de cada equipe são divididas para atender aos seguintes objetivos específicos:

- Análise dos temas a serem abordados: as áreas do conhecimento atendidas com esta proposta e as possibilidades de Integração de Mídias na Educação, com o objetivo de ordenar as opções que visam à definição conceitual do OA e à elaboração de toda a documentação relacionada (Design pedagógico e Roteiro);
- Implementação dos OA, procurando, na medida do possível, atender às opções de acessibilidade, a fim de satisfazer tanto as normas de acessibilidade para *Web*, no padrão mundial, com o apoio na W3C (http://www.w3.org/), quanto as normas específicas disponíveis no site do próprio Governo Federal;
- Elaboração dos Guias do Professor pela equipe pedagógica, com o cuidado de oferecer orientação ao docente sobre o uso pedagógico do objeto produzido, apresentando estratégias e métodos de ensino

baseados em uma abordagem interdisciplinar, aliando as diferentes áreas do conhecimento;

- Acompanhamento e desenvolvimento de avaliações nos módulos implementados, por meio de um constante trabalho de observação e visita aos ambientes de aprendizagem de escolas públicas.

As equipes assim estabelecidas facilitam a distribuição e/ou desenvolvimento de tarefas. Durante todo o projeto, são realizadas reuniões para análise, reflexões, discussões e revisões das etapas em desenvolvimento.

A comunicação também é feita pelo sistema de correio eletrônico interno do ambiente TelEduc. Esse Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) funciona como um canal de comunicação direto entre formadores, coordenadores, alunos, convidados e visitantes, em que cada participante do ambiente tem uma senha e uma identificação pessoal (login).

No presente trabalho, a pesquisadora compromete-se com a concepção pedagógica e posterior análise do objeto de aprendizagem na área de Matemática, intitulado "O universo e seus contrários", o qual aborda o conceito números inteiros, indicado para as 6ªs séries do Ensino Fundamental.

Para tanto, a inserção e participação da pesquisadora na equipe pedagógica da área de Matemática, foi necessária para compartilhar e organizar todos os objetivos e tarefas a serem cumpridas.

No início desse processo, a principal preocupação do grupo resumiu-se em evitar que o uso da tecnologia se limitasse a fazer uma exposição de informações estanques e fragmentadas, com atividades desconexas de seus contextos, distanciando-se de seu potencial interativo.

Ao discutir o uso das mídias na Educação, Belloni (2001) defende que

> [...] Suas características essenciais – simulação, virtualidade, acessibilidade a superabundância e extrema diversidade de informações – são totalmente novas e demandam concepções metodológicas muito diferentes daquelas das metodologias tradicionais de ensino, baseadas num discurso científico linear, cartesiano e positivista. Sua utilização com fins educacionais exige mudanças radicais nos modos de compreender o ensino e a didática. (BELLONI, 2001, p. 27).

Isto implica que para corresponder as características especiais dos diversos tipos de mídia, as estratégias metodológicas definidas para seu aproveitamento em sala de aula, devem desafiar o utilizador a interagir com seus elementos como forma de viabilizar a aprendizagem dos conhecimentos escolares. Em termos de produção de objetos de aprendizagem, esta relação interdependência não é diferente. Nessa perspectiva, Silva e Fernandez (2007) desenvolveram uma análise acerca dos principais componentes de alguns objetos de aprendizagem e observaram que

> [...] na grande maioria, estes apresentam ideias interessantes e propostas bem elaboradas do ponto de vista da computação gráfica. Porém, a proposta pedagógica e epistemológica subjacente a eles mostra-se bastante tradicional. Geralmente, as atividades apresentam um movimento de polarização que tende a valorizar ou a experimentação ou a observação ou a teoria científica. (SILVA; FERNANDEZ, 2007, p. 35- 36).

Estes argumentos esclarecem que, seja a criação de materiais, de estratégias ou de metodologias, estas devem vir apoiadas em uma concepção teórico-metodológica dos processos de ensino e aprendizagem. Dessa maneira, a fim de nos encontrarmos com o conceito e oferecer-lhe uma nova forma, concebemos a perspectiva lógico-histórica como fundamentação teórica nesse processo.

Nesse sentido, o nosso Objeto de Aprendizagem (OA) será composto por elementos de criação conceitual, através da vivência ativa de uma problematização objetiva e histórica, que permita ao aluno navegar por diversos tempos e espaços, de sorte que a perspectiva lógico-histórica preencha o Objeto de Aprendizagem (OA), numa fusão tão absoluta que resulte em uma única metodologia de ensino.

1.2 A perspectiva Lógico-Histórica

> *A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir a maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.(Bento de Jesus Caraça)*

É com essa riqueza que Caraça (1984) concebe a ciência em que buscamos apreender as propriedades, os fenômenos e as relações que compõem o conceito números inteiros, tal como foram elaboradas pela humanidade ao longo da história. Pois, concordando com Kopnin (1978, p.53), "uma vez apreendidas, as leis do mundo objetivo se convertem em leis do pensamento, e todas as leis do pensamento são leis representadas do mundo objetivo".

> Quanto mais alto for o grau de *compreensão* dos fenômenos naturais e sociais, tanto melhor o homem poderá se defender dos perigos que o rodeiam, tanto maior será o seu domínio sobre a Natureza e as suas forças hostis, tanto mais facilmente ele poderá realizar aquele conjunto de atos que concorrem para a sua segurança e para o desenvolvimento da sua personalidade, tanto maior será, enfim a sua *liberdade*. (CARAÇA, 1984, p. 64, grifos do autor).

Ao passo que o homem dirigiu seu pensamento no sentido de apreender os objetos e fenômenos da natureza, "no processo da eterna e infinita aproximação do pensamento ao objeto" (KOPNIN, 1978, p. 187), foi formando relações recíprocas e indivisíveis entre si e a realidade que resultaram na construção de conhecimentos e no desenvolvimento de seu pensamento. Desse modo,

> [...] o pensamento humano busca formas que possibilitem a transformação contínua da realidade através de seu trabalho físico e intelectual durante a sua pequena trajetória ou viagem no universo, trajetória que designamos pelo nome de vida. (SOUSA, 2004, p. 52)

Desde suas primeiras manifestações físicas e intelectuais na busca de entender, explicar, controlar e representar a realidade natural, o homem se comporta de maneira a adquirir conhecimento. Com isso, as artes, crenças, rituais, valores, técnicas, códigos, padrões, enfim, as ações individuais e coletivas, apropriadas da realidade natural, aquilo que chamamos de cultura, são essenciais no desenvolvimento da humanidade (homem e sua realidade).

No entanto, atualmente, com os avanços científicos apoiados pela informática, temos, de um lado, descobertas que permitem inferir na composição da matéria, modificando os destinos da humanidade elaborados pela natureza, como os transgênicos e a clonagem. Enquanto que, ao mesmo tempo, convivemos com a volta dos velhos problemas da dengue, da febre amarela, da fome, da violência. Essa desarmonia revela os caminhos e descaminhos da ciência.

Há tempos as influências da "revolução na ciência"[12] vêm preocupando diversos teóricos. Ao estudar o conceito de matéria, Bohm & Peat (1989) defendem que essa dispersão entre as necessidades fundamentais da humanidade e os objetivos da ciência se deva

[12] Transição ocorrida já desde o início do século XIX, quando a ciência passa a estabelecer padrões de rigor matemático, apoiando-se em conceitos imutáveis e absolutos.

ao modo "fragmentário" com que os problemas são formulados, dentro de contextos tão limitados acabam perdendo de vista a sua real essência. Nessa abordagem, os resultados das experiências científicas só são aceitos como verdade se forem descritos por fórmulas, enquanto que as "ideias subjacentes" as mesmas não apresentam valor algum.

Nesse contexto, Kopnin (1978) considera a revolução na ciência como parte da revolução técnico-científica e aponta os problemas do determinismo da estrutura lógica do pensamento científico atual.

> Ao avançar no sentido de novos resultados, o pensamento sempre segue os princípios da lógica formal, mas sem se limitar a eles, pois deve chegar a um conceito com o qual a ciência antes não operava. Sozinha, a lógica formal do pensamento nunca chegará a semelhante conceito. Deve apoiar-se em conceitos substanciais, que podem empurrá-la a novos conceitos. (KOPNIN, 1978, p. 29).

É certo que a lógica formal estabelece normas que garantem através de sua precisão e rigor um apoio, um norte ao movimento do pensamento para que este possa orientar-se na busca do objeto de estudo. Todavia, além disso, a especulação aos novos objetos da realidade necessita de um pensamento fluido que percorra as diversas áreas do conhecimento, servindo de base à atividade criadora do sujeito.

Diante desse paradoxo, Kopnin (1978) concebe a dialética como lógica e teoria do conhecimento, pois tenta desenvolver uma relação equilibrada e simultânea entre o pensamento livre, necessário à criação de um novo conceito científico, e a rigidez das regras e leis da dedução lógico-formal. Nesse sentido, desenvolve categorias que desempenhem essa função.

> A criação de dispositivos lógicos e matemáticos acabados representa um indiscutível progresso do conhecimento, mas como todo dispositivo, mina em certo sentido o pensamento, mantendo-o em certos limites, impedindo alguma coisa, reprimindo a especulação humana que procura ultrapassar os limites e padrões vigentes. Por isso o pensamento humano sempre carece de novos conceitos que lhe ampliem as possibilidades. É verdade que ao ultrapassar os limites dos conceitos e esquemas vigentes, o pensamento torna a cair nos mesmos, pois cria novos conceitos, novo dispositivo; o pensamento criador também é determinado por categorias, mas por categorias que permitem uma grande escolha na solução e não dirigem o pensamento de maneira rígida mas com certa liberdade. (KOPNIN, 1978, p. 31).

Diante disso, o autor compreende as categorias da dialética como um instrumento da ação criadora do sujeito, em que "o pensamento deve refletir o objeto com todas as suas contradições internas". Nessa perspectiva, a categoria do lógico e do histórico apresenta-se como forma de pensamento que reflete “a essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações” (KOPNIN, 1978).

Desde o início dessa investigação, todos os nossos objetivos e hipóteses partiram e foram orientados por um referencial teórico que nos permitiu aproximarmos da composição lógica do conceito números inteiros, construída nas civilizações orientais e ocidentais, ao longo dos tempos, isto é, de sua essência.

Desse modo, concebemos a perspectiva lógico-histórica como fundamentação teórica de nossa pesquisa. Porém, por se tratar de uma dissertação de mestrado, ressaltamos que apenas o lógico-histórico enquanto forma de pensamento e perspectiva didática será usado no desenvolvimento deste estudo.

Entendemos o lógico-histórico como a integração da lógica matemática e do movimento histórico de sua formação, do que resulta um movimento único de criação matemática. Nessa integração, a lógica matemática adquire história e perde o caráter fragmentado de produto pronto e acabado. Por outro lado, a história afasta o caráter formal de sequência de fatos e datas, assumindo sua relação com a evolução da humanidade.

Mas como encontrar a identidade entre o conceito matemático e o movimento histórico de sua criação? Penetrando no imaginário[13] dos diversos personagens da história da Matemática, identificando os fatos históricos que despertaram a criação dos conceitos responsáveis pela superação dos conceitos antecedentes. Trata-se de captar os conceitos propulsores do desenvolvimento da racionalidade conceitual do homem.

Todavia, o estudo desses elementos não significa

> [...] fotografar o processo histórico real com todas as suas casualidades, ziguezagues e desvios. O pensamento não é obrigado a seguir cegamente o movimento do objeto em toda a parte. Por isso o lógico é o histórico libertado das casualidades que o perturbam. (KOPNIN, 1978, p. 184).

O “lógico” ao qual nos referimos “é o reflexo do histórico em forma teórica” e, funciona como meio necessário para conhecer, bem como interpretar o processo histórico do objeto (KOPNIN, 1978).

Com base nessa compreensão, a perspectiva lógico-histórica apreende o conceito em seu movimento de criação e depura-o dos elementos casuais, identificando a ideia principal, o substancial, no próprio ato da criação intelectual.

[13] Termo usado por Lizcano (1993), tomado por nós como forma de pensamento de um grupo (KOPNIN, 1978).

> Isto significa que a reprodução da essência deste ou daquele fenômeno no pensamento constitui ao mesmo tempo a descoberta da história desse fenômeno, que a teoria de qualquer objeto não pode deixar de ser também a sua história. Por isso as definições primárias do objeto, a lógica dos conceitos que o expressam constitui ponto de partida no estudo do processo de formação e desenvolvimento de dado objeto. (KOPNIN, 1978, p. 185).

Numa primeira investigação sobre o desenvolvimento da Matemática, percebe-se que os conceitos apresentam certos momentos de estabilidade em seu processo de evolução, porém, entre os quais permeiam pontos de conexão de uma teia dialética que, quando acionados, desencadeiam transformações radicais na estrutura e conteúdo do objeto. Kopnin (1978) define tais pontos de conexão como pares dialéticos que revelam a essência do conhecimento matemático.

No processo evolutivo da Matemática, cada momento de estabilidade é constituído por uma representação do mundo guiada por concepções filosóficas, científicas e ideológicas, que trazem em si leis universais que movem o pensamento do “simples ao complexo, do inferior ao superior”, e esse movimento ascendente também “expressa a lei do desenvolvimento dos fenômenos do mundo objetivo” (KOPNIN, 1978).

Somente a partir de uma sucessão de negações dialéticas ou rupturas, é que se consegue desestabilizar a estrutura então vigente do conceito matemático, para entrar em um novo momento de estabilidade. Sob essa força de criação de conceitos está a força do espírito humano na evolução da Matemática (CARAÇA, 1984).

Para descobrirmos ou ainda pensarmos e selecionarmos os links[14] mediadores das mudanças no objeto, precisamos considerar o desenvolvimento da Matemática em sua totalidade. Para Bohm & Peat (1989, p. 17), “diferentes gêneros de pensamento e diferentes gêneros de abstração podem, juntos, dar-nos um melhor reflexo da realidade”.

O pensamento lógico-histórico e os objetos por ele estudados acompanham a mutabilidade da história do objeto inserido numa realidade insétil[15] e em constante movimento, levando assim em consideração tanto a unidade quanto a natureza dinâmica do universo.

Essa tarefa rompe com a visão fragmentada da história da Matemática, que rompe com a visão fragmentada da história da cultura humana. Dessa maneira, o mundo real

[14] Termo adaptado por nós, tem o sentido dos pares dialéticos definidos por Kopnin (1978), mas aqui as conexões possuem vários pares dialéticos, como nos links são múltiplas e laterais.
[15] Uma realidade global (holística), cujas divisões do todo em várias partes, por meio do “corte” de suas relações, é artificial.

passa a ser visto como um todo sistêmico, onde tudo tem a ver com tudo, estando o todo "envolvido" em cada uma de suas partes.

> [...] Em se tratando da sala de aula, a totalidade do conhecimento científico pode ser entendida enquanto movimento transdisciplinar que vai do geral para o particular e vice-versa. Há a necessidade de se compreender o aspecto singular e particular das áreas do conhecimento. Há necessidade de se compreender o papel da disciplinaridade e da interdisciplinaridade dos conceitos presentes nos conteúdos. (SOUSA, 2007, p. 4)[16].

Ao considerarmos os conceitos matemáticos como reflexo das contradições objetivas no movimento das coisas que surgem sob o movimento histórico de apreender a essência do objeto, e as contradições lógicas que surgem como resultado da infração, do rompimento com as leis da lógica formal trazidas pelo sujeito histórico (KOPNIN, 1978), devemos assumir que a natureza do conhecimento matemático é fruto de um tipo específico de atividade humana vinculada às necessidades sociais.

Nessa perspectiva, o desenvolvimento da Matemática sobrevém de experiências[17], não estritamente matemáticas, sob uma variedade de circunstâncias socioeconômicas e culturais que desenham seu contexto, ou seja, concebemos a Matemática como um metabolismo vivo, constituído pelas exigências de sua realidade social. Dessa forma, os fatores sócio-culturais nos permitem entender como as diferentes culturas determinam a criação, a formalização e a assimilação desse conhecimento.

O lógico-histórico dos números inteiros advém de premissas sociais, culturais, filosóficas, econômicas e científicas da realidade objetiva, que variam conforme as exigências de cada civilização, em diversos períodos históricos.

1.3 Apropriação de conceitos matemáticos: pensamento empírico e teórico

Ao considerarmos a dimensão histórica dos processos do conhecimento matemático, inferimos que estes apresentam fatores externos e internos que desempenham importantes papeis no seu desenvolvimento.

---

[16] Disponível em http://www.alb.com.br/anais16/sem15dpf/sm15ss02_04.pdf . Acesso em 24 de mai. de 2008.

[17] Experiência, para Kopnin (1978), não é somente aquilo que envolve o aspecto sensorial, concreto manipulável, mas também aquilo que envolve ações desenvolvidas pela humanidade enquanto se constrói.

A reprodução da criação e do desenvolvimento das situações-problema que envolvem o conceito números inteiros exigiu-nos, além da compreensão desse conhecimento, descobrir novos aspectos e novas relações do movimento desse conceito no pensamento, partindo do pressuposto teórico de que o desenvolvimento do indivíduo pode ser considerado como um fenômeno social coletivo, enraizado e inseparável do contexto social e cultural, da própria história social e cultural desse indivíduo (VYGOTSKY, 2001). Podemos dizer que "o pensamento de um homem é o movimento das formas de atividade da sociedade historicamente constituídas e apropriadas por aquele" (DAVYDOV[18] apud SOUSA, 2004, p. 60)

Nesse sentido, entendemos a cultura como o conjunto de significados que a pessoa partilha com outros e que determinam suas atitudes, suas representações, seus saberes, seu comportamento social e, também, suas experiências educativas. Assim, concordamos com Sforni (2004), para quem "todo ato educativo é uma ação que envolve e constitui alguém em uma cultura".

Uma vez que a apropriação da cultura ou a socialização do indivíduo é propiciada pela educação, a escola adquire um papel significativo e delicado, nesse processo.

Delicado, porque ao passo que a escola assume o papel de socialização dos indivíduos que a compõem, esta precisa ao mesmo tempo, gerir a diversidade cultural, de modo a proporcionar uma harmonia entre as diferenças culturais presentes em seu âmbito, respeitando as diversas raças, etnias, classes sociais, religiões, políticas, enfim, reconhecendo as diferentes culturas e não apenas as dominantes e seu discurso.

A humanização do indivíduo significa vincular e desvincular esse indivíduo da sociedade. Vincular, no sentido de socializar, de oferecer meios para que ele adquira os signos, códigos e instrumentos culturalmente desenvolvidos. E desvincular, no sentido de que, inserido nessa sociedade, o indivíduo desenvolva um pensamento crítico em relação à mesma.

Vale ressaltar que existe uma diferença entre o desenvolvimento da sociedade e a participação de cada indivíduo, nesse processo. "Interagir com uma determinada cultura não significa aceitá-la ou incorporá-la, mas adquirir condições para estabelecer diálogos que possam levar tanto à conformação quanto à sua negação" (SFORNI, 2004).

Podemos sintetizar essa perspectiva teórica através do esquema: Socialização → Singularização → Humanização.

---

[18] DAVÍDOV, V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psiquico*. Havana: Editora Progresso, 1988.

> [...] Todo conhecimento que está sendo produzido na prática social precisa ser novamente produzido em cada indivíduo singular, e isso só é possível por meio da apropriação dos conhecimentos. O processo de apropriação e de objetivação é que torna os indivíduos cada vez mais humanizados. (FACCI, 2006, p.137).

Segundo Dias (2007, p.46), "atuar no mundo buscando compreender os objetos e fenômenos é o conteúdo da apropriação humanizadora para objetivação também humanizadora". E isso vai além da apropriação de conhecimentos cotidianos, abrange a apropriação de conhecimentos científicos.

Vygotsky (2001) considera que os conhecimentos científicos ou não cotidianos podem ser adquiridos através da aprendizagem escolar e são voluntariamente mobilizados pelas crianças, enquanto que os conhecimentos cotidianos ou espontâneos são provenientes da experiência da vida, do senso comum. Como exemplo, poderíamos utilizar o caso da alimentação: as crianças podem verbalizar alimentos familiares como o leite, o pão, o queijo, a manteiga, pois elas os manipulam cotidianamente. No entanto, utilizar o conceito de lipídios é muito mais complicado para elas, já que deveriam compreender o princípio de categorização sobre o qual se fundamenta esse conceito.

Quando nos referimos a conhecimento cotidiano, cremos que devemos considerar a influência do contexto atual, no qual o indivíduo está inserido. Dentre vários fatores, o cotidiano da presente realidade tem sido marcado por uma avalanche de informações oferecidas pelos meios de comunicação, em especial, a Internet.

No entanto, uma sobrecarga de informações produzidas por mecanismos externos ao indivíduo, provenientes de fontes no mínimo desconfiáveis, não significa mais conhecimento, uma vez que, junto aos avanços científicos e tecnológicos que compõem esse cenário digital, surgem conceitos, códigos e signos cada vez mais complexos, impossíveis de serem decifrados através de conhecimentos superficiais, alcançados de maneira fragmentada e descontextualizada. (CARNEIRO, 2002)

Para ir além das noções cotidianas, utilitárias e concretas dos conceitos, vê-se necessário a apropriação de conhecimentos científicos por meio do conhecimento da gênese e da natureza dos conceitos, o que permite ao pensamento transitar por diversos outros conceitos, não estritamente matemáticos, possibilitando a compreensão das razões de sua criação e as relações de uns com outros, sem exigir um número excessivo de informações secundárias. (LANNER de MOURA et al, 2003)

É importante frisar que, quando discordamos do conhecimento cientifico ensinado nos limites do pensamento empírico, não desconsideramos a importância da aquisição de conhecimentos cotidianos.

Vygotsky (2001) observou, também, que os conhecimentos científicos e os cotidianos estão intimamente ligados. Uns não podem existir sem os outros. Há uma relação dialética entre eles. As crianças dão um sentido às definições e explicações científicas através da utilização dos conhecimentos cotidianos. Os conhecimentos cotidianos "vivos" são a base para o desenvolvimento e a construção dos saberes científicos. Dito de outro jeito, os saberes cotidianos desempenham o papel de uma espécie de base provisória, sobre a qual são construídos os saberes científicos.

Ao tratar sobre os processos de generalização e formação de conceitos científicos, Davydov (1982) aponta diferenças qualitativas entre o pensamento empírico e teórico. Por sua vez, Dias (2007, p. 49) entende que "o pensamento empírico e teórico são níveis do movimento do pensamento. A diferenciação está no modo em que se obtém o conteúdo do conhecimento e pela sua importância prática e teórica."

Por exemplo, a formalização das regras de sinais possui um papel decisivo na estruturação do conceito números inteiros, porém sua obtenção pelas vias da lógica formal, tende a valorizar apenas sua operacionalidade matemática.

No pensamento empírico, os objetos e fenômenos são representados através de suas propriedades extrínsecas, ou seja, dos nexos externos do conceito, os quais, ao longo do texto, são interpretados e tratados como os "aspectos simbólicos" do conceito. No caso dos números inteiros, tomam-se seus aspectos, relações e expressões exteriores, a representação do -1, por exemplo, ou, ainda, a própria reta numérica em Z. A descrição do objeto é tomada isoladamente, classificando-se seus traços singulares e exemplificando-os em situações práticas.

Para superar as limitações do pensamento empírico, a construção do objeto de aprendizagem desenvolvido nesse estudo, enquanto forma e os números inteiros enquanto conteúdo, preocupou-se em contextualizar os aspectos simbólicos desse conceito através das representações consideradas significativas em seu desenvolvimento lógico-histórico, ou seja, além dos sinais (+) positivo e (-) negativo, o complexo simbólico yin/yang/dao e os palitos coloridos (preto/vermelho).

O conhecimento experimental (KOPNIN, 1978, p. 160) dissociado do pensamento teórico consiste em perceber, separar e conceituar os atributos do objeto de estudo. Porém, isso ocorre mediante generalizações somente das características externas do objeto que, abstraídas sensorialmente, salientam as propriedades secundárias, obscurecendo a essência do fenômeno.

Nesse processo de abstração, segundo Davydov (1982, apud SOUSA, 2004, p. 65), os objetos são separados por seus atributos gerais, formando-se uma classe especial, no pensamento, com determinadas “propriedades abstraídas das representações dos objetos de estudo”, com a qual se pode operar independentemente. (SOUSA, 2004)

Kopnin (1978, p. 161, grifos do autor) defende que “a *tarefa da abstração* não é separar uns dos outros os indícios sensorialmente perceptíveis mas através deles *descobrir novos aspectos no objeto*, que traduzam as relações de essência”.

Todavia, quando o objeto de estudo se trata do conceito números inteiros, consideramos que o conjunto de ideias que refletem suas relações conceituais, não surgem como resultado da abstração das propriedades captadas empiricamente. De tal processo de generalização, relacionado com a abstração, pode formar-se uma classe de abstrações inferiores, representadas por conceitos intimamente ligados à realidade empírica por onde as abstrações superiores se encontram tão afastadas, a ponto de se traduzirem como produtos de um processo completamente independente da realidade, desumanizado. Resumindo, estabelecer uma relação entre as classes superiores de abstração e as abstrações de nível mais baixo é algo muito difícil.

A partir de uma investigação teórico-metodológica sobre os elementos que fundamentam os modos de ação, realizados na escola, Sforni (2004, p. 66), apoiada nos estudos de Davydov (1982), argumenta que “certos princípios didáticos, método de estruturação das disciplinas e procedimentos metodológicos sofreram forte influência da teoria empírica da generalização”.

Esse rigor e formalismo são utilizados pela lógica formal para apresentar os conceitos. No caso dos conceitos matemáticos, são reduzidos a códigos de regras em algoritmos. Segundo Dias (2007, p. 47), “a relação da lógica formal com a matemática é tão estreita que, muitas vezes, se toma uma pela outra”.

Para Lima (1998), essa forma e conteúdo lógico-formais, presentes no ensino, provém em parte do desenvolvimento da linguagem matemática, no qual o registro dos procedimentos mentais deram lugar a números e cálculos cristalizados em fórmulas. Além disso, tem a ver com o desenvolvimento industrial, ocorrido a partir do século XIX: a fim de suprir as exigências do mercado de trabalho, a sociedade passou a priorizar o “saber fazer” repetitivo, mecânico, em detrimento do "saber pensar". Ambos os acontecimentos caracterizaram a formação e a estruturação curricular da escola.

Por essas razões, a lógica formal encontra-se na formação tanto dos conceitos cotidianos como de conceitos empíricos da ciência. Para Sousa (2004, p. 132), "de modo geral, na maioria das salas de aula, o ponto de partida do conhecimento é a manipulação dos objetos e o ponto de chegada do conhecimento é o lógico formal dos conceitos estudados".

Dias (2007) acrescenta:

> [...] Na base de todo conhecimento humano, o homem leva em consideração não somente as propriedades externas dos objetos como também as conexões internas, sua essência. São essas conexões que permitem ao ser humano a transformação dos objetos, produzindo seus instrumentos. E na atividade produtiva dos instrumentos, materiais ou ideais, que o homem desenvolve o pensamento teórico. (p. 50)

Essas conexões internas, presentes no cerne do conceito, são chamadas de nexos internos por Davydov (1982, apud SOUSA, 2004, p. 61) e Kopnin (1978). "O pensamento teórico contém os nexos internos do conceito", denominados por Sousa (2004, p. 61) como "nexos conceituais", os quais "fundamentam os conceitos, contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento". Nesse estudo, compreendemos esses "nexos conceituais" como os "aspectos substanciais" que oferecem sentido ao conceito.

A construção do pensamento teórico ultrapassa os limites da experiência prática, pois contém o movimento lógico-histórico do objeto. No caso do conceito números inteiros, a superação do pensamento empírico e o desenvolvimento teórico significam pensar e quantificar arbitrariamente os movimentos contrários do universo, através dos diferentes argumentos, representações e técnicas precedentes aos números inteiros empregadas pela humanidade, ao longo do tempo.

Ao olharmos a totalidade do conceito números inteiros, reconhecemos nos princípios de contradição e equivalência a possibilidade de movimento ou mediação entre o número e o zero, entre a "positividade e a negatividade"[19], de maneira que os compreendemos como os seus aspectos substanciais.

[19] Elementos que, ainda em forma embrionária, já apresentam os traços característicos dos números inteiros, números positivos e negativos.

Por isso, a perspectiva lógico-histórica pode permitir aos envolvidos no processo aprender a pensar, criando conceitos num movimento semelhante ao da dinâmica da criação conceitual na história do conceito.

> O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para uma compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos com o conhecimento da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam. Deste modo, a teoria do objeto fornece a chave do estudo de sua história, ao passo que o estudo da história enriquece a teoria, corrigindo-a completando-a e desenvolvendo-a [...] (KOPNIN, 1978, p. 186).

Nesse sentido, buscamos identificar os aspectos "substanciais" e "simbólicos" nas dificuldades e desempenho lógico de diversas civilizações na apreensão e desenvolvimento do conceito números inteiros, a partir de uma investigação que vai além dos conhecimentos estritamente matemáticos, possibilitando a compreensão das razões de sua criação e as relações de uns com outros.

Por conseguinte, materializar esses aspectos "substanciais" e "simbólicos" do conceito números inteiros dentro das particularidades de um objeto de aprendizagem, de modo a constituir o objeto de estudo dessa pesquisa.

O estudo da natureza do conceito números inteiros sob o ponto de vista de diversas civilizações e modos de racionalidade, com seus limites e contradições, mostram que todo conceito matemático é naturalmente um conceito teórico, que, por sua vez, já foi um conceito empírico numa etapa anterior da ciência, quando o homem apenas manipulava seus conceitos formadores, iniciais, guiado por suas necessidades culturais.

Do mesmo modo, podemos dizer que o pensamento teórico transforma-se em empírico. Sistematizado, o pensamento é operacionalizado, com vistas a atender aos objetivos sociais.

Mas, como explica Sousa (2004)

> [...] o núcleo que processa as abstrações do pensamento está em constante movimento, em constante transformação, seguindo o ritmo do universo, seguindo o ritmo do mundo, seguindo o pulsar da vida, sempre pronto a elaborar novos conceitos, sem conseguir se desprender das raízes que o compuseram, [...].(p. 72).

Muda o contexto social, mudam as necessidades culturais, deve mudar o pensamento. Assim, o pensamento teórico converte-se em empírico até que os conceitos pré-existentes sejam reestruturados e (re)construídos num movimento dialético de luta entre fatores externos e internos cuja fluência de novas necessidades sociais entram em contradição com os conhecimentos já existentes. Essas forças opostas e simultâneas representam, para nós, o processo de evolução do conceito, da ciência e da humanidade.

Nesse contexto, o lógico-histórico reflete o movimento do pensamento, presente no processo de abstração e formação de conceitos matemáticos. A perspectiva lógico-histórica reflete propriedades dos conceitos, não somente produtos de aspectos qualitativos dos objetos reais, mas também da imaginação, intuição e criatividade.

Muitos objetos do conhecimento matemático não podem existir, por sua própria concepção, como objetos da realidade objetiva, mas, operando com elos, nexos, como coisas realmente existentes, podem-se compreender mais profundamente aqueles aspectos das propriedades e relações subjetivas que a realidade objetiva reflete.

Segundo a teoria do conhecimento desenvolvida por Kopnin (1978), esses objetos idealizados do conhecimento são juízos do pensamento que se movimentam do subjetivo ao objetivo no processo de apreensão do conhecimento, ou seja, "juízo é toda ideia relativamente acabada, que reflete as coisas, os fenômenos do mundo material, as propriedades, conexões e relações destes".

Segundo Kopnin (1978, p. 193-195) o juízo responde o que é inerente ao objeto, que aspectos, propriedades e indícios ele possui, por isso "é a forma mais simples e geral do pensamento".

Nessa perspectiva, a emissão de juízos revela-se uma importante arma no processo investigação de nosso objeto de estudo, pois "através de seu conteúdo o juízo sempre estabelece algo, comunica, motiva e interroga sobre os objetos, os fenômenos do mundo material que nos interessam."

Tendo em vista que a investigação de nosso objeto de estudo consiste na análise das potencialidades de um objeto de aprendizagem, construído sob os fundamentos da perspectiva lógico-histórica, e seguindo as bases teóricas dessa pesquisa, "a importância da prática é multilateral no movimento do pensamento: ela é a base do pensamento, determina-lhe o fim e atua como critério da verdade" (KOPNIN, 1978, p. 169), a opção metodológica encontrada para realizar esse trabalho, assenta-se na utilização prática do referido OA por uma 6ª série do Ensino Fundamental.

Isto se refere à interação entre os alunos da 6ª série e o objeto de aprendizagem (foco do estudo), cujos resultados dessa interação, as falas dos alunos ao operar com o OA, "são direta ou indiretamente acessíveis à contemplação empírica, pois surtem efeito a mudança do objeto e, simultaneamente, do próprio sujeito" (KOPNIN, 1978, p. 168).

"Aqui se vê com clareza a diferença entre a prática e o ideal, cujo valor e significado estão implícitos não nele mesmo mas em *algo diferente* que surge como resultado da sua realização prática (KOPNIN, 1978, p. 169, grifo nosso)". No caso dessa pesquisa, esse "algo diferente" ao qual o autor se refere, é o que se pretende olhar das falas dos alunos, isto é, os juízos enquanto "*forma mais simples e mais importante de abstração*, que constitui simultaneamente o traço característico de todo processo de pensamento" (KOPNIN, 1978, p. 195, grifos do autor).

Nessa perspectiva, os juízos constituem o elo fundamental entre as falas dos alunos e as potencialidades do OA. Efetivamente, "até a simples exposição dos resultados da contemplação viva, sensorial, manifesta-se igualmente a forma de juízos. Não há pensamento se não há o ato de predicação, cuja expressão é o juízo." (KOPNIN, 1978, p. 195-196).

Quando se fala na formação de conceitos, a teoria do conhecimento também coloca que é necessário estudar uma infinidade de fenômenos, acontecimentos e coisas singulares. O singular existe, antes de tudo, na gênese do próprio conceito.

O singular, aqui, é sinônimo de único, de unicidade, o que já não acontece no conceito de particular. Há particularidades no conceito números inteiros, em relação ao conceito de conjunto dos números naturais. Por exemplo, posso fazer cálculos subtraindo o maior do menor e, ao mesmo tempo, há a unicidade do número negativo e a unicidade do número natural.

Vygotsky (2001) salienta que

> [...] todo conceito deve ser tomado em conjunto com todo o sistema de suas relações de generalidade, sistema esse que determina a medida de generalidade própria desse conceito, da mesma forma que uma célula deve ser tomada com todas as suas ramificações através das quais ela se entrelaça com o tecido comum. (p. 294).

Dessa forma, o singular é o ponto de partida na formação do conceito, pois o conceito por si só, "não reflete todo o processo em toda a sua naturalidade", mas a "natureza universal deste" (KOPNIN, 1978, p. 204). Por conseguinte, a dedução é uma forma de transição de um juízo ao outro, capaz de estabelecer uma conexão entre o singular e o universal. (KOPNIN, 1978)

O juízo enquanto forma de pensamento que expressa uma ideia em construção é um processo de apreensão do objeto pelo pensamento, que se manifesta sob diversas formas que podem ser vistos como “momentos desse processo”. (KOPNIN, 1978, p. 198)

> No conceito esses momentos não são desmembrados mas dados como algo totalizado; no juízo eles se decompõem, os conceitos se subdividem em seus componentes, os singular e o universal atuam como sujeito e predicado unificados por uma cópula. Na dedução restaura-se a unidade entre o singular e o universal [...] (KOPNIN, 1978, p. 189)

A lógica dialética classifica os juízos em “*juízo da singularidade*” registra um fato qualquer, no conceito números inteiros, por exemplo, o “excesso” ou “lucro” são aspectos notáveis na realidade e facilmente representados pelos números positivos; o “*juízo da particularidade*” revela certa forma especial, ao mesmo tempo o “excesso” ou o “lucro” traz em si, a “falta” ou “débito”, que não são aspectos dados na natureza, mas sim construídos no pensamento e representados simbolicamente pelos números negativos. E “*juízo da universalidade*” expressa a lei universal do movimento dos fenômenos, a contradição, por exemplo. “Essa classificação dos juízos engloba todo o processo de movimento dos juízos: do conhecimento dos fenômenos ao conhecimento da essência.” (KOPNIN, 1978, p. 203).

Sousa (2004, p. 52) considera que “a confluência entre o lógico e o histórico conecta o singular à totalidade, os nexos internos aos nexos externos do conceito, o pensamento flexível aos pensamentos empírico-discursivo e teórico”.

Deste modo, por meio da perspectiva lógico-histórica enquanto forma de pensamento e perspectiva didática, pretendeu-se construir um objeto de aprendizagem composto pelos aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros e por meio dos juízos elaborados pelos alunos de uma 6ª série ao lidar com o já mencionado OA, buscou-se analisar as potencialidades pedagógicas desse instrumento.

1.4 Números inteiros: um desafio à didática da Matemática

Para Vygotsky (2001), os conceitos cotidianos são formados por meio de interações sociais imediatas da criança com o meio no qual está inserida. Adquiridos pela manipulação e experimentação direta, apresentam dados puramente empíricos.

Desse modo, podemos ressaltar que uma das características da aquisição de conhecimentos cotidianos identifica-se pela ausência de uma percepção consciente de suas relações, isto é, são orientados por semelhanças concretas e generalizações isoladas. (SFORNI, 2004).

Considerando os estudos de Schubring (2000/2001), existem diferenças significativas entre os conceitos de “grandeza” e “número”, presentes no processo de construção histórica do conceito números inteiros que implicam em sua aprendizagem em sala de aula.

Caraça (1984) observou que em muitos casos, a noção de quantidade (generalização de grandezas) é utilizada pela linguagem cotidiana segundo a mesma significação. Como no exemplo, “– quando se diz: uma grande quantidade de pessoas, quer significar-se: um grande número de pessoas” (CARAÇA, 1984, p. 115).

Porém, em sua obra Caraça (1984) diferencia um termo do outro, e define “quantidade como ‘aquilo que é objecto de medida’ ou, pelo menos, aquilo que, por natureza, admite ser medido, ainda que se não possa representá-lo efectivamente por um número” (CARAÇA, 1984, p. 115-116). Pois para este autor, nem toda variação é “traduzível em números” (CARAÇA, 1984, p. 116).

Também para Förstemann (1817)[20] apud Schubring (2001, p. 77) é um engano usual generalizar os conceitos de grandeza e de número, a partir do termo quantidade. Assim apresenta-os com suas singularidades:

> Grandezas são: linhas, ângulos, extensões, planos, sólidos, pesos, extensões de tempo, conjuntos de pessoas ou de livros. Números, no entanto, são apenas expressões das relações entre quantidades da mesma espécie” (FÖRSTEMANN, 1817, p. 1 apud Schubring, 2001, p. 77)

A partir dessas definições e de nossos conhecimentos matemáticos, tomamos o termo “grandeza” como qualquer elemento suscetível de medida, do mais simples ao mais complexo: conjunto de ovelhas, conjunto de pedras, dinheiro, distâncias, ângulos, peso, tempo, luz, temperatura ou movimento.

Schubring (2000) também se refere ao termo quantidade como uma generalização de grandezas, portanto, nesse trabalho tomaremos grandeza, quantidade ou “magnitude” (LIZCANO, 1993) como sinônimos.

A noção de número surge quando o homem em suas atividades tenta controlar os movimentos dessas grandezas, depara-se com a limitação da palavra, estabelece relações e cria a correspondência biunívoca. (CARAÇA, 1984).

[20] Förstemann, W. A. *Ueber den Gegensatz positiver und negativer Gröben.* Nordhausen. 1817.

> Por outras palavras, podemos dizer que a contagem se realiza *fazendo corresponder sucessivamente, a cada objecto da coleção, um número* [...]. Encontramo-nos assim em face da *operação de "fazer corresponder"*, uma das operações mentais mais importantes e que na vida de todos os dias utilizamos constantemente. [...], uma das ideias basilares da Matemática. CARAÇA, p. 7, 1984).

Para exemplificar Lima, Takazaki e Moisés, (1994) explicam que cada pedra corresponde a uma ovelha; cada ovelha corresponde a uma pedra e que ambas existem na natureza. No entanto, a característica principal dessa relação especial – a correspondência biunívoca entre a pedra e a ovelha – só existe no pensamento. O número é, portanto, uma representação dessa relação particular e abstrata.

> Não te assustes, o número está em teu corpo, no corpo dos teus amigos e parentes, nos animais que te cercam, em todas as coisas que fazem a tua natureza. Ele está em nós; mas precisamos sonhar, imaginar, para tê-lo. Todos sonhamos. Todos imaginamos. Todos nós podemos criar o número. (LIMA; TAKAZAKI; MOISÉS, 1994)[21].

Em relação à evolução da linguagem numérica[22], ou seja, a utilização dos numerais induarábicos para registrar tais grandezas, temos que esta se desenvolveu nas três fases: linguagem retórica (palavra) – sincopada (abreviações) – simbólica (símbolos), permitindo o aparecimento do conceito de número.

Ao se deparar com a complexidade de representar conjuntos cada vez mais extensos, utilizando a menor quantidade possível de símbolos, de modo que estes pudessem ser compreendidos de igual modo por diferentes civilizações, a mente humana passa a contemplar o que foi para Ifrah (1998) um dos conceitos mais fascinantes criados pela mente humana – o conceito de número. (IFRAH, 1998)

Nessa perspectiva, podemos perceber que o número não se apresenta propriamente na natureza, mas sim no pensamento, como uma relação construída pelo homem na busca por apreender os movimentos da natureza. Dessa forma, o conceito de número toma uma dimensão mais ampla à de grandeza, portanto, não há como concebê-lo em toda sua profundidade simplesmente pelas vias do pensamento empírico.

O conhecimento empírico do número deve funcionar como uma base provisória sobre o qual são construídos novas formas e novos aspectos que traduzam as relações de sua essência. (KOSIK, 1978)

[21] Citação extraída do prefácio do livro *Momento de criar matemática: contando com coisas*, de Luciano Castro Lima, Mário Takazaki e Roberto Perides Moisés (1994).
[22] Ainda não nos referimos à linguagem algébrica.

A partir dos estudos de Vygotsky (2001), referente à apropriação de conhecimentos cotidianos e conhecimentos científicos, podemos dizer que a criança, no seu cotidiano, aprende com facilidade o que é uma determinada grandeza. Por exemplo, ela vê um conjunto de cadeiras na cozinha de sua casa e, de modo semelhante, vê os membros de sua família se sentarem nelas; numa outra ocasião, em uma festa de aniversário, por comparação, até consegue perceber que o número de cadeiras da festa é maior que o número de cadeiras de sua casa e, analogamente, ela percebe que a quantidade de pessoas da festa também é maior que a de sua casa, mas até então a relação cadeira-pessoa é invisível aos seus olhos. “Assim, a criança segue sem perceber nenhuma das múltiplas relações que se fazem e se desfazem a sua volta. Qual um barco singrando os mares, vai navegando por elas, sendo ele mesmo uma composição de várias relações” (Informação verbal)[23].

O fato é que na escola, essas relações são deixadas de lado, preconiza-se tais conhecimentos cotidianos, o tão famoso “conhecimento prévio do aluno” sobre grandezas, para ensinar-lhes os números naturais, a partir de exemplos extraídos da realidade do aluno, como o conjunto de maçãs, por exemplo. Esse mecanismo didático caminha bem, pois os números naturais, suas operações e até mesmo os números racionais – dividindo-se as maçãs em duas, três, quatro..., várias partes – circunstâncias em que o zero pode ser considerado “nada”, apresentam-se, portanto, como situações facilmente representáveis a partir de modelos empíricos.

Para Gonzalez (et al 1990, p. 21, tradução nossa), os números negativos, assim como os irracionais e os complexos se diferenciam dos naturais e fracionários positivos, tanto pela forma de surgimento, quanto pela data histórica de sua aparição. Além disso, entende que:

> Los naturales y fraccionarios tienen sus raíces en la experimentación con magnitudes, ya sean discretas o continuas. Constituyen un logro social historicamente muy temprano y ligado a las necesidades cotidianas de cuantificación. De hecho, durante mucho tiempo, se ha identificado número con magnitud. Por el contrario, los negativos, los irracionales y los complejos tienen su origen en la práctica matemática y más concretamente, en las manipulaciones algebraicas. [...] (GONZALEZ et al 1990, p. 21)[24]

[23] Informação fornecida por Luciano Castro Lima em entrevista aberta sobre o conceito números inteiros.

[24] Os naturais e fracionários tem suas raízes na experimentação com magnitudes, sejam elas discretas ou continuas. Constituem uma realização social que historicamente ocorreu muito cedo, por estar ligada às necessidades cotidianas de quantificação. Ao contrário, os negativos, os irracionais e os complexos tem sua origem na prática matemática e mais concretamente, nas manipulações algébricas. [...] (GONZALEZ et al 1990, p. 21, tradução nossa).

Segundo Förstemann (1817)[25] apud Schubring (2001, p. 77), "pode-se multiplicar números e elevá-los a potências, mas não se pode fazer o mesmo com grandezas. Portanto, não existem números negativos".

O número negativo é resultado de uma relação abstrata construída pelo homem para representar algum fenômeno quantitativo que não está visivelmente exposto na realidade, mas que por esse motivo, encontra-se ligado ao referencial do autor dessa relação e ao seu oposto, o número positivo. Visto dessa forma, conjectura-se que o conceito números inteiros permite a construção de uma infinidade de relações entre o universo e seus contrários.

Nesse sentido, conceber o número como grandeza constitui-se um problema no momento didático da introdução dos números inteiros. De acordo com Schubring (2000/2001), a aprendizagem desse conceito exige compreender o princípio teórico sobre o qual se fundamenta, isto é, o conceito de número.

Para Schubring (2000/2001) e Cid (2000/2003), o problema da aprendizagem dos números inteiros na matemática escolar não está na constituição do conteúdo números inteiros, mas na didática da matemática que se evidencia na questão: como fazer a passagem da noção de grandeza para a noção de número?

Retomando Gonzalez (et al 1990), temos que existem duas linhas didáticas de introdução do conceito números inteiros: a que parte de situações matemáticas práticas, da vida cotidiana, e a que parte de um formalismo matemático acerca da teoria dos conjuntos numéricos. Mas, para o autor "estas concepções aparentemente opostas constituem dois lados de uma mesma moeda, uma vez que ambas tem o mesmo pressuposto implícito: a **separação** entre a realidade e o conhecimento teórico" (p. 150, grifo nosso, tradução nossa). Fator que tem reduzido o ensino do conceito números inteiros a um formalismo vazio.

1.4.1 A abordagem do conceito números inteiros nos textos impressos de Matemática

Partindo do pressuposto de que diante de um novo conceito, imperceptivelmente o pensamento tende a percorrer o mesmo caminho que percorreu na compreensão de um conceito antecedente àquele que deseja compreender. (BOHM; PEAT, 1989). Caminho este que pode ter sido delineado por uma determinada abordagem de ensino. E, tomando-se por "textos impressos de Matemática", todo o "mundo do papel" (OLSON,

[25] Förstemann, W. A. *Ueber den Gegensatz positiver und negativer Gröben.* Nordhausen. 1817.

1997[26] apud PRADO; MOURA, 2007b) que contribui para a prática escolar de conteúdos matemáticos. Compreender as direções que cercam o ensino e aprendizagem do conteúdo de números inteiros envolve conhecer o caminho abordado pelos “textos impressos de Matemática” ao introduzir as ideias preliminares à formação do conceito números inteiros.

Nesse sentido, Prado e Moura (2007a/2007b) desenvolveram uma análise em torno da abordagem das “ideias iniciais”[27] do conceito números inteiros em documentos oficiais de orientações curriculares de matemática para o Ensino Fundamental de 1975 a 1998 e em vinte livros didáticos de 6ª séries, indicados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD/2006/SP.

No período de 1975 a 1998, dentre os documentos de orientação curricular estadual e federal propostos pelas políticas governamentais brasileiras às escolas públicas, as pesquisadoras Esther P. de A. Prado[28] (2007a) e Anna Regina Lanner de Moura (2007a) selecionaram, para a referida análise, os *Guias Curriculares do Estado de São Paulo*, de 1975, e seus *Subsídios*, de 1977 e de 1978, a *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*, de 1988, e os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), de 1998 (PRADO; MOURA, 2007a).

A partir de um olhar acerca destes materiais e sobre as análises das pesquisadoras, destacamos os elementos que caracterizam os documentos investigados:

- *Guias Curriculares de São Paulo*, de 1975, e seus Subsídios, de 1977: orientam-se pela teoria dos conjuntos e lógica formal, influências do Movimento Matemática Moderna.

Ênfase na linguagem da teoria dos conjuntos, a ideia prevalecente mantinha-se na justificação lógico-formal da inclusão dos negativos às estruturas aritméticas do conjunto dos números naturais. Não se verifica o uso da História da Matemática, tão pouco das TIC no ensino de conceitos matemáticos, esta proposta consolidou-se em um estudo da Matemática pautado no uso mecânico de regras, técnicas e operações formais na resolução de uma série de exercícios, bem como no rigor das proposições e definições utilizadas em demonstrações matemáticas. (SOUSA, 1999)

---

[26] OLSON, David R. *O mundo no papel. Implicações conceituais e cognitivas da leitura e da escrita*. Trad. Sérgio Bath. São Paulo. Editora Ática. Coleção múltiplas escritas, 1997.

[27] De acordo com Prado e Moura (2007b), trata-se das ideias formadoras do conceito números inteiros que antecedem a sua sistematização.

[28] Doutora do CEMPEM - Faculdade de Educação, da área de Educação Matemática - Universidade Estadual de Campinas - Unicamp - Campinas (SP) Brasil, em sua comunicação oral, no eixo “Culturas Escolares”, intitulada “O conceito números inteiros nos textos impressos de orientações curriculares de matemática de 1975 a 1998”, apresentada em 20/09/07, no II Encontro Iberoamericano de Educação, na Faculdade de Ciências e Letras – UNESP - Campus de Araraquara (SP) Brasil.

- *Proposta Curricular de São Paulo*, de 1988: a partir dos três temas geradores: números, medidas e geometria, as orientações rompem com a estrutura hierárquica dos pressupostos modernistas e assume uma abordagem histórica.

Além de trocar “a sistematização prematura por uma abordagem mais rica de significados” (SÃO PAULO, 1991, p. 11) através da adoção da “História” no tratamento didático dos conteúdos matemáticos, em “Os Conteúdos e a Abordagem” a Proposta Curricular de São Paulo (SÃO, PAULO, 1991) também considera:

> O recurso à resolução de situações-problema, em que o aluno é desafiado a refletir, discutir com o grupo, elaborar hipóteses e procedimentos, extrapolar as aplicações e enfrentar situações novas – não se restringindo apenas àqueles problemas que conduzem a uma única solução ou que tenham caráter repetitivo de aplicação de conceito – é uma possibilidade de raciocínio e ação. (SÃO, PAULO, 1991, p. 12)

Contudo nesta proposta não são encontradas discussões acerca da utilização de ferramentas tecnológicas como meio de ampliar a descoberta e assimilação dos temas sugeridos.

- *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), de 1998: sugerem que os números inteiros sejam introduzidos como ampliação do campo aditivo nos naturais.

Para tanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, apontam tanto a “História da Matemática” quanto as “Tecnologias da Comunicação” como recursos para abordar conceitos matemáticos na sala de aula.

Nesse sentido, os PCN indicam que a história da Matemática pode apresentar os conceitos matemáticos como criações humanas e aprofundar o ensino e aprendizagem dos quais através das necessidades, práticas e abstrações de diferentes culturas.

> Assim, a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles. Por exemplo, isso fica evidente quando se percebe que a ampliação dos campos numéricos historicamente está associada à resolução de situações-problema que envolvem medidas. (BRASIL, 1998, p. 43)

Apesar de assumir a deficiência ainda existente quanto à disponibilidade de computadores nas escolas, os PCN apontam que o uso do computador na sala de aula pode potencializar o ensino e aprendizagem da Matemática. Nesta perspectiva, considera que este recurso tecnológico pode apresentar-se como

> um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros. (BRASIL, 1998, p. 44)

No entanto, não descarta a importância da qualidade pedagógica de softwares, em relação aos objetivos que se pretende atingir e a concepção de conhecimento que orienta o processo metodológico do ensino da Matemática. (BRASIL, 1998)

Outras alternativas metodológicas encontradas nos PCN, verificam-se no recurso à resolução de problemas e aos jogos, esta flexibilidade permite ao professor pensar em diversos caminhos para o ensino da Matemática.

Tancredi (1989) explica que “uma matéria não faz parte do currículo escolar apenas pelo conteúdo que encerra, mas também e principalmente, pelos valores vigentes na sociedade à época de sua inclusão.” (TANCREDI, 1989, p. 78)

Da mesma forma, as abordagens de ensino dispostas no currículo escolar acompanham as transformações da sociedade, as modificações nos meios de produção de conhecimento do contexto histórico-cultural no qual professor e aluno estão inseridos.

De modo mais específico, Prado & Moura (2007a) voltam à atenção para os objetos conceituais mais utilizados na concepção das situações de aprendizagem apresentadas nestas propostas. Para isso, as autoras fazem uma comparação entre tais documentos e percebem a forte semelhança entre as experiências cotidianas sugeridas para introduzir o conceito números inteiros:

- *Guias Curriculares de São Paulo*, de 1975, e seus *Subsídios*, de 1977: contabilidade, temperatura, jogo de pontos e edifício;
- *Proposta Curricular de São Paulo*, de 1988: conta bancária, temperatura, jogo, edifício, fatos históricos e foguete;
- *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), de 1998: saldos bancários negativos, temperatura, jogo, alturas e altitudes.

Desse quadro, Prado & Moura (2007a) alertam para o problema em comum verificado nestas propostas, de introduzir o conceito números inteiros aos alunos a partir de situações que lhe são familiares:

> Consideramos que para o desenvolvimento das ideias iniciais do conceito números inteiros no ensino fundamental, os documentos de orientações curriculares oficiais, embora com abordagens diferentes, priozaram a relação entre determinadas situações consideradas cotididanas e do conhecimento do aluno e a rápida atribuição dos sinais (+) e (-). Concluímos que priorizar essa relação favorece apenas o estabelecimento das infra-estruturas tácitas do conhecimento (Bohm & Peat, 1989) circunscritas ao imaginário ocidental, regido pela metáfora da subtração. (LIZCANO, 2006).

Aqui as “infra-estruturas tácitas do conhecimento”, segundo Bohm & Peat (1989) tratam-se de algumas das “perícias e destrezas”[29] que realizamos sem pensar diante de situações que nos são familiares.

> Por exemplo, uma criança levará horas e horas com uma bicicleta até que subitamente aprende a andar nela, essa capacidade, uma vez adquirida, parece que nunca mais será perdida e assume uma forma subconsciente ou mesmo inconsciente, visto que ninguém na realidade ‘pensa’ em como conduzir uma bicicleta. Também escrever à máquina, velejar, passear, nadar, jogar tênis e, para pessoas habilitadas, reparar um automóvel, substituir uma ficha eléctrica partida ou mudar a válvula a uma torneira, tudo isto envolve a referida infra-estrutura tácita do conhecimento e perícia. (BOHM; PEAT, 1989, p. 33-34).

Algumas das nossas perícias e destrezas mais utilizadas são projetadas na forma dessa infra-estrutura tácita do conhecimento. Assim, neste estudo, tomamos o termo conhecimento tácito como os saberes automáticos, rotineiros, usuais que, na maioria das vezes são manifestados espontaneamente no confronto com um novo saber.

Dessa forma, infere-se que o conhecimento tácito do aluno pode traduzir as razões que os levam a pensar ou expressar certos juízos assentados no seu próprio processo de aprendizagem.

Prado & Moura (2007a) acreditam que “a infra-estrutura tácita do conhecimento das ideias iniciais do conceito números inteiros está circunscrita ao imaginário ocidental”, que pensa sob a “metáfora da subtração” LIZCANO (2006).

> La tradición matemática de herencia griega nos situó en un imaginario en el que la resta se pensaba a la luz de la metáfora de la sustracción, y la incapacidad de pensarla bajo otra metáfora impuso durante siglos unos límites y paradojas insuperables al desarrollo de la aritmética. De donde hay —pongamos— 5 podemos restar/sustraer 1, también 2, o incluso 3 ó 4. Al sustraer o extraer 5 ya empiezan los problemas: el resto es nulo, no queda

[29] Segundo Prado & Moura (2007a), perícias e destrezas são as habilidades que realizamos sem pensar. Ou seja, o ensino de determinados conhecimentos matemáticos, a partir de situações práticas e da aplicação de técnicas, não exige esforços da imaginação, ou da intuição do estudante, é como andar de bicicleta, o pensamento fica restrito a atribuição de determinadas regras.

> nada… pero "lo que no es, no es", según sabemos todos y ya enseñaba el sabio Parménides. ¿Qué hacer entonces? Ahora bien, el problema se complica aún más si de donde hay 5 pretendemos seguir extrayendo aún más, por ejemplo 6, ya no hay modo: la operación se cortocircuita. Todavía los mejores matemáticos del Siglo de las Luces, cuando un problema se traduce en una ecuación que conduce a una situación de este tipo, optan por decidir que se trata de un problema mal planteado, porque así planteado no tiene solución. (LIZCANO, 2006, p. 117)[30].

Seguindo o mesmo objetivo de investigação, dentre os textos impressos que subsidiam a prática escolar estão os livros didáticos. Para entender a abordagem das ideias iniciais do conceito números inteiros no livro didático, Prado & Moura (2007b) realizaram uma análise em vinte livros didáticos de matemática para 6ª série, aprovados pelo PNLD/2006/SP para indicação de adoção aos professores das escolas públicas.

As autoras identificaram vários elementos em comum entre os livros analisados, porém partem do pressuposto de que a diferença está na abordagem entre os mesmos. Para Prado & Moura (2007b), o termo "abordagem" refere-se ao encaminhamento pedagógico utilizado pelos autores dos livros didáticos quanto aos primeiros "argumentos" propostos para introdução do conceito números inteiros. Nesse sentido, orientam-se pela classificação:

- Abordagem (1): Utiliza-se do "conhecimento prévio do aluno";
- Abordagem (2): Utiliza-se das restrições aritméticas (realizar operações) ou algébricas (expressar determinadas situações cotidianas) dos números naturais;
- Abordagem (3): Utiliza-se de elementos da História da Matemática;
- Abordagem (4): Problematiza a noção de contrários através de situações cotidianas;
- Abordagem (5): Justifica a existência dos números positivos, do zero, e dos negativos através de situações cotidianas (uma ou mais).

Desse estudo, sintetizamos os resultados mais frequentes:

[30] A tradição matemática de descendência grega nos situou em um imaginário em que a sobra se pensava à luz da metáfora da subtração, e a incapacidade de pensar nela em uma outra metáfora impôs, durante séculos, limites e paradoxos insuperáveis ao desenvolvimento da aritmética. De onde há 5 - Pegamos - podemos tirar / subtrair 1, também 2, ou inclusive 3 ou 4. Ao subtrair 5, já começam os problemas: a sobra é nula, não fica nada... Mas "o que não é, não é", segundo sabemos todos e já ensinava o sábio Parmênides. Que fazer, então? Agora, bem, o problema se complica ainda mais se de onde há 5 pretendermos seguir extraindo mais ainda, por exemplo, 6, já não tem como: a operação entra em curto-circuito. Ainda os melhores matemáticos do século das luzes, quando um problema se traduz em uma equação que conduz a uma situação desse tipo, opta por decidir que se trata de um problema mal planejado, porque planejado assim não tem solução. (LIZCANO, 2006, p. 117, tradução nossa).

- As abordagens (1), (2) e (5) aproximam-se em quinze publicações:
  - Relação e atribuição, rápida e direta entre as situações cotidianas (muitas vezes familiares aos alunos), como saldo bancário e temperatura às representações (+) e (-);
  - Contagem isolada nas situações clássicas analisadas, obscurecendo as singularidades e propriedades dos números inteiros, para tratá-los como extensão dos naturais. (PRADO; MOURA, 2007b).

> A realidade que os autores das abordagens (1), (2) e (5) criam é baseada no senso comum dos números negativos, portanto não acrescenta um novo modo de pensar, apenas reafirmam os elementos gerados pelo conceito dos números naturais, que para Lima&Moisés (1998) [31] é a contagem em mão-única, isto é, em um só sentido. Conta-se a temperatura no sentido acima de zero e no sentido abaixo de zero, isoladamente, sem pensá-las como participantes de um "contexto mais vasto de cada experiência"(Bohm&Peat, 1989, p.31), como aumento ou diminuição dos elementos que compõem a temperatura, frio e calor. (PRADO; MOURA, 2007b, p. 11).

- As abordagens (3) e (4) aparecem em cinco publicações:
  - Pensar e contar, simultaneamente, os sentidos contrários nos diversos movimentos presentes na realidade;
  - Os registros simultâneos do comerciante da Idade Média de entradas e saídas de mercadorias e dinheiro;
  - Uso de outras expressões ou símbolos matemáticos criados ao longo da história para representar os contrários. (PRADO; MOURA, 2007b)

Diante das características expostas nessas abordagens, o recurso à História da Matemática combinado ao princípio da simultaneidade, pode apresentar-se com um importante elemento didático para se pensar as diversas formas de negatividade. (PRADO; MOURA, 2007b, p. 12).

Outro fator relevante dessa investigação refere-se à atribuição ou não do sinal (+) no número. Para as autoras, esse "detalhe" muitas vezes passa despercebido. Apenas cinco grupos de autores que utilizam para a representação dos positivos por meio de representações intermediárias utilizando "palavras ou expressões" combinadas com o símbolo

[31] LIMA, L. C; MOISÉS, R. P. *Números Inteiros, numerando quantidades contrárias*. São Paulo: CETEAC, 1998.

matemático (+). O maior grupo, seis, indica, para a representação do positivo, o número sem sinal e o sinal (+). Para o negativo essa diferença é maior, quatorze grupos de autores não discutem outras formas de representação além do uso do sinal (-). Muito menos foi encontrado em relação à proposta de criação, por parte dos próprios alunos, de palavras, expressões ou símbolos para indicar o contrário no número (PRADO; MOURA, 2007b, p. 15).

Prado e Moura (2007b) discordam dessa abordagem, pois entendem os sinais (+) e (-) como símbolos algébricos utilizados pelo homem para indicar o contrário no número, portanto, consideram fundamental para sua compreensão introduzi-los, pensá-los e até mesmo recriá-los através de outras formas de representações, como estratégia de mediação entre a ideia formadora desse conceito e sua formalização.

A partir dessas reflexões, Prado e Moura (2007b) argumentam que tais situações, familiares aos alunos, podem acarretar perícias e destreza que utilizamos sem pensar, por exemplo, quando abordamos os números negativos a partir de situações práticas como análise de extratos bancários ou termômetros; nesse caso, não se mobiliza a imaginação do aluno, mas sim a perícia e a destreza de seu pensamento em identificar ou não o número negativo.

Segundo as discussões em curso a respeito das orientações curriculares no que tange às abordagens de ensino que engendram o conceito números inteiros na escola. No item subsequente, voltamos atenção especial à nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008) e aos Cadernos do Professor (SÃO PAULO, 2009a) e do Aluno (SÃO PAULO, 2009b) quanto aos objetivos, às situações de aprendizagem e ao tempo estimado para abordagem do conceito números inteiros.

1.4.2 A abordagem do conceito números inteiros na nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo

A partir do ano de 2008 foi implantada pela Secretaria da Educação de São Paulo (SEESP) a nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008), de modo a sistematizar o currículo dos alunos de 5ª a 8ª séries e Ensino Médio deste Estado. Nesse processo, foram disponibilizados aos professores de escolas públicas da rede estadual de São Paulo orientações concisas sobre a prática pedagógica a ser desenvolvida com os alunos, por meio do material designado por "Caderno do Professor" (SÃO PAULO, 2009a) e Caderno do Aluno" (SÃO PAULO, 2009b) enviado às unidades de ensino.

Vale observar que, os Cadernos do Professor e do Aluno aqui analisados, referem-se aos primeiros volumes dos Cadernos em versão revista enviados às instituições escolares do Estado com os conteúdos previstos na disciplina Matemática, especificamente a introdução "Representação e operações com números negativos" (SÃO PAULO, 2009a), dentre outros conteúdos a serem trabalhados no primeiro bimestre letivo de 2009.

Estes Cadernos apresentam de forma objetiva os conteúdos, competências e habilidades, metodologias, avaliação e recursos didáticos previamente indicados na Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008).

Nesta proposta (SÃO PAULO, 2008) as disciplinas estão inseridas em grandes temas, que se dividem nas seguintes áreas:

- "Ciências Humanas e suas Tecnologias": as quais correspondem ao estudo da História, Geografia no Ensino Fundamental e incluindo-se Filosofia no Ensino Médio;
- "Ciências da Natureza e suas Tecnologias": as quais se tratam do estudo de Ciências no Ensino Fundamental, ampliando-se para Biologia, Física e Química no Ensino Médio;
- "Linguagens, Códigos e suas Tecnologias": na qual se concentram os estudos da Língua Portuguesa, Línguas estrangeiras, Arte e Educação Física;
- "Matemática e as áreas do conhecimento": na qual se situam especificamente os conteúdos matemáticos.

A apresentação da Matemática como uma área específica, diferencia-se dos PCN (BRASIL, 1998) que tratam esta disciplina a partir do tema "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias".

Dentre outras razões, esta proposta (SÃO PAULO, 2008) considera que o tratamento da Matemática como uma área específica "[...] pode facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos de que dispomos para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento" (SÃO PAULO, 2008, p. 39). Este argumento aponta para o fato desta proposta apostar nas possibilidades que as TIC podem oferecer à abordagem dos conteúdos matemáticos. Para exploração de cada eixo matemático, a proposta também indica à problematização com ênfase na transdisciplinaridade dos conteúdos.

Além disso, o uso da História da Matemática a favor de seu ensino encontra-se sugerido nesta proposta nas seguintes palavras: "[...] É na história que buscamos a compreensão dos significados dos conceitos fundamentais, e principalmente o significado das transformações ou das mudanças de significado." (SÃO PAULO, 2008, p. 50). Contudo, não deixa claro como o professor pode incorporar estes "significados" ao processo de ensino e aprendizagem dos conceitos.

Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo para a disciplina de Matemática (SÃO PAULO, 2008), além dos temas geradores números, geometria e medidas apresentados na proposta de 1988 (SÃO PAULO, 1991), os conteúdos estão distribuídos em quatro blocos temáticos da seguinte forma: números, geometria, grandezas e medidas e com a inserção de um novo eixo em relação à proposta anterior, o tratamento da informação.

Outra particularidade desta proposta é a organização curricular a partir da indicação de um tema por bimestre. O estudo do conceito números inteiros aparece indicado para a 6ª série no primeiro bimestre, exatamente em meio aos conteúdos: "Sistemas de numeração: Sistemas de numeração na Antiguidade e o sistema posicional decimal" e "Números racionais: representação fracionária e decimal e Operações com decimais e frações (complementos)", cujo tema principal segue o eixo números.

De modo mais objetivo, o "Caderno do Professor" (SÃO PAULO, 2009a) divide os conteúdos indicados, contextualizando-os ou demonstrando suas aplicações práticas em quatro situações de aprendizagem.

Posto que o foco desta discussão gira em torno da abordagem do conceito números inteiros, voltamos nossa atenção para a "Situação de Aprendizagem 4: Números negativos: desvendando as regras de sinais", a qual propõe "2 semanas e meia" como tempo previsto para o trabalho com os "números negativos: contextos e aplicações; números negativos: operações e representações" (SÃO PAULO, 2009a, p. 35). Também faz parte destas orientações curriculares as competências e habilidades que o aluno deve atingir ao abarcar este assunto.

> Competências e habilidades: identificar a insuficiência dos naturais para a resolução de novos problemas; compreender significados associados à escrita dos números negativos, bem como operações e expressões envolvendo números negativos; compreender a ideia de ordenação com números negativos; estabelecer correspondência entre situações concretas e

> contextos matemáticos que justifiquem o uso de números negativos. (SÃO PAULO, 2009a, p. 35)

A utilização do termo "números negativos" manifesta a forma como este material pretende introduzi-los, isoladamente, a partir de sua funcionalidade e representação pronta e acabada, através dos elementos finais ao seu desenvolvimento.

A constituição lógico-histórica dos números negativos, assim como sua existência na natureza, apresenta-se unificada aos números positivos, em um só todo – no conceito números inteiros. Nessa perspectiva, não existe aspecto negativo em um objeto sem que haja também seu aspecto positivo.

Em contrapartida ao "Caderno do Professor" (SÃO PAULO, 2009a), o que se procura explorar a priori na construção do OA são algumas negatividades, ou formas de negatividade matemática, as quais na visão de Eva Cid (2000, p. 11-13), relacionam-se a outras noções matemáticas e não especificamente aos números negativos.

> La conflictiva emergencia de los números negativos pone de manifiesto la existencia histórica de diferentes formas de negatividad matemática que, ni fueron, en su momento, entendidas como números, ni pueden interpretarse como un proceso continuo que desemboca, inevitablemente, en el número negativo actual. Esto nos lleva a utilizar, siguiendo a Lizcano [1993], los términos 'negatividad' o 'formas de negatividad' para indicar lo que habitualmente se consideran antecedentes históricos del número negativo. Por tanto, nosotros no hablamos de concepciones históricas de los 'números negativos' sino de concepciones históricas de la 'negatividad matemática', sin establecer a priori una identificación entre las formas de negatividad que esas concepciones revelan y los números negativos actuales. Esta precaución nos ha permitido darnos cuenta de que esos "antecedentes" no lo son sólo del número negativo, sino también de otras varias nociones de las matemáticas actuales: traslaciones, vectores, recta real, segmentos orientados, etc. (Cid, 2000, p. 11-12).[32]

---

[32] A conflituosa emergência dos números negativos coloca de manifesto a existência histórica de diferentes formas de negatividade matemática que, nem foram, em seu momento, entendidas como números, nem se pode interpretar como um processo contínuo que desemboca, inevitavelmente, no número negativo atual. Isto nos leva a utilizar, segundo Lizcano (1993), os termos "negatividade" ou "formas de negatividade" para indicar o que habitualmente se consideram antecedentes históricos do número negativo. Portanto, nós não falamos de concepções históricas dos "números negativos", sem estabelecer a priori uma identificação entre as formas de negatividade que essas concepções revelam e os números negativos atuais. Esta precaução nos permitiu dar conta que esses "antecedentes" não o são somente do número negativo, sendo também de outras várias noções das matemáticas atuais: transações, vetores, reta real, segmentos orientados, etc. (Cid, 2000, p. 11-12, tradução nossa).

Sobretudo, a abertura da Situação de Aprendizagem 4, em "Números negativos e as operações bancárias" (SÃO PAULO, 2009b, p. 27) parte de definições diretas e fechadas sobre as "operações bancárias", tais como: saldo, saque, cheque e depósito.

Dessa forma, as duas primeiras situações-problema a serem desenvolvidas em sala de aula, utilizam-se de um modelo concreto baseado no extrato bancário, cuja resolução exige a adição e subtração com os inteiros. Para tanto, sugere-se que, por exemplo, a representação "-(-400)" deve ser interpretada de modo imediato pela metáfora "retirar uma retirada" (SÃO PAULO, 2009b, p. 28). A primeira atividade incluída no item "Lição de casa" (SÃO PAULO, 2009b, p. 29), a qual se entende que a primeira tentativa de resolução deve ser efetuada somente pelo aluno (em sua casa), também se trata de uma atividade contábil, baseada no modelo "lucros e perdas", porém com maior grau de dificuldade.

A contextualização da segunda atividade da "Lição de casa", a partir da variação dos saldos de gols "pró e contra", na qual cada gol sofrido anula um gol feito, bem como a visualização desse movimento através de um gráfico, apresentou-se como uma possibilidade atrativa e diversificada de apresentar o conceito de zero relativo e um caminho interessante para se tratar da ação de subtrair um número de zero.

Porém, não seria um engano acreditar que a partir dessa única situação relativa, situada como "Lição de casa", levaria o aluno a compreender e operar com o zero relativo? Uma vez que não se podem desconsiderar os alunos com dificuldades de aprendizagem.

Além disso, para representar os gols feitos (+) e os gols sofridos (-), foram utilizadas as cores: azul (aspecto positivo) e vermelho (aspecto negativo) respectivamente, assim como são utilizadas em transações bancárias, classificações simbólicas arraigadas no pensamento de origem ocidental. Entretanto, se estas cores fossem alteradas, de que maneira os alunos interpretariam o problema?

No "Caderno do Professor" (SÃO PAULO, 2009a, p. 40), para a introdução da regra de sinais em que o produto de números negativos resulta em um número positivo, são propostas três estratégias diferentes, a primeira a partir da comparação das regularidades nas sequências: 4.(-3) = -12, 3.(-3) = -9, 2.(-3) = -6 e 1.(-3) = -3, 0.(-3) = 0, -1.(-3) = ?.

A segunda baseia-se em dois segmentos paralelos, proporcionais e opostos pela origem de um plano cartesiano ordenado, cuja aplicação das regras de proporcionalidade leva a uma igualdade em que dois segmentos orientados negativos resultam em um positivo.

Mas qual seria a intenção dessa estratégia? Antes de demonstrá-la ao professor, o Caderno (SÃO PAULO, 2009a, p. 40) apresenta-a, assim como as outras, como uma proposta, dentre várias, de “discussão” da multiplicação de números negativos. Entretanto, qual seria o grau de participação do aluno nessa “discussão” regida por elementos da lógica formal?

A partir de uma comparação específica de igualdade: “retirar uma torneira de vazão -1 l/min é equivalente a acrescentar uma torneira de vazão 1 l/min”, a terceira estratégia verifica-se na demonstração numérica da igualdade: “-1.(-1) = 1” (SÃO PAULO, 2009a, p. 41). No capítulo próximo, esta estratégia é tratada de modo mais detalhado, em seu contexto histórico.

No Caderno do Professor, a Situação de Aprendizagem 4 encerra-se com a proposta de um jogo que visa a “fixação de idéias relacionadas às operações e à ordenação de números com sinais” (SÃO PAULO, 2009a, p. 40).

E para aplicação das ideias referentes às operações com “os números com sinais”, a última atividade sugerida no Caderno do Aluno é finalizada com vários exercícios compostos por expressões numéricas que envolvem cálculos de adição, subtração, multiplicação e potenciação de números inteiros positivos e negativos. Contudo, no que isso se difere do que já é facilmente encontrado em livros didáticos?

De um modo geral, à situação de aprendizagem analisada referente à abordagem do conceito números inteiros assemelha-se a mesma abordagem apontada por Prado e Moura (2007b) pela maior parte dos livros didáticos analisados por estas autoras. Os problemas propostos nos Caderno do Professor e do Aluno também se baseiam na exploração de determinadas situações do cotidiano ou do conhecimento do aluno e a imediata relação entre estas situações e suas representações pelos sinais (+) e (-). Caminho didático que pode tolher a concepção de outras formas de negatividade, além das precisamente matemáticas.

Neste caso, o aluno aprende apenas a interpretar um extrato bancário, por exemplo, limitando o conhecimento do conceito números inteiros às ações isoladas de depósito e retirada ou lucro e perda.

Além disso, certas regras de cálculo com os números negativos, são reformuladas em situações-problema com o intuito de conduzir o aluno as suas generalizações ou demonstrações.

Nesta proposta de ensino do conceito números inteiros, foi possível perceber uma clara preocupação com a representação formal e fixação das regras para o cálculo com números "com sinais" (como são chamados no Caderno do Professor).

A priorização da linguagem lógico formal dos números inteiros em detrimento do aprofundamento das relações conceituais que compõem sua essência, resultado de um processo didático que parte de situações cotidianas progredindo por meio de sucessivas decodificações para campos mais abstratos que, portanto, resumem cada vez mais, a complexidade das situações e das ideias anteriores. Processo que se resume a uma contínua simplificação do conceito. Podem conduzir o ensino dos números inteiros a um formalismo vazio que, objetiva o "saber fazer" com regras de cálculo vazias de significação, em consequência, fáceis de esquecer ou confundir.

Outra questão a ser discutida trata-se do tempo previsto ao tratamento didático do conteúdo números inteiros.

Ao considerarmos as dificuldades didáticas que cercam a compreensão do conceito números inteiros, as competências e habilidades pressupostas a serem desenvolvidas pelos alunos, somado aos modelos de atividades e problemas presentes no Caderno do Professor e do Aluno (SÃO PAULO, 2009a/2009b), não condizem com o tempo estabelecido para promoção do trabalho sugerido.

Não obstante, será que este tempo estipulado para atingir as competências e habilidades aqui relacionadas permite ao aluno errar?

À vista disso, segundo a perspectiva lógico-histórica, defrontar-se com seus próprios erros despertam dúvidas, com elas, as elaborações de juízos ao atuar com o conceito, reflexões sobre o que já foi desenvolvido, formulações de novas ideias, não estritamente matemáticas, e assim a criação de "definibilidades próprias" (LANNER de MOURA *et al*, 2003) acerca do conceito estudado.

Da mesma forma, será que professor tem tempo para ouvir, surpreender-se, descobrir os veículos que conduziram o pensamento dos alunos? Elementos necessários para que este possa mediar o processo de conhecimento de seu aprendiz, ajudando-o a articular seus juízos na ação, através dos aspectos substanciais e simbólicos que permeiam o conceito.

Além dessas inquietações, teme-se que em longo prazo, este "apostilamento" já adotado pelas escolas privadas, possa levar a uma homogeneização do ensino do conceito números inteiros.

Uma vez que os objetivos e a abordagem do conceito números inteiros assumida pelas problemáticas presentes nos Cadernos do Professor e do Aluno, focam-se na "casca" do conceito, relacionando as situações cotidianas fragmentadas da realidade rapidamente aos sinais (+) e (-), como se fossem o próprio conceito números inteiros.

Essa realidade imediata e restrita não acrescenta um novo modo de pensar o número, pois segundo Vygotsky (2001), apreender um conceito científico

> [...] seria desnecessário se refletisse o objeto em sua manifestação externa como conceito empírico. Por isso o conceito científico pressupõe necessariamente outra relação com o objeto, contida no conceito científico, por sua vez pressupõe necessariamente a existência de relações entre os conceitos, ou seja, um sistema de conceitos. (p. 294).

Em outras palavras significa dizer que os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações e que cada situação normalmente não pode ser analisada isoladamente com a ajuda de um único aspecto do conceito, mas, ao contrário, ela requer vários deles.

Ao contrário da rigidez das situações cotidianas isoladas discutidas neste texto, infere-se que o conceito número inteiro, apresentado segundo sua própria natureza, além de ampliar o campo de situações de ensino e aprendizagem, pode oferecer um caminho flexível ao pensamento do aluno, permitindo-lhe o trânsito entre as relações conceituais no processo de formação do conceito número inteiro.

Dessa reflexão acerca dos materiais e suas orientações de ensino do conceito números inteiros e visto que o problema do número inteiro não está no seu corpo teórico, todavia no modo como este conhecimento tem sido abordado, através da priorização dos atributos simbólicos. Em particular, concluímos que o intuito desta pesquisa, de integrar a história da Matemática às TIC, a partir da construção de um objeto de aprendizagem que considere o lógico-histórico do conceito números inteiros, verifica-se na concretização de uma ideia inovadora de introduzir o conceito números inteiros na matemática escolar.

Nessa perspectiva, delimitamos e consideramos fundamental, direcionar o nosso olhar para as qualidades internas do conceito números inteiros, os aspectos "substanciais" que perpassam por diversos outros conceitos, não estritamente matemáticos, possibilitando a compreensão de seus "aspectos simbólicos". Para tanto, no próximo capítulo voltamos nossos estudos para as premissas conceituais, os instrumentos manipulados pelos matemáticos, os modos de definição, de argumentação, bem como as formas de representação do se entende por antecedentes históricos dos números inteiros, de modo a encontrar as relações de uns com outros e estabelecer um ponto de equilíbrio entre o conhecimento abstrato e a realidade concreta.

CAPÍTULO 2 – O LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO NÚMEROS INTEIROS

> *Tentando e errando, tateando e tropeçando – assim prosseguiu nosso saber. Dificultado, mas incitado por uma dura luta pela existência, um brinquedo de seu ambiente de seu tempo, o homem foi guiado em seu progresso não pela lógica, mas pela intuição e pela experiência acumulada de sua raça. Isso aplica-se a tôdas as coisas humanas e fiz dolorosos esforços para provar que a Matemática não constitui uma exceção. (Tobias Dantzig)*

Desde a Antiguidade, quando os filósofos e pensadores reuniam-se em cavernas secretas, para discutir e desenvolver conceitos matemáticos, até os dias atuais, nos discursos acadêmicos, existe uma concepção da Matemática como Ciência pura, racional e absoluta, constituída por verdades eternas que existiram e existirão para sempre, dotada de padrões de rigor imutáveis, cuja progressão ocorre de maneira cumulativa e sem contradições. (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992)

Mas, indagamos: até que ponto as propriedades, axiomas, proposições e demonstrações matemáticas, discurso da pureza por excelência, já não nascem contaminadas pelas significações culturais que atingem a razão comum própria de cada época e cada cultura? (LIZCANO, 1993, tradução nossa).

Nesse sentido, encontramos no lógico-histórico dos números inteiros um importante catalisador das diferentes sensibilidades e modos de racionalidade das distintas culturas e épocas de nossa história. O processo histórico de construção do conceito números inteiros pode contribuir sobretudo para mostrar os limites, dificuldades e contradições que a razão encontra na formação de entidades matemáticas, colocando em xeque a concepção linear do desenvolvimento da Matemática.

A Matemática é algo criado pelo ser humano, e o ser humano, no seu desenvolvimento, é moldado pelo ambiente e época na qual está inserido. Dessa forma, as ideias e objetos matemáticos emergem histórica e estão culturalmente determinados ao tempo, espaço e forma de racionalidade do grupo ao qual pertence.

Nessa perspectiva, Caraça (1984) penetra na cadeia lógica matemática e nos fatos históricos, com o objetivo claro de encontrar o fio condutor do movimento da evolução dos conceitos matemáticos enquanto evolução do próprio homem. E, nesse processo, identifica os conceitos fundamentais que formam o cerne do pensamento matemático e também os processos históricos que desencadearam a criação daqueles conceitos. Aliás, os conceitos fundamentais são identificados graças à simultânea identificação dos processos históricos de sua criação. Do mesmo modo, esses momentos históricos são destacados do emaranhado de fatos passados que engendraram a ciência matemática.

Outro elemento determinante do método de Caraça (1984) é o da universalidade do movimento:

> *Fluência*. O Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo *flue*, tudo *devém*. Isto, que é a aprovação fundamental do filósofo *Heráclito* de Efeso foi, posteriormente, reconhecido por grandes pensadores e pode ser verificado por qualquer de nós, seja qual for aquele objeto em que fixemos a nossa atenção. Pois não é verdade que tudo está sujeito a uma mesma lei de nascimento, vida e morte, que, por sua vez, vai originar outros nascimentos?[...] Tudo está numa permanente agitação e, por grau insensíveis, evolucionando de forma que a Terra não é, neste instante, a mesma que era há momentos, e será daqui a uns momentos diferente da que é agora. De tal modo que nem a própria frase "o que é agora" tem significado real; – durante o tempo que ela levou a pronunciar ou a escrever, o processo de evolução actuou e a Terra transformou-se. E evolucionando assim, ela participa ainda doutra evolução própria que condiciona a de cada um dos seus componentes. [...] De modo que, do extremo superior ao inferior da escala, do movimento prodigioso de *expansão* do Universo, ao movimento não menos prodigioso, das partículas constituintes do átomo - tudo flue, tudo devém, tudo é, a todo momento, *uma coisa nova*. (CARAÇA, 1984, p.110, grifos do autor).

Permitimo-nos tão longa citação apenas porque a consideramos rica de pormenores descritivos na tradução da ideia que intentamos sugerir através da perspectiva lógico-histórica, ao longo de nossa pesquisa. Nesse sentido, a Ciência e seus conceitos não escapam a essa universalidade do movimento. Se a realidade objetiva é uma totalidade em movimento permanente, a compreensão que dela criamos é, também, um movimento. O movimento dos conceitos é a superação sucessiva de conceitos, no sentido da aproximação crescente do conhecimento humano sobre a realidade.

Nossa leitura do desenvolvimento da Matemática e, logo, dos números inteiros, baseia-se no movimento das diversas culturas na constituição desse conceito. De fato, será que todas as culturas possuem as mesmas significações da realidade?

Não procuramos identificar um momento histórico específico do desenvolvimento do conceito números inteiros. Nossa preocupação fundamental é evidenciar alguns elementos característicos dos aspectos substanciais e simbólicos dos números inteiros de algumas épocas e culturas.

2.1 Uma visão geral

Segundo Eves (2004, p. 246), a China foi a primeira civilização a “criar um sistema de numeração posicional decimal” e a “reconhecer os números negativos”.

Para o autor, o clássico mais importante e influente dos textos da Matemática da China Antiga é o chamado “Chui-Chang Suan-Shu” ou “Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática”, famoso por conter concepções e técnicas de resolução de diversos problemas de ordem prática (EVES, 2004, p. 243).

Boyer (1996, p. 134) classifica, dentre outros dos “Nove Capítulos”, o oitavo como “significativo por conter a solução de problemas sobre equações lineares, usando tanto números positivos quanto negativos”. E infere:

> A idéia de números negativos parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses pois estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras – vermelha para os coeficientes positivos ou números e uma preta para os negativos. No entanto, não aceitavam a idéia de um número negativo poder ser solução de uma equação. (BOYER, p. 137).

Nos séculos VI e VII, na Índia, os números negativos são considerados e algebricamente manipulados. Isso parece ter sido possível porque, nesse período, a cultura hindu, por oposição à grega, que passava por um período teoricamente improdutivo, aplicara o princípio de valor-lugar do sistema sexagesimal babilônico para a base 10 e adotara o símbolo babilônico de separação, usado na escrita dos números, criando com isso o conceito de zero, símbolo da casa vazia – atribuindo ao zero o conceito de número.

Nessa época, os hindus fizeram uso dos números negativos, atribuindo-lhes o significado de débito. O hindu Brahmagupta, da Índia central, no século VII d.C., considerava soluções de equações quadráticas, mesmo quando uma delas fosse negativa. E ainda afirmava que “positivo dividido por positivo, ou negativo dividido por negativo é afirmativo [...] Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo [...]” (Colebrook[33], 1817, Vol. I, apud BOYER, 1996, p. 150).

Todos estos logros hindúes fueron posibles gracias a su despreocupación por el rigor y la fundamentación lógica; su orientación hacia problemas de orden práctico; su gusto por

[33] COLEBROOK, H. T. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanskrit of Brahmagupta and Blaskara* (London: 1817).

conjugar lo abstracto con lo poético, lo formal con lo lúdico –como quedó plasmado en el ajedrez– y lo práctico con lo formal. (GONZALEZ et al 1990, p. 25)[34]

No entanto, sua metáfora não foi aceita por todos.

> Na Índia, Bhaskara, no século XII, a respeito da equação do segundo grau: $(x/5 - 3)^2 + 1 = x$, com soluções $x_1 = 50$ e $x_2 = -5$ diz que ela "não é consistente", porque as pessoas não aceitam considerar os números negativos absolutos como -5. Os números positivos são chamados "propriedades" ou "bens", enquanto os números negativos são chamados "dívidas"; para um pedaço de reta, um valor negativo é associado ao seu sentido oposto. (SCHUBRING, 2000, p. 54).

Para Bhaskara, "o segundo valor não devia ser tomado por ser inadequado, pois as pessoas não aceitam raízes negativas" (REID[35], 1960, apud MEDEIROS; MEDEIROS 1992, p. 51).

Tal critério também foi adotado por matemáticos chineses que não admitiam números negativos como solução de uma equação. Entre os árabes, a partir de uma álgebra ainda retórica, os matemáticos escolhiam as constantes que garantissem a obtenção exclusiva de soluções positivas, no entanto conheciam as regras que governavam os chamados "números com sinal" (BOYER, 1996, p. 158).

Da mesma forma, matemáticos como René Descartes (1596-1650) chamava de falsas as raízes negativas de uma equação, sob a alegação de serem menores que nada. Na França, o matemático François Viète (1540-1603), só considerava as raízes positivas como solução. Ambos, atrelados à necessidade de interpretar grandezas absolutas negativas na realidade (BOYER, 1996).

Segundo os estudos historiográficos de Schubring (2000/2001), as dificuldades no processo de conceituação do número negativo e o atraso em fazer a diferenciação entre número e quantidade, desde sua origem até o século XVIII, são evidenciados nos seguintes fatores:

- Os números positivos são interpretados como "bens" e os negativos como "dívidas";
- Rejeição de coeficientes e soluções negativas para equações; quando isso ocorria, estas eram interpretadas como inválidas;

[34] Todos estas realizações hindus foram possíveis graças a sua despreocupação com o rigor e a fundamentação lógica, sua orientação seguia problemas de ordem prática; seu gosto em juntar o abstrato ao poético, o formal ao lúdico –como era consubstanciado no xadrez– e o prático ao formal. (GONZALEZ et al 1990, p. 25, tradução nossa).

[35] REID, C. *Introduction to Higher Mathematics*. London, Routledge and Kegan Paul Limited, 1960.

- Aceitar o zero como número (SCHUBRING, 2000, p. 54-55).

A análise de Schubring (2000/2001) conduziu-se na forma de comparação entre os países europeus com maiores comunidades matemáticas da época, França e Alemanha, através de um denso estudo de documentos matemáticos daquele tempo, sobretudo os manuais didáticos.

Na França, na virada do século XIX, a Geometria sobrepõe-se à Álgebra e a Matemática é interpretada segundo "a experiência sensível" dos filósofos da época (SCHUBRING, 2000).

Na Matemática francesa de 1750 a 1850, segundo Schubring (2000), temos:

> Para equações do segundo grau, Lacroix (1808) mantém a abordagem "substancialista" que a havia adotado para as equações do primeiro grau: quando se obtêm duas soluções negativas, deve-se "*modificar-se o enunciado da questão para evitar o absurdo que ele contém* (p. 100, vide p. 168); se houver soluções mistas, a solução negativa não passa, na realidade, da solução de uma outra questão. (p. 63, grifos do autor).

Nesse contexto, Schubring (2001) define "a arquitetura da Matemática" como uma categoria para explicar as causas dessa conceituação. Ao se priorizar a Geometria no desenvolvimento da Matemática, a noção de quantidade converte-se em essencial nela e a de número passa a ser subsidiária; se a Álgebra é a disciplina fundamental e a Geometria um campo de aplicação desta, tem-se então o que se chamou de "transformação aritmética das matemáticas" com o número como conceito fundamental (CID, 2003).

Esse pensamento geométrico já predominava entre os gregos desde o período clássico, porém o número era rejeitado e nascem o que Caraça (1998, p. 78, apud SOUSA, 2004, p. 108) chama de "os três horrores: o horror ao número, o horror ao infinito e o horror ao movimento".

> [...] A matemática grega, no seu período áureo, é uma matemática essencialmente qualitativa, em que o *número* cede o passo à *figur*a, à *forma*. Como não devia ser assim? Não é a figura, a forma – o triângulo, a circunferência, a elipse – eminentemente apta a *guardar sempre a sua identidade?*
>
> Nisto – *no primado da figura* e consequente *degradação do número* – reside um dos aspectos principais da matemática grega. (CARAÇA, 1984, p. 193, grifos do autor).

Pensadores de todos os tempos aterrorizavam-se "pelo sentimento de instabilidade" que os conceitos de número, de infinito e de fluência provocavam, procurando, com isso, "substituir o mundo real do *devir*, por um mundo artificial da *permanência*"

(CARAÇA, 1984, p. 111, grifos do autor). Divide-se o indivisível: recorta-se uma seção da realidade a estudar e se analisa de modo tão específico e estático, que se esquece dos aspectos gerais que originaram o problema.

No período alexandrino, que teve início 300 a.C., destinados a resolver problemas práticos de ordem geográfica, física e astronômica, muitos matemáticos gregos entram no campo da álgebra e da aritmética sem recorrer a geometria. Nesse contexto, há de se destacar Diofanto como o criador da álgebra, visto que introduziu uma notação abreviada, entendida como a álgebra sincopada[36], para representar as potências e as quantidades desconhecidas, e quando possível, conseguia expressar a equação em termos de uma incógnita apenas (EVES, 2004, p. 206-209).

Nesse sentido, Diofanto chega a citar uma regra para o produto de diferenças ("subtração por subtração da adição") que pode ser considerada como a forma embrionária da chamada regra de sinais. Na verdade, este tratamento oferecido aos entes diferentes (negativos e naturais) que apareciam juntos na mesma equação, tinha o objetivo de não contradizer as propriedades, no caso a distributiva, já definidas no campo dos naturais. Apesar disso, Diofanto só admitia respostas entre números racionais positivos, o que demonstra a sua dificuldade de aceitação dos inteiros negativos (EVES, 2004, p. 206-209).

De acordo com uma leitura que distingue três períodos no desenvolvimento da Álgebra, segundo as fases evolutivas da linguagem algébrica, temos a álgebra retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica.

> A fase da retórica representou a primeira tentativa do homem em representar o desconhecido das quantidades. Para isso cria uma palavra. Já a fase sincopada, tenta enxugar as palavras. Sintetiza o palavrório que fez parte da matemática durante milênios. E a fase simbólica rompe, de certa forma, com a das palavras. Sua representação é extremamente sintética. (SOUSA, 2004, p. 104).

Na transição da fase retórica para a sincopada, segundo Boyer (1996), temos que, na Itália, as operações aritméticas de adição e subtração que eram expressas por plus (mais) e minus (menos), são abreviadas para as formas "p" e "m", com um traço acima. Posteriormente, com ajuda do matemático Michel Stifel (cerca de 1487-1567), dos símbolos italianos "p e m" ficaram apenas os traços, e as letras foram substituídas pelos sinais

[36] Segundo Eves (2004), a álgebra sincopada vem após a álgebra retórica, "prosa pura", que refere à fase da linguagem algébrica "em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais freqüentemente" (EVES, 2004, p. 206).

germânicos "+ e –". Apesar de Stifel conhecer as propriedades dos números negativos e operar muito bem com elas, ainda os chamava de "números absurdos".

Inicialmente, estes sinais eram usados em uma logística prática, embasada em uma aritmética também prática, cujo propósito consistia em indicar "excesso" e "deficiência" em medidas, em armazéns (BOYER, 1996, p.192). "Assim se o peso fixo da caixa fosse 50 libras, nos casos de defeito de falta registrava-se 50 libras -5 libras e no caso de excesso, assinalava-se a caixa com o sinal (+)" (TEIXEIRA, 1992, p. 42).

Vê-se relevante esclarecer que esta aritmética prática mantivera-se ligada ao mundo dos sentidos, esta logística não fora, certamente, suscetível de elaboração teórica em suas operações concretas, a qual se destinara a contar objetos materiais e operar com eles, ou seja, o caráter simbólico dos objetos matemáticos construídos pelo comerciante medieval partiu de uma percepção fundamentalmente visual e tátil ao controlar os movimentos quantitativos de seu armazém.

Movimentos estes que se intensificaram com o novo contexto trazido pelo Renascimento, momento em que o homem precisou criar conceitos genéricos capazes de representar, de modo que todos compreendessem sem ambíguas interpretações os movimentos da vida (SOUSA, 2004).

Crosby (1999) indica alguns elementos que permitiram a mudança de mentalidade, no novo modelo de realidade social da Europa, do final da Idade Média e durante o Renascimento. Discute sobre a passagem da percepção qualitativa para a percepção quantitativa, como aquilo que possibilitou o surgimento da Ciência moderna, da tecnologia, da prática comercial e da burocracia. Indica que essa mudança de percepção alterou profundamente as medições do tempo e do espaço e a técnica matemática, atingindo até a música e a pintura (PRADO, 2005, p. 56-57).

Segundo Crosby (1999), essa mudança já tardia, porém revolucionária para o desenvolvimento científico e tecnológico da Europa ocidental no período da renascença, deveu-se à utilização de "hábitos de pensamento", o que os historiadores franceses chamaram de *mentalité*, fermentados e herdados já havia séculos (CROSBY, 1999, p. 12-13).

A explosão das "formas de pensamento" (KOPNIN, 1978) acumuladas ocorre no momento em que o homem passa a refletir a sua realidade em termos quantitativos. A mensuração da realidade desprende-se do pensamento geométrico, categoria qualificável de que trata Crosby (1999), atingindo categorias quantificáveis, através das relações estabelecidas pelos pensamentos aritmético e algébrico.

Com a difusão dos símbolos "+" e "-", Gerônimo Cardano (1501-1576), importante algebrista italiano, embora chamasse os números negativos de "números fictícios", ao desenvolver a resolução da equação cúbica, mudou radicalmente o rumo desses números, pois observou que, "quando todos os termos de um lado do sinal de igualdade são de grau maior que os do outro lado, a equação tem uma e uma só raiz positiva" (BOYER, 1996, p. 197), abrindo espaço aos números negativos como possíveis soluções.

Segundo Gonzalez (et. al. 1990, p. 29), de acordo com a interpretação dos números inteiros positivos e negativos como "bens" e "dívidas", outro algebrista, Rafael Bombelli (1526-1573) chegou a enunciar as regras aditivas dos números inteiros.

Ao final do século XVI, Viète foi o primeiro a empregar vogais para representar quantidades constantes e consoantes, para quantidades incógnitas, por isso, este matemático ficou considerado como o pai da álgebra simbólica, todavia, descartou completamente os negativos como possíveis soluções para as incógnitas das equações.

Retomando os estudos de Schubring (2001), entre meados do século XVIII e meados do século XIX, na Alemanha, temos que a comunidade alemã apresenta maior clareza na distinção entre o sinal de uma operação e o sinal de um número que até então eram utilizados exclusivamente *com* os números e não *nos* números.

Concomitantemente ao desenvolvimento do conceito de número e do zero o homem desenvolve o pensamento algébrico que significa um salto qualitativo no desenvolvimento da Matemática. Dessa maneira, os progressos da álgebra levaram a conclusão de que os coeficientes e as variáveis podem atingir valores positivos e negativos.

Nesse momento, a álgebra funde-se à geometria então os números negativos alcançam diversos campos da Matemática, trigonometria, geometria vetorial, dando origem à álgebra linear.

Em síntese, a Álgebra é a abstração dos números concretos que rege os princípios das operações matemáticas.

Vista dessa maneira, a natureza do pensamento algébrico de Diofanto difere do pensamento algébrico de Viète.

> O pensar a álgebra, a partir de Diofanto, significa que devemos pensar os conceitos algébricos, conectados ao objeto número, enquanto unidade. Ao mesmo tempo, pensar álgebra a partir de Euclides significa pensar álgebra a partir de aspectos geométricos, a imagem, a figura. [...] O pensar a álgebra, a partir de Viète, significa pensar a álgebra a partir da propriedade do número, que contém as coisas e a numerosidade do número, o número em geral. [...] Foi o simbolismo pensado por Viète que possibilitou a escrita de expressões

> de equações e suas propriedades, a partir de fórmulas gerais. (SOUSA, 2004, p. 111-112).

O pensar aritmético sobre o conceito de número significa investigar as propriedades elementares da quantificação, enquanto o pensar algébrico sobre o conceito de número significa pensá-lo em seu movimento, através da arte de expressar suas operações, a partir de entidades abstratas.

A compreensão do conceito de números inteiros exige o pensar aritmético e, simultaneamente, o pensar algébrico sobre o conceito de número.

Devido à falta de significado geométrico, quando a solução de um problema direcionava-se a uma entidade negativa, D'Alembert (1717-1783) atribuía isso a alguma inconsistência na formulação da hipótese do problema. "Afirma, por exemplo, que quantidades negativas, na realidade, são as positivas que foram supostas numa falsa posição e que o sinal (-) serve para corrigir tal erro" (TEIXEIRA, 1992, p. 52).

Na mesma linha teórica, Lazare Carnot (1753-1823) restringe as operações algébricas aos casos possíveis, pois considera um absurdo que $(-3)^2$ seja maior que $(2)^2$. Dessa forma, por considerar a predominância da Geometria sobre a Álgebra, Carnot utiliza-se de entidades negativas em cálculos efetuados isoladamente com semi-retas opostas.

Contudo, já em 1629, Girard "percebia que as raízes negativas são orientadas em sentido oposto ao dos números positivos, antecipando assim a idéia de reta numérica" (BOYER, 1996, p. 209).

A introdução do pensamento algébrico, na Geometria, impulsionou a compreensão dos números negativos em um novo campo desta – a Geometria Analítica.

Ainda, no século XVIII, os textos algébricos, apesar de darem ênfase aos algoritmos, apontavam inconsistências lógicas acerca das regras de multiplicação de números negativos.

Isso fica evidenciado no célebre manual de Álgebra, escrito em 1766, por Leonhard Euler (1707-1783), considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII, no qual o autor admite os números negativos e tenta reuni-los aos números positivos, sob um único conceito dos números inteiros. Para isso, define as quatro operações sobre esses números, porém, ao justificar as regras de sinais, usa de artifícios sem fundamentação lógico-matemática. Por exemplo, para explicar a operação $-(-1) = +1$, Euler prescreveu a antiga metáfora não geométrica hindu, "cancelar um débito significa o mesmo que dar um presente" (KLINE[37], 1982, apud MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 55).

Outro aspecto importante verifica-se na ampliação e exploração dada a contribuição iniciada por Girard, de interpretar o negativo em situações relativas. Em consequência, a necessidade de uma referência material que admita o negativo como quantidade menor que zero, foi aos poucos preenchida por comparações de significação concreta: bens e dívidas, esquerda e direita, acima e abaixo.

Realiza-se, sob esse novo impulso, o que Caraça (1984) chama de negação da negação ou, em outras palavras, a ruptura da ruptura, que irá gerar uma noção transformadora do conceito de número – a sua relatividade.

Em substância, expressamos as negações, em forma de questões, que desviaram durante quase mil anos o pensamento matemático do processo de sistematização do conceito números inteiros:

- Como um número pode ser subtraído de um número menor que ele?
- Como pode existir um número menor que nada?
- Como se pode multiplicar um número menor que nada por outro menor que nada e isso resultar em um número maior que nada?
- Como pode existir um lado de um quadrado de superfície menor que nada?
- Como a incógnita capaz de gerar uma superfície quadrada pode ser um número negativo?

Isso significa que, em determinados momentos da evolução do conceito, aparece determinada dificuldade – chamada por Caraça (1984) de negação – que precisa ser superada. Segundo o autor, negando-a.

No caso da evolução dos campos numéricos, Caraça (1984) procura mostrar como a Matemática se reestruturou através da dinâmica de exploração sistemática de tais generalizações, denominada por ele de "princípio da extensão" ou "tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento" (CARAÇA, 1984, p. 10).

Nessa perspectiva, no século XIX, o professor de Matemática Hermann Hankel (1839- 1873), que fora aluno do físico Riemann, busca a legitimação dos negativos nas leis lógico-formais, concretamente no "princípio de permanência", desviando-se das evidências das situações reais. Hankel previra que "os números reais devem ser encarados

[37] KLINE, M. *Mathematics: The Loss of Certainty*. New York, Oxford Univ. Press, 1982.

como ‘estruturas intelectuais’ e não como grandezas intuitivamente dadas, legadas pela geometria de Euclides”, pressentindo a necessidade de estruturação dos negativos enquanto sistema numérico (BOYER, 19, p. 389).

Entretanto, esta ideia de Hankel não pertencia somente a ele, neste século desencadeou-se uma geração de matemáticos com este mesmo propósito. Por exemplo, do mesmo modo, Weierstrass (1815-1897) tentou separar o cálculo da geometria e basear-se no conceito de número apenas (BOYER, 19, p. 389).

Contudo, vale lembrar que, as abstrações e objetos matemáticos, não são criados arbitrariamente, como num “jogo”. Seu desenvolvimento formal advém de necessidades científicas que, por sua vez, advém de experiências e necessidades reais. Independente de sua simbolização ou formalização, o conhecimento matemático encontra-se relacionado aos aspectos históricos e culturais, que fazem parte do mesmo. “Se a matemática é um jogo, não vejo razão para que os homens joguem quando não sentem vontade” (HOGBEN, 1970, p. 33).

Assim, graças à intuição dos símbolos, trazida pela inserção da álgebra na aritmética, o matemático do século XIX pode fazer a diferenciação entre os sinais (+ ou -) operatórios – aqueles que indicam ação – e predicativos – aqueles que qualificam um estado, positivo ou negativo. Mais importante ainda foi quando se introduziu o símbolo 0 como número, definindo-se a-a = 0, dado por uma nova noção do conceito de zero – como um par de elementos opostos em equilíbrio.

Em decorrência, essa nova concepção faz emergir uma nova atitude entre os matemáticos, contribuindo para a fundamentação teórica da Matemática.

> O ponto de inflexão para tal mudança encontra-se nos trabalhos originais de George Peacock (1791-1858) e na distinção por ele traçada entre álgebra aritmética e álgebra simbólica. Na primeira, apenas as operações com os inteiros positivos seriam permitidas, na segunda tal restrição era removida embora fossem ainda as regras da álgebra aritmética. Isso ficou configurado no seu princípio da permanência das formas equivalentes; o qual estabelecia que as leis fundamentais dos velhos números da aritmética eram preservadas para os novos números (Reid, Ibid; Hollingdale, Ibid). Dentre tais leis; as principais, tomadas como axiomas na álgebra clássica, podem ser expressas como:
> 1) a + b = b + a
> 2) (a + b) + c = a + (b + c)
> 3) ab = ba
> 4) (ab)c = a(bc)
> 5) a(a + c) = ab + ac
> (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 56).

Isso significava incluir os novos números -1, -2, -3... em uma aritmética ampliada, que sustentasse tanto os inteiros positivos quanto os negativos, de maneira que as propriedades acima (leis fundamentais da aritmética) fossem preservadas. Por exemplo, para se preservar a lei distributiva, a multiplicação de -1 por -1 deveria ser igual a +1; do contrário, ela não seria válida para o campo numérico dos inteiros (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 56).

Ampliar o domínio com a introdução de novos símbolos, de tal forma que as leis válidas para o domínio original prevaleçam no domínio maior, é um aspecto do processo matemático característico da *generalização* de que trata Caraça (1984).

De acordo com a teoria dos números, temos que um sistema numérico é um conjunto de números, fechado para a adição e a multiplicação, regido pelas propriedades comutativa, associativa e distributiva. Desse ponto de vista, para construção de um novo campo numérico em que seja possível a subtração de b – a, para o caso de b < a, vê-se necessário demonstrar que tais leis, assim como são válidas para os números naturais (inteiros positivos), sejam válidas no domínio dos números inteiros (positivos e negativos).

Segundo Glaeser (1981 e 1985) apud Teixeira (1992, p. 55), Hankel baseou-se em “entes criados pelo pensamento – portanto abstratos” não perceptíveis na vida prática. Essa convicção, segundo Glaeser, foge a uma crença, que vigorava no pensamento matemático até o final do século XIX, a “ideologia da luz natural”, a qual defendia uma relação direta entre a matemática e o mundo físico (TEIXEIRA, 1992).

Porém, os próprios fundamentos da lógica matemática deixariam de fazer sentido se não fossem guiados por experiências e situações concretas, “nenhuma lógica sustentou os números negativos, irracionais e complexos, ou álgebra, ou o cálculo. Eles dependiam de sua aplicabilidade.” (KLINE, 1981, p. 3).

Baseado no princípio da permanência, Hankel rompe com a tradição clássica e estende as propriedades do sistema numérico dos naturais para os inteiros.

> A legitimidade dessa extensão resulta no seguinte teorema: “a única multiplicação em R, que estende a multiplicação usual em R+, respeitando a distributividade (à esquerda e à direita) está de acordo com a regra de sinais” (idem pg. 105 e 106). Cujo texto utiliza a abreviatura “op.” para oposto. Daí a demonstração:
> 0 = a x 0 = a x (b + (op. b)) = ab + a x (op. b)
> 0 = 0 x (op. b) = (op. a) x (op. b) + a x (op. b)
> Donde
> (op. a) x (op. b) = ab (GLAESER, 1981/1985, apud TEIXEIRA, 1992, p. 55).

Essa nova perspectiva, do princípio da permanência das formas equivalentes, permitida através da fusão – álgebra simbólica e álgebra aritmética – provocou uma mudança radical no ponto de vista dos matemáticos do século XIX, revolucionando a fundamentação dos números e, consequentemente, dos números inteiros.

Cabe observar também que esta demonstração formal, na qual Hankel legitima que o produto de números negativos resultará em um número positivo, pode ser encontrada sob diversas linguagens em outros livros texto de Matemática. Em especial, no primeiro volume do "Caderno do Aluno" de Matemática para a 6ª série do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 2009b), no caso, o problema que segue espera que o aluno demonstre que "-(-1) = 1":

> 3. Imagine um tanque que possa ser esvaziado por torneira de vazão -1 litro por minuto (o sinal de menos indica que o líquido é retirado do tanque), e enchido por torneiras de vazão de 1 litro por minuto. Se podemos livremente colocar nesse tanque qualquer quantidade dessas torneiras, fica evidente que, para efeito de manutenção do fluxo de água no tanque, "retirar uma torneira de vazão -1 L/min" é equivalente a "acrescentar uma torneira de vazão 1 L/min". Utilize o texto dessa questão para justificar que -(-1) = 1. (SÃO PAULO, 2009b, p. 33)

Não se pode negar que a verificação (op. a) x (op. b) = ab, ou melhor, "(-a) . (-b) = a . b", é reformulada numericamente para "-(-1) = 1", de modo criativo dentro de um contexto perceptível aos alunos. Além disso, no "Caderno do Professor" (SÃO PAULO, 2009a) encontra-se um modelo pronto como sugestão para desenvolver esta demonstração com os alunos.

> Utilizando a linguagem numérica, teremos:
> "retirar uma torneira de vazão -1 l/min" $\Rightarrow$ -(-1)
> "acrescentar uma torneira de vazão 1 l/min" $\Rightarrow$ +1
> Portanto, segue que -(-1) = 1.
> O fluxo de zero torneira de vazão -1, que é igual a zero, pode ser indicado da seguinte maneira: 0 . (-1) = 0.
> Uma vez que podemos interpretar zero torneira como colocar e retirar uma torneira, podemos representar a nova expressão por: (1-1) . (-1) = 0.
> Utilizando a propriedade distributiva no produto, sabemos que a expressão é equivalente a: 1 . (-1) - 1 . (-1) = 0.
> Uma vez que 1 . (-1) é igual a "um negativo" e sabendo-se que o resultado da conta que está do lado esquerdo do sinal de igual tem de ser zero, necessariamente -1 . (-1) tem de ser igual a 1 [...]. (SÃO PAULO, 2009a, p. 41)

Entretanto, retomando a história do conceito número inteiro no desenvolvimento da Matemática, os dados apresentados neste estudo apontam que foram precisos aproximadamente 1500 anos para que as regras de sinais fossem sistematizadas, e mais alguns séculos para que as propriedades existentes no campo numérico dos naturais fossem definidas também nos inteiros. Logo, a argumentação lógica, baseada nas estruturas que regem a teoria dos números, não se dispõe diretamente acessível à compreensão dos alunos. Até que a sua construção formal superasse todas as contradições do pensamento, os números inteiros foram usados em problemas cotidianos e em práticas de cálculo através de objetos empíricos.

A partir dessa análise histórica, foi possível verificar a importância de se resgatar as ideias e objetos matemáticos que antecedem a este formalismo lógico. A partir de situações de ensino que priorizem as relações conceituais que antecedem à compreensão e fundamentação de qualquer regra de cálculo.

Não obstante, entende-se que o problema proposto no “Caderno do Aluno” mostra-se interessante quanto à decodificação da estrutura lógica da linguagem utilizada nesta prova matemática. Porém, acentua apenas o aspecto lógico formal dos inteiros. Ademais, isto é feito através da justificação de sua funcionalidade em termos das regras de cálculo com estes números, o que “representa o último estágio de rigor e de abstração do pensamento elaborado pela humanidade” (SOUSA, 2009, 86-87).

Posto dessa forma pode-se considerar que, a construção desta problemática, não só por parte do aluno, como também do professor, exige a construção prévia de um conjunto de conhecimentos acerca do conteúdo concreto dos números inteiros, como por exemplo, o desenvolvimento do pensamento algébrico, a percepção dos aspectos qualitativo e quantitativo do número, a reversibilidade de situações relativas, elementos estes que são identificáveis no próprio desenvolvimento lógico-histórico deste conceito.

- **Para o OA**

Desse estudo geral, foram escolhidas as situações históricas e elaborações que se apresentaram como uma possibilidade e estratégia de ensino das ideias precursoras do conteúdo de números inteiros. Pela via da resolução de problemas, foram integradas no OA as seguintes construções lógico-históricas:

- ✓ A utilização dos sinais + e - como excesso e falta em práticas comerciais no início do Renascimento na Europa.
- ✓ Situações relativas dadas mediante comparações entre contrários com significação concreta: cronologia,

temperaturas, entrada e saída, esquerda e direita, alturas sobre e abaixo de um determinado nível.

- ✓ A ordem da reta numérica a partir de sentidos opostos.
- ✓ O zero como resultado dessas relações comparativas de igualdade.
- ✓ A distinção entre os sinais (+ ou -) operatórios – aqueles que indicam ação – e predicativos – aqueles que qualificam um estado, positivo ou negativo.

2.2 Dois olhares em torno da construção social do conceito números inteiros: perspectivas chinesa antiga e grega clássica

> *[...] no hay cálculos que sean meros, cada cálculo – por práctico que se quiera – lleva la huella del imaginario social que lo desencadena. (Emmánuel Lizcano)*[38]

O lógico-histórico do conceito números inteiros revela as influências de outros contextos até mesmo intuitivos, provenientes da forma de pensamento de cada cultura sobre as atividades matemáticas, tais como as hesitações, os retrocessos e as incertezas, na busca pelo domínio desse conhecimento.

> Era função da intuição criar novas formas; era o direito reconhecido da Lógica aceitar ou rejeitar tais formas, *em cujo nascimento não tinham nenhum papel*. Mas as decisões do juiz eram lentas, e enquanto isso a criança tinha de viver; assim, enquanto esperavam que a Lógica santificasse sua existência, elas cresceram e multiplicaram-se. (Dantzig, 1970, p. 160, grifos do autor).

Trata-se de resgatar as ideias e objetos matemáticos que estão por trás dos métodos, do conjunto de códigos e de toda lógica da matemática, no desenvolvimento do conceito números inteiros.

Os currículos escolares tem despido a Matemática de seu conteúdo cultural e deixado um esqueleto nu, organizado hierarquicamente e cheio de tecnicismos. Isso pode repelir muitas mentes argutas que de outra forma certamente seriam atraídas pelo assunto (Dantzig, 1970).

[38] Não há cálculos que sejam meros, cada cálculo – por mais prático que se queira – leva a impressão do imaginário social que o desencadeia. (LIZCANO, 1993, p.150, grifo do autor, tradução nossa)

Para resgatar o conteúdo cultural e apresentar a evolução do conceito números inteiros, como história profundamente humana, rompendo com a impressão de que a evolução da Matemática ocorreu na ordem em que foi escrita nos capítulos dos livros didáticos, entranhamo-nos na composição lógico-histórica do conceito de números inteiros, a fim de desvendar os aspectos "substanciais" e "simbólicos" que arraigavam as formas de pensamento das civilizações "orientais e ocidentais"[39]. E, tanto para buscar quanto para selecionar as elaborações, premissas e "metáforas" ditadas pelos contextos chinês e grego, ao longo da história, usamos a investigação de Lizcano (1993/2006). Assim, seguimos o caminho de Lizcano (1993), direcionando nosso olhar para os seguintes âmbitos culturais: chinês antigo, grego clássico, alexandrino.

Lizcano (1993) faz uma discriminação dos modos de pensar chinês ou oriental e ocidental ou indo-europeu, com maior aprofundamento no imaginário coletivo grego em seu período Clássico e Helênico, nos quais analisa aspectos como: os pressupostos, os pré-conceitos, os juízos prévios, os caracteres gráficos, os instrumentos manipulados pelos matemáticos, o saber, os processos de conhecimento, as formas de discurso, os modos de definição, de argumentação, a visão, o que se entende por Matemática e a forma de construí-la.

Nesse sentido, a abordagem de Lizcano (1993) em relação às formas de negatividades e ao conceito zero não é meramente histórica, mas também filosófica, sociológica e antropológica. O autor faz uma reflexão detalhada sobre os "supostos" (percebidos ou não) números negativos e seus "supostos" antecedentes, no curso de certas práticas desenvolvidas pelos matemáticos chineses, talvez sem se dar conta de que seus "palitos pretos" fossem os embriões dos "números negativos" que os gregos tanto rejeitavam. Por isso, nesse estudo, Lizcano (1993) utiliza-se do termo "formas de negatividade" para tratar de indícios dessa natureza.

Para Lizcano (1993, tradução nossa), a maneira analógica de pensar , por semelhanças, equivalências e o uso de metáforas, possibilitou aos chineses (os primeiros Han) construírem uma das primeiras e mais bem formalizadas formas de negatividade desenvolvidas pelo homem: a chamada "zheng/fu/wu", na qual palitos pretos (fu) eram denominados números negativos e os palitos vermelhos (zheng), números positivos. O método empregado, chamado "fang cheng", consistia na arte de nomes/números/palitos

[39] Tais termos são utilizados por Lizcano (1993/2006) para estabelecer um paradoxo entre as formas de pensamento circunscritas no imaginário oriental e ocidental, os quais não se referem a princípios geográficos, mas sim a princípios lógicos, pré-conceituais, culturais e linguísticos.

opostos que se destroem mutuamente, quando se está pretendendo criar um vazio (wu) no espaço (um "oco" irredutível a uma medida comum) de representação (tabuleiro de cálculo).

Nesse contexto, descrevemos outras formas de negatividade estudadas por Lizcano (1993), dentre as quais os quadrados mágicos dos chineses, bem como o complexo simbólico "yin/yang/dao", ambos articulados a partir de um centro, obedecendo a critérios de congruência e oposição.

Segundo Lizcano (1993, tradução nossa), tais formas de negatividades não apareceram na Grécia Clássica. Estas foram "engolidas" pelo pensamento por abstração, substituídas pelo campo conceitual da subtração, pela escura indeterminação dos pressupostos metafísicos e pela Matemática "euclídea" (pensamento geométrico), cujos primeiros sinais de superação se encontram na Matemática alexandrina, na obra de Diofanto, no período helênico.

2.2.1 Os instrumentos conceituais dos Han

Para compreender as formas de negatividades desenvolvidas pela Matemática chinesa, Lizcano (1993, tradução nossa) emprega principalmente o oitavo capítulo dos "Nove Capítulos" e os comentários de Liu Hui (III d.C.) sobre o mesmo (LIZCANO, 1993, p. 63-65).

Para Lizcano (1993, p. 65, tradução nossa), os "Nove Capítulos", sua principal fonte de estudos, constituem o texto-chave da Matemática da China Antiga, datando o período dos "Primeiros Han (206 a.C. a 9 d. C.)".

A propósito, é importante esboçar de maneira breve os principais períodos históricos chineses. De acordo com Lizcano (1993, tradução nossa), esses períodos são marcados cronologicamente por várias dinastias políticas: Dinastia dos Xia (2205- 1767? ou 1989-1558); os Shang, depois Yin (1766-1112? ou 1558-1051); os Zhou ocidentais (1111 ou 1050-771) – época em que foi escrito o Livro das Mutações (Yijing) –; os Zhou orientais (770-256) –período quando foram desenvolvidos elementos da dialética, sofística e lógica formal –; os Reinos Combatentes (453-221); os Qin (221-206) – tempo marcado por um poderoso império unificado pela tirania do "Primeiro Imperador Amarelo" ou "Shi Huang-ti", que ordenou, em 213 a.C., uma lamentável queima de livros que contrastassem à doutrina taoísta –; os Primeiros Han, ou Han ocidentais (206 a.C- 9d.C.); os Han posteriores ou Han orientais (23-220) – momento em que o taoísmo é substituído pelo confucionismo –; os Três

Reinos (220- 280); os Jin ocidentais (265- 316); as Seis Dinastias (316-589), com desunião e desmembramentos, predomínio do taoísmo religioso, grande desenvolvimento teórico matemático. Houve também os Sui (589-618) – com a reunificação do império –; os Tang (618- 907) – quando se deu o predomínio do budismo –; as Cinco Dinastias (907- 960); os Song do Norte (960- 1126) e os Song do Sul (1127- 1279); a Dinastia mongol dos Yuan (1280- 1368) – período de maior esplendor da Matemática chinesa, com reação antibudista para um neoconfucionismo, reflexões em torno dos princípios "yin" e "yang". Os Ming (1368- 1644) vieram com a chegada dos missionários jesuítas, período escolástico; a Dinastia dos Qing (1644- 1911) – que contempla vários renascimentos (LIZCANO, 1993, p. 65, tradução nossa).

- **Para o OA**

Os períodos histórico-sociais nos quais são encontrados aspectos relevantes das formas de negatividade chinesa que, por esse motivo, foram encadeadas no OA são:

- ✓ A Dinastia Qin de 221 à 206 a.C. para contextualizar a introdução dos princípios yin e yang.
- ✓ E a Dinastia Han de 206 a.C. à 221 d.C. para contextualizar o cálculo com palitos dos chineses.

Visando entender a Matemática dos Han, bem como o método "fang cheng" dos "Nove capítulos", onde é com palitos que se constrói a negatividade "zhen/fu", vê-se interessante compreender os elementos constituintes do sistema de numeração em barras (palitos) da China Antiga.

2.2.1.1 Sistema de numeração em barras

A China foi a primeira civilização a criar um sistema de numeração posicional e decimal, pois já na época dos Reinos Combatentes se encontram indícios desse sistema de numeração.

Amarrando os palitos (fabricados por varetas de bambu) com cordões, os chineses criaram "o sistema de numerais em barras" (vide Figura 1)[40]: os dígitos de zero a

[40] Figura extraída das "Curiosidades" na opção "números/palitos" do Objeto de Aprendizagem "O Universo e seus Contrários"

nove apareciam na vertical e os nove primeiros múltiplos de dez (as dezenas) eram escritas assim na horizontal.

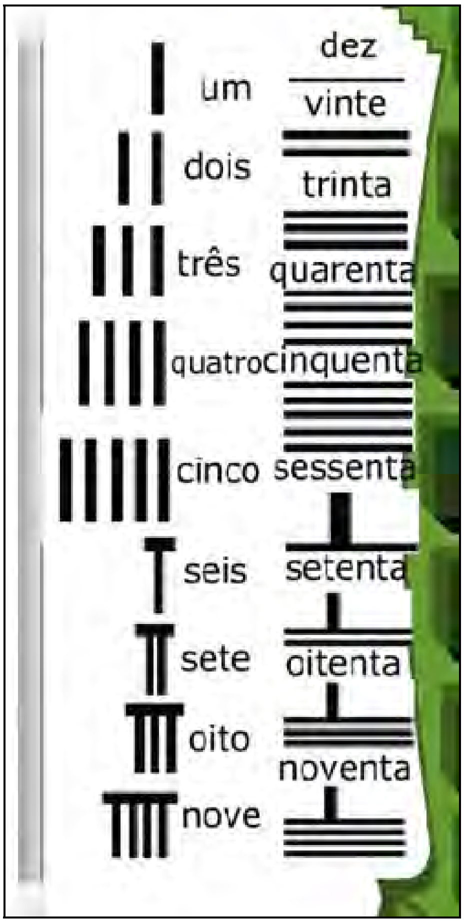

Figura 1 - O sistema de numerais em barras dos chineses.

Dessa maneira, as disposições vertical e horizontal dos palitos ou barras se invertem, sucessivamente. Os símbolos da primeira tabela representam as unidades, centenas, em geral os números/palitos que ocupam posições ímpares, e os símbolos da segunda tabela representam as dezenas, milhares e demais posições pares.

A alternância sucessiva de símbolos verifica-se para que se possa distinguir corretamente o palito que ocupa uma posição, do palito que ocupa a posição anterior. Ou seja, os palitos e sua posição no tabuleiro são o que as pequenas pedras e as barras são para o ábaco.

O zero para os chineses era representado por um espaço vazio no tabuleiro de cálculos; ao contrário dos gregos, eles não se assustavam com isso. O vazio era, para os chineses, a fonte do que tudo deriva, a abertura de todas as possibilidades – o objetivo deles era justamente chegar ao zero através do simétrico do número/palito, isto é, anular as incógnitas de um sistema de equações, zerando seus respectivos coeficientes.

Somente a partir dos Ming (séculos XIV – XVII d. C.) os chineses passaram a utilizar um ideograma para o zero, "ling", que significa "gota de orvalho"[41], cujo formato é usado até hoje. Isso não quer dizer que o zero não fosse empregado como número, ou valor posicional até então. Segundo Lizcano (1993, p. 101, tradução nossa), talvez essa designação fosse supérflua, pois, para os chineses, um lugar vazio, como o de uma posição sem ocupar no tabuleiro, não é um nada, mas sim um símbolo como outro qualquer (LIZCANO, 1993, p. 100-103, tradução nossa).

No entanto, o espaço em branco como marca das posições vazias (inerentes a um sistema de numeração posicional) trazia confusões, ao exprimir certos números, como, por exemplo, ao se exprimir o 405, representado por IIII IIIII, este poderia se entender como 40005.

Lizcano (1993, p. 70, tradução nossa), ao descrever os palitos/numerais dos chineses, apresenta-os como um instrumento de um jogo, manipulado cotidianamente, cuja atividade faziam naturalmente, sem perceber de que se tratava de álgebra.

> [...] Así, el simbolismo implícito en las reglas del juego de palillos y tablero no sólo hace innecesario un simbolismo "algebraico" explícito sino que carga a la actividad matemática con las resonancias simbólicas que sobre los usos de tales palillos proyecta el modo de pensar chino. (LIZCANO, 1993, p. 70).[42]

A utilização desses instrumentos como objetos de cálculo entre os chineses pode ser comparada ao uso do ábaco, pelos indoeuropeus.

Com o interesse de aproveitar as características do sistema de numeração em barras dos chineses e compará-las ao sistema indoarábico posicional decimal de numeração, o "Caderno do Aluno" (SÃO PAULO, 2009b) traz algumas explicações e atividades acerca dessa nova forma de escrita numérica. Um exemplo pode ser encontrado na "Lição de casa", onde é solicitada a resolução da seguinte atividade: "Escreva os números 238

[41] A união dos contrários – céu ("yang") e terra ("yin") – ocorre por meio da chuva de orvalho. Por isso, o termo "gota de orvalho" significa um ponto transitório onde os opostos, se encontrando, se resolvem. Atualmente em meteorologia ou climatologia o termo "ponto de orvalho" refere-se ao instante em que o vapor de água presente no ar esta preste a se condensar.

[42] Assim, o simbolismo implícito nas regras do jogo de palitos não somente torna desnecessário um simbolismo "algébrico" explícito, mas que carrega a atividade matemática com ressonâncias simbólicas que sobre os usos de tais palitos projeta o modo de pensar chinês (LIZCANO, 1993, p. 70, tradução nossa).

e 4575 no sistema chinês de numeração com barras verticais e horizontais para as casas ímpares e pares" (SÃO PAULO, 2009b, p. 14).

Sob uma vertente distinta à utilizada pelos alunos para representar um número, o problema proposto no "Caderno do Aluno" permite uma reflexão a respeito das contribuições do valor posicional para a operacionalidade e clareza de um sistema de numeração.

- **Para o OA**

Entretanto, de modo a não fugir do conteúdo principal do OA – o conceito números inteiros – o "Sistema de numeração em barras dos chineses" foi descrito apenas como informação complementar disponível para consulta do usuário.

2.2.1.2 Método "fang cheng"

O método "fang cheng" foi desenvolvido por algebristas chineses, a fim de resolver sistemas de equações lineares provenientes de problemas matemáticos de ordem prática, cujo objetivo consiste em obter "ocos" (vazios ou zeros) mediante "destruições mútuas" de quantidades opostas.

Dadas M quantidades aij (j = 1,2, ... m) de cada uma de M coisas xj (j = 1,2, ... m) e dadas N relações lineares entre tais coisas (coeficientes), em função de tais quantidades ($a_{i1} + a_{i2} + \ + a_{im} = b_i$, i = 1, ... n), trata-se de calcular o número de cada coisa. Isto é, trata-se de resolver um sistema de equações com M incógnitas, do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

A disposição de palitos/números do sistema no tabuleiro é dada da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc}
coisa1 & a_{n1}\ldots & a_{21} & a_{11} \\
coisa2 & a_{n2}\ldots & a_{22} & a_{12} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
coisam & a_{nm}\ldots & a_{2m} & a_{1m} \\
shi & b_n\ldots & b_2 & b_1
\end{array}$$

Cada linha vira uma coluna, obedecendo à seguinte ordem: de cima para baixo, as linhas vão se dispondo em colunas da direita para esquerda, sendo que a última linha shi (LIZCANO, 1993, p. 74, tradução nossa) corresponde aos termos independentes.

Essa é a álgebra instrumental chinesa, na qual a cor dos palitos e sua posição no tabuleiro predeterminam as funções dos símbolos da adição, subtração, multiplicação, incógnita, igualdade etc., utilizados na álgebra ocidental. Segundo Lizcano (1993, p. 72-73, tradução nossa), todo esse simbolismo de tradição grega é resultado de um processo de abstração, enquanto, para os chineses, o símbolo é "uma qualidade dos lugares concretos em função de uns sistemas de referência implícitos".

> [...] El espacio algebraico chino no es el espacio extensional aristotélico-euclídeo sino espacio simbólico, un espacio que carga de significados diferentes a sus diferentes lugares que, a su vez, vienem determinados por su mutua relación interna. (LIZCANO, 1993, p. 72-73, grifo do autor).[43]

Lizcano (2006, p. 134-135, tradução nossa) enfatiza que tais princípios lógicos seguem uma forma de pensamento global, cuja matriz corresponde à estrutura da língua chinesa. Ao contrário das línguas de origem indoeuropeia, cujas orações tem estruturas lineares, com sujeito, verbo e predicado, os ideogramas do chinês clássico são compreendidos a partir dos lugares que ocupam e de uma visão geral do conjunto todo de símbolos, dispostos tanto horizontal quanto verticalmente.

O cálculo com palitos sobre um tabuleiro (espaço físico), no qual as operações ficam condicionadas por ele, oferece uma possibilidade operatória bem distinta dos que transportam numerais indoarábicos ou os segmentos de reta da Matemática grega. Fazer cálculos matemáticos, usando palitos sobre um tabuleiro ou tapete, traduz uma álgebra que distingue os lugares por uma carga simbólica que cada um incorpora, própria de uma álgebra simbólica, em que o lugar representa algo, mesmo que sobre ele não haja nada, nem um palito

[43] O espaço algébrico chinês não é o espaço mensurável aristotélico-euclídeo, mas espaço simbólico, um espaço carregado de significados diferentes a seus diferentes *lugares* que, por sua vez, vem determinados por sua mútua relação interna (LIZCANO, 1993, p. 72-73, tradução nossa).

sequer, isto é, o vazio não se reduz a nada. Enquanto que, a álgebra ocidental desenvolve depois da álgebra retórica e sincopada, quando a prosa ou as taxonomias são substituídas pelos sinais, um amontoado de símbolos que, exceto ao seu criador, já nada significam.

Por isso, o espaço vazio no sistema de numeração em barras dos chineses simboliza o zero, porque, para o pensamento oriental, esse espaço vazio significa por si mesmo, tanto quanto significa uma palavra, para os ocidentais.

Retomando o objetivo principal do método “fang cheng”, este consiste em obter vazios ou zero mediante “destruições mútuas” (de quantidades opostas). Para isso, multiplicam-se todos os elementos da coluna, com a qual deseja anular (zerar) um de seus elementos, por um certo número, e efetuam-se subtrações sucessivas entre essa coluna com que se opera e a precedente, até que se esvazie o espaço desejado.

Isso não altera a estrutura do sistema, pelo motivo de cada coluna ser uma coleção ordenada de razões ou relações entre números. Dessa forma, permite multiplicar todos os números da mesma coluna por um mesmo número, sem que se altere o significado dela.

A chave do método está em equilibrar os termos das colunas, por um jogo de compensação de termos, com a entrada em cena dos pares de opostos “zheng/fu”. Na verdade, um processo articuloso de equilibração para obter o nada.

Esse procedimento de obter lugares vazios no tabuleiro deve ser repetido até que se consiga triangular com “ocos” a parte superior do tabuleiro, de modo que em uma coluna reste um só termo, ou “coisa” acima e o termo independente abaixo, possibilitando então o cálculo do número ou quantidade de uma das “coisas” e facilitando, assim, o cálculo das quantidades das outras duas qualidades de coisas.

Para exemplificar o método “fang cheng”, como fez Lizcano (1993, p. 74-77), transcreveremos o problema 1 do capítulo oitavo dos “Nove capítulos”, usando, para facilitar, a interpretação de cifras árabes ao invés de palitos:

Problema 1:

Há 3 maços de cereal de qualidade superior, 2 maços de qualidade média e 1 maço de qualidade inferior, resultando 39 “dou” [de grão] como “shi”; 2 maços de qualidade superior, 3 maços de qualidade média e 1 maço de qualidade inferior, que dão 34 “dou” como “shi”; enquanto 1 maço de qualidade superior, 2 maços de qualidade média e 3 de qualidade inferior dão 36 "dou" como "shi". Encontrar a medida [de grãos] em "dou", contida em um maço de cada uma das três qualidades de cereal (LIZCANO, 1993, p. 74, tradução nossa).

Algebricamente, o problema citado corresponde ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Passo a passo, explicaremos a aplicação do método "fang cheng" para resolução de tal problema:

- **Passo 1**

Colocam-se 3 maços de cereal de qualidade superior, 2 de qualidade média e 1 de qualidade inferior com seu resultado, 39 dou, na coluna da direita, repete-se esse procedimento, a fim de organizar as colunas, no sentido da direita para esquerda, até que a disposição de palitos no tabuleiro seja:

Qualidade superior	1	2	3
Qualidade média	2	3	2
Qualidade inferior	3	1	1
Shi	26	34	39
	C3	C2	C1

- **Passo 2**

Opera-se com a coluna que possui o termo que se pretende anular. Tomando-se a coluna central C2, multiplica-a por a_{11} = 3 (primeiro termo da coluna antecedente), e subtrai-se dela a coluna da direita C1 (antecedente), quantas vezes for necessário para que a_{21} desapareça (duas vezes, neste caso, pois 2 é o termo que se pretende anular). O raciocínio seria semelhante à seguinte sentença matemática: a_{21} = {[3. (2)] - (3) - (3)} = {[6] - (3) - (3)} = 0.

Essa operação pode ser simbolizada por:

C2 → 3C2 – C1 – C1

Dessa forma, o tabuleiro ficará:

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

- **Passo 3**

Procedendo-se analogamente ao passo 2, efetua-se a operação C3 →3C3 – C1.

Segue-se o principal raciocínio, na sentença matemática: a_{31} = {[3. (1)] - (3)} = {[3] - (3)} = 0. Obtendo:

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

- **Passo 4**

C3 → 5C3 – C2 – C2 – C2 – C2

Sentença matemática: a_{32} = {[5. (4)] - (5) - (5) - (5) - (5)} = {[20] - (20)} = 0 (cinco vezes o quatro, menos o quatro cinco vezes). Obtendo:

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

- **Passo 5**

As operações são realizadas até se conseguir que a parte superior do tabuleiro fique de forma triangular. Assim, o que fica na coluna C3 é o cereal de qualidade inferior, tomando-se o número superior como fa (divisor) e o inferior como shi (dividendo). Temos que 36z = 99, então z = 99/36, ou seja, um maço de qualidade inferior contém 99/36 (grãos) em “dou”.

Com a disposição dos números no tabuleiro do passo 4, na forma triangular, é possível obter as quantidades das outras duas qualidades de cereais. Em síntese, segundo Lizcano (1993, p. 77, tradução nossa), os passos seguintes constituem substituições sucessivas.

Calcula-se (24).(36) – (99).(1) = 765, o shi para o cereal de grão médio será 765/5 = 153, com isso y = 153/36. Do mesmo modo, efetuando–se a operação (39).(36) – (99).(1) – (153).(2) = 999, o shi para o cereal de qualidade superior é 999/3 = 333, com isso x = 333/36.

Esse método é desenvolvido na China antiga, desde o começo da era cristã, mas, para os limites do pensamento grego, seria um absurdo empregar qualquer método que levasse ao nada; estes consideravam, ao contrário dos chineses, tais cálculos muito complicados de ser efetuados. Assim, esse método somente ficou conhecido, a partir do século XIX, como "Método de Gauss" (identificado como método da eliminação gaussiana), com algumas diferenças em relação ao método "fang cheng". No método "fang cheng", as linhas do sistema, de cima para baixo, são dispostas em colunas, da esquerda para direita, e os termos anulados ficam dispostos na parte superior da diagonal secundária que divide o tabuleiro. No método de Gauss, o raciocínio das operações é o mesmo; trata-se da equilibração de termos para se obter o "nada", porém, todos os cálculos são efetuados sobre a matriz original (formada a partir do sistema linear), porém, neste caso, a linha não vira coluna e as operações são realizadas entre as linhas e não entre as colunas, com o objetivo de anular os termos que estão abaixo da diagonal principal da matriz.

- **Para o OA**

Vê-se relevante observar que, o exemplo técnico aqui desenvolvido, foi utilizado apenas como meio de ilustrar com clareza o método "fang cheng", de modo que este não será propriamente abordado no OA. Contudo, procurou-se enfatizar a possibilidade operatória encontrada pelos chineses e as ideias subjacentes a este método, como a equilibração entre os termos (princípio de equivalência) a partir de subtrações sucessivas, critérios que conduziram à construção da primeira e mais formalizada forma de negatividade – as regras "zheng/fu".

2.2.1.3 As regras "zheng/fu" (positivo/negativo)

O método "fang cheng", assim como foi exposto, apesar de avançado para seu tempo, diante de algumas situações, apresenta limitações, tais como: quando nem todas as equações do sistema são lineares independentes, isso resulta na impossibilidade de cálculo cujo divisor é nulo; quando as equações apresentam números grandes, exigem efetuar inúmeras subtrações sucessivas com a coluna precedente para anular o termo correspondente da coluna pré-fixada. E, finalmente, quando é preciso subtrair um número de outro menor, ou do próprio zero.

Para resolver o problema das duas últimas limitações expostas no parágrafo anterior, os matemáticos Han constroem as regras "zheng fu", ampliando as possibilidades de resolução dos problemas através de uma reestruturação do método "fang cheng", cujo procedimento central está em conseguir triangular a base de ocos da matriz, mediante o equilíbrio de termo em colunas paralelas, substituindo a maçante subtração sucessiva por uma simetria de operações entre colunas, a qual estabelece duas multiplicações ao invés de uma apenas, sendo necessária apenas uma subtração entre elas. Para garantir essa flexibilidade ao método, constroem-se as regras "zheng/fu", que regulam as operações com quantidades negativas.

Tanto "zheng" quanto "fu" são nomes, vermelhos ou pretos, determinados de um modo ou de outro, mediante destruições sucessivas. Diferentemente do procedimento normal de adição e subtração, os números são "nomeados" como resultados simétricos, pela cor, conforme o resultado das destruições (ou reduções) mútuas.

Para efetuar a adição ou subtração dos palitos/números que ocupam posições correspondentes, nas colunas diferentes, as regras "zheng/fu" são divididas em dois grupos: as regras de subtração e as regras de adição, a partir de um jogo de simetrias e inversões.

Essa classificação indica que as operações entre elementos ou nomes de diferentes classes não podem se realizar da mesma maneira.

Para subtração, temos:

- Quando os palitos são da mesma cor, reduzi-los mutuamente.
- Quando os palitos são de cores diferentes, acrescentá-los mutuamente, mediante a regra: preto subtraído de vermelho dá preto

[(-2)-(+1)=(-3)] e vermelho subtraído de preto dá vermelho [(+2)-(-1)=(+3)].

- Quando o palito é subtraído de nada (0), inverte-se o nome/qualidade/cor do palito.

Para adição, temos:

- Quando os palitos são da mesma cor, acrescentá-los mutuamente.
- Quando os palitos são de cores diferentes, reduzi-los mutuamente.
- Quando o palito é adicionado a nada (0), mantém-se o nome/qualidade/cor do palito.

Reduzir mutuamente palitos de cores diferentes é uma operação que consiste na anulação recíproca de tantas unidades/palitos, tanto vermelhos como pretos, de sorte que, uma vez reduzidas todas as unidades correspondentes, o nome/cor do restante será o nome/cor do resultado. Por exemplo: (2)+(-3) = (1-1) + (1-1) +(-1) = -1.

Por outro lado, palitos com nomes diferentes não podem ser subtraídos, como de costume. Por exemplo, (-3)-(+4) não deve ser interpretado como (4-3) nem como (3-4), mas devem acrescentar mutuamente, do seguinte modo: (3+4) e ,como se trata de um preto (-3) subtraído de um vermelho (+4), o resultado será preto (-7).

Para a aritmética chinesa, operar com nada, designado por wu, significa produzir uma orientação sobre aquilo com o que se opera, preservando ou invertendo sua orientação. Essa forma de pensamento oriental é reflexo de uma concepção dualista da vida, ao contrário da concepção metafísica grega, cujo nada é incapaz de produzir qualquer tipo de determinação.

De um lado, o zero é representado por um par de contrários qualquer dado arbitrariamente que pode ser alterado de acordo com a relação estabelecida, e, de outro, o zero é absoluto, representado pelo vazio.

Desses pressupostos dos matemáticos Han, não é preciso nenhum símbolo gráfico para que o vazio tenha significado de um número. O oco no tabuleiro com o qual se opera, o wu, implicitamente funcionava como o que entendemos hoje por “elemento neutro” do grupo aditivo “zheng/fu/wu”.

Visto que o objetivo central do método “fang cheng” é eliminar os números que ocupam posições superiores, ou seja, obter ocos no tabuleiro de cálculo, o zero/nada não apenas não é ruim, como também é visto como algo a conseguir, pois é em torno desses ocos que se encontra o sentido do jogo de operações entre cores opostas, é dele que nascem as possibilidades de descobrir os desconhecidos das equações.

Por isso, a forma de expressão ax + by + cz = 0 foi facilmente utilizada pelos chineses. Para o matemático Han, os coeficientes a, b e c não passavam de palitos operados com seus opostos, dessa maneira, é evidente, que a equação poderá ser igual a zero. No entanto, para os algebristas ocidentais, igualar uma equação ao zero era algo impossível, já que não admitiam o fato de a adição de entidades algébricas (positivas é claro) ser igual a nada, porque estas deveriam ser iguais, também, a algo positivo. Assim, não a usaram no Ocidente, até o século XVII.

- **Para o OA**

Configuraram-se em situações-problema do OA os critérios de equivalência ou de oposição, cuja totalidade dos números/palitos são classificados a partir de resultados simétricos, pela cor e posteriormente pelo sinal, conforme o resultado/diferença das anulações mútuas.

2.2.1.4 Outras formas de negatividade

A negatividade “zheng/fu” foi abordada neste capítulo por ser a mais formalizada, completa e significativa forma de negatividade construída pelos matemáticos Han, mobilizados em superar a terceira das limitações do método “fang cheng”, como já foi mencionado.

Contudo, isso não quer dizer que as regras “zheng/fu” sejam a primeira ou única forma de negatividade desenvolvida pela humanidade. De fato, as regras “zheng/fu” são orientadas por dois traços centrais da negatividade chinesa: por um jogo de simetrias e inversões e por um jogo de construção mútua, ou dialética, de elementos opostos. Tais traços são encontrados entre os séculos 900 a 700 a.C., em combinações e sistemas simbólicos no Yijing (I Ching, Yi King), o Livro das Mutações, conhecido como o livro mais antigo da humanidade. De acordo com Lizcano (1993, p. 119-120), nesse livro não se encontram palavras, os textos são escritos por uma combinação de símbolos, cuja interpretação depende de um jogo de adivinhações.

Na Figura 2, o traço contínuo (–) representa o "yang" e o traço partido (- -) representa o "yin", que, em grupo de três, formam um "trigrama". O livro apresenta oito trigramas elementares, os quais, agrupados de dois em dois, constituem o hexagrama. No caso, o trigrama da Figura 2 representa o elemento fogo (LIZCANO, 1993, p. 119, tradução nossa).

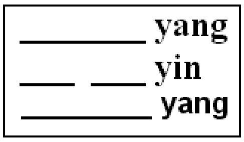

Figura 2 - Trigrama – elemento fogo.

A alternância e a convergência desse jogo de mudanças sincrônicas e diacrônicas estabelecem uma maneira de entender o espaço, o tempo e diversas situações. Alguns teóricos acreditam que a origem desse manancial simbólico se encontra na alternância de aspectos astronômicos de ordem temporal e espacial, tais como: as estações do ano (frio, quente, úmido e seco), as fases da lua, a contagem do tempo (dia e noite), os pontos cardeais (orientações opostas) etc.. Para outros teóricos, a origem do complexo "yin/yang" está na teoria musical, baseada na contradição de sons dissonantes de notas graves e baixas, com sons limpos e puros de notas agudas e altas, temas preferidos de grandes maestros taoístas, como Zhuangzi (Chuang Tzu ou Tchouang-Tseu, cerca de 369-286 a.C) e Laozi (Lao Tsé, século VI ou século V a.C).

Também se encontram referências ao par "yin" e "yang" como instrumentos de adivinhos em "uma ficha que tinha uma cara convexa (yang, masculino, saliente) e outra côncava (yin, feminino, oco)", conforme atesta Lizcano (1993, p. 123).

O "yin" ou "yang" não representa um conceito abstrato e formal, mas um manancial simbólico capaz de suscitar, em cada situação (astronômicas, alquímicas, numéricas, sociais, físicas, mentais), imagens precisas que evoquem aspectos contrários, cuja concorrência ou alternância se articula sobre um dao.

Para Lizcano (1993, p. 137-138, tradução nossa), a fim de dar significado ao termo "dao", deve-se tomar um certo cuidado, visto que, segundo o autor, é um equivoco interpretá-lo simplesmente como "vazio", "vão", ou "ausência". Ao dao deve-se atribuir a ideia de "eixo", "centro", ou "dobradiça", que distribui, articula e equilibra os aspectos contrastantes dispostos simetricamente em ambos lados de um eixo central que compreendem o complexo "yin" / "yang".

Essa concepção, regida pelos princípios da contradição e da simultaneidade, constitui parte da cultura popular chinesa, que pouco a pouco foi sedimentada em seu conhecimento, fundamentando várias áreas do saber científico.

Presume-se que tal forma de pensamento da China Antiga sustentasse uma concepção do espaço como algo abstrato e linear, e do tempo como algo universal, ambos interdependentes entre si, cuja ligação depende da posição de cada um, com relação à totalidade. Consistem, no fundo, em ideias subjacentes à teoria da relatividade.

Em uma nota de rodapé, Lizcano (1993) oferece uma explicação do sistema “yin”/”yang”, utilizando como modelo o campo vetorial:

> Esta interpretación del par yin/yang como fuerzas opuestas conduciría “inmediatamente” al álgebra vectorial, la cual – para el caso de la recta real – llevaría a su vez a la oposición entre “números positivos” y “números negativos”. El “cero” de la recta real sería el origen de los vectores, gozne que articula vectores opuestos y punto en el que éstos se compensan. [...] (LIZCANO, 1993, p. 125).[44]

Nesse sentido, a polaridade dos emblemas “yin” e “yang” se estende sobre as práticas matemáticas. No caso do âmbito do campo numérico, vai-se dispor, simétrica e simultaneamente, em categorias opostas.

Para o pensamento grego, por seu turno, essa concepção nem sequer aparecerá no âmbito do saber, visto que, no pensamento ocidental, o critério que rege toda classificação apoia-se em uma separação hierárquica de gêneros e espécies, mediante as diferenças específicas que definem as classes e as subclasses, que Lizcano (1993) chama de pensamento por abstração, o qual obedece a um movimento descendente de especificação, que vai dos gêneros às espécies, e que corresponde a um movimento de abstração ascendente, que vai das espécies aos gêneros.

Por conseguinte, nasce nos gregos o princípio da não contradição, que se estendeu sobre as práticas matemáticas. Regidos por um pensamento geométrico, o número foi concebido pelos gregos como extensão. Assim, como uma extensão pode ser negativa, ou nula?

Isso tornou impossível a construção de números opostos em torno de um elemento neutro, que caracteriza a estrutura de grupo, como ocorreu com a transformação

[44] Essa interpretação do par “yin/yang” como forças opostas conduzirá “imediatamente” à álgebra vetorial, a qual – para o caso da reta real – levará por sua vez à oposição entre “números positivos” e “números negativos”. O “zero” da reta real seria a origem dos vetores, dobradiça que articula vetores opostos e o ponto em que estes se compensam (LIZCANO, 1993, p. 125, tradução nossa).

simbólica de um espaço comum em um perfeito sistema algébrico, definido como “quadrado mágico”, que até os dias atuais é manejado e maneja a sabedoria popular chinesa.

Vale informar que, as relações de oposição construídas sobre o quadrado mágico não foram exploradas no OA. Todavia, em apêndice, pode-se verificar a capacidade dos chineses em estabelecer analogias e comparações abstratas a partir do encontro de um ponto não só algébrico, mas também geométrico de convergência entre os contrários.

- **Para o OA**

Através do sincronismo do complexo simbólico yin e yang, buscou-se apresentar no OA a contradição presente em diversos fenômenos na natureza.

2.2.2 Os fundamentos da racionalidade grega e os seus limites no tratamento da negatividade

A partir dos estudos de Lizcano (1993), selecionamos algumas características pertinentes ao modo de pensar grego que, segundo o autor, restringiram o desenvolvimento do conceito números inteiros às formas de positividade. Porém, não nos prendemos somente à Grécia Clássica, nos remetemos também a qualquer outro âmbito cultural que se relacione com a reflexão em curso.

Dirigir o olhar para os fundamentos da racionalidade grega pode ser extremamente proveitoso para entender a Matemática desenvolvida por nós mesmos, porque, de acordo com Lizcano (1993/2006), são nesses fundamentos que sustentamos nossa própria razão, nossa maneira de extrair qualidades ou estabelecer critérios pelos quais percebemos identidades ou diferenças.

Da mesma forma, sob os moldes da racionalidade de origem grega é que foram estruturadas as orientações curriculares de nosso ensino, consequentemente do ensino do conceito números inteiros. Um traço característico do pensamento ocidental pode ser encontrado no “Caderno do Professor” (SÃO PAULO, 2009a) de Matemática para a 6ª série do Ensino Fundamental, cuja introdução do conteúdo de números inteiros aparece intitulada pelo seguinte texto: “Números negativos: desvendando as regras de sinais” (SÃO PAULO, 2009a, p. 35), discurso que nos remete à busca dos matemáticos europeus do século XIX para justificar as operações e propriedades aritméticas dos inteiros.

O título desta proposta de ensino do conceito números inteiros, aliás, dos números negativos, assim como está indicado, resume o objetivo geral da “Situação de Aprendizagem 4” (SÃO PAULO, 2009a, p. 35), a compreensão da representação e das estruturas operatórias formais dos números negativos. Esta preocupação pode ser evidenciada nas “Considerações sobre a avaliação” (SÃO PAULO, 2009a, p.42), na qual o professor é orientado a focar seu diagnóstico no “[...] reconhecimento da linguagem e uso correto da escrita. A partir da compreensão da relação existente entre a escrita das operações com negativos e o seu cálculo formal, o caminho para a aprendizagem se torna mais tranquilo.” (SÃO PAULO, 2009a, p.42).

Esta tendência de priorizar o aspecto representativo do conceito pelo uso da linguagem formal, de prender o pensamento sobre os elementos externos, perceptíveis do conceito, encontra-se delineado sob um formato de tradição grega. (DAVYDOV[45] apud SOUSA, 2004)

Claro que o rigor e formalismo matemático não deixam de ser importante, todavia, a própria história mostra que esse modo de apreender a realidade, ao contrário das características encontradas na China Antiga, limitou o desabrochar das formas de negatividades. No âmbito cultural da Grécia clássica, a negatividade não era sequer pensada, e quando inevitavelmente era percebida, era repudiada.

Essa repugnância é percebida na própria maneira de qualificar os contrários: para Stifel e Euler “números absurdos”, para Cardano “números fictícios”, para Descartes “falsas raízes negativas de uma equação”, para Leibniz “fantásticos, pois só existem na imaginação”, para Carnot “impossíveis de interpretar”, para Cauchy “uma não-coisa impensável”, etc.. (LIZCANO; TEIXEIRA; BOYER, 1993, tradução nossa, 1992, 1996)

2.2.2.1 O princípio da não-contradição e a distinção absoluta do “ser” e do “não ser”

O princípio da não-contradição constitui-se por um conjunto de juízos prévios conceitualizados e cristalizados por meio de crenças firmemente fixadas no pensamento grego do período clássico.

Aristóteles estava longe de enxergar a negatividade presente no complexo simbólico yin/yang/dao, que permite constituir diferentes modos de oposições numéricas,

[45] DAVÍDOV, V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psiquico*. Havana: Editora Progresso, 1988.

dentro do “ser” existe a possibilidade do “não-ser”, ou seja, para os chineses, todos os objetos e fenômenos da realidade, carregam em si o princípio da contradição.

> Há no mínimo dois aspectos a frisar aqui. Primeiro, os antigos definiam a mensuração quantificadora de um modo muito mais restrito do que nós e, com freqüência, rejeitavam-na em favor de alguma técnica de aplicação mais ampla. Aristóteles, por exemplo, afirmou que o matemático só media as *dimensões* depois de ‘retirar todas qualidades sensíveis, como, por exemplo, o peso e a leveza, a dureza e seu oposto, e também o calor e o frio e outros *contrários sensíveis*’. Aristóteles, ‘o Filósofo’, como o chamava a Europa medieval, considerava a descrição e a análise mais úteis em termos qualitativos do que em termos quantitativos. (CROSBY, 1999, p. 25-26, grifo nosso).

Nesta citação, fica claro como Aristóteles concebia os “contrários sensíveis”, totalmente separados e descartáveis, provavelmente, por não serem grandezas concretas, facilmente perceptíveis como as “dimensões”, por exemplo. Para metafísica aristotélica que se instala no pensamento grego clássico, o que é, “é”, e o que não é, “não é”. Afinal, como é possível que o que seja, ao mesmo tempo, não seja?

Nessa perspectiva, a partir da distinção absoluta do “ser” e do “não ser” nasce o princípio da não-contradição e as convicções de Parmênides de Eléia prevalecem sobre a visão de Heráclito de Éfeso.

Na era pré-socrática Heráclito, filósofo ao qual, podemos atribuir o conceito de transformação e o princípio dialético do movimento. Tendo por princípio base alguns fragmentos das principais ideias de Heráclito, Caraça (1984) expõe a concepção de mundo deste filósofo:

> Morte e vida unem-se, formando um processo único de evolução – “*o fogo vive a morte do ar e o ar vive a morte do fogo; a água vive a morte da terra e a terra vive a morte da água*”. [...] Daqui resulta que é impossível, num dado instante, atingir a *permanência*, a *estabilidade* seja do que for; tudo *flui*, tudo *devém*, a todo o momento, uma coisa nova – “*tu não podes descer duas vezes ao mesmo rio, porque novas águas correm sobre ti*”. (p. 67, grifos do autor)

O que Caraça (1984, p. 67) quer dizer é que existe um convívio dos opostos, do mesmo e do não mesmo, do ser e do não ser, em completa simultaneidade. Com isso, na visão de Lizcano (1993, p. 168-169, tradução nossa), Heráclito estabelece uma conexão entre positividade e negatividade.

Por outro lado, em Parmênides encontramos os princípios de permanência e identidade, imutabilidade e unicidade. Em consequência, o objetivo essencial de Platão e

Aristóteles, condicionado pela metafísica, "é criar uma *permanência* racional, mansão artificial duma pureza e duma verdade artificiais" (CARAÇA, 1984, p. 187).

A influência do princípio da não-contradição parmenidiana, platônica, aristotélica e euclídea consolidou-se nos objetos matemáticos, determinando a impossibilidade dos números negativos. Em contexto de cálculo, quando D'Alembert chegava a uma raiz negativa como solução da equação, isto lhe significava que era preciso inverter os sinais do enunciado do problema para que a raiz resultante fosse positiva (GONZALEZ et. al., 1990).

> "Si el resultado 'imposible' de uma ecuación es un número negativo o *falso*, será señal de que en el enunciado que da origem a la ecuación debemos sustituir 'añadir' (o su análogos) por 'sustraer' (o sus análogos), y viceversa" (LIZCANO, 1993, p. 160, grifo do autor)[46].

Sob essa forma de pensamento o negativo se caracteriza pelo "não ser", ou pelo "ser impossível", ou por sofrer algum defeito, de modo completamente avesso ao valor do positivo, como decorrência, o negativo é descartado e prevalece o positivo.

2.2.2.2 Pensar por abstração e operar por subtração

Lizcano (1993, 2006) estabelece uma comparação entre os processos de apreender a realidade dos chineses e dos gregos, a partir dessa análise conclui que, o primeiro se faz por analogia ou por equivalência, fazendo a negatividade/positividade se mover em termos de oposições, análogas (congruentes), como dobras que se articulam. Em contrapartida, o segundo se faz por separação de gêneros e espécies, mediante as características que há em comum.

Para Lizcano (1993, p. 194, tradução nossa), a separação do todo em partes e das partes em mais partes, e assim sucessivamente, a respeito da arquitetura da Matemática distanciou a Aritmética da Geometria, áreas matemáticas que atuam juntas, mas que se pensavam como separadas.

A este modo de "extrair" conceitos das "coisas" perceptíveis da realidade, o autor chama de "pensar por abstração", cuja repercussão se estende à Matemática, dificultando a emergência da negatividade na Grécia Clássica. De fato, a operação de extração

[46] Se o resultado impossível de uma equação é o número negativo ou *falso*, será sinal de que no enunciado que da origem a equação devemos substituir 'juntar' (ou seus análogos) por 'subtrair' (ou seus análogos), e vice e versa. (LIZCANO, 1993, p. 160, grifo do autor, tradução nossa)

é uma operação positiva. Não se pode subtrair algo de onde não há nada. Com efeito, pensar por abstração conduz a operar por subtração.

> [...] Sustraer un número (o una magnitud) de outro (o de otra) es así una operación en todo semejante a la de extraer/abstraer el género de la especie. Y será, por tanto, el *mismo tipo de imposibilidad* el que prive de sentido tanto a la operación de sustraer un número (o magnitud) mayor de uno (o de una) menor a la operación de abstraer la especie 'hombre' del género 'animal', y no al revés. (LIZCANO, 1993, p. 197, grifo do autor)[47]

Neste trecho, o autor faz uma analogia para esclarecer as estruturas pré-lógicas que organizam e ordenam o pensamento ocidental, do que se deduz que "abstrair" e "subtrair", ambas atividades significam "extrair".

Nessa perspectiva, Lizcano (2006) usa o termo "metáfora da subtração" ao se referir à metáfora principal que rege a operação do tipo: 3 - 4. "[...] Se eu tenho três e desses três eu tiro um, tiro dois... tiro três já fiquei sem nada, de onde tiro o quarto? De onde não há não se pode já se extrair / abstrair-se nada [...]" (p. 132, tradução nossa).

Ao contrário dos chineses, que operam pela "metáfora da oposição" ou do "enfrentamento", a mesma operação 3 - 4, verifica-se muito simples, resulta em um palito preto. Para os chineses,

> [...] cualquier realidad se divide de manera inmediata en dos mitades, se bipolariza en yin y en yang, en femenino y en masculino. Eso ocurre también —¿por qué no?— con esa realidad particular que es la del número, de manera que éste —en vez de tener esa entidad rotunda, entera, grávida, que tiene entre nosotros— es una realidad escindida desde el principio: cada número también es yin y es yang, femenino y masculino, negro y rojo, negativo y positivo (diríamos hoy nosotros). (LIZCANO, 2006, p. 133)[48]

2.2.2.3 O número como medida de extensão

Um outro princípio, que vale a pena comentarmos, é o que Lizcano (1993, p. 203-204, tradução nossa) chama de "uma visão coisista da realidade" que se refletiu em

[47] Subtrair um número (ou uma magnitude) de outro (de outra) é assim uma operação em todo semelhante à de extrair / abstrair o gênero da espécie. E será, portanto, *o mesmo tipo de impossibilidade* que priva de sentido tanto a operação de subtrair um número (ou magnitude) maior de um (ou de uma) menor como a operação de abstrair a espécie 'homem' do gênero 'animal', e não ao inverso. (LIZCANO, 1993, p. 197, grifo do autor, tradução nossa)

[48] [...] qualquer realidade se divide de maneira imediata em duas metades, se bipolariza em yin e yang, em feminino e em masculino. Isso ocorre também - por que não? – com essa realidade particular que é a do número, de maneira que este – em vez de ter essa realidade rotatória, informativa, grave, que tem entre nós – é uma realidade dividida desde o princípio; cada número também é yin e é yang, feminino e masculino, preto e vermelho, negativo e positivo (diríamos hoje). (LIZCANO, 2006, 133, tradução nossa)

uma Matemática “empírica-ilustrativa”, cujas demonstrações necessitavam de exemplos do mundo físico.

Nesse sentido, até mesmo o pensamento algébrico se rende aos termos da experiência sensível,

> [...] ‘algebra geométrica’ reemplaza a una posible ‘algebra aritmética’, lo cual impone severas restricciones al campo numérico y a las posibilidades operatorias. Por ejemplo, la imposibilidad de sumar o restar números de distintas especies (los correspondientes en líneas, áreas, volúmenes), lo que exigirá ahora una estricta homogeneidad en los términos de las ‘ecuacones’. O la identificación del simple número con un segmento de línea, que lleva a Euclides (en los libros VII, VIII y IX de los “Elementos”) a designar un número como el segmento AB, definido por sus extremos, y a sustituir expresiones como ‘es múltiplo de’ o ‘es un factor de’ por las respectivamente equivalentes ‘es medido por’ o ‘mide a’. (LIZCANO, 1993, p. 182)[49]

Essa concepção acarretou na dificuldade de interpretar raízes negativas como soluções de equações quadráticas. Se nos tempos de Euclides os números eram representados por linhas, obter a raiz quadrada de uma grandeza significava descobrir o lado (incógnita) capaz de gerar uma superfície quadrada dessa grandeza. Resultado que, por esta associação direta entre a Matemática e o mundo natural, seria impossível partir de um número negativo. (LIZCANO, 1993, p. 205-206, tradução nossa)

No fragmento que segue, extraído por Lizcano (1993), da obra intitulada “Tentativa de introduzir as quantidades negativas na filosofia” (1973), publicada pelo célebre filósofo I. Kant, temos que, o argumento utilizado por Kant, sob os fundamentos do pensamento euclídeo, o princípio da não-contradição e os artifícios das provas por redução ao absurdo (proveniente dos limites do pensamento empírico), pode ser descrito pela seguinte lógica: Se o zero não modifica a quantidade de algo, logo seu valor é nulo, nada. Então é um absurdo tirar algo de nada.

> Podría pensarse que 0 – A es un caso que hemos omitido aquí. Este caso es imposible en el sentido filosófico: pues algo positivo nunca puede ser sustraído de nada. Si, en matemáticas, esta expresión es prácticamente exacta, se debe a que el cero no modifica en nada el aumento ni la disminución por otrs cantidades: A + 0 – A equivale a A – A; *el cero es*

[49] [...] ‘álgebra geométrica’ substitui a uma possível ‘álgebra aritmética’ a qual impõe severas restrições ao campo numérico e as possibilidades operatórias. Por exemplo, a impossibilidade de somar ou diminuir números de distintas espécies (os correspondentes a linhas, áreas e volumes), o que exigirá agora uma estrita homogeneidade nos termos das equações. Ou a identificação do simples número com o segmento da linha, que leva a Euclides (nos livros VII, VIII e IX dos elementos) a designar o número como o seguimento AB, definidos por seus extremos e a substituir expressões como ‘é múltiplo de’ ou ‘é um fator de’ pelas respectivamente equivalentes ‘é medido por’ ou ‘mede a’. (LIZCANO, 1993, p. 182, tradução nossa)

> *perfectamente inútil*. La idea que de ahí se ha sacado según la cual las magnitudes negativas serían 'menos que nada' es, pues, vana y *absurda*. (KANT[50], 1949 apud LIZCANO, 1993, p. 206, grifo nosso)[51]

Para o conhecimento de raiz cultural grega, o zero significa "nada", em sentido oposto, para o conhecimento de raiz cultural chinesa, o zero é um número como outro qualquer, com que se pode operar.

Lembrando que, a operação "0 - A", impossível aos gregos, era facilmente resolvida pelos chineses. Através das regras *zheng/fu/wu*, esta operação é interpretada como: na subtração, o nada *wu* operado com (*ru*) palitos vermelhos (*zheng*/positivos), inverte-se a qualidade dos palitos, resultando em palitos pretos (*fu*/negativos), analogamente o nada *wu* operado com (*ru*) palitos pretos (*fu*/negativos), inverte-se a qualidade dos palitos, resultando em palitos vermelhos (*zheng*/positivos). Na adição, o nada *wu* operado com (*ru*) palitos vermelhos (*zheng*/positivos) ou palitos pretos (*fu*/negativos), a cor/qualidade dos palitos/números continua a mesma. (LIZCANO, 1993)

Não só para Kant, mas para muitos matemáticos herdeiros do pensamento aristotélico-euclídeo, guiar-se por uma leitura, estritamente geométrica, cessou as possibilidades de cálculos com os números negativos e com o zero relativo. (LIZCANO, 1993)

2.2.2.4 As formas de negatividade "em processo" e "como produto" de Diofanto de Alexandria

Antes de abordarmos o singular modo de negatividade acionado por Diofanto, consideramos bastante pertinente apresentar brevemente as principais características culturais do período, chamado por Lizcano (1993) de "Alexandrino tardio" (250 a 350), que impulsionaram a fundamentação do conjunto dos números inteiros, libertando-a do ideal aristotélico-euclídeo:

- O emergir da irracionalidade;
- O pensar sob outros pressupostos considerados "místicos" (causas misteriosas);

[50] KANT, E. *Essai pour introduire em philosophie le concept de grandeur négative*, Vrin, Paris, 1949.
[51] Poderia se pensar que 0-A é um caso que omitimos aqui. Este caso é impossível no sentido 'filosófico'; pois algo positivo nunca pode ser subtraído de nada. Se, na matemática, essa expressão é praticamente exata, se deve a que o zero não modifica em nada nem o aumento nem a diminuição por outras quantidades: A+0-A equivale a A-A; *o zero é perfeitamente inútil*. A idéia que daí se tira segundo a qual as magnitudes negativas seriam menos que nada é, pois, vão e *absurda*. (KANT, 1949 apud LIZCANO, 1993, p. 206, grifo nosso, tradução nossa)

- As novas significações para as notações matemáticas e novas manipulações com as quais;
- O fluir da imaginação e intuição;
- Os questionamentos sobre a relação imediata entre a Matemática e o mundo natural. (LIZCANO, 1993, 214-215, tradução nossa)

A abertura da negatividade flui do declínio do predomínio geométrico sobre a Álgebra, e pelo rigor da racionalidade grega clássica consolidado sobre a qual. A partir do manejo incomum de Diofanto com as notações algébricas:

> Através de uma palavra, aritmo, Diofanto resolve problemas que envolvem incógnita. A palavra escolhida por Diofanto está associada ao número, representa o próprio número, aritmo. Diofanto reconhece na incógnita, o pensamento numérico. Ao solucionar problemas, se desprende do numeral físico, porém, ao criar a palavra que represente o desconhecido, a incógnita, faz questão de nos avisar que a incógnita, o desconhecido, representa um número. Assim como o zero, a palavra aritmo guarda o valor de uma quantidade desconhecida. (SOUSA, 2004, p. 107)

As formas de negatividade diofantinas tinham prioridade utilitária, pois, Diofanto não as define, nem as concebe, todavia, formula leis ou regras para operar com elas e trata-as por "regra de sinais". "A negatividade é para ele um feito – ainda que melhor seria dizer uma ação – já construída, que se encontra ai dado, e que ele se limita a incorporar operativamente a seu trabalho matemático" (LIZCANO, 1993, p. 233, tradução nossa).

A negatividade "em processo" manifesta-se numa ocasião particularmente transitória, entre o processo de cálculo, nas resoluções de certos problemas, e também, na breve expressão e aplicação da "regra dos sinais". A negatividade "como produto" surge no resultado, na solução desses problemas, bem na formalização nos dados.

Diofanto efetuava operações de adição e subtração com números inteiros (positivos e negativos), porém não aceitava os números negativos como soluções dos problemas, ou seja, a negatividade era construída e depois repelida, provavelmente efeito de uma hesitação de consciência ao interpretar a solução dos problemas na prática de onde originou.

Surgem as "(*leipsis, leiponta, eide*)" que "falam da falta de substância de uma mera 'falta' ou de sua indecisa existência como 'forma ausente'" (LIZCANO, 1993, p. 210), que pela primeira vez, após a tradição clássica, é pensada e manipulada nas operações intermediárias dos problemas.

As contradições de Diofanto, em suscitar a negatividade como processo e rejeitá-la como produto, é decursivo de uma crise de mudança de paradigma grego clássico (aristotélico-euclídeo) para helenístico, marcado por um momento de conhecimento e incorporação de outras matemáticas (egípcia, babilônica, pitagórica, logística). De ordem diversa à negatividade chinesa, que era uma negatividade popular, manipulada e desenvolvida com naturalidade, originada de um saber comum que os membros de uma mesma cultura compartilham.

Nesse contexto, Diofanto oscila entre duas formas de negatividade:

- Sem pensar, operativa, designada por Lizcano (1993, p. 234, tradução nossa) pela metáfora "atividade cega";
- Pensada e repudiada.

- **Para o OA**

Contemplou-se no OA, um cenário que circuncreve a Grécia em seu período Clássico. Sobretudo, foram inseridos dentro deste ambiente, justamente os fundamentos conceituais que ali faltaram à concepção e aceitação das formas de negatividade construídas na China neste mesmo período. O conceito de movimento a partir de situações que retratem as ideias do filósofo Heráclito e o princípio de contradição através do movimento dialético da água.

2.3 Conclusões: os aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros

O estudo dos processos de desenvolvimento lógico-histórico do conceito números inteiros revelaram a natureza conceitual desse conhecimento, a partir dessa investigação mais aprofundada, aproximadamente em uma mesma época, por duas janelas culturais e racionais, uma chinesa antiga e uma grega clássica, foi possível enxergar tanto o desempenho intelectual e operacional, quanto os limites e contradições que caracterizaram a construção dos números inteiros.

Estas análises também permitiram localizar as origens pré-conceituais da educação dos pesquisadores e dos sujeitos desta pesquisa, como herdeiros de uma forma de pensamento ocidental, de tradição grega e europeia.

Nesse sentido, os instrumentos conceituais arraigados na racionalidade ocidental, interferentes na aceitação e formalização do conceito números inteiros são entendidos como:

- Pensar o número como quantidade ou como medida de extensão;
- Necessidade lógica de referência material para os números inteiros;
- Noção empírica da operação de adição como aumento e da subtração como diminuição;
- Consequentemente, pensar a negatividade em termos da subtração que conduzem às expressões: “menos que nada”, “lado de um quadrado de superfície menor que nada” e “subtrair uma magnitude maior de uma menor” (LIZCANO, 1993, p. 266-267);
- Pensar por abstração e determinação por meio de comparações excludentes;
- Assumir princípios como o da identidade ou da não-contradição para se pensar o movimento quantitativo dos objetos na natureza.

Em contrapartida, a partir de uma reflexão em torno da dinâmica histórico-cultural das formas de negatividade chinesa, bem como das práticas comerciais suscitadas pelo Renascimento na Europa, foram apreendidos os aspectos substanciais ou os nexos conceituais dos números inteiros, caracterizados como segue:

- Princípios de movimento, contradição e simultaneidade;
- Dispor o pensamento e a realidade, segundo critérios das alternâncias de contrários e oposições em torno de um centro flexível;
- A partir de uma analogia, simetria ou equivalência vislumbrar os movimentos quantitativos em sua totalidade;
- Enxergar o número como um instrumento algébrico para descrever e simbolizar de forma precisa as situações relativas;
- Conceber zero como centro (geométrico) de simetria, ponto de convergência e anulação (algébrica) dos opostos;
- Pensar a subtração em termos de opostos articulados em torno de uma diferença que, regendo seus enfrentamentos, rege também sua anulação recíproca.

As transformações do conceito números inteiros indicam que a sua gênese procedeu de atividades humanas. Por isso, a mutabilidade das formas de expressão dos seus antecedentes históricos, as quais são concebidas como os aspectos simbólicos ou nexos externos do conceito números inteiros, foram influenciadas por diversas representações de mundo guiadas por concepções filosóficas, científicas e ideológicas de diferentes épocas e culturas. Em síntese, encontram-se listados os aspectos simbólicos mais significativos do processo evolutivo do conceito números inteiros:

- O manancial simbólico “yin” – preto e “yang” – branco que formam imagens detalhadas acerca da contradição existente em distintos aspectos da realidade;
- A oposição entre a cor preta e vermelha utilizada pelos chineses para referenciar os números/palitos;
- Os sinais algébricos + e - como estado provisório ligado a uma relação arbitrária;
- A reta numérica dos inteiros.

Moldado nessa perspectiva é possível compreender algumas das dificuldades que, mesmo sem perceber, o pensamento ocidental pode esbarrar ao construir juízos e deduções acerca dos números inteiros.

Contudo, a fim de desviar a introdução do conceito números inteiros das vias de herança grega clássica e ultrapassar os limites que rondam as formas de negatividade, pretende-se construir situações-problema que considerem os aspectos substanciais e simbólicos, indicados nesse texto, em diversos ambientes do OA.

De maneira a sintetizar, nesta conclusão os aspectos simbólicos foram dispostos separadamente dos aspectos substanciais dos números inteiros. Entretanto, vê-se importante explicar que, assim como ocorreu no movimento lógico-histórico do conceito, pretende-se que, no OA, os aspectos simbólicos sejam abordados como resultado dos aspectos substanciais, e não o inverso. De modo a apresentá-los como linguagem de uma concepção quantitativa e qualitativa das grandezas.

No próximo capítulo, os processos metodológicos de construção do OA mostram detalhadamente como os aspectos substanciais e simbólicos aqui indicados, foram configurados aos recursos tecnológicos de um OA.

CAPÍTULO 3 – PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo, faremos uma exposição de nosso objeto de estudo, do tratamento metodológico selecionado para as etapas da pesquisa, dos sujeitos e ambientes envolvidos.

Optamos por uma abordagem de pesquisa sintonizada com perspectiva lógico-histórica, flexível e baseada na construção e interpretação qualitativa do material de estudo.

Além disso, encontramos espaço neste capítulo para retratar a primeira etapa deste trabalho, por meio de uma linguagem simples, com ilustrações, exemplos e descrições procuramos representar os elementos constituintes do OA intitulado "O Universo e seus Contrários" e algumas considerações sobre as possibilidades descobertas na perspectiva lógico-histórica e nos recursos tecnológicos, de oferecer uma nova forma aos aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros.

3.1 Procedimentos metodológicos

Diante de uma imensa diversidade de formas de fazer pesquisa, consideramos que a alternativa metodológica mais adequada à elaboração e análise da metodologia de ensino de Matemática proposta, apoia-se em uma abordagem qualitativa, que, apesar dos riscos e dificuldades que impõe, no que se refere às influências do posicionamento teórico-metodológico admitido pelo pesquisador na produção, obtenção e análise dos dados, distingue-se justamente pelo fato de conduzir o pesquisador a um estado de inquietude permanente, o qual deve aguçar a sua sensibilidade para lidar com questões subjetivas incomensuráveis.

Para diminuir os riscos dos "efeitos" da subjetividade sobre a produção de dados, cabe ao investigador qualitativo "estudar objetivamente os estados subjetivos dos seus sujeitos" (BOGDAN; BIKLEEN, 1994, p. 67), através de estratégias e métodos que possam afastá-lo de suas tendenciosidades. Além do mais, de acordo com Bogdan & Bikleen (1994, p. 67), "o objetivo principal do investigador é o de construir conhecimento e não o de dar opiniões sobre determinado contexto" (BOGDAN; BIKLEEN, 1994, p. 67).

O objeto de estudo definido pela construção de um objeto de aprendizagem, amparado sob a perspectiva lógico-histórica e análise de suas potencialidades em relação à introdução do conceito números inteiros a um determinado grupo de alunos, convergiu-nos para a escolha do estudo de caso, como estratégia de pesquisa compatível ao caráter específico e descritivo do objeto investigado.

Mas, o que pode ser caracterizado como um "caso"?

Para Bogdan & Bikleen (1994, p. 90), o estudo de caso incide sobre uma "área de trabalho delimitada" cuja "recolha de dados e as atividades de pesquisa são canalizadas para terrenos, sujeitos, materiais, assuntos e temas". Nesse sentido, um "caso" pode ser definido como um determinado contexto ou acontecimento específico de enfoque contemporâneo, no qual o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos e as circunstâncias. Segundo André (1984, p. 52), "o 'caso' é assim um 'sistema delimitado', algo como uma instituição, um currículo, um grupo, uma pessoa, cada qual tratado como entidade única, singular".

Selecionamos algumas considerações que nos auxiliaram na compreensão do estudo de caso como estratégia de pesquisa:

- Questão de pesquisa do tipo "como" ou "por quê";
- Ocorre no ambiente natural do objeto;
- A complexidade da unidade exige um estudo intensivo, com forte trabalho de campo;
- Uma representação singular da realidade, cuja interpretação exige a sua contextualização (ANDRÉ, 1984, p. 52);
- Preserva o caráter único do objeto investigado;
- "Beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta e análise dos dados" (YIN, 2003, p. 33);
- Os dados são coletados por diversos instrumentos;
- Possui a capacidade de lidar com uma ampla variedade de fontes de informações e evidências.

"Em outras palavras, o estudo de caso como estratégia de pesquisa compreende um método que abrange tudo – tratando da lógica de planejamento, das técnicas de coleta de dados e das abordagens específicas à análise dos mesmos" (YIN, 2003, p. 33). Dessa forma, a partir desse arsenal metodológico, pudemos definir a construção, a obtenção e a documentação dos dados.

A singularidade presente no conhecimento produzido pelo estudo de caso não nos distancia de nossos pressupostos teóricos, pois exige uma contextualização das situações por ele descritas, bem como o retrato de sua pluralidade e relações com os fenômenos sócio-historicamente determinados.

> A escolha de um determinado foco [...], é sempre um acto artificial, uma vez que implica a fragmentação do todo onde ele está integrado. O investigador qualitativo tenta ter em consideração a relação desta parte com o todo, mas, pela necessidade de controlar a investigação, delimita a matéria de estudo [...] (BOGDAN; BIKLEEN, 1994, p. 91).

Portanto, ao estudar uma unidade, bem delimitada e contextualizada, tomamos o cuidado de não analisar apenas o caso em si, como algo à parte, mas o que ele representa dentro do todo – e a partir daí.

Os principais riscos e dificuldades encontrados no estudo de caso são:

1) Requer longo período de tempo, devido à:
    - Necessidade de um aprofundamento teórico antecipado;
    - Quantidade de dados para organizar.
2) Dificuldade de generalização dos resultados obtidos.

As alternativas encontradas para amenizar os obstáculos gerados pelo primeiro caso são: uma intensa negociação com os sujeitos pesquisados e a explicitação das técnicas e procedimentos utilizados, além do emprego de diferentes métodos de investigação.

A respeito do segundo dilema mencionado, André (1984, p. 52) comenta que a generalização nesse tipo de investigação deve ser entendida “como um processo subjetivo e não como um ato de inferência lógica (ou estatística)”, isto é, as generalizações são feitas pelo leitor a partir de seus conhecimentos sobre o assunto. Dessa maneira, o estudo de caso deve ser organizado de modo a provocar “novas idéias, novos significados, novas compreensões”.

No entanto, essas dificuldades podem ser eliminadas através da elaboração de um planejamento bem estruturado do estudo de caso e de um questionamento constante do que se deseja descobrir do objeto de estudo, prevenindo-se contra os possíveis enviesamentos da pesquisa.

> A essência do estudo de caso, a principal tendência em todos os tipos de estudo de caso, é que ela tenta esclarecer uma *decisão* ou um *conjunto de decisões*: o motivo pelo qual foram tomadas, como foram implementadas e

com quais resultados. (SCHRAMM[52], 1971, apud YIN, 2003, p. 31, grifo do autor)

Assim, para explicitar o conjunto de "decisões" e ações desenvolvidas, a fim de alcançar os objetivos da pesquisa, dividimos o estudo em duas etapas que definimos como: (1) caráter bibliográfico/laboratorial, por se tratar do processo teórico-metodológico de construção do OA e (2) prática pedagógica com o OA, por se tratar do processo de utilização do OA por uma 6ª série do Ensino Fundamental.

3.2 Primeira etapa: caráter bibliográfico/laboratorial

O lógico-histórico como forma de pensamento e perspectiva didática de produção de conhecimento nos orientou qualitativamente, na direção do processo histórico de criação conceitual. Com esse aporte teórico, nosso posicionamento metodológico constituiu em apreender o conceito, em seu movimento de criação, depurá-lo dos elementos casuais, analisando, selecionando e (re)construindo o conjunto de conceitos e atividades humanas "mobilizadores" do conceito números inteiros.

Preocupados com o seu movimento conceitual dentro de um objeto de aprendizagem, através de um processo dialético, buscamos superar a influência da lógica formal desenvolvida em nossa formação escolar, até mesmo familiar, pela adoção da lógica histórica.

Para tanto, nesse primeiro momento da pesquisa, buscamos os seguintes subsídios teóricos:

- Estudo da perspectiva lógico-histórica, com Kopnin (1978), Caraça (1984), Sousa (2004) e Bohm & Peat (1989);
- Estudo dos pensamentos empírico e teórico na apropriação de conceitos matemáticos, com Dias (2007), Sforni (2004) e Vygotsky (2001);
- Estudo de investigações didáticas acerca da abordagem dos números inteiros na Matemática escolar, com Cid (2000/2003), Prado & Moura (2007a/ 2007b), Prado (2008) e Schubring (2000/2001);

[52] SCHRAMM, W. *Notes on case studies of instructional media projects*. Working paper for the Academy for Educational Development, Washington, DC. 1971, December.

- Estudo da constituição lógico-histórica do conceito números inteiros, com Lizcano (1993/2006), Crosby (1999), Eves (2004), Boyer (1996), Teixeira (1992) e Medeiros & Medeiros (1992);
- Estudo de atividades de ensino do conceito números inteiros, com Lima & Moisés (1998).

Também buscamos conhecer recursos tecnológicos e literários para, a partir de uma efabulação[53], ressuscitar os elementos de criação conceitual, potencializando a história do conceito números inteiros.

- Em Aguiar (1996), encontramos a importância dos elementos literários nos processos de construção e assimilação de um contexto ficcional, enquanto, com Coelho (2000), compreendemos quais são esses elementos e como podemos utilizá-los.

Contudo, a seguinte questão sempre aparecia para nos inquietar: “Como adotar uma perspectiva de educação tecnológica crítica, aberta à reflexão sobre as implicações sociais, políticas e éticas do uso das TIC no mundo atual?”

- Em Carneiro (2002) e Belloni (2001), encontramos apontamentos sobre as contribuições e limitações do uso das TIC, na educação escolar.

Desse aparato teórico, surgiram muitas concepções, novas ideias, dúvidas, divergências, cortes e recortes. Com isso, a construção do objeto digital de aprendizagem realizou-se qualitativa e laboratorialmente.

O caráter laboratorial da pesquisa deve-se ao apoio técnico-computacional dos membros da equipe de produção de objetos de aprendizagem do Núcleo de Educação Corporativa (NEC) da FCT/Unesp, integrantes da equipe multidisciplinar do programa “RIVED/Fábrica Virtual e Portal do Professor”.

Com base na problematização lógico-histórica e sob a animação interativa propiciada por meio de um recurso digital, essa etapa do trabalho constituiu-se pelo desenvolvimento teórico-metodológico de um OA, na área de Matemática, intitulado “O

[53] Recurso pelo qual os fatos são encadeados na trama (COELHO, 2000).

Universo e seus Contrários”, o qual aborda o “conceito números inteiros”[54], indicado para as 6ªs séries do Ensino Fundamental.

3.3 Metodologia e desenvolvimento do objeto de aprendizagem

Neste texto apresentamos a perspectiva lógico-histórica como suporte teórico no desenvolvimento do OA: “O Universo e seus Contrários”, a partir da descrição dos seus ambientes: Pólo Ártico, China – Dinastia Qin, China – Dinastia Han, Grécia (Atenas – Período Clássico), Itália (Florença – Renascença) e Laboratório Atomístico.

A primeira etapa de produção do OA consistiu na construção do design pedagógico. Esta fase inicial consiste na definição do conteúdo, da temática em que este será inserido, no qual traçamos um escopo do módulo:

- Categoria: Matemática;
- Subcategoria: conceito de números inteiros;
- Público alvo: 6ªs séries do Ensino Fundamental;
- O que se pretende abordar no módulo:
    - Diferentes formas de negatividade desenvolvidas pelo homem ao longo da história;
    - Os conceitos de fluência e contradição;
    - Princípio da simultaneidade e critérios de equivalência;
    - A representação inicial da reta numérica em Z (conjunto dos Números Inteiros);
    - A passagem do conceito de zero absoluto para o conceito do zero relativo;
    - A adição e subtração de números inteiros;
    - A introdução à regra de sinais.
- O que não será abordado:
    - Multiplicação e divisão de números inteiros;
    - Potenciação de números inteiros.

[54] A partir desse momento, o termo “conceito números inteiros” refere-se ao conjunto de conhecimentos, ideias e juízos que abarcam a relação entre os números negativos, o zero, os números positivos e suas respectivas representações +, 0 e -.

O próximo passo foi pensar em como utilizar a interatividade e vantagens que o computador oferece para abordarmos tais conceitos. No primeiro momento, procuramos não pensar nas limitações e deixamos as ideias fluírem. Porém, não foi fácil fugir dos princípios didáticos da lógica formal desenvolvida em nossa formação escolar.

Para evitar uma fragmentação e desconexão entre os conceitos e situações-problema, além do aporte teórico encontrado na perspectiva lógico-histórica, também buscamos elementos literários com processos e recursos utilizados na composição de uma narrativa, dentre outros: o enredo, a história, o narrador, personagens, desafios, uso de talismãs, tempo e espaço, consolidaram-se como "fatores estruturantes" (COELHO, 2000) nos processos de construção e assimilação de um contexto ficcional.

A criação dos espaços foi baseada no mundo real o qual representa, podendo ser presente ou passado, porém enriquecida por fatores fictícios que resultaram em um ambiente "trans-real" (COELHO, 2000).

> A auto-reflexividade da ficção não implica a sua autonomia quanto ao mundo real. O mundo da ficção e o mundo real se coordenam reciprocamente: o mundo se mostra como horizonte da ficção, a ficção, como horizonte do mundo. O âmbito da recepção dos textos ficcionais demarca-se apenas na apreensão desta dupla perspectiva. (STIERLE, 1979, p. 155)

No lugar de estruturas rígidas encontradas em sequências de atividades já se percebe a criação de Objetos de Aprendizagem orientados por um contexto ficcional como é o caso do OA intitulado "Um dia de Trabalho na Fazenda"[55] desenvolvido pela equipe multidisciplinar do Núcleo de Educação Corporativa (NEC)[56] da FCT/Unesp. Neste trecho no qual Junior & Schlünzen (2007) descrevem a construção da interface do OA, podemos perceber algumas preocupações de valor estético:

> O objeto conta com sete atividades, nas quais o aluno trabalha a idéia de número e quantidade por meio de atividades relacionadas com a temática fazenda [...] A interface foi desenhada utilizando-se o estilo cartoon. Algumas atividades possuem uma introdução com um pequeno filme, bastante atraente e afetiva para o público infantil da primeira série do Ensino Fundamental. (2007, p. 42)

Recorrendo a teoria da literatura, Aguiar (1996), salienta que:

> O texto ficcional e o poético apropriam-se das referências da realidade histórica, em termos de tempos, ambientes, costumes, personagens,

[55] Disponível em http://www.rived.mec.gov.br/site_objeto_lis.php
[56] Maiores informações consulte: http://www.nec.prudente.unesp.br/NEC/Home.php

> conflitos, sentimentos, para abstrair dos fatos as motivações humanas que os geraram e que são comuns a todos os homens. (p. 26- 27)

Do mesmo modo que essas características fundamentais à estética da literatura podem trazer benefícios ao leitor, conjecturamos que os Objetos de Aprendizagem que contemplam um contexto ficcional também possam se tornar mais atraentes e interativos, pois propõe uma comunicação e uma criatividade maiores, invocando a ênfase nas ideias, e não nas regras, no todo, e não nos fragmentos, no sentido, e não nos mecanismos.

A segunda etapa de produção do OA é a construção do roteiro. Esta fase consiste na criação de uma espécie de "*storyboard*", um esboço de tela por tela com a disposição dos botões, das lacunas, das personagens e dos objetos, com um quadro lateral contendo os respectivos textos de cada uma das telas.

O roteiro desenhado ajudou-nos a visualizar a estrutura do OA, contribuindo na difícil tarefa de fazer os recortes, de modo a evitar uma sobrecarga de informações. Além disso, o roteiro nos orientou na tomada de decisões das próximas etapas: o estudo de interatividades e a construção do esqueleto da interface.

Nessa nova etapa, o trabalho que até então era desenvolvido apenas pela equipe pedagógica, passa a ser desenvolvido em conjunto com a equipe tecnológica, constituída pelo design gráfico e pelo programador.

Lima *et. al*. (2007) destaca como características mais importantes de uma interface a condução, a afetividade, a consistência, o significado de códigos e denominações e gestão de erros. E salienta que a inserção desses requisitos pode torná-la mais compreensível e flexível.

Dos demais elementos constituintes do OA, destacamos os textos eletrônicos como sendo sucintas discussões qualitativas que tem como função oferecer apoio instrucional e teórico ao usuário.

As animações são sequências de imagens individualmente concebidas, acompanhadas ou não de sons, que objetivam simular um evento real. Esse recurso audiovisual pode facilitar a capacidade do aluno de abstrair os conceitos envolvidos. Além disso, o aluno pode acionar ou não o "narrador" que se alterna entre os personagens do OA.

Para tanto, a equipe tecnológica optou por uma estrutura de textos armazenada à parte, em formato XML, permitindo ao usuário voltar ao início do texto e controlá-lo conforme realiza a leitura. Além disso, essa linguagem viabiliza a tradução dos textos para outros idiomas, quando necessário.

O trabalho de implementação do OA foi desenvolvido na linguagem de programação Action Script utilizando para cada uma das aplicações a tecnologia Adobe Flash Player. O software Macromedia Flash, por ser voltado a programação de aplicativos via Web, flexibilizou a criação de animações, a importação de sons, a criação de efeitos especiais, a criação de *movie-clips* e de menus. O que resultou em animações lúdicas, dinâmicas e interativas.

Depois de implementado, é de suma importância que OA passe por vários testes com o objetivo de identificar possíveis erros de programação para então corrigi-los.

Outro aspecto que deve ser relevado é a elaboração do guia do professor. A partir de uma abordagem interdisciplinar, aliando as diferentes áreas do conhecimento, acreditamos que esse material pode orientar o docente sobre o uso pedagógico do objeto produzido e agir como o instrumento chave de integração entre o computador, o professor e o aluno.

Apesar da perspectiva lógico-histórica ter fundamentado a construção do objeto de aprendizagem, é no guia do professor que orientamos cuidadosamente através de métodos e estratégias de ensino como a história pode assumir o papel de elo entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de "definibilidades próprias sobre o conceito" (LANNER de MOURA et al, 2003). Além disso, propor uma nova dinâmica à sala de aula, na qual o professor é o mediador da aprendizagem e o estudante é convidado a ser o protagonista do seu próprio processo.

3.4 Objeto de Aprendizagem: "O Universo e seus Contrários"

A perspectiva lógico-histórica não requer apenas buscar fatos na história tradicional da Matemática e transformá-los em situações de ensino e aprendizagem sobre um determinado conceito. A perspectiva lógico-histórica consiste em buscar as diversas formas de pensamento da humanidade ao construir o conceito estudado, distinguindo os tipos de racionalidade de cada civilização a partir das dificuldades, artifícios, perspectivas, metáforas, manipulação e compreensão do conceito em vista. Para, a partir disso, ultrapassar os limites que cercaram sua evolução, identificando e criando novas possibilidades de situações facilitadoras do ensino e aprendizagem deste conceito.

Por isso, abre espaço para possibilidade de usar a linguagem e funcionalidade tecnológica para estruturar tais situações de ensino, e desde que não se perca a racionalidade lógico-histórica do conceito, permite ainda, recontextualizá-las a partir de fatos pertencentes ao cotidiano dos alunos.

Para Lima & Moisés (1998) o universo é uma totalidade essencialmente contraditória e o conjunto Z traz a ideia numérica dos contrários, adequada para se pensar este universo. Sem sua apreensão permanecemos fora, cientificamente, deste universo apesar de fisicamente nele vivermos. Os autores consideram como núcleo fundamental para o trabalho didático do conceito número inteiro, a apreensão da ideia numérica para a contagem dos contrários que compõem o movimento quantitativo. (LIMA & MOISÉS, 1998, p. 3-5)

Como o nome já propõe, o OA intitulado por "O Universo e seus Contrários" não pode ser representado por um organograma. Então, definimos como tela principal o "Planeta Terra", de modo que o mundo possa ser visto como um todo sistêmico, com diversas relações espaciais e temporais, conforme apresenta a Figura 3.

No Planeta Terra que sugerimos como tela de navegação não existe centro, mas sim "centros mutantes" de acordo com o ponto de partida e objetivos de cada usuário. Tais centros são os desafios que surgem nesta "viagem" e estes estão destacados sobre a representação do mapa-múndi na Figura 3. Os espaços são contextualizados histórico-culturalmente através das dificuldades e caminhos encontrados pelo homem na evolução do conceito número inteiro ao longo de sua história.

Figura 3- Tela "Planeta Terra" com a apresentação de cinco ambientes ao aluno: China (Dinastia Qin), China (Dinastia Han), Grécia, Itália e Laboratório Atomístico (retorno ao Pólo Ártico).

As problemáticas estão organizadas de acordo com os aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros. A partir de um olhar mais aprofundado sobre os estudos de Lizcano (1993/2006), os aspectos "substanciais" geradores das diversas formas de negatividade, podem ser considerados:

- O complexo simbólico "yin/yang/dao", ambos articulados a partir de um centro que se move, obedecendo a critérios de congruência e oposição;
- Princípios de movimento, contradição e simultaneidade;
- O cálculo com palitos/números pretos/negativos e os palitos/números vermelhos/positivos;
- Critérios de equivalência cujos números são "nomeados" como resultados simétricos, pela cor conforme o resultado das destruições (ou reduções) mútuas;
- O zero como centro (geométrico) de simetria, ponto de convergência e anulação (algébrica) dos opostos.

Ao passo que, os nexos externos são os aspectos simbólicos do conceito números inteiros, os sinais (+) e (-) ou a própria reta em Z, como exemplo. No entanto, por trás de todo rigor da matemática no desenvolvimento de tais símbolos algébricos, também podemos considerar o complexo simbólico yin – preto e yang – branco, as cores preta e vermelha dos palitos dos chineses como formas de representação dos contrários.

Certos princípios didáticos da lógica formal, fortemente presentes na cultura escolar, têm simplificado e desumanizado os aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros. Extraem-se apenas um dos aspectos simbólicos do conceito, abordam-no de modo repetitivo, até que o indivíduo relacione rapidamente situações cotidianas, como a medição da temperatura, aos sinais (+) e (-) como se fossem o próprio conceito números inteiros (PRADO & MOURA, 2007b).

Nesse contexto, o lógico-histórico reflete o movimento do pensamento, presente no processo de abstração e formação de conceitos matemáticos. Dessa forma, consideramos que a superação da lógica formal exige o desenvolvimento do pensamento teórico/abstrato de quantificar arbitrariamente os movimentos contrários do universo, para depois, qualificá-los através das diferentes formas de negatividade/positividade desenvolvidas pela humanidade, exemplificadas nos momentos históricos retratados pelo OA e descritos a seguir.

3.4.1 – Pólo Ártico

O ambiente da Figura 4 é a introdução do OA, da qual surge toda a problematização, a partir de que se desenvolve a efabulação[57] do OA:

[57] Recurso pelo qual os fatos são encadeados na trama. (COELHO, 2000).

Figura 4 - Tela de entrada do OA. Ao clicar no botão "Pular intro" o aluno pode ir direto para a tela "Planeta Terra".

- Situação-problema: aumento da temperatura do Pólo Ártico devido ao aquecimento global.
- Tema transversal: meio ambiente. A interação e as relações dos elementos da natureza.
- Fundamento pedagógico: despertar o interesse do usuário para vivenciar todas situações-problema do OA, chamando-lhe a atenção para as consequências do aquecimento global.
- Personagem principal: urso polar, ilustrado na Figura 5.

Figura 5 - Alta na temperatura no Ártico e suas terríveis consequências.

- Tempo: atualidade do aluno. Pois na “Máquina do Tempo” existe uma lacuna para o aluno digitar o ano em que se encontra no momento da utilização do OA.
- Enredo: Na Figura 5 a TV anuncia o aumento da temperatura no verão do Ártico.
- Desafio: salvar o habitat do urso polar, efetivando os experimentos da personagem “Professor Pingüim” no “Laboratório Atomístico”.

Na Figura 6 o “Professor Pingüim” aparece na TV por meio de uma interferência e explica quais devem ser as ações do usuário para conquistar os talismãs necessários para a entrada no “Laboratório Atomístico”.

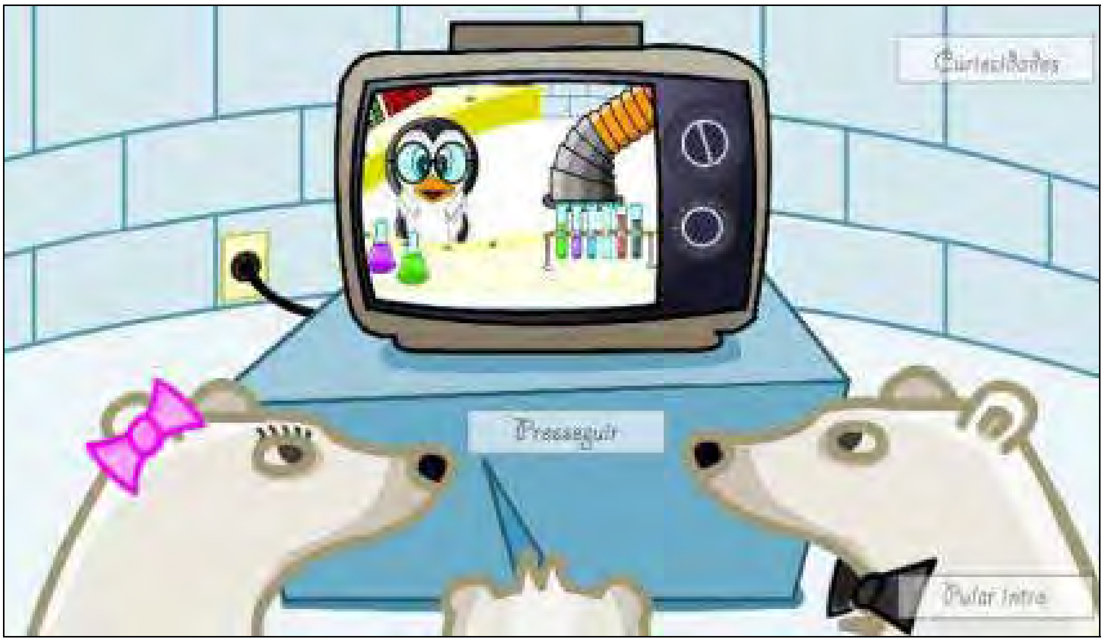

Figura 6 - O professor Pinguim explica a missão do aluno para salvar os ursos polares do desaparecimento.

- Ações: viajar no tempo e espaço a fim de encontrar o amuleto “Yin” na China: Dinastia Qin; “Yang” na China: Dinastia Han e os poderes das deusas “Atena” na Grécia Clássica e “Horas” na Itália Renascença. Somente através da união dos quatro talismãs o usuário poderá ativar os experimentos do Professor Pingüim no ambiente “Laboratório Atomístico” e diminuir a temperatura do Pólo Ártico.

Para entrar no Laboratório Atomístico e realizar os experimentos, o aluno precisará de uma senha fixa de oito dígitos, conquistados de dois em dois em cada talismã através da resolução das problemáticas enfrentadas nos outros quatro ambientes do OA.

Esta “senha” composta por oito dígitos, por ser fixa, também se encontra à disposição no guia do professor, caso o professor opte em vivenciar apenas ou diretamente os experimentos do “Laboratório Atomístico” com seus alunos.

Além disso, os valores numéricos das situações de aprendizagem variam aleatoriamente. Desse modo, o aluno poderá vivenciá-lo por diversas vezes, pois a cada nova viagem encontrará novos cálculos e novos desafios com números inteiros.

3.4.2 – Curiosidades

O ícone “Curiosidades” é de acesso opcional (Figura 7), trata-se de um “menu” de informações relacionadas aos contextos do OA, cujo botão encontra-se disponível em todas as telas do objeto.

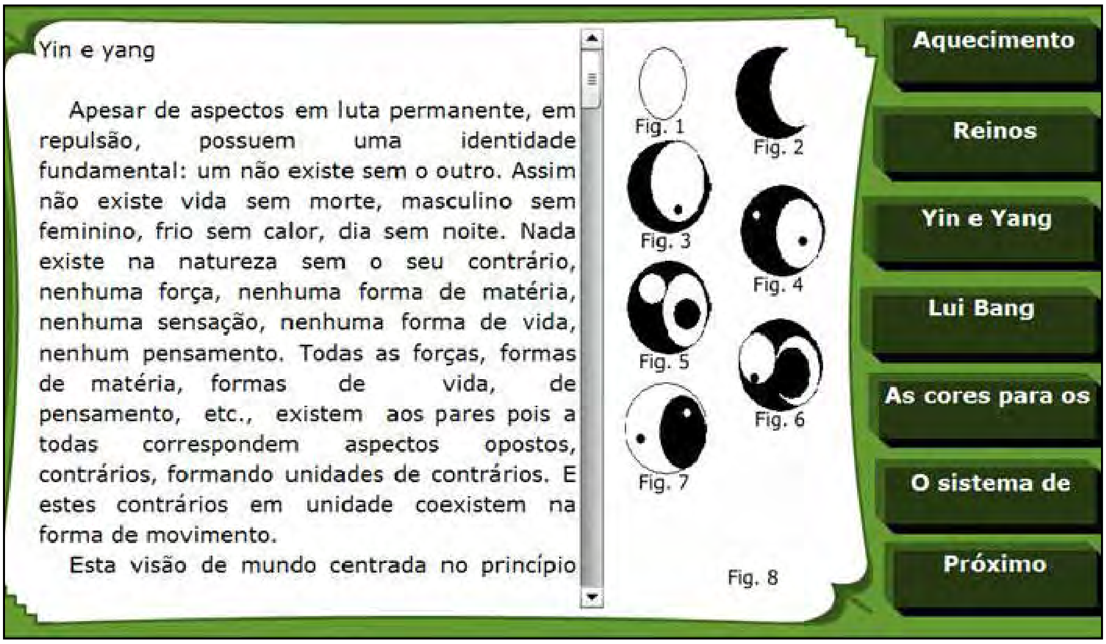

Figura 7 - Curiosidades.

Em “Curiosidades” o aluno pode encontrar explicações mais aprofundadas sobre as seguintes temáticas:

1) Aquecimento Global.
2) Reinos Combatentes.
3) Yin e Yang.
4) Lui Bang.
5) As cores na China.
6) Números/Palitos.
7) Péricles.
8) Renascimento.
9) Florença.
10) O numeral dos contrários.
11) Os sinais (-) e (+).
12) Experimentos.
13) Formalização.

3.4.3 – Máquina do Tempo

A Figura 8 ilustra o ambiente para o aluno dirigir-se aos diversos momentos históricos, de acordo com:

- Situação-problema: voltar no tempo.
- Fundamento pedagógico: pensar a relação passado, presente e futuro em sua relatividade (por exemplo, algumas civilizações contam o tempo através do calendário cristão – gregoriano, como é o nosso caso, ao contrário de outras como os chineses e os judeus); contar o tempo no sentido oposto; compreender a linha do tempo como uma representação desenvolvida pelo homem para medir o tempo, tomando como referencial de origem (o ponto zero) o nascimento de Cristo.

Após escolher um ambiente na tela “Planeta Terra” o usuário poderá através de uma “Máquina do Tempo” (vide Figura 8) viajar no tempo e no espaço para entrar no ambiente escolhido.

No guia do professor sugerimos que o professor siga a seguinte sequência de ambientes:

- China – Dinastia Qin (221 a.C. a 206 a.C.);
- China – Dinastia Han (206 a.C. a 221 d.C.);
- Grécia – Atenas (Período Clássico: 447 a. C. a 432 a.C.);
- Itália – Florença (Renascença: 1400 a 1600 d.C.).

Pois esta sequência obedece à evolução lógico-histórica do conceito números inteiros.

A Dinastia Qin ocorreu no período de 221 a.C. a 206 a.C.. Dentro desse período o programa sorteia um número que no caso do exemplo da Figura 8 é 216 a.C.. O raciocínio desta operação consiste em contar quantos anos é preciso voltar no tempo para chegar ao nascimento de Cristo. E contar quantos anos é preciso voltar no tempo para ir do nascimento de Cristo até o ano indicado. Para então, somar estas quantidades.

Na parte inferior da Figura 8 está a “linha do tempo” com uma “bolinha” no ponto zero (Nascimento de Cristo) que muda de posição de acordo com o que for preenchido pelo aluno, deslocando-se de um ano a outro na reta.

Ao digitar corretamente o número que representa a quantidade de anos que deverá voltar no tempo, o aluno visualizará na tela da Máquina do tempo (parte superior da Figura 8) a imagem do marco histórico do local e época onde pretende vivenciar.

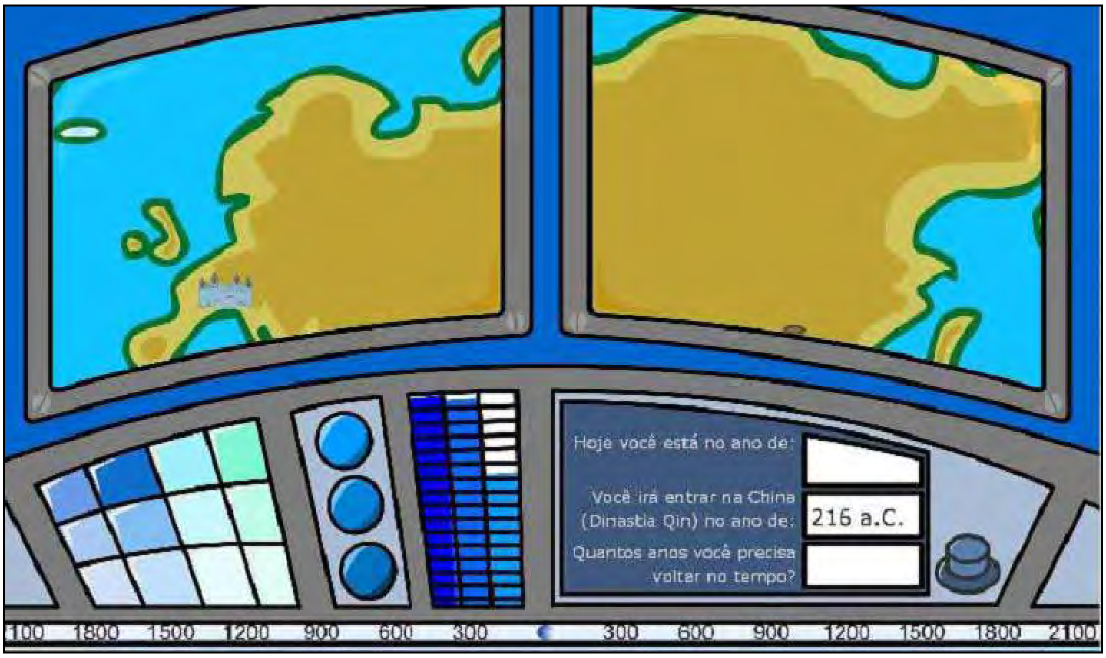

Figura 8 - Máquina do Tempo.

3.4.4 – China – Dinastia Qin

- Marco histórico: Exemplificado na Figura 9, para protegerem-se das invasões dos hunos do norte (os nômades hiong nu), as primeiras muralhas são erguidas pelos chineses.

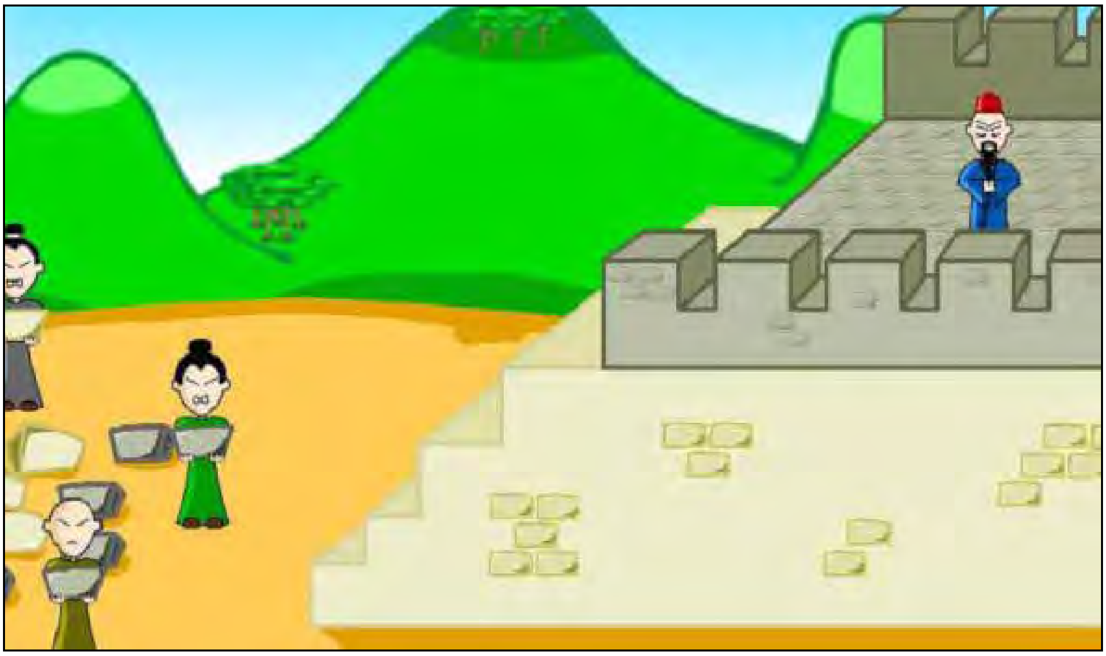

Figura 9 - Construção da "Grande Muralha da China".

- Situação-problema: fugir da tirania do imperador Qin e conquistar a parte yin do amuleto.
- Tema transversal: pluralidade cultural. Conhecer a cultura, o saber, a visão e a filosofia do modo de pensar chinês na antiguidade, para então compreender as contribuições desse povo ao conhecimento matemático.
- Fundamento pedagógico: conhecer uma forma ainda qualitativa, porém simbólica, de representar os contrários na natureza.
- Personagens principais: Qin, o imperador amarelo e o sábio taoísta Lao Tsé;
- Tempo: 221 a.C. a 206 a.C..
- Enredo: ao viajar no tempo e no espaço o aluno depara-se com a saga do imperador Qin e seu exército vermelho trabalhando na construção da grande muralha Figura 9, a fim de unificar a China num só império e protegê-la das invasões dos hunos. Então aparece o sábio Lao Tsé (vide Figura 10) que, cansado dessa sociedade corrompida, convida o usuário a partir para a fronteira da província.

Para tanto, tomamos o caminho didático de Lima & Moisés (1998):

> A antiga civilização chinesa foi a primeira a adotar a **Harmonia dos contrários em luta**. [...] Este país de contrastes encontrou na harmonia dos contrários em luta a melhor idéia para lidar com a sua própria existência. E a transformou num princípio para pensar todo o universo: os fenômenos naturais, a formação das idéias, o corpo humano, etc. Deram-lhe o nome de princípio do **yang e yin**. (p. 13, grifos do autor)

De acordo com o taoísmo, a "harmonia universal" é estabelecida pelo equilíbrio entre as unidades dos contrários yin e yang. Elas funcionam como duas forças opostas:

- yin: vai da periferia para o centro, contraindo-se, e
- yang: vai do centro para periferia, expandindo-se.

Essa forma de perceber o mundo é explicada por Lao Tsé, como mostra a Figura 10:

Figura 10 - O velho sábio Lao Tsé apresenta uma das primeiras e mais conhecidas formas de negatividade desenvolvida pelo homem, o yin e o yang.

Alguns exemplos também são encontrados na tabela da Tabela 1.

Tabela 1 - Representação de alguns contrários de acordo com o pensamento chinês taoísta.

Yin	Yang
Escuridão	Luz
Mulher	Homem
Negativo	Positivo

Para o usuário conquistar a parte yin do amuleto de Lao Tsé e dois dígitos da senha para entrar no laboratório, este precisará escolher o símbolo yin e yang que melhor representa algumas imagens de contrários, exatamente como faziam os taoístas para representar sua realidade, elucidado na Figura 11.

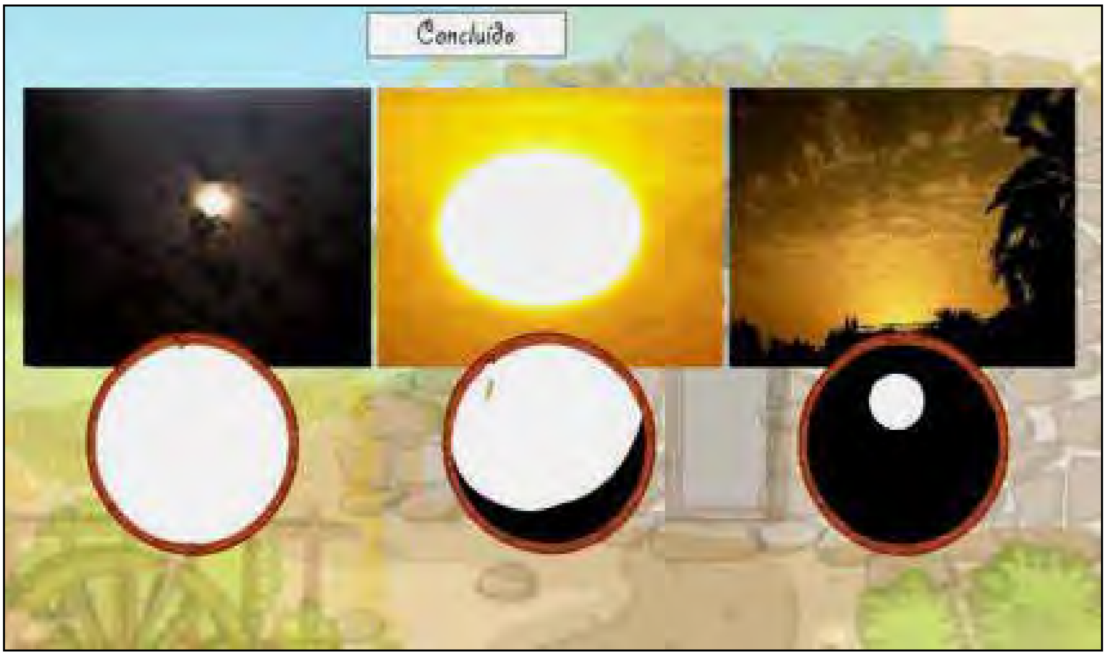

Figura 11 - Os desenhos da realidade estão dispostos aleatoriamente e abaixo de cada uma delas estão dispostos o complexo simbólico yin/ yang/dao.

- Fundamento pedagógico: Construir relações por semelhanças através do pensamento analógico e por equivalência.

O sistema de correlações e convergências sincrônicas yin/yang/dao ainda não se trata de um conceito abstrato, mas sim de um manancial simbólico capaz de suscitar em cada caso imagens precisas que evoquem aspectos contrários. (LIZCANO, 1993, p. 125)

3.4.5 – China – Dinastia Han

- Marco histórico: Momento de florescimento econômico, cultural e intelectual. O papel é inventado pelos chineses (Figura 12).
- Personagens principais: Lui Bang, um hábil tenente que após uma revolução impera a Dinastia Han;
- Tempo: 206 a.C a 221 d. C.;

Figura 12 - Morre o "Imperador amarelo" então Lui Bang um hábil tenente promove uma revolução.

- Enredo: para defender seu povo Lui Bang decide que todos devam aprender algumas estratégias de guerra.
- Situação-problema (1): Os palitos vermelhos representam os chineses e os pretos os hunos. Seguindo as instruções da atividade o aluno deverá clicar no palito correspondente a cada combatente (hunos e chineses) e arrasta-lo, dispondo-os no "tapete". Sugerimos no guia do professor que o docente oriente seus alunos a seguir a disposição no exemplo da Figura 13, pois este era o modo como faziam os chineses: uniam os pares de opostos e separavam o restante dos palitos.
- Fundamento pedagógico: perceber que um palito era compreendido pelos chineses como uma unidade de algo, representação da quantidade, e para representar a qualidade desse algo usavam as cores vermelha (positivo) e preta (negativo). Utilizar os palitos para quantificar e as cores para qualificar os contrários, contando-os de acordo com o pensamento chinês de que os opostos se neutralizam um a um (princípio de equivalência). A quantidade e a qualidade do número resultante será dada pela quantidade e cor dos palitos que restarem sobre o tapete.

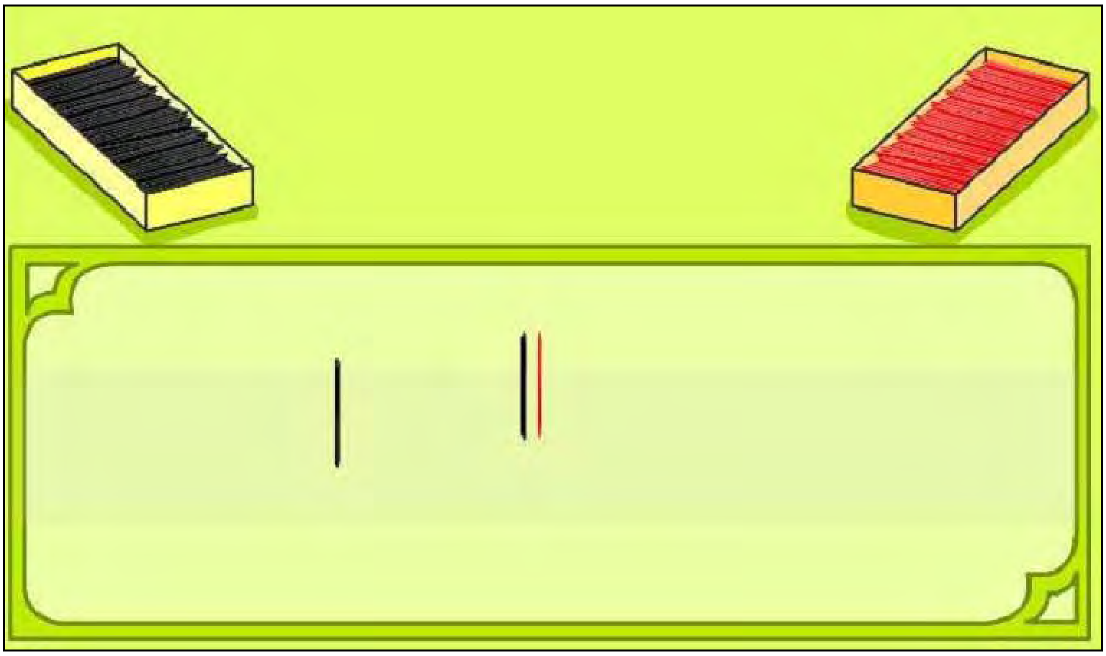

Figura 13 - Modo como os primeiros Han faziam os cálculos com números/palitos negativos/pretos e positivos/vermelhos.

Vale a pena ressaltar que os soldados chineses são representados pela cor vermelha que para eles significa alegria, sorte, ou seja, algo positivo, e os seus adversários são representados pela cor preta que para os chineses significa morte, maldade, azar, algo negativo.

No entanto, se fossem os hunos que estivessem fazendo os cálculos com palitos, estes utilizariam a cor vermelha para se representarem e a cor preta para representar seus adversários, os chineses.

Estas situações mostram como os números inteiros dependem do ponto de vista, ou do ponto de referência tomado.

Na próxima situação, denominada “Baile de Máscaras” (Figura 14), as mulheres são representadas pelos Han pela cor preta e os homens pela cor vermelha, pois naquela época na China, as mulheres nascidas de famílias pobres eram desprezadas, pois consideravam que estas não possuíam a mesma força de trabalho dos homens e principalmente por serem impedidas de servir o exército chinês. Quando não eram mortas, elas não tinham sequer o direito a um nome. Ou seja, as mulheres eram vistas de uma forma negativa.

Outro exemplo, atualmente nos gráficos de contabilidade, o azul representa o positivo (crédito) e o vermelho representa o negativo (débito).

Por isso que os números inteiros também recebem o nome de números relativos, pois dependem da relação que é feita entre o pensamento de quem opera e o objeto estudado.

Portanto, espera-se com estas situações que o aluno desenvolva uma nova maneira de pensar e contar os contrários, para que supere a "metáfora da subtração".

Segundo Lizcano (2006, p. 117-118) a "metáfora da subtração" refere-se ao pensamento grego no período clássico, cuja dificuldade encontrava-se em compreender subtrações da forma: 5-7. Afinal, como é possível retirar 7 unidades de 5 unidades? Se quando tiramos 5 unidades de 5 unidades não nos resta nada. E o que é o nada? Como vamos tirar algo de nada?

> [...] Y estos números así entendidos, sean del color que sean los palillos con que se cuentan (los unos son negros; los otros, rojos) no se sustraen o extraen unos de otros, como si fueran piedras en un saco, sino que se oponen o enfrentan como lo harían entre sí los soldados de dos ejércitos. Enfrentados, se van aniquilando mutuamente, cada combatiente rojo se aniquila con uno negro. El número de los supervivientes arroja el desenlace de la batalla, el resultado de la operación. Si es el ejército rojo el más numeroso, el resultado será una cierta cantidad de números rojos (o positivos); si era el negro el que contaba con más combatientes, el resultado será —con la misma naturalidad— el número de soldados negros (números negativos) supervivientes. (LIZCANO, 2006, p. 118)[58]

Trata-se da adição e subtração de números inteiros, cuja soma de dois contrários diferentes (números com sinais opostos), mantém-se o sinal do contrário maior, porém efetuado de acordo com o modo pensar chinês, sem recorrer imediatamente as regras formais.

- Situação-problema (2): Os palitos vermelhos representam as mulheres e os pretos os homens. Controlar o movimento de entrada e saída de homens ou mulheres do "Baile de Máscaras" (Figura 14), através dos palitos vermelhos ou pretos e do modo de pensar chinês.

[58] E esses números assim entendidos, sejam de cor ou sejam os palitos com que se conta (uns são pretos e outros são vermelhos) não se subtraem ou extraem um dos outros, como se fossem pedras de um saco, mas sim como se opõem e enfrentam como fariam entre si os soldados de dois exércitos. Enfrentados, vão se aniquilando mutuamente, cada combatente vermelho se aniquila com um preto. O número de sobreviventes emite a consequência da batalha, o resultado da operação. Se o exercito vermelho é mais numeroso, o resultado será uma certa quantidade de números vermelhos (positivos) se era o preto que contava com mais combatentes o resultado será – com a mesma naturalidade – um número de soldados negros (números negativos) sobreviventes. (LIZCANO, 2006, p. 118, tradução nossa).

Figura 14 - Baile de Máscaras.

O baile sempre começa com os pares de contrário homens/positivo e mulheres/negativo em equilíbrio (não sobra ninguém). A ideia da entrada de quatro casais, como indica a Figura 15, consiste na expressão matemática: (-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1) = 0.

- Fundamento Pedagógico: Essas situações visam levar o aluno a identificar as semelhanças e as diferenças entre contrários; enxergar e interpretar o significado do zero diferenciando o zero do conjunto dos números naturais – zero absoluto, vazio e o zero do conjunto dos números inteiros – zero equilíbrio, móvel.

Figura 15 - Os palitos deverão ser dispostos no "tapete" conforme indica a mensagem.

Colocar significa acrescentar, somar, ou seja, a operação de adição; retirar significa tirar, diminuir, ou seja, a operação de subtração. No conjunto dos números naturais essas operações são facilmente desempenhadas por se tratarem de situações concretas, manipuláveis e facilmente visualizadas pelos alunos. Enquanto que no conjunto dos números inteiros essas operações são estabelecidas a partir de relações abstratas, difíceis de serem elaboradas pelos alunos e até mesmo pelos professores que acabam recorrendo a regrinhas mecânicas para resolver essas operações.

Esse problema é também apresentado pelos PCN (1998):

> Quanto ao **tratamento pedagógico** dado a esse conteúdo, a ênfase na memorização de regras para efetuar cálculos, geralmente descontextualizados, costuma ser a única abordagem dada aos números inteiros no terceiro e no quarto ciclos. Uma decorrência dessa abordagem é que muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do que seja o número inteiro. (p. 98, grifo do autor)

Dessa forma, nossa intenção nessa atividade de ensino (Figura 16) é recriar os artifícios desenvolvidos pelos matemáticos Han de fazer cálculos com palitos coloridos, de modo a tornar a operação de adição e subtração no campo numérico dos inteiros também manipulável e perceptível pelos alunos, abrindo assim um leque de situações relacionáveis, não necessariamente cotidianas, das quais o aluno possa construir novas relações entre o universo e os números inteiros.

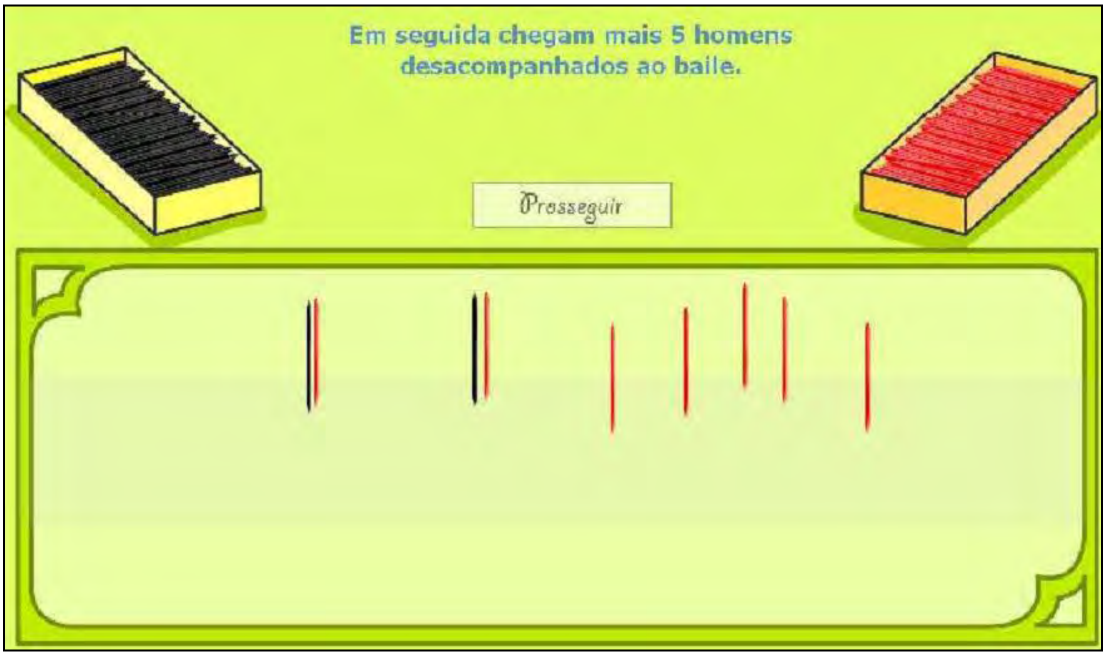

Figura 16 - Colocar/retirar palitos vermelhos/pretos sobre o "tapete", dispondo-os em pares para contar os palitos "sem par".

3.4.6 – Grécia

- Marco histórico: Atenas é a cidade-estado mais desenvolvida democrática e intelectualmente da Grécia, que governada por Péricles tornara-se um verdadeiro império, com magníficos templos e estátuas. Para dar abrigo a estátuas muito valiosas, como a de Atena, Péricles decide construir o Paternon (Figura 17), a maior arquitetura de todos os tempos.
- Situação-problema: ajudar o arquiteto do Paternon (Figura 17), o senhor Bartolomeu, a controlar os movimentos de entrada e saída da água no tanque, conquistando o poder da deusa Atena e dois dígitos da senha para entrar no laboratório.
- Fundamento pedagógico: entender os conceitos de movimento e contradição através dos pensamentos de Heráclito. Aprender a pensar, expressar e contar os contrários simultaneamente, como ocorre na natureza.

- Personagens principais: o arquiteto Bartolomeu e o sistema de abastecimento de água e lavagem do mármore;
- Tempo: 447 a.C. – 432 a.C.;
- Espaço: Atenas, ilustrado na Figura 17.

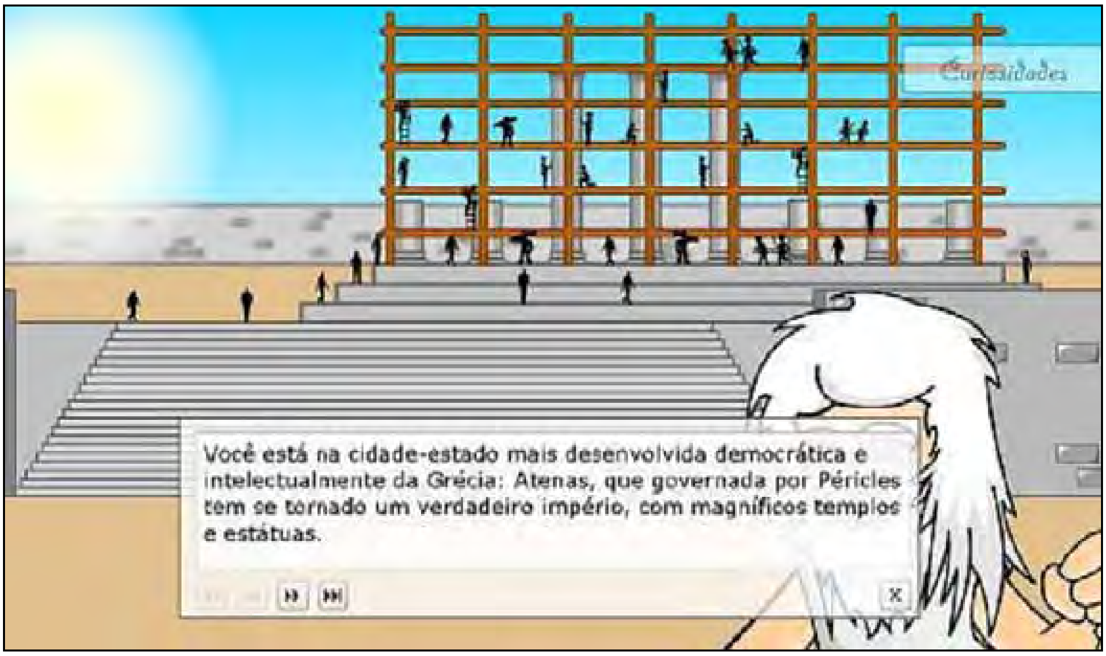

Figura 17 - Grécia Clássica, construção do Paternon.

- Enredo: O aluno será convidado a ajudar o senhor Bartolomeu a pensar em "mão-dupla" (LIMA & MOISÉS, 1998) na entrada e saída de água do tanque (Figura 19) ao mesmo tempo. Pois nessa época, o princípio da "não-contradição" (LIZCANO, 1993) que governava a racionalidade grega fazia com que estes enxergassem os fenômenos num único sentido e nunca no seu oposto.

Para tanto, os conceitos de movimento e contradição estão implícitos no ícone "Conheça as Ideias de Heráclito". Nesse ambiente, ilustrado na Figura 18, estão sincronizados a letra e a música "Como uma onda"[59] de Lulu Santos e Nelson Motta com imagens que reproduzem os pensamentos de Heráclito de Éfeso:

> Morte e vida unem-se, formando um processo único de evolução – "*o fogo vive a morte do ar e o ar vive a morte do fogo; a água vive a morte da terra e a terra vive a morte da água*". [...] Daqui resulta que é impossível, num

[59] Mediante autorização concedida pela Mix/Som Livre Edições Musicais, proprietária dos direitos autorais dessa música.

> dado instante, atingir a *permanência*, a *estabilidade* seja do que for; tudo flui, tudo devém, a todo o momento, uma coisa nova – "*tu não podes descer duas vezes ao mesmo rio, porque novas águas correm sobre ti*". (CARAÇA, p. 67, grifos do autor).

Nosso interesse pela música "Como uma Onda" deve-se a uma intenção maior de suscitar nos educandos e seus educadores uma concepção de mundo centrada na lei universal do movimento, da mutabilidade, da fluência, da transformação, da relatividade, contrapondo-se à rigidez, ao fixo, ao absoluto.

De acordo com Lima e Moisés (1998, p. 11) "contradição é a luta entre contrários; é a luta entre os contrários que determina a existência do movimento".

A maneira como a composição de Lulu Santos e Nelson Motta concebe a realidade, como um processo do vir a ser, usando a metáfora "como uma onda no mar" encontra-se como uma prazerosa e afetiva possibilidade de mostrar que as verdades são relativas e momentâneas. Não há, portanto, o certo absoluto nem o errado absoluto.

Consideramos tais conceitos fundamentais na passagem do conceito de números naturais, com grandezas concretas e manipuláveis onde o zero é absoluto, para o conceito de números inteiros, onde o número, em especial o zero, é relativo.

Figura 18 - “Movie-clip” da música “Como uma onda”.

A seguir, a Figura 19 representa um tanque que é abastecido por um canal que desvia as águas de um rio próximo. Para que a água do tanque seja corrente, este também possui um ralo de escoamento. Isto significa que o aluno deverá responder quantos litros de água têm no tanque com a água entrando e saindo de modo simultâneo. Para isso, a ideia é que ele aprenda a construir uma expressão matemática para contar os movimentos em seus sentidos opostos.

Ao resolver essa situação-problema o aluno receberá o poder da “Sabedoria” da deusa Atena e dois dígitos da senha para entrar no “Laboratório Atomístico”.

Figura 19 - Sistema de armazenamento de água para lavagem das pedras de mármore do "Paternon". Com a entrada e saída de água ocorrendo simultaneamente.

3.4.7 – Itália

- Marco histórico: Durante o fim da Idade Média, o aumento da população, as migrações para novas terras, o surgimento e ampliação de cidades e do comércio, novas indústrias, novos tipos de pessoas (campesino, nobreza e clero), de máquinas, etc, despontou na Europa um novo modelo de realidade que ficou conhecido como Renascimento, modificando as percepções dos europeus desse período. (CROSBY, 1999).
- Situações-problema: controlar e registrar quantitativamente o mais rápido possível os movimentos comerciais do armazém de "Brancaleone".
- Fundamento pedagógico: compreender e utilizar os sinais algébricos (+) e (-) para representar movimentos contrários.
- Personagens principais: o comerciante "Brancaleone" (LIMA & MOISÉS, 1998, p. 28);
- Tempo: 1400 a 1600 d. C.;
- Espaço: Comércio de Florença na Itália;

- Enredo: “Brancaleone” abre um armazém para comercializar arroz e vinho e precisa controlar as entradas e saídas dessas mercadorias, bem como dos “dinares de prata”, de um modo mais rápido e prático que anotações verbais em seu diário (Figura 20) (LIMA & MOISÉS, 1998, p. 28).

Figura 20 - Atividades comerciais na cidade de Florença. Lá está “Brancaleone” com suas sacas de arroz, seu tonel de vinho, sua caixa de moedas e seu diário.

O movimento passa a fazer parte claramente da vida cotidiana, das relações entre as pessoas, impondo a sua existência real à ciência. A metafísica aristotélica com o seu dogma da imutabilidade é questionada. Passa a ser um problema a ser superado para o desenvolvimento do comércio.

> Nos séculos XIV e XV, quase um milênio depois da queda de Roma, a civilização européia medieval começa por fim a dar lugar à civilização moderna. [...] O comércio como os muçulmanos e os gregos bizantinos impulsionou o crescimento de várias cidades italianas depois de 1300, entre elas Veneza, Gênova e Florença. A aristocracia desses lugares se fascinou não só com os produtos do oriente, mas também, igualmente, com seu saber e sua cultura. (EVES, 2004, p. 287-288)

O novo contexto social da Europa surgido no fim da Idade Média e Renascimento influenciou a atividade matemática, e particularmente, a percepção das grandezas contrárias para o movimento do comércio, impulsionou o desenvolvimento da “contabilidade com partidas dobradas” e as “notações algébricas” (CROSBY, 1999).

Conseguiram perceber a diferença entre 30 sacos, ou 30 tonéis ou 30 dinares de prata que saíam ou entravam no estabelecimento. Para o comércio ficou claro que essa contradição, esses movimentos contrários eram grandezas que necessitavam ser quantificáveis de modo diferente daquele utilizado para contar as ovelhas do pastor.

> É provável que a contabilidade moderna tenha começado por uma espécie de diário do curso da vida de um negociante, um tipo de crônica que mesclava informações sobre transações comerciais, derrotas e vitórias militares e também acontecimentos sociais, tudo numa misturada só, sem mais do que um sinal de pontuação entre os itens – se é que chegava a haver algum. Os italianos davam isso o nome de *ricordanza*, e era tudo muito bonito e coisa e tal, mas, como fazer o balanço de um diário? (CROSBY, 1999, p. 191-192, grifo do autor)

Além disso, Crosby (1999), comenta que:

> Nos séculos XIV e XV, os comerciantes florentinos costumavam ser desleixados em sua contabilidade, fosse ela ou não por partidas dobradas, e se contentavam com balanços que não se equilibravam muito bem. O proverbial “bem próximo” era aceitável. Eles não costumavam fazer o balanço de seus livros a intervalos regulares, ou em momentos predeterminados. (p. 195-196)

O diário de Brancaleone – Figura 21, procura mostrar que a maneira dos comerciantes florentinos para controlar os seus movimentos contábeis não servia mais.

Figura 21 - Diário de Brancaleone.

A partir do modelo “lucro/perdas”, considerado por Lizcano (2006) como as primeiras formas de negatividade ocidental, os confusos registros verbais precisavam ser substituídos por registros concisos e exatos. Segundo Crosby (1999) "toda transação era dupla, entrando e saindo como uma respiração".

Para resolver o problema das limitações concretas que o pensamento verbalista traz para a atividade comercial, no guia do professor sugerimos que o docente proponha a seus alunos a criação de seu próprio símbolo para registrar numericamente os movimentos quantitativos em mão-dupla e o socialize com o grupo.

- Situação-problema (1): Utilizar os sinais "+" e "-", assim como faziam os comerciantes medievais, para indicar as entradas e saídas de arroz nas sacas (Figura 22).
- Fundamento Pedagógico: Levar o aluno a entender e vivenciar o surgimento dos sinais "+" e "-" para representar movimentos contrários.

Figura 22 - As marcações dos contrários (entrada/saída).

De acordo com Lima & Moisés (1998):

> Depois que foram inventados pelos comerciantes, os sinais (+) e (-) foram usados durante muitos anos apenas nos depósitos e armazéns. Os primeiros matemáticos que começaram a usar estes sinais foram aqueles que lidavam com a matemática comercial. Eles perceberam que assim como era usado para indicar que faltava vinho num tonel, o sinal (-) também poderia ser usado para dinheiro em falta, isto é, para dívidas, e da mesma forma que o sinal (+) era usado para indicar vinho em "excesso" num tonel, poderia também indicar dinheiro que entrava em caixa, isto é, dinheiro "a mais". (p. 37)

- Situação-problema (2): o aluno deverá clicar no botão (+) para aumentar a quantidade de vinho no tonel, ou em (-), para diminuí-la, de acordo com o que estiver indicado na plaqueta. No primeiro tonel, a exemplo na Figura 23, deverá clicar 3 vezes em (-).
- Fundamento Pedagógico: levar o aluno a perceber que o número escrito na plaqueta não é a quantidade de vinho que está, de fato, no tonel, mas sim uma representação da quantidade de vinho em falta (-), chamada de "ausência" por Diofanto (1993, p. 238), ou excesso (+), em relação ao nível do tonel. Os números inteiros, assim, sempre estão relacionados a algum fator e representando algo. É a passagem do conceito de número como uma quantidade contável (quantidade de litros de vinho no tonel) para o conceito de número simbólico como uma relação abstrata (quantidade de vinho em falta ou excesso no tonel, em relação ao seu nível).

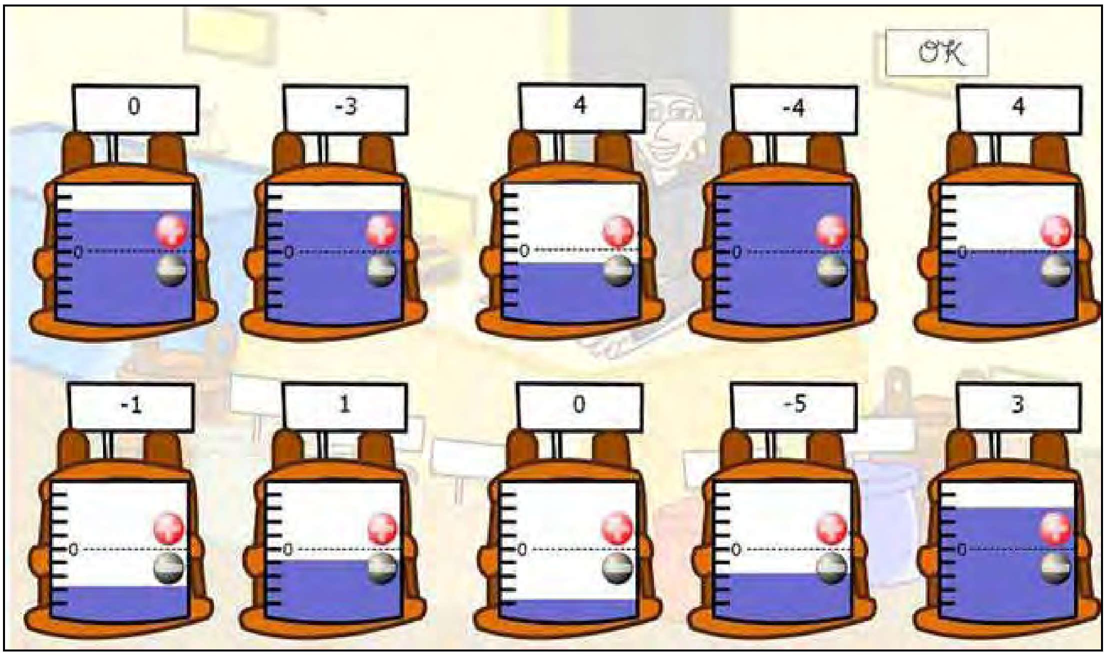

Figura 23- As quantidades de vinho nos toneis devem estar de acordo com o nível (traço pontilhado) e com as marcações nas plaquetas.

Rompendo com o rigor e com o predomínio da Geometria sobre a Álgebra, que havia se consolidado no pensamento grego, no período clássico, Diofanto de Alexandria consegue substituir a "figura geométrica" pelo "número", o que o liberta para a construção de uma singular forma de negatividade (“leipsis”), na qual é guiado pelos aspectos da álgebra abstrata (representação por meio de símbolos). Apesar de ainda não aceitar o número negativo como resultado final do problema, Diofanto desenvolve e utiliza, no processo operatório dos cálculos, a regra de sinais (LIZCANO, 1993).

Ao investigar a forma de negatividade desenvolvida por Diofanto, que trata por “leipis”, Lizcano (1993) procura compreender o significado do termo “leipsis”, empregado por Diofanto, ao expor a regra de sinais. Assim, conclui que o significado de “leipsis” consiste na falta de algo, na “ausência”, “no mais inexistencial possível”, opondo-se a “hýparxis, normalmente traduzido como presença” (LIZCANO, 1993, p. 236-239, tradução nossa).

Dessa forma, encontramos, nas situações-problema (2) e (3) – Figura 23 e Figura 24, aspectos condutores à forma de negatividade desenvolvida por Diofanto para representar e operar com o conceito abstrato – falta, permitindo que a operação de adição e subtração, com a “falta” e o “excesso”, seja visualizada pelos alunos, ampliando as possibilidades de situações relativas.

- Situação-problema (3): O aluno deverá transferir a quantidade em excesso em relação ao nível do primeiro tonel para o segundo tonel, clicando na seta que está entre os dois toneis. No caso da Figura 24, o primeiro tonel tinha 10 litros, então clicando sobre a seta “→” 5 vezes transfere-se 5 litros para o segundo tonel que estava com uma falta de 2 litros (-2) em relação ao nível, mudando a marcação do mesmo de -2 para 3 (número que deverá ser digitado na caixa de texto branca do lado direito da Figura 24).
- Fundamento Pedagógico: Esta operação descrita numa sentença matemática, nada mais é que 5 -2 = 3, uma subtração de números inteiros.

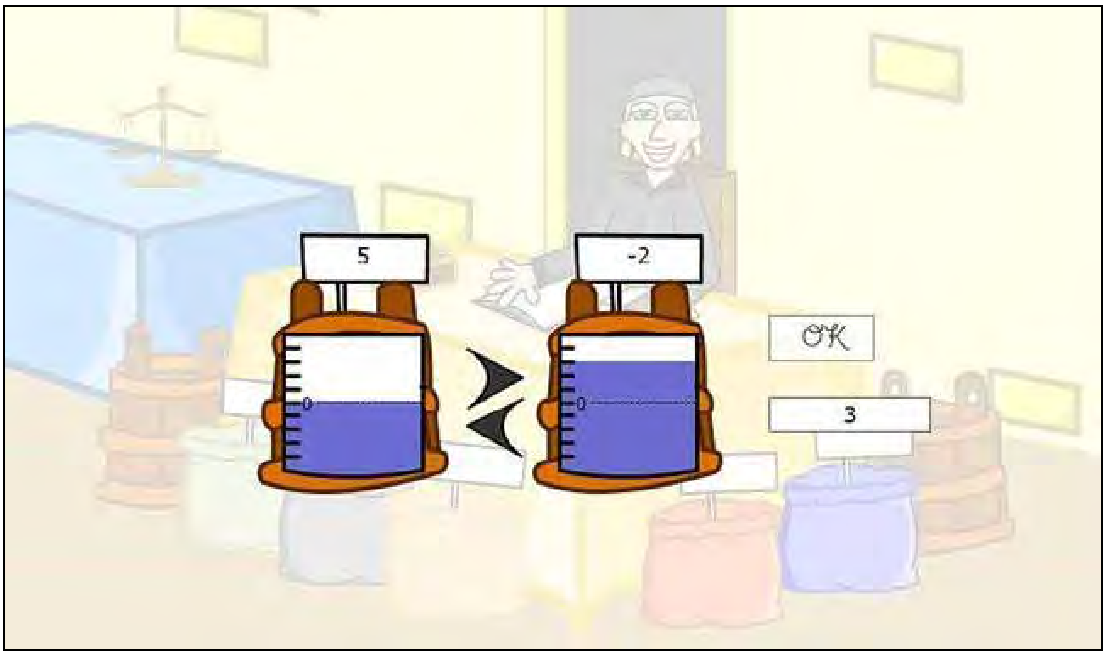

Figura 24 - O primeiro tonel sempre deverá ficar com a quantidade de vinho indicada pelo nível (traço pontilhado), ou seja, 5 litros.

3.4.8 – Laboratório Atomístico

Após digitar os oito dígitos da senha na sequência correta: “yin”, “yang”, “Atena” e “Horas”, adquiridos na realização das situações-problema dos demais ambientes, o aluno tem acesso ao ambiente intitulado “Laboratório Atomístico”.

- Personagem principal: Professor Pingüim (vide Figura 25);
- Tempo: atualidade do aluno, volta ao presente e ao Pólo Ártico;
- Enredo: através dos “poderes” do amuleto (que para nós representam os conhecimentos adquiridos na viagem no tempo e no espaço) o aluno consegue enxergar e controlar os movimentos de cargas elétricas e da temperatura presentes nos experimentos do professor Pingüim.

Figura 25 - Ao se unirem os talismãs transformam-se em um único amuleto.

No primeiro experimento (Figura 26) sobre um diagrama existem símbolos representando as cargas elétricas positivas e as cargas elétricas negativas. O qual sempre inicia com 10 unidades positivas e 10 unidades negativas, ou seja, com as cargas elétricas em equilíbrio, sem movimento, novo conceito de zero (10 – 10).

E, nas laterais do diagrama existem dois recipientes de vidro, um contendo unidades positivas e outro contendo unidades negativas, de onde o aluno poderá retirar ou colocar as unidades positivas ou negativas conforme for indicado pelo problema.

- Situação-problema (1): Clicando sobre a carga e arrastando-a o aluno poderá manipulá-la da maneira que preferir para calcular o número resultante. No guia do professor sugerimos que o aluno utilize o raciocínio chinês no cálculo com palitos vermelhos e pretos, ou seja, unindo as cargas opostas (uma a uma) elas se anulam (resultam em zero) e o que sobrou (ficou sem par) vai indicar a qualidade e a quantidade resultante da contradição.
- Fundamento pedagógico: Que o aluno perceba o zero como par de contrários em equilíbrio, conceito físico de matéria atual.

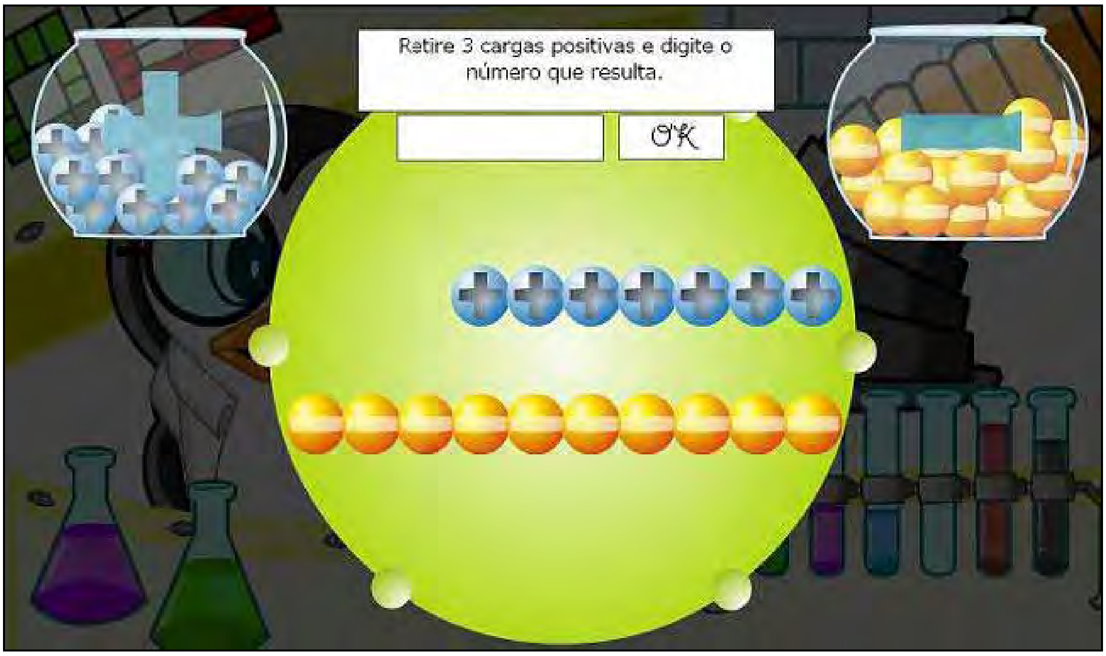

Figura 26 - Retirar/acrescentar cargas positivas/negativas no diagrama e digitar na lacuna a qualidade e a quantidade do movimento resultante das cargas.

O próximo experimento refere-se ao movimento da temperatura, cujas unidades positivas representam o estado quente e as negativas o estado frio.

- Situação-problema (2): Nessa problemática os procedimentos são os mesmos da situação-problema precedente, porém dentre os símbolos expostos na Figura 27, os sinais "+", representam unidades de calor, enquanto que os sinais "-", representam unidades de frio.
- Fundamento pedagógico: Auxiliar o aluno a pensar os contrários num contexto mais vasto, em "mão-dupla", como aumento ou diminuição dos elementos que compõem a temperatura, frio e calor, diferenciando-os dos sinais (+) da adição e (-) subtração, dos símbolos (algébricos) usados para indicar os contrários (+) positivo e (-) negativo.

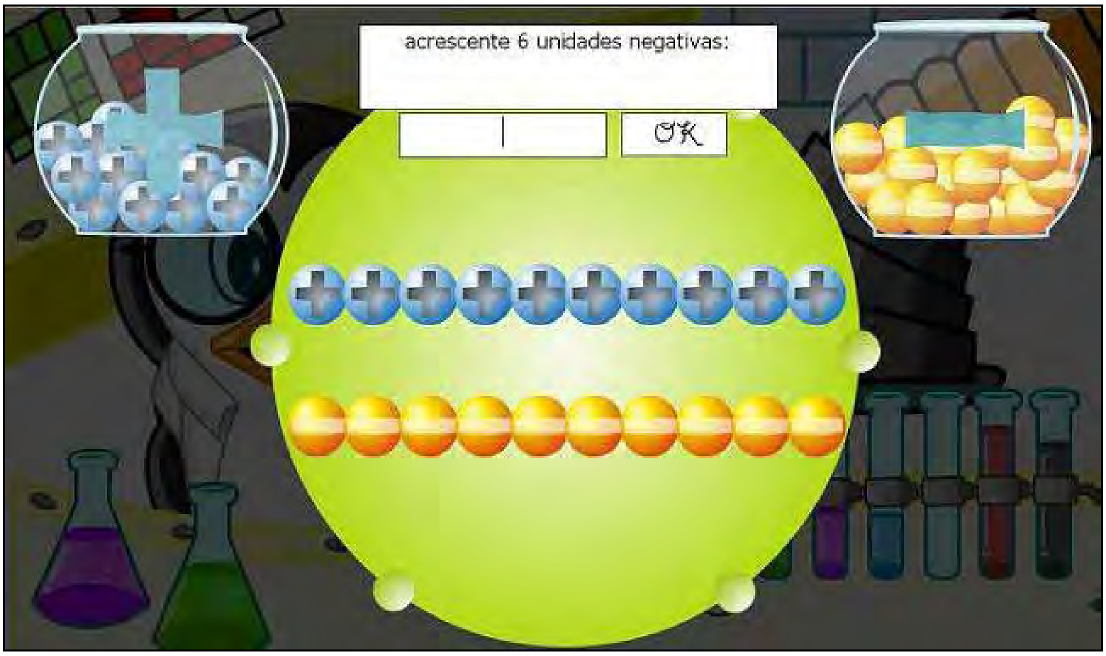

Figura 27 - Retirar/acrescentar unidades positivas/negativas no diagrama e digitar a qualidade e a quantidade do movimento resultante da temperatura.

Nesse momento, para formalização das ações desenvolvidas, indicamos no guia do professor que o docente proponha a seus alunos que, em um papel à parte, convertam as operações realizadas em sentenças matemáticas. Por exemplo: acrescentar 6 unidades negativas é o mesmo que + (- 6).

No experimento seguinte, a dinâmica da Figura 28 indica a representação das unidades contrárias que compõem a temperatura do Pólo Ártico, como se o aluno pudesse visualizar a média da temperatura no verão do Ártico.

Porém, nesse experimento o aluno só poderá retirar unidades do diagrama e não colocar, ou seja, deverá representar o movimento da temperatura somente através da manipulação das unidades internas ao diagrama.

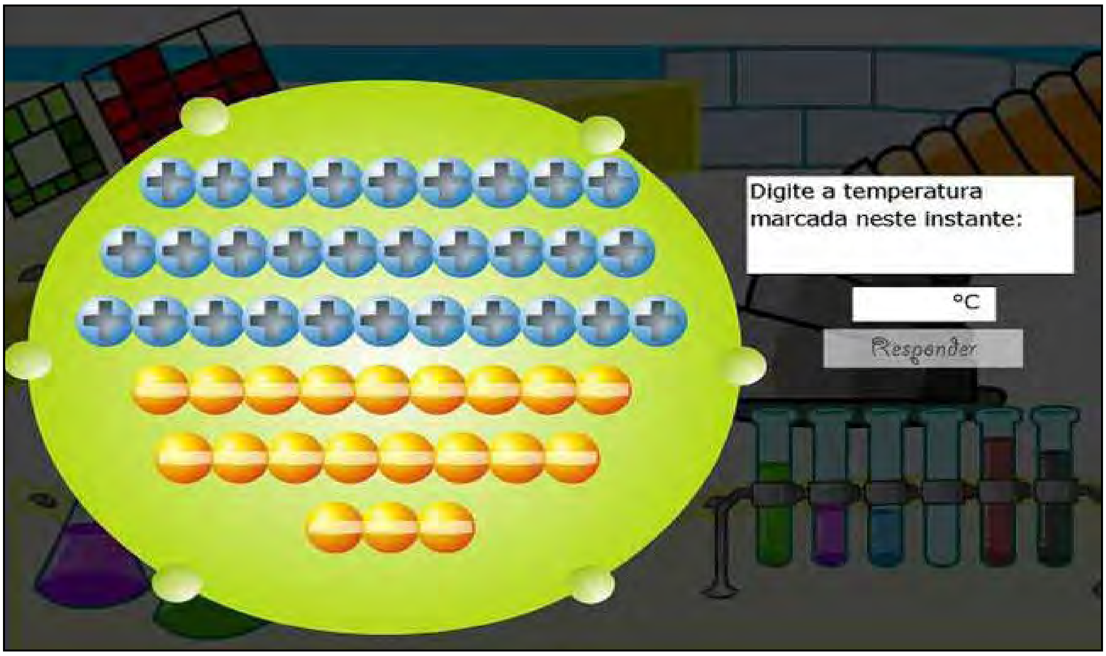

Figura 28 - Manipular e contar as unidades opostas para indicar a média da temperatura.

- Situação-problema (3): Neste experimento o símbolo + representa uma unidade de calor e o símbolo - representa uma unidade de frio. O aluno deverá através do pensamento chinês, calcular qual o número resultante, isto é, a temperatura do Pólo Ártico.
- Fundamento pedagógico: Explicitar a diferenciação entre os sinais (+ ou -) operatórios – aqueles que indicam ação – e predicativos – aqueles que qualificam um estado, positivo ou negativo.

Nessa situação-problema, de acordo com as mudanças na temperatura o aluno vai manipulando as unidades contrárias, dispondo-as de modo a representar a temperatura naquele momento.

No exemplo da Figura 29, a temperatura que estava em equilíbrio, caiu 9 graus Celsius, no outono. Convertendo essa operação numa sentença matemática, temos: -(+9). Para representar essa operação, no diagrama, visto que não tem como acrescentar 8 unidades negativas, + (-9), o aluno precisará retirar 9 unidades positivas. Logo, - (+9) = +(- 9) = - 9.

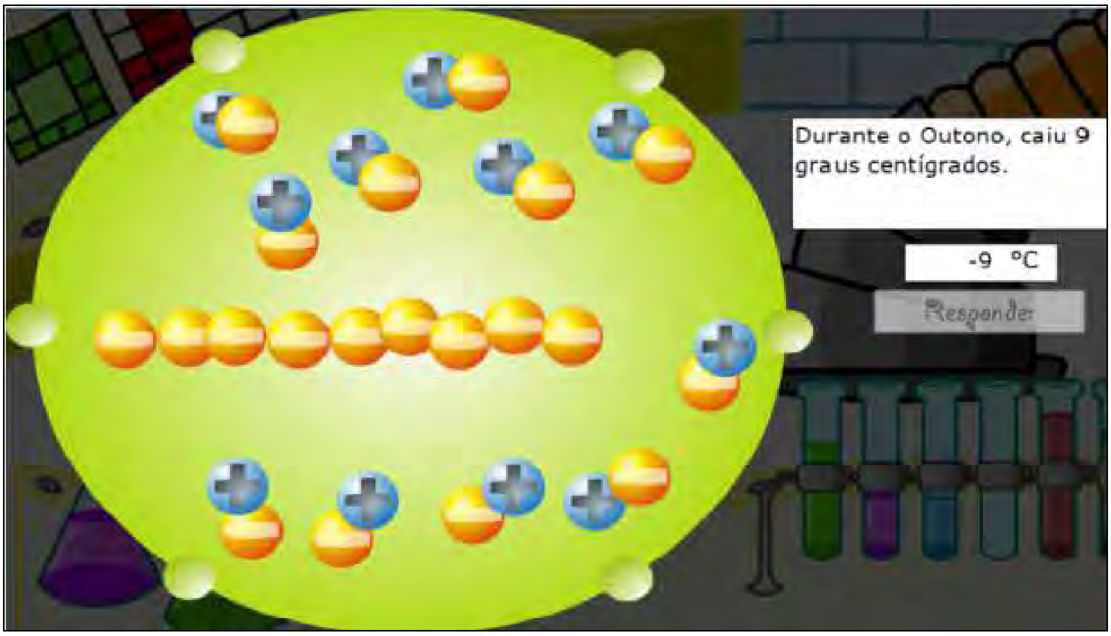

Figura 29 - Retirar unidades positivas ou negativas do diagrama de modo a representar a qualidade e a quantidade resultante da mudança de temperatura.

De acordo com o modo de racionalidade chinês, na Figura 30 simulamos um modo de proceder para que a temperatura volte a ser - 4 graus Celsius. No entanto, o aluno é livre para dispor as unidades contrárias de acordo com seu próprio modo de racionalidade, de acordo com as "definibilidades próprias" que desenvolveu sobre o conceito.

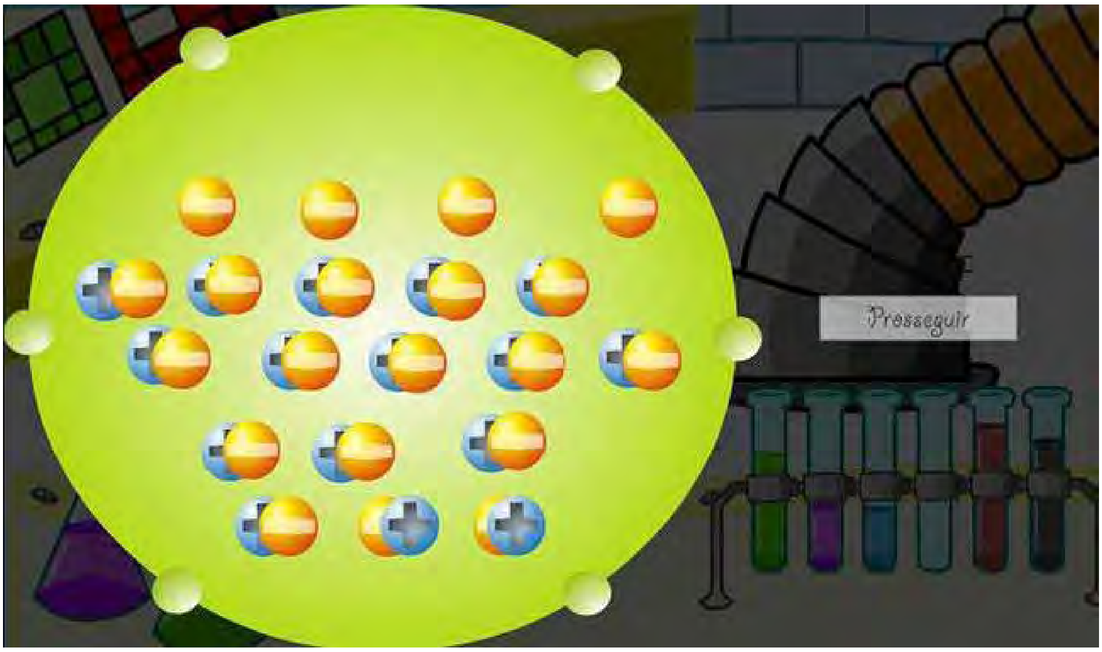

Figura 30 - Manipular as unidades contrárias no diagrama de modo que a temperatura volte a ser – 4 °C.

- Fundamento Pedagógico: Levar o aluno a visualizar, narrar, manipular, perceber e compreender as regras de sinais.

A partir das operações realizadas nos experimentos, em "Curiosidades" (Figura 31), desenvolvemos passo a passo à sistematização da regra de sinais.

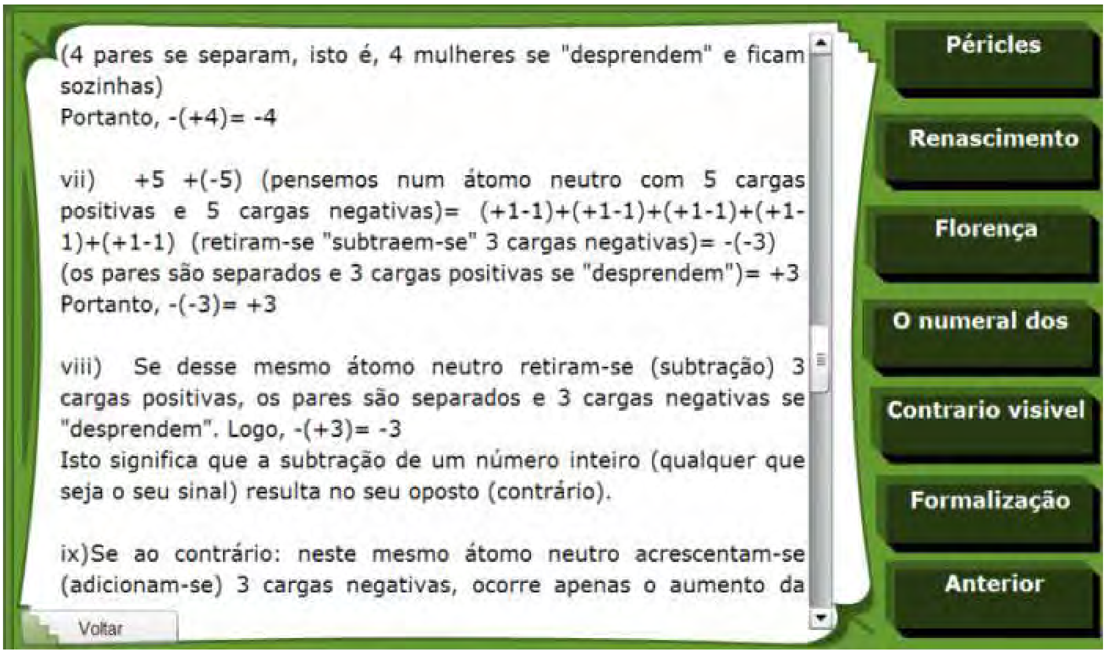

Figura 31 - "Curiosidades" botão "Formalização".

Para Prado & Moura (2007b), "quanto maior a inserção de idéias que possibilitem discutir formas de negatividades (LIZCANO, 2006) presentes no nosso cotidiano, maior será a fuidez do conceito".

Para entender melhor como tornar fluídas as fronteiras do conceito números inteiros, estabelecemos uma relação com o que isto significa para Bohm & Peat (1989) no sentido da ciência.

> O ideal é nunca fixar rigidamente as áreas de especialização, porque, pelo contrário, elas devem evoluir dinamicamente, como um fluxo, subdividindo-se agora em regiões de especialização mais restrita para depois se tornarem mais gerais. Contanto que as fronteiras se mantenham fluidas e os cientistas não se esqueçam do contexto mais vasto de cada experiência ou conceito, os problemas da fragmentação nunca chegam a aparecer. (BOHM; PEAT, 1989, p. 31)

Dessa forma, procuramos desenvolver no OA "O Universo e seus Contrários" situações, não estritamente matemáticas, que abarcam a relação entre os elementos: negativo, positivo e zero, e a sua representação, pelos sinais (+) e (-). De modo a recriar através de recursos tecnológicos, literários e metafóricos algumas formas de negatividades desenvolvidas pelo homem, nos contextos mais diversificados possível, ampliando assim a fluidez das fronteiras conceituais do número inteiro.

3.5 Conclusões da primeira etapa da pesquisa

O desenvolvimento do OA “O Universo e seus Contrários”, segundo a perspectiva lógico-histórica, apresentou-se como uma possibilidade flexível de criação, rompendo com os entraves dos aspectos estritamente simbólicos do conceito números inteiros, com as situações cotidianas isoladas e com os recursos mnemônicos utilizados para decorar as regras operatórias, abordagens que tanto frequentam as salas de aulas do Ensino Fundamental e que dão à sensação enganosa e mecânica do domínio fácil dos números inteiros.

A perspectiva lógico-histórica revelou a importância do papel da história do pensamento matemático no desenvolvimento de conceitos. Nesse sentido, vale a pena enfatizar aqui, as vantagens encontradas na adoção dessa perspectiva na construção do OA “O Universo e seus Contrários”:

- A construção de um *software* educacional aberto, composto por uma pluralidade de campos, com situações móveis e relacionadas por interseções horizontais (não hierárquicas).
- A abrangência de uma diversidade de situações das quais partem os problemas que favorecem a abstração tanto quanto possibilitam que o dado abstraído se generalize, permitindo reconstruções diante de novos problemas, pois os conceitos matemáticos traçam seus sentidos com base em uma variedade de situações, de maneira que, ao se analisar apenas “uma” dessas situações, isoladamente, corre-se o risco de desfazer as demais relações conceituais.
- A percepção dos números inteiros como um conceito desenvolvido pelo homem, na tentativa de explicar e representar aspectos da vida que os números naturais não alcançavam.
- A visualização da Matemática, em sua totalidade, por “[...] diferentes gêneros de pensamento e diferentes gêneros de abstração [...]” (Bohm; Peat 1989, p. 17), dentro de vários contextos histórico-

culturais, contribuindo significativamente no processo de apreender, selecionar e (re)criar os aspectos mediadores da mudança, no conceito números inteiros.

- A partir de um estudo acerca das formas de negatividade presentes no modo de pensar dos primeiros Han da China Antiga, os conceitos de fluência e contradição; os princípios da simultaneidade e os critérios de equivalência, puderam ser identificados como os fundamentos dos procedimentos, métodos e representações do conceito números inteiros. Em decorrência, procurou-se "mediatizá-los" (Belloni 2001) sob diversos formatos de apresentação de conteúdos via web (textos, imagens, animações, simulações).
- A consideração de características simbólicas e abstratas dos conceitos, como, por exemplo, a sincronia ou concorrência entre os opostos "yin" e "yang" (realidades reversíveis), em torno de um centro (zero) como primeira forma da negatividade desenvolvida pelo homem.
- A virtualização do instrumento de cálculo, desenvolvido pelos chineses (os palitos vermelhos e pretos), abriu um canal na diferenciação dos sinais (+ ou -) operatórios e predicativos (positivo ou negativo) (Teixeira 1992). Além disso, viabilizou a prática operacional chinesa de reduções ou construções mútuas com os palitos/números vermelhos/positivos e pretos/negativos.
- O rompimento com o pensamento ocidental, de tradição grega, cristalizado pelos princípios da não-contradição; do pensar por abstração, que constrói uma muralha entre a positividade, a negatividade e o zero; do operar por subtração e do pensar geométrico (Lizcano 1993/2006).
- A superação das influências da lógica formal desenvolvida nos moldes da formação escolar.
- A transposição da hegemonia presente no ensino dos números inteiros e deixar fluir novos procedimentos, novas abordagens e novas relações conceituais, por meio da fusão "lógico-histórico-tecnológico".

- A adequação e exploração das "linguagens das mídias eletrônicas" (Belloni 2002): ícones, lacunas, interfaces, dentre vários elementos técnicos e estéticos da comunicação audiovisual e da informação.

Diante do exposto, conclui-se que o lógico-histórico pode ser uma perspectiva metodológica e um instigante caminho didático na criação de recursos pedagógicos, subsidiados pelas tecnologias, para o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos, estabelecendo a função da História da Matemática na sala de aula.

Contudo, no capítulo que segue, parte-se para uma análise do OA que contempla não apenas o produto em si mesmo, mas se estende a uma situação real de utilização em contexto natural de ensino e aprendizagem, de maneira que a dinâmica do uso do "O Universo e seus Contrários" permita uma reflexão mais detalhada das potencialidades pedagógicas desse recurso na formação conceitual dos números inteiros.

CAPÍTULO 4 – PRÁTICA PEDAGÓGICA COM O OA

Tendo em vista que o desenvolvimento de objetos de aprendizagem do projeto RIVED, através da colaboração de grupos de pesquisa de universidades públicas brasileiras, visa “melhorar a aprendizagem das disciplinas da educação básica e a formação cidadã do aluno”[60], entendemos que, para que isso ocorra, é necessário que educandos e educadores tenham acesso a esses OA. Em decorrência, uma alternativa favorável para viabilizar o acesso e o conhecimento deste recurso pedagógico digital é levá-lo à escola.

Apesar das dificuldades de construir modelos mais detalhados de como os estudantes lidam com os aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros, no momento em que resolvem as situações-problema apresentadas no OA, sair do ambiente laboratorial e inserir-se no ambiente escolar nos aproxima de todas as dimensões da educação e de determinadas situações que somente ocorrem em sala de aula. Acreditamos que dessa maneira conseguimos integrar a parte – nosso objeto de pesquisa – ao todo – as Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação.

Para inserção de um OA na cultura escolar do ensino dos números inteiros, contamos com a cooperação da direção de uma instituição pública de ensino, por literalmente “abrir as portas” da escola para nós; da professora da disciplina “Informática Educacional”, por conceder suas aulas e acompanhar a mediação pedagógica do OA, e dos alunos, por aceitarem o desafio de fazer a “viagem” proposta em “O universo e seus contrários”.

Dessa forma, a realização dessa etapa do estudo, decorreu no contexto que cerca a Sala Ambiente de Informática (SAI), e quando necessário, a sala usual da turma também foi utilizada para esclarecer dúvidas apresentadas pela maioria do grupo.

A mediação pedagógica do OA é, em primazia, uma ação extremamente significativa da pesquisa. Portanto, dispor dessa ação, além de distanciar-nos dos objetivos do estudo, poderia sobrecarregar a professora de “Informática” (como é conhecida na escola) com responsabilidades de uma investigação científica alheia, caracterizando-se num modelo hierárquico de pesquisa, “de cima para baixo”.

Assim, de sorte a “desenvolver procedimentos que tornem a abordagem adequada a seus respectivos propósitos” (ANDRÉ, 1984, p. 51), consideramos pertinente que

[60] Disponível em: http://www.rived.mec.gov.br/site_objeto_lis.php. Acesso em 27 jan. 2009.

a prática pedagógica do OA: “O Universo e seus Contrários”, fosse mediada pela própria pesquisadora.

Nesse contexto, a dinâmica de uso do OA pode ser representada pela relação exposta na Figura 32:

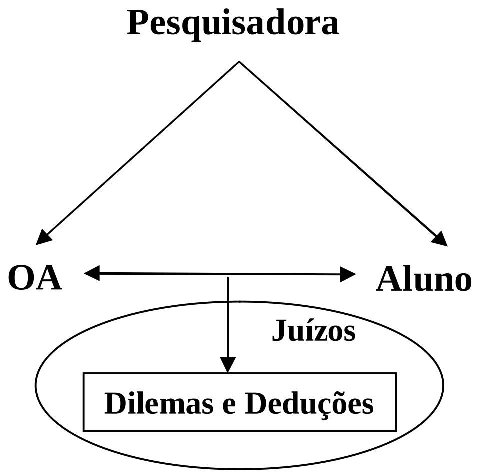

Figura 32 - Mapa Conceitual da Dinâmica de uso do OA

Porém, os investigadores qualitativos tentam interagir com os seus sujeitos de forma natural, não intrusiva e não ameaçadora. Quanto mais controladora e intrusiva for a investigação, maior a probabilidade de se verificarem as influências do pesquisador.

Segundo as orientações didáticas dos PCN (1998) de Matemática para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – “ensino de quinta a oitava séries” – no tópico “Números e operações”, a abordagem dos números inteiros é indicada para o terceiro ciclo do Ensino Fundamental, que corresponde à quinta e sexta séries. Uma das recomendações do documento é que o aluno conclua o terceiro ciclo do Ensino Fundamental sendo capaz de fazer o “reconhecimento de números inteiros em diferentes contextos – cotidianos e históricos – e exploração de situações-problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos” (BRASIL, 1998, p. 71).

Na nova *Proposta Curricular do Estado de São Paulo* (2008) para o ensino de Matemática, no Ensino Fundamental e Médio, essa indicação é ainda mais precisa. A abordagem das matérias de ensino é sugerida através de uma grade curricular que especifica a série, o bimestre e o período do tratamento pedagógico oferecido a cada conteúdo. Neste documento, os “Números Negativos: representação e operações” aparecem indicados no “1º Bimestre” da “6ª série”. (SÃO PAULO, 2008, p. 52).

A fim de não perder o momento pedagógico no qual os alunos ainda não possuem o conhecimento escolar do conceito números inteiros e de acordo com as orientações curriculares federal e estadual, esta etapa da pesquisa desenvolveu-se em uma turma de 6ª série.

Assim, o OA foi mediado pela pesquisadora, em uma 6ª série do Ensino Fundamental, que aqui, por motivos éticos tratamos por 6ª série "Y", com o acompanhamento e auxílio da professora de "Informática" da turma, que denominamos por "X", em uma Escola Estadual em Tempo Integral, situada no interior do Estado de São Paulo, que chamamos de escola "Z".

Nesse panorama de estudo, encontramos em Bogdan & Bikleen (1994) o caminho que procurávamos para combinar pesquisa e ensino. Os autores definem cinco características da investigação qualitativa:

> 1. *Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal* [...]. Os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contacto direto. Além do mais os materiais registrados mecanicamente são revisto na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise. (p. 47).
> 2. *A investigação qualitativa é descritiva*. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números [...]. A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a idéia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo. (p. 48-49).
> 3. *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*. (p. 49)
> 4. *Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva* [...], as abstracções são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. (p. 50)
> 5. *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa* [...]. Centram-se em questões [...]. Ao apreender as perspectivas dos participantes, a investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é freqüentemente invisível para o observador exterior. (p. 51). (BOGDAN; BIKLEEN, 1994, p. 47-51, grifos dos autores).

A abordagem qualitativa permitiu-nos acompanhar e compreender, a partir do contato direto e apreensão das falas dos alunos, o trânsito do pensamento, refletido na forma de juízos, enquanto eles estavam lidando com o OA. De modo que a reunião desses juízos foi revelando as potencialidades do "O Universo e seus contrários" na formação de um novo conhecimento – o conceito de números inteiros.

Para constituição de material empírico da pesquisa, consideramos importante o uso das seguintes técnicas e recursos, dispostos no método qualitativo: interação pesquisador-aluno; aluno-aluno; observação; diário de bordo para o pesquisador; gravador de áudio e produções de texto por parte dos alunos.

- Gravador de áudio: Foram utilizados dois gravadores de áudio na SAI. Um permaneceu fixo, durante todo o desenvolvimento do OA, em um mesmo grupo de alunos – grupo fixo (alunos com maior número de frequência no ano letivo antecedente). O outro gravador ficou em um grupo diferente, a cada aula, circulando por todos os grupos – grupo volante.

O uso do gravador de áudio foi fundamental para o tipo de dados construídos nessa pesquisa. As notas de campo foram incapazes de detectar ou descrever a "Matemática" desenvolvida pelos alunos, ao lidar com o OA.

As produções de texto foram realizadas ao final da vivência pedagógica do OA. Na SAI, utilizando o processador de textos *Microsoft Word*, cada grupo de alunos descreveu, como se estivesse relatando a um amigo, como foi o primeiro contato com o conceito números inteiros, dado por meio da interação com "O Universo e seus Contrários". Além disso, nessas produções, os alunos puderam descrever seus sentimentos, opiniões e reflexões acerca dos componentes do OA.

Com base nesses procedimentos metodológicos, as ações foram organizadas de acordo com os fundamentos pedagógicos do OA e a significância na coleta de dados da pesquisa.

4.1 Caracterização da unidade escolar

O processo de inserção no ambiente selecionado para a prática do OA teve início antes do ingresso no Programa de Pós-Graduação, a partir da realização do estágio desenvolvido durante a graduação nos anos de 2004 e 2005. Ao longo do texto, pretendemos expor as características de estrutura física, administrativa e pedagógica desse ambiente escolar, fatores que influenciaram nossa permanência nessa escola.

Em 2007, a pesquisadora retornou à escola, para elaborar um trabalho destinado à disciplina Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação Escolar, com base na técnica da pesquisa qualitativa conhecida como "Grupo Focal", no qual buscamos identificar as Representações Sociais dos alunos de uma 5ª série do Ensino Fundamental sobre o potencial pedagógico do computador, no processo de aprendizagem escolar. Assim, desenvolvemos uma investigação inicial desse ambiente escolar.

De acordo com o que se tem disposto em documentos oficiais da Escola Estadual localizada no interior do Estado de São Paulo, que aqui, para preservar a identidade, trataremos por escola "Z", e por meio da aplicação de um questionário diretivo à coordenadora pedagógica, verificou-se que esta funciona no período diurno e noturno, sendo que os alunos do Ensino Fundamental, ciclo II (5ª a 8ª séries) estudam em Tempo Integral (das 7h10 min às 15h50). A escola também oferece os cursos de Ensino Supletivo (Ensino Fundamental e Médio), em período noturno, e Ensino Médio, em período matutino e noturno.

Por esse motivo, a escola conta com mais de 100 docentes, dos quais 89 com sede na escola, sob a orientação e colaboração de um diretor, dois vice-diretores (um decorrente do tempo integral) e três coordenadoras, uma para o período diurno, outra para o período noturno e outra para o período integral.

O corpo discente é composto por aproximadamente 1330 alunos, distribuídos nos vários períodos de funcionamento da escola.

A estrutura física da escola constitui-se de 21 salas de aula, que atendem em média a 35 alunos por turma, no Ensino Fundamental, e 40 alunos por turma, no Ensino Médio.

De acordo com a coordenadora, a escola Z está localizada em um bairro "bom" (informação verbal)[61] da cidade, cuja maioria dos alunos provém de uma "classe média, de famílias estruturadas, sendo pequeno o índice de alunos oriundos de família de baixa renda, com desempenho abaixo da média, ou com histórico de agressividade e desajuste emocional" (informação verbal)[62].

Em relação às condições das instalações escolares, a escola Z dispõe de:

- Uma sala de vídeo;
- Uma sala de leitura (biblioteca), com aproximadamente dez mil livros;
- Um laboratório de Química e Física;

[61] Informação verbal da coordenadora da escola, mediante entrevista dirigida semi-estruturada.
[62] Idem.

- Uma Sala Ambiente de Informática (SAI), com treze microcomputadores em rede e com Internet.

De um modo geral, a escola conta com dois televisores móveis, uma máquina fotográfica digital, um retroprojetor e um aparelho de som, que, inclusive, é usado pelos alunos, nos intervalos das aulas, como atividade recreativa organizada pela “Rádio Galera”.

A escola possui uma vasta dimensão territorial, com uma quadra poliesportiva coberta e duas quadras descobertas. As salas de aula usuais são discriminadas por sua numeração, ou seja, não há sala ambiente distinguida pelas disciplinas.

A escola procura realizar atividades diferenciadas, por meio de projetos que abordam temas interdisciplinares, tais como, meio ambiente, cidadania, sexualidade, arte e cultura.

A grade curricular do Ensino Fundamental é constituída pelas disciplinas básicas: Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Ciências Físicas e Biológicas e Educação Física. Dentro do Programa de Escola em Tempo Integral, também são oferecidas as disciplinas:

- Oficina Saúde e Qualidade de Vida;
- Artes, na qual são realizadas atividades de dança, música, teatro e artesanato;
- Orientação para estudo e pesquisa, que, segundo a coordenadora, é empregada para o aprofundamento dos conteúdos trabalhados em sala de aula, visto que não há “tarefa para casa”[63], em decorrência do tempo integral;
- Oficina de Experiências Matemáticas, na qual a professora procura desenvolver projetos com novas abordagens de ensino dos conteúdos matemáticos;
- Informática Educacional, na qual são desenvolvidos projetos que visam introduzir o uso do computador no processo de ensino e aprendizagem de diferentes conteúdos escolares.

A Sala Ambiente de Informática (SAI), cenário de nossa investigação, possui treze computadores, porém, podemos contar com dez funcionando. A SAI também

[63] Informação verbal da coordenadora da escola, mediante entrevista dirigida semi-estruturada.

conta com uma mesa central, que alguns alunos utilizam para desenvolver outras atividades, enquanto os outros usam o computador.

A partir de um processo de reflexão sobre o panorama exposto até aqui, percebe-se que há uma multiplicidade de fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem, nas situações de sala de aula, e infere-se que não há uma receita infalível para analisar as contribuições do OA no estudo conceitual dos números inteiros.

Ademais, trata-se de uma pesquisa cuja pesquisadora compromete-se com a mediação pedagógica do OA. Mas para, além dessa tarefa, acompanhar a interação do aluno com o OA, foram definidas algumas categorias que pudessem direcionar o "olhar" da pesquisadora às potencialidades do "O Universo e seus Contrários".

4.2 Educando o olhar

Analisar as potencialidades de um objeto de aprendizagem de forma qualitativa significa "[...] fazer luz sobre a dinâmica interna das situações [...]" (BOGDAN; BIKLEEN, 1994, p. 51), a partir das "[...] perspectivas dos participantes [...]"[64], ou seja, das falas dos alunos da 6ª série Y ao lidar com o OA. No entanto, os diversos ambientes presentes no "O Universo e seus Contrários" são compostos por uma multiplicidade de situações-problemas, construídas com a intenção de permitir o "saber pensar", em lugar do "saber fazer", o que gerou um número elevado de transcrições. Contudo, devido a presente pesquisa tratar-se de um trabalho de Mestrado, entende-se que não há condições de analisar as informações em sua totalidade.

> [...] A dialética ensina que o estudo de essência do objeto deve necessariamente ser iniciado do mais simples, massiforme, mais freqüentemente encontrado na forma desenvolvida do objeto, sendo, ademais, um simples que contenha em forma embrionária toda a riqueza e os traços característicos do complexo, desenvolvido. [...]. (KOPNIN, 1978, p. 194-195)

Nesse sentido, pode-se considerar que na investigação do objeto de pesquisa, essa função é desempenhada pelo juízo, visto que este se encontra como "a forma mais simples e geral de pensamento" (KOPNIN, 1978, p. 195).

[64] Ibidem.

Antes de iniciar a prática pedagógica do OA, foi desenvolvido um diagnóstico prévio com os alunos, com intuito de comprovar se estes já possuíam algum conhecimento sobre o conceito números inteiros. Como já era previsto, os alunos não reconheceram, nem conseguiram demonstrar quaisquer noções sobre este conceito. Por conseguinte, as primeiras ideias acerca desse conceito foram suscitadas através da utilização do OA, dessa maneira, elas se apresentaram na forma de juízos, isto é, “[...] não como conceito preciso já formado mas como o ato através do qual forma-se o conceito” (KOPNIN, 1978, p. 189).

Tendo como referência esses elementos, a partir das falas dos alunos, foram captados os juízos que eles desenvolveram encima dos aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros ao resolverem as situações-problema existentes no OA.

“O juízo é um processo de apreensão do objeto pelo pensamento. As diversas formas de juízo são elos particularmente, momentos desse processo. [...]” (KOPNIN, 1978, p. 198), surge com isso, uma questão: quais juízos podem revelar as potencialidades do OA? Ou melhor, quais categorias que olham isso?

A partir dessas inquietações, dos dados construídos na dinâmica do uso do OA, escolhemos para serem analisados: os dilemas e as deduções.

Ao tentar resolver as situações-problema propostas no OA, há sempre decisões a serem tomadas pelos alunos, de como proceder para concluir a atividade e explorar novas problemáticas do OA. Nesse momento, surgem dúvidas de que escolha fazer, tenta-se um caminho, percebe-se que está errado, provocando novas hesitações, tenta-se outro caminho, reflete-se sobre o que já foi feito, toma-se novas decisões, ou seja, cria-se um dilema.

Nesse processo, o dilema é constituído por juízos emitidos enquanto se explora o problema e os conceitos envolvidos no qual, de sorte a apreendê-los. Com isso, faz-se uma inquirição sobre os indícios do princípio que rege a atividade, percebe-se a existência de algumas relações e propriedades particulares até se formar um conhecimento sobre as ideias subjacentes à situação-problema.

Através dessa dinâmica, os alunos vão construindo juízos mais elaborados acerca dos conceitos envolvidos. De acordo com Kopnin (1978) o confronto desses juízos transforma-se em uma ou mais deduções, a partir daí, a dedução estabelece-se como “[...] ponto de partida para a formação de novas deduções, que levam a um novo conhecimento”. (KOPNIN, 1978, p. 191)

> Efetivamente, *o juízo e a dedução desempenham imenso papel na formação dos conceitos*. Para encontrar nos fenômenos o universal que é refletido no conceito, é necessário abranger o objeto de todos os lados, emitir toda uma série de juízos sobre aspectos isolados do mesmo. O essencial no fenômeno não pode ser definido sem um sistema integral de deduções. Na formação dos conceitos cabe enorme papel à *análise* enquanto movimento que parte do concreto, dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também à *síntese* enquanto movimento do abstrato a um novo concreto, que é o conjunto das definições abstratas. [...] (KOPNIN, 1978, p. 191, grifos do autor)

O movimento entre os juízos e deduções na formação das "definições abstratas" que compõem os conceitos pode ser representado na relação exposta na Figura 33:

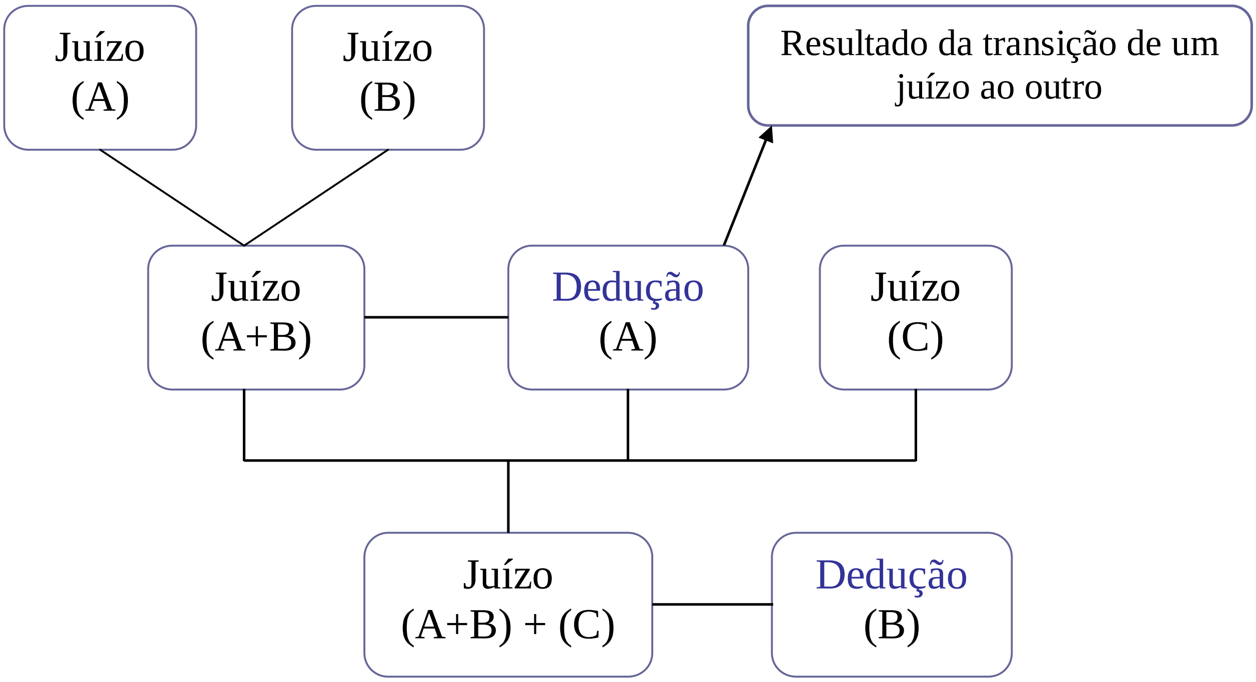

Figura 33 - Mapa Conceitual do Movimento de juízos e deduções na formação de conceitos

Assim, nesta etapa da pesquisa apresentamos os dilemas e deduções surgidas a partir dos juízos dos grupos compostos pelos 29 alunos da 6ª série Y, em especial dos alunos do grupo fixo que, para proteger a identidade dos quais, tratamos por "A1", "A2" e "A3".

4.3 Dinâmica do uso do OA

Essa etapa da pesquisa utilizou 10 horas/aula (h/a) de 50 minutos cada, das aulas de “Informática” da 6ª Y, cedidas e acompanhadas pela professora X, as terças e quintas-feiras dos dias 16/04/09 (uma h/a), 21/04 (feriado nacional), 23/04 (uma h/a), 28/04 (uma h/a), 30/04 (duas h/a), 05/05 (duas h/a), 07/05 (duas h/a) e 12/05/09 (uma h/a).

As sessões foram iniciadas com explicações da pesquisadora na sala usual da 6ª Y. Em sua maioria, basearam-se nas principais dificuldades apresentadas pelos alunos no desenvolvimento das problemáticas do OA, detectadas nas sessões precedentes. Em média, essas explicações não ultrapassaram 20 minutos, pois, além da questão do curto período de tempo da aula, a turma demonstrara-se ansiosa para ir a SAI.

A SAI, dispondo de 10 computadores funcionando, permitiu a formação de seis trios e quatro duplas com os 29 alunos da turma. Apesar de inicialmente considerarmos que três alunos por computador poderia prejudicar a utilização do OA, pelo fato de dois alunos não manipularem diretamente o computador, os dados obtidos mostraram que o trabalho em grupo provocou discussões entre os alunos, o que resultou em falas ricas de pormenores essenciais a uma pesquisa eminentemente qualitativa.

A interação dos alunos também gerou muito barulho na SAI, porém, as conversas, na maior parte dos casos, trataram-se de algum assunto relacionado ao OA, com sugestões, dúvidas, entusiasmo e apreensão por explorar todos os ambientes do OA, principalmente o Laboratório Atomístico, por seu acesso exigir uma senha. Ou seja, a multiplicidade de vozes não significou dispersão com conversas paralelas ou atividades diferentes no computador, mas sim o envolvimento dos alunos com o OA.

O comportamento dos grupos foi bastante variado, ao se depararem com a tela menu “Planeta Terra”, apesar da pesquisadora ter sugerido aos grupos para iniciarem as atividades pelo ambiente “China – Dinastia Qin”, cada grupo clicou no ambiente que lhe causou maior interesse.

Dessa forma, para apresentação e análise dos dados, estes foram organizados de acordo com seu contexto. Isto é, neste item, os dilemas, extraídos da totalidade das falas dos alunos, foram situados no interior dos ambientes, em especial das situações-problema que os causaram.

4.3.1 Pólo Ártico

Por se tratar da introdução do OA, no qual estão as informações sobre as ações que precisam ser realizadas para aquisição da senha de acesso ao Laboratório Atomístico, a exploração desse ambiente só ocorreu no primeiro contato com o OA.

Nessa ocasião, alguns dos grupos passaram rapidamente pelas telas, já outros leram linha por linha, para compreender o contexto, e desse mesmo modo, agiram pelos demais ambientes do OA. De maneira geral, não se atentaram aos textos, não os leram, mas ouviram as narrações, de acordo com sua relevância na compreensão e resolução das situações-problemas.

4.3.2 Máquina do Tempo

A “Máquina do Tempo” não pode ser considerada como um ambiente, mas apenas como uma situação-problema com questões que os alunos precisam responder para entrar no ambiente desejado. Com isso, toda vez que o aplicativo é reiniciado, o utilizador precisa responder corretamente as questões da “Máquina do Tempo”.

No entanto, essa situação-problema não se tornou repetitiva, pelo contrário, causou muita polêmica e entusiasmo entre os alunos. Pois em cada acesso, o ano para onde o aluno pretende retornar, altera-se aleatoriamente dentro do tempo transcorrido na fase histórico-social selecionada no “Planeta Terra”.

Nas primeiras visitas à Máquina do Tempo os alunos apresentaram muitas dúvidas, não compreendiam a linha do tempo: o marco “0” como o nascimento de Cristo e a localização dos anos antes e depois de Cristo. Em consequência, até operacionalizarem os juízos e deduções, de modo a resolver esta problemática, muitos dilemas foram constituídos.

Para acompanhar esse processo, os dilemas foram organizados a seguir, na ordem em que foram aparecendo nas transcrições das falas do grupo fixo e de acordo com sua relevância para análise:

1º Dilema:

Na primeira sessão da prática pedagógica do OA, o grupo fixo seleciona a China – Dinastia Qin. Ao entrar pela primeira vez na “Máquina do Tempo” realiza a leitura e completa a primeira lacuna, mas para preencher a segunda lacuna, A1 lê em voz alta, chamando a atenção dos colegas do grupo:

A1: *"Hoje você está no ano de 2009, você irá entrar na China (Dinastia Qin) no ano de 206 a.C.. Quantos anos você precisará voltar no tempo?"*

A2: *Faz a conta 2009 menos 206.* [Pensando ser uma subtração]

A1: *É 1803.*

A3: *É lógico! Aqui tá 2100.* [Nota a linha do tempo, mas ainda não a compreende]

A3: *Para chegar no 206 tem que diminuir.* [Olha para linha do tempo e considera que do ano 2100 ao ano 206 os números estão diminuindo]

A2: *Coloca aí então 1894.* [2100 – 206]

A1: *Caramba! Não é também. Ah! Sei lá, tá muito difícil!*

As várias tentativas do grupo giraram em torno de uma subtração, enquanto que a possibilidade de uma adição foi completamente descartada. A primeira sugestão, dada por A2 é rapidamente resolvida por A1, isso significa que dominam os cálculos com essa operação dentro do campo dos naturais.

A3, ao visualizar a linha do tempo, confirma e expressa o argumento lógico utilizado pelo grupo, de que a sequência de números na linha do tempo está decrescendo do 2100 ao 2009, do 2009 ao 0, e assim segue seu pensamento, do 0 ao 206. Logo, se está diminuindo, trata-se de uma subtração (isso no campo numérico dos naturais). Afinal, para alunos, cuja forma de pensamento é de herança grega e que até então só trabalharam com os números naturais, como que a sequência de números do 0 ao 206 a.C. pode ser crescente se estes números estão dispostos antes do 0?

Após realizarem diversas subtrações, sem êxito, chamam a professora X:

A3: *Olha só professora a gente não está conseguindo.*

A2: *Acho que a gente não entendeu.*

A professora X percebe o equívoco e explica:

X: *Nós estamos no ano de 2009, depois que Cristo veio ao mundo que começou essa contagem, então nós estamos no ano 2009 depois de Cristo, olha aí, **2009 mais 206 antes de Cristo**.* [grifo nosso]

A2: *É mais.*

Nessa explicação, X esclarece que o referencial para a contagem do tempo é o nascimento de Cristo, no entanto, não explicita por que se trata de uma adição, apenas afirma esta sentença matemática.

Assim, a partir do trecho em destaque, A1 tenta criar um novo argumento lógico que o aproxime da resolução do problema. Fato que pode ser verificado no grifo do segundo dilema.

2º Dilema:

Esse dilema refere-se à terceira vez que os alunos entraram na Máquina do Tempo, momento transcorrido no início da segunda sessão, quando optam pela China – Dinastia Han e deparam-se com uma data antes de Cristo.

A1 julga que a operação a ser realizada, deve ser uma adição e justifica:

A1: ***Apareceu o antes de Cristo!*** [grifo nosso]

A2: *A última conta como que estava? Como foi a última conta que a gente fez A3?*

A3: *Mas não estava com esse negócio aqui, só estava o número!* [refere-se à abreviatura "a.C."]

Colocam a resposta correta.

A1: *Era de mais mesmo.* [confirma seu argumento]

A1 cria uma regra: quando tem a.C., a conta é de "mais", isto é, mecaniza o processo, afastando-se da compreensão do fenômeno. Porém, essa forma de resolver o problema resulta em incertezas, fazendo com que A1 hesite toda vez que tenta colocá-la em prática.

3º Dilema:

Na terceira sessão, sobre a tela "Planeta Terra" clicam na China – Dinastia Han e pela quarta vez entram na Máquina do Tempo, mas nessa ocasião encontram uma data depois de Cristo.

Para por em prática seu argumento, novamente A1 defende que a operação a ser realizada, trata-se de uma adição, porém, quando percebe o erro, ouve a opinião de A2:

A2: *É menos, é menos!*

A2: ***Do nascimento de Cristo prá cá é menos***. [grifo nosso]

A1: *Vai é daqui pra cá!*

A1: *Não ta c.d., não tá cd, depois de Cristo.*

A2: *Então é menos, não é mais.*

A1: *É mais?* [hesita]

A1: *Tenta de menos.*

Efetuam a subtração e conseguem entrar na China (Dinastia Han).

A1 tenta apropriar-se do símbolo a.C. que indica a qualidade do número, de modo a formalizar seu argumento, no entanto, confunde-se o chamando de "cd".

Nessa circunstância A2 apresenta seu argumento (em negrito), referindo-se ao lado da "linha do tempo" com o qual está acostumado a lidar. No campo da positividade, A2 sente-se confortável para "pensar por abstração e operar por subtração" (LISCANO, 1993): ao retirar certa quantidade (menor) de anos de 2009, sobra-lhe a quantidade de anos que dista as duas datas. Este argumento lógico de tradição grega, ao contrário do argumento de A1 não se trata de uma regra mecanizada, o qual possui consistência nas leis fundamentais da aritmética no que se estende aos naturais, por isso A2 coloca-o com maior certeza. Entretanto, A2 não consegue desenvolver o mesmo argumento paro o lado oposto, por exemplo: do nascimento de Cristo para lá é mais.

4º Dilema:

Ao iniciar a terceira sessão, optam pela Itália (depois de Cristo) e pela **oitava vez** na Máquina do Tempo, A2 e A1 mantém cada qual o seu argumento:

A2: *Faz de menos.*

A1: *É mais.*

A2: *Não é, não é, é menos.*

Para ter acesso aos ambientes do OA, A1 procurou estabelecer uma regra com intuito de resolver o problema para o caso a.C., todavia, ao focar nesse lado da contradição, não consegue operar quando se trata do caso d.C., cujas operações acabam sendo resolvidas por A2. Isto pode ser entendido como um indício da irreversibilidade de pensamento que impede pensar simultaneamente em uma relação e sua recíproca.

A partir disso, percebe-se que as manifestações dos alunos do grupo fixo corroboraram para o fato de que esta situação-problema instigou-lhes a contar o tempo em "mão-dupla" (LIMA; MOISÉS, 1998), provocando-lhes o pensamento dos contrários através da construção de argumentos lógicos para operá-los.

Ademais, a problemática enunciada na Máquina do Tempo exigiu que os alunos pensassem os dois lados da contradição composta na linha do tempo, tarefa que como eles próprios consideraram, foi-lhes "muito difícil".

Em seus estudos acerca da história da matemática ocidental Lizcano (2006) apresenta limites para vários instrumentos conceituais, como a metáfora da falta para pensar o problema da adição e subtração de números inteiros, que segundo o autor são provenientes da herança grega.

> [...] En la matemática de inmediata tradición euclídea no hay ciertamente 'rastro' de números negativos, pero sí campos conceptuales (como el de la sustracción o diferencia, o el de ciertas técnicas 'equivalentes a' la resolución de ecuaciones) en cuyo âmbito la matemática de herencia euclídea va a construir sus formas de negatividad. (LIZCANO, 1993, p. 19, tradução nossa)[65]

Nessa perspectiva, é válido lembrar que, o grupo analisado está situado em um contexto sócio-cultural cujo significado da negatividade substancia-se na tradição grega que está restrito à metáfora da falta. Por esse motivo, esses alunos se depararam com os seus limites conceituais nesse primeiro contato com conceito números inteiros.

4.3.3 China – Dinastia Qin

Esse ambiente é composto por uma sequência de cinco telas e dez caixas de texto, implementadas com imagens contextualizadas segundo a concepção simbólica yin/yang/dao. Desse total, somente a última tela consiste em uma situação-problema na qual o aluno precisa arrastar os símbolos yin/yang/dao, dispostos aleatoriamente, que melhor representam as imagens da natureza. Contudo, no que se refere à componente interatividade, a China – Dinastia Qin apresentou um baixo nível de interação, devido às poucas oportunidades de participação por parte do utilizador.

Costa (1999)[66] enfatiza a importância do grau de interatividade de um software educativo em relação ao seu potencial pedagógico, para o autor, "quanto mais rico for o ambiente e maior o grau de interatividade, maior será também o grau de envolvimento do utilizador".

---

[65] [...] Na matemática de imediata tradição euclidiana não há certamente "rastro" de números negativos, mas sim campos conceituais (como o da subtração ou diferença, ou de certas técnicas 'equivalentes a' resolução de equações) cujo âmbito a matemática de herança euclidiana vai construir suas formas de negatividade. (LIZCANO, 1993, p. 19, tradução nossa)

[66] Comunicação intitulada "Contributos para um Modelo de Avaliação de Produtos Multimédia Centrado na Participação dos Professores", apresentada ao 1º Simpósio Ibérico de Informática Educativa, setembro de 1999. Por Fernando A. Costa. Disponível em http://www2.fpce.ul.pt/projectos/pedactice/doc/comunicacao46.pdf.

As implicações da manipulação desse ambiente foram semelhantes entre os grupos. Os alunos observaram superficialmente as primeiras telas da Dinastia Qin e facilmente resolveram a situação-problema, sem precisarem recorrer às informações iniciais.

Esse ambiente foi o primeiro a ser escolhido pelos alunos do grupo fixo, desse modo, na primeira sessão da prática pedagógica do OA, ao perceber o local para onde o colega de grupo deveria arrastar o símbolo yin/yang/dao, A1 exclama:

A1: *Esse aqui da lua é aqui!*

Nessa fala, fica claro que A1 não reconheceu o símbolo yin/yang/dao, visto que o chama de "lua", um termo que lhe é familiar, ao contrário do manancial simbólico yin/yang/dao alheio ao seu imaginário cultural.

Dessa forma, nesse ambiente, os aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros presentes no par dialético yin e yang, uma forma ainda qualitativa, porém simbólica de representar os contrários na natureza, mantiveram-se intrínsecos no OA. Dentre outros fatores, ocasionado pela ausência de:

- Um número maior de situações-problemas com grau crescente de dificuldade;
- Eventos que desafiam o usuário a tomar decisões e refletir sobre o que está executando;
- Maior controle e domínio por parte do aluno sobre o que está acontecendo.

4.3.4 China – Dinastia Han

Esse ambiente é composto por duas situações de aprendizagem, as quais são nomeadas por "Batalha Chinesa" e "Baile de Máscaras".

- **"Batalha Chinesa"**

A "Batalha Chinesa" propiciou aos alunos do grupo fixo a elaboração de determinados juízos ligados aos critérios de oposição ou de equivalência, circunscritos no imaginário chinês, delineando novos aspectos ao modo de enxergar e pensar os contrários.

Para descrever esse processo, a partir dos juízos emitidos pelo grupo fixo, foram identificados quatro dilemas que revelam tais contribuições.

1º Dilema:

No transcorrer da primeira sessão da prática pedagógica do OA, o grupo fixo entra pela primeira vez na “Batalha Chinesa”, aumenta o volume para ouvir as narrações, envolve-se com os soldados oponentes, porém, A2 confunde as cores utilizadas na sua representação.

Retiram 4 palitos pretos e 2 palitos vermelhos de suas respectivas caixas e separa-os por cor sobre o tapete, então pela segunda vez A2 faz a leitura da primeira questão:

A2: “*Qual foi o exército vitorioso? Hunos, chineses ou empate?*”

A3: *Hunos.*

A1: “*Quantos soldados sobreviveram?*”.

A2: *Dois*. [erroneamente, refere-se aos palitos vermelhos]

A1: *Oh, não aperta, não aperta!* [percebe que algo está errado]

A1: *Se eles ganharam como que eles ganharam? Matou eles.* [refere-se aos palitos vermelhos]

Em razão dos hunos terem vencido a primeira batalha, A1 considera que todos os soldados representados pelos palitos pretos sobreviveram à batalha. Mas, apesar de contestar a ideia de A2, A1 digita o número “2” na lacuna, e por um acaso a resposta está correta, com isso A1 começa a perceber que os soldados oponentes se enfrentam um a um:

A1: *Matou os dois caramba.* [refere-se aos hunos]

2º Dilema:

Na próxima batalha, dispõem 5 palitos vermelhos e 1 palito preto sobre o tapete, nesse momento A2 lê em voz alta:

A2: “*Qual foi o exército vitorioso?*”

A2: *Chineses.*

A2: “*Quantos soldados sobreviveram?*”

A2: *Um, um huno caramba.*

O pensamento de A2 ainda está ligado à batalha anterior.

A2: *Vai, responder.* [pede para A1 clicar em responder]

A1: *Dois.*

A1: *Um, dois.*

A1: *Viu!* [erram a resposta]

A2: *Ah! Não é deles, eu acho.*

Ao perceber o equívoco, os juízos de A2 começam a se desprender da batalha precedente.

Com o mesmo raciocínio da batalha anterior, na qual considera que todos os soldados do exército vitorioso sobreviveram, A1 conta o número de palitos vermelhos que estão sobre o tapete:

A1: *Um, dois, três, quatro, cinco.*

A2: *Coloca 5 vai.* [concorda]

E, novamente erram a resposta.

A1: *Oh! Um deve ter matado o outro..., quatro!* [dedução]

A partir dos resultados obtidos até o momento, A1 solidifica seus primeiros juízos numa dedução e passa a enxergar a Batalha em sua totalidade.

A1: *Viu.* [acertam]

Alçado na dedução de A1, A2 compreende este argumento e confirma-o através da visualização dos palitos:

A2: *É mesmo! Olha, porque é isso aqui oh.*

3º Dilema:

Ainda na primeira sessão, reiniciam o OA e pela segunda vez entram na China – Dinastia Han com o intuito de concluir o “Baile de Máscaras”. Assim, iniciam uma nova Batalha com 4 hunos (palitos pretos) contra 1 chinês (palito vermelho), quando A2 lê a pergunta:

A2: *“Quantos soldados sobreviveram?”*

A2: *Coloca quatro.* [considera todos os hunos]

A1: *Se não for quatro é três, quer ver?* [utiliza-se de sua dedução]

A2: *A tá!* (risos).

4º Dilema:

Na batalha a seguir, sobre o tapete, estavam dispostos 5 palitos vermelhos e 3 palitos pretos:

A1: *Quantos sobreviveram?*

A1: *Três.*

No primeiro impulso, A1 olha somente para os palitos pretos, separando-os dos seus contrários.

A2: *Cinco.*

Novamente, A2 se atém apenas ao número de soldados/palitos vitoriosos, ou seja, os palitos vermelhos e desconsidera os demais. Mas, a partir de sua fala, A1 começa a perceber os soldados oponentes (palitos vermelhos):

A1: *Oh, um, dois, três, quatro, cinco.*

Entusiasmado, A1 expõe mais uma dedução:

A1: *Oh espera, se eles venceram, oh ta bom, vamos tentar. Oh, mas se eles venceram é porque esses três mataram esses,* ***sobrou*** *um oh! Dois, quer dizer.* [grifo nosso]

Nas primeiras tentativas de responder a questão dada no OA, A2 abstrai apenas o foco da pergunta. No entanto, para utilizar os critérios pré-lógicos de equivalência e de oposição é necessário olhar o todo e não somente a parte.

O dilema começa a ser resolvido quando A1 amplia seu foco e enxerga o sistema em sua totalidade, compreende que na “Batalha Chinesa” os soldados/palitos possuem o mesmo peso, a mesma medida, a mesma força, diferem-se apenas em relação à nação que defendem, destruindo-se mutuamente e, portanto, os soldados sobreviventes são, assim como expressa A1, o que “sobrou”. Nesse contexto, A1 estabelece os princípios de oposição e de equivalência.

De acordo com Lizcano (1993), tais princípios são a base da primeira e mais desenvolvida forma de negatividade e surgem num espaço bem distinto ao do grupo.

> Fuertemente arraigados en el imaginario simbólico chino, unos criterios pre-lógicos y pre-conceptuales ‘de oposición’ y ‘de equivalencia’ parecen cumplir aqui el papel de organización de la experiencia que en Grecia desempeñan los princípios ‘de no-contradicción’, ‘de identidad’ y ‘de abstracción’. [...] (LIZCANO, 1993, p. 19-20)[67]

É esse um dos pontos importantes encontrado nessa problemática. A dinâmica do uso da “Batalha Chinesa” produziu situações nas quais os alunos precisaram se desprender dos princípios “de não-contradição”, “de identidade” e “de abstração” para proceder segundo os critérios “de oposição” e “de equivalência”.

Além disso, o processo, ou seja, o modo de dispor os palitos sobre o tapete, esteve no controle do utilizador, o que permitiu a interatividade, a criação e execução de uma nova percepção dos contrários.

[67] Fortemente arraigados no imaginário simbólico chinês, os critérios pré-lógicos e pré-conceituais ‘de oposição’ e ‘de equivalência’ parecem cumprir aqui o papel de organização da experiência que na Grécia desempenham os princípios ‘de não-contradição’, ‘de identidade’ e ‘de abstração’. [...] (LIZCANO, 1993, p. 19-20)

- **"Baile de Máscaras"**

Na tela de apresentação do "Baile de Máscaras" na fala da personagem "Lui Bang" são dadas as informações necessárias para o utilizador desempenhar-se nessa problemática. Porém, somente ao final do texto, aparecem as orientações sobre o gênero (homem/mulher) que cada cor (vermelho/preta) representa. Como efeito, assim como a maioria dos grupos, os alunos do grupo fixo não ouviram toda a narração de "Lui Bang", o que lhes causou dificuldades já na primeira questão.

1º Dilema:

O primeiro contato aconteceu na primeira sessão, mas foi interrompido com o término da aula. Assim, na segunda sessão, após tentar diversas respostas, sem sucesso A2 decide chamar a pesquisadora:

A2: *Professora vem cá. Esse aí nós não entendemos. Esse casal é como? É um preto e um vermelho?*

De imediato, A2 compreende a necessidade de dispor os palitos de cores opostas em pares, afastando-se da visão isolada que apresentou na "Batalha Chinesa".

A2: "*Em seguida chegam mais 3 homens desacompanhados ao baile*". [faz a leitura enquanto A1 arrasta 3 palitos pretos para o tapete].

Ao perceber o equívoco a pesquisadora pergunta:

P: *Quais são os homens?*

A2: *Preto.*

P: *Tem certeza? Vocês leram o começo?*

A1: *Não deu professora.*

Sem as informações iniciais sobre a representação das cores vermelho e preta, de um modo geral, os alunos procederam com a ideia preliminar de que os homens fossem representados pela cor preta e as mulheres pela cor vermelha.

O pensamento dos alunos se manteve fiel as suas tradições ocidentais, na qual a cor vermelha, assim como a rosa, costuma ser utilizada para simbolizar algo feminino enquanto que as cores preta ou azul para simbolizar algo masculino. Desse modo, confundiram-se para fazer a associação homem – palito vermelho e mulher – palito preto, elementos originados em um outro contexto cultural.

Para o pensamento chinês as cores possuem um significado mais amplo, o preto representa a negatividade, e como na China Antiga, dentre outras impossibilidades, as mulheres eram impedidas de servir o exército, as quais só podiam ser representadas pela cor preta. Sob este mesmo aspecto, os homens eram representados pela cor vermelha que significa crescimento, vitória, isto é, positividade.

2º Dilema:

Para prosseguir, o grupo reinicia o OA, ouve toda a narração inicial, manipula corretamente os palitos, mas diante da primeira questão, digita "10" (a resposta correta seria "10 homens"), isto é, não se preocupa com a qualidade da quantidade. E sem compreender o que está acontecendo, mais uma vez o programa é reiniciado, momento em que A2 relembra:

A2: *Vermelho é homens e preto mulheres.* [alerta o grupo]

Devido à ausência de um histórico, no qual os alunos pudessem rever os enunciados anteriores e reformular seus procedimentos, sem precisarem reiniciar o programa e passar pelas telas "Pólo Ártico", "Planeta Terra", "Máquina do Tempo", "Batalha Chinesa" para finalmente recomeçar o "Baile de Máscaras", a pesquisadora faz a seguinte recomendação:

P: *Vocês tem que ir anotando o que acontece porque se não vocês se perdem lá no meio.*

A2: *Ah, nós vamos ter que ir somando.*

Em algum momento da movimentação de entrada/saída de homens/mulheres ao baile, A2 percebe a presença da operação de adição. Porém, no decorrer da atividade, ele não a leva a efeito e recorre à manipulação analítica dos palitos.

A1: *Mulheres cor preta, homens cor vermelha*.

A1 relembra a informação que lhes faltou no primeiro dilema e concentra-se no problema:

A1: *Começou com a entrada de 5 casais.*

A1: *Tem que fazer certinho*. [refere-se à disposição dos palitos sobre o tapete, já percebeu que um palito errado pode prejudicar o acompanhamento do problema]

Para facilitar a contagem, A1 coloca em prática a dedução construída na "Batalha Chinesa": une os 5 pares de palitos opostos sobre o tapete, enquanto A2 acompanha rigorosamente o processo. Segundo as instruções do problema, A1 arrasta mais 6 palitos vermelhos para o tapete, mas posiciona-os com certa distância dos pares, formando dois conjuntos, um de pares de opostos e outro dos palitos que ficaram sem par. Em seguida, retira 2 palitos pretos e traz os 2 palitos restantes para o conjunto de palitos vermelhos.

Diante desse último procedimento, A2 manifesta sua dúvida:

A2: *Por que você tirou os dois casais daí?*

A1 não o responde e prossegue colocando 11 palitos pretos, retirando 7 palitos vermelhos, porém, desta vez, deixa os palitos desorganizados sobre o tapete e lê a próxima pergunta do OA:

A1: "*Quantas pessoas ficaram sem par e elas são homens ou mulheres?*"

Com base no raciocínio de A1, A2 procura apreender essa forma de negatividade provinda de um imaginário diverso ao seu e arrisca:

A2: *11 mulheres e 1 homem.*

Então A1 o corrige com a resposta correta:

A1: *10, 11.*

Para o pensamento de A2 apreender o sistema em sua totalidade, formando todos os pares de opostos de modo a contar os que sobraram, foi necessário manipulá-los e identificá-los através da visualização. Portanto, seus juízos e deduções estiveram ligados à experiência sensório-concreta.

Por meio dos dados obtidos com o "Baile de Máscaras" foi possível identificar que a mudança de referencial causou contradições internas e outras inadequações que por si só alertaram os alunos e levou-os a ver as cores vermelho e preta, bem como a maneira de dispor esses contrários "sob uma luz radicalmente nova" (BOHM; PEAT, 1989, p. 36)

Portanto, as situações-problema abordadas na "China – Dinastia Han" revelaram um novo contexto com mudanças fundamentais no modo, comum a um pensamento ocidental, de conceber a estrutura subjacente do conceito números inteiros.

4.3.5 Itália

O enredo desse ambiente consiste no controle de mercadorias do armazém de "Brancaleone" cujas atividades são divididas em três situações-problema que, para facilitar a análise, são nomeadas: "Sacas de Arroz", "Marcação dos toneis" e "Transferência do vinho".

A partir da descrição dos dilemas que refletem as características da dinâmica de uso de cada uma dessas problemáticas, as quais são expostas a seguir:

- **"Sacas de Arroz"**

A introdução dessa problemática apresenta as limitações encontradas por Brancaleone ao utilizar um diário com registros verbais para administrar suas atividades comerciais.

No entanto, a introdução construída a partir de textos e imagens não despertou o interesse dos alunos, um exemplo dessa falta de envolvimento, pode ser atribuído ao fato de não terem lido as anotações do "Diário de Brancaleone" e às poucas falas obtidas nas gravações. Nesse caso, a ausência de possibilidades de escolha e interatividade propiciadas nesse enredo inicial resultou em uma participação superficial por parte dos alunos.

Os juízos começaram a ser despertados através do contato dos grupos com a situação-problema designada por "Sacas de arroz".

A primeira ideia dessa atividade verifica-se em perceber as ações acrescentar (comprar) e retirar (vender) do comércio de arroz e operacionalizá-las. Nesse sentido, os alunos demonstraram-se aptos e não manifestaram dúvidas.

Tal desempenho pode ser justificado pelo fato do cenário e processo de desenvolvimento do problema situar-se nas tradições de origem grega-europeia dos alunos. Segundo Crosby (1999) o novo contexto social da Europa surgido no fim da Idade Média e Renascimento influenciou a atividade matemática, e particularmente, a percepção das grandezas contrárias. Além disso, Lizcano (1993/2006) considera que esse modelo econômico impulsionou o desenvolvimento das primeiras formas de negatividade ocidental.

Os dilemas foram instaurados quando os alunos precisaram registrar o resultado desses movimentos, utilizando-se para isso o pensamento simbólico.

Na terceira sessão da prática, foram observados em três, dos quatro grupos que entraram na Itália, a mesma forma de registro nas plaquetas, ao invés de digitar "-15", quando 15 quilos eram vendidos, eles digitaram "15-", por exemplo.

Essa forma de juízo também aparece na fala de A2:

A2: *Por que 12 + ? Aqui você já tinha colocado mais.*

Mesmo com a mensagem de erro, A2 não consegue compreender como e em que ordem a sentença matemática deve ser digitada nas duas plaquetas. Nesse dilema, o grupo descarta a possibilidade de digitar "+12" e digita "12+". Uma vez que desconhecem a primeira forma de expressão, optam pela segunda e digitam àquela que lhes é familiar.

Bohm e Peat (1989) explicam que há uma:

> [...] grande tendência da mente a manter-se fiel ao que se lhe afigura familiar, defendendo-se de tudo o que prometa perturbar seriamente os seus próprios balanços e equilíbrios. A menos que as compensações percebidas sejam muito grandes, a mente não explorará de boa vontade as infra-estruturas inconscientes das ideias, preferindo, ao invés, continuar por sendas mais familiares. (BOHM; PEAT, 1989, p. 36)

É importante ressaltar que o uso dos sinais (+, -), assim como para os comerciantes europeus no renascimento, não foi concebido como os sinais algébricos (positivo, negativo) da estrutura numérica dos inteiros, mas sim para controlar a entrada e saída de arroz das sacas, ou seja, manteve-se atrelado as operações de adição e subtração.

Contudo, a dinâmica de uso da "Sacas de Arroz" mobilizou uma forma até o momento desconhecida pela 6ª Y, de registrar o sentido do movimento quantitativo, forma esta que passa a ser exigida nas próximas problemáticas da "Itália", bem como em outras problemáticas, como a do "Laboratório Atomístico".

- **"Marcação dos toneis"**

1º Dilema:

Ao final da terceira sessão, o grupo fixo passa para a "Marcação dos toneis", nessa ocasião, A2 expressa sua primeira impressão:

A2: *Esse é difícil.*

A plaqueta do primeiro tonel marca "-4", corretamente clicam cinco vezes no botão "menos" e deixam o vinho 4 litros abaixo do traço pontilhado (ponto "0"). Porém, a plaqueta do segundo tonel marca "0", caso que confunde A2:

A2: *Agora aqui é 0, coloca até o fim, até no fim! É 0 aqui oh!* [aponta para plaqueta]

Para A2 o numeral "0", marcado na plaqueta, representa o vazio, dessa forma entende que A1 deve clicar no botão "menos" até liquidar toda a quantidade de vinho do tonel. Mas A1 aponta para o número "0" indicado no traço pontilhado que determina o nível do tonel e contesta:

A1: *Zero!!!*

A2: Ah tá! Tá certo, tá certo. [a partir da visualização, A2 concorda com A1]

Nessa circunstância, os alunos defrontam-se com um novo "0", um zero referencial.

2º Dilema:

Na quarta sessão o grupo fixo seleciona a "Itália" e ao realizar pela segunda vez a atividade "Marcação dos Toneis", A2 apresenta a mesma dificuldade com a marcação "0":

A2: *Coloca lá no 0, ali, ali!* [aponta para a base do tonel]

A1: *Não é no 0, senão seria -5.*

Ao verbalizar seu pensamento, A1 entra em contradição, ainda enxerga o "0" como um símbolo utilizado apenas para indicar "o nada" e coloca-o desse modo em sua fala, porém, automaticamente relaciona-o com o "0" que indica o nível, e não com o fundo do tonel, o qual é associado com o número "-5".

A partir dos dilemas construídos pelo grupo fixo foi possível verificar que A1 procurou colocar o vinho na marca correspondente à indicada na plaqueta e a partir desse foco, rapidamente concluiu a atividade. Enquanto que A2 voltou-se para a quantidade de vinho no tonel, o que desequilibrou seus juízos pré-existentes sobre o número zero.

Com isso, pode-se entender que o pensamento dos alunos não se separou da atividade nem tampouco do conhecimento empírico, mas constituiu os primeiros juízos em relação a um "zero vivo" diferente do "nada" ou do "vazio", e em relação aos sinais (+/-) indicando excesso/falta, um estado e não uma ação.

- **"Transferência do vinho"**

A "Transferência do vinho" é a última situação-problema a ser realizada na "Itália", a qual foi iniciada no decorrer da quarta sessão. Nessa ocasião, os alunos do grupo fixo depararam-se com o problema de conceber o número como grandeza, desse modo, para desempenhar-se nessa atividade, foi preciso romper a relação direta entre a Matemática e o mundo natural, entre o zero e o fundo do tonel (o vazio).

Já na primeira tentativa do grupo de representar através de um número inteiro como ficou o segundo tonel, criou-se um dilema em torno do "0".

1º Dilema:

A2: *Esse aqui é +3 e esse é -3.* [refere-se às indicações das plaquetas do 1º e 2º toneis respectivamente]

Ao transferir 3 litros em excesso do 1º tonel para o 2º tonel, cuja falta verifica-se em 3 litros de vinho, A1 procede corretamente, dispondo a quantidade de vinho na marca "0", ou seja, no nível pré-estabelecido por "Brancaleone". Porém, ao invés de digitar o número “0” na lacuna, A1 digita “+3”, isto é, o volume de vinho transferido para o 2º tonel. Nesse momento, A2 tenta localizar o erro:

A2: *Não pode deixar no 0*!

Para estes alunos o “0” significa vazio. Nessa perspectiva, como que a resposta correta será o “0” se estão vendo 5 litros de vinho dentro do tonel?

Um dos juízos estabelecidos pelos alunos para decidir sobre qual o número a ser digitado na lacuna, não só nessa atividade, mas também em outras, baseou-se na percepção sensível, isto é, na visualização do efeito da atividade, de, por exemplo, como ficara o tonel após a transferência do vinho.

Então, como não conseguiu compreender o “0” como referencial adotado por “Brancaleone”, A1 convence-se do argumento de A2 e parte para a tentativa e erro. E, somente a partir da mediação da pesquisadora, a atividade pode ser desenvolvida.

Nessa atividade, não só o grupo fixo, mas quase todos os grupos da 6ª Y, não conseguiram sozinhos, representar através de um número inteiro a quantidade de vinho em excesso ou falta do 2º tonel.

Novamente, não se vê outra forma de justificar os dilemas construídos pelos alunos ao se aproximar da forma de negatividade estabelecida nas situações-problema apresentadas, sem considerar as dificuldades herdadas do pensamento aristotélico-euclídeo para se pensar “o zero” ou “o vazio”, como aponta Lizcano (1993).

> En particular, el vacío descansará – pese a su pretensión de carecer do otro fundamento que el estrictamente lógico – en dos pre-juicios que bloquean su posible manipulación como negatividad formal: por un lado, un cierto modo de soterrada extensionalidad de origen sensual, por otro una tajante estanqueidad respecto del ser. El primero parece poder asimilarse a las razones por las que ‘el zero’ está ausente de la matemática griega; el segundo, a las que darían cuenta de la imposibilidad de ‘números negativos’ para esta forma de pensar. (LIZCANO, 1993, p. 173)[68]

Isto quer dizer que Lizcano (1993) considera que o potencial do zero encontra-se no campo da negatividade e atribui os limites de concebê-lo somente no âmbito da positividade à necessidade lógica de comprovar por meio da percepção sensível a

[68] Em particular, o vazio descansará – pese a sua pretensão de carecer de outro fundamento que o estritamente lógico – em dois juízos prévios que bloqueiam sua possível manipulação como negatividade formal: por um lado, certo modo de soterrada extensão de origem sensual, por outro uma cortante estanquidade a respeito do ser. O primeiro parece poder se assimilar as razões pelas quais ‘o zero’ está ausente da matemática grega; o segundo, as que dariam conta da impossibilidade dos ‘números negativos’ para esta forma de pensar. (LIZCANO, 1993, p. 173, tradução nossa).

existência de unidades representáveis no mundo físico. Essa necessidade está implícita na concepção do número, logo, "[...] cualquiera que sea la modalidad de número que desde ella se piense, este no pueda ser sino 'número positivo' [...]" (LIZCANO, 1993, p. 167) [69]. O que leva a episteme grega

> [...] a excluir de su ámbito cualquier acercamiento racional a lo que para otras epistemes es 'el cero' o 'el vacío' como objeto teórico discernible y, en consecuencia, susceptible de ser sometido a operaciones formales. (LIZCANO, 1993, p. 167)[70]

Nessa perspectiva, a dificuldade dos alunos em compreender o "0" como número abstrato e a falta de vinho em relação a esse "0" (nível) como um número negativo, deveu-se ao pensamento sensório-concreto acerca do número, advinda de uma Matemática "empírica-ilustrativa" (LIZCANO, 1993) característica do modo de pensar de tradição clássica.

A partir dessas análises, pode-se observar que tais problemáticas, baseadas em atividades contábeis, contradisseram os juízos prévios dos alunos quanto à relação imediata entre a realidade física e a Matemática e, de modo a não criar um espaço vazio entre as quais, tais situações-problema permitiram a manipulação prática de entidades assemelháveis ao zero e aos números inteiros (positivos e negativos).

4.3.6 Grécia

Esse ambiente divide-se em duas situações de aprendizagem, as quais são denominadas por "*movie-clip* da música 'Como uma onda'" e "Armazenamento de água".

- ***"Movie-clip* da música 'Como uma onda''**

Em todas as telas, o *movie-clip* apresenta a opção "prosseguir", cuja função é de interromper a sequência da música e seguir diretamente para o "Armazenamento de água".

No entanto, ao entrarem pela primeira vez nesse cenário, os alunos não acionaram esse botão, pelo contrário, observaram atentamente as imagens e descontraídos

[69] "[...] qualquer que seja a modalidade do número uma vez que nele se pense, este não pode ser senão 'número positivo'". (LIZCANO, 1993, p. 167, tradução nossa)

[70] [...] para excluir de seu âmbito qualquer acercamento racional ao que para outras epistemes é 'o zero' ou 'o vazio' como objeto teórico discernível e, em consequência, suscetível de ser submetido a operações formais. (LIZCANO, 1993, p. 167, tradução nossa)

cantaram em tom baixo acompanhando a letra que seguia na tela, demonstrando sentimentos de prazer e satisfação. Nesse sentido, os indícios apresentados revelaram o potencial atrativo do *movie-clip*.

Porém, somente os efeitos causados pelo *movie-clip* não foram suficientes para a criação de uma ponte entre os conceitos de movimento e contradição. Para tanto, considera-se imprescindível a ação do mediador, no sentido de aproveitar o potencial atrativo desse recurso, de modo a suscitar uma reflexão em torno da letra da música que permita a construção de relações entre música-imagem-conceito.

Após uma reflexão sobre os conceitos de movimento e contradição, como fundamentos das relações universais e ideias centrais dos números inteiros. A partir de um editor de vídeos e imagens, cuja linguagem seja acessível aos alunos, sugere-se ainda, a criação, por parte dos próprios alunos, de um novo movie-clip para música "Como uma onda".

- **"Armazenamento de água"**

Essa situação-problema consiste no controle da quantidade de água que passa por um tanque, cuja entrada, depende da abertura de um canal que desvia água de um rio despejando 1000 litros de água por hora (l/h) no mesmo, e a saída, depende da abertura de um ralo por onde escoam 500 l/h.

Lembrando que os valores numéricos são sorteados pelo programa de modo que o resultado final seja sempre maior que zero, a sequencia do "Armazenamento de água" é enunciada como no exemplo:

- No 1º dia de funcionamento o ralo foi fechado e o canal ficará aberto durante 6 horas (vide Figura 34). Ao clicar em prosseguir o aluno segue para tela ilustrada na Figura 35, na qual deve preencher a lacuna respondendo a questão: "Há quantos litros de água no tanque, no momento?"

Figura 34 – Enunciado do 1º dia de funcionamento do tanque.

Figura 35 - Questão referente ao enunciado da tela antecedente.

- No 2º dia o canal foi fechado e o ralo ficará aberto durante 8 horas. Na tela seguinte: “Há quantos litros de água no tanque, no momento?”.
- No 3º dia, o canal e o ralo foram abertos simultaneamente e ficarão assim durante 3 horas.
- No 4º dia, o canal e o ralo foram abertos ao mesmo tempo, sendo que o canal permanece assim por 3 horas e o ralo por 2 horas.

De um modo geral, nessa situação-problema as dificuldades da sala, aumentaram a cada enunciado, observou-se que os alunos conseguiram fazer o controle da quantidade de água indicada no “1º dia”, muitos deles fizeram os cálculos mentalmente.

No “2º dia”, a ideia dos contrários “canal-ralo” causou dúvidas, como a manifestada por A4 (grupo volante) em:

A4: *Então é 1000 litros mais 500?*

Aqui, a expressão *mais* atenta para o fato de que A4 equivocou-se ao lidar com o movimento dos opostos “entrada-saída” por estar acostumado a pensar em “mão-única” (LIMA; MOISÉS, 1998). “Com os números naturais aprendemos a contar os movimentos quantitativos feitos com unidades. E também, sem perceber, a contar em *mão única*. Aprendemos a considerar todos os movimentos num único sentido [...]” (LIMA; MOISÉS, p. 24, 1998, grifos do autor).

Também se confundiram ao responder a questão, aqueles que esqueceram a quantidade de água que havia ficado no tanque, mas com novas leituras do enunciado compreenderam que se tratava de uma subtração. De acordo com a linguagem por eles utilizada “conta de menos”.

A interpretação do enunciado do “3º dia” tornou-se um grande obstáculo para finalização dessa atividade, a informação: “o canal e o ralo foram abertos simultaneamente”, manifestou a principal dúvida entre os alunos. A concretude desse dado se verifica no fato de que ao tentar resolver essa situação-problema, exatamente a partir do “3º dia” os grupos solicitavam ajuda da pesquisadora ou professora.

Para conseguirem resolver o problema, mediante orientações da pesquisadora, o fenômeno simultâneo precisou ser pensado separadamente, primeiro no sentido do canal, depois no sentido do ralo e por último na quantidade de água existente no tanque.

Pensar na água entrando e saindo ao mesmo tempo, ou seja, pensar em “mão-dupla” (LIMA; MOISÉS, 1998), constituiu-se um juízo alheio ao modo de pensar dos estudantes, visto que o substrato do princípio da simultaneidade é inerente à racionalidade chinesa. Essa dificuldade ficou evidenciada quando os alunos tentaram fazer os cálculos para descobrir a quantidade de água no tanque após o “4º dia” e erraram sucessivamente.

Além disso, cada vez que erravam ou esqueciam a quantidade de água existente no tanque, precisavam “reiniciar todo o OA” e passar por várias telas (“Pólo Ártico”, “Planeta Terra”, “Máquina do Tempo” e a “A construção do Paternon”) até chegar no “Armazenamento de água” e recomeçar os cálculos pelo “1º dia” de funcionamento do tanque.

Esses embaraços podem ser observados no dilema criado pelo grupo volante na quarta sessão da prática, quando ao tentar, pela quinta vez, acompanhar a variação da quantidade de água no tanque A5 pede ajuda:

A5: *Professora vem aqui fazendo o favor!*

P: *Lembra que tem que ir marcando*. [nas solicitações anteriores, a pesquisadora não conseguia ajudar o grupo a prosseguir, pela falta do último valor, ou seja, a quantidade de água existente no tanque, naquele momento]

A5: *Professora eu marquei. O tanque tá com 10000 litros, aí no 2º dia o ralo é o que sai, aí ficou aberto por 9 horas. E agora?* [no 1º dia o canal havia ficado aberto por 10 horas]

A5 consegue compreender que precisa fazer uma multiplicação para descobrir a quantidade total de água que entrou do tanque, porém, embaraça-se ao tentar descobrir quantos litros de água saíram do tanque após um determinado período de tempo. Isso demonstra que A5 percebe a regularidade do movimento de entrada da água. Para Caraça (1984, p. 119, grifos do autor) “a existência de regularidades é extremamente importante porque permite a *repetição* e a *previsão*”.

Mas A5 apresenta dificuldade em conceber a contradição dada por: a água está saindo pelo ralo, isto significa que está diminuindo (-) a quantidade de água no tanque, em contrapartida, a quantidade que sai está aumentando (+) regularmente a cada hora.

Segundo Caraça (1984, p. 110), “[...] o poder de traduzir-se ou não em números uma variação de quantidade é uma questão que depende, acima de tudo, do grau de conhecimento momentâneo dos homens [...]”.

Até o momento da utilização do “O Universo e seus Contrários”, para medir determinadas quantidades, A5 dispunha de uma estrutura conceitual comparativa do tipo estático, àquelas em que os objetos a comparar são independentes uns dos outros, cuja qualidade da variação é sempre a mesma, em um único sentido.

No entanto, de acordo com Caraça (1984, p. 116-117, grifos do autor), a solução desse dilema deve tomar a “a *quantidade*” como “*um atributo da qualidade* e, como tal, *só em relação a ela pode se considerada*”.

Nessa circunstância, vários grupos solicitavam a ajuda da pesquisadora, logo, esta respondeu rapidamente ao grupo volante:

P: *9 vezes o 500. Porque saem 500 litros a cada hora.*

Em silêncio, respondem as questões enunciadas no 2º e 3º dia de funcionamento do tanque. Mas, ao lerem o enunciado do 4º dia, param e ficam conversando paralelamente por aproximadamente uns cinco minutos. Até que A5 relê o enunciado:

A5: *"O canal vai ficar aberto por 5 horas", vai entrar 5000 litros. "E o ralo por 4 horas". Vai faz as contas, fica, espera aí, vai sair 2500, não espera aí. Entra 2,3,4...,13. Hum, 13 sai. Ai que difícil esse negócio!* [tenta fazer os cálculos mentalmente e não consegue]

A5: *O canal ficou aberto por 5 horas, deu 5000 litros e o ralo por 4. Não é 2050?*

A6: *Não é 4 horas que ficou aberto?*

Em um rascunho conseguem efetuar os cálculos corretamente e encerram atividade.

A partir da descrição e análise dos dados, segundo as transcrições das falas dos alunos e a observação da pesquisadora, identificou-se dificuldades de natureza diversa:

- Interface: Os enunciados do problema não estavam disponíveis para os alunos, de modo que quando erravam ou esqueciam algum dado, precisavam reiniciar todo o OA.

Convém dizer que esse problema de ordem técnica, também detectado no "Baile de Máscaras" e "Temperatura no Ártico", já foi corrigido com a implementação de um botão chamado de "histórico" que apresenta os enunciados e as respostas precedentes até o momento da última ação, podendo ser acionado a qualquer momento pelo aluno, funcionando como um meio de orientação para o usuário. Costa (1999) entende que:

> Os meios de orientação têm como principal função diminuir a possibilidade do utilizador se perder ou desorientar, fornecendo-lhe não só feedback sobre as acções que vai realizando, mas também a informação que lhe proporcione saber com exactidão, em que parte da aplicação se encontra a cada momento. [...] (COSTA, 1999)

Entende-se que, a partir dos dados expostos no histórico, o usuário pode localizar e verificar seu erro, sem precisar reiniciar todo programa.

- Conhecimento tácito[71] dos alunos: Forma de pensamento ocidental, de herança grega e europeia, cujas formulações abstratas fundam-se no princípio da "não-contradição", o qual estabelece, segundo a concepção parmenidiana, a distinção incontestável entre o ser e o não ser. (LIZCANO, 1993/2006).

Segundo Lizcano (1993, p. 157), o princípio da não-contradição não é uma opção da racionalidade grega, "[...] pues se instala precisamente como pre-juicio o juicio previo que permite a ese pensamiento emitir juicios."[72] Nessa perspectiva, não é que a contradição voluntariamente deixa de ser pensada, existem fronteiras pré-determinadas pela racionalidade de tradição grega que não permitem pensá-la naturalmente. Nas palavras do autor: "Pero no se funden como efecto de uma singular construcción intelectual sino, justoal contrario, como decantación conceptualizada de creencias firmemente arraigadas en el imaginário cultural."[73] (p. 157)

Dessa forma, o princípio da não-contradição, da não-simultaneidade, obstaculizou os alunos a pensarem o movimento da água do tanque em sentidos opostos, fluindo ao mesmo tempo, como indicado nos enunciados do 3º e 4º dias. Para responder as questões, foi preciso eliminar uma das alternativas e pensar um lado da contradição isoladamente, para depois, tomar-se o outro lado da oposição, invertendo o foco. Assim, somente ao final das operações, os resultados foram reunidos.

Sob a forma de pensamento oriental, advinda do imaginário cultural chinês, essa contradição pode ser interpretada através de um único aspecto, o par dialético yin/yang/dao, pois a partir desse substrato simbólico podem ser formados diferentes modos de oposições numéricas.

No entanto, o breve contato que os alunos tiveram com o yin/yang/dao na China – Dinastia Qin não foi suficiente para envolvê-los nessa concepção, centrada na alternância ou convergência de opostos, de modo a superar os limites do conhecimento tácito de origem grega-europeia que regeu a emissão de juízos dos alunos.

[71] Segundo Bohm e Peat (1989), refere-se às definições e conceitos pré-estabelecidos e rigidamente fixados nos anos anteriores à formação do conhecimento, fortemente influenciados e limitados pelo modo de proceder e pensar de uma cultura.
[72] [...] pois se instala precisamente como pré-juízo ou juízo prévio que permite a esse pensamento emitir juízos. (LIZCANO, 1993, p. 157, tradução nossa).
[73] Mas não se fundem como efeito de uma singular construção intelectual mas, justamente ao contrário, como decantação conceitualizada de crenças firmemente arraigadas no imaginário cultural. (LIZCANO, 1993, p. 157, tradução nossa)

4.3.7 Laboratório Atomístico

Ao conquistarem a senha completa, imediatamente os grupos decidiram por desvendar os experimentos do professor “Pinguim” no Laboratório Atomístico.

De modo geral, a vivência pedagógica das situações problema implicadas nesse ambiente foi iniciada na quarta sessão e concluída somente na sexta sessão. Dessa forma, até conseguirem desempenhar-se em todas as atividades desse ambiente, a maioria dos alunos passou pelo qual por diversas vezes, o que resultou em muitos dilemas, dúvidas e deduções acerca dos aspectos substancias e simbólicos do conceito números inteiros.

Este ambiente é composto por três situações-problema, sendo que a situação-problema (1) concentra-se nas ações de acrescentar/retirar cargas elétricas positivas/negativas do diagrama (composto por 10 unidades positivas e 10 unidades negativas manipuláveis) e digitar o número inteiro que indica a quantidade e qualidade do movimento resultante. A situação problema (2) também se concentra na mesma ação, porém as representações com os sinais “+” indicam as unidades de calor e as representações com os sinais “-”, indicam as unidades de frio. Com isso, as duas primeiras resoluções baseiam-se em procedimentos análogos.

Enquanto que na situação-problema (3) sobre um novo diagrama, composto por 30 unidades positivas e 20 unidades negativas, o aluno precisará manipulá-las, dispondo-as de modo a representar a temperatura registrada no enunciado. Contudo, para isso, conta com o recurso de que a cada clique no diagrama surge um par de contrários.

Devido às características discerníveis dos dados construídos, os dilemas das situações-problema (1) e (2) são reunidos em um único contexto de análise, definido por “Acrescentar/retirar unidades positivas/negativas” e quando se tratar da situação-problema (3), o contexto de análise denomina-se “Temperatura no Ártico”.

- **“Acrescentar/retirar unidades positivas/negativas”**

A partir desse momento, algumas entradas numéricas do OA exigem a utilização dos sinais no número. Nas falas que seguem, é possível verificar que A1 ainda se confunde ao verbalizar um número inteiro, tratando-o da forma que lhe é mais compreensível:

A1: *Coloca 5+.*

Nesta atividade o movimento das unidades contrárias resultava em 5 cargas elétricas positivas. A1 chega a esta dedução, porém, através de um caminho que parte do concreto ao abstrato, sintetiza-a em “5+” (5 positivo) e não “+5”. Enquanto que para A2 tal aspecto simbólico apresenta-se mais definido:

A2: *É +5.*

Ao observar o diagrama (10 unidades positivas e 10 unidades negativas agrupadas separadamente em duas linhas paralelas) A1 traz em sua fala o modo de abstrair as unidades contrárias apreendido na “China – Dinastia Han”:

A1: *Oh! Tem par.*

A operação de “acrescentar” unidades “positivas” não provocou contradições internas aos juízos prévios dos alunos do grupo fixo. Pois para eles, a adição identifica-se com a ação de adicionar uma quantidade à outra, o que implica sempre um aumento.

Em contrapartida, quando a atividade envolvida nessa situação-problema convertera-se em “acrescentar” unidades “negativas”, a mesma concepção elementar da adição como aumento induziu a primeira resposta dos alunos a um número positivo (busca no conjunto dos números naturais).

Ademais, a operação de “retirar” unidades “positivas” e principalmente “negativas” mobilizou um conflito com a evidência imediata dessa operação aritmética. Para tais alunos, a subtração também permanece ligada ao plano da ação e identifica-se com extrair e, portanto, com a diminuição. Fato que originou o seguinte dilema.

1º Dilema:

A1: *Retire 2 cargas elétricas negativas.* [repete o que solicita o enunciado]

Intuitivamente A3, que nessa ocasião manipulava o OA, como na atividade precedente, passa a acrescentar unidades negativas. Mas, atento, A1 o adverte:

A1: *É pra tirar não colocar!*

Envolvido na atividade, A1 tenta prever o resultado:

A1: *-2.* [erram]

A2: *De novo vai.*

A1: *1, 2, 3, 4, 5..., 10.*

A1 quantifica todas as unidades que estavam sobre o diagrama e faz outra leitura do enunciado:

A1: *Retire 2 cargas negativas e digite o número que resulta.*

E, subitamente, apesar de ainda se embaraçar ao expressar um número inteiro, deduz:

A1: ***Um fez par com o outro, sobrou 2 +!***

O princípio de equivalência construído através dos juízos elaborados na China – Dinastia Han, amarraram-se e vieram à tona nessa nova situação, agora com objetos matemáticos mais abstratos (unidades com sinais) ao invés de palitos coloridos.

Esta nova forma de conceber os conjuntos de objetos matemáticos possibilitou-o interpretar a essência do fenômeno, rompendo com sua concepção simplificada de subtração e construindo deduções cada vez mais abstratas e formalizadas acerca da subtração de números inteiros.

Em um momento específico, em que A3 manipula o OA e conta apenas com o auxílio de A2, os quais também manifestam o rompimento com o modo de pensar por abstração e concebem o princípio de oposição. Fato que se evidencia nos argumentos de A2:

A2: *Oh! Esse matou esse A3. Coloca as que ficaram sem par.*

Lizcano (2006, p. 6) aponta que, na China, desse critério básico de pensar por "oposição" e "equivalência" germinam em

> [...] una pluralidad de negatividades formales (no todas estrictamente matemáticas) enraizadas en el complejo simbólico fundamental *yin/yang/dao*, que dispone a su razón a operar en términos de oposiciones que pivotan sobre un `hueco' o `centro': el dao. Esta matemática es deudora de una concepción cualitativa y simbólica del espacio de representación, que distingue lugares (lugares que así significan) y se hace solidario con cierta concepción del tiempo; de ciertos procesos de racionalización asociados a la singularidad de su lengua (evocación frente a definición, simetría e inversión frente a linealidad...); y de un modo de pensar que descansa en los criterios pre-lógicos `de oposición' y `de equivalencia'. Conceptos como los de `cero' o `magnitudes opuestas (positivas y negativas)', y sus modos de operar, emergen así en China de una modo `natural', es decir, no son sino formalizaciones de pre-conceptos ya implícitos en su imaginario social. (LIZCANO, 2006, p. 6). [74]

[74] [...] uma pluralidade de negatividades formais (nem todas estritamente matemáticas) enraizadas em um complexo simbólico fundamental *yin/yang/dao*, que dispõe em sua razão a operar em termos de oposições que pivotam sobre um "oco" ou "centro", o dao. Esta matemática se deve a uma concepção qualitativa e simbólica do espaço de representação, que distingue lugares (lugares que assim significam) e se faz solidário com certa concepção do tempo; de certos processos de racionalização associados à singularidade de sua língua (evocação frente a definição, simetria e inversão frente a linearidade...); e de um modo de pensar que descansa nos critérios pré-lógicos "de oposição" e "de equivalência". Conceitos como os de "zero" ou "magnitudes opostas (positivas e negativas)", e seus modos de operar, emergem, na China, de um modo "natural", e assim, não são senão formalizações de pré-conceitos já implícitos em seu imaginário social. (LIZCANO, 2006, p. 6, tradução nossa).

2º Dilema:

Nesse momento, a atividade consistia em duas operações: retirar 5 unidades positivas e 6 negativas. Com isso, diante do resultado da distribuição das unidades contrárias, A2 seguindo os mesmos critérios de equivalência expostos por A1 ao resolver os problemas antecedentes, procurou focar-se no número de pares contrários em equilíbrio:

A2: *4.*

Com isso, A1 formaliza o raciocínio:

A1: *Ficou 4 igual aqui..., +1.*

De modo mais sistematizado, A1 abstrai a unidade positiva dos demais pares equivalentes.

3º Dilema:

Ao acompanhar a ação do enunciado: retirar 5 unidades positivas, o primeiro olhar de A1 e A2 enxerga apenas as 5 unidades positivas restantes:

A1: *Vai ficar +.*

A2: *+5.*

O pensar por abstração e o operar por subtração constrói uma fronteira na percepção dos alunos, obstaculizando a elaboração da operação aritmética em sua totalidade. Todavia, ao perceber o erro A1 retoma o princípio de equivalência e exclama:

A1: *Não! -5.*

Este conflito demonstra as limitações que uma concepção simplificada da operação de subtração impõe à aritmética prática e ao pensamento de tradição grega, onde "[...] no puede sustraerse de donde 'no hay', como tampoco puede sustraerse *más* de lo que 'ya hay'. Y la herencia de este paradigma encaminará la indagación occidental sobre la negatividad en términos de possibilidad/impossibilidad de *sustracción*."[75] (LIZCANO, 1993, p. 194, grifos do autor)

4º Dilema:

A operação de retirar unidades negativas provocou o maior número de respostas errôneas. Mesmo após já terem resolvido a situação-problema do enunciado: "Retire 2 unidades negativas e digite o número que resulta", supramencionado no 1º Dilema, posteriormente, quando se deparam com este mesmo enunciado, tanto A1 quanto A2 manifestam falsos juízos:

[75] "[...] não se pode subtrair de onde não há, como tampouco se pode subtrair *mais* do que já há. E a herança deste paradigma encaminhará a indagação ocidental sobre a negatividade em termos de possibilidade/impossibilidade de *subtração*" (LIZCANO, 1993, p. 194, grifos do autor, tradução nossa).

A2: *-2.*

A1: *Não é!* [percebe o equívoco]

Porém, cai no mesmo erro de A2:

A1: *2 -, -2.*

A2: *Não, espera aí..., +2 eu acho.*

Não é de surpreender que a conjunção de duas situações relativas: quantitativa – subtração e qualitativa – unidades negativas, carregadas da ideia materialista da diminuição, provoque tantos tropeços.

A partir desse movimento dialético do ir e vir do pensamento, os alunos do grupo fixo foram construindo definições abstratas, não estritamente corretas, até que em certo momento, com o intuito de sintetizar o caminho de conclusão da atividade, natural do processo de humanização, procuram construir e praticar algumas regras.

5º Dilema:

Acrescentam 2 unidades negativas, então A3 manifesta as respostas que considera possíveis:

A3: *+2 ou -2, eu acho.* [mas digita +2]

O pensamento de A3 mantém-se atrelado à ação de adicionar. Contudo, ao visualizar a igualdade "+(-2) = -2", exposta na mensagem de erro, A2 reflete sobre a qual:

A2: *Ah é +, -.*

A2: *-2.*

A1: *-2.*

Intuitivamente, sem o rigor matemático, A1 transcende o plano da ação e descobre uma nova possibilidade (inacabada na forma de juízo) dentro da aritmética:

A1: *Quando é negativo tem que colocar +. Quando é positivo tem que colocar -.*

Dessa forma, os alunos ampliaram as possibilidades ligadas às operações aritméticas com os naturais e generalizaram tais processos para os números inteiros, reduzindo a concepção concentrada na experiência imediata.

A partir de um extrato das falas do grupo volante, vê-se relevante expor como a forma de negatividade descoberta por A8 (em destaque no 6º Dilema), levou o grupo a se mover em termos de oposições, análogas e congruentes com os números inteiros.

6º Dilema:

A8: *É para acrescentar 4 cargas negativas.*

A7: *1,2,3 e 4.*

Faz a contagem do que ficou sobre o diagrama:

A7: *1, 2... 10.* [Não olha para os pares de contrários, conta as 10 negativas depois as 10 positivas]

A8: ***Não! Aqui vai zerar oh! Zerou com essas daqui. Daí você colocou mais 4, então****.*

A7: *+4.* [juízo ligado à ação de adicionar]

A8: *Não -4.*

A partir dessa forma de negatividade, A8 passou a responder diretamente até aos enunciados mais complexos, como segue nos juízos:

A7: *Retirar 3 positivas e 2 negativas.*

A8: *-1.*

Antes de iniciar a 6ª sessão (última prática com o OA) foi oferecida pela pesquisadora uma explicação detalhada, através das principais dúvidas surgidas na dinâmica de uso do “Laboratório Atomístico”. A partir do desenho dos diagramas na lousa da sala usual, o princípio de equivalência que rege a atividade ficou mais claro aos alunos. Nessa ocasião, vários grupos, até os mais dispersos preferiram passar o intervalo dentro da SAI, realizando as situações-problema.

Após as explanações desenvolvidas previamente, no transcorrer da sexta sessão, também foi possível verificar a sistematização das regras, que levaram os alunos a responder diretamente, muitas vezes sem a manipulação das unidades positivas/negativas, como segue nas falas do grupo fixo:

A2: *Retire 8 positivas e 9 negativas.*

A1: *+1.*

Sem embargo, a situação-problema “Acrescentar/retirar unidades positivas/negativas” levou os alunos a codificar e descodificar situações relativas, cuja origem encontra-se fixada nas diversas formas de negatividade chinesa, concebidas segundo critérios de oposição. O que lhes propiciou intuir a regra de sinais ou ao menos facilitou o caminho que construa a definição de adição e subtração de números inteiros, sem impor a sua abstração pelas vias da memorização de regras lógico-formais.

- **"Temperatura no Ártico"**

Esta situação-problema, a última do OA, apresenta um novo diagrama com um número maior de unidades contrárias. Por esse motivo, o primeiro dilema fundou-se já na intenção de responder ao primeiro enunciado: "Digite a temperatura marcada neste instante."

1º Dilema:

Os alunos do grupo fixo realizaram a contagem da quantidade total de unidades positivas e, desconsiderando as unidades negativas, digitaram "+30" no campo de resposta.

Na próxima tentativa digitaram "-20", ou seja, olharam isoladamente para as unidades negativas, descartando as unidades positivas, apesar destas já terem sido quantificadas no primeiro contato.

Ao perceber os erros, A1 amplia seu foco e sugere:

A1: *Que tal somar todas!*

A1 tenta apreender o fenômeno em sua totalidade, aproximando-se da resolução do problema.

O filósofo Karel Kosik (1976, p. 41), ao tratar da concepção marxista de "totalidade concreta", explica que apreender o fenômeno em sua totalidade não significa a pretensão de esgotar todos os fatos. Nas palavras do autor:

> [...] Na realidade, totalidade não significa todos os fatos. Totalidade significa: realidade como um todo estruturado, dialético, no qual ou do qual um fato qualquer (classe de fatos, conjunto de fatos) pode vir a ser racionalmente compreendido. (KOSIK, 1976, p. 35)

Entretanto, A1 não percebe a "dialética" existente no fenômeno e entende que a operação envolvida trata-se de uma adição:

A1: *30 + 20 é 50.*

À primeira vista A1 e A2 não enxergam uma subtração, uma vez que seus juízos prévios em relação à ação de subtrair identificam-se com extrair ou retirar uma quantidade maior de uma menor de unidades de mesma natureza, operações estas que não são vislumbradas no diagrama.

Porém, A3, aluno do grupo fixo que menos opinara durante a utilização do OA, de modo sistematizado, propõe sua dedução:

A3: *10!*

Isto demonstra que A3, apesar de não verbalizar seus juízos e deduções, esteve atento aos processos de enfrentamento um a um de unidades contrárias, apropriando-se do princípio de equivalência presentes sob diversas formas no OA.

2º Dilema:

Vê-se importante exemplificar através dos juízos do grupo fixo e do grupo volante, o procedimento análogo, dentre as várias possibilidades, encontrado pelos quais para representar a variação da temperatura, por meio da manipulação e disposição das unidades contrárias internas ao diagrama.

Grupo fixo:

A2: *Olha! A temperatura subiu 9 graus.*

A1: *Aonde que eu vou colocar 9 aqui?* [ao contrário da atividade "Acrescentar/retirar unidades positivas/negativas", nesta, não há dois recipientes com unidades positivas e negativas]

A2: *Então aonde aperta pra subir?*

A2: *Olha subiu!* [refere-se ao fato de que cada clique no diagrama resulta em um par de unidades contrárias]

A2: *Aqui também subiu viu!*

A1: *Saquei! Aqui é mais e aqui é menos.*

A2: *É, tem que arranjar um jeito de não subir esse aqui também.* [elabora a ideia do problema].

A1: *Ah! Tira esses aqui que entrou!* [refere-se às unidades negativas]

O grupo fixo compreendeu a interferência das unidades de frio (negativas) no movimento de aumentar a temperatura, por isso as retiraram de modo a ficar com as positivas, cuja ação segundo a lógica formal não passa da regra de sinais: menos com menos é mais.

De modo semelhante, o grupo volante descobre esta mesma possibilidade:

A7: *Olha, para aparecer + oh! Aí aparece duas oh! Subiu +1.*

A8: *Então tira esse!* [refere-se às unidades negativas]

De modo similar, os dois grupos não modificaram a estrutura pré-existente das unidades no diagrama, dispondo-as de acordo com as operações indicadas no enunciado. De tal modo que, quando a temperatura "subia", incluíram os pares de contrários e retiraram as unidades negativas, ficando somente com as "positivas". Ou, quando a temperatura "caía", inseriam os pares de contrários e extraíram as unidades positivas, permanecendo apenas com as "negativas".

Ambos os grupos associaram a ação subir/aumentar (da temperatura) à introdução de representações positivas (unidades de calor), as quais chamaram de "+" e a ação cair/diminuir (da temperatura) à introdução de representações negativas (unidades de frio), "-".

3º Dilema:

A1: *No outono caiu 7 graus.*

Para solucionar esse caso, A1 desenvolve a seguinte analogia:

A1: *Subiu é +, então caiu é -.*

A2: *Joga fora esses aqui.*

A1: *Não caramba! É para aumentar 7.*

A2: *Durante o outono caiu!*

A1: ***Oh então é menos, aumenta 7***. [refere-se às unidades negativas]

A1 parte da ideia intuitiva (baseada na dedução precedente) de que diminuir a temperatura significa adicionar unidades de frio (negativas), contradição que chega a confundir A2. Mas A1 insiste em seu argumento e conclui com a dedução em destaque na última fala do 3º Dilema, de que "aumentar" unidades negativas resultará em "menos". Ou seja, operacionaliza mais uma igualdade lógico formal presente na regra de sinais: mais com menos é menos.

No decorrer das atividades, a introdução de unidades positivas e negativas e o agrupamento dessas representações aos seus respectivos conjuntos (dados no arranjo inicial do problema) sobrecarregaram o diagrama. Por esse motivo, em vários momentos, o manipulador inseriu ou extraiu uma quantidade avessa à pretendida, ocasionando erros no desempenho da problemática.

No entanto, quando perdiam o controle quantitativo de unidades contrárias, retornavam à situação antecedente e tentavam reproduzir a última operação explorada. Por exemplo, no caso da sequência: a) Durante a primavera, subiu 9 ºC; b) Durante o outono, caiu 7 ºC; c) Durante o inverno, caiu 3 ºC e d) Durante o verão, subiu 4ºC. Movimentos que, na perspectiva dos alunos, deveriam corresponder as seguintes sentenças matemáticas: a) 39 -20; b) 39 - 27; c) 39 - 30 e d) 43 - 30.

De modo geral, os alunos permaneceram com o arranjo inicial de unidades contrárias sobre o diagrama e utilizaram os aplicativos da "Temperatura no Ártico" para reproduzir as operações implicadas e não o número resultante.

Até que, no último enunciado é solicitado o seguinte: "A temperatura precisa voltar a ser de -4°C, que é o seu normal para a época do ano! Manipule as unidades no diagrama de modo que isso ocorra, e clique em 'prosseguir' ao terminar." Atividade que rompeu com o modo de proceder dos alunos, levando-os na maior parte dos casos, a reiniciar o "Laboratório Atomístico" por diversas vezes.

De modo mais específico, os fatores que dificultaram o desenvolvimento desta atividade podem ser atribuídos:

- Ao fato dos alunos não lerem o enunciado, ou lerem, mas não interpretá-lo.
- Ao modo com que as atividades estavam sendo desenvolvidas, com foco na representação da operação e não do número resultante.

Por essas razões, a realização de uma, dentre várias formas, para representar o número "-4" (temperatura fixa) exigiu a mediação da pesquisadora ou professora.

Contudo, os conflitos e inadequações provocadas pela dinâmica de uso da "Temperatura no Ártico" levaram os alunos a questionarem a estrutura do conceito de número e operação até então utilizado para desempenhar a contagem de objetos. E, frente a isso, buscar uma forma, dentre as várias opções oferecidas nesse aplicativo, de quantificação do número, tendo em vista seus aspectos substanciais e simbólicos.

Sendo assim, o contexto aritmético-algébrico das situações-problema do Laboratório Atomístico: "Acrescentar/retirar unidades positivas/negativas" e "Temperatura no Ártico", possibilitaram a transposição das quantidades concretas e operações aritméticas ligadas ao plano da ação à entes abstratos. Deslocamento que provocou mudanças no modo de pensar o número e as operações de adição e subtração.

Em sua totalidade, as situações relativas problematizadas em torno dos diagramas com o número inteiro desmembrado em unidades contrárias e simbólicas, transformaram-se em um espaço flexível de criação, de representação e de operacionalização no campo numérico dos inteiros.

4.3.8 Curiosidades

Este campo do OA foi construído com o intuito de funcionar como um espaço no qual os alunos pudessem ter acesso a informações mais específicas sobre características históricas, culturais, simbólicas e formais dos ambientes e componentes mais importantes do OA. De maneira a oportunizar a contextualização dos aspectos substanciais e simbólicos dos números inteiros.

Entretanto, apesar das instruções contidas no campo "Curiosidades" apresentarem-se relevantes para a realização de várias situações-problema, a forma estática com que foram organizadas, a partir de "menus" com textos explicativos, reduziu significativamente o seu acesso.

4.4 Conclusões da segunda etapa da pesquisa

Aqui foram agrupados os resultados extraídos da análise dos dilemas derivados da utilização concreta das situações-problema do OA. Para, além de considerar as possibilidades, como também impossibilidades, elencar os elementos que permitam concluir sobre o potencial pedagógico do "O Universo e seus Contrário" na constituição do conceito números inteiros em contexto educacional.

Vale observar que, em vários momentos desse texto os resultados alcançados são atribuídos ao grupo de alunos analisado, e não, à apenas um dos sujeitos do grupo (fixo ou volante). Tomando-se o caso do grupo fixo como exemplo, mesmo que muitos artifícios lógicos e deduções não tenham sido criados por A2 ou A3, a partir de alguns juízos manifestados pelos quais, percebe-se que compreenderam e apropriaram-se das elaborações emitidas por A1, do mesmo modo que A1 apreendera algumas construções de A2 e A3.

A história do conhecimento matemático mostra que a noção de espaço e tempo constitui o marco do desenvolvimento de diversas civilizações. A medição do espaço deu lugar ao aspecto quantitativo do número: o aspecto cardinal, a medição do tempo desenvolveu outro aspecto constitutivo do número: o aspecto ordinal.

A situação-problema designada por "Máquina do Tempo" conseguiu conjugar de modo lúdico e dinâmico estas situações de comparação, uma quantitativa e outra temporal, as quais determinam à contagem e classificação do tempo. Configuração que oportunizou:

- A reflexão sobre a relação espaço-tempo;
- Ampliação da ideia pré-estabelecida de sequência temporal, com o estabelecimento de uma ordem linear entre os acontecimentos que se estende ilimitadamente sobre a linha do tempo, em sentidos opostos, a partir do nascimento de Cristo como referência, assim como se apresenta na reta numérica dos inteiros;
- A determinação de uma origem que classifica o tempo restante: os anos anteriores e posteriores a ela;
- Interpretação, dentro de um contexto aritmético, dos signos antes de Cristo – “a.C.” e depois de Cristo – “d.C.”;
- Pensar uma relação de ordem e sua inversa;
- Construção de argumentos lógicos para operar com os contrários “a.C” e “d.C.” na quantificação do tempo.

A questão da reversibilidade das relações comparativas também apareceu de uma forma mais complexa na situação-problema “Armazenamento de água” no ambiente “Grécia”. O desenrolar dessa problemática ficou marcado pela embaraçosa busca dos alunos para pensar em “mão-dupla” (LIMA; MOISÉS, 1998) a entrada e saída de água do tanque.

Na “Máquina do tempo” a relação de ordem entre os anos anteriores e posteriores ao nascimento de Cristo, inverte-se estaticamente, alternando-se entre “a.C” e “d.C” a cada novo enunciado. Enquanto que, no “Armazenamento de água” a reversibilidade da relação entrada/saída é dada de modo simultâneo, subjacente à racionalidade chinesa, o que causou certo desconforto aos alunos, levando-os a erros sucessivos.

Outro aspecto das dificuldades manifestadas nessa situação-problema pode ser atribuído ao caráter dinâmico da variação de água no tanque, em que os elementos de comparação são estados interdependentes entre si, cuja ordem é dada pela harmonia das relações diretas e recíprocas associadas dualmente.

A partir de uma situação real, em que ambos os aspectos encontram-se indissociavelmente unidos, o “Armazenamento de água” exigiu previamente uma análise qualitativa e global para uma posterior quantificação do movimento.

Com base em Bohm e Peat (1989), existe uma linha tênue que une a abstração das partes ao fenômeno em sua totalidade. À compreensão de um conjunto de fatores, inicialmente, concentra-se sobre um fator particular do sistema, concebendo-o isoladamente do conjunto em que está inserido, mas quando os fatores são plenamente conhecidos um a um, é preciso ampliar-se o contexto de maneira a considerar os efeitos dos outros fatores sobre o fator analisado inicialmente.

A vivência pedagógica do ambiente China – Dinastia Han evidenciou este processo e por meio de um saber experimental, incitou os alunos a se desprenderem dos princípios "de identidade" e "de abstração" (a consideração dos números-palitos separadamente) e de "não-contradição" (a exclusão do oposto) para o princípio "de equivalência" ou "de oposição", no qual o significativo são as concorrências (no caso da "Batalha Chinesa", os soldados que se destroem mutuamente) e as sincronias (no caso dos pares homem/mulher do "Baile de Máscaras"). (LIZCANO, 1993)

Além disso, a concepção das cores vermelha e preta adotada pela problemática "Baile de Máscaras", deslocou o referencial que os alunos tinham sobre estas cores, devendo ser concebido sob um ponto vista de uma cultura diferente.

O grau de envolvimento dos alunos nestas situações-problema pode ser atribuído ao espaço de oportunidades de desenvolvimento, através da manipulação dos palitos vermelhos e pretos, disponíveis nestas atividades. Essa abertura do OA, quanto à organização dos palitos, permitiu a criação e a aquisição, mesmo que por meio da percepção sensório-concreta, pensar os contrários a partir de uma perspectiva qualitativa e quantitativa.

A mesma receptividade também foi percebida no fluxo da situação-problema "Sacas de Arroz" na "Itália". Na qual, algumas formas de contabilidade baseada no que Lizcano (1993, p.177) chama de "logística" ou "cálculo prático" transformaram-se em uma via de acesso aos aspectos simbólicos dos números inteiros. Assim, a familiaridade com o movimento dos opostos compra e venda, impulsionaram a primeira utilização dos sinais "+ e -" como algo circunstancial, provisório, que serve para indicar a oposição (entrada/saída) das quantidades de arroz no percurso da ação.

As demais problemáticas inseridas na "Itália": "Marcação dos toneis" e "Transferência do vinho" ficaram marcadas por introduzir um novo conceito de zero, a partir de situações relativas contextualizadas mediante uma referência arbitrária e duplo sentido. Características estas que desencadearam:

- Uma ruptura com o real através de situações que questionam a lógica natural subjacente às concepções de número e operação dos alunos;

- Um deslocamento da ideia de número como expressão de uma quantidade ou grandeza de modo a concebê-lo como uma ferramenta para descrever e simbolizar de forma precisa as situações relativas.

Cada uma destas situações-problema ficou marcada por um determinado conjunto de aspectos substanciais ou simbólicos constituintes do conceito números inteiros, de maneira que os alunos puderam conhecer, experimentar e expressar cada qual em oportunidades e contextos distintos. Por último, tais aspetos como: a dupla perspectiva qualitativa e quantitativa do número, o movimento e a contradição, o zero relativo, os sinais "+ e –" indicativos de um estado circunstancial, as concorrências e sincronismos do princípio de equivalência, o número como meio simbólico de descrever situações relativas, foram todos reunidos no ambiente "Laboratório Atomístico", o que favoreceu a comunicação e o intercâmbio dos juízos e deduções desenvolvidos nas atividades anteriores e, portanto, a sistematização de ideias mais abstratas acerca da adição e subtração dos números inteiros.

O decurso da primeira problemática do Laboratório, "Acrescentar/retirar unidades positivas/negativas" assinalou-se pela retomada do principio de equivalência na atividade de obter uma nova relação quantificada entre os elementos não comuns distribuídos sobre o diagrama. Procedimento que encheu as regras de cálculo com números inteiros de significação.

Entretanto, nesse mesmo ambiente, a quantificação das unidades de contrários estabelecida na "Temperatura no Ártico" provocou a construção de uma nova relação, um desdobramento operacional, no qual o qualitativo foi suposto através de um processo de comparações que determinaram seu "estado", enquanto que a operação quantitativa resultou de um processo de complementação, ou seja, da "soma" dos objetos não comuns em caráter global. Nesse sentido, a adição ganhou um aspecto generalizável, contemplando todos os números inteiros, como também a própria subtração.

A decisão tomada pela maioria dos grupos de reproduzir as operações implicadas na "Temperatura no Ártico", no caso do aumento da temperatura, inserir os pares de contrários e retirar as unidades negativas, da mesma forma, para a diminuição da temperatura, retirar as unidades positivas, ofereceu uma nova concepção à adição e subtração, ambas "como duas caras da mesma moeda" (GONZALEZ et. al., 1990, p. 199), como consequência de uma aritmética relacional, diferente da concepção que tange estas operações em contextos concretos de onde surgem interpretações usuais de uma aritmética prática.

Às principais contribuições das situações-problema, no que se referem à formação do conceito números inteiros, até o momento indicadas neste texto, confere-se à fusão de dois fatores relevantes: a consideração dos movimentos lógico-histórico do conceito e a exploração do potencial interativo da mídia. A associação destes fatores permitiu o estabelecimento de um diálogo entre o conjunto dos aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros, recuperados das práticas e abstrações matemáticas das diversas civilizações e em diferentes períodos históricos, e os alunos. O modo como estas problemáticas ficaram organizadas as tornaram um espaço de navegação, aberto ao uso e flexível aos procedimentos escolhidos pelos alunos.

Porém, quase que todo o ambiente "China – Dinastia Qin", as "Curiosidades", a introdução do ambiente "Itália", o *movie-clip* da música "Como uma onda" na Grécia, enredos construídos para contextualizar histórico-culturalmente os ambientes e interligá-los, permaneceram fixos no interior do OA.

Nestas situações, os alunos não leram, não se envolveram, demonstrando um contato rápido e superficial com estas aplicações. Muito disso, devido à ausência de uma abertura quanto à interferência do utilizador no processo, este caráter fechado e estático bloqueou a emissão e comunicação dos juízos relacionados às características históricas, culturais e substanciais destes contextos.

Dessa forma, junto a uma fundamentação teórica e metodológica que permita a profundidade e transdisciplinaridade do conceito, o fator interatividade, também se verifica como elemento essencial à construção de um OA.

Portanto, em sua totalidade, segundo um movimento dialético de elaboração de juízos e deduções provocados no enfrentamento de conflitos com as limitações que o real impõe a uma aritmética prática, onde nem sempre o zero é o vazio, ou não se pode visualizar a falta, que dirá retirar algo dela. O acúmulo de experiências pontuais e diversificadas sobre situações relativas, baseadas em distintas vertentes culturais e racionais, com diferentes conteúdos e significados dispostos no "O Universo e seus Contrários", propiciou o rompimento com as concepções elementares dos alunos acerca do número, dando lugar à formação progressiva à estrutura comum em todas elas, o lógico-histórico do conceito números inteiros.

CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao se admitir a humanização pelo conhecimento como apropriação de forma ativa, criativa e crítica dos elementos culturais, reafirma-se o papel social das Tecnologias de Informação e Comunicação no momento contemporâneo por que passa o sistema escolar. Em termos pedagógicos, porém, pode-se perceber diferentes matizes quanto à inserção da Informática nos processos de ensino e aprendizagem de conhecimentos escolares. Contudo, vê-se necessário acrescentar alguns questionamentos, caso se queira ir além do discurso das propostas do uso das TIC que chegam ao universo escolar. Foi nessa intenção que se questionou inicialmente sobre a qualidade pedagógica dos materiais tecnológicos, em especial ao que se refere à efetiva aprendizagem de conceitos matemáticos.

Na compreensão do conhecimento matemático como uma representação do mundo guiada por concepções filosóficas, científicas e ideológicas, na busca de diversas civilizações em atender às exigências dos fenômenos do mundo objetivo. Além de confirmar a importância de sua apropriação no desenvolvimento do pensamento humano, entendeu-se que a essência do conceito matemático está acumulada na sua história, no sistema de abstrações que o geraram, por isso pode ser refletida a partir de uma perspectiva lógico-histórica. (KOPNIN, 1978)

Pensar a Matemática nessa perspectiva apontou o valor fundamental das metodologias e processos de ensino pelos quais se obtém o conteúdo de seu conhecimento, principalmente quando isso ocorre por meio de animações ou simulações que utilizam as propriedades comunicacionais dos novos recursos tecnológicos para mediatizar ideias e conceitos de uma forma diferente do texto escrito.

Considerando-se a perspectiva lógico-histórica como fundamentação teórico-metodológica na confecção de materiais digitais projetados para suplementar às ações educacionais, nasceu o questionamento inicial: **“Quais as possibilidades delineadas pela perspectiva lógico-histórica na construção de um recurso de natureza computacional e pedagógica?”**

Tomando-se o movimento histórico e intelectual de criação de conceitos como forma de pensamento e perspectiva didática na produção do conhecimento (SOUSA, 2004), tanto no âmbito histórico, quanto na matemática escolar, o desenvolvimento do conceito números inteiros pode demonstrar amplamente como o conhecimento matemático apresenta fatores externos e internos em sua concepção teórica e metodológica, que desempenham importantes papeis na sua formação.

O conceito números inteiros mostrou-se ainda mais intrigante mediante uma análise sobre o modo de organização de seu ensino pelas orientações curriculares governamentais, em particular pela nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008) e as situações de aprendizagem dispostas nos Cadernos do Professor (SÃO PAULO, 2009a) e do Aluno (SÃO PAULO, 2009b). Na qual foi possível verificar que o conceito números inteiros é abordado a partir de sua relação direta com instrumentos físicos e simbólicos dados em situações cotidianas, o que restringe o seu conhecimento apenas às características perceptíveis do conceito. (SFORNI; PRADO & MOURA, 2004; 2007a/2007b)

Desses pressupostos nasceu o desafio que conduziu os processos dessa investigação. De promover a integração forma-conteúdo através da construção de um OA que considere o lógico-histórico do conceito números inteiros. De modo a configurar os aspectos substanciais e simbólicos do conceito às particularidades de um OA como, por exemplo, a oportunidade de "maximizar situações de aprendizagem" (TAROUCO et al, 2003) por meio da simulação, acessibilidade e interatividade.

Convergindo o olhar sobre o objeto investigado, os processos de constituição do trabalho foram guiados pela questão da pesquisa posta como: **"Quais as possibilidades encontradas na construção de um objeto de aprendizagem através da perspectiva lógico-histórica acerca da formação conceitual dos números inteiros?"**

Nesse caso, o estudo de caso qualitativo apresentou-se como tratamento metodológico adequado aos objetivos desta pesquisa, dividindo o trabalho em duas etapas: (1) caráter bibliográfico/laboratorial e (2) prática pedagógica com o OA.

O caráter bibliográfico da primeira etapa do estudo deveu-se aos diversos trabalhos acerca da História da Matemática, especialmente aos estudos de Lizcano (1993/2006) em torno do surgimento sócio-histórico e legitimação teórica dos números inteiros por diferentes gêneros de pensamento e de abstração (BOHM; PEAT, 1989) que orientaram qualitativamente a apreensão dos aspectos substanciais e simbólicos presentes em práticas e saberes, nem sempre circunscritas ao contexto matemático.

Nesse aprofundamento histórico, concentram-se os primeiros passos da perspectiva lógico-histórica, quando o ensino do conceito torna-se objeto de investigação. Há a necessidade de um estudo que abranja não só as partes, mas o conceito em sua transdisciplinaridade. (SOUSA, 2004)

Apesar da dedicação incutida nesse processo, a recompensa em apropriar-se das definições primárias dos números inteiros, da lógica dos princípios que o expressaram ao longo de sua formação, está em conhecê-lo em sua essência, com todas as suas contradições internas. Singularidades que conectam o particular ao universal, dificilmente contempladas pelo estudo formal do conceito, adotado em diversos níveis do ensino da Matemática.

Além disso, há outro aspecto relevante da perspectiva lógico-histórica a ser considerado, a oportunidade de entender as dificuldades prescritas no pensamento ocidental de origem grega e europeia que, mesmo sem perceber, podem obstaculizar a construção de juízos e deduções acerca dos números inteiros.

Dessa forma, o processo teórico-metodológico de construção do OA, preocupou-se em desviar o caminho didático de introdução do conceito números inteiros dos limites da não-contradição, da exclusão da negatividade mediante a positividade dos fenômenos e objetos, da rigidez do pensar por abstração que opera por subtração e da concepção basilar do número como grandeza ou medida de extensão, instrumentos tácitos, arraigados na forma de pensamento ocidental, que enviesaram a aceitação e concepção dos números inteiros no transcorrer dos tempos.

Segundo Lima e Moisés (1998) a melhor ideia para lidar com os contrários encontra-se na visão de mundo da civilização chinesa antiga, centrada no princípio yin e yang, cujo princípio dita que

> Nada existe na natureza sem o seu contrário, nenhuma força, nenhuma forma de matéria, nenhuma sensação, nenhuma forma de vida, nenhum pensamento. Todas as forças, formas de matéria, formas de vida, de pensamento, etc., existem aos pares pois a todas correspondem aspectos opostos, contrários, formando unidades de contrários. E estes contrários em unidade coexistem na forma de movimento. (LIMA; MOISÉS, 1998, p. 14)

Por isso o conceito números inteiros traça seu sentido com base em uma variedade de situações e ao se analisar apenas “uma” dessas situações, isoladamente, corre-se o risco de desfazer as demais relações conceituais.

Na tentativa de manter o movimento conceitual dos números inteiros no OA, durante o desenvolvimento do roteiro desenhado, através da criação de personagens, narrações, animações com som, objetos móveis, procurou-se empregar qualidades tecnológicas à transformação, complexidade e diversidade de situações comparativas em que o aspecto quantitativo é tomado como atributo do qualitativo, a negatividade associada à positividade, o número segundo seu movimento e contradição e o zero mediante os critérios de equivalência.

Na configuração das situações-problema do OA, a partir de um processo dialético de tomada de decisões sobre o quê, por qual motivo e de que forma considerar um aspecto em detrimento ao outro, priorizou-se a qualidade do pensamento analógico das formas de negatividade chinesa que parte do manancial simbólico yin e yang, estende-se aos palitos/números preto e vermelho, chegando aos contextos algébricos e aritméticos de representações com sinais. Bem como, ao pensamento em “mão-dupla” (LIMA; MOISÉS, 1998) para contagem do tempo e apreensão do movimento e contradição da passagem de água por um tanque. Procurou-se também, a partir das práticas comerciais suscitadas pelo Renascimento na Europa, acrescentar novos significados aos sinais “+” e “-“.

Das possibilidades encontradas na perspectiva lógico-histórica aliado ao caráter multifacetado dos recursos tecnológicos para o desenvolvimento qualitativo e laboratorial do objeto de aprendizagem “O Universo e seus Contrários”, infere-se que a construção de um OA pode partir, não necessariamente de vários acontecimentos e abstrações históricas depurados de suas causalidades. Contudo, de uma única técnica matemática, no estágio que precede à formalização, em que se destaca alguma das propriedades internas do conceito referenciado.

Isso já se diferenciará significativamente das ações de ensino que primam à definição, memorização, aplicação e outras representações externas do conceito.

A imersão no lógico-histórico de qualquer conceito pode disponibilizar à produção de objetos de aprendizagem uma infinidade de possibilidades de conduzir o uso dos aspectos substanciais como instrumentos facilitadores da apropriação de seu conteúdo e naturalmente de seus aspectos simbólicos como causa das diferentes apresentações externas do conceito no decorrer de sua história.

No percurso da pesquisa, na segunda etapa do trabalho, a análise das potencialidades do OA em situações reais de uso por uma 6ª série do Ensino Fundamental, pode revelar com maior clareza o papel de viabilizar na dinâmica das situações-problema, espaços modificáveis que flexibilizem a ação e reflexão ativa do usuário, à formação do conceito números inteiros.

Ao elaborar juízos no sentido de encontrar verdades, a partir dos aspectos substanciais articulados no OA, o aluno tem a oportunidade de “criar modelos mentais dos objetos e atuar com eles, planejando os caminhos para solucionar diferentes problemas”

(SFORNI, 2004, p. 106). Movimento que demanda a mediação pedagógica do professor quanto à tomada de consciência e revisão das ações efetuadas, de maneira que o aluno se aproprie das relações conceituais ali envolvidas.

Ao julgar que "[...] mais importante do que saber se o aluno respondeu adequadamente à tarefa proposta é saber como ele procedeu, que ações e operações usou para resolvê-la, bem como a qualidade dessas ações. [...]" (SFORNI, 2004, p. 109), todo processo metodológico de levantamento e categorização dos dados, focou-se nos dilemas, juízos e deduções dos alunos da "6ª Y", em especial aos alunos "A1", "A2" e "A3" do grupo fixo.

A partir dos resultados obtidos na dinâmica de uso das problemáticas do OA, vale indicar que, na maioria das atividades, ao iniciar uma situação-problema os alunos demonstraram uma tendência em orientarem-se por suas ideias, conceitos e conhecimentos familiares, isto é, por suas infra-estruturas tácitas. Porém, muitas atividades do OA, pensadas e interligadas através da perspectiva lógico-histórica, exigiram-lhes uma nova percepção do conceito de número para lidar com os contrários.

Ao elaborar uma maneira de proceder na primeira atividade de uma determinada problemática, o pensamento dos alunos novamente tendia a encontrar um mecanismo de modo que pudesse, através do qual, resolver "automaticamente" as demais atividades da mesma situação-problema.

> Um exame mais minucioso revela que, pela sua verdadeira natureza, o pensamento sempre se envolve em alguma forma de jogo, livre e criativo ou não, visto que até o pensamento excessivamente rígido, e por conseguinte não criativo, é ainda um jogo, ao pretender que algo é fixo quando na realidade não o é. (BOHM; PEAT, 1989, p. 75)

Entretanto, a complexidade das situações relativas com entes abstratos em oposição às situações exclusivamente cotidianas, os critérios lógico-históricos provenientes de uma racionalidade alheia ao pensamento ocidental, somado ao fato dos objetos constituintes dos problemas, ordenarem-se aleatoriamente a cada entrada do aluno no programa. São fatores que embaraçaram a entrada do pensamento nesse "jogo falso" (BOHM; PEAT, 1989), ao deparar-se com mudanças e forçando a mente a entrar "num estado perceptivo", desviando-se de "alguns dos aspectos demasiadamente rígidos da infra-estrutura tácita" (BOHM; PEAT, 1989, p. 87). A partir de um "constante diálogo interno com toda a estrutura" então vigente acerca dos conceitos envolvidos.

Pensar de modo simultâneo, por exemplo, ficou claro que foi uma das necessidades do OA, inicialmente na "Máquina do Tempo" e de forma mais complexa no "Armazenamento de água" que provocou maior incômodo e agitação nos alunos.

O mais interessante é que o grau de dificuldade apresentado pelos alunos ao lidar com estes conceitos não fez com que eles desistissem do OA. Pelo contrário, a cada tentativa, elaboravam novos juízos que os aproximava da compreensão da problemática e isso os prendia cada vez mais a ela. Outro indicativo do elo construído entre os alunos, o OA e a pesquisadora, foi revelado na sala de aula usual. Apesar de iniciarem as aulas dispersos e protelarem para se acomodar e voltar sua atenção à pesquisadora, quando isso ocorria, envolviam-se na mediação coletiva em torno do desenvolvimento das atividades detectadas mais complicadas, colocando suas dúvidas e respondendo às questões que lhes eram perguntadas.

Como se pode inferir do ponto anterior, o confronto com uma nova forma de pensar, com uma situação relativa ou com uma forma abstrata de representar os contrários ilustram a função da criação de um conflito de ideias, ou ainda, do dilema no processo de descobrir novos aspectos sobre o conceito.

Ao fazer uma reflexão sobre o potencial em termos pedagógicos de produtos multimídia, Costa (1999) também aponta a importância de eventos desafiadores para manter o grau de interatividade do produto, através de problemas e questões que provoquem momentos de dificuldade ao usuário. Esse movimento dialético de luta entre elementos externos e internos ao conceito pode ser identificado na evolução lógico-histórica do conceito números inteiros quando, por exemplo, o pensamento em "mão-única" (LIMA; MOISÉS, 1998) do comerciante europeu já não acompanha a quantificação das variações contábeis provocadas pelo Renascimento.

Entretanto, existe uma linha tênue ao conceber e programar uma problemática desafiadora, nesta linha parece ser importante averiguar como e até que ponto o nível de dificuldade da situação-problema não obstrui o seu desempenho. Uma vez que, ao invés de promover o envolvimento do aluno, a complexidade do evento, ou até mesmo, a ausência de informações na interface, podem desmotivá-lo e levá-lo a desistir de sua conclusão. Torna-se necessário encontrar um ponto de equilíbrio entre o grau de dificuldade e a possibilidade de realização da problemática.

Outro ponto a ser analisado acerca das dificuldades e dúvidas manifestadas pelos alunos no processo de elaboração de juízos e deduções, confere que o processo de apropriação dos aspectos substanciais ou simbólicos do conceito números inteiros não é algo linear. No caso do desenvolvimento do “Baile de Máscaras”, como exemplo, pode-se perceber que os avanços e recuos atuaram de modo simultâneo, como duas forças opostas. Muitas vezes, ao iniciarem a segunda ou terceira tentativa de resolução das atividades, retornavam à mesma hesitação estabelecida com o primeiro contato. De maneira semelhante, a dificuldade dos alunos em elaborar procedimentos de resolução sem um modelo concreto, a diferença entre os juízos de alunos do mesmo grupo, ou de um grupo a outro, comprovou que a aprendizagem não é algo mecânico e homogêneo.

Para Sforni (2004, p. 176) para que uma ação se transforme em operação é preciso tomar consciência de sua finalidade. “Pode-se considerar que a aprendizagem somente ocorre quando o pensamento conceitual e as operações dele decorrentes passam a ser de domínio voluntário do aluno”. Portanto, há de se respeitar o tempo e modo de pensar de cada um em sua singularidade. E, ao contrário do que se encontra sugerido na nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo, cumprir com um tempo previamente estipulado a uma determinada situação de aprendizagem, confere-se em uma tarefa que dificilmente será alcançada.

Na Sala Ambiente de Informática, dentre várias características captadas da dinâmica de uso das situações-problemas do OA, foi possível constatar que àquelas que favoreciam a interferência do usuário sobre os meios de sua resolução, contribuíram para criação, experimentação, revisão, projeção, representação, comunicação de juízos e deduções ligados a elementos formadores que ultrapassaram os limites do lógico-formal dos números inteiros.

Nesse contexto, da interpretação do que se reconheceu como os atributos essenciais das novas tecnologias e seu uso para a aprendizagem, assim como das possibilidades didáticas da perspectiva lógico-histórica no ensino de conceitos, pode-se relacionar aqui, duas estratégias em comum entre estas duas linhas teórico-metodológicas de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos:

I. Abordagem transdisciplinar e,
II. Problematização de conceitos.

Sendo que, no uso das TIC na transposição de conceitos matemáticos, uma abordagem transdisciplinar requer a busca de contextos relacionados a outras áreas do conhecimento vinculadas aos interesses e à realidade do aluno, no mesmo sentido, a problematização de conceitos verifica-se em mobilizar recursos que desafiem o aluno. (PRATA *et al*, 2007; TAVARES *et al*, 2007)

Enquanto que a transdisciplinaridade do conceito, na perspectiva lógico-histórica, trata-se do conceito em sua totalidade, com todas as suas singularidades e particularidades, a partir de vários contextos e imaginários histórico-culturais. No caso da problematização, nessa perspectiva, a história do conceito apresenta-se como problema e solução no desenvolvimento do pensamento humano. (LIMA, 1998; LANNER de MOURA *et al*, 2003; SOUSA, 2004)

De modo geral, as possibilidades vislumbradas nessa dupla proposta de metodologia de ensino de Matemática, complementaram-se em uma única ferramenta pedagógica, representada por um objeto de aprendizagem.

Antes de finalizar, deve insistir-se que o caráter subjetivo dos dados construídos a partir da dinâmica de uso do OA, junto à abrangência do conceito abordado, não permitem, como um ato de inferência lógica, concluir quanto à efetiva formação do conceito números inteiros, tão pouco que todos os alunos da 6ªY chegaram ao mesmo nível de abstração frente ao novo referencial de número. Mas pode-se verificar como algumas situações-problema do OA tornaram-se um espaço de ação que gerou um processo de dilemas externos e internos, individual e em grupo, entre os aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros.

Por sua vez, outras investigações mais extensas com o “O Universo e seus Contrários” poderiam aproximar-se dessa resposta. Para saber se o conteúdo do conhecimento adquirido com o OA é de domínio voluntário dos alunos, entende-se necessário detectar como o pensamento conceitual dos números inteiros foi utilizado no momento em que este foi introduzido nas aulas de Matemática. Nesse momento, valeria à pena verificar quais seriam as contribuições do OA no processo de compreender a estrutura lógica formal dos números inteiros. De outro modo, como seria a prática do OA com turmas variadas? Com um grupo de alunos que, a priori, já possui o conhecimento escolar dos números inteiros? Quais seriam os resultados sem a intervenção direta do pesquisador?

A dimensão proporcionada pela perspectiva lógico-histórica à fundamentação e análise do OA também se refletiu no caráter dinâmico admitido pela pesquisa. Não há como encerrar as questões sobre o estudo, pelo contrário, as conclusões e discussões apresentadas despertam “outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições” (CARAÇA, 1984)

Por essa razão, uma questão que merece ser investigada e respondida implica pensar o potencial pedagógico do OA em relação à formação de professores que atuam na Educação Básica. "Como seria trabalhar com estes professores, a partir da problematização que o OA propõe ao conceito números inteiros?"

Isto significaria viabilizar aos professores uma forma diferente (lógico-histórica e tecnológica) daquela construída em sua formação escolar, em que se pensa o conceito números inteiros segundo as leis da lógica formal. Como consequência, quais seriam as possibilidades e implicações da prática pedagógica do professor com o OA ao seu trabalho em sala de aula?

O que não deixa de ser possível, pois, o OA tratado nesse trabalho, encontra-se em fase de catalogação para futura publicação no Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE)[76], um repositório de objetos de aprendizagem ou Objetos Educacionais (OE) desenvolvido no ano de 2008 pelo Ministério da Educação em parceria com o Ministério da Ciência e Tecnologia, a Rede Latino-americana de Portais Educacionais (RELPE), a Organização dos Estados Ibero-americanos (OEI) e outras instituições. De sorte a reunir, organizar e viabilizar de forma democrática uma multiplicidade de objetos de aprendizagem para diferentes modalidades de ensino e temas curriculares.

> O BIOE é um repositório de livre acesso de materiais digitais educacionais, que viabiliza recursos para todos os níveis de ensino. Nele encontra-se materiais diversificados (simulações, hipertextos, experimentos práticos, imagens, vídeos, softwares educacionais, mapas e áudios), que são identificados como Objetos Educacionais (OE).[77]

O acesso do BIOE também pode ser feito através do "Portal do Professor"[78], no qual o educador pode desenvolver estratégias de aulas e de avaliação com diversos recursos tecnológicos, em especial com o OA, de modo a compartilhar experiências de aprendizagem e criatividade com o uso das TIC.

Em relação ao **questionamento inicial** retomado neste capítulo, os dados levantados na construção e utilização do OA mostraram as possibilidades presentes na adoção da perspectiva lógico-histórica à fundamentação teórico-metodológica do "O Universo e seus Contrários", respondendo apenas à **questão da pesquisa**.

[76] Disponível em <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br>. Acesso em 31 de julho de 2009.
[77] Disponível em < http://www.nec.prudente.unesp.br/nec/projetos.php?pag=oquee&cod=12>. Acesso em 31 de julho de 2009.
[78] Disponível em < http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>. Acesso em 31 de julho de 2009.

O caráter específico desse estudo de caso, cujo conceito abordado refere-se em particular aos números inteiros, não permite responder quanto às possibilidades encontradas na perspectiva lógico-histórica na construção de objetos de aprendizagem focados em outros conceitos matemáticos. Portanto, a resposta ao questionamento inicial prolonga-se a futuras pesquisas que considerem o lógico-histórico de vários conteúdos matemáticos na construção de novos objetos de aprendizagem.

Face ao exposto, espera-se que, o empreendimento a que se propôs esta pesquisa, de caráter inovador a dois campos da Educação Matemática, às Tecnologias de Informação e Comunicação no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, particularmente a construção e utilização de Objetos de Aprendizagem e Perspectiva Lógico-Histórica, especificamente no ensino conceitual dos números inteiros, não cesse neste último parágrafo.

Mas que possa oferecer contribuições à Metodologia de ensino de Matemática, no sentido de disponibilizar instrumentos para reflexão individual e coletiva de estudantes e professores que atuam na formação inicial e continuada e aos pesquisadores envolvidos nos processos de desenvolvimento de objetos de aprendizagem. De modo a provocar-lhes novos olhares, novas inquietações e principalmente, novas ações, a partir das conclusões alcançadas e (re)elaboradas ao longo do trabalho sobre: a) o papel das TIC no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos; b) a construção e utilização de objetos de aprendizagem; c) o pensamento empírico e teórico na apropriação de conceitos matemáticos; d) o lógico-histórico do conceito números inteiros sob diferentes vertentes racionais e culturais; e) os aspectos substanciais e simbólicos do conceito números inteiros; f) em especial, a compreensão do que vem a ser a confluência dessas concepções na construção do OA intitulado “O Universo e seus Contrários” e análise das potencialidades formadoras do conceito números inteiros.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, V. T. de. O leitor competente à luz da teoria da literatura. **Revista Tempo Brasileiro**. Rio de Janeiro, 124, p. 23- 34, jan. - mar. 1996.

ANDRÉ, M. E. D. A. Estudo de caso: seu potencial na Educação. **Caderno de Pesquisa**, Rio de Janeiro, 49, p. 51-54, maio 1984.

BELLONI, M. L. **O que é mídia-educação**. Campinas: Autores Associados, 2001.

______**Mídia-educação ou comunicação educacional?** Campo novo de teoria e de prática. In: BELLONI, M. L (Org.). A formação na sociedade do espetáculo. São Paulo: Loyola. 2002.

BETTIO, R. W. de; MARTINS, A. **Objetos de aprendizado: um novo modelo direcionado ao ensino a distância**. Documento online publicado em 17/12/2004: Disponível em: <http://www.universia.com.br/materia/materia.jsp?id=5938>. Acesso em: 20/05/2006.

BOGDAN, R. C.; BIKLEEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução á teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOHM, D. e PEAT, F. D. **Ciência, ordem e criatividade**. Lisboa: Gradiva – Publicações, L.da, 1989.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 7. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática/ Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1984.

CARNEIRO, R. **Informática na educação: representações sociais do cotidiano**. São Paulo: Cortez, 2002.

CID, E. **Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos**, Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10. 2000. Disponível em <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm> Acesso em 05 de ago. 2007.

______, E. **La investigación didáctica sobre los números negativos**: estado de la cuestión, pre-publicaciones del seminario matemático, García de Galeano 2003, n. 25, Universidad de Zaragoza. 2003. Disponível em <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf> Acesso em 12 de out. 2007.

COELHO N. N. **Uma gramática da literatura Infantil: matéria e forma de literatura**. 1.ed. In: Literatura Infantil: Teoria, análise, didática. São Paulo: Moderna, 2000, p. 64-91.

COSTA, F. A. **Contributos para um Modelo de Avaliação de Produtos Multimédia Centrado na Participação dos Professores**. In: Comunicação apresentada ao 1º Simpósio Ibérico de Informática Educativa, Setembro de 1999, Aveiro-Portugal, 1999. Disponível em <http://www2.fpce.ul.pt/projectos/pedactice/doc/comunicacao46.pdf> Acesso em 12 de abril de 2009

CROSBY, A. W. **A mensuração da realidade: a quantificação e a sociedade ocidental, 1250 - 1600**. São Paulo: Editora UNESP – Cambridge University Press, 1999.

DANTZIG, T. **Número: a linguagem da ciência**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DIAS, M. da S. **Formação da imagem conceitual da reta real**: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. 252 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FACCI, M. G. D. **Vigotski e o processo ensino-aprendizagem**: a formação de conceitos. In: MENDONÇA, S. G. de L. ; MILLER, S. (Org.) Vigotski e a escola atual: fundamentos teóricos e implicações pedagógicas. Araraquara: JM Editora, 2006.

GONZALEZ, J. L. et al. **Numeros enteros**. In: Colección: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Editora Sintesis, S. A., 1990.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática**: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. 2 ed. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. 9 ed. São Paulo: Editora Globo, 1998.

KLINE, M. **Mathematics: the loss of certainty**. New York, Oxford Univ. Press, p. 328-354, 1981.Tradução não autorizada do cap. XV: Wilson Pereira de Jesus – Dep. de Educação/UEFS-BA. Revisão de Geraldo Ferreira de Lima Dep. de Letras/UEFS-BA.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro, Civilização Brasileira, 123 v. (Coleção Perspectivas do homem), 1978.

KOSIK, K. **Dialética do concreto**. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 1976.

LANNER DE MOURA, A. R. et al. **Movimento Conceitual em Sala de Aula** In: Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, Blumenau-SC, 2003.

LIMA, I. S. L. de, et al. **Criando interfaces para objetos de aprendizagem**. In: PRATA, C. L. ; NASCIMENTO, A. C. A. de A. (Org.): Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico. Ministério da Educação (MEC) – Secretaria de Educação a Distância (SEED), p. 39-48, 2007. Disponível em <http://www.oei.es/tic/livro.pdf >. Acesso em 02 de jan. 2008.

LIMA, L. C. e TAKAZAKI, M. e MOISÉS, R. P. **Momento de criar matemática: contando as coisas**. São Paulo: CETEAC, 1994.

LIMA, L. C. **Da mecânica do pensamento ao pensamento emancipado da mecânica**. In: Programa Integrar: Trabalho e Tecnologia. CUT. São Paulo, 1998.

LIMA, L. C e MOISÉS, R. P. **O número inteiro: numerando movimentos contrários**. São Paulo: CETEAC, 1998.

LIBÂNEO, J. C. **Didática: velhos e novos temas**. Edição do autor, 2002. Disponível em <http://gtdidatica.sites.uol.com.br/textos/libaneo.pdf >. Acesso em 06 jun 2008.

LIZCANO, E. **Imaginario Colectivo y Creación Matemática** (La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y Grecia), Barcelona: Gedisa, 1993.

LIZCANO, E. **Metáforas que nos piensan, Sobre ciencia, democracia y otras Poderosas ficciones**, 2006. Disponível em <http://www.bajo-cero.org/ediciones/pdf/lizcano_web.pdf.> Acesso em 25 out. 2007

MEDEIROS, A. ; MEDEIROS, C. **Números negativos: uma história de incertezas**. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, ano 7, nº 8, Rio Claro: UNESP, 1992. p. 49-59.

PRADO, E. P. de A. ; MOURA, A. R. L. de. **A influência dos contextos sociais no conceito matemático**. In: Anais do 1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática: possibilidades de diálogos – SPHEM, 10-12 de outubro de 2005, p. 53-58, São Paulo-SP, 2005. Disponível em <http://www.ime.usp.br/~sphem/documentos/sphem-tematicos-2.pdf> Acesso em 7 dez. 2008

PRADO, E. P. de A. ; MOURA, A. R. L. de. **O conceito números inteiros nos textos impressos de orientações curriculares de matemática de 1975 a 1998**. In: Anais do II Encontro Iberoamericano de Educação – II EIDE, 18-21 de setembro de 2007, Araraquara-SP, 2007a.

PRADO, E. P. de A. ; MOURA, A. R. L. de. **O conceito números inteiros nos livros didáticos**. In: Simpósio Internacional do Livro Didático: Educação e História, 2007, p. 1406-1422, São Paulo-SP, 2007b.

PRADO, E. P. de A. **Os textos impressos para o ensino dos números inteiros na visão de licenciandos em matemática**. 2008. 165 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PRATA, C. L. et. al. **Políticas para fomento de produção e uso de objetos de aprendizagem**. In: PRATA, C. L. ; NASCIMENTO, A. C. A. de A. (Org.): Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico. Ministério da Educação (MEC) – Secretaria de Educação a Distância (SEED), p. 107-121, 2007. Disponível em <http://www.oei.es/tic/livro.pdf >. Acesso em 02 de jan. 2008.

RODRIGUES, R. V. R. ; SCHLÜNZEN, K. J. **Desenvolvendo um Objeto de Aprendizagem através de uma perspectiva lógico-histórica**. In: Anais do XIII Taller Internacional de Software Educativo - TISE 2008, 2-4 de dez. de 2008, p. 120-129, Santiago-Chile, 2008. Disponível em: <http://www.tise.cl/2008/tise_2008/tise2008.pdf#page=120>. Acesso em 18 de maio de 2009.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de matemática:** 1º grau. 4ª ed., SÃO PAULO, SE/CENP, 1991.

______. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo:** Matemática (Ensino Fundamental e Médio) – Estudo e ensino. São Paulo, SEE/CENP, 2008.

______. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Caderno do Professor: matemática, ensino fundamental – 6ª série, volume 1**. Estudo e ensino. São Paulo, SEE, 2009a.

______. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Caderno do Aluno: matemática, ensino fundamental – 6ª série, volume 1**. Estudo e ensino. São Paulo, SEE, 2009b.

SCHUBRING, G. **Rupturas no Estatuto Matemático dos números negativos**. Trad. Rosa M. Mazo Reis. Boletim GEPEM. Nº 37, 2000. p. 51 – 64.

______. **Rupturas no Estatuto Matemático dos números negativos**. (continuação do artigo, de mesmo título, publicado no Boletim do GEPEM nº 37). Trad. José Paulo Q. Carneiro e Rosa M. Mazo Reis. Boletim GEPEM. Nº 38, 2001. p. 73 - 93.

SFORNI, M. S. de F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino**: contribuições da teoria da atividade. Araraquara: JM Editora, 2004.

SILVA, R. M. G. da; FERNANDEZ M. A. **Recursos informáticos projetados para o ensino de Ciências**: bases epistomológicas implicadas na construção e desenvolvimento de objetos de aprendizagem. In: PRATA, C. L. ; NASCIMENTO, A. C. A. de A. (Org.): Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico. Ministério da Educação (MEC) – Secretaria de Educação a Distância (SEED), p. 27- 37, 2007. Disponível em <http://www.oei.es/tic/livro.pdf >. Acesso em 02 de jan. 2008.

SOUSA, M. do C. **A percepção de professores atuantes no ensino de matemática nas escolas estaduais da delegacia de ensino de Itu, do movimento matemática moderna e de sua influência no currículo atual**. 1999. 158f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. 286 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

______. **Quando a História da Matemática passa a ser Metodologia de Ensino**. In: Anais do 16º Cole – Congresso de leitura do Brasil, Campinas. 10-13 de jul. de 2007. Disponível em <http://www.alb.com.br/anais16/sem15dpf/sm15ss02_04.pdf>. Acesso em 24 de mai. 2008.

______. **Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de Matemática na perspectiva lógico-histórica**. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, ano 22, nº 32, Rio Claro: UNESP, 2009. p. 83-99.

STIERLE, K. **Que significa a recepção dos textos ficcionais?** Tradução de Heidrun Krieger, Luiz Costa Lima e Peter Naumann. In: Luiz Costa Lima (Coord.) A Literatura e o leitor: textos de estética da recepção. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979. pp. 119-165

TANCREDI, R. M. S. P. **O ensino dos números inteiros no 1º grau**: realidade e possibilidades. 1990. 424 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação e Ciências Humanas,Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

TAROUCO, L. M. R. et. al. **Reusabilidade de objetos educacionais**. Novas Tecnologias na Educação – UFRGS/CINTED, v.1 nº1, p. 1-11, fev., 2003. Disponível em <http://www.cinted.ufrgs.br/renote/fev2003/artigos/marie_reusabilidade.pdf>. Acesso em 07 de abr. 2009.

TAVARES, R. et. al. **Objetos de Aprendizagem**: Uma proposta de avaliação da aprendizagem significativa. In: PRATA, C. L. ; NASCIMENTO, A. C. A. de A. (Org.): Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico. Ministério da Educação (MEC) – Secretaria de Educação a Distância (SEED), p. 123-133, 2007. Disponível em <http://www.oei.es/tic/livro.pdf >. Acesso em 02 de jan. 2008.

TEIXEIRA, L. R. M. **Aprendizagem escolar de números inteiros**: análise do processo na perspectiva construtivista piagetiana. 1992. Tese (Doutorado em Psicologia: Psicologia Escolar) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999. 156 p.

______. **A espiral da aprendizagem e as tecnologias de informação e comunicação**: repensando conceitos. In: JOLY, M. C. R. A. (org). A tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem. São Paulo: Casa do Psicólogo, p.15-37, 2002.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001. 496 p.

WILEY, D. **Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor, and taxonomy**, 2000. Disponível em: <www.reusability.org/read/chapters/wiley.doc>. Acesso em 14 nov. 2007.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 3 ed. São Paulo, Porto Alegre: Artmed Editora S. A., 2003.

BANCO Internacional de Objetos Educacionais: MEC online, 2009. Apresenta um repositório de objetos educacionais para diferentes modalidades de ensino e temas curriculares. <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html >. Acesso em 31 jul. 2009.

NÚCLEO de Educação Corporativa, Presidente Prudente: UNESP online, 2007. Apresenta informações sobre a produção de Objetos de Aprendizagem. <http://www.nec.prudente.unesp.br/NEC/Home.php>. Acesso em 10 abr. 2007.

PORTAL do Professor: MEC online, 2009 <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>. Apresenta espaço destinado ao educador para criação e compartilhamento de aulas que utilizam materiais digitais educacionais. Acesso em 31 jul. 2009.

REDE Interativa Virtual de Educação, Brasília: MEC online, 2007. Apresenta o projeto Fábrica Virtual e Objetos de Aprendizagem de diversas áreas do conhecimento. <www.rived.mec.gov.br>. Acesso em 09 abr. 2007.

APÊNDICE

APÊNDICE 1 – O quadrado mágico chinês e suas relações analógicas e algébricas

Segundo uma lenda chinesa, o primeiro quadrado mágico surgiu no casco de uma tartaruga, pelas águas do rio Lo, até as mãos do imperador chinês Yu, fundador da dinastia dos Hia, que se encontrava à beira do rio, justamente procurando resolver as dificuldades daqueles tempos. Foi naquele momento, observando a tartaruga, que o imperador percebeu que o desenho de seu casco estava dividido em nove partes, cada uma delas contendo certa quantidade de pontos, como exemplificado na Figura 36.

O quadrado mágico é muito significativo para os chineses. Com seus números, são feitas associações com diversos objetos e contextos (vide Tabela 2), nos quais existe uma relação especial de oposição, tanto entre os números como entre os objetos/nomes, determinada por duas cruzes. No quadrado da Figura 36, podemos identificar quatro enfrentamentos: os da cruz principal e outros da cruz formada pelas diagonais.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 36 - Quadrado Mágico.

Tabela 2 - Analogias entre os números do quadrado mágico e outros contextos.

Pontos cardeais	Estações do ano	Elementos físicos
Norte: 1	Outono: 1	Água: 1
Sul: 9	Verão: 9	Fogo: 9
Leste: 3	Primavera: 3	Madeira: 3
Oeste: 7	Inverno: 7	Metal: 7

Nessa disposição em cruz de nomes/números opostos, o 5 possui um papel singular. Situado no centro da encruzilhada, separa os opostos. O 5, além de estabelecer a simetria, também possibilita o trânsito, a operação e a interação entre os signos alternantes/enfrentados. Assim, este 5 pode ser associado ao "elemento neutro", ao "zero" do grupo aditivo em Z/5 (LIZCANO, 1993, p. 129, tradução nossa).

Para explicitarmos melhor as análises de Lizcano (1993), recorremos a alguns conceitos e definições algébricas.

Congruência é a relação entre dois números inteiros que divididos por um terceiro, chamado módulo de congruência, os quais deixam o mesmo resto.

Nesse sentido, sejam a, b e m números inteiros diferentes de zero. Dizemos que a é congruente de b módulo m, se m dividir (a-b). O que também pode ser escrito da seguinte forma: $a \equiv b \pmod{m}$, onde o módulo representa o número de elementos que compõem cada grupo (ou subconjunto).

Sabendo que cada classe de equivalência[79] corresponde a um subconjunto composto por todos os elementos congruentes no módulo 5, ao formarmos subconjuntos de 5 elementos, a partir do conjunto dos números inteiros, temos que o módulo é igual a 5. Ou seja, 15/5 = 3 com resto 0 e 10/5 = 2 com resto 0. Do mesmo modo, $5 \equiv 10 \pmod{5}$, porque, de acordo com a definição mencionada, 5 divide (5-10) etc..

Dessa maneira, segundo Lizcano (1993, p. 129, tradução nossa), Z/5 = {[1], [2], [3], [4], [5]}, onde cada uma dessas cinco classes de equivalência que compõem o conjunto Z/5[80] são formadas por todos os números congruentes módulo 5, ou seja, [1] = {1, 6, 11, ...}, [2] = {2, 7, 12, ...} etc. e [5] = [0] = {0, 5, 10, 15, ...}.

As classes de congruência diferentes de zero de Z/5 estão representadas em cada uma das pontas da cruz; a classe [0] se representa no ponto de intersecção das cruzes, lembrando que [0] é congruente a [5], que é congruente a 10. Assim, o 5 pode ser substituído por 10 (LIZCANO, 1993, p. 132, tradução nossa).

Essas cruzes se correspondem com as oposições em Z/5. É dizer, [7]=[3], posto que [3] + [7] = [5] = [0]; e, analogamente, [9]=[1], [6] = [4] e [8] = [2].

No quadrado da Figura 36, temos uma bipartição que também representa o complexo simbólico “yin/yang/dao”: acima e à direita, o “yin”; abaixo e à esquerda, o “yang”, estabelecida pelos opostos que se enfrentam em Z/5: 9 e 1, 7 e 3, 8 e 2, 6 e 4. Ou seja, o que está por cima da diagonal principal são os “yin” (2, 4, 7, 9), e os que estão por baixo são os “yang” (1, 3, 6, 8).

Nesse contexto, Lizcano (1993) faz uma importante correlação entre o quadrado mágico, o pensamento analógico e as congruências algébricas:

[79] Seja Z/5 uma relação de equivalência no conjunto Z e x um elemento qualquer de Z/5. O conjunto de todos os elementos de Z/5 que se relacionam a x é chamado de classe de equivalência de x.

[80] Cada relação de equivalência “particiona” o conjunto no qual é definida. Os subconjuntos que formam essa partição, normalmente chamados de blocos da partição, são formados pelo agrupamento dos elementos que se relacionam.

> [...] En las disposiciones simbólicas de los números en cruz, el criterio de equivalencia rige el emplazamiento de números congruentes en un mismo brazo de la cruz, y el criterio de oposición los distribuye en los brazos enfrentados de los cuadrados mágicos. Y toda figura pivota en torno a esa "gota de rocío" o "centro" que es el "cero" del "grupo cociente" definido por la relación de equivalencia simbólica. [...] (p. 144).[81]

Desse modo, o centro do quadrado também possui uma função singular como centro (geométrico) de simetria, ponto de convergência e anulação (algébrica) dos opostos. Tal como os opostos "zheng/fu", reduzem-se mutuamente (LIZCANO, 1993, p. 133, tradução nossa).

[81] Nas disposições simbólicas dos números em cruz, o critério de equivalência rege a localização de números congruentes, em um mesmo braço da cruz, e o critério de oposição os distribui nos braços enfrentados dos quadrados mágicos. E toda figura gira em torno dessa "gota de orvalho" ou "centro" que é o "zero" do "grupo quociente" definido pela relação de equivalência simbólica (LIZCANO, 1993, p. 144, tradução nossa).

ANEXOS

ANEXO 1 – Produções de textos de alunos da 6ªY

Na íntegra, apenas com a preservação da identidade dos autores, agrupamos algumas das produções de texto realizadas em uma hora/aula na última sessão (12/05/09) da prática pedagógica com o OA.

- A1:

O universo e seus contrarios

O da hora nesse programa foram as vozes dos bonequinhos que falam sem abrir a boca e os efeitos.

Aprendemos sobre a temperatura no pólo norte sobre o ditado chinês e a batalha contra os hunos e o baile de mascaras comemorado pela vitória dos chineses.
O laboratório foi o mais difícil com o último desafio que tinha que calcular e calcular para não se perder e ia tirando as bolinhas até dar certo e você ganhava.

- A2:

Universo e seus contrario

Eu aprendi a mexer com números negativos e positivos, foi muito importante para o meu aprendizado na escola na hora que a professora [de Matemática] for passar

números negativos eu vou saber e ela vai ficar muito feliz por que já começamos na metade.
É um jeito de aprender com o computador, eu queria que todas as aulas de matemática fossem assim.

- A3:

Universos e seus contrários

Eu mais gostei da parte do laboratório atomístico e da parte que nós salvamos os ursos polares.

- A4:

Eu aprendi que os números negativos podem ser usados

para medir a temperatura , na linha do tempo etc...
O que eu mais gostei foi quando eu estava dentro do laboratório atomístico mexendo nas cargas elétricas positivas e negativas parecia que a gente era o próprio pingüim combatendo o aquecimento global,

enfim eu gostei muito desse programa e agradeço pelo programa e pelas professoras Renata e "X" por nos ensinar sobre números negativos

- A5 e A6:

O universo & seus contrários.

No trabalho de matemática com a professora Renata & "X", conseguimos aprender muitas coisas legais, e outras nem tanto.

Até que o trabalho não foi tão difícil assim, mais teve coisas complicadas demais, que eu demorei muito para conseguir entender...

Até que no começo foi fácil, só que quando foi chegando no final, tudo foi se complicando e foi realmente difícil de conseguir passar por todas as fases sem chamar a professora para explicar.

Mas apesar de ter dado um pouco de trabalho, eu achei o programa muito legal e interessante, pois nos deu oportunidade de aprender coisas novas em matemática, bem antes que a professora de sala nos ensinasse, e isso foi bem legal.
Adorei estar fazendo esse trabalho, e gostaria de ter outras oportunidades para fazer mais trabalhos como esse.
Eu aprendi muito sobre números negativos, foi o que mais me marcou, pois eu não havia visto nada alem de números naturais ainda, por isso gostei muito de aprender.
O que me chamou atenção também, que eu gostei muito foi o PINGÜIN, pois mesmo que ele fale muitas vezes a mesma coisa, e até irrite um pouquinho, eu gostei bastante dele.

- A7 e A8:

O QUE EU APRENDI ?

Nós aprendemos o que é números negativos,temperatura,história,dinastias ham e quim etc.
O que eu (A8) mais gostei foi dos desenhos, o jeito do programa ensinar matemática e no final os eletros.

- A9 e A10:

Universo e seus contrários

Nós aprendemos números negativos e números positivos.
Aprendemos também a voltar no tempo de um jeito diferente, fazendo contas.
Aprendemos sobre temperaturas, Hunos e Chineses.
Também aprendemos com o tanque de água, como a unidade saía e entrava.
Fizemos isso para ajudar o urso polar e seu universo.
Isso nos ensinou o que nós precisaríamos aprender...
Por isso nós gostamos muito desse desenvolvimento, que as professoras nos ensinaram...

- A11:

Eu achei que o programa foi muito bom.

O laboratório foi legal, por causa da fase matemática.

A parte que eu mais gostei foi o laboratório.