





IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

3

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.004/93

Simetrias e Sólitons do Modelo de Toda Conforme
Afim

Clisthenis Ponce Constantinidis

Orientador

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira



Agosto 1993

IFT/TE
D-35

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos professores Dr. Luiz Agostinho Ferreira e Dr. José Francisco Gomes pela orientação deste trabalho, conduzido sempre com muito entusiasmo, dedicação e sobretudo grande amizade.

Ao Professor Dr. Abraham Hirz Zimerman, cuja colaboração e convivência muito contribuíram para meu amadurecimento pessoal e profissional.

Aos amigos do IFT, que direta ou indiretamente colaboraram com o trabalho, principalmente tornando o IFT um lugar de convívio extremamente agradável.

Aos funcionários do IFT-UNESP, sobretudo ao Sr. Antônio, Marcelo e Alexandre pela disponibilidade e bom humor no dia a dia.

À minha família pelo incentivo constante.

À FAPESP e CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta tese fazemos um estudo das teorias de campo de Toda clássicas em duas dimensões. Primeiramente é mostrado que uma classe destas teorias, mais especificamente, os modelos de Toda Afim (AT) constituem uma versão dos modelos de Toda Conforme Afim (CAT) num determinado "gauge" da simetria conforme. Este resultado permite construir, para cada solução dos modelos AT, um número infinito de soluções do modelo CAT correspondente. Soluções do tipo sóliton são construídas para os modelos AT a partir do método de Hirota, formulado de maneira recursiva, e uma nova classe delas é obtida graças a dois tipos de degenerescências que aparecem nesta abordagem perturbativa. Conhecidas as soluções e a relação entre as teorias AT e CAT é possível encontrar uma fórmula universal para as massas dos sólitons do modelo AT associados a todas as álgebras de Lie simples. Suas cargas topológicas também são determinadas.

Simetrias não lineares, associadas às álgebras W , dos modelos CAT também são estudadas, sendo proposta uma maneira de se construir uma torre infinita de geradores dessas simetrias a partir de campos de spins 1 e 2. Finalmente é estabelecida uma relação da álgebra de tais geradores com a álgebra w_∞ dos difeomorfismos que preservam a área.

ABSTRACT

In this Thesis we study the Classical Toda Field Theories in two dimensions. It is first shown that a class of these theories, more specifically, the Affine Toda Models (AT) constitute a “gauge” fixed version (of the conformal symmetry) of the Conformal Affine Toda Models (CAT) and this result permits one to obtain from each solution of the AT model, an infinite number of solutions of the corresponding CAT model. Solutions of soliton type for the AT models are built using Hirota’s method formulated in a recursive way, and a new class of them are obtained thanks to new kinds of degeneracies which appear in this perturbative approach. Once the solutions and the relationship between the AT and CAT models are known, it is possible to find a universal formula for the soliton masses of the AT models, associated to all simple Lie algebras. Their topological charges are determined too.

Non linear symmetries, associated to W algebras, for the CAT models are studied. A construction of an infinite tower of generators of such symmetries from spin 1 and spin 2 fields is proposed. It is finally established an algebraic relation of such generators with the w_∞ area preserving diffeomorphism algebra.

Índice

Introdução	1
1 As Teorias de Toda Clássicas em 1 dimensão	6
1.1 A Rede de Toda	6
1.2 A Molécula de Toda	8
1.3 A Rede de Toda com Condições de Contorno Periódicas	9
2 As Teorias de Campo de Toda Clássicas	11
2.1 O Modelo de Toda Conforme (CT)	11
2.2 O Modelo de Toda Afim (AT)	14
2.3 O Modelo de Toda Conforme Afim (CAT)	15
2.4 A Conexão entre os modelos CAT e AT	17
3 O Método de Hirota	21
3.1 A Construção de um Método de Recorrência	21
3.2 Cálculo de V_i^{n-1}	26
3.3 Massas e Cargas dos Sólitons	27
4 Soluções para $SU(r+1)$	29
4.1 Considerações Gerais	29
4.2 Degenerescência do segundo tipo para $SU(6p)$	32
5 Soluções para $Sp(r)$	34
5.1 Considerações Gerais	34
5.2 Degenerescência do segundo tipo para $Sp(3p)$	37
6 Soluções para $SO(2r)$	39
6.1 $D_4 = SO(8)$	39
6.2 $D_r = SO(2r)$ para $r \geq 5$	41
6.3 Soluções de $SO(14)$ para $\lambda = 2$	46
7 Soluções para $SO(2r+1)$	48
7.1 $B_3 = SO(7)$	48
7.2 $B_r = SO(2r + 1)$ para $r \geq 4$	49

8	Soluções para as álgebras Excepcionais	53
8.1	Soluções para G_2	53
8.2	Soluções para F_4	54
8.3	A série E_n	56
9	A Redução do Modelo WZNW	57
9.1	A Redução a partir da Álgebra de dois loops	57
9.2	Uma construção de Campos Primários de Spins mais altos e sua Simetria .	61
9.3	A Fixação de gauge das correntes	63
10	Conclusões	66
A	Resumo de álgebras de Lie e Kac-Moody	69
A.1	Álgebras de Lie	69
A.2	Álgebras de Kac-Moody	71
	Referências Bibliográficas	74

Introdução

As teorias de campo em duas dimensões têm despertado, nos últimos anos, atenção especial de físicos e matemáticos devido às estruturas extremamente ricas do ponto de vista algébrico e geométrico nelas presentes. Dentro desse cenário destacam-se as teorias conformes e modelos integráveis.

As teorias conformes em duas dimensões começaram a ser melhor entendidas a partir do trabalho de Belavin, Polyakov e Zamolodchikov (BPZ) [1], com aplicações em situações físicas distintas como teoria de cordas e fenômenos críticos em duas dimensões. As simetrias nessas teorias são associadas a correntes de Noether de translação, rotação e dilatação, que entre outras coisas permitem que a teoria seja dividida em setores quirais independentes. Para cada setor da teoria obtém-se identidades de Ward que relacionam de maneira recorrente as funções de correlação entre os campos.

Das funções de correlação, interpretadas como valores esperados de produtos de operadores de campo ordenados, obtém-se a chamada álgebra de Virasoro:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m,-n} \quad m \text{ e } n \text{ inteiros}$$

onde os L_m 's são os modos normais do tensor de energia-momento da teoria e c é denominada extensão central, que comuta com todos os demais geradores. Por analogia, pode-se definir para a outra quiralidade uma outra álgebra de Virasoro com geradores \bar{L}_m que comutam com os L_m .

Dentre os campos de uma teoria conforme existem os chamados campos primários, que sob uma transformação analítica de coordenadas $z \rightarrow z'$ comporta-se como

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi'(z', \bar{z}') \left(\frac{dz'}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}}$$

onde h e \bar{h} são números reais arbitrários denominados pesos conformes de ϕ . A soma $h + \bar{h}$ é definida como a dimensão de escala do campo e $h - \bar{h}$ seu spin. Os campos primários ϕ satisfazem as equações

$$L_n \phi = \bar{L}_n \phi = 0 \quad \text{para } n > 0$$

$$L_0 \phi = h\phi \quad ; \quad \bar{L}_0 \phi = \bar{h}\phi$$

e todos os campos locais da teoria são obtidos aplicando-se os operadores L_n com $n < 0$ nos campos primários ϕ . O conjunto completo desses campos forma as chamadas “famílias conformes”, que contêm campos da forma $L_{-n_1} \dots L_{-n_N} \bar{L}_{-m_1} \dots \bar{L}_{-m_M} \phi$ e corresponde à representação de peso mais alto da álgebra de Virasoro sendo que o campo primário ϕ corresponde ao estado de peso mais alto. O estudo das representações desta álgebra possibilitou a classificação de modelos estatísticos em classes de universalidade de acordo com o valor de c e desta forma a determinação do conteúdo de expoentes críticos dos mesmos [2].

Simetrias adicionais podem ser exploradas na teoria se existirem campos primários Q_s com dimensões $(h, \bar{h}) = (s, 0)$ (ou $(0, s)$) [4]. Neste caso $\partial_{\bar{z}} Q_s = 0$ e portanto $Q_s = Q_s(z)$. Existem, desta maneira, infinitas correntes conservadas escritas na forma:

$$J_{\omega}^{(s)}(z) = \omega(z)Q_s(z) \quad , \quad \partial_{\bar{z}} J_{\omega}^{(s)}(z) = 0$$

onde $\omega(z)$ é uma função arbitrária. Um exemplo deste tipo de simetria é encontrado no modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) onde $s = 1$ e o campo Q_1 é relacionado aos geradores da álgebra de Kac-Moody. Para $s = 2$ os campos são os geradores da álgebra de Virasoro. Para $s > 2$ surgem novas estruturas algébricas conhecidas na literatura por álgebras W . Em geral uma álgebra W contém geradores $L_m, W_m^{(3)}, W_m^{(4)}, \dots, W_m^{(n)}$, que correspondem respectivamente ao tensor de energia-momento e campos primários de spin $3, 4, \dots, n$. O comutador de dois geradores com $s > 2$ em geral é um polinômio dos demais geradores e apesar do comutador satisfazer a identidade de Jacobi o conjunto dos W 's não forma uma álgebra de Lie pois não constitui um espaço vetorial.

Outro assunto, que juntamente com invariância conforme, tem sido foco de estudo é a integrabilidade de sistemas não lineares em duas dimensões. Classicamente um sistema de n graus de liberdade é tido como completamente integrável se existirem n funções $I(p, q)$ que tenham parênteses de Poisson nulo entre si e com a Hamiltoniana [3]. Tais quantidades são conhecidas como integrais de movimento e pode-se mostrar que é possível encontrar uma transformação canônica $(p, q) \rightarrow (I, \theta)$ de tal forma que as novas coordenadas sejam variáveis cíclicas, isto é, $H = H(I)$. As equações de movimento são então simplificadas:

$$\dot{I} = \{H, I\} = 0$$

$$\dot{\theta} = \{H, \theta\} = \omega(I)$$

tal que $I = \text{constante}$ e $\theta(t) = \theta(0) + \omega t$. As variáveis (θ, I) são denominadas variáveis de ângulo-ação.

No entanto nem sempre é fácil obtê-las explicitamente e além disso, modelos de teorias de campos possuem infinitos graus de liberdade. Outras técnicas, portanto, foram desenvolvidas para tratar sistemas deste tipo. Uma dessas técnicas consiste em construir potenciais de gauge de tal forma que a condição de curvatura nula seja equivalente às equações de movimento. Além de linearizar o problema este método permite explorar suas propriedades algébricas a fim de se obter as grandezas conservadas.

Uma relação mais próxima entre teorias conformes e integrabilidade surgiu a partir de uma observação de Zamolodchikov [5], em que a simetria conforme em alguns modelos era quebrada, sendo estes conduzidos a modelos integráveis com um número finito de partículas massivas.

Os modelos de Toda têm importância nesse contexto por apresentarem várias das propriedades expostas até agora e consistem, assim, em um laboratório onde pode-se tentar entender melhor a relação entre a integrabilidade e invariância conforme. Eles são divididos em classes, de acordo com a estrutura algébrica subjacente:

- Modelos de Toda Conforme (CT), relacionados às álgebras de Lie finitas, cujo exemplo mais simples é o modelo de Liouville.
- Modelos de Toda Afim (AT), relacionados às “loop álgebras” e cujo exemplo mais simples é o modelo de sine-Gordon. Tais modelos não são invariantes por transformações conformes mas são completamente integráveis [6] e possuem soluções do tipo sóliton.
- Modelos de Toda Conforme Afim (CAT), relacionados às álgebras de Kac-Moody Afim. Eles possuem as propriedades de integrabilidade e ainda apresentam invariância conforme graças à introdução de dois campos extras em relação ao modelo de Toda Afim.

Tais modelos podem ser obtidos a partir de modelos maiores através da redução hamiltoniana. O modelo CT é obtido impondo-se vínculos às correntes do modelo WZNW [7] que, como já mencionado, tem como simetria a álgebra de Kac-Moody. De maneira análoga o modelo CAT é obtido do modelo WZNW de dois loops, que tem como simetria uma álgebra de Kac-Moody de dois loops [8]. Nos dois casos os vínculos são impostos de tal forma que a invariância conforme seja preservada.

Deste processo resulta algo ainda mais interessante no que diz respeito às simetrias. No caso da redução em que se obtém o modelo CT, as correntes de Kac-Moody remanescentes do processo de redução geram uma álgebra W pelo parênteses de Dirac, que já havia sido observada nesse modelo por Gervais e Bilal [9].

Métodos para obter soluções das equações de movimento desses modelos foram primeiramente desenvolvidos por Leznov e Saveliev [10], mais especificamente para os modelos CT. A generalização deste método para se obter soluções dos demais modelos de Toda não foi automática, tendo sido obtida somente depois do surgimento na literatura dos modelos CAT, que como já mencionado, possuem dois campos extras em relação ao modelo AT correspondente, sendo que um deles é um campo livre. A dificuldade de uma generalização automática do método de Leznov e Saveliev para os modelos AT consistia na ausência de representações de peso mais alto para loop algebras, que são as estruturas algébricas destes modelos.

Soluções deste tipo para o modelo CAT foram obtidas no caso $\hat{sl}(2)$ por Babelon e Bonora e generalizadas em nosso trabalho [11] para qualquer álgebra de Kac-Moody. Obtivemos ainda as soluções dos modelos AT a partir das soluções do modelo CAT onde o campo livre extra é nulo. Mostramos na verdade que os modelos AT constituem uma versão do modelo CAT com “gauge fixado”. Observamos que o espaço das soluções regulares do campo livre extra constitui uma órbita do grupo conforme e desta forma pudemos mostrar que o campo livre pode ser eliminado com uma transformação conforme das coordenadas, fazendo com que o modelo CAT seja levado ao modelo AT juntamente com o segundo campo extra, agora definidos em novas coordenadas do espaço-tempo.

Dentre as soluções obtidas existe um interesse especial nas soluções do tipo sóliton. Como os modelos de Toda são na verdade generalizações do modelo de sine-Gordon, existe a motivação de se saber como as soluções do tipo sóliton são generalizadas. De fato elas aparecem e apresentam propriedades interessantes devido à estrutura algébrica desses modelos. O primeiro trabalho neste sentido foi feito por Hollowood [12] tratando o modelo AT no caso A_r utilizando o método de Hirota [13]. Nosso trabalho [14] consistiu em generalizar estes resultados para os modelos CAT associados a qualquer álgebra simples de Lie. Uma das vantagens de se aplicar o método de Hirota para a obtenção de tais soluções é que a dependência espaço-temporal é obtida de forma explícita. Alguns resultados sobre a aplicação do método de Hirota no modelo AT foram também obtidos por MacKay e McGhee [15]. Na construção de Leznov-Saveliev a forma da solução não é tão explícita pelo fato das soluções serem expressas como valores esperados nos estados de peso mais alto das representações da álgebra de Kac-Moody. No entanto em um trabalho paralelo ao nosso, soluções do tipo sóliton foram obtidas por Olive, Turok e Underwood [16] utilizando o método de Leznov-Saveliev.

A novidade em nossa análise foi desenvolver dentro do método de Hirota um procedimento recursivo na construção das soluções, o que fez com que superássemos algumas dificuldades, entre elas o fato das equações diferenciais para as funções tau de Hirota não serem bilineares para qualquer álgebra associada ao modelo CAT. A velocidade e a largura dos sólitons são determinadas pelas pelos autovalores da matriz $L_{ij} = l_i^\psi K_{ij}$ onde K_{ij} é a matriz de Cartan estendida de uma álgebra de Lie \mathcal{G} e l_i^ψ são inteiros na expansão da co-raiz mais alta $\frac{\psi}{\psi^2}$ em termos das co-raízes simples $\frac{\alpha_i}{\alpha_i}$ da mesma álgebra. No caso de autovalores degenerados, podemos construir diferentes soluções sólitons com mesma velocidade. Para cada autovalor não degenerado desta matriz é atribuída uma solução do tipo sóliton e portanto devem existir no máximo $\text{rank } \mathcal{G} + 1$ soluções. Mostramos que o fato de L_{ij} ser singular possibilita o truncamento da série perturbativa da função tau de Hirota e conduz a uma solução exata. Resolvemos o problema de autovalores em termos dos polinômios de Chebyshev, explorando também suas propriedades.

Pudemos perceber que existem dois tipos de degenerescências nesses problemas. O primeiro tipo é o que normalmente se encontra ao se resolver problemas de autovalores. Neste caso, uma solução sóliton é obtida a partir da combinação linear de autovetores degenerados. Já a “degenerescência do segundo tipo” aparece apenas para os casos $SU(6p)$ e $Sp(3p)$ com p inteiro, adicionando-se elementos não triviais do kernel de $L_{ij} - n^2 \lambda \delta_{ij}$ à solução de n -ésima ordem. A série, nestes casos, também é truncada, produzindo assim uma nova classe de soluções. É bem verdade que de maneira geral este tipo de solução é obtido com a série truncando em ordens mais altas do que nos casos onde este tipo de degenerescência não aparece.

Explorando ainda a conexão entre os modelos CAT e AT obtivemos uma relação entre os tensores de energia-momento das duas teorias, proporcionando maior intuição sobre o papel da quebra da invariância conforme que leva o modelo CAT ao AT. O tensor de energia-momento modificado do modelo CAT, quando a solução do campo livre é adequadamente escolhida, consiste na soma do tensor de energia-momento do modelo AT e um termo de superfície. Como no modelo CAT não existe escala de massa, a única contribuição para as massas dos sólitons do modelo AT provém do termo de superfície, o que leva a

uma expressão final simples e universal para as massas dos sólitons. Também foi possível determinar as cargas topológicas dos sólitons através de uma expressão simples.

Abordamos ainda a construção de cargas conservadas dos modelos CAT [17]. Utilizando métodos lagrangianos observamos que a estrutura de simetria destes modelos é descrita por torres infinitas de geradores com spins mais altos, que são campos primários da teoria. Esta estrutura é totalmente diferente daquela encontrada nos modelos CT. A álgebra desses geradores num dado limite reproduz a álgebra de difeomorfismos que preservam a área, w_∞ .

A tese está organizada da seguinte maneira. No capítulo 1 apresentamos um breve histórico dos modelos de Toda e suas versões em uma dimensão, descrevendo suas estruturas algébricas e propriedades de integrabilidade. No capítulo 2 introduzimos os modelos de Toda em duas dimensões do ponto de vista de teoria de campos. Discutimos as propriedades de invariância conforme, construímos as soluções de Leznov-Saveliev e fazemos a conexão entre os modelos AT e CAT. No capítulo 3 discutimos o método de Hirota, apresentando as relações de recorrência e as possíveis degenerescências. Do capítulo 4 ao capítulo 8 apresentamos a aplicação do método em casos específicos. Finalmente, no capítulo 9 discutimos a redução hamiltoniana do modelo WZNW de dois loops, a construção de campos primários de spins mais altos e a conexão com a álgebra w_∞ . Por razões de completeza apresentamos um breve resumo de álgebras de Lie e Kac-Moody no apêndice A.

Capítulo 1

As Teorias de Toda Clássicas em 1 dimensão

1.1 A Rede de Toda

As teorias de Toda surgiram há aproximadamente quarenta anos a partir de simulações numéricas realizadas por Fermi-Pasta-Ulam [18] onde tentava-se estudar a ergodicidade de sistemas que apresentavam pequenas não-linearidades.

Um sistema é dito ergódico se a partir de um estado inicial com certa energia ele evolui para um estado de equilíbrio, onde todos os modos normais são igualmente excitados, ou seja, a energia é igualmente distribuída entre eles. Um exemplo de sistema ergódico é um cristal real que pode ser visto como uma rede com imperfeições, e devido a elas a vibração não é perfeitamente linear. Já um sistema linear apresenta comportamento não ergódico se, por exemplo, um modo normal de vibração for excitado, tal excitação não deverá necessariamente se propagar para os demais modos.

A expectativa de Fermi, Pasta e Ulam era que uma rede não linear apresentasse comportamento ergódico. Eles consideraram um sistema unidimensional contínuo, uma corda com as extremidades fixas e sob uma dada tensão. Além dos termos lineares que expressam a dependência da força com o deslocamento do elemento da corda, foram considerados termos de ordens mais altas, quadráticos e cúbicos. Como eles estavam trabalhando em simulações numéricas o sistema foi discretizado e então considerado um número finito de pontos. As facilidades computacionais da época permitiram considerar até 64 pontos. Tinham, portanto, um sistema dinâmico de 64 partículas com forças agindo entre vizinhos.

A solução para o sistema, considerando-se apenas o termo linear da força, é uma vibração periódica, ou seja, se a posição inicial da corda for uma onda senoidal simples, ela oscilará desta maneira indefinidamente. A expectativa dos autores era de que ao se excitar o primeiro modo normal (eles também consideraram como condição inicial combinações de outros modos) a energia fosse sendo distribuída, devido à não linearidade das equações de movimento, aos demais modos. Depois de um tempo suficientemente grande esperava-se que a energia estaria igualmente distribuída entre todos os modos.

No entanto o resultado obtido contrariou as expectativas. Ao invés de um fluxo de energia gradual e contínuo do primeiro modo normal para os modos mais altos, o sistema apresentou um comportamento totalmente diferente. Por exemplo, considerando o problema com 32 partículas, termo quadrático na força e forma senoidal como excitação inicial, o segundo modo é então excitado, em seguida o terceiro e assim por diante. Um pouco mais tarde esta equipartição gradual de energia entre os modos sucessivos cessa e a partir

desse momento um ou outro modo predomina. Neste exemplo em particular o sistema é excitado até o quinto modo e de maneira geral em todas as simulações somente os primeiros modos trocam energia entre si. Finalmente, após um certo tempo o sistema retorna quase à configuração inicial. Desta maneira, o que se observou é que esses sistemas apresentavam comportamento recorrente, significando que o espaço de fases não era totalmente preenchido e portanto o sistema estava sujeito a leis de conservação.

Outra observação da época da experiência de Fermi-Pasta-Ulam, em que outros estudos numéricos de fluxo de energia ao longo de redes foram feitos, é que numa rede não linear e com impurezas a transferência de calor é aumentada, contrariando novamente a expectativa inicial, pois pensava-se que devido às impurezas e à não linearidade os pulsos de onda enviados de uma extremidade à outra da rede seriam espalhados dificultando assim a transferência de energia. Tal fenômeno ocorre devido à existência de alguns pulsos que não eram espalhados pelas impurezas. Tais pulsos, característicos de meios não lineares, são denominados sólitons e são portanto os responsáveis pela transferência de energia num meio não linear ser maior do que no meio linear correspondente.

Toda [19] observou que uma rede unidimensional com um potencial de interação do tipo exponencial:

$$V(r) = \frac{a}{b} \exp(-br) + ar \quad (1.1.1)$$

onde a, b são constantes positivas e r é o deslocamento relativo entre as partículas da rede, poderia ser resolvido analiticamente. Este potencial apresenta um mínimo em $r = 0$ e a força é dada por:

$$f(r) = -V'(r) = a(e^{-br} - 1)$$

Portanto o regime será atrativo quando $r > 0$ e repulsivo quando $r < 0$.

Denotando por m a massa das partículas e $y_i (i = 1, 2, \dots)$ o deslocamento da i -ésima partícula, o deslocamento relativo entre esta e a $(i + 1)$ -ésima partícula será:

$$r_i = y_{i+1} - y_i \quad (1.1.2)$$

e portanto a equação de movimento será escrita como

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -V'(r_{i-1}) + V'(r_i) \quad (1.1.3)$$

Substituindo (1.1.1) em (1.1.3) obtemos

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = a(e^{-b(y_i - y_{i-1})} - e^{-b(y_{i+1} - y_i)}) \quad (1.1.4)$$

ou em termos de r :

$$m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = a(2e^{-br_i} - e^{-br_{i-1}} - e^{-br_{i+1}}) \quad (1.1.5)$$

Para este sistema apresentar uma configuração de equilíbrio estável a rede deve ser infinita ou periódica. Toda verificou que ele apresenta soluções tipo sóliton quando $N \rightarrow \infty$. Neste limite Hénon [20] e Flaschka [21] verificaram independentemente que o modelo contém infinitas quantidades conservadas. De fato, o limite contínuo deste sistema recupera a equação KdV, que se trata de um sistema integrável.

1.2 A Molécula de Toda

A teoria da rede de Toda, quando considerada com um número finito de partículas de tal forma que as partículas dos extremos sejam fixas é conhecida na literatura de molécula de Toda. Considerando, portanto, a equação (1.1.5) com as extremidades fixas e fazendo $m = b = 1$ e $a = -1$ obtemos a seguinte equação matricial:

$$m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = -K_{ij} e^{r_j} \quad (1.2.6)$$

onde K_{ij} é identificada com a matriz de Cartan da álgebra $su(N + 1)$ quando o sistema possui N partículas. Equações similares a esta podem ser consideradas para todas as álgebras, tomando K_{ij} como suas matrizes de Cartan, que estão bem definidas na teoria de álgebras de Lie (veja apêndice A).

No caso da álgebra ser uma álgebra de Lie finita, soluções tipo sóliton não são encontradas devido ao fato de não haver configurações estáveis do vácuo. Na verdade as soluções destes sistemas correpondem a certas geodésicas em espaços simétricos [22, 23]. No entanto o sistema ainda apresenta quantidades conservadas. Este fato está relacionado à estrutura algébrica que acompanha o sistema. Para obtê-las vamos introduzir o formalismo de par de Lax para estas equações .

Seja ψ uma nova variável tal que $r_a = \sum_{b=1}^r K_{ab} \psi_b$ onde r é o rank da álgebra de Lie \mathcal{G} em que o modelo é construído. A equação (1.2.6) é então escrita como:

$$m \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -e^{K_{ab} \psi_b} \quad (1.2.7)$$

Consideremos também dois geradores, A e B , definidos em \mathcal{G} como:

$$A = \frac{1}{2} \left(\dot{\psi}_a H_a + e^{\frac{1}{2} K_{ab} \psi_b} (E_a + E_{-a}) \right) \quad (1.2.8)$$

$$B = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{2} K_{ab} \psi_b} (E_a - E_{-a}) \right) \quad (1.2.9)$$

Adotamos aqui a convenção de soma sobre os índices repetidos, que varia de 1 a $r = \text{rank} \mathcal{G}$. Os E_a 's são operadores step para as raízes simples de \mathcal{G} e H_a são os geradores da subálgebra de Cartan de \mathcal{G} na base de Chevalley. Com o auxílio das equações (A.1.10) a (A.1.12) é possível verificar que A e B satisfazem a chamada equação do par de Lax:

$$\frac{dA}{dt} - i[A, B] = 0 \quad (1.2.10)$$

que é equivalente à equação de movimento (1.2.7).

A construção de Lax permite portanto observar que o sistema possui r constantes de movimento $I_n = \text{tr} A^n$, ou seja, $\dot{I}_n = 0$. Para verificar a integrabilidade do sistema deve-se então calcular os parênteses de Poisson entre essas quantidades e verificar se elas estão em involução . Portanto, depois de uma transformação canônica para novas coordenadas onde os I_n 's são os momentos canônicos, o sistema é integrado uma vez que o número dessas quantidades se iguala ao número de graus de liberdade.

Um dos resultados mais importantes no estudo da integrabilidade destes modelos é que o parênteses de Poisson dos elementos da matriz A formam uma álgebra e podem ser escritos como:

$$\{A \otimes A\}_{PB} = \left[\mathbb{P}, A \otimes 1 + 1 \otimes A \right] \quad (1.2.11)$$

onde os produtos entre matrizes no espaço do produto tensorial são definidos como

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

Este tipo de relação é conhecido como Relação Fundamental de Poisson e está relacionada à versão clássica da equação de Yang-Baxter. Uma de suas implicações é que ela implica

$$\{I_n, I_s\}_{P.B.} = 0 \quad (1.2.12)$$

O operador \mathbb{P} é construído a partir de um operador \mathbb{C} do tipo Casimir [6], que tem como propriedade fundamental comutar com todos os geradores da álgebra em questão:

$$[\mathbb{C}, 1 \otimes T + T \otimes 1] = 0$$

e é usualmente separado em tres partes

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 + \mathbb{C}_+ + \mathbb{C}_- \quad (1.2.13)$$

onde

$$\mathbb{C}_0 = \sum_{i=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} H_i \otimes H_i \quad (1.2.14)$$

$$\mathbb{C}_+ = \sum_{\alpha > 0} \frac{\alpha^2}{2} E_\alpha \otimes E_{-\alpha} \quad (1.2.15)$$

$$\mathbb{C}_- = \sum_{\alpha > 0} \frac{\alpha^2}{2} E_{-\alpha} \otimes E_\alpha \quad (1.2.16)$$

Os operadores step são tomados na base de Chevalley, enquanto que os geradores da subálgebra de Cartan na base de Weyl-Cartan.

Finalmente o operador \mathbb{P} será dado por:

$$\mathbb{P} = -\frac{1}{2}(\mathbb{C}_+ - \mathbb{C}_-) \quad (1.2.17)$$

1.3 A Rede de Toda com Condições de Contorno Periódicas

Neste caso a rede de Toda é considerada unindo-se a primeira partícula à última por uma mola, de forma a se formar um anel. Com isso a matriz de Cartan da equação (1.2.6) não corresponde mais a uma álgebra de Lie \mathcal{G} mas a uma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ a ela associada. Este sistema também possui N quantidades conservadas e é integrável, o que pode ser observado de maneira análoga ao exemplo anterior considerando apenas que o par de Lax deve ser construído de acordo com a nova estrutura algébrica. Por consequência o

operador \mathbb{P} também pode ser construído e neste caso irá conter um parâmetro espectral, introduzido na definição de uma álgebra de Kac-Moody.

Além disso a rede de Toda apresenta uma configuração estável do vácuo, possibilitando o aparecimento de soluções tipo sóliton. De fato tais soluções são encontradas e uma maneira de construí-las é através do método de Hirota.

Deixamos a discussão de todas as propriedades algébricas e mesmo das soluções do tipo sóliton para quando apresentarmos as teorias de campos de Toda em duas dimensões.

Capítulo 2

As Teorias de Campo de Toda Clássicas

2.1 O Modelo de Toda Conforme (CT)

A versão em duas dimensões da Molécula de Toda é chamada teoria de Toda Conforme, que é uma teoria de campos relativística construída a partir de r campos escalares $\phi^a(x, t)$ dada pela lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{q}^2}{4} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b - \sum_{a,b=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}K_{ab}\phi^b} \quad (2.1.1)$$

onde K_{ab} é a matriz de Cartan de uma álgebra de Lie \mathcal{G} , q^a e \bar{q} são constantes de acoplamento. As equações de Euler-Lagrange são escritas como:

$$\partial_- \partial_+ \phi^a = \frac{q^a}{\bar{q}} e^{\bar{q}K_{ab}\phi^b} \quad (2.1.2)$$

nas variáveis do cone de luz $x^\pm = x \pm t$ e $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_x \pm \partial_t)$. Muitas vezes esta equação é encontrada na literatura como

$$\partial_- \partial_+ \varphi^a = \frac{q^a}{\bar{q}} K_{ab} e^{\bar{q}\varphi^b} \quad (2.1.3)$$

onde $\varphi^a = K_{ab}\phi^b$.

É fácil ver que a equação (2.1.3) é invariante por transformações conformes

$$x_+ \rightarrow \tilde{x}_+ = f(x_+) , \quad x_- \rightarrow \tilde{x}_- = g(x_-) \quad (2.1.4)$$

se os novos campos forem definidos como

$$e^{-\tilde{\varphi}^a(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} e^{-\varphi^a(x_+, x_-)} \quad (2.1.5)$$

Observemos que a exponencial do campo φ satisfaz a condição de campo primário de uma teoria conforme de dimensões ($h = 1/\bar{q}$, $\bar{h} = 1/\bar{q}$).

O exemplo mais simples desta teoria é o caso $r = 1$ e $K_{ab} = 2$ denominada teoria de Liouville, dada pela equação

$$\partial_- \partial_+ \phi = \frac{q^a}{\bar{q}} e^{\bar{q}2\phi}$$

A solução para as equações (2.1.2) foi obtida por Leznov e Saveliev [10] utilizando a representação de curvatura nula para potenciais de gauge. Estes potenciais são definidos, para o modelo de Toda Conforme como:

$$A_+ = \partial_+ \Phi + e^{ad\Phi} \mathcal{E}_+ = \partial_+ \Phi + \sum_{a=1}^r e^{\frac{1}{2}K_{ab}\phi^b} E_{\alpha^a} \quad (2.1.6)$$

$$A_- = -\partial_- \Phi + e^{-ad\Phi} \mathcal{E}_- = -\partial_- \Phi + \sum_{a=1}^r q^a e^{\frac{1}{2}K_{ab}\phi^b} E_{-\alpha^a} \quad (2.1.7)$$

onde

$$\Phi = \frac{\bar{q}}{2} \sum_{a=1}^r \phi^a H_a, \quad \mathcal{E}_+ = \sum_{a=1}^r E_{\alpha^a}, \quad \mathcal{E}_- = \sum_{a=1}^r q^a E_{-\alpha^a} \quad (2.1.8)$$

onde H_a são os geradores da subálgebra de Cartan de \mathcal{G} , E_{α^a} e $E_{-\alpha^a}$ são operadores step associados às raízes simples positivas e negativas respectivamente. Maiores detalhes a respeito dessas decomposições são discutidos no apêndice A. A condição de curvatura nula implica:

$$\partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+, A_-] = 0 \quad (2.1.9)$$

Utilizando as relações de comutação (A.1.10), (A.1.11) e (A.1.12) notamos que (2.1.9) é equivalente às equações de movimento (2.1.2).

Observe que o argumento inverso também é válido. Seja o potencial de gauge dado por:

$$A_+ = u_a^+ H_{\alpha^a} + f_a^+ E_{\alpha^a} \quad (2.1.10)$$

$$A_- = u_a^- H_{\alpha^a} + f_a^- E_{-\alpha^a} \quad (2.1.11)$$

Neste caso a condição (2.1.9) implica as equações

$$\begin{aligned} \partial_- u_a^+ - \partial_+ u_a^- &= f_a^+ \cdot f_a^- \\ \partial_+ \ln f_a^- &= K_{ab} u_b^+ \\ \partial_- \ln f_a^+ &= -K_{ab} u_b^- \end{aligned}$$

Definindo $\ln f_a^+ \cdot f_a^- = \frac{\bar{q}}{q^a} \varphi^a$ obtemos (2.1.3).

A condição (2.1.9) implica ainda que A_{\pm} pode ser tomado como gauge puro:

$$A_{\pm} = -\partial_{\pm} T \cdot T^{-1} \quad (2.1.12)$$

onde T pertence ao grupo cuja álgebra de Lie \mathcal{G} é sua forma real normal e o sistema pode ser linearizado:

$$(\partial_{\pm} + A_{\pm}) T = 0 \quad (2.1.13)$$

O elemento T pode ser escrito de duas maneiras diferentes:

$$T = e^{-\Phi} g_1 = e^{\Phi} g_2 \quad (2.1.14)$$

e desta forma, identificando (2.1.12) à construção (2.1.6) e (2.1.7) surgem as seguintes equações :

$$g_1 \partial_+ g_1^{-1} = e^{2ad\Phi} \mathcal{E}_+ \quad (2.1.15)$$

$$g_1 \partial_- g_1^{-1} = -2\partial_- \Phi + \mathcal{E}_- \quad (2.1.16)$$

$$\partial_+ g_2 g_2^{-1} = -2\partial_+ \Phi - \mathcal{E}_+ \quad (2.1.17)$$

$$\partial_- g_1 g_1^{-1} = e^{-2ad\Phi} \mathcal{E}_- \quad (2.1.18)$$

Observe, a partir do lado direito destas equações, que a construção dos operadores de gauge impõe uma série de vínculos no que diz respeito ao grau dos elementos do grupo, propostos em (2.1.14).

As soluções de Leznov e Saveliev são construídas a partir de estados de peso mais alto $|\lambda_a\rangle$ de alguma representação da álgebra em questão, definidos como:

$$\mathcal{E}_+ |\lambda_a\rangle = 0 \quad , \quad \langle \lambda_a | \mathcal{E}_- = 0 \quad (2.1.19)$$

Verificamos, portanto, das equações (2.1.15) e (2.1.18) que

$$\partial_+ g_1^{-1} |\lambda_a\rangle = 0 \quad , \quad \langle \lambda_a | \partial_- g_2 = 0 \quad (2.1.20)$$

e desta forma tal construção conta com dois vetores quirais: $g_1^{-1} |\lambda_a\rangle$ e $\langle \lambda_a | g_2 = 0$. Estes vetores são introduzidos na solução a partir de (2.1.14):

$$e^{-2\Phi} = g_2 g_1^{-1} \quad (2.1.21)$$

cujos valores esperados são dados por

$$e^{-2\lambda_a(\Phi)} = \langle \lambda_a | g_2 g_1^{-1} | \lambda_a \rangle \quad (2.1.22)$$

onde $\lambda_a(\Phi)$ são os autovalores dos pesos fundamentais. Assim podemos observar que os vetores quirais parametrizam a solução de Φ .

No caso de grupos não compactos os elementos podem ser expressos pela decomposição de Gauss,

$$g_1 = e^{K_-} N_+ M_- \quad (2.1.23)$$

$$g_2 = e^{K_+} N_- M_+ \quad (2.1.24)$$

onde M_+ , N_+ (M_- , N_-) são exponenciais de combinações lineares de operadores step positivos (negativos) e K_{\pm} combinações lineares de geradores da subálgebra de Cartan. Substituindo (2.1.23) em (2.1.15), a identidade só é satisfeita se:

$$M_- \partial_+ M_-^{-1} = 0 \quad , \quad \partial_+ K_- = 0 \quad (2.1.25)$$

e ao se substituir (2.1.23) em (2.1.16):

$$M_- \partial_- M_-^{-1} = e^{-adK_-} \mathcal{E}_- \quad (2.1.26)$$

Através do mesmo tipo de análise as equações (2.1.24), (2.1.17) e (2.1.18) fornecem as seguintes condições a serem satisfeitas:

$$M_+ \partial_- M_+^{-1} = 0 \quad , \quad \partial_- K_+ = 0 \quad (2.1.27)$$

e

$$M_+ \partial_+ M_+^{-1} = e^{-adK_+} \mathcal{E}_+ \quad (2.1.28)$$

A solução (2.1.22) é então escrita como:

$$e^{-\bar{q}\phi^a} = \langle \lambda_a | e^{K_+(x_+)} M_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) e^{-K_-(x_-)} | \lambda_a \rangle \quad (2.1.29)$$

onde M_+ e M_- podem ser obtidos explicitamente resolvendo-se as equações (2.1.26) e (2.1.28).

Note então que as soluções são parametrizadas por $2r$ funções quirais que são os coeficientes dos geradores em K_{\pm} . Neste caso não existem soluções do tipo sóliton pois não existe uma configuração estável do vácuo.

2.2 O Modelo de Toda Afim (AT)

O modelo de Toda Afim é, de maneira análoga, visto como a versão bidimensional da rede de Toda com condições de contorno periódicas. Assim como o modelo de Toda Conforme, esta teoria é construída por r campos escalares ϕ^a , cuja lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{q}^2}{4} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^b - \sum_{a,b=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}K_{ab}\phi^b} - \frac{4q^0}{\psi_a^2} e^{-\bar{q}K_{\psi b}\phi^b} \quad (2.2.30)$$

onde $\psi = -\alpha_0$ é a raiz mais alta da álgebra de Lie \mathcal{G} e $K_{\psi b} = 2\frac{\psi \cdot \alpha_b}{\alpha_b^2}$. A presença do novo termo no potencial introduz mudanças ao modelo tanto do ponto de vista algébrico quanto físico.

As equações de Euler-Lagrange são agora escritas como

$$\partial_- \partial_+ \phi^a = \frac{q^a}{\bar{q}} e^{\bar{q}K_{ab}\phi^b} - \frac{q^0}{\bar{q}} e^{-\bar{q}K_{\psi b}\phi^b} \quad (2.2.31)$$

onde os l_a^ψ 's estão definidos em (A.2.36). Observe que (2.2.31) não é mais invariante por transformações conformes.

O termo do potencial em (2.2.30) pode ser tomado como uma soma de 0 a r e a matriz K_{ab} passa a ser identificada como a matriz de Cartan de uma álgebra de Kac-Moody definida em (A.2.29), que possui a seguinte propriedade:

$$\sum_{a=0}^r n_a^\psi K_{ab} = \sum_{b=0}^r K_{ab} l_b^\psi = 0 \quad (2.2.32)$$

que significa que a matriz de Cartan de uma álgebra de Kac-Moody (ou matriz de Cartan de uma álgebra de Lie estendida) possui dois vetores nulos, um à esquerda (n_a^ψ) e outro à direita (l_a^ψ), definidos respectivamente em (A.1.6) e (A.2.36).

Um detalhe importante deve ser notado nesta passagem, que é a não introdução de um $(r+1)$ -ésimo campo na teoria, uma vez que a matriz de Cartan para uma álgebra de Kac-Moody é quadrada de dimensão $(r+1) \times (r+1)$ (veja equação (A.2.29) no apêndice A). Podemos entender este fato de maneira intuitiva lembrando da rede de Toda em forma de um anel. A condição periódica de contorno introduz um termo relacionando a primeira e a última equações de movimento e este vínculo faz com que o número de partículas seja igual ao número de variáveis que denotam o deslocamento relativo (r_i), que neste caso são os campos da teoria. Podemos, portanto, considerar os campos nestes modelos de forma que tenhamos $\phi^0 = 0$ sem perda de generalidade.

Observe que o sistema possui agora uma configuração de vácuo estável e a equação (2.2.31) possui uma solução constante dada por:

$$\bar{\phi}^a = K_{ab}^{-1} (\ln \gamma + \ln l_b^\psi) \quad (2.2.33)$$

onde

$$\ln \gamma = -\frac{1}{h} \sum_{a=0}^r n_a^\psi \ln l_a^\psi \quad (2.2.34)$$

e h é o número de Coxeter de \mathcal{G} definido em (A.1.7).

O fato do modelo apresentar uma configuração de vácuo estável é responsável pelo surgimento de soluções do tipo sóliton. De fato, o modelo mais simples é o caso $sl(2)$, conhecido como sinh-Gordon, mapeado no modelo sine-Gordon quando a constante de acoplamento \bar{q} é um imaginário puro.

O modelo de Toda Afim pode também ser formulado na representação de curvatura nula de potenciais de gauge que agora tomam valores numa “loop algebra”, que é a álgebra de Kac-Moody sem termo central. Não a apresentaremos nesta seção, pois veremos que trata-se de um caso particular do modelo de Toda Conforme Afim, apresentado na próxima seção.

Um método sistemático foi apresentado por Olive e Turok [24] no sentido de se construir infinitas quantidades locais conservadas e em involução, verificando, desta forma, a integrabilidade deste modelo.

2.3 O Modelo de Toda Conforme Afim (CAT)

O Modelo de Toda Conforme Afim é obtido a partir do modelo Afim, adicionando-se dois novos campos de tal forma que a invariância conforme seja verificada. Para o caso em que \mathcal{G} é $sl(2)$ este modelo foi proposto por Babelon e Bonora em [25], mas ele pode ser definido para qualquer álgebra [8] e sua lagrangiana mais geral é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{q}^2}{4} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} \partial_\rho \phi^a \partial^\rho \phi^b + \bar{q}^2 \partial_\rho \mu \partial^\rho \nu - \sum_{a,b=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}K_{ab}\phi^b} - \frac{4q^0}{\psi_a^2} e^{-\bar{q}K_{\psi b}\phi^b + 2\mu} \quad (2.3.35)$$

onde μ e ν são os novos campos introduzidos. As equações de Euler-Lagrange são :

$$\partial_- \partial_+ \phi^a = \frac{1}{\bar{q}} \left(q^a e^{\bar{q}K_{ab}\phi^b} - q^0 e^{-\bar{q}K_{\psi b}\phi^b + 2\mu} \right) \quad (2.3.36)$$

$$\partial_- \partial_+ \mu = 0 \quad (2.3.37)$$

$$\partial_- \partial_+ \nu = \frac{2}{\psi^2} \frac{q^0}{\bar{q}} e^{-\bar{q}K_{\psi b}\phi^b + 2\mu} \quad (2.3.38)$$

e a invariância conforme é verificada através das transformações $x_+ \rightarrow \tilde{x}_+ = f(x_+)$, $x_- \rightarrow \tilde{x}_- = g(x_-)$ com os campos se transformando como:

$$e^{-\tilde{\phi}^a(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^{\frac{r^a}{\bar{q}}} \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^{\frac{r^a}{\bar{q}}} e^{-\phi^a(x_+, x_-)} \quad (2.3.39)$$

$$e^{-\tilde{\mu}(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^{\frac{h}{2\bar{q}}} \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^{\frac{h}{2\bar{q}}} e^{-\mu(x_+, x_-)} \quad (2.3.40)$$

$$e^{-\tilde{\nu}(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^B \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^B e^{-\nu(x_+, x_-)} \quad (2.3.41)$$

onde B é uma constante arbitrária, h é o número de Coxeter da álgebra em questão e r^a é um vetor definido como:

$$r^a = \sum_{a=1}^{\text{rank}\mathcal{G}} K_{ab}^{-1} \quad (2.3.42)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\sum_{b=1}^{\text{rank}\mathcal{G}} K_{ab}r^b = 1, \quad \sum_{b=1}^{\text{rank}\mathcal{G}} K_{\psi b}r^b = h - 1 \quad (2.3.43)$$

As equações (2.3.39), (2.3.40), e (2.3.41) mostram que as exponenciais dos campos ϕ^a , μ e ν são campos primários de uma teoria conforme com dimensões $(\frac{r^a}{\bar{q}}, \frac{r^a}{\bar{q}})$, $(\frac{h}{2\bar{q}}, \frac{h}{2\bar{q}})$ e (B, B) respectivamente.

As equações de movimento (2.3.36), (2.3.37) e (2.3.38) são também obtidas a partir da condição de curvatura nula (2.1.9) de um potencial de gauge definido por

$$A_+ = \partial_+ \Phi + e^{ad\Phi} \mathcal{E}_+, \quad A_- = -\partial_- \Phi + e^{-ad\Phi} \mathcal{E}_- \quad (2.3.44)$$

onde agora

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{\text{rank}\mathcal{G}} \phi^a H_a^0 + \mu d + \frac{1}{2} \nu c \quad (2.3.45)$$

$$\mathcal{E}_+ = \sum_{a=1}^{\text{rank}\mathcal{G}} E_{\alpha_a}^0 + E_{-\psi}^1, \quad \mathcal{E}_- = \sum_{a=1}^{\text{rank}\mathcal{G}} q^a E_{-\alpha_a}^0 + q^0 E_{\psi}^{-1} \quad (2.3.46)$$

e agora Φ vive na subálgebra de Cartan de uma álgebra de Kac-Moody, \mathcal{E}_+ e \mathcal{E}_- são operadores step associados a raízes positivas e negativas dessa álgebra respectivamente. Veja mais detalhes no apêndice A.

A expressão (2.3.45) ilustra como foram introduzidos os novos campos μ e ν , no modelo, ou seja, eles são expressos como coeficientes dos geradores da subálgebra de Cartan de uma álgebra de Kac-Moody. Observe ainda que se μ se anular o modelo de Toda Afim é recuperado e o campo ν atua apenas como um espectador.

Observe que esta construção dos potenciais de gauge é baseada totalmente no caso do modelo AT, e introduzindo estados de peso mais alto, agora para uma álgebra de Kac-Moody, as soluções de Leznov-Saveliev são obtidas também neste caso:

$$e^{-\bar{q}(\phi^a(x_+, x_-) - l_a^\psi \nu(x_+, x_-))} = \langle \lambda_a | e^{K_+(x_+)} M_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) e^{-K_-(x_-)} | \lambda_a \rangle \quad (2.3.47)$$

$$e^{-\nu(x_+, x_-)} = \langle \lambda_0 | e^{K_+(x_+)} M_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) e^{-K_-(x_-)} | \lambda_0 \rangle \quad (2.3.48)$$

$$\mu(x_+, x_-) = \mu_+(x_+) + \mu_-(x_-) \quad (2.3.49)$$

onde $\mu_\pm(x_\pm)$ são funções arbitrárias, $K_\pm(x_\pm)$ são elementos da subálgebra de Cartan da álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ associada a \mathcal{G} , que contém os parâmetros da solução

$$K_\pm(x_\pm) = \sum_{a=1}^{\text{rank}\mathcal{G}} \theta_\pm^a(x_\pm) H_a^0 \mp 2\mu_\pm(x_\pm) D + \xi_\pm(x_\pm) C \quad (2.3.50)$$

e M_\pm são agora exponenciais de combinações lineares reais dos operadores step positivos/negativos de $\hat{\mathcal{G}}$.

Notamos agora que as soluções dependem de $2(r+2)$ parâmetros quirais. No entanto este resultado não nos mostra uma dependência explícita nas coordenadas do espaço-tempo. Esta é uma das razões pelas quais optamos construir as soluções do tipo sóliton pelo método de Hirota, pois como veremos, a forma das soluções é evidenciada. No entanto Olive, Turok e Underwood [16] utilizaram a construção de Leznov e Saveliev para determinar as soluções do tipo sóliton nas teorias de Toda.

2.4 A Conexão entre os modelos CAT e AT

Depois de termos apresentado os modelos de Toda de acordo com sua estrutura algébrica, podemos agora mostrar que o modelo AT é na verdade o modelo CAT com simetria conforme “gauge-fixada”. Primeiramente vamos definir novos campos φ e η como:

$$\varphi^a = \phi^a - \frac{2r^a}{h}\mu \quad \eta = \frac{2}{h}\mu \quad (2.4.51)$$

o que faz com que as equações de movimento do modelo CAT sejam escritas como

$$\partial_- \partial_+ \varphi^a = \frac{1}{\bar{q}} \left(q^a e^{\bar{q}K_{ab}\varphi^b} - l_a^\psi q^0 e^{-\bar{q}K_{\psi b}\varphi^b} \right) e^{\bar{q}\eta} \quad (2.4.52)$$

$$\partial_- \partial_+ \eta = 0 \quad (2.4.53)$$

$$\partial_- \partial_+ \nu = \frac{2}{\psi^2} \frac{q^0}{\bar{q}} e^{-\bar{q}K_{\psi b}\varphi^b} e^{\bar{q}\eta} \quad (2.4.54)$$

e o termo Φ em (2.3.45) é agora escrito como:

$$\Phi = \frac{\bar{q}}{2} \left(\sum_{a=1}^{\text{rank}G} \varphi^a H_a^0 + \eta T_3 + \nu c \right) \quad (2.4.55)$$

com T_3 definido em (A.2.27) e onde usamos a identidade:

$$\sum_{a=1}^r r^a H_a^0 = 2\hat{\delta} \cdot H^0$$

obtida a partir das relações

$$\hat{\delta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha>0} \frac{\alpha}{\alpha^2} = \sum_{a=1}^r \frac{\lambda_a}{\alpha_a^2}$$

e

$$\sum_{a=1}^r 2 \frac{\alpha_a}{\alpha_a^2} K_{ab}^{-1} = 2 \frac{\lambda_b}{\alpha_b^2}$$

Observe que as transformações (2.3.39) e (2.3.40) que mantêm as equações de movimento invariantes são agora escritas como:

$$e^{-\varphi^a(x_+, x_-)} \rightarrow e^{-\tilde{\varphi}^a(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = e^{-\varphi^a(x_+, x_-)} \quad (2.4.56)$$

$$e^{-\eta(x_+, x_-)} \rightarrow e^{-\tilde{\eta}(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} = \left(\frac{df}{dx_+} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\frac{dg}{dx_-} \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} e^{-\eta(x_+, x_-)} \quad (2.4.57)$$

e a equação (2.3.41) permanece inalterada. A solução da equação (2.4.53) é dada por:

$$\eta(x_+, x_-) = \eta_+(x_+) + \eta_-(x_-) \quad (2.4.58)$$

onde η_+ (η_-) é uma função arbitrária de x_+ (x_-) e a fixação de gauge é feita através desta. Consideremos uma transformação conforme com os campos se transformando por (2.3.41), (2.4.56) e (2.4.57) onde

$$f'(x_+) = e^{\eta_+(x_+)} \quad , \quad g'(x_-) = e^{\eta_-(x_-)} \quad (2.4.59)$$

Desta forma teremos

$$e^{-\tilde{\varphi}^a(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} \rightarrow e^{-\varphi^a(x_+, x_-)}, \quad e^{-\tilde{\eta}(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} \rightarrow 1, \quad e^{-\tilde{\nu}(\tilde{x}_+, \tilde{x}_-)} \rightarrow e^{-\nu(x_+, x_-)} \quad (2.4.60)$$

concluindo que o espaço das soluções regulares do campo η constitui uma órbita do grupo conforme e assim, para cada solução de η as equações do modelo CAT poderão ser escritas como

$$\tilde{\partial}_- \tilde{\partial}_+ \tilde{\varphi}^a = \frac{1}{\bar{q}} \left(q^a e^{\bar{q} K_{ab} \tilde{\varphi}^b} - l_a^\psi q^0 e^{-\bar{q} K_{\psi b} \tilde{\varphi}^b} \right) \quad (2.4.61)$$

$$\tilde{\partial}_- \tilde{\partial}_+ \tilde{\nu} = \frac{2}{\psi^2} \frac{q^0}{\bar{q}} e^{-\bar{q} K_{\psi b} \tilde{\varphi}^b} \quad (2.4.62)$$

As novas coordenadas do espaço-tempo são determinadas a partir das originais por:

$$\tilde{x}_+ = \int^{x_+} dy_+ e^{\eta_+(y_+)}, \quad \tilde{x}_- = \int^{x_-} dy_- e^{\eta_-(y_-)}$$

Verifica-se, assim, que para cada solução de η existe um conjunto de novas equações que nas novas variáveis do espaço-tempo aparecem independentes do campo original η . Observe que as equações (2.4.61) nas novas variáveis são as equações do modelo AT. Percebemos, portanto, que uma vez obtidas as soluções das equações do modelo AT, as equações do modelo CAT também serão determinadas e após essas considerações desprezamos as tildes daqui em diante.

A lagrangiana do modelo CAT nas novas variáveis é escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{q}^2}{4} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} \partial_\rho \varphi^a \partial^\rho \varphi^b + \frac{\bar{q}^2}{2} \sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \partial_\rho \varphi^a \partial^\rho \eta + \bar{q}^2 \frac{h}{2} \partial_\rho \eta \partial^\rho \nu - U(\varphi, \eta) \quad (2.4.63)$$

e o potencial é

$$U(\varphi, \eta) = \sum_{a=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}(K_{ab}\varphi^b + \eta)} + \frac{4q^0}{\psi^2} e^{\bar{q}(-K_{\psi b}\varphi^b + \eta)} \quad (2.4.64)$$

Introduzindo o vetor

$$\varphi \equiv \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \varphi^a \quad (2.4.65)$$

teremos o potencial (2.4.64) escrito como

$$U(\varphi, \eta) = \sum_{j=0}^r \frac{4q^j}{\alpha_j^2} e^{\bar{q}(\alpha_j \cdot \varphi + \eta)} \quad (2.4.66)$$

lembrando que $\alpha_0 = -\psi$ é a raiz simples extra da álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$. Observe que o potencial (2.4.66) é invariante sob a transformação

$$\varphi \rightarrow \varphi + \frac{2\pi i}{\bar{q}} \mu^\vee; \quad \eta \rightarrow \eta + \frac{2\pi i}{\bar{q}} n \quad (2.4.67)$$

onde μ^\vee é um co-peso de \mathcal{G} , definido como $\mu^\vee = \sum_{a=1}^r m_a \frac{2\lambda_a}{\alpha_a^2}$ onde λ_a são pesos fundamentais de \mathcal{G} , m_a e n são inteiros. A transformação (2.4.67) é complexa e portanto no regime em

que a constante de acoplamento \bar{q} for imaginário puro haverá soluções reais do vácuo degeneradas. Este fato generaliza para qualquer álgebra de Lie \mathcal{G} o vácuo do modelo de sine-Gordon cujos mínimos do potencial são identificados com a rede dos co- pesos de $su(2)$. Tal estrutura do vácuo será responsável pelo aparecimento do soluções do tipo sóliton nos modelos AT e CAT.

O tensor de energia-momento canônico correspondente á lagrangiana (2.4.63) é escrito como

$$\begin{aligned} \Theta_{\rho\sigma} &= \frac{\bar{q}^2}{2} \sum_{a,b=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab} \left[\partial_\rho \varphi^a \partial_\sigma \varphi^b - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^b \right] \\ &+ \frac{\bar{q}^2}{2} \sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} [\partial_\rho \varphi^a \partial_\sigma \eta + \partial_\sigma \varphi^a \partial_\rho \eta - g_{\rho\sigma} \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \eta] \\ &+ \bar{q}^2 \frac{\hbar}{2} [\partial_\rho \eta \partial_\sigma \nu + \partial_\sigma \eta \partial_\rho \nu - g_{\rho\sigma} \partial_\mu \eta \partial^\mu \nu] \\ &+ g_{\rho\sigma} \left[\sum_{a=1}^r \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}(K_{ab}\varphi^b + \eta)} + \frac{4q^0}{\psi^2} e^{\bar{q}(-K_{ab}\varphi^b + \eta)} \right] \end{aligned} \quad (2.4.68)$$

onde $\rho, \sigma = 0, 1$ são índices do espaço-tempo, ($\partial_0 \equiv \partial_t, \partial_1 \equiv \partial_x$) e $g_{00} = 1, g_{11} = -1, g_{01} = g_{10} = 0$.

O traço deste tensor é

$$\Theta^\rho_\rho = 2U(\varphi, \eta) \quad (2.4.69)$$

mas como esta teoria é invariante conforme tal tensor pode ser “modificado” e colocado numa forma em que tenha traço nulo. Esse procedimento é usual e para isso basta adicionar um termo do tipo

$$W_{\rho\sigma} = (\partial_\rho \partial_\sigma - g_{\rho\sigma} \partial^2) f$$

onde f é uma função arbitrária. Percebe-se também que o termo adicionado não viola a conservação do tensor original. O traço deste é dado por

$$W^\rho_\rho = -\partial^2 f$$

e desta maneira a função f é determinada de forma a anular o traço do novo tensor de E-M. O tensor “modificado” do modelo CAT é dado por:

$$\Theta_{\rho\sigma}^{\text{CAT}} = \Theta_{\rho\sigma} - \bar{q} (\partial_\rho \partial_\sigma - g_{\rho\sigma} \partial^2) \left(\sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \varphi^a + h\nu \right) \quad (2.4.70)$$

Escolhendo a solução $\eta = 0$ onde os modelos AT e CAT são definidos nas mesmas coordenadas espaço-temporais e portanto a dinâmica dos φ^a 's é a mesma para os dois modelos, os tensores de E-M para as duas teorias se relacionam por:

$$\Theta_{\rho\sigma}^{\text{AT}} = \Theta_{\rho\sigma}^{\text{CAT}} |_{\eta=0} + \bar{q} (\partial_\rho \partial_\sigma - g_{\rho\sigma} \partial^2) \left(\sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \varphi^a + h\nu \right) \quad (2.4.71)$$

de onde podemos adquirir alguma intuição do papel da quebra da simetria conforme. Considerando soluções clássicas do tipo sóliton que possam ser colocadas em repouso num dado

referencial de Lorentz, a energia pode ser interpretada como a massa de repouso do sóliton e portanto deve ser proporcional a alguma escala de massa da teoria. No entanto tal escala de massa não existe no modelo CAT devido à invariância de escala e então a massa dos sólitons deve ser nula. Desta forma o primeiro termo do lado direito de (2.4.71) não contribui para o cálculo da massa dos sólitons do modelo AT e esta é portanto calculada a partir do termo de divergência total de (2.4.71):

$$\begin{aligned} \frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta_{01}^{AT} \\ &= \bar{q} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \partial_t \left(\sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \varphi^a + h\nu \right) \\ &= \bar{q} \partial_t \left(\sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \varphi^a + h\nu \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \quad (2.4.72)$$

onde M é a massa do sóliton e v sua velocidade em unidades da velocidade da luz. A equação (2.4.72) será usada para determinar as massas dos sólitons uma vez conhecidas as formas explícitas dos campos obtidas através do método de Hirota.

Capítulo 3

O Método de Hirota

Apresentamos neste capítulo o método utilizado na obtenção de soluções do modelo AT, desenvolvido por Hirota na década de 70 [13] e que se mostrou adequado na obtenção de soluções tipo sólitons em alguns sistemas não lineares. Inspirado na aplicação deste método para a rede de Toda unidimensional, Hollowood [12] conseguiu utilizá-lo no modelo AT para a álgebra $sl(r+1)$. Nosso trabalho consistiu em sua generalização de tal forma que fosse aplicável em qualquer álgebra de Lie \mathcal{G} .

3.1 A Construção de um Método de Recorrência

As equações (2.4.61) e (2.4.62) podem ser escritas numa forma mais compacta definindo-se os campos

$$\zeta^a = \varphi^a + l_a^\psi \frac{\psi^2}{2} \nu, \quad \zeta^0 = \frac{\psi^2}{2} \nu \quad (3.1.1)$$

e usando o fato que

$$K_{ab} l_b^\psi = 2\alpha_a \cdot \psi / \psi^2 \equiv -K_{a0}$$

e

$$K_{0b} l_b^\psi \equiv -2\psi \cdot \alpha_b / \alpha_b^2 l_b^\psi \equiv -K_{00}$$

Assim, essas equações são reescritas como

$$\partial_- \partial_+ \zeta^i = \frac{q^i}{\bar{q}} e^{\bar{q} K_{ij} \zeta^j} \quad (3.1.2)$$

onde $i, j = 0, 1, 2 \dots r$. Observe, no entanto, que a equação acima não é a equação da teoria de Toda Afim, uma vez que agora existem $r+1$ campos.

Para se implementar o método de Hirota devemos primeiramente introduzir as funções τ como:

$$\zeta^j = \frac{1}{\bar{q}} \left(l_j^\psi (-\ln \tau_j + \sigma) + \vartheta_j \right) \quad (3.1.3)$$

e

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_a = \sum_{b=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} (RK)_{ab}^{-1} \ln \left(\frac{q^0 l_b^\psi}{q^b} \right) \quad (3.1.4)$$

Onde R é a matriz dada por $R_{ab} = \delta_{ab} + n_b^\psi$ e

$$(R^{-1})_{ab} = \delta_{ab} - \frac{n_b^\psi}{h} \quad (3.1.5)$$

As variáveis ϑ_j são introduzidas de maneira que as equações de Hirota não dependam das constantes de acoplamento e o campo σ reflete a liberdade de introduzirmos uma variável extra uma vez que ela se anulará na exponencial devido à presença do vetor nulo l_a^ψ .

Substituindo (3.1.3) em (3.1.2) obtemos as seguintes equações desacopladas:

$$\Delta(\tau_j) = \beta l_j^\psi \left(1 - \prod_{k=0}^{\text{rank } \mathcal{G}} \tau_k^{-K_{jk}} \right) \quad (3.1.6)$$

$$\partial_+ \partial_- \sigma = \beta \quad (3.1.7)$$

onde o operador Δ é introduzido para simplificar a notação. Ele é definido como:

$$\Delta(F) \equiv \partial_+ \partial_- \ln F = \frac{\partial_+ \partial_- F}{F} - \frac{\partial_+ F \partial_- F}{F^2} \quad (3.1.8)$$

e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\Delta(FG) = \Delta(F) + \Delta(G), \quad \Delta(F^\gamma) = \gamma \Delta(F) \quad (3.1.9)$$

A constante β é definida como

$$\beta = \frac{q^j}{l_j^\psi} e^{K_{jk} \vartheta_k} \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, r \quad (3.1.10)$$

e utilizando (3.1.5) pode-se mostrar que a mesma assume o mesmo valor independentemente do índice j e desta maneira as equações de Hirota não dependem das constantes de acoplamento.

A solução de (3.1.7) será portanto:

$$\sigma(x_+, x_-) = \beta x_+ x_- + F(x_+) + G(x_-) \quad (3.1.11)$$

onde F e G são funções arbitrárias. Os campos φ^a e ν são escritos em termos das funções τ como:

$$\varphi^a = \frac{1}{\bar{q}} \left(-\ln \frac{\tau_a}{\tau_0^{l_a^\psi}} + \vartheta_a \right) \quad \nu = \frac{1}{\bar{q}} \frac{2}{\psi^2} (\sigma - \ln \tau_0) \quad (3.1.12)$$

As funções τ , por sua vez, podem ser relacionadas com as soluções de Leznov-Saveliev. Substituindo (3.1.12) em (2.3.47) e (2.3.48) obtemos

$$\tau_a = e^{\frac{2}{\psi^2} l_a^\psi \sigma + \vartheta_a} \left\langle \lambda_{(a)} \left| e^{K_+(x_+)} M_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) e^{-K_-(x_-)} \right| \lambda_{(a)} \right\rangle \quad (3.1.13)$$

$$\tau_0 = e^{\frac{2}{\psi^2} \sigma} \left\langle \lambda_{(0)} \left| e^{K_+(x_+)} M_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) e^{-K_-(x_-)} \right| \lambda_{(0)} \right\rangle \quad (3.1.14)$$

Em seu trabalho sobre soluções de Hirota para os modelos de Toda Afim associados à álgebra $sl(r + 1)$, Hollowood introduziu $r + 1$ funções τ para r campos. A partir das equações (3.1.13) e (3.1.14) podemos observar que a função τ extra, mais precisamente τ_0 , é na verdade relacionada ao campo ν e desta forma a equação de Hirota é intrinsecamente relacionada à estrutura do modelo CAT.

O método desenvolvido por Hirota consiste em expandir as funções τ como:

$$\tau_i = 1 + \epsilon \tau_i^{(1)} + \dots + \epsilon^{N_i} \tau_i^{(N_i)} \tag{3.1.15}$$

onde ϵ não é necessariamente infinitesimal, mas deve ser considerado um parâmetro que irá separar equações em ordens distintas. As equações (3.1.6) devem portanto ser expandidas em ϵ e resolvidas a cada ordem. Uma solução exata é obtida quando a série trunca numa ordem finita de ϵ . Para obtermos as soluções partiremos de um ansatz na dependência espacial e temporal das funções τ :

$$\tau_i^{(n)} = \delta_i^{(n)} e^{n\Gamma} \tag{3.1.16}$$

com

$$\Gamma = \gamma_+ x_+ + \gamma_- x_- + \xi = \gamma(x - vt) + \xi \tag{3.1.17}$$

onde $\delta_i^{(n)}$ são vetores constantes que serão determinados das equações de Hirota, $\gamma_{\pm} = \frac{\gamma}{2}(1 \pm v)$ e ξ são parâmetros da solução.

Levando em consideração o ansatz (3.1.16) vamos mostrar que uma condição necessária para que ocorra o truncamento da série (3.1.15) é que a matriz K_{ij} que aparece em (3.1.6) seja singular, ou seja, que exista um vetor nulo:

Teorema 3.1.1 *Suponhamos que exista uma solução das equações de Hirota e denotemos por N_i a potência mais alta de ϵ na expansão de τ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, rank- \mathcal{G} . Então N_i são as componentes de um vetor nulo da matriz de Cartan estendida:*

$$K_{ij} N_j = 0 \tag{3.1.18}$$

Como o autovalor zero de K_{ij} é não degenerado e l_i^ψ é um vetor nulo de K , segue que $N_i = \kappa l_i^\psi$, onde κ é um inteiro positivo.

Prova Como $K_{ii} = 2$ e $K_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$ podemos observar que multiplicando os dois lados de (3.1.6) por τ_j^2 as potências dos τ 's serão todas positivas. Depois da multiplicação o termo de potência mais alta em ϵ no lado esquerdo de (3.1.6) será $\epsilon^{N_i K_{ii}} (\tau_i^{(N_i)})^2 \Delta (\tau_i^{(N_i)})$ que é zero por causa do ansatz (3.1.16). Observe que no lado direito existe um único termo que contribui à potência mais alta de ϵ :

$$(\tau_i^{(N_i)})^{K_{ii}} \epsilon^{N_i K_{ii}} = \prod_{k=0, k \neq i}^{\text{rank } \mathcal{G}} (\tau_k^{(N_k)})^{-K_{ik}} \epsilon^{-N_k K_{ik}} \tag{3.1.19}$$

Como a soma das potências de ϵ no lado direito de (3.1.19) deve ser igual a $N_i K_{ii}$ obtemos (3.1.18). \square

Desta maneira percebemos que uma condição necessária para que a expansão (3.1.15) seja truncada a uma ordem finita (quando utilizamos o ansatz (3.1.16)) é que a matriz K_{ij} que aparece nas equações de Hirota (3.1.6) seja singular.

Assim, substituindo a expansão (3.1.15) nas equações de Hirota (3.1.6) e levando em conta o ansatz (3.1.16), observamos que em ordem 0 de ϵ a equação é satisfeita trivialmente. Já em ordem 1 obtemos a equação :

$$L_{ij}\delta_j^{(1)} = \lambda\delta_i^{(1)} \tag{3.1.20}$$

onde $L_{ij} = l_i^\psi K_{ij}$, e $\lambda = \frac{\gamma_+\gamma_-}{\beta} = \frac{\gamma^2(1-v^2)}{4\beta}$. Portanto os parâmetros da solução serão restritos pelos autovalores de L_{ij} . Desta forma, se os autovalores são não degenerados haverá no máximo $\text{rank-}\mathcal{G} + 1$ soluções de um sóliton. No entanto, se houver degenerescências poderemos ter muito mais soluções. Os $\delta^{(n)}$'s de ordens mais altas serão obtidos unicamente a partir de $\delta^{(1)}$ de maneira recursiva com exceção dos casos $SU(6p)$ e $SP(3p)$, e a maneira de determiná-los é o que descrevemos em seguida.

As equações de Hirota (3.1.6) podem ser escritas como:

$$G_i = \beta F_i \tag{3.1.21}$$

onde

$$G_i \equiv \tau_i^2 \Delta(\tau_i) \tag{3.1.22}$$

$$F_i \equiv l_i^\psi \left(\tau_i^2 - \prod_{k=0, k \neq i}^{\text{rank}\mathcal{G}} \tau_k^{-K_{ik}} \right) \tag{3.1.23}$$

que possuem as seguintes expansões em ϵ :

$$\begin{aligned} G_i &= \epsilon G_i^{(1)} + \epsilon^2 G_i^{(2)} + \dots \\ F_i &= \epsilon F_i^{(1)} + \epsilon^2 F_i^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Obviamente teremos ordem a ordem (3.1.21) dada por:

$$G_i^{(n)} = \beta F_i^{(n)} \tag{3.1.24}$$

onde os dois lados podem ser reescritos como:

$$G_i^{(n)} = \partial_+ \partial_- \tau_i^{(n)} + \mathcal{A}_i^{(n)}(\tau^{(n-1)}, \dots, \tau^{(1)}) \tag{3.1.25}$$

$$F_i^{(n)} = L_{ij} \tau_j^{(n)} + \mathcal{B}_i^{(n)}(\tau^{(n-1)}, \dots, \tau^{(1)}) \tag{3.1.26}$$

$\mathcal{A}^{(n)}$ and $\mathcal{B}^{(n)}$ são somas de produtos dos τ 's de tal forma que a soma das ordens destes produtos seja n . Levando sempre em conta o ansatz (3.1.16) para as funções τ daqui em diante, substituímos (3.1.25) e (3.1.26) em (3.1.24) e obtemos:

$$\left(L_{ij} - n^2 \lambda \delta_{ij} \right) \delta_j^{(n)} = V_i^{(n-1)} \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.1.27}$$

onde $\lambda \equiv \gamma_+ \gamma_- / \beta$. Os termos $\delta^{(k)}$ com $k < n$ estão agrupados em $V^{(n-1)}$, que é não linear nos δ 's e é definido como:

$$V_i^{(n-1)}(\delta^{(n-1)}, \dots, \delta^{(1)}) = \frac{\mathcal{A}_i^{(n)} / \beta - \mathcal{B}_i^{(n)}}{\exp n\Gamma} = \lambda a_i^{(n-1)} - b_i^{(n-1)} \tag{3.1.28}$$

Novas quantidades forma introduzidas para simplificar a notação :

$$b_i^{(n-1)} = B_i^{(n)} / \exp n\Gamma, \quad a_i^{(n-1)} = A_i^{(n)} / (\gamma_+ \gamma_- \exp n\Gamma)$$

Observe que $V_i^{(n-1=0)} = 0$ porque:

$$a_i^{(0)} = b_i^{(0)} = 0 \quad ; \quad i = 0, \dots, r \quad (3.1.29)$$

e (3.1.20) é obtida nesta ordem. Portanto a expansão da função τ deve sempre começar em primeira ordem com $\delta^{(1)}$ sendo um autovetor de L_{ij} . Este fato faz com que o parâmetro λ da equação de Hirota seja um dos autovalores $\lambda^{[k]}$ da matriz L_{ij} . Como $V_i^{(n-1)}$ depende de $\delta^{(k)}$ com $k < n$ por definição, a equação (3.1.27) constitui uma relação recursiva para se determinar os δ 's de ordens superiores. No caso de $n^2\lambda$ não ser igual a nenhum autovalor de L_{ij} , a relação de recorrência será:

$$\delta_i^{(n)} = S_{ij}^{(n)-1} V_j^{(n-1)} \quad ; \quad S_{ij}^{(n)} \equiv L_{ij} - n^2\lambda\delta_{ij} \quad (3.1.30)$$

Agora, se $n^2\lambda$ for igual a um dos autovalores de L_{ij} teremos um segundo tipo de degenerescência que tornará possível a construção de novas soluções da equação de Hirota. Expandimos $V_j^{(n-1)}$ e $\delta_i^{(n)}$ como:

$$\delta_i^{(n)} = \sum_k d_{[k]}^{(n)} v_i^{[k]} \quad ; \quad V_i^{(n-1)} = \sum_k c_{[k]}^{(n-1)} v_i^{[k]} \quad (3.1.31)$$

onde $v_j^{[k]}$ são os autovetores da matriz L_{ij} :

$$L_{ij} v_j^{[k]} = \lambda^{[k]} v_i^{[k]} \quad (3.1.32)$$

Substituindo esta expansão na equação (3.1.27) obtemos

$$(\lambda^{[k]} - n^2\lambda) d_{[k]}^{(n)} = c_{[k]}^{(n-1)} \quad (3.1.33)$$

Portanto se $\lambda^{[k]} \neq n^2\lambda$ os coeficientes $d_{[k]}^{(n)}$ são determinados a partir de (3.1.33). No entanto se $\lambda^{[k]} = n^2\lambda$ tais coeficientes ficarão indeterminados e poderão ser escolhidos arbitrariamente. Por consistência o segundo membro deve se anular e de fato nesses casos isso acontece. A arbitrariedade introduzida no caso citado acima faz com que novos parâmetros sejam introduzidos no processo de construção das soluções e desta maneira novas soluções do tipo sóliton ocorrem nos modelos AT e CAT além das previstas pelo método de recorrência.

Será mostrado nas próximas seções que os autovalores de L_{ij} para as álgebras clássicas são dados por:

$$\lambda^{[j]} = 4c_g \sin^2 \left(\frac{j\pi}{h} \right) \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, r_g \quad (3.1.34)$$

onde os valores de c_g e r_g para as álgebras correspondentes são lidos da tabela 3.1

No caso de $SO(2r + 1)$ existe ainda mais um autovalor $\lambda = 2$ que não está entre os definidos em (3.1.34) e da mesma forma, a álgebra $SO(2r)$ possui ainda mais dois autovalores $\lambda = 2$.

Como consequência de (3.1.34), para as álgebras clássicas as degenerescências do segundo tipo aparecem se existirem j, j' e n tais que $\sin^2 \left(\frac{j\pi}{h} \right) = n^2 \sin^2 \left(\frac{j'\pi}{h} \right)$. As soluções desta equação são bastante raras e podem ser obtidas a partir de um teorema demonstrado por H. Gillet [26] que apresentamos sem demonstração :

Álgebra	$c_{\mathcal{G}}$	$r_{\mathcal{G}}$
$SU(r+1), SP(r)$	1	rank- \mathcal{G}
$SO(2r)$	2	rank- $\mathcal{G}-2$
$SO(2r+1)$	2	rank- $\mathcal{G}-1$

Tabela 3.1: valores de $c_{\mathcal{G}}$ e $r_{\mathcal{G}}$

Teorema 3.1.2 *As únicas soluções da equação*

$$\sin(a\pi) = c \sin(b\pi) \tag{3.1.35}$$

com a, b e c números racionais não nulos são $c = \pm 1$ ou $\{\sin(a\pi), \sin(b\pi)\} \subset \{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$.

Degenerescências do segundo tipo aparecerão para as álgebras $SU(6p)$ e $SP(3p)$, com p inteiro positivo (nos dois casos $h = 6p$), $j = 3p$, $j' = p$ e $n = 2$. Veremos que nesses casos novas soluções do tipo sóliton serão obtidas. Este tipo de degenerescência não aparece no caso das álgebras excepcionais.

3.2 Cálculo de V_i^{n-1}

Vamos agora calcular o termo $V_i^{(n-1)}$ definido em (3.1.28). Este cálculo pode ser facilmente efetuado utilizando-se a regra de Leibnitz:

$$\frac{d^n(AB)}{dx^n} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{d^l A}{dx^l} \frac{d^{n-l} B}{dx^{n-l}} \tag{3.2.36}$$

e também o fato de que para uma função arbitrária H dos τ 's vale

$$H^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n H}{d\epsilon^n} \Big|_{\epsilon=0} \tag{3.2.37}$$

Primeiramente vamos derivar a forma de $a_i^{(n-1)}$. De (3.1.8) e (3.1.22) temos que

$$G_i = \tau_i \partial_+ \partial_- \tau_i - \partial_+ \tau_i \partial_- \tau_i$$

Desta forma, com o auxílio de (3.2.36) e (3.2.37) obtemos

$$G_i^{(n)} = \gamma_+ \gamma_- \sum_{l=0}^n \left((n-l)^2 - l(n-l) \right) \delta_i^{(l)} \delta_i^{(n-l)} e^{n\Gamma} \tag{3.2.38}$$

Dividindo por $\gamma_+ \gamma_- \exp(n\Gamma)$ e subtraindo o termo $n^2 \delta_i^{(n)}$ que corresponde ao termo $\partial_+ \partial_- \tau_i$ em (3.1.25), obtemos

$$a_i^{(n-1)} = \sum_{l=1}^{n-1} \left(n^2 - 3nl + 2l^2 \right) \delta_i^{(l)} \delta_i^{(n-l)} \tag{3.2.39}$$

Para se obter $V_i^{(n-1)}$ precisamos ainda conhecer $b_i^{(n-1)}$. No entanto este termo depende da matriz de Cartan e portanto assumirá, para cada álgebra um valor diferente. Assim mesmo

podemos construir alguns termos que sempre devem aparecer em $F_i^{(n)}$, como por exemplo $(\tau_i^2)^{(n)}$, $(\tau_{k-1}\tau_{k+1})^{(n)}$, $(\tau_i\tau_j^2)^{(n)}$ e $(\tau_i\tau_j\tau_k)^{(n)}$, conforme pode ser observado de (3.1.23). De maneira idêntica à utilizada para se determinar $a_i^{(n-1)}$ tais termos serão dados por:

$$(\tau_i\tau_j)^{(n)}/e^{n\Gamma} = \delta_i^{(n)} + \delta_j^{(n)} + \sum_{l=1}^{n-1} \delta_i^{(l)} \delta_j^{(n-l)} \quad (3.2.40)$$

$$\begin{aligned} (\tau_i\tau_j\tau_k)^{(n)}/e^{n\Gamma} &= \delta_i^{(n)} + \delta_j^{(n)} + \delta_k^{(n)} + \sum_{l=1}^{n-1} \delta_i^{(l)} \delta_j^{(n-l)} + \sum_{l=1}^{n-1} \delta_j^{(l)} \delta_k^{(n-l)} \\ &+ \sum_{l=1}^{n-1} \delta_i^{(l)} \delta_k^{(n-l)} + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{l-1} \delta_i^{(m)} \delta_j^{(l-m)} \delta_k^{(n-l)} \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

O cálculo de $V_i^{(n-1)}$ para casos específicos dependerá dos resultados acima.

3.3 Massas e Cargas dos Sólitons

Na seção 2.4 estabelecemos uma relação para calcular a massa dos sólitons que depende dos valores explícitos de φ^a e ν . Esses campos, por outro lado são soluções das equações (3.1.6) e (3.1.7) onde (3.1.6) é resolvida pelo método de Hirota e (3.1.7) tem como solução (3.1.11). A partir de (3.1.12) teremos:

$$\bar{q} \left(\sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \varphi^a + h\nu \right) = - \sum_{j=0}^r \frac{2}{\alpha_j^2} \log \tau_j + \frac{2}{\psi^2} h\sigma + \sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} \vartheta_a \quad (3.3.42)$$

onde utilizamos a identidade $\sum_{a=1}^r \frac{2}{\alpha_a^2} l_a^\psi = \frac{2}{\psi^2} (h-1)$. Portanto a relação (2.4.72) será escrita em termos dos τ 's como:

$$\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} = - \sum_{j=0}^r \frac{2}{\alpha_j^2} \frac{\dot{\tau}_j}{\tau_j} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2h}{\psi^2} \dot{\sigma} \Big|_{-\infty}^{\infty} = - \sum_{j=0}^r \frac{2}{\alpha_j^2} \frac{\dot{\tau}_j}{\tau_j} \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (3.3.43)$$

A segunda igualdade decorre do fato de termos a liberdade de escolher F e G em (3.1.11) de forma que o campo σ não contribua com a massa do sóliton. Substituindo a expansão (3.1.15) com o ansatz (3.1.16) em (3.3.43) obtemos

$$\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v \sum_{i=0}^r \frac{2}{\alpha_i^2} \frac{\epsilon \delta_i^{(1)} e^\Gamma + \epsilon^2 \delta_i^{(2)} 2e^\Gamma \dots + \epsilon^{N_i} \delta_i^{(N_i)} N_i e^{N_i \Gamma}}{1 + \epsilon \delta_i^{(1)} e^\Gamma + \dots + \epsilon^{N_i} \delta_i^{(N_i)} e^{N_i \Gamma}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (3.3.44)$$

Recordando que $\Gamma = \gamma(x - vt) + \xi$ podemos observar que quando $\gamma > 0$ o limite inferior $x \rightarrow -\infty$ não contribui e o limite $x \rightarrow \infty$ é finito. O inverso acontece quando $\gamma < 0$. Portanto a massa é proporcional a $|\gamma|$. Vimos no teorema (3.1.1) que $N_j = \kappa l_j^\psi$ onde κ é um inteiro positivo. Desta forma podemos escrever:

$$\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} = |\gamma| v \sum_{j=0}^r \frac{2}{\alpha_j^2} N_j = |\gamma| v \frac{2h\kappa}{\psi^2} \quad (3.3.45)$$

Lembrando que $\lambda = \gamma^2(1 - v^2)/4\beta$ a expressão para a massa M dos sólitons do modelo AT será:

$$M = \frac{4h\kappa}{\psi^2} m\sqrt{\lambda} \quad (3.3.46)$$

onde $m \equiv \sqrt{\beta}$. A expressão acima é válida para qualquer álgebra (pois depende do número de Coxeter h) e para qualquer solução construída a partir do ansatz (3.1.16). Observe ainda que as massas são quantizadas em unidades de $\frac{4h}{\psi^2} m\sqrt{\lambda}$ para um dado autovalor da matriz L_{ij} .

As soluções dos campos φ^a construídas a partir do ansatz (3.1.16) possuem sempre valores assintóticos finitos, e este fato decorre do teorema (3.1.1). Observe, a partir de (3.1.12), (3.1.15) and (3.1.16) que para $\gamma > 0$, $\varphi_a(-\infty) = \frac{\vartheta_a}{\bar{q}}$ e uma vez que $N_i = \kappa l_i^\psi$ com $l_0^\psi = 1$ o limite de $\tau_a/\tau_0^{l_a^\psi}$ para $x \rightarrow \infty$ é finito. Portanto de (3.1.12) vemos que $\varphi_a(\infty)$ é finito. Para $\gamma < 0$ os limites são trocados. Vimos que as massas dos sólitons são finitas, e daí concluímos que os valores assintóticos acima são vácuos do potencial (2.4.66). As simetrias (2.4.67) indicam que no regime em que a constante de acoplamento \bar{q} é um imaginário puro ($i\bar{q} \equiv \bar{q}$) os mínimos do potencial são degenerados. Podemos com isso introduzir as cargas topológicas dos sólitons:

$$Q \equiv \frac{\tilde{q}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \varphi = \frac{\tilde{q}}{2\pi} (\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)) \quad (3.3.47)$$

Substituindo as expressões (3.1.12) e (3.1.15) em (2.4.65) obtemos

$$\varphi = \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \varphi^a = -\frac{1}{i\tilde{q}} \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \log \frac{\tau_a}{\tau_0^{l_a^\psi}} + \vartheta = -\frac{1}{i\tilde{q}} \sum_{j=0}^r \frac{2\alpha_j}{\alpha_j^2} \log \tau_j + \vartheta \quad (3.3.48)$$

onde $\vartheta = \frac{1}{i\tilde{q}} \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \vartheta_a$.

As funções τ são em geral complexas e portanto o logaritmo não é univalente. Podemos usar a mesma prescrição usada em [12], que $\log z = \log |z| + i\bar{\theta}$ para $z = |z| e^{i\theta}$, onde $0 \leq \bar{\theta} < 2\pi$ e $\bar{\theta} - \theta = \text{múltiplo de } 2\pi$. No entanto a implementação desta prescrição requer também um critério no uso da identidade $\log AB = \log A + \log B$. A razão é que o resultado depende da ordem em que a prescrição da barra e a identidade são utilizadas. Por exemplo, podemos ter $\log AB = \log A + \log B = \log |A| + \log |B| + i\arg A + i\arg B$ ou $\log AB = \log |AB| + i(\arg A + \arg B)$. Devido a essas ambiguidades os valores das cargas que obtivermos irão diferir por uma soma de co-raízes de \mathcal{G} . Desta maneira conseguimos determinar em qual coset em Λ_W^v/Λ_R^v a carga está (onde Λ_W^v denota a rede dos co-pesos e Λ_R^v a rede das co-raízes de \mathcal{G}), mas os valores das cargas ficam portanto definidos a menos de uma soma de co-raízes. A partir de (3.3.47) e (3.3.48) obtemos para as cargas a expressão ($\gamma > 0$):

$$Q = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \log \frac{\tau_a}{\tau_0^{l_a^\psi}} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \log \frac{\delta_a^{(N_a)}}{(\delta_0^{(N_0)})^{l_a^\psi}} \quad (3.3.49)$$

onde N_j é a potência mais alta de ϵ na expansão de Hirota das funções τ_j , $j = 0, 1, 2, \dots, r$. Para $\gamma < 0$ o sinal da carga muda.

Capítulo 4

Soluções para $SU(r+1)$

4.1 Considerações Gerais

Apresentemos o exemplo da álgebra $SU(r+1)$, cuja matriz de Cartan estendida é dada por:

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

Neste caso $l_i^\psi = 1$ para todos os i 's e portanto a matriz L coincide com K . As equações de Hirota (3.1.6) são escritas como

$$\tau_j^2 \Delta(\tau_j) = \beta (\tau_j^2 - \tau_{j+1}\tau_{j-1}) \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \dots, r \quad (4.1.2)$$

e devido à periodicidade do diagrama de Dynkin estendido consideraremos $\tau_{j+r+1} = \tau_j$. As equações de Hirota em primeira ordem são escritas como

$$L_{ij}v_j = \lambda v_i \quad (4.1.3)$$

e neste caso, para todos os i 's teremos o seguinte sistema de equações :

$$v_{j-1} - (2 - \lambda)v_j + v_{j+1} = 0 \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, r \quad (4.1.4)$$

com

$$v_{j+r+1} = v_j \quad (4.1.5)$$

A equação (4.1.4) é reconhecida como a equação de recorrência dos polinômios de Chebyshev [27, 28]:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (4.1.6)$$

onde $2 - \lambda = 2x$ com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$. Tais polinômios admitem uma representação trigonométrica :

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad \text{com } x = \cos \theta \quad (4.1.7)$$

Tomando $\theta_j = \frac{2\pi}{r+1}j$, com $j = 0, 1, \dots, r$ os autovalores em (4.1.3) serão dados por:

$$\lambda_j = 4 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{r+1} \right) \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, r \quad (4.1.8)$$

É fácil observar que existe uma degenerescência dos autovalores acima quando $j \rightarrow r+1-j$, exceto para os casos $j = 0$ e $j = (r+1)/2$, para $(r+1)$ par. Nestes casos teremos $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_{(r+1)/2} = 4$. Os autovetores correspondentes serão:

$$\begin{aligned} v_k^{[0]} &= 1 \\ v_{[1]k}^{[\lambda_l]} &= \exp \left(\frac{2\pi ilk}{r+1} \right) ; \quad v_{[2]k}^{[\lambda_l]} = \exp \left(-\frac{2\pi ilk}{r+1} \right) \quad l = 1, 2, \dots, \left[\frac{r}{2} \right] \\ v_k^{[\lambda_{(r+1)/2}]} &= (-1)^k \quad \text{para } r+1 \text{ par} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots, r$ e

$$\left[\frac{r}{2} \right] = \begin{cases} (r-1)/2, & \text{se } r \text{ ímpar;} \\ r/2, & \text{r par} \end{cases}$$

Voltando à equação de Hirota (4.1.2) construímos o termo $V_i^{(n-1)}$, que a partir de (3.1.28), (3.2.39) e (3.2.40) será escrito como:

$$V_j^{(n-1)} = - \sum_{l=1}^n \left((1 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_j^{(l)} \delta_j^{(n-l)} - \delta_{j+1}^{(n-l)} \delta_{j-1}^{(l)} \right) \quad (4.1.10)$$

Começemos pelos casos onde os autovalores não são degenerados. Para $\lambda_0 = 0$ teremos $\delta_j^{(1)} = v_i^{[0]} = 1$. Substituindo estes valores em:

$$V_j^{(1)} = \delta_{j+1}^{(1)} \delta_{j-1}^{(1)} - (\delta_j^{(1)})^2 \quad (4.1.11)$$

observamos que $V_j^{(1)} = 0$ e a série trunca já em primeira ordem, resultando

$$\tau_j = 1 + e^\Gamma \quad (4.1.12)$$

De maneira análoga para $\lambda_{\frac{r+1}{2}} = 4$ teremos $\delta_j^{(1)} = (-1)^j$ e (4.1.11) se anula e trunca a série. Assim

$$\tau_j = 1 + (-1)^j e^\Gamma \quad (4.1.13)$$

Para os demais autovetores teremos uma situação diferente. Nesses casos $\delta_j^{(1)}$ será uma combinação linear dos autovetores correspondentes, ou seja:

$$\delta_j^{(1)} = y_1 \exp \left(\frac{2\pi ilj}{r+1} \right) + y_2 \exp \left(-\frac{2\pi ilj}{r+1} \right) \quad l = 1, 2, \dots, \left[\frac{r}{2} \right] \quad (4.1.14)$$

Substituindo (4.1.14) em (4.1.11) obtemos:

$$V_j^{(1)} = -2y_1 y_2 \left(1 - \cos \left(\frac{4\pi l}{r+1} \right) \right) = -y_1 y_2 \lambda_l (4 - \lambda_l) \quad l = 1, 2, \dots, \left[\frac{r}{2} \right] \quad (4.1.15)$$

Utilizando o método de recorrência podemos, a partir de (3.1.27), determinar $\delta^{(2)}$. Da expansão (3.1.31) escrevemos:

$$\left(\lambda^{[k]} - 4\lambda_l\right) d_{[k]}^{(2)} v^{[k]} = -y_1 y_2 \lambda_l (4 - \lambda_l) v^{[0]}$$

e a igualdade é satisfeita somente quando $\lambda^{[k]} = 0$, resultando

$$\delta^{(2)} = y_1 y_2 \left(1 - \frac{1}{4}\lambda_l\right) v^{[0]} \quad (4.1.16)$$

Continuando o método de recorrência calculamos o termo seguinte da expansão de V_j , utilizando (4.1.10):

$$V_j^{(2)} = (\lambda - 2) \delta_j^{(1)} \delta_j^{(1)} + \delta_{j+1}^{(1)} \delta_{j-1}^{(2)} + \delta_{j+1}^{(2)} \delta_{j-1}^{(1)} \quad (4.1.17)$$

De (4.1.16) observamos que $\delta^{(2)}$ não depende de j e portanto pode ser isolado em (4.1.17). Assim $V_j^{(2)} = 0$ e conseqüentemente $\delta^{(3)} = 0$. Continuando o procedimento iremos notar que os demais $V^{(n)}$'s são nulos e portanto os demais $\delta^{(n)}$'s também são. Desta forma a série trunca em segunda ordem e a função tau será:

$$\tau_j = 1 + \left(y_1 \exp\left(\frac{2\pi i l j}{r+1}\right) + y_2 \exp\left(-\frac{2\pi i l j}{r+1}\right)\right) e^\Gamma + y_1 y_2 \left(1 - \frac{1}{4}\lambda_l\right) e^{2\Gamma} \quad (4.1.18)$$

com Γ dada por (3.1.17), $\frac{\gamma+\gamma_-}{\beta} = \lambda_l = 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{r+1}\right)$, $l = 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right]$. As soluções (4.1.18) englobam as soluções obtidas por Hollowood quando y_1 ou y_2 são nulos. Nesses casos as massas dos sólitons são dadas por (3.3.46) com $\kappa = 1$:

$$M_l = \frac{8(r+1)}{\psi^2} m \sin\left(\frac{l\pi}{r+1}\right) \quad (4.1.19)$$

Considerando, no entanto, y_1 e $y_2 \neq 0$, observamos que as soluções truncam em segunda ordem. Neste caso $\kappa = 2$ e a solução apresenta massa duas vezes maior. Esta solução é interpretada como uma solução de dois sólitons, no limite estático.

Se considerarmos a carga topológica dada por (3.3.49) veremos que quando $y_1 = 0$ a carga correspondente será

$$Q_{-l} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \left(\frac{-2\pi l a}{r+1}\right) = \omega_{r+1-l} + \beta_- \quad (4.1.20)$$

para $\beta_- \in \Lambda_R$. Tomando agora $y_2 = 0$ a carga assume o valor

$$Q_l = -\frac{1}{2\pi} \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} \left(\frac{2\pi l a}{r+1}\right) = \omega_l + \beta_+ \quad (4.1.21)$$

para $\beta_+ \in \Lambda_R$ e $l = 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right]$, ω_i $i = 1, \dots, r$ são os pesos fundamentais de $SU(r+1)$.

O caso da solução (4.1.18) quando $y_1, y_2 \neq 0$, sob esta prescrição, correspondem a cargas definidas na rede das raízes Λ_R .

4.2 Degenerescência do segundo tipo para $SU(6p)$

Vejamos como esta degenerescência ocorre nas álgebras $SU(r+1)$ para $r+1$ múltiplo de 6. De acordo com o teorema de H. Gillet devemos ter $\sin(a\pi) = \pm 1$, $\sin(b\pi) = \pm \frac{1}{2}$ e $c = 2$ uma vez que $c > 1$, já que estamos no mínimo em segunda ordem no método de recorrência. Portanto

$$a = \pm \frac{1}{2} + 2n = \frac{j}{h}$$

$$b = \pm \frac{1}{6} + 2n = \frac{j'}{h}$$

A segunda igualdade nos dois casos acima decorre da forma geral dos autovalores dada por (3.1.34). Para j e j' inteiros, $j = \frac{h}{2}$ e $j' = \frac{h}{6}$ e desta forma vemos que h deve ser múltiplo de 6. Neste caso $h = r+1$ e portanto $r+1 = 6p$. Outro resultado para b é $b = \pm \frac{5}{6} + 2n$, que conduz à degenerescência $\lambda_p \leftrightarrow \lambda_{6p-p}$. Assim teremos:

$$\delta_j^{(1)} = y_1 \exp\left(\frac{2\pi i p j}{6p}\right) + y_2 \exp\left(-\frac{2\pi i p j}{6p}\right) = y_1 \exp\left(\frac{i\pi j}{3}\right) + y_2 \exp\left(-\frac{i\pi j}{3}\right) \quad (4.2.22)$$

onde y_1 and y_2 são constantes arbitrárias que refletem a degenerescência ordinária mencionada acima entre os autovalores λ_p e λ_{6p-p} . De (4.1.11) obtemos

$$V_j^{(1)} = -3y_1y_2 \quad (4.2.23)$$

Para o cálculo de $\delta^{(2)}$ escrevemos:

$$(L - 2^2\lambda)\delta^{(2)} = V^{(1)}$$

e agora percebemos a existência da “degenerescência do segundo tipo”, pois $2^2\lambda_p = \lambda_{3p}$ e o primeiro membro da equação acima se anula. Surge assim um nova arbitrariedade na solução, o que faz com que $\delta^{(2)}$ não seja unicamente determinado a partir de $V^{(1)}$, mas seja escrito como:

$$\delta^{(2)} = \frac{3y_1y_2}{4}v^{[\lambda=0]} + zv^{[\lambda_{3p}]} = \frac{3y_1y_2}{4} + z(-1)^j \quad (4.2.24)$$

para z arbitrário.

O método de recorrência continua sendo aplicado normalmente e o cálculo de $V^{(2)}$, utilizando (4.2.24) e $\lambda = \lambda_p$ resulta em:

$$V_j^{(2)} = (-1)^{j+1}z \left(\delta_j^{(1)} + \delta_{j+1}^{(1)} + \delta_{j-1}^{(1)} \right) = -2z \left(y_1 v_{[2]j}^{[\lambda_{2p}]} + y_2 v_{[1]j}^{[\lambda_{2p}]} \right) \quad (4.2.25)$$

Portanto $V_j^{(2)}$ é uma combinação linear de dois autovetores correspondentes ao autovalor degenerado $\lambda_{2p} = 3$. Na próxima ordem teremos a equação :

$$(L - 3^2\lambda_p I)\delta^{(3)} = V^{(2)}$$

e como não existe $\lambda_{[k]} = 9$, pois $0 \leq \lambda_k \leq 4$, o primeiro membro nunca se anula. Substituindo (4.2.25) na equação acima obtemos

$$\delta_j^{(3)} = \frac{z}{3}(-1)^j \delta_j^{(1)} \quad (4.2.26)$$

Na próxima ordem temos:

$$V_j^{(3)} = 2(\lambda - 2)\delta_j^{(1)}\delta_j^{(3)} - (\delta_j^{(2)})^2 + \delta_{j+1}^{(3)}\delta_{j-1}^{(1)} + \delta_{j+1}^{(1)}\delta_{j-1}^{(3)} + \delta_{j+1}^{(2)}\delta_{j-1}^{(2)} \quad (4.2.27)$$

que para $\lambda = \lambda_p$ é escrito como

$$V^{(3)} = -zy_1y_2(-1)^j$$

Novamente, utilizando a fórmula de recorrência para $\delta^{(4)}$:

$$(L - 4^2\lambda_p I)\delta^{(4)} = V^{(3)}$$

obtemos

$$\delta_j^{(4)} = (-1)^j \frac{zy_1y_2}{12}$$

A partir deste ponto todos os $V^{(n)}$ para $n \geq 4$ se anulam e a série é então truncada na quarta ordem. A solução final é:

$$\begin{aligned} \tau_j = & 1 + \left(y_1 \exp\left(\frac{i\pi j}{3}\right) + y_2 \exp\left(-\frac{i\pi j}{3}\right) \right) e^\Gamma + \left(\frac{3}{4}y_1y_2 + (-1)^j z \right) e^{2\Gamma} \\ & + \frac{z}{3}(-1)^j \left(y_1 \exp\left(\frac{i\pi j}{3}\right) + y_2 \exp\left(-\frac{i\pi j}{3}\right) \right) e^{3\Gamma} + (-1)^j \frac{zy_1y_2}{12} e^{4\Gamma} \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

que reproduz (4.1.18) para $z \rightarrow 0$. A massa neste caso é dada pela fórmula (3.3.46) com as seguintes possibilidades:

$$M_1 = \frac{24mp}{\psi^2} \quad \text{para } z = 0 \text{ e } y_1 = 0 \text{ ou } y_2 = 0 \quad (4.2.29)$$

As cargas topológicas neste caso são dadas por (4.1.20) caso valha a primeira opção ou (4.1.21) caso valha a segunda.

$$M_2 = \frac{48mp}{\psi^2} \quad \text{para } z = 0 \text{ e } y_1, y_2 \neq 0 \text{ ou } z \neq 0 \text{ e } y_1 = y_2 = 0 \quad (4.2.30)$$

E as cargas topológicas estão em Λ_R para a primeira possibilidade ou $\omega_{3p} + \Lambda_R$ para a segunda.

$$M_3 = \frac{72mp}{\psi^2} \quad \text{para } z \neq 0 \text{ e } y_1 = 0 \text{ ou } y_2 = 0 \quad (4.2.31)$$

Para a primeira possibilidade a carga topológica está em $\omega_{4p} + \Lambda_R$ e para a segunda em $\omega_{2p} + \Lambda_R$.

$$M_4 = \frac{96mp}{\psi^2} \quad \text{para } z, y_1, y_2 \neq 0 \quad (4.2.32)$$

A carga topológica neste caso vive no coset $\omega_{3p} + \Lambda_R$ de Λ_W/Λ_R .

Capítulo 5

Soluções para $Sp(r)$

5.1 Considerações Gerais

A matriz de Cartan estendida da álgebra $Sp(r)$ é dada por

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.1.1)$$

e $l_i^\psi = 1$ para $i = 0, 1, 2, \dots, r$. As equações de Hirota neste caso são escritas como:

$$\begin{aligned} \tau_0^2 \Delta(\tau_0) &= \beta(\tau_0^2 - \tau_1^2) \\ \tau_a^2 \Delta(\tau_a) &= \beta(\tau_a^2 - \tau_{a+1}\tau_{a-1}) \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, r-1 \\ \tau_r^2 \Delta(\tau_r) &= \beta(\tau_r^2 - \tau_{r-1}^2) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Tais equações em primeira ordem, $L_{ij}v_j = \lambda v_i$, serão:

$$(2 - \lambda)v_0 - 2v_1 = 0 \quad (5.1.3)$$

$$-v_{a-1} + (2 - \lambda)v_a - v_{a+1} = 0 \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.1.4)$$

$$-2v_{r-1} + (2 - \lambda)v_r = 0 \quad (5.1.5)$$

Introduzindo a variável $x = (2 - \lambda)/2$ e denotando os autovetores

$$v_i = T_i(x)v_0 \quad ; \quad i = 0, \dots, r \quad (5.1.6)$$

notamos que as equações (5.1.3) e (5.1.4) são satisfeitas pelas equações de recorrência dos polinômios de Chebyshev (4.1.6) e a equação (5.1.5) será

$$xT_r(x) - T_{r-1}(x) = 0 \quad (5.1.7)$$

que não é satisfeita automaticamente pelos polinômios de Chebyshev. No entanto esses polinômios satisfazem outras relações de recorrência:

$$(1 - x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) \quad (5.1.8)$$

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)) \quad m, n \geq 0 \quad (5.1.9)$$

onde “'” indica a derivação em relação ao argumento. Portanto, usando (5.1.8) notamos que (5.1.7) é equivalente a

$$(1 - x^2)T_r'(x) = 0 \quad (5.1.10)$$

cujas soluções são dadas pelos zeros de $T_r'(x)$ ou os extremos de $T_r(x)$:

$$x_j = \cos \frac{j\pi}{r} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, r \quad (5.1.11)$$

que correspondem aos autovalores

$$\lambda_j = 4 \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2r} \right) \quad (5.1.12)$$

da matriz de Cartan extendida (5.1.1).

O termo $V_i^{(1)}$ será escrito, a partir de (3.1.28), como

$$V_0^{(1)}(\delta^{(1)}) = -(\delta_0^{(1)})^2 + (\delta_1^{(1)})^2 \quad (5.1.13)$$

$$V_a^{(1)}(\delta^{(1)}) = -(\delta_a^{(1)})^2 + \delta_{a+1}^{(1)}\delta_{a-1}^{(1)} \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.1.14)$$

$$V_r^{(1)}(\delta^{(1)}) = -(\delta_r^{(1)})^2 + (\delta_{r-1}^{(1)})^2 \quad (5.1.15)$$

e substituindo (5.1.6) nessas expressões teremos:

$$V_0^{(1)} = -(1 - x^2)(\delta_0^{(1)})^2 \quad (5.1.16)$$

$$V_a^{(1)} = -(T_a^2 - T_{a+1}T_{a-1})(\delta_0^{(1)})^2 = -\frac{1}{2}(T_0 - T_2)(\delta_0^{(1)})^2 = -(1 - x^2)(\delta_0^{(1)})^2 \quad (5.1.17)$$

$$V_r^{(1)} = -(T_r^2 - T_{r-1}^2)(\delta_0^{(1)})^2 = -(1 - x^2)T_r^2(\delta_0^{(1)})^2 = (1 - x^2)(\delta_0^{(1)})^2 \quad (5.1.18)$$

Em (5.1.17) também utilizamos (5.1.9) e em (5.1.18) levamos em conta o fato dos autovalores corresponderem aos extremos para T_r , $|T_r(x)| = 1$. Observe, então, que as equações (5.1.16) e (5.1.17) são válidas para qualquer valor de x , enquanto (5.1.18) é válida apenas quando x corresponde a um autovalor da matriz de Cartan de $Sp(r)$.

Ao autovalor $\lambda = 0$ ($x = 1$) corresponde o autovetor $v_i^{\lambda=0} = 1, \forall i$. Desta forma notamos que $V_i^{(1)}$ é proporcional a tal autovetor. O método de recorrência é então aplicado para se determinar $\delta^{(2)}$:

$$(L - 2^2\lambda)\delta^{(2)} = -(1 - x^2)(\delta_0^{(1)})^2 v^{\lambda=0}$$

resultando em

$$\delta^{(2)} = \left(\frac{(1+x)}{8} (\delta_0^{(1)})^2 \right) v^{\lambda=0} \quad x \neq 1 \quad (5.1.19)$$

Observe que quando $x = 1$ ($\lambda = 0$) a equação de recorrência fica indeterminada.

Calculemos, a seguir, o próximo termo de $V_i^{(n-1)}$:

$$V_0^{(2)} = -(2 - \lambda)\delta_0^{(1)}\delta_0^{(2)} + 2\delta_1^{(1)}\delta_1^{(2)} \quad (5.1.20)$$

$$V_a^{(2)} = -(2 - \lambda)\delta_a^{(1)}\delta_a^{(2)} + \delta_{a-1}^{(1)}\delta_{a+1}^{(2)} + \delta_{a+1}^{(1)}\delta_{a-1}^{(2)} \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.1.21)$$

$$V_r^{(2)} = -(2 - \lambda)\delta_r^{(1)}\delta_r^{(2)} + 2\delta_{r-1}^{(1)}\delta_{r-1}^{(2)} \quad (5.1.22)$$

Como os valores de $\delta^{(2)}$ não dependem do índice ele pode ser fatorado:

$$\begin{aligned} V_0^{(2)} &= (-2x\delta_0^{(1)} + 2\delta_1^{(1)})\delta_0^{(2)} \\ V_a^{(2)} &= (\delta_{a-1}^{(1)} - 2x\delta_a^{(1)} + \delta_{a+1}^{(1)})\delta_a^{(2)} \\ V_r^{(2)} &= (-2x\delta_r^{(1)} + 2\delta_{r-1}^{(1)})\delta_r^{(2)} \end{aligned}$$

e assim reconhecemos nas expressões acima as relações de recorrência dos polinômios de Chebyshev, o que faz com que elas se anulem. Desta forma

$$V_i^{(2)} = 0, \quad \forall i$$

Substituindo este termo na relação de recorrência concluímos que $\delta^{(3)}$ deve ser nulo. Isto faz com que a expressão para $V^{(3)}$ seja a mesma de $V^{(1)}$, com $\delta^{(1)}$ substituído por $\delta^{(2)}$:

$$V_0^{(3)}(\delta^{(1)}) = -(\delta_0^{(2)})^2 + (\delta_1^{(2)})^2 \quad (5.1.23)$$

$$V_a^{(3)}(\delta^{(1)}) = -(\delta_a^{(2)})^2 + \delta_{a+1}^{(2)}\delta_{a-1}^{(2)} \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.1.24)$$

$$V_r^{(3)}(\delta^{(1)}) = -(\delta_r^{(2)})^2 + (\delta_{r-1}^{(2)})^2 \quad (5.1.25)$$

Lembrando que $\delta^{(2)}$ possui valor dado em (5.1.19) independente do índice i notamos que $V^{(3)}$ também se anula e conseqüentemente $\delta^{(4)} = 0$. Como os $V^{(n)}$'s são quadráticos nos δ 's e o valor mais alto não nulo destes é $\delta^{(2)}$ concluímos que a série trunca em segunda ordem e a solução para os τ 's é dada por:

$$\tau_i = 1 + T_i(x)\delta_0^{(1)}e^\Gamma + \frac{(1+x)}{8}(\delta_0^{(1)})^2T_i(1)e^{2\Gamma} \quad x \neq 1 \quad i = 0, 1, \dots, r \quad (5.1.26)$$

onde $x = (2 - \lambda)/2$ and $\lambda = \gamma_+\gamma_-/\beta$. Observe que para $x = -1$ a serie trunca em primeira ordem, o que corresponde às soluções obtidas em nosso trabalho [11]. Para $x = 1$ teremos

$$\tau_i = 1 + T_i(1)\delta_0^{(1)}e^\Gamma \quad (5.1.27)$$

e portanto todos os campos φ são constantes, já que os τ 's são iguais.

As massas dos sólitons são obtidas da equação (3.3.46) com $\kappa = 2$. O valor do número de Coxeter para $Sp(r)$ é $h = 2r$ e assim

$$M_j = \frac{8r}{\psi^2}m\sqrt{\lambda_j} = \frac{16r}{\psi^2}m \sin\left(\frac{\pi j}{2r}\right) \quad ; \quad j = 0, \dots, r \quad (5.1.28)$$

Para soluções com $x = -1$ a massa será a metade destes valores.

A carga topológica definida em (3.3.49) vive na rede das co-raízes Λ_R^v for $x \neq -1$ uma vez que todos os τ 's possuem em comum o mesmo coeficiente na ordem mais alte em e^Γ . Para $x = -1$ as cargas topológicas correspondentes dadas por (5.1.26) são

$$Q_m = -\frac{1}{2\pi} \sum_{a=1}^r \frac{2\alpha_a}{\alpha_a^2} (\pi m) = \omega_1 + \hat{\beta}_m \quad (5.1.29)$$

onde ω_1 é um peso fundamental de $Sp(r)$. Novamente as soluções (5.1.26) fornecem sólitons com cargas topologicas no coset Λ_W^v/Λ_R^v onde Λ_W^v e Λ_R^v denotam as redes dos co- pesos e das co-raízes de $Sp(r)$ respectivamente.

5.2 Degenerescência do segundo tipo para $Sp(3p)$

Neste caso $h = 2r = 6p$ e a degenerescência do segundo tipo ocorre quando

$$\lambda_{3p} = 2^2 \lambda_p \quad (5.2.30)$$

onde $\lambda_{3p} = 4 \sin^2 \frac{3p\pi}{6p} = 4$ e $\lambda_p = 4 \sin^2 \frac{p\pi}{6p} = 1$.

Para $\lambda_p = 1$ temos $x_p = \frac{1}{2}$ e portanto

$$v_j^{[\lambda_p]} = \delta_j^{(1)} = T_j\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{j\pi}{3} \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, r = 3p \quad (5.2.31)$$

Substituindo (5.2.31) em (5.1.16), (5.1.17) e (5.1.18) obtemos

$$V_j^{(1)} = -\frac{3}{4} v_j^{[0]} \quad (5.2.32)$$

A equação para determinar $\delta^{(2)}$ é

$$(L - 2^2 \lambda_p) \delta_j^{(2)} = V_j^{(1)} = -\frac{3}{4} v_j^{[0]} \quad (5.2.33)$$

e daí obtemos

$$\delta_j^{(2)} = \frac{3}{16} v_j^{[0]} + z v_j^{[\lambda_{3p}]} \quad (5.2.34)$$

O primeiro termo de (5.2.34) é obtido diretamente de (5.2.33) comparando-se os coeficientes dos vetores. Já o segundo termo aparece devido à igualdade (5.2.30) que anula o operador do lado esquerdo de (5.2.33) e portanto pode-se adicioná-lo a $\delta_j^{(2)}$ sem que o primeiro membro seja alterado. Para λ_{3p} temos $x_{3p} = -1$ e portanto

$$v_j^{[\lambda_{3p}]} = T_j(-1) = \cos j\pi = (-1)^j$$

de forma que $\delta_j^{(2)}$ é escrito como:

$$\delta_j^{(2)} = \frac{3}{16} + (-1)^j z \quad (5.2.35)$$

Substituindo a expressão acima em (5.1.20), (5.1.21) e (5.1.22) com $\lambda = \lambda_p$ obtemos:

$$V_j^{(2)} = -2z \cos j \frac{2\pi}{3} = -2z v_j^{[\lambda=3]} \quad j = 0, 1, \dots, 3p \quad (5.2.36)$$

e prosseguindo no método de recorrência escrevemos

$$(L - 3^2 \lambda_p) \delta_j^{(3)} = V_j^{(2)} \quad (5.2.37)$$

Observe que $3^2 \lambda_p$ nunca se iguala a nenhum autovalor de L , pois $0 \leq \lambda \leq 4$, e por isso a degenerescência do segundo tipo não aparece mais. Substituindo (5.2.36) em (5.2.37) obtemos

$$\delta_j^{(3)} = \frac{z}{3} \cos j \frac{2\pi}{3} \quad j = 0, 1, \dots, 3p \quad (5.2.38)$$

$V^{(3)}$ é então calculado a partir de

$$V_0^{(3)} = 2\delta_0^{(1)}\delta_0^{(3)} + 2\delta_1^{(1)}\delta_1^{(3)} - (\delta_0^{(2)})^2 + (\delta_1^{(2)})^2 \quad (5.2.39)$$

$$V_a^{(3)} = 2\delta_a^{(1)}\delta_a^{(3)} + \delta_{a-1}^{(1)}\delta_{a+1}^{(3)} + \delta_{a+1}^{(1)}\delta_{a-1}^{(3)} - (\delta_a^{(2)})^2 + \delta_{a+1}^{(2)}\delta_{a-1}^{(2)}, \quad a = 1, 2, \dots, 3p-1 \quad (5.2.40)$$

$$V_r^{(3)} = V_{3p}^{(3)} = 2\delta_{3p}^{(1)}\delta_{3p}^{(3)} + 2\delta_{3p-1}^{(1)}\delta_{3p-1}^{(3)} - (\delta_{3p}^{(2)})^2 + (\delta_{3p-1}^{(2)})^2 \quad (5.2.41)$$

e o valor obtido é

$$V_j^{(3)} = -(-1)^j \frac{z}{4} = -\frac{z}{4} v_j^{[\lambda_{3p}]} \quad j = 0, 1, \dots, 3p \quad (5.2.42)$$

De maneira análoga calculamos $\delta_j^{(4)}$:

$$\delta_j^{(4)} = (-1)^j \frac{z}{48} \quad (5.2.43)$$

Seguindo todo este procedimento verificamos que os V_j 's superiores se anulam e consequentemente os δ 's, truncando a série na quarta ordem.

Devemos observar, no entanto, que as equações de Hirota neste caso são obtidas fazendo a identificação $\tau_k \equiv \tau_{6p-k}$ $k = 1, \dots, 3p-1$ nas equações de Hirota para o caso $SU(6p)$. Assim, as soluções que deixarem invariantes as soluções (4.2.28) sob a transformação $\tau_k \leftrightarrow \tau_{6p-k}$ são soluções deste caso. Tal simetria é realizada fazendo $y_1 = y_2 \equiv y/2$ em (4.2.28) e as funções tau serão expressas por:

$$\begin{aligned} \tau_j = & 1 + y \cos \frac{j\pi}{3} e^\Gamma + \left(\frac{3y^2}{16} + (-1)^j z \right) e^{2\Gamma} \\ & + \frac{z}{3} y \cos j \frac{2\pi}{3} e^{3\Gamma} + (-1)^j \frac{z}{48} e^{4\Gamma} \quad i = 0, 1, \dots, 3p \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

As massas dos sólitons serão:

$$M_1 = \frac{48mp}{\psi^2} \quad \text{para } z = 0 \text{ e } y \neq 0 \text{ ou } z \neq 0 \text{ e } y = 0 \quad (5.2.45)$$

Na primeira possibilidade a carga do sólito está no coset $\omega_1 + \hat{\beta}_m$ e na segunda $Q \in \Lambda_R$.

$$M_2 = \frac{96mp}{\psi^2} \quad \text{para } y, z \neq 0 \quad (5.2.46)$$

com carga topológica em $\omega_1 + \hat{\beta}_m$.

Capítulo 6

Soluções para $SO(2r)$

6.1 $D_4 = SO(8)$

Analiseemos primeiramente a álgebra $SO(8)$, pois este caso apresenta algumas particularidades em relação aos demais. A matriz $L_{ij} = l_i^\psi K_{ij}$ é dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.1.1)$$

e os inteiros $l_i^\psi = (1, 1, 2, 1, 1)$. Os autovalores de L são $(0, 2, 2, 2, 6)$ e os autovetores correspondentes são:

$$v^{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; v_{[1]}^{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; v_{[2]}^{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; v_{[3]}^{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; v^{\lambda=6} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

As equações de Hirota são escritas como:

$$\begin{aligned} \tau_0^2 \Delta(\tau_0) &= \beta(\tau_0^2 - \tau_2) \\ \tau_1^2 \Delta(\tau_1) &= \beta(\tau_1^2 - \tau_2) \\ \tau_2^2 \Delta(\tau_2) &= 2\beta(\tau_2^2 - \tau_0\tau_1\tau_3\tau_4) \\ \tau_3^2 \Delta(\tau_3) &= \beta(\tau_3^2 - \tau_2) \\ \tau_4^2 \Delta(\tau_4) &= \beta(\tau_4^2 - \tau_2) \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Observe que a equação de τ_2 possui um termo quadrilinear que contribuirá, em ordem n na construção de $V_i^{(n-1)}$ com:

$$(\tau_0\tau_1\tau_3\tau_4)^{(n)}/e^{n\Gamma} = \delta_0^{(n)} + \delta_1^{(n)} + \delta_3^{(n)} + \delta_4^{(n)}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=1}^{n-1} (\delta_0^{(l)} \delta_1^{(n-l)} + \delta_0^{(l)} \delta_3^{(n-l)} + \delta_0^{(l)} \delta_4^{(n-l)} + \delta_1^{(l)} \delta_3^{(n-l)} + \delta_1^{(l)} \delta_4^{(n-l)} + \delta_3^{(l)} \delta_4^{(n-l)}) \\
 & + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{l-1} (\delta_0^{(m)} \delta_1^{(l-m)} \delta_3^{(n-l)} + \delta_0^{(m)} \delta_1^{(l-m)} \delta_4^{(n-l)}) \\
 & + \delta_0^{(m)} \delta_3^{(l-m)} \delta_4^{(n-l)} + \delta_1^{(m)} \delta_3^{(l-m)} \delta_4^{(n-l)}) \\
 & + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{p=1}^{m-1} \delta_0^{(p)} \delta_1^{(m-p)} \delta_3^{(l-m)} \delta_4^{(n-l)}
 \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Analisando primeiramente o autovalor não degenerado $\frac{\gamma+\gamma_-}{\beta} = \lambda = 6$ obtemos pelo método de recorrência:

$$\tau_i = 1 + e^\Gamma \quad i = 0, 1, 3, 4 \tag{6.1.4}$$

$$\tau_2 = 1 - 4e^\Gamma + e^{2\Gamma} \tag{6.1.5}$$

A massa dos sólitons deve, portanto, ser calculada com $\kappa = 1$ mesmo em (6.1.5), pois $N_2 = 2$ e l_2^ψ . Desta forma temos:

$$M = \frac{2}{\psi^2} 12\sqrt{6}m \tag{6.1.6}$$

Para $\lambda = 2$, $\delta^{(1)}$ deve ser uma combinação linear dos autovetores $v_{[1]}^{\lambda=2}$, $v_{[2]}^{\lambda=2}$ e $v_{[3]}^{\lambda=2}$:

$$\delta^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} \tag{6.1.7}$$

O método de recorrência fornece para os demais δ 's os seguintes valores:

$$\delta^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ -x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3 \\ 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ -x_1 x_2 - x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 \end{pmatrix}; \delta^{(3)} = P_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -16 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{(4)} = P_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \delta^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \delta^{(6)} = P_3^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.8}$$

onde $P_3 = x_1 x_2 x_3 / 27$ e $P_4 = (x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) / 9$. Os demais δ 's se anulam. Observe que dependendo se x_1 , x_2 e x_3 se anularem ou não a série será truncada em ordens

distintas. Portanto haverá possibilidades de valores distintos para as massas dos sólitons. Quando dois dos x 's se anulam teremos $\kappa = 1$ e a massa será:

$$M_1 = \frac{2}{\psi^2} 12\sqrt{2} m \quad (6.1.9)$$

No caso de apenas um dos x 's ser nulo, $\kappa = 2$ e a massa será

$$M_2 = \frac{2}{\psi^2} 24\sqrt{2} m \quad (6.1.10)$$

Finalmente, quando nenhum dos x 's se anulam, $\kappa = 3$ e daí:

$$M_3 = \frac{2}{\psi^2} 36\sqrt{2} m \quad (6.1.11)$$

A carga topológica definida em (3.3.49) fornece para a solução (6.1.4) e (6.1.5), $Q \in \Lambda_R$, a rede de raízes de $SO(8)$. Para as soluções dadas por (6.1.8), a carga topológica depende dos parâmetros x_1, x_2 e x_3 :

$$\begin{aligned} Q(x_1, 0, 0) &\in \lambda_s + \Lambda_R \\ Q(0, x_2, 0) &\in \lambda_v + \Lambda_R \\ Q(0, 0, x_3) &\in \bar{\lambda}_s + \Lambda_R \\ Q(x_1, x_2, x_3) &\in \Lambda_R \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

onde λ_v, λ_s e $\bar{\lambda}_s$ são o peso vetorial e os dois espinoriais de $SO(8)$ respectivamente.

6.2 $D_r = SO(2r)$ para $r \geq 5$

A matriz L neste caso se escreve como:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.2.13)$$

e os inteiros l_i^ψ são $(1, 1, 2, 2, \dots, 2, 1, 1)$. Podemos, portanto, escrever a equação de autovalores, $Lv = \lambda v$, como:

$$(2 - \lambda)v_0 - v_2 = 0 \quad (6.2.14)$$

$$(2 - \lambda)v_1 - v_2 = 0 \quad (6.2.15)$$

$$-2v_0 - 2v_1 + (4 - \lambda)v_2 - 2v_3 = 0 \quad (6.2.16)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ -2v_{a-1} + (4 - \lambda)v_a - 2v_{a+1} &= 0 \quad a = 3, \dots, r - 2 \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ -2v_{r-3} + (4 - \lambda)v_{r-2} - 2v_{r-1} - 2v_r &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

$$-v_{r-2} + (2 - \lambda)v_{r-1} = 0 \quad (6.2.19)$$

$$-v_{r-2} + (2 - \lambda)v_r = 0 \quad (6.2.20)$$

Consideremos primeiramente $\lambda \neq 2$. Das equações (6.2.14) e (6.2.15) temos

$$v_1 = v_0$$

e

$$v_2 = (4x - 2)v_0$$

Substituindo esses valores em (6.2.16) obtemos

$$v_3 = (8x^2 - 4x - 2)v_0$$

De maneira análoga, de (6.2.19) e (6.2.20):

$$v_{r-1} = v_r$$

e

$$v_{r-2} = (4x - 2)v_r$$

e substituindo tais valores em (6.2.18):

$$v_{r-3} = (8x^2 - 4x - 2)v_0$$

onde $x = (4 - \lambda)/4$ em todas essas equações .

Vamos introduzir agora os polinômios de Chebyshev do tipo II, que satisfazem:

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0 \quad (6.2.21)$$

Tais polinômios admitem a seguinte representação :

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \quad \text{com } x = \cos \theta \quad (6.2.22)$$

e neste caso temos que $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$, $U_2(x) = 4x^2 - 1$, etc. Desta forma obtemos as seguintes relações entre os autovetores:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 & v_a &= 2(U_{a-1} - U_{a-2})v_0 \quad ; \quad a = 2, 3, \dots, r - 2 \\ v_r &= v_{r-1} & &= (U_{r-2} - U_{r-3})v_0 \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

e a equação (6.2.20) implica:

$$v_{r-2} = (4x - 2)v_r \quad \text{ou} \quad (x - 1)T'_{r-1}(x) = 0 \quad (6.2.24)$$

que é a relação imposta às relações (6.2.23). A solução de (6.2.24) é obtida a partir dos $(r - 2)$ pontos extremos de T_{r-1} mais a solução $x = 1$. Assim, os autovalores serão

$$\lambda_k = 8 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(r-1)} \right) \quad k = 0, 1, \dots, r-2 \quad (\lambda \neq 2) \quad (6.2.25)$$

Analisando agora o caso em que $\lambda = 2$ teremos os autovetores dados por:

$$\begin{aligned} & v_0 \\ & v_1 \\ v_2 & = 0 \\ v_3 & = -(v_0 + v_1) \\ v_4 & = -(v_0 + v_1) \\ v_5 & = 0 \\ v_6 & = (v_0 + v_1) \\ v_7 & = (v_0 + v_1) \\ v_8 & = 0 \\ v_9 & = -(v_0 + v_1) \\ & \vdots \\ v_{r-5} & = 0 \\ v_{r-4} & = -(v_{r-1} + v_r) \\ v_{r-3} & = -(v_{r-1} + v_r) \\ v_{r-2} & = 0 \\ & v_{r-1} \\ & v_r \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

Temos duas alternativas a serem tratadas e a primeira delas é impor:

$$v_0 + v_1 = v_{r-1} + v_r = 0$$

o que nos deixa com 2 parâmetros livres. Neste caso o autovalor $\lambda = 2$ é duplamente degenerado e os autovetores são dados por:

$$v_{[1]}^{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_{[2]}^{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.27)$$

A outra alternativa é analisar o padrão de repetição das equações (6.2.26). Observe que

$$v_{2+3k} = 0$$

Impondo, então que $r - 2 = 2 + 3k$ concluímos que $r - 1 = 3N$. Portanto quando $(r - 1)$ é múltiplo de 3 teremos um terceiro autovetor, $v_{[3]}^{\lambda=2}$, cujas componentes serão escritas como:

$$\begin{aligned} v_{3+3k} &= v_{4+3k} = -v_{6+3k} = -v_{7+3k} = -(v_0 + v_1) \quad k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ v_{2+3k} &= 0 \quad k = 0, 1, \dots, N \\ v_r &= -v_{r-1} + (-1)^{N+1}(v_0 + v_1) \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Teremos, neste caso, três parâmetros livres: v_0, v_1, v_{r-1} e portanto o autovalor $\lambda = 2$ é triplamente degenerado.

As equações de Hirota serão escritas como:

$$\begin{aligned} \tau_0^2 \Delta(\tau_0) &= \beta(\tau_0^2 - \tau_2) \\ \tau_1^2 \Delta(\tau_1) &= \beta(\tau_1^2 - \tau_2) \\ \tau_2^2 \Delta(\tau_2) &= 2\beta(\tau_2^2 - \tau_0\tau_1\tau_3) \\ \tau_a^2 \Delta(\tau_a) &= 2\beta(\tau_a^2 - \tau_{a-1}\tau_{a+1}) \quad a = 3, 4, \dots, r-3 \\ \tau_{r-2}^2 \Delta(\tau_{r-2}) &= 2\beta(\tau_{r-2}^2 - \tau_{r-3}\tau_{r-1}\tau_r) \\ \tau_{r-1}^2 \Delta(\tau_{r-1}) &= \beta(\tau_{r-1}^2 - \tau_{r-2}) \\ \tau_r^2 \Delta(\tau_r) &= \beta(\tau_r^2 - \tau_{r-2}) \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

Usando os resultados da seção 3.2 obtemos os $V_i^{(n-1)}$'s definidos em (3.1.28), que serão escritos como:

$$\begin{aligned} V_0^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (1 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_0^{(l)} \delta_0^{(n-l)} \\ V_1^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (1 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_1^{(l)} \delta_1^{(n-l)} \\ V_2^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (2 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_2^{(l)} \delta_2^{(n-l)} \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \left(\delta_0^{(l)} \delta_1^{(n-l)} + \delta_1^{(l)} \delta_3^{(n-l)} + \delta_0^{(l)} \delta_3^{(n-l)} + \sum_{m=1}^{l-1} \delta_0^{(m)} \delta_1^{(l-m)} \delta_3^{(n-l)} \right) \\ V_a^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} \left((2 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_a^{(l)} \delta_a^{(n-l)} - 2\delta_{a-1}^{(l)} \delta_{a+1}^{(n-l)} \right) \quad ; \quad a = 3, 4, \dots, r-3 \\ V_{r-2}^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (2 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_{r-2}^{(l)} \delta_{r-2}^{(n-l)} \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \left(\delta_{r-3}^{(l)} \delta_{r-1}^{(n-l)} + \delta_{r-1}^{(l)} \delta_r^{(n-l)} + \delta_{r-3}^{(l)} \delta_r^{(n-l)} + \sum_{m=1}^{l-1} \delta_{r-3}^{(m)} \delta_{r-1}^{(l-m)} \delta_r^{(n-l)} \right) \\ V_{r-1}^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (1 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_{r-1}^{(l)} \delta_{r-1}^{(n-l)} \\ V_r^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (1 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_r^{(l)} \delta_r^{(n-l)} \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

O método de recorrência descrito na seção 3.1 e exemplificado em detalhe nos exemplos $SU(r+1)$ e $SP(r)$ é então aplicado neste caso.

Para os autovalores $\lambda_k = 8 \sin^2 \frac{k\pi}{2(r-1)} = \frac{\gamma+\gamma-}{\beta} \neq 2, k = 1, 2, \dots, r-2$, as seguintes soluções são obtidas:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 + e^\Gamma \\ \tau_1 &= 1 + e^\Gamma \\ \tau_a &= 1 + 2 \frac{\cos(2a-1)\theta_k}{\cos\theta_k} e^\Gamma + e^{2\Gamma} ; a = 2, 3, \dots, r-2 \\ \tau_{r-1} &= 1 + (-1)^k e^\Gamma \\ \tau_r &= 1 + (-1)^k e^\Gamma \end{aligned} \tag{6.2.31}$$

onde $\theta_k = \frac{k\pi}{2(r-1)}$ e usamos o fato dos polinômios de Chebyshev do tipo II satisfazerem

$$U_{a-1}(x_k) - U_{a-2}(x_k) = \frac{\cos(2a-1)\theta_k}{\cos\theta_k} \quad \text{com } x_k = \cos 2\theta_k \tag{6.2.32}$$

De acordo com o teorema 3.1.1 notamos que $\kappa = 1$ neste caso e portanto as massas (3.3.46) são dadas por:

$$M_k = \frac{2}{\psi^2} 8(r-1)\sqrt{2} m \sin \frac{k\pi}{2(r-1)} ; k = 1, 2, \dots, r-2 \tag{6.2.33}$$

Vimos que para $\lambda = 2$ devemos considerar o caso $r-1$ múltiplo de 3 separadamente, uma vez que o autovalor tem multiplicidade três. Caso contrário o autovalor tem multiplicidade dois e os autovetores são dados por (6.2.27). Tomando, então, $\delta^{(1)}$ como combinação linear desses autovetores, com parâmetros y_1 e y_2 , as soluções de Hirota são dadas por:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 + y_1 e^\Gamma + c(y_1, y_2) e^{2\Gamma} \\ \tau_1 &= 1 - y_1 e^\Gamma + c(y_1, y_2) e^{2\Gamma} \\ \tau_a &= 1 + d_a(y_1, y_2) e^{2\Gamma} + c(y_1, y_2)^2 e^{4\Gamma} ; a = 2, 3, \dots, r-2 \\ \tau_{r-1} &= 1 - y_2 e^\Gamma + (-1)^{r-1} c(y_1, y_2) e^{2\Gamma} \\ \tau_r &= 1 + y_2 e^\Gamma + (-1)^{r-1} c(y_1, y_2) e^{2\Gamma} \end{aligned} \tag{6.2.34}$$

onde Γ é definido em (3.1.17), $\lambda = 2 = \frac{\gamma+\gamma-}{\beta}$, $c(y_1, y_2) = (y_1^2 + (-1)^{r-1} y_2^2) / 4(r-1)$ e $d_a = (-1)^a ((4(r-a) - 2) y_1^2 + (-1)^r (4a - 2) y_2^2) / 4(r-1)$, $a = 2, 3, \dots, r-2$.

Existem duas soluções que correspondem a diferentes valores da massa, dependendo da escolha de $c(y_1, y_2)$. Para $c(y_1, y_2) = 0$ temos $y_2 = \pm i^r y_1$ e a massa, de acordo com o teorema 3.1.1, é calculada por (3.3.46) com $\kappa = 1$ e vale

$$M_1 = \frac{2}{\psi^2} 4(r-1)\sqrt{2} m ; \text{ para } y_2 = \pm i^r y_1 \tag{6.2.35}$$

Para $y_2 \neq \pm i^r y_1$ temos $\kappa = 2$ e portanto a massa vale

$$M_2 = \frac{2}{\psi^2} 8(r-1)\sqrt{2} m ; \text{ para } y_2 \neq \pm i^r y_1 \tag{6.2.36}$$

Para $y_2 = i^r y_1$ a carga topológica para $r = 2k$ ou $r = 2k+1$ vive nos cosets, $Q \in \lambda_s + \Lambda_R$ para r par k ou $Q \in \bar{\lambda}_s + \Lambda_R$ para k ímpar. Quando $y_2 = -i^r y_1$ a situação é revertida e assim $Q \in \lambda_s + \Lambda_R$ para k ímpar ou $Q \in \bar{\lambda}_s + \Lambda_R$ para k par.

Voltando ao caso $r - 1$ múltiplo de 3, o autovalor $\lambda = 2$ tem multiplicidade 3. De maneira análoga devemos tomar $\delta^{(1)}$ como combinação linear dos três autovetores (6.2.27) e (6.2.28) e aplicar o método de recorrência. Mostramos a seguir o resultado deste caso para o exemplo mais simples, $SO(14)$, devendo as características principais da solução para qualquer $SO(6p+2)$ (p um inteiro positivo) ser as mesmas. Vimos que o caso $SO(8)$ também apresenta autovalor $\lambda = 2$ com multiplicidade 3. No entanto neste caso a degenerescência está relacionada à simetria do diagrama de Dynkin enquanto que para os demais $SO(6p+2)$ ($p > 1$) tal degenerescência é acidental.

6.3 Soluções de $SO(14)$ para $\lambda = 2$

Os três autovetores associados a $\lambda = 2$ são

$$\begin{aligned} v_{[1]}^{\lambda=2} &= (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ v_{[2]}^{\lambda=2} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1) \\ v_{[3]}^{\lambda=2} &= (1, 1, 0, -2, -2, 0, 1, 1) \end{aligned} \tag{6.3.37}$$

Como mencionado acima tomamos $\delta^{(1)}$ como combinação linear desses autovetores e aplicamos o método de recorrência, obtendo a seguinte solução :

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= \begin{pmatrix} y_1 + y_3 \\ -y_1 + y_3 \\ 0 \\ -2y_3 \\ -2y_3 \\ 0 \\ -y_2 + y_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix}; \delta^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{y_1^2}{24} + \frac{y_2^2}{24} + \frac{y_1 y_3}{3} \\ \frac{y_1^2}{24} + \frac{y_2^2}{24} - \frac{y_1 y_3}{3} \\ \frac{3y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4} + y_3^2 \\ \frac{-7y_1^2}{12} + \frac{5y_2^2}{12} + y_3^2 \\ \frac{5y_1^2}{12} - \frac{7y_2^2}{12} + y_3^2 \\ \frac{-y_1^2}{4} + \frac{3y_2^2}{4} + y_3^2 \\ \frac{y_1^2}{24} + \frac{y_2^2}{24} - \frac{y_2 y_3}{3} \\ \frac{y_1^2}{24} + \frac{y_2^2}{24} + \frac{y_2 y_3}{3} \end{pmatrix}; \delta^{(3)} = \frac{y_3}{27} \begin{pmatrix} \frac{y_1^2 + y_2^2}{8} \\ \frac{y_1^2 + y_2^2}{8} \\ -2(y_1^2 + y_2^2) \\ \frac{23y_1^2 - 13y_2^2}{8} \\ \frac{-13y_1^2 + 23y_2^2}{8} \\ -2(y_1^2 + y_2^2) \\ \frac{y_1^2 + y_2^2}{8} \\ \frac{y_1^2 + y_2^2}{8} \end{pmatrix} \\ \delta^{(4)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_4 + \frac{y_1^2 y_3^2}{12} - \frac{y_2^2 y_3^2}{36} \\ P_4 - \frac{7y_1^2 y_3^2}{108} + \frac{5y_2^2 y_3^2}{108} \\ P_4 + \frac{5y_1^2 y_3^2}{108} - \frac{7y_2^2 y_3^2}{108} \\ P_4 - \frac{y_1^2 y_3^2}{36} + \frac{y_2^2 y_3^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \delta^{(5)} = P_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \delta^{(6)} = P_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.3.38}$$

onde $P_4 = (y_1^2 + y_2^2)^2 / 576$, $P_5 = -y_3 (y_1^2 + y_2^2)^2 / 2592$ e $P_6 = (y_3 (y_1^2 + y_2^2) / 216)^2$.

Quatro tipos de soluções devem ser analisados:

1. Tomando $y_3 = 0$ e $y_2 = \pm iy_1$ ou $y_3 \neq 0$ e $y_1 = y_2 = 0$. De acordo com o teorema 3.1.1 temos $\kappa = 1$ e portanto de (3.3.46) as massas são

$$M_1 = \frac{2}{\psi^2} 24\sqrt{2} m \quad (6.3.39)$$

As cargas topológicas para $y_2 = iy_1$ vivem no coset $Q \in \bar{\lambda}_s + \Lambda_R$ enquanto para $y_2 = -iy_1$, $Q \in \lambda_s + \Lambda_R$. Quando $y_3 \neq 0$, e $y_1 = y_2 = 0$, $Q \in \Lambda_R$.

2. Tomando $y_3 = 0$ and $y_2 \neq \pm iy_1$ temos $\kappa = 2$ e então

$$M_2 = \frac{2}{\psi^2} 48\sqrt{2} m \quad (6.3.40)$$

3. Tomando $y_3 \neq 0$ e $y_2 = \pm iy_1$ temos novamente $\kappa = 2$ e portanto

$$M_3 = \frac{2}{\psi^2} 48\sqrt{2} m \quad (6.3.41)$$

4. Finalmente quando $y_3 \neq 0$ e $y_2 \neq \pm iy_1$ temos $\kappa = 3$ e assim

$$M_4 = \frac{2}{\psi^2} 72\sqrt{2} m \quad (6.3.42)$$

Nos casos 2, 3 e 4 acima as cargas topológicas vivem em Λ_R .

Capítulo 7

Soluções para $SO(2r+1)$

7.1 $B_3 = SO(7)$

As soluções do tipo sóliton para o caso $B_3 = SO(7)$ são bastante similares às do caso $SO(8)$, a a razão para isso vem do fato de que o diagrama de Dynkin de $SO(7)$ pode ser obtido a partir do diagrama do $SO(8)$ através de um “folding”. As equações de Hirota são obtidas a partir de (6.1.2) fazendo-se $\tau_4 \equiv \tau_3$ e ignorando a equação de τ_4 .

Os autovalores da matriz L são $(0, 2, 2, 6)$. A solução para $\lambda = 6$ é obtida de (6.1.4) desprezando a solução $i = 4$, ou seja, a última componente de $\delta^{(1)}$ e $\delta^{(2)}$. Como os l_i^ψ são $(1, 1, 2, 1)$ obtemos, de acordo com o teorema 3.1.1, que $\kappa = 1$ para esta solução. Portanto de (3.3.46) a massa do sóliton é

$$M = \frac{2}{\psi^2} 12\sqrt{6} m$$

O autovalor $\lambda = 2$ de $SO(7)$ tem multiplicidade 2 e a solução é construída tomando $\delta^{(1)}$ como combinação linear dos autovetores correspondentes e aplicando o método de recorrência. O resultado obtido desta forma é o mesmo obtido de (6.1.7) e (6.1.8) fazendo $x_3 \equiv x_1$ e ignorando a última componente de todos os δ 's. A solução dependerá de dois parâmetros x_1 e x_2). Temos $\kappa = 1, 2, 3$ para $x_1 = 0$ e $x_2 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ e $x_2 = 0$ e $x_1, x_2 \neq 0$ respectivamente. As massas são portanto

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2}{\psi^2} 12\sqrt{2} m & ; & \text{quando } x_1 = 0, x_2 \neq 0 \\ M_2 &= \frac{2}{\psi^2} 24\sqrt{2} m & ; & \text{quando } x_1 \neq 0, x_2 = 0 \\ M_3 &= \frac{2}{\psi^2} 36\sqrt{2} m & ; & \text{quando } x_1, x_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Neste caso todas as cargas topológicas estão no coset Λ_R .

7.2 $B_r = SO(2r + 1)$ para $r \geq 4$

A matriz $L_{ij} = l_i^\psi K_{ij}$ é escrita como

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7.2.1)$$

onde os inteiros l_i^ψ são $(1, 1, 2, 2, \dots, 2, 1)$. A equação de autovalores $v = \lambda v$, é então:

$$(2 - \lambda)v_0 - v_2 = 0 \quad (7.2.2)$$

$$(2 - \lambda)v_1 - v_2 = 0 \quad (7.2.3)$$

$$-2v_0 - 2v_1 + (4 - \lambda)v_2 - 2v_3 = 0 \quad (7.2.4)$$

\vdots

$$-2v_{a-1} + (4 - \lambda)v_a - 2v_{a+1} = 0 \quad a = 3, \dots, r - 2 \quad (7.2.5)$$

\vdots

$$-2v_{r-2} + (4 - \lambda)v_{r-1} - 4v_r = 0 \quad (7.2.6)$$

$$-v_{r-1} + (2 - \lambda)v_r = 0 \quad (7.2.7)$$

Considerando $x = (4 - \lambda)/4$ o problema, de maneira análoga à seção 6.2, toma a forma de relações de recorrência dos polinômios de Chebyshev do tipo II. Para o caso $\lambda \neq 2$ obtemos:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ v_a &= 2(U_{a-1} - U_{a-2})v_0 \quad ; \quad a = 2, 3, \dots, r - 1 \\ v_r &= (U_{r-1} - U_{r-2})v_0 \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

e condição de consistência

$$v_{r-1} = (4x - 2)v_r \quad \text{ou} \quad (x - 1)T'_r(x) = 0 \quad (7.2.9)$$

a ser imposta na solução (7.2.8). As soluções para (7.2.9) tomam a seguinte forma

$$\lambda_k = 8 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2r} \right) \quad k = 0, 1, \dots, r - 1 \quad (\lambda \neq 2) \quad (7.2.10)$$

O caso $\lambda = 2$ deve ser tratado separadamente. Neste caso o autovalor $\lambda = 2$ corresponde ao autovetor:

$$v_{[1]}^{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.11)$$

De forma análoga ao caso $SO(2r)$, quando $r = 3(N + 1)$ aparece uma degenerescência, e o autovetor extra terá como componentes:

$$\begin{aligned} v_{3+3k} &= v_{4+3k} = -v_{6+3k} = -v_{7+3k} = -(v_0 + v_1) \quad k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ v_{2+3k} &= 0 \quad k = 0, 1, \dots, N \\ v_r &= (-1)^{r/3} \frac{(v_0 + v_1)}{2} \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

onde v_0, v_1 são parâmetros livres.

As equações de Hirota são dadas por

$$\begin{aligned} \tau_0^2 \Delta(\tau_0) &= \beta(\tau_0^2 - \tau_2) \\ \tau_1^2 \Delta(\tau_1) &= \beta(\tau_1^2 - \tau_2) \\ \tau_2^2 \Delta(\tau_2) &= 2\beta(\tau_2^2 - \tau_0\tau_1\tau_3) \\ \tau_a^2 \Delta(\tau_a) &= 2\beta(\tau_a^2 - \tau_{a-1}\tau_{a+1}) \quad a = 3, 4, \dots, r-2 \\ \tau_{r-1}^2 \Delta(\tau_{r-1}) &= 2\beta(\tau_{r-1}^2 - \tau_{r-2}\tau_r^2) \\ \tau_r^2 \Delta(\tau_r) &= \beta(\tau_r^2 - \tau_{r-1}) \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

Utilizando os resultados da seção 3.2 podemos calcular os $V_i^{(n-1)}$ definidos em (3.1.28) que serão dados por

$$\begin{aligned} V_0^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (1 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_0^{(l)} \delta_0^{(n-l)} \\ V_1^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (1 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_1^{(l)} \delta_1^{(n-l)} \\ V_2^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (2 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_2^{(l)} \delta_2^{(n-l)} \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \left(\delta_0^{(l)} \delta_1^{(n-l)} + \delta_1^{(l)} \delta_3^{(n-l)} + \delta_0^{(l)} \delta_3^{(n-l)} + \sum_{m=1}^{l-1} \delta_0^{(m)} \delta_1^{(l-m)} \delta_3^{(n-l)} \right) \\ V_a^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} \left((2 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_a^{(l)} \delta_a^{(n-l)} - 2\delta_{a-1}^{(l)} \delta_{a+1}^{(n-l)} \right) ; \quad a = 3, 4, \dots, r-2 \\ V_{r-1}^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (2 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_{r-1}^{(l)} \delta_{r-1}^{(n-l)} \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \left(\delta_r^{(l)} \delta_r^{(n-l)} + 2\delta_r^{(l)} \delta_{r-2}^{(n-l)} + \sum_{m=1}^{l-1} \delta_r^{(m)} \delta_r^{(l-m)} \delta_{r-2}^{(n-l)} \right) \\ V_r^{(n-1)} &= -\sum_{l=1}^{n-1} (1 - \lambda(n^2 - 3nl + 2l^2)) \delta_r^{(l)} \delta_r^{(n-l)} \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

Aplicando agora o método de recorrência podemos construir as soluções .

Para os autovalores $\lambda_k = 8 \sin^2 \frac{k\pi}{2r} = \frac{\gamma+\gamma_-}{\beta} \neq 2$, $k = 1, 2, \dots, r-1$, obtemos a solução

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 + e^\Gamma \\ \tau_1 &= 1 + e^\Gamma \\ \tau_a &= 1 + 2 \frac{\cos(2a-1)\theta_k}{\cos\theta_k} e^\Gamma + e^{2\Gamma} \quad a = 2, 3, \dots, r-1 \\ \tau_r &= 1 + (-1)^k e^\Gamma \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

onde $\theta_k = \frac{k\pi}{2r}$ e novamente usamos (6.2.32). De acordo com o teorema 3.1.1 notamos que $\kappa = 1$ neste caso e portanto, de (3.3.46) as massas são

$$M_k = \frac{2}{\psi^2} 8r\sqrt{2} m \sin \frac{k\pi}{2r} ; \quad k = 1, 2, \dots, r-1 \tag{7.2.16}$$

e pode-se mostrar que as cargas topológicas estão em $Q \in \Lambda_R$. Observe ainda que esta solução pode ser obtida de (6.2.31) para $SO(2r+2)$ através de um “folding”. Identificando $\tau_{r+1} \equiv \tau_r$ observamos que (6.2.31) (para $r \rightarrow r+1$) reduz a (7.2.15) e as equações de Hirota (6.2.29) são reduzidas a (7.2.13).

Consideremos agora o caso em que r não é múltiplo de 3. Neste caso $\lambda = 2$ é não degenerado e assim tomamos $\delta^{(1)}$ como o autovetor (7.2.11) e aplicando o método de recorrência obtemos

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 + e^\Gamma + \frac{1}{4r} e^{2\Gamma} \\ \tau_1 &= 1 - e^\Gamma + \frac{1}{4r} e^{2\Gamma} \\ \tau_a &= 1 + (-1)^a \left(1 - \frac{4a-2}{4r} \right) e^{2\Gamma} + \frac{1}{(4r)^2} e^{4\Gamma} ; \quad a = 2, 3, \dots, r-1 \\ \tau_r &= 1 + \frac{(-1)^r}{4r} e^{2\Gamma} \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

onde Γ é dada por (3.1.17) com $\frac{\gamma+\gamma_-}{\beta} = 2$. De acordo com o teorema 3.1.1 temos $\kappa = 2$ e desta forma de (3.3.46) a massa de tal sóliton é

$$M = \frac{2}{\psi^2} 8r\sqrt{2} m \tag{7.2.18}$$

e a carga topológica está no coset $Q \in \Lambda_R$. Novamente a solução acima pode ser obtida de (6.2.34) para $SO(2r+2)$ (i.e. $r \rightarrow r+1$) fazendo $y_1 = 1$ e $y_2 = 0$ e identificando $\tau_{r+1} \equiv \tau_r$.

Para o caso em que r é múltiplo de 3, o autovalor $\lambda = 2$ tem multiplicidade 2 e as soluções são obtidas a partir de $\delta^{(1)}$ sendo uma combinação dos autovetores (7.2.11) e (7.2.12) e logicamente aplicando em seguida o método de recorrência, mas o caso geral é bastante difícil de ser obtido. No entanto temos visto que todos os resultados deste caso podem ser obtidos através de um folding. De fato as soluções para $SO(6p+1)$ podem ser obtidas a partir das soluções de $SO(6p+2)$. Por exemplo, as soluções de $SO(13)$ são obtidas de (6.3.38) para o caso $SO(14)$ fazendo $y_2 = 0$ e desprezando a última componente de todos os $\delta^{(n)}$'s, $n = 1, 2, \dots, 6$. Obtemos assim três tipos de soluções :

1. Para $y_1 = 0$ e $y_3 \neq 0$ temos $\kappa = 1$ e a massa é

$$M_1 = \frac{2}{\psi^2} 24\sqrt{2} m$$

2. Para $y_1 \neq 0$ and $y_3 = 0$ temos $\kappa = 2$ e a massa

$$M_2 = \frac{2}{\psi^2} 48\sqrt{2} m$$

3. Finalmente para $y_1, y_3 \neq 0$ temos $\kappa = 3$ e massa

$$M_3 = \frac{2}{\psi^2} 72\sqrt{2} m$$

Capítulo 8

Soluções para as álgebras Excepcionais

8.1 Soluções para G_2

A matriz $L_{ij} = l_i^\psi K_{ij}$ neste caso é dada por

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.1.1)$$

onde os inteiros l_i^ψ são $(1, 2, 1)$. Os autovalores de L são $(0, 2, 6)$ e correspondem aos seguintes autovetores:

$$v^{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; v^{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; v^{\lambda=6} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.1.2)$$

Escrevemos em seguida as equações de Hirota para G_2 como:

$$\begin{aligned} \tau_0^2 \Delta(\tau_0) &= \beta(\tau_0^2 - \tau_1) \\ \tau_1^2 \Delta(\tau_1) &= 2\beta(\tau_1^2 - \tau_0\tau_2^3) \\ \tau_2^2 \Delta(\tau_2) &= \beta(\tau_2^2 - \tau_1) \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Para $\lambda = 6$ a solução obtida, usando o ansatz (3.1.16) e todo o procedimento já descrito, é dada por:

$$\delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \delta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.1.4)$$

Temos, portanto $\kappa = 1$ e assim, de acordo com (3.3.46) a massa será

$$M_1 = \frac{2}{\psi^2} 12\sqrt{6} m \quad (8.1.5)$$

Para $\lambda = 2$ a solução é dada por

$$\delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \delta^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1/3 \end{pmatrix}; \delta^{(3)} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}; \delta^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \delta^{(6)} = \left(\frac{1}{27}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.1.6)$$

E para esta solução temos $\kappa = 3$ e a massa dada por

$$M_2 = \frac{2}{\psi^2} 36\sqrt{2} m \quad (8.1.7)$$

Devemos observar que estas soluções podem ser obtidas das soluções de $SO(8)$ através de um “folding”. De fato, se identificarmos $\tau_1 \equiv \tau_3 \equiv \tau_4$ veremos que as equações (6.1.2) tornam-se (8.1.3) (depois de rebatizarmos $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$). Após estas identificações notamos que a solução contida em (6.1.4) e (6.1.5) torna-se (8.1.4) e a solução contida em (6.1.7) e (6.1.8) torna-se (8.1.6) impondo $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Ambas as soluções fornecem cargas topológicas na rede das raízes de G_2 .

8.2 Soluções para F_4

A matriz L para F_4 é escrita como

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.2.8)$$

e os inteiros l_i^ψ são $(1, 2, 3, 2, 1)$. Os autovalores de L são $(0, 6+2\sqrt{3}, 6-2\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$ e nenhum deles é degenerado.

Neste caso as equações de Hirota são escritas como:

$$\begin{aligned} \tau_0^2 \Delta(\tau_0) &= \beta(\tau_0^2 - \tau_1) \\ \tau_1^2 \Delta(\tau_1) &= 2\beta(\tau_1^2 - \tau_0\tau_2) \\ \tau_2^2 \Delta(\tau_2) &= 3\beta(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3^2) \\ \tau_3^2 \Delta(\tau_3) &= 2\beta(\tau_3^2 - \tau_2\tau_4) \\ \tau_4^2 \Delta(\tau_4) &= \beta(\tau_4^2 - \tau_3) \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

As soluções são construídas a partir do ansatz (3.1.16) e o procedimento idêntico aos exemplos anteriores. Os resultados são descritos abaixo.

Para $\lambda = 6 + 2\sqrt{3} = \frac{\gamma+\gamma_-}{\beta}$ a solução é dada por

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= (1, -2(2 + \sqrt{3}), 3(3 + 2\sqrt{3}), -2(2 + \sqrt{3}), 1) \\ \delta^{(2)} &= (0, 1, 3(3 + 2\sqrt{3}), 1, 0) \\ \delta^{(3)} &= (0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

Temos $\kappa = 1$ e portanto, de (3.3.46) a massa do sóliton será

$$M_1 = \frac{2}{\psi^2} 24\sqrt{6 + 2\sqrt{3}} m \quad (8.2.11)$$

A solução para $\lambda = 6 - 2\sqrt{3} = \frac{\gamma+\gamma_-}{\beta}$ é

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= (1, -2(2 - \sqrt{3}), 3(3 - 2\sqrt{3}), -2(2 - \sqrt{3}), 1) \\ \delta^{(2)} &= (0, 1, 3(3 - 2\sqrt{3}), 1, 0) \\ \delta^{(3)} &= (0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

Novamente $\kappa = 1$ e portanto a massa é

$$M_2 = \frac{2}{\psi^2} 24\sqrt{6 - 2\sqrt{3}} m \quad (8.2.13)$$

Para $\lambda = 3 + \sqrt{3} = \frac{\gamma+\gamma_-}{\beta}$ temos

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{4} \right) \\ \delta^{(2)} &= \left(a_1, 2(27 + 14\sqrt{3}) a_1, \frac{9}{64}, 2(3 + 2\sqrt{3}) a_1, a_1 \right) \\ \delta^{(3)} &= b_1 (0, -2, 8(1 + \sqrt{3}), 1, 0) \\ \delta^{(4)} &= a_1^2 (0, 1, (63 + 4 \cdot 3^{\frac{5}{2}}), 1, 0) \\ \delta^{(5)} &= (0, 0, 0, 0, 0) \\ \delta^{(6)} &= a_1^3 (0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

onde

$$a_1 = \frac{5 + 3^{\frac{3}{2}}}{64(71 + 41\sqrt{3})} \quad (8.2.15)$$

$$b_1 = \frac{-(12417 + 7169\sqrt{3})}{128(172947 + 99851\sqrt{3})} \quad (8.2.16)$$

Neste caso $\kappa = 2$ e assim, de (3.3.46) a massa do sóliton será

$$M_3 = \frac{2}{\psi^2} 48\sqrt{3 + \sqrt{3}} m \quad (8.2.17)$$

A solução para $\lambda = 3 - \sqrt{3} = \frac{\gamma+\gamma_-}{\beta}$ é

$$\delta^{(1)} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{-(1 + \sqrt{3})}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)} &= \left(a_2, 2(27 - 14\sqrt{3})a_2, \frac{9}{64}, 2(3 - 2\sqrt{3})a_2, a_2 \right) \\
 \delta^{(3)} &= b_2(0, -2, 8(1 - \sqrt{3}), 1, 0) \\
 \delta^{(4)} &= a_2^2(0, 1, (63 - 4 \cdot 3^{\frac{5}{2}}), 1, 0) \\
 \delta^{(5)} &= (0, 0, 0, 0, 0) \\
 \delta^{(6)} &= a_2^3(0, 0, 1, 0, 0)
 \end{aligned} \tag{8.2.18}$$

where

$$a_2 = \frac{-5 + 3^{\frac{3}{2}}}{64(-71 + 41\sqrt{3})} \tag{8.2.19}$$

$$b_2 = \frac{12417 - 7169\sqrt{3}}{128(-172947 + 99851\sqrt{3})} \tag{8.2.20}$$

Aqui novamente $\kappa = 2$ e a massa é

$$M_4 = \frac{2}{\psi^2} 48\sqrt{3 - \sqrt{3}} m \tag{8.2.21}$$

Todas as soluções correspondem a cargas topológicas na rede das co-raízes de F_4 .

8.3 A série E_n

As soluções de um sóliton para as álgebras excepcionais E_6 , E_7 e E_8 foram apresentadas em [15]. No entanto nem todas as soluções do tipo sóliton foram construídas. No caso de E_6 os autovalores $\lambda_1 = 6 - 2\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 6 + 2\sqrt{3}$ têm multiplicidade 2. Portanto usando o nosso método, isto é tomando $\delta^{(1)}$ como combinação linear dos autovetores associados ao autovalor degenerado, novas soluções são obtidas para E_6 . Não as apresentamos aqui, mas através de um “folding” elas são levadas às soluções de F_4 , construídas acima, correspondendo aos autovalores $6 - 2\sqrt{3}$ e $6 + 2\sqrt{3}$. As massas dessas novas soluções do tipo sóliton de E_6 são as mesmas dos sólitons correspondentes em F_4 .

Capítulo 9

A Redução do Modelo WZNW

9.1 A Redução a partir da Álgebra de dois loops

Uma outra maneira de se definir os modelos de Toda é através do procedimento da redução hamiltoniana, isto é, pode-se obter tais modelos a partir de uma teoria maior. No caso do modelo de Toda Conforme, ele pode ser visto como a redução hamiltoniana do modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW), que possui simetria de Kac-Moody. A redução hamiltoniana é implementada impondo-se vínculos à teoria de WZNW de maneira que a invariância conforme seja preservada. Desta forma, o espaço de fases com simetria Kac-Moody é reduzido a espaços de fase que têm como as álgebras \mathcal{W} sua estrutura de parênteses de Poisson. Um estudo completo deste tipo de redução e das simetrias foi feito pelo grupo de Dublin [7].

De maneira análoga os modelos CAT podem ser vistos como a redução hamiltoniana de um modelo WZNW generalizado, que tem como simetria a álgebra de Kac-Moody de dois loops [8]:

$$[J_a^m(x), J_b^n(y)] = f_{ab}^c J_c^{m+n} \delta(x-y) + k g_{ab} \partial_x \delta(x-y) \delta_{m,-n} + J^C(x) \delta(x-y) g_{ab} m \delta_{m,-n} \quad (9.1.1)$$

$$[J^D(x), J_a^m(y)] = m J_a^m(y) \delta(x-y) \quad (9.1.2)$$

$$[J^C(x), J^D(y)] = k \partial_x \delta(x-y) \quad (9.1.3)$$

$$[J^C(x), J_a^m(y)] = 0 \quad (9.1.4)$$

onde f_{ab}^c são as constantes de estrutura de uma álgebra de Lie finita \mathcal{G} , g_{ab} é a forma de Killing de \mathcal{G} ($g_{ab} = \text{Tr}(T_a T_b)$) e cujas equações de movimento são:

$$\partial_+ (\partial_- \hat{g} \hat{g}^{-1}) = 0 \quad ; \quad \partial_- (\hat{g}^{-1} \partial_+ \hat{g}) = 0 \quad (9.1.5)$$

onde \hat{g} é a exponencial de uma combinação linear real de geradores de uma álgebra de Kac-Moody: $T_a^m \equiv \int dx J_a^m(x)$, $C \equiv \int dx J^C(x)$ e $D \equiv \int dx J^D(x)$. Os elementos \hat{g} podem ser representados pela fórmula de decomposição do tipo Gauss

$$\hat{g} = \mathcal{N} \mathcal{A} \mathcal{M} \quad (9.1.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &= \exp \mathcal{F}_+(x) \quad ; \quad \mathcal{M}(x) = \exp \mathcal{F}_-(x) \\ \mathcal{A}(x) &= \exp (\phi^a(x) H_a^0 + 2\mu(x) D + \nu(x) C) \end{aligned} \quad (9.1.7)$$

com $\mathcal{F}_\pm(x)$ sendo a combinação linear de operadores step positivos/negativos, definidos na seção A.2. Usando esta decomposição podemos escrever:

$$\begin{aligned} k\hat{g}^{-1}\partial_+\hat{g} &= \mathcal{M}^{-1} \left(A^{-1}\mathcal{N}^{-1}\partial_+\mathcal{N}A + A^{-1}\partial_+A + \partial_+\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} \right) \mathcal{M} \equiv \mathcal{M}^{-1}K_R\mathcal{M} \\ &= \sum_{a,b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta^{ab} J_{R,a}^{-n} H_b^n + \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{2} J_{R,-\alpha}^{-n} E_{\alpha}^n + J_R^D C + J_R^C D \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

$$\begin{aligned} k\partial_-\hat{g}\hat{g}^{-1} &= \mathcal{N} \left(\mathcal{N}^{-1}\partial_-\mathcal{N} + \partial_-A A^{-1} + A\partial_-\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}A^{-1} \right) \mathcal{N}^{-1} \equiv \mathcal{N}K_L\mathcal{N}^{-1} \\ &= \sum_{a,b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta^{ab} J_{L,a}^{-n} H_b^n + \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{2} J_{L,-\alpha}^{-n} E_{\alpha}^n + J_L^D C - J_L^C D \end{aligned} \quad (9.1.9)$$

onde introduzimos $\eta^{ab} = \frac{\alpha_a^2}{2}(K^{-1})^{ab}$ e definimos

$$J_R(T) = Tr(\hat{g}^{-1}\partial_+\hat{g}T) \quad , \quad J_L(T) = Tr(\partial_-\hat{g}\hat{g}^{-1}T) \quad (9.1.10)$$

Desta maneira as equações (9.1.5) serão escritas como:

$$\partial_-K_R = -[K_R, \partial_-\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}] \quad (9.1.11)$$

$$\partial_+K_L = [K_L, \mathcal{N}^{-1}\partial_+\mathcal{N}] \quad (9.1.12)$$

Os campos em que estamos interessados, ou seja, os campos do modelo CAT $\phi(x)$, $\mu(x)$ e $\nu(x)$, estão associados à subálgebra de Cartan. Devemos, portanto, eliminar os demais campos associados aos subgrupos \mathcal{M} e \mathcal{N} . Para se fazer isso precisamos de um número de correntes em involução igual à soma das dimensões destes subgrupos. Observe que o comutador de dois operadores step positivos (negativos) produzem um operador step associado a uma raiz mais alta (baixa). Portanto, se as correntes associadas aos geradores com raízes não simples positivas (negativas) forem nulas, teremos a involução das correntes do subgrupo \mathcal{N} (\mathcal{M}). Assim, os vínculos nas correntes são impostos como:

$$J_{R,-\alpha_a}^0 = 2\frac{k}{\alpha_a^2}\lambda_a^R \quad ; \quad J_{R,\psi}^{-1} = 2\frac{k}{\psi^2}\lambda_{\psi}^R \quad (9.1.13)$$

$$J_{L,\alpha_a}^0 = 2\frac{k}{\alpha_a^2}\lambda_a^L \quad ; \quad J_{L,-\psi}^1 = 2\frac{k}{\psi^2}\lambda_{\psi}^L \quad (9.1.14)$$

com $a = 1, 2, \dots, \text{rank } \mathcal{G}$ e as demais correntes, J_R correspondentes a raízes negativas não simples e J_L correspondentes a raízes não simples positivas sendo nulas. O comutador de operadores step de raízes simples positivas com operadores step de raízes negativas não produz operadores step de raízes positivas. Usando a fórmula

$$\exp(T)L\exp(-T) = L + [T, L] + \frac{1}{2!}[T, [T, L]] + \frac{1}{3!}[T, [T, [T, L]]] + \dots \quad (9.1.15)$$

nos convencemos que as partes associadas a operadores step de raízes positivas em K_R e $\hat{g}^{-1}\partial_+\hat{g}$ são as mesmas. Desta forma teremos, após impormos os vínculos (9.1.13)

$$\left(A^{-1}\mathcal{N}^{-1}\partial_+\mathcal{N}A \right)_{red.} = \sum_a \frac{2}{\alpha_a^2}\lambda_a^R E_{\alpha_a}^0 + \frac{2}{\psi^2}\lambda_{\psi}^R E_{-\psi}^1 \quad (9.1.16)$$

De maneira análoga, impondo (9.1.14), concluímos que

$$\left(A \partial_- \mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} A^{-1} \right)_{red.} = \sum_a \frac{2}{\alpha_a^2} \lambda_a^L E_{-\alpha_a}^0 + \frac{2}{\psi^2} \lambda_\psi^L E_\psi^{-1} \quad (9.1.17)$$

e segue de (9.1.15) que

$$\left(\partial_- \mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} \right)_{red.} = \sum_a \frac{2}{\alpha_a^2} \lambda_a^L e^{K_{ab} \phi_b} E_{-\alpha_a}^0 + \frac{2}{\psi^2} \lambda_\psi^L e^{-K_{\psi b} \phi_b + 2\mu} E_\psi^{-1} \quad (9.1.18)$$

A componente de (9.1.11) na direção dos geradores \mathcal{A} é dada por

$$\partial_- \left(A^{-1} \partial_+ A \right) = - \left[\left(A^{-1} \mathcal{N}^{-1} \partial_+ \mathcal{N} A \right)_{red.}, \left(\partial_- \mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} \right)_{red.} \right] \quad (9.1.19)$$

e as equações do modelo CAT (2.3.36) a (2.3.38) são então obtidas fazendo $\lambda_a^R \lambda_a^L = \frac{q^a}{\bar{q}}$, $\lambda_\psi^R \lambda_\psi^L = -\frac{q^0}{\bar{q}}$ e $\phi^a \rightarrow \bar{q} \phi^a$.

O procedimento da redução deve ser implementado de maneira que a simetria conforme não seja quebrada, uma vez que sabemos que o modelo CAT apresenta tal simetria. Este fato implica uma modificação no tensor de energia-momento da teoria. De acordo com a construção de Sugawara tal tensor é definido como:

$$T(x) = \frac{1}{2k} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} g^{ab} J_a^m(x) J_b^{-m}(x) + 2J^C(x) J^D(x) \right] \quad (9.1.20)$$

Consideramos, por simplicidade, apenas os modos da quiralidade direita. A partir das relações (9.1.1) a (9.1.4) obtemos a seguinte relação :

$$[T(x), \mathcal{J}(y)] = \mathcal{J}(y) \partial_x \delta(x-y) - \partial_y \mathcal{J}(y) \delta(x-y) \quad (9.1.21)$$

onde \mathcal{J} designa as correntes J_m^a , J^C e J^D . Esta equação é então utilizada para reproduzirmos a álgebra de Virasoro clássica:

$$[T(x), T(y)] = 2T(y) \partial_x \delta(x-y) - \partial_y T(y) \delta(x-y) \quad (9.1.22)$$

Como as correntes de quiralidades distintas comutam entre si notamos que o tensor de Sugawara comuta com os vínculos (9.1.13). No entanto ele comuta fracamente com os vínculos (9.1.14), exceto para:

$$\varphi_a^L \equiv J_{L, \alpha_a}^0 - \frac{2k}{\alpha_a^2} \lambda_a^L$$

e

$$\varphi_\psi^L \equiv J_{L, \psi}^0 - \frac{2k}{\psi^2} \lambda_\psi^L$$

De (9.1.22) temos

$$[T(x), \varphi_a^L(y)] = [T(x), J_{L, \alpha_a}^0(y)] \approx J_{L, \alpha_a}^0(y) \delta'(x-y)$$

$$[T(x), \varphi_\psi^L(y)] = [T(x), J_{L, \psi}^0(y)] \approx J_{L, \psi}^0(y) \delta'(x-y)$$

uma vez que fracamente $J_{L,\alpha_a}^{0'} = J_{L,\psi}^{0'} = 0$. Portanto $T(x)$ deve ser modificado para que comute com os vínculos e o tensor modificado é escrito como:

$$W_2 = \frac{1}{k} (T(x) + \partial J_{\hat{\rho}}(x)) \quad (9.1.23)$$

onde $J_{\hat{\rho}} = k \text{Tr}(\hat{g}^{-1} \partial \hat{g} \hat{\rho})$ e

$$\hat{\rho} \equiv T_3 \equiv 2\hat{\delta} \cdot H^0 + hD \quad (9.1.24)$$

onde $\hat{\delta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \frac{\alpha}{\alpha^2}$. Veja equação (A.1.19) no apêndice A.

A lagrangiana (2.3.35) pode ser escrita nas coordenadas do cone de luz como

$$\mathcal{L} = \bar{q}^2 \sum_{a,b=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} \eta_{ab} \partial_+ \phi^a \partial_- \phi^b + \bar{q}^2 (\partial_{+\mu} \partial_- \nu + \partial_{-\mu} \partial_+ \nu) + \sum_{a=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} \frac{4q^a}{\alpha_a^2} e^{\bar{q}K_{ab}\phi^b} + \frac{4q^0}{\psi^2} e^{-\bar{q}K_{\psi b}\phi^b + 2\mu} \quad (9.1.25)$$

onde $x_{\pm} = x \pm t$, $\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_x \pm \partial_t)$. Considerando os momentos

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a}, \quad p_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mu}}, \quad p_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\nu}}$$

e as relações de Poisson fundamentais entre estas quantidades e seus campos conjugados

$$\{p_a(x), \phi_b(y)\} = \delta_{ab} \delta(x-y); \quad \{p_{\mu}(x), \nu(y)\} = \delta(x-y); \quad \{p_{\nu}(x), \mu(y)\} = \delta(x-y)$$

podemos definir as seguintes quantidades

$$\pi_a = \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial_+ \phi^b; \quad \pi_{\mu} = \partial_+ \nu; \quad \pi_{\nu} = \frac{1}{2} J^C = \partial_+ \mu \quad (9.1.26)$$

cuja estrutura algébrica, obtida a partir dos parênteses de Poisson, é dada por

$$\{\pi_a(x), \pi_b(y)\} = \frac{1}{4} \eta_{ab} \delta'(x-y); \quad \{\pi_{\mu}(x), J^C(y)\} = \delta'(x-y) \quad (9.1.27)$$

O tensor de energia-momento (9.1.23) é escrito em termos dos momentos como:

$$W_2 = 2 \sum_{a,b=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} \eta^{ab} \pi_a \pi_b + \pi_{\mu} J^C - 2 \sum_{a,b=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} \frac{2}{\alpha_a^2} \eta^{ab} \partial \pi_b - h \partial \pi_{\mu} \quad (9.1.28)$$

Utilizando as relações (9.1.27) verificamos que este tensor satisfaz a álgebra de Virasoro:

$$\{W_2(x), W_2(y)\} = 2W_2(y) \delta'(x-y) - \partial_y W_2(y) \delta(x-y) - c_w \delta'''(x-y) \quad (9.1.29)$$

com extensão central $c_w = 4\hat{\delta}^2$. No caso particular $\hat{sl}(2)$ $c_w = \frac{1}{2}$ para $\alpha^2 = 2$. Além desta relação obtemos:

$$\{W_2(x), J^C(y)\} = J^C(y) \delta'(x-y) - \partial_y J^C(y) \delta(x-y) - h \delta''(x-y) \quad (9.1.30)$$

9.2 Uma construção de Campos Primários de Spins mais altos e sua Simetria

Pretendemos nesta seção construir as cargas conservadas do modelo CAT a partir de densidades quirais, presentes em teorias conformes. Considerando o setor x^+ percebemos que se tivermos uma quantidade $W(x^+)$ tal que

$$\partial_- W(x^+) = 0 \rightarrow \partial_x W = \partial_t W$$

e portanto as integrais espaciais de tais densidades são conservadas no tempo:

$$\dot{Q} = \int dx \partial_t W = \int dx \partial_x W = 0 \quad (9.2.31)$$

tomando-se condições de contorno apropriadas. Note que qualquer função de W , $F(W)$, também satisfaz $\frac{d}{dt} \int dx F(W) = 0$.

Nossa construção permite identificar as grandezas conservadas da teoria, fato esperado de um sistema integrável, e verificar relações algébricas interessantes entre elas.

Uma família infinita de campos primários de spins mais altos é gerada a partir do operador diferencial

$$\mathcal{D}_s \equiv \partial + \frac{s}{c_J} J(x)$$

atuando num dado campo primário $V_s(x)$ de spin s . Na definição acima $J(x)$ é um campo primário de spin 1 e c_J será definido adiante.

Um campo V_s de spin s da teoria deve satisfazer a seguinte relação de comutação com o tensor de energia-momento W_2 :

$$\{W_2(x), V_s(y)\} = sV_s(y)\delta'(x-y) - V'_s(y)\delta(x-y) + c_V \delta^{(s+1)}(x-y) \quad (9.2.32)$$

onde c_V é a anomalia conforme do campo. Sendo assim a corrente $J(x)$ satisfaz:

$$\{W_2(x), J(y)\} = J(y)\delta'(x-y) - J'(y)\delta(x-y) + c_J \delta''(x-y) \quad (9.2.33)$$

Um campo de spin $s+1$ é obtido a partir de um outro de spin s aplicando o operador \mathcal{D}_s :

$$V_{s+1}(x) \equiv \mathcal{D}_s V_s(x) = V'_s(x) + \frac{s}{c_J} J(x) V_s(x) \quad (9.2.34)$$

que satisfaz:

$$\{W_2(x), V_{s+1}(y)\} = (s+1)V_{s+1}(y)\delta'(x-y) - V'_{s+1}(y)\delta(x-y) + c_V \mathcal{D}_s(y)\delta^{(s+1)}(x-y) \quad (9.2.35)$$

Observamos, assim, que quando $c_V = 0$ o campo V_{s+1} será primário. Devemos ainda reforçar o fato de que tal construção só é possível para $c_J \neq 0$, uma vez que ela é responsável pelo cancelamento do termo $V_s(x)\delta''(x-y)$ no lado direito de (9.2.35). No modelo CAT a existência de uma corrente com tal característica é garantida pela presença do campo ν , que tem como momento associado a corrente J^C (9.1.26). Neste caso $c_J = -h$ conforme pode ser observado em (9.1.30). Ainda no modelo CAT, a existência desta corrente faz com que

obtenhamos um segundo campo primário de spin 2 (além do tensor de energia-momento W_2):

$$\widetilde{W}_2(x) \equiv \frac{1}{4} (J^C(x))^2 - \frac{1}{2} h J^{C'}(x) \quad (9.2.36)$$

que satisfaz

$$\{W_2(x), \widetilde{W}_2(y)\} = 2\widetilde{W}_2(y)\delta'(x-y) - \widetilde{W}'_2(y)\delta(x-y) - \frac{1}{2}h^2\delta'''(x-y) \quad (9.2.37)$$

Observe que o tensor \widetilde{W}_2 possui a forma de um tensor de Sugawara, porém construído a partir de uma corrente abeliana, fato sem dúvida curioso. Com o auxílio deste construímos um campo primário de spin 2 livre de anomalia:

$$V_2(x) = W_2(x) - \frac{8\hat{\delta}^2}{h^2} \widetilde{W}_2(x) \quad (9.2.38)$$

Podemos, portanto aplicar o procedimento discutido acima para gerar uma torre infinita de campos primários livres de anomalia:

$$W_s^{(1)}(x) \equiv (\partial - (s-1)J^C(x)/h) (\partial - (s-2)J^C(x)/h) \dots (\partial - 2J^C(x)/h) V_2 \quad (9.2.39)$$

para $s > 2$.

Observe, no entanto, que se $V_2(x)$ é livre de anomalia uma potência arbitrária sua também será, ou seja

$$\{W_2(x), (V_2(y))^N\} = 2N (V_2(y))^N \delta'(x-y) - \partial_y (V_2(y))^N \delta(x-y) \quad (9.2.40)$$

Podemos, portanto, definir torres de campos primários a partir destes operadores através da expressão:

$$\begin{aligned} W_s^{(N)}(x) \equiv & (\partial - (s-1)J^C(x)/h) (\partial - (s-2)J^C(x)/h) \dots \\ & \dots (\partial - (2N+1)J^C(x)/h) (\partial - 2NJ^C(x)/h) (V_2)^N(x) \end{aligned} \quad (9.2.41)$$

onde $s > 2N$. Devemos observar que um produto de operadores em diferentes torres poderá também ser usado como o ponto inicial de uma nova torre. Desta forma certamente aparecerão degenerescências e um método precisa ainda ser desenvolvido para selecionar os campos primários independentes de um dado spin.

A álgebra dos campos primários introduzidos acima adquire uma forma especial quando consideramos o limite em que J^C assume valor muito grande. Neste caso, a partir de (9.1.28), (9.2.36) and (9.2.38) obtemos

$$V_2(x) \approx \pi_\mu(x) J^C(x) - \frac{2\hat{\delta}^2}{h^2} (J^C(x))^2 \quad (9.2.42)$$

e de (9.2.39)

$$W_s^{(1)}(x) \approx \pi_\mu(x) (J^C(x))^{s-1} - \frac{2\hat{\delta}^2}{h^2} (J^C(x))^s \quad (9.2.43)$$

Usando, portanto, (9.1.27) obtemos a contribuição dominante dada por:

$$\{W_s^{(1)}(x), W_{s'}^{(1)}(y)\} \approx (J^C(x))^{s-1} (J^C(y))^{s'-1} \delta'(x-y) \quad (9.2.44)$$

e com o auxílio da propriedade

$$f(x)\delta'(x-y) = f(y)\delta'(x-y) - f'(y)\delta(x-y)$$

podemos reescrever (9.2.44) na forma

$$\begin{aligned} \{W_s(x), W_{s'}(y)\} &\approx (s+s'-2)W_{(s+s'-2)}(y)\delta'(x-y) - (s-1)W'_{(s+s'-2)}(y)\delta(x-y) \\ &= \left[(s-1)W_{(s+s'-2)}(x) + (s'-1)W_{(s+s'-2)}(y) \right] \delta'(x-y) \end{aligned} \quad (9.2.45)$$

Reconhecemos, assim, em (9.2.45) a relação usual da álgebra w_∞ [29], [30]. Observe que no limite abordado nesta análise, em que $J^C(x)$ é muito grande, a álgebra das quantidades definidas em (9.2.41) é essencialmente a mesma das quantidades definidas em (9.2.39) dada por (9.2.45).

Ilustremos a construção descrita nesta seção com o exemplo mais simples que é o caso $\hat{sl}(2)$ onde $h = 2$. O campo $W_3^{(1)}$ é escrito explicitamente em termos dos campos do modelo CAT como:

$$\begin{aligned} W_3^{(1)} &= 2\partial\phi\partial^2\phi + 2\partial\nu\partial^2\mu - \partial^3\phi - 2\partial^3\nu \\ &+ \frac{1}{2}\partial^3\mu + 2\partial\mu \left(\partial^2\phi - (\partial\phi)^2 - 2\partial\nu\partial\mu + 3\partial^2\nu + \frac{1}{4}(\partial\mu)^2 - \frac{3}{4}\partial^2\mu \right) \end{aligned} \quad (9.2.46)$$

onde os coeficientes são fixados de tal forma que $\partial_- W_3 = 0$. Obtemos para este campo a seguinte relação algébrica:

$$\begin{aligned} \{W_3^{(1)}(x), W_3^{(1)}(y)\} &= 4W_4^{(1)}(y)\delta'(x-y) - 2W_4^{(1)'}(y)\delta(x-y) - B'(y)\delta(x-y) \\ &+ (2B(y) + W_2''(y))\delta'(x-y) - 3W_2'(y)\delta''(x-y) \\ &+ \left(2W_2(y) + \frac{1}{2}J^C(x)J^C(y) \right) \delta'''(x-y) + \frac{1}{2}(J^C(x) - J^C(y))\delta^{(4)}(x-y) - \frac{1}{2}\delta^{(5)}(x-y) \end{aligned} \quad (9.2.47)$$

com $B(y) \equiv J^C(y)W_2'(y) + 2J^{C'}(y)W_2(y) - (J^C(y))^2W_2(y)$. Observe que os dois primeiros termos do lado direito de (9.2.47) coincidem com o resultado (9.2.45) da álgebra w_∞ obtida no limite J^C muito grande.

9.3 A Fixação de gauge das correntes

Fazemos nesta seção uma análise de nossa abordagem na redução hamiltoniana e a comparamos com a abordagem feita pelo grupo de Dublin [7] em que o método de Drinfeld-Sokolov [31] é aplicado para se obter os geradores de spins mais altos.

Após a imposição dos vínculos (9.1.13) as correntes (9.1.8) tomam a seguinte forma:

$$J_{\text{red}} = k \left(\hat{g}^{-1} \partial \hat{g} \right)_{\text{red}} = \mathcal{M}^{-1} (I_+ + \partial\Phi) \mathcal{M} + \mathcal{M}^{-1} \partial \mathcal{M} = I_+ + j(x) \quad (9.3.48)$$

onde $j(x)$ possui componentes somente na direção da subálgebra de Cartan e operadores step negativos e $\partial\Phi = A^{-1}\partial A$, A e \mathcal{M} são definidos em (9.1.7). Além disso

$$I_+ \equiv \sum_a \lambda_a E_{\alpha_a}^0 + \lambda_\psi E_{-\psi}^1 \quad (9.3.49)$$

Os campos do modelo CAT são os parâmetros do subgrupo abeliano com elementos A . Os elementos \mathcal{M} contêm os campos do modelo WZNW que queremos eliminar pelo processo da redução. Mostramos que fazendo a fixação de gauge das correntes obtemos apenas duas correntes remanescentes que são redutíveis, ou seja, podem ser escritas em termos dos campos do modelo CAT. Tais correntes são J^C e um operador de spin 2, que será o tensor de energia-momento W_2 dado por (9.1.28). Neste caso não encontramos correntes remanescentes de spin $s \geq 3$.

A fixação de gauge é implementada de maneira mais adequada separando a álgebra de Kac-Moody em autoestados do operador $\hat{\rho}$ dado em (9.1.24). O termo $\mathcal{F}_-(x)$ definido em (9.1.7) e J_{red} de (9.3.48) em autoestados podem ser decompostos em autoestados do operador $\hat{\rho}$ de maneira que $\mathcal{F}_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_-^{(-n)}(x)$ e $J_{\text{red}} = I_+ + \sum_{n=0}^{\infty} J_{\text{red}}^{(-n)}$ onde

$$[\hat{\rho}, \mathcal{F}_-^{(-n)}] = -n\mathcal{F}_-^{(-n)} \quad ; \quad [\hat{\rho}, J_{\text{red}}^{(-n)}] = -nJ_{\text{red}}^{(-n)} \quad (9.3.50)$$

De (9.3.48) observamos que

$$J_{\text{red}}^{(-n)} = [I_+, \mathcal{F}_-^{(-n-1)}] + X_n \quad (9.3.51)$$

onde X_n contém termos $\mathcal{F}_-^{(-m)}$ com $m \leq n$. Sendo assim, podemos determinar J_{red} recursivamente e os campos \mathcal{M} de nível $\hat{\rho} = -n - 1$ aparecem somente a partir da corrente $J_{\text{red}}^{(-n)}$ em diante.

Vamos ilustrar estas considerações com o caso $\hat{sl}(3)$, sendo que o caso geral pode ser entendido seguindo a mesma linha. Os autovalores de $\hat{\rho}$ e os correspondentes auto-operadores para $\hat{sl}(3)$ são

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= 0 && H_1^0, H_2^0, C, D \\ \hat{\rho} &= -3n - 1 && E_{-1}^{-n}, E_{-2}^{-n}, E_3^{-n-1} && n \geq 0 \\ \hat{\rho} &= -3n - 2 && E_1^{-n-1}, E_2^{-n-1}, E_{-3}^{-n} && n \geq 0 \\ \hat{\rho} &= -3n && H_1^{-n}, H_2^{-n} && n \geq 1 \end{aligned} \quad (9.3.52)$$

onde os subíndices 1 e 2 correspondem às raízes simples, 3 à raiz mais alta de $sl(3)$ e o número de Coxeter h neste caso é 3.

No nível $\hat{\rho} = 0$ existem 4 correntes em J_{red} . No entanto a corrente na direção D desacopla porque este gerador nunca é obtido por relações de comutação no lado direito da equação (9.3.51) e assim J^C é uma corrente remanescente. Portanto as outras três correntes envolvem os três campos \mathcal{M} contidos em $\mathcal{F}_-^{(-1)}$. Assim, fixando três componentes de J_{red}^0 podemos escrever os três campos \mathcal{M} em termos dos campos do modelo CAT. No nível $\hat{\rho} = -1$ existem novamente três correntes J_{red} e elas envolvem os três campos \mathcal{M} no nível $\hat{\rho} = -2$. No entanto I_+ possui um aniquilador em $\mathcal{F}_-^{(-2)}$, isto é, uma combinação linear dos campos, dada por $\lambda_1 E_1^{-1} + \lambda_2 E_2^{-1} + \lambda_\psi E_{-3}^0$, que comuta com ele. Desta maneira apenas

dois campos \mathcal{M} aparecem em $J_{\text{red}}^{(-1)}$. Portanto apenas duas componentes de $J_{\text{red}}^{(-1)}$ devem ser fixadas para determinar os dois campos \mathcal{M} e a terceira componente é uma corrente remanescente que pode ser escrita somente em termos dos campos do modelo CAT. De (9.1.23) e (9.1.24) notamos que as correntes possuem pesos conformes dados por $s = 1 - \hat{\rho}$ e neste caso teremos uma corrente remanescente de spin 2, podendo ser verificado tratar-se de W_2 . O campo \mathcal{M} remanescente em $\mathcal{F}_-^{(-2)}$ irá aparecer na expansão de $J_{\text{red}}^{(-2)}$ juntamente com os dois campos \mathcal{M} de $\mathcal{F}_-^{(-3)}$ e serão portanto determinados em termos dos campos do modelo CAT ao serem fixadas as três correntes em $J_{\text{red}}^{(-2)}$. Desta forma não há corrente remanescente ao nível $\hat{\rho} = -2$ ($s = 3$). O operador I_+ possui os seguintes aniquiladores no subespaço gerado pelos operadores step das raízes negativas

$$\frac{1}{\lambda_1} E_{-1}^{-n} + \frac{1}{\lambda_2} E_{-2}^{-n} + \frac{1}{\lambda_\psi} E_3^{-n-1} \quad n \geq 1 \quad \text{e} \quad \lambda_1 E_1^{-n-1} + \lambda_2 E_2^{-n-1} + \lambda_\psi E_{-3}^{-n} \quad n \geq 0 \quad (9.3.53)$$

O processo de fixação de gauge das correntes pode ser continuado levando em conta (9.3.53) de maneira a nos convencer de que não existem outras correntes remanescentes redutíveis além de W_2 e J^C .

A construção dos geradores W para o modelo CT é relacionada aos operadores de Casimir da álgebra de Lie \mathcal{G} subjacente e o número destes é igual ao rank de \mathcal{G} .

No modelo CAT notamos uma situação diferente. No caso específico de $\hat{sl}(3)$ parece não haver outro gerador quiral de spin 3 além de $W_3^{(1)} = (\partial - J^C)V_2$, obtido em (9.2.39). No caso do modelo CT o método de Drinfeld-Sokolov (DS) [31, 32] permite que a corrente correspondente seja colocada na forma [7]:

$$\omega^{-1} J_{\text{red}} \omega + \omega^{-1} \partial \omega = I_+ + \sum_{n=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} W_n F_n \quad (9.3.54)$$

onde ω é um elemento do subgrupo gerado por operadores step de raízes negativas e os F_n são combinações lineares dos operadores de grau n que não podem ser obtidos comutando I_+ com operadores step negativos. Os W_n 's são os geradores da álgebra W e são dados pelas correntes remanescentes, escritos, portanto em termos dos campos do modelo CT. Neste caso, em cada nível existe uma corrente remanescente, o que não acontece no modelo CAT, conforme pudemos observar no exemplo descrito acima.

Uma constatação básica na implementação do método de Drinfeld-Sokolov de fixação das correntes é a condição de que I_+ não possua aniquilador e de fato eles não ocorrem no caso do modelo CT. Parece-nos, portanto, que a existência destes na estrutura algébrica do modelo CAT obstrui a obtenção dos geradores da álgebra W por este método e os resultados da seção 9.2 podem ser vistos como uma maneira de contornarmos este problema.

Capítulo 10

Conclusões

O método de Hirota, empregado de maneira recursiva se mostrou bastante adequado para a construção de soluções do tipo sóliton nas teorias de Toda, principalmente devido às degenerescências, que exploradas de maneira conveniente forneceram soluções com propriedades bastante interessantes. Entre estas propriedades podemos citar:

1. A velocidade e largura dos sólitons são determinados pelos autovalores da matriz $L_{ij} = l_i^\psi K_{ij}$.
2. As massas dos sólitons também são determinadas por estes autovalores e são na verdade proporcionais às massas das partículas fundamentais da teoria, ou seja os quanta associados aos campos escalares de Toda.
3. No caso de um dado autovalor ser degenerado obtém-se novas soluções sólitons cujas massas são quantizadas em unidades de $\frac{4h}{\psi^2} m\sqrt{\lambda}$. O fato de nesta expressão aparecer o número de Coxeter da álgebra e a raiz dos autovalores da matriz garante a universalidade deste resultado para todas as álgebras. Apesar de se poder argumentar que estas soluções extras correspondem a soluções de multi-sólitons um fato interessante vale ser ressaltado. Raramente consegue-se encontrar soluções de multi-sólitons que podem ser colocados em repouso em algum referencial de Lorentz. As soluções em geral são dependentes do tempo e descrevem o espalhamento de dois ou mais sólitons. No nosso caso obtivemos soluções cuja massa é o dobro ou mesmo o triplo da massa dos sólitons fundamentais mas que são soluções estáticas. Eles podem ser interpretadas como soluções de um sóliton ou mesmo estado ligado de dois ou mais sólitons. De qualquer maneira este tipo de solução somente é possível graças à degenerescência dos autovalores de L_{ij} . Isto está intimamente relacionado com a estrutura da álgebra em questão e portanto com a dinâmica do modelo.
4. As cargas topológicas podem ser classificadas de acordo com os elementos do espaço coset Λ_W/Λ_R . Existe indicação que elas estão relacionadas, no caso de algumas álgebras, com as representações fundamentais. De qualquer maneira a completa determinação da carga de uma solução ainda não está bem entendida e merece um

estudo mais profundo. Outro aspecto diz respeito a maneira como estas cargas se adicionam quando soluções diferentes são superpostas.

5. O truncamento da expansão de Hirota como vimos é consequência do fato da matriz de Cartan K_{ij} de uma álgebra de Kac-Moody ser singular. Na verdade a ordem em que o truncamento da expansão de cada função τ ocorre constitui um vetor de números inteiros proporcional ao vetor nulo da matriz $L_{ij} = l_i^{\psi} K_{ij}$. Isto pode ajudar a entender porque os modelos CT não possuem soluções sólitons, uma vez que a matriz de Cartan de uma álgebra simples de Lie é não singular.

Nós consideramos apenas soluções sólitons estáticas, no sentido de que elas podem ser colocadas em repouso em um dado referencial de Lorentz. Uma possível extensão de nosso trabalho seria a construção de soluções de muitos sólitons.

Um aspecto destas soluções sólitons que certamente merece ser estudado é o papel destes na teoria quântica dos modelos de Toda. Como é bastante sabido estes modelos constituem generalizações do modelo de sine-Gordon. Os sólitons deste modelo foram bastante bem estudados e sabe-se que para certos valores da constante de acoplamento o modelo de sine-Gordon é equivalente ao modelo de Thirring [33, 34]. Esta equivalência permite interpretar os operadores fermiônicos do modelo de Thirring como os operadores de campo dos sólitons de Sine-Gordon. Naturalmente, uma questão que se coloca diz respeito à teoria quântica destes sólitons. Se eles são apenas soluções clássicas ou correspondem a partículas no espectro quântico dos modelos de Toda. A respostas para estas questões certamente tem uma importância muito grande em várias áreas da Física. As teorias de gauge não abelianas são teorias não lineares e muitas delas possuem soluções do tipo sóliton como o monopolo magnético, dyons, instantons, etc. A questão sobre o papel destas soluções na teoria quântica está longe de ser bem entendido. Estes aspectos não podem ser abordados pela teoria de perturbações e precisamos ainda desenvolver métodos para responder tais questões. Modelos mais simples como os de Toda, KdV, KP, etc, além de possuírem suas próprias aplicações têm ajudado a desenvolver métodos não perturbativos no estudo de dinâmica não linear. Vale lembrar que o método de Lax, espalhamento inverso, equações de Yang-Baxter, grupos quânticos etc, desenvolveram-se bastante no estudo de tais modelos.

Os modelos de Toda despertam ainda um interesse adicional devido à sua relação com teorias conformes em duas dimensões. Estas teorias têm sido bastante estudadas devido a sua relação com fenômenos críticos. Certos modelos estatísticos que possuem transição de fase de segunda ordem apresentam invariância de escala (e daí invariância conforme) próximo ao ponto crítico. Eles podem daí serem descritos por teorias de campo conformes. Os modelos de Toda CT e CAT são invariantes por transformações conformes. As suas simetrias na verdade são descritas pelas chamadas álgebras W que constituem extensões da álgebra conforme em duas dimensões. Elas misturam de uma maneira não trivial transformações do espaço-tempo e internas. Um grande esforço tem sido feito para se entender as simetrias associadas a estas álgebras que na verdade não são álgebras de Lie.

Como mostramos nesta tese parte das simetrias dos modelos CAT é descrita por uma álgebra W_{∞} . Obtivemos uma maneira sistemática de construir uma família infinita de campos primários de spins mais altos, graças à existência de um campo primário de spin 1 no modelo. Estes campos são as infinitas densidades de carga conservadas existentes na

teoria e num certo limite realizam a álgebra dos difeomorfismos que preservam a área, w_∞ . Como pudemos verificar, esta construção na verdade constitui uma maneira alternativa ao método de Drinfeld-Sokolov de fixação de gauge das correntes do modelo WZNW, que dá origem à estrutura de álgebra W presente no modelo CT. No que diz respeito às simetrias do modelo CAT, uma questão que ainda fica pendente é a demonstração da integrabilidade completa do modelo CAT, e seria, portanto, interessante desenvolver um método para extrair as cargas independentes e verificar sua involução .

Resumo da Álgebra de Lie e WZNW-Model

Definição: Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial \mathfrak{g} sobre \mathbb{C} com uma operação binária $[\cdot, \cdot]$ satisfazendo as propriedades de bilinearidade, alternância e a identidade de Jacobi.

3.1. Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita ser semisimples se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\perp}$, onde \mathfrak{g}^{\perp} é o subespaço ortogonal de \mathfrak{g} em relação ao produto interno definido por

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\alpha\beta) \quad (3.1)$$

para $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}$. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita ser simples se é semisimples e não possui subálgebras de Lie não triviais. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita ser reductiva se é a soma direta de uma álgebra semisimples e uma álgebra abeliana.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \quad (3.2)$$

onde \mathfrak{h} é uma álgebra semisimples e \mathfrak{m} é uma álgebra abeliana. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita ser reductiva se e somente se pode ser escrita na forma (3.2).

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \quad (3.3)$$

onde \mathfrak{h} é uma álgebra semisimples e \mathfrak{m} é uma álgebra abeliana. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita ser reductiva se e somente se pode ser escrita na forma (3.3).

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \quad (3.4)$$

onde \mathfrak{h} é uma álgebra semisimples e \mathfrak{m} é uma álgebra abeliana. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita ser reductiva se e somente se pode ser escrita na forma (3.4).

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \quad (3.5)$$

Apêndice A

Resumo de álgebras de Lie e Kac-Moody

Pretendemos neste apêndice expor um breve resumo sobre a teoria de álgebras de Lie e Kac-Moody para que sejam feitas as definições básicas que serão utilizadas na apresentação dos modelos estudados. Para uma revisão mais detalhada deste assunto as referências [35, 36] são indicadas.

A.1 Álgebras de Lie

Uma álgebra de Lie \mathcal{G} de um grupo de Lie G possui uma base T_a , $a = 1, \dots, \dim G$ que satisfaz a seguinte relação :

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c \quad (\text{A.1.1})$$

onde as constantes f_{ab}^c são denominadas constantes de estrutura da álgebra. Para as álgebras semisimples as relações de comutação acima podem ser colocadas de forma que se obtenha uma subálgebra em que os geradores comutem entre si:

$$[H_i, H_j] = 0 \quad i, j = 1, \dots, r = \text{rank } \mathcal{G} \quad (\text{A.1.2})$$

denominada subálgebra de Cartan. Os demais geradores da álgebra constituem autoestados sob comutação em relação aos geradores da subálgebra de Cartan:

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (\text{A.1.3})$$

onde α é uma raiz de \mathcal{G} constitui um vetor em um espaço r -dimensional dual a subálgebra de Cartan. E_α é o gerador a ela correspondente, denominado "operador step". Os demais comutadores são da forma:

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta} & , \text{ se } \alpha + \beta \text{ é raiz} \\ \alpha \cdot H & , \text{ se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & , \text{ nos demais casos} \end{cases} \quad (\text{A.1.4})$$

onde $\epsilon(\alpha, \beta)$ são constantes de estrutura. Nesta base, denominada base de Weyl-Cartan, os geradores são normalizados de maneira que

$$\text{tr}(H_i, H_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \text{tr}(H_i, E_\alpha) = 0 \quad , \quad \text{tr}(E_\alpha, E_\beta) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha, -\beta} \quad (\text{A.1.5})$$

onde tr é uma forma bilinear. No caso em que tr é o traço na representação adjunta ela é chamada de forma de Killing de \mathcal{G} .

Pode-se dividir as raízes em positivas e negativas e no caso das álgebras semisimples elas ocorrem aos pares, i.e., se α é raiz, $-\alpha$ também é. Existem $r = \text{rank} \mathcal{G}$ raízes simples que são assim chamadas porque não podem ser obtidas como a soma de duas raízes positivas. As raízes, por sua vez, podem ser escritas como como combinações lineares das simples com coeficientes inteiros e de mesmo sinal,

$$\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$$

e se α é positiva, $n_i \geq 0$. A altura de uma raiz é então definida como

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^r n_i$$

e a raiz de maior altura, ou seja, a raiz mais alta de uma álgebra de Lie pode ser expressa como:

$$\psi = \sum_{i=1}^r n_i^\psi \alpha_i \tag{A.1.6}$$

onde α_i são as raízes simples desta álgebra e $n_i^\psi > 0$. Esta expansão permite ainda definir o chamado “número de Coxeter” de \mathcal{G} :

$$h = 1 + \sum_{i=1}^r n_i^\psi \tag{A.1.7}$$

A partir do produto escalar entre as raízes simples podemos definir a matriz de Cartan de \mathcal{G} :

$$K_{ij} = 2 \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2} \quad i, j = 1, \dots, r \tag{A.1.8}$$

onde todos os elementos são inteiros, pois $2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2}$ é sempre inteiro para quaisquer raízes α e β . Podemos agora introduzir uma outra base denominada base de Chevalley definindo

$$H_a = 2 \frac{\alpha_a \cdot H}{\alpha_a^2} \tag{A.1.9}$$

onde α_a é uma raiz simples e as relações de comutação sendo dadas por:

$$[H_a, H_b] = 0 \tag{A.1.10}$$

$$[H_a, E_\beta] = K_{\beta a} E_\beta \tag{A.1.11}$$

onde $K_{\beta a} = \sum_b n_b K_{ba}$.

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta} & , \text{se } \alpha + \beta \text{ é raiz} \\ \delta_{\alpha\beta} H_\beta & , \text{se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & , \text{nos demais casos} \end{cases} \tag{A.1.12}$$

e agora $\text{tr}(H_a, H_b) = \frac{2}{\alpha_a^2} K_{ab}$.

Outra noção importante para o texto é de representação irredutível de uma álgebra de Lie \mathcal{G} . Sendo $|\lambda\rangle$ um estado de peso mais alto numa base em que H_i é diagonal, tal estado é definido como:

$$E_\alpha |\lambda\rangle = 0, \quad \alpha > 0 \tag{A.1.13}$$

$$H_i |\lambda\rangle = \lambda_i |\lambda\rangle, \quad i, j = 1 \dots r \tag{A.1.14}$$

onde $2 \frac{\lambda \cdot \alpha}{\alpha^2} =$ inteiro para qualquer raiz α . Os autovalores dos geradores da subálgebra de Cartan são denominados pesos. Assim como r raízes simples, existem r pesos fundamentais, definidos como

$$2 \frac{\lambda_j \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, r \tag{A.1.15}$$

e portanto na base de Chevalley

$$H_\alpha |\lambda\rangle = 2 \frac{\lambda \cdot \alpha}{\alpha^2} |\lambda\rangle = \text{inteiro} |\lambda\rangle \tag{A.1.16}$$

Devemos também introduzir a noção de graduação de uma álgebra de Lie \mathcal{G} . Veremos que esta noção será importante na construção das soluções obtidas por Leznov e Saveliev para as teorias de Toda.

Uma álgebra de Lie pode ser vista como a soma de subespaços de dimensão finita:

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_a \tag{A.1.17}$$

onde a indica o grau, $\dim \mathcal{G}_a$ é finita e a seguinte condição é satisfeita:

$$[\mathcal{G}_a, \mathcal{G}_b] \subset \mathcal{G}_{a+b} \tag{A.1.18}$$

ou seja, o comutador de um elemento no subespaço \mathcal{G}_a com outro elemento no subespaço \mathcal{G}_b se encontra no subespaço \mathcal{G}_{a+b} .

Uma álgebra de Lie \mathcal{G} é totalmente gerada a partir de sua parte local: $\mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$, onde os elementos de grau zero são os geradores da subálgebra de Cartan e os operadores step associados a raízes simples positivas (negativas) possuem grau 1 (-1).

Para determinar o grau de um gerador de uma álgebra \mathcal{G} definimos o operador:

$$T_3 = 2\hat{\delta} \cdot H \tag{A.1.19}$$

onde $\hat{\delta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \frac{\alpha}{\alpha^2}$, de forma que

$$[T_3, E_\alpha] = h(\alpha) E_\alpha \tag{A.1.20}$$

onde $h(\alpha)$ é o grau (ou altura) de E_α .

A.2 Álgebras de Kac-Moody

O interesse dos físicos em álgebras de Kac-Moody surgiu a partir da observação de sua relação com álgebras de correntes em duas dimensões:

$$[J^a(x), J^b(y)] = if^{abc} J^c(x) \delta(x-y) + ik \delta^{ab} \delta'(x-y)$$

onde o segundo termo do lado direito é conhecido como termo de Schwinger. Os geradores da álgebra de Kac-Moody são os modos dos campos $J^a(x)$ definidos numa reta com condições de contorno periódicas.

Uma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ é associada a uma álgebra de Lie \mathcal{G} a partir da relação :

$$[\lambda^m \otimes \mathcal{G}_1, \lambda^n \otimes \mathcal{G}_2] = \lambda^{m+n} \otimes [\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2] + \delta_{m+n,0} \text{tr}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) mk \quad (\text{A.2.21})$$

Na base de Weyl-Cartan as relações de comutação serão dadas por:

$$[H_m^i, H_n^j] = km\delta^{ij}\delta_{m,-n} \quad (\text{A.2.22})$$

$$[H_m^i, E_n^\alpha] = \alpha^i E_{m+n}^\alpha \quad (\text{A.2.23})$$

$$[E_m^\alpha, E_n^\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{m+n}^{\alpha+\beta} & , \text{se } \alpha + \beta \text{ é raiz} \\ \frac{2}{\alpha^2} \alpha \cdot H_{m+n} + mk\delta_{m+n,0} & , \text{se } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & , \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (\text{A.2.24})$$

$$[k, E_n^\alpha] = [k, H_n^i] = 0 \quad (\text{A.2.25})$$

$$[d, E_n^\alpha] = nE_n^\alpha, \quad [d, H_n^i] = nH_n^i \quad (\text{A.2.26})$$

onde o gerador d define a chamada “graduação homogênea”. O operador análogo à graduação de uma álgebra de Lie \mathcal{G} é definido como

$$T_3 = hd + 2\hat{\delta} \cdot H_0 \quad (\text{A.2.27})$$

onde h é o número de Coxeter definido em (A.1.7). Este operador define a “graduação principal” de uma álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$.

A subálgebra de Cartan neste caso é formada pelos geradores (H_0^i, k, d) e os operadores step serão: E_n^α associados às raízes $a = (\alpha, 0, n)$, onde α pertence ao conjunto de raízes de \mathcal{G} e n são inteiros e H_n^i associados às raízes $n\delta = (0, 0, n)$ com $n \neq 0$.

As raízes positivas serão $(\alpha, 0, n)$ para $n > 0$ ou $n = 0$ e $\alpha > 0$ sendo que as simples destas são $a_i = (\alpha_i, 0, 0)$, $1 \leq i \leq r$ e $\alpha_0 = (-\psi, 0, 1)$.

Note que a primeira componente dos vetores definidos nos parágrafos acima contém sempre um elemento do espaço de raízes da álgebra de Lie finita. As demais componentes são autovalores dos geradores k e d , respectivamente. O produto escalar entre tais vetores é definido como

$$m \cdot m' = (\mu\mu', \mu_k\mu'_k, \mu_d\mu'_d) \quad (\text{A.2.28})$$

onde $m = (\mu, \mu_k, \mu_d)$ e $m' = (\mu', \mu'_k, \mu'_d)$. Portanto o produto escalar de duas raízes $a = (\alpha, 0, n)$ e $a' = (\alpha', 0, n')$ será $a \cdot a' = \alpha \cdot \alpha'$. Desta maneira a matriz de Cartan de uma álgebra de Kac-Moody será a matriz $(r+1) \times (r+1)$:

$$K_{ij} = 2 \frac{a_i \cdot a_j}{a_j^2} \quad i, j = 0, \dots, r \quad (\text{A.2.29})$$

e poderá ser formada a partir da matriz de Cartan de \mathcal{G} adicionando-se uma linha 0 e uma coluna 0. Para efeito de cálculo pode-se usar a definição (A.1.8) com $\alpha_0 = -\psi$.

A análise das representações irredutíveis de peso mais alto é então reformulada. De maneira análoga às álgebras de Lie, existe um único estado $|\mu_0\rangle$ tal que:

$$E_n^\alpha |\mu_0\rangle = 0, \quad n > 0 \text{ ou } n = 0 \text{ e } \alpha > 0 \quad (\text{A.2.30})$$

$$H_n^i |\mu_0\rangle = 0, \quad n > 0 \quad (\text{A.2.31})$$

e com relação à subálgebra de Cartan $\hat{H} = (H_0^i, k, d)$ temos:

$$H_0^i |\mu_0\rangle = \lambda_i |\mu_0\rangle, \quad k |\mu_0\rangle = k |\mu_0\rangle, \quad d |\mu_0\rangle = d |\mu_0\rangle \quad (\text{A.2.32})$$

Os pesos fundamentais para $\hat{\mathcal{G}}$, $\hat{\lambda}_i$ com $i = 0, \dots, r$ são definidos como

$$2 \frac{\hat{\lambda}_i \cdot a_j}{\alpha_j^2} = \delta_{ij} \quad i, j = 0, \dots, r \quad (\text{A.2.33})$$

e desta maneira:

$$\hat{\lambda}_i = \left(\lambda_i, \frac{\psi^2}{2} l_i^\psi, 0 \right) \quad (\text{A.2.34})$$

$$\hat{\lambda}_0 = \left(0, \frac{\psi^2}{2} l_0^\psi, 0 \right) \quad (\text{A.2.35})$$

onde $l_0^\psi = 1$ e l_i^ψ são os inteiros que aparecem na expansão:

$$\frac{\psi}{\psi^2} = \sum_{i=1}^r l_i^\psi \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2} \quad (\text{A.2.36})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.B.Zamolodchikov, Nucl.Phys. B241, 333 (1984)
- [2] D.Friedan, Z.Qiu, S.Shenker, Phys.Rev.Lett. 52, 1575, (1984)
- [3] V.I.Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics" (Graduate Texts in Mathematics vol.60) Springer-Verlag (1984)
- [4] A.B.Zamolodchikov, Theor.Math.Phys. (Engl. Transl.) 65 (1986) 1205
- [5] A.B.Zamolodchikov, JETP Lett. 46 (1987), 160; Int.Journ.Mod.Phys. A3 (1988)
- [6] D.Olive, N.Turok, Nucl.Phys. B220 [FS8], (1983) 491
- [7] J.Balog, L.Feher, P.Forgacs, L.O'Raifeartaigh, A.Wipf, Phys. Lett.B 227 (1989) 214; B244 (1990) 435; Ann.Phys. 203 (1990) 76
- [8] H.Aratyn, L.A.Ferreira, J.F.Gomes, A.H.Zimmerman, Phys.Lett. B 254 (1991) 372
- [9] A.Bilal, J.-L.Gervais, Phys.Lett. B 206 (1988) 412
- [10] A.N.Leznov, M.V.Saveliev, Lett.Math.Phys. 3 (1979) 489
- [11] C.P.Constantinidis, L.A.Ferreira, J.F.Gomes, A.H.Zimmerman, Phys.Lett. B 298 (1993) 88
- [12] T.Hollowood, Nucl.Phys. B384 (1992) 523
- [13] "Bäcklund transformations", Lecture notes in Mathematics, Vol. 515, Eds. A. Dold and B. Eckmann, Springer-Verlag (1976); "Solitons" Eds. R.K. Bullough and P.J. Caudrey, Topics in Current Physics, Springer-Verlag (1980)
- [14] H.Aratyn, C.P.Constantinidis, L.A.Ferreira, J.F.Gomes, A.H.Zimmerman, "Hirota's Solitons in the Affine and Conformal Affine Toda Models", IFT-P.052/92, aceito para publicação no Nuclear Physics B.
- [15] N. MacKay and W. A. McGhee, *Affine Toda solitons and automorphisms of Dynkin diagrams*, hep-th/9208057
- [16] D.I. Olive, N. Turok, J.W.R. Underwood, *Solitons and the Energy-Momentum tensor for Affine Toda Theory*, Imperial/TP/91-92/35, SWAT/3
- [17] H.Aratyn, C.P.Constantinidis, L.A.Ferreira, J.F.Gomes, A.H.Zimmerman, Phys.Lett. B 281 (1992) 245
- [18] E.Fermi, J.Pasta, S.Ulam, Los Alamos Report LA-1940 (1955), Collected Papers of E.Fermi, University of Chicago Press 1965, vol.2, 978

- [19] M.Toda, J.Phys.Soc.Japan 22 (1967) 431, Phys.Reports 18 (1975) 1, "Theory of Non-Linear Lattices", Springer Series in Solid State Sciences 20 (1981)
- [20] M.Hénon, Phys Rev. B9 (1974) 1921
- [21] H.Flaschka, Phys Rev. B9 (1974) 1924
- [22] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, Invent. Math. 54, (1979) 261; Theor. Math. Phys. 45, (1980) 843; Phys. Rep. 71 (1981) 313; *ibid.* 94 (1983).
- [23] L.A. Ferreira and D. Olive, Comm. Math. Phys. 99, (1985) 365.
- [24] D.Olive, N.Turok, Nucl.Phys. B257 [FS14], (1985) 277
- [25] O.Babelon, L.Bonora, Phys.Lett. B 244 2 (1990) 220
- [26] H. Gillet comunicação privada
- [27] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, (1985)
- [28] T. J. Rivlin, *The Chebyshev Polynomials*, Wiley, (1974)
- [29] I. Bakas, Phys. Lett. B 228 (1989) 57
- [30] A. Bilal, Phys. Lett. B 227 (1989) 406; I. Bakas, Commun. Math. Phys. 134 (1990) 487; C. Pope, L. Romans and X. Shen, Phys. Lett. B 236 (1990) 173; *ibid* B 245 (1990) 72
- [31] V. Drinfeld, V. Sokolov, J. Sov. Math. 30 (1984) 1975
- [32] L. Feher, L. O'Raiheartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui, A. Wipf, Dublin preprint, DIAS-STP-91-17
- [33] S.Coleman, Phys.Rev. D11 (1975) 2088; S. Mandelstam, Phys.Rev. D11 (1975) 3026
- [34] R. Rajaraman, "Solitons and Instantons", North-Holland, (1982)
- [35] J.E.Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Springer, Heidelberg, 1972.
- [36] P.Goddard, D.Olive, Int.Jour.Mod.Phys. A1 (1986) 303

