



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# Combinações Lineares de Polinômios de Chebyshev e Polinômios Auto-recíprocos

Mijael Hanco Suni

Orientadora: Prof. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Presidente Prudente - SP

Agosto de 2019



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# Combinações Lineares de Polinômios de Chebyshev e Polinômios Auto-recíprocos

Mijael Hanco Suni

Orientadora: Prof. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente - SP

Agosto de 2019

S958c Suni, Mijael Hancco  
Combinções Lineares de Polinômios de Chebyshev e  
Polinômios Auto-recíprocos / Mijael Hancco Suni. --  
Presidente Prudente, 2019  
90 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista  
(Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente  
Prudente  
Orientadora: Vanessa Avansini Botta Pirani

1. Polinômios quase-ortogonais. 2. Zeros. 3. Polinômios  
de Chebyshev. 4. Polinômios auto-recíprocos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da  
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos  
pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

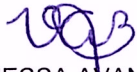
**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Combinações Lineares de Polinômios de Chebyshev e Polinômios Auto-recíprocos

**AUTOR: MIJAEL HANCCO SUNI**

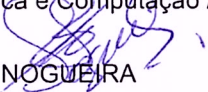
**ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



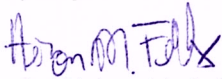
Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. JOSÉ ROBERTO NOGUEIRA

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Prof. Dr. HERON MARTINS FELIX

Departamento de Matemática Aplicada / Universidade Federal do Triângulo Mineiro/ Câmpus de Uberaba

Presidente Prudente, 15 de agosto de 2019

*Ao meus pais, Elizabeth e Adolfo e à minha família, dedico!*

---

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela sua imensa compaixão, dando-me força e saúde para superar todos os obstáculos. Também por me dar a oportunidade de começar de novo todas as manhãs, sem importar a quantidade de erros que cometi.

Aos meus pais Adolfo e Elizabeth por serem os principais promotores dos meus sonhos, graças a eles por confiar e acreditar em mim todos os dias. Aos meus irmãos Sandra, Jhon e Jhonatan que estão sempre lá me apoiando, cuidando de mim quando eu preciso deles.

À Prof. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani pela paciência, dedicação, incentivo e excelente orientação no desenvolvimento deste trabalho.

À minha família por sempre me apoiar em todas as decisões e projetos que tenho, eles são uma parte muito importante da minha vida, especialmente minha tia Dina que é como uma mãe para mim.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da UNESP pelos conhecimentos transmitidos.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação, em especial à Cinthia, pela atenção e apoio oferecido.

A todos os meus colegas da Pós-Graduação que me ajudaram.

Aos professores Patricia e Norbil por me dar apoio em tudo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

*A natureza está escrita em linguagem matemática.*  
**Galileu**

# Resumo

---

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar o comportamento dos zeros de alguns tipos de polinômios auto-recíprocos gerados a partir de polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordens um e dois. Os zeros dos polinômios auto-recíprocos que construímos estão ligados aos zeros de polinômios quase-ortogonais. Os polinômios quase-ortogonais podem ser obtidos a partir de uma sequência de polinômios ortogonais. Neste trabalho, usaremos os polinômios de Chebyshev para obter polinômios quase-ortogonais e usaremos resultados sobre o comportamento de zeros desses polinômios para obter informações sobre o comportamento dos zeros de polinômios auto-recíprocos.

Palavras-Chave: *Polinômios quase-ortogonais, Zeros, Polinômios de Chebyshev, Polinômios auto-recíprocos.*



# Abstract

---

The main objective of this work is to study the behavior of the zeros of some classes of self-reciprocal polynomials related to Chebyshev quasi-orthogonal polynomials of order one and two. The zeros of self-reciprocal polynomials are linked to the zeros of quasi-orthogonal polynomials, which can be obtained from a sequence of orthogonal polynomials. In this work we use the Chebyshev polynomials to obtain classes of quasi-orthogonal polynomials and from results on the behavior of their zeros, we obtain information about the zeros of some classes of self-reciprocal polynomials.

Keywords: *Quasi-orthogonal polynomials, Zeros, Chebyshev polynomials, Self-reciprocal polynomials.*



# Lista de Figuras

---

2.1	Polinômios ortogonais em relação a função peso $w(x) = 1$ no intervalo $(0, 1)$ .	31
2.2	Polinômios de Legendre. . . . .	44
3.1	Polinômios de Chebyshev de primeira espécie. . . . .	55
3.2	Polinômios de Chebyshev de segunda espécie. . . . .	58
3.3	Polinômios de Chebyshev de terceira espécie. . . . .	60
3.4	Polinômios de Chebyshev de quarta espécie. . . . .	61
4.1	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = (3 + \sqrt{3}i)z^5 + (2\sqrt{3} + 2i)z^4 + (\sqrt{3} + i)z^3 + (3\sqrt{3} + 3i)z + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ . . . . .	64
4.2	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = z^7 - 1.5z^6 + 2z^5 - 0.5z^4 + 0.5z^3 - 2z^2 + 1.5z - 1$ . . . . .	64
5.1	Zeros do polinômio $P_T(z) = 4z^6 + 3z^5 + 3z + 4$ . . . . .	77
5.2	Zeros do polinômio $P_T(z) = z^8 + 2z^7 + 2z + 1$ . . . . .	77
5.3	Zeros de $P_U(z) = 2 \sum_{k=0}^6 z^{2k} + \lambda \sum_{k=0}^5 z^{2k+1}$ para diferentes valores de $\lambda \in [-5, 5]$ . . . . .	77
5.4	Zeros do polinômio $P_U(z) = 3z^6 + 2z^5 - 9z^4 + 2z^3 - 9z^2 + 2z + 3$ . . . . .	83
5.5	Zeros de $P_T(z) = z^{12} + \lambda z^{11} - 3z^{10} - 3z^2 + \lambda z + 1$ quando $\lambda$ assume alguns valores em $[-5, 5]$ . . . . .	83



# Lista de Tabelas

---

2.1	Primeiros polinômios de Legendre. . . . .	44
3.1	Polinômios de Chebyshev de terceira espécie. . . . .	59
3.2	Polinômios de Chebyshev de quarta espécie. . . . .	61



# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>11</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2 Polinômios ortogonais</b>	<b>19</b>
2.1 Propriedades gerais . . . . .	20
2.2 Relação de recorrência de três termos . . . . .	24
2.3 Zeros dos polinômios ortogonais . . . . .	29
2.4 Polinômios ortogonais clássicos . . . . .	31
2.4.1 Preliminares . . . . .	32
2.4.2 Polinômios de Jacobi . . . . .	35
2.4.3 Polinômios de Legendre . . . . .	43
2.5 Polinômios quase-ortogonais . . . . .	44
2.6 Aplicações . . . . .	48
2.6.1 Introdução . . . . .	48
2.6.2 Fórmulas de quadratura interpolatórias . . . . .	49
2.6.3 Quadratura gaussiana . . . . .	50
<b>3 Polinômios de Chebyshev</b>	<b>53</b>
3.1 Polinômios de Chebyshev de primeira espécie . . . . .	53
3.2 Polinômios de Chebyshev de segunda espécie . . . . .	56
3.3 Polinômios de Chebyshev de terceira espécie . . . . .	58
3.4 Polinômios de Chebyshev de quarta espécie . . . . .	60
<b>4 Polinômios com zeros simétricos</b>	<b>63</b>
4.1 Polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-invertíveis . . . . .	63
4.2 Relação entre polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-invertíveis	67
<b>5 Alguns tipos de polinômios auto-recíprocos</b>	<b>69</b>
5.1 Introdução . . . . .	69
5.2 Polinômios auto-recíprocos gerados pelos polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem um . . . . .	72
5.3 Polinômios auto-recíprocos gerados pelos polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem dois . . . . .	78

<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>85</b>
	<b>Referências</b>	<b>87</b>

# Introdução

A teoria dos polinômios ortogonais tem se tornando cada vez mais importante nos últimos anos, pois têm muitas aplicações na matemática (análise numérica, equações diferenciais, teoria dos números, combinatória, etc.) e também na física e engenharia (equações de Schrödinger, física quântica, etc.), dentre outras áreas. Para conhecer um pouco mais sobre a origem do estudo dos polinômios ortogonais ver [3, 19].

No caso específico dos zeros de polinômios ortogonais, uma bela aplicação é o fato de seus zeros serem utilizados como os nós das fórmulas de quadratura gaussiana, já que têm a maior precisão possível para aproximar  $\int_a^b f(x) dx$  (uma vez que, com  $n$  pontos, não é possível exceder a precisão de  $2n - 1$ ), isto é, elas se aproximam mais eficientemente à integral de uma função suficientemente suave.

Dentre os polinômios ortogonais clássicos, temos os polinômios de Chebyshev de primeira, segunda, terceira e quarta espécies. Esses polinômios são exaustivamente usados na Análise Numérica, sendo uma ferramenta importante na expansão de funções em séries de polinômios de Chebyshev, por exemplo. Para mais detalhes sobre os polinômios de Chebyshev, as referências [2, 4, 17, 21] são boas fontes.

Os zeros dos polinômios de Chebyshev são todos reais, simples e estão localizados no intervalo  $[-1, 1]$ , que é o intervalo de ortogonalidade dessa classe de polinômios. Outras propriedades e o estudo do comportamento dos zeros podem ser encontrados em [4, 13, 22, 23, 28].

Neste trabalho estudamos em detalhes algumas propriedades e teoremas importantes dos polinômios ortogonais, com ênfase nos polinômios de Chebyshev. Além disso, estudamos algumas propriedades dos polinômios auto-recíprocos ([22, 29]). A teoria estudada servirá de base para analisar o comportamento dos zeros de algumas combinações lineares de polinômios de Chebyshev, para assim finalmente obter informações sobre o comportamento dos zeros de alguns tipos de polinômios auto-recíprocos que são construídos a partir de polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordens um e dois.

No Capítulo 2 estudamos as principais propriedades de uma família de polinômios ortogonais, tais como ortogonalidade, relação de recorrência de três termos e o comportamento de seus zeros. Também estudamos algumas sequências de polinômios ortogonais clássicos, fazendo um estudo detalhado dos polinômios de Jacobi e dos polinômios de Legendre, tais como simetria, relação de recorrência, ortogonalidade etc.. Como uma aplicação dos polinômios ortogonais estudamos as fórmulas de quadratura gaussiana.

No Capítulo 3 estudamos os polinômios de Chebyshev de primeira, segunda, terceira e quarta espécies, tais como ortogonalidade, relação de recorrência de três termos e o comportamento de seus zeros.

No Capítulo 4 estudamos os polinômios com zeros simétricos, que são os polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-inversíveis. Observamos quais são as condições necessárias e suficientes para que um polinômio complexo seja auto-conjugado, auto-recíproco ou auto-inversível e, finalmente, vemos a relação que há entre esses polinômios.

No Capítulo 5 estudamos o comportamento dos zeros de alguns tipos de polinômios auto-recíprocos que podem ser obtidos usando polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordens um e dois.

Atualmente existem muitas bibliografias dedicada ao estudo do tema. Neste trabalho vamos utilizar principalmente as seguintes:

- *Orthogonal Polynomials*, G. Szegő [28], é a primeira monografia dedicada inteiramente a este tópico e que inclui as principais ideias e técnicas matemáticas, estudando em particular os polinômios da classe de Szegő, entre muitos outros.
- *Special Functions and Their Application*, N.N. Lebedev [20], monografia clássica que descreve uma grande parte das funções especiais e polinômios clássicos, como muitas de suas aplicações para problemas de física matemática e engenharia.
- *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, T.S. Chihara [13], ótima revisão do tema usando técnicas funcionais lineares. Altamente recomendado para o "iniciante".
- *Introdução aos Polinômios Ortogonais*, E.X.L. de Andrade, C.F. Bracciali, F.R. Rafaeli [4], excelente livro de referência muito detalhada, sua notação é muito fácil de entender. Altamente recomendado para o "iniciante".
- *Chebyshev Polynomials*, J. C. Mason and D.C. Handscomb [21], um livro perfeito para quem está começando a estudar os polinômios de Chebyshev. É muito didático e tem muitas aplicações dos polinômios de Chebyshev.

## Polinômios ortogonais

Os polinômios ortogonais ocupam um lugar muito importante no desenvolvimento de muitas áreas de matemática pura e aplicada, como na teoria das equações diferenciais, teoria da aproximação, na análise numérica, entre outras. Para mais detalhes sobre a teoria apresentada neste capítulo sugerimos os textos [4, 9, 13, 23, 25, 28].

Uma função real  $\psi$ , definida em  $[a, b]$ , é chamada uma distribuição (ou medida positiva) em  $(a, b)$ , se  $\psi$  é não-decrescente, limitada, com infinitos pontos de aumento e tal que as integrais de Stieltjes

$$\mu_k = \int_a^b x^k w(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

existam. Os valores  $\mu_k$  são chamados momentos da distribuição.

Consideremos, daqui por diante, uma distribuição  $d\psi(x) = w(x)dx$ , onde  $w$  é uma função não negativa, mas não identicamente nula. Neste caso chamaremos  $w$  de função peso.

**Definição 1** *Sejam  $f, g \in C[a, b]$  e seja  $w(x) > 0$  contínua no intervalo  $(a, b)$ . Definimos o produto escalar de  $f$  e  $g$  com a função peso  $w$  da seguinte forma*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x) dx. \quad (2.2)$$

**Definição 2** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de polinômios, onde  $P_n(x)$  é um polinômio de grau  $n$ . Dizemos que  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  é uma seqüência de polinômios ortogonais (SPO) em relação à função peso  $w(x)$  em  $(a, b)$  se*

$$\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{nm}\rho_n,$$

onde  $\delta_{nm}$  denota o delta de Kronecker.

**Definição 3** *Uma seqüência  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  diz-se uma seqüência de polinômios ortonormais (SPO\*), denotada por  $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , se é uma SPO com  $\rho_n = 1$ .*

**Exemplo 1** *Consideremos  $w(x) = 1$  e  $(a, b) = (0, 1)$ . Usando o processo de Gram-Schmidt e o produto interno dado em (2.2), podemos construir uma seqüência de polinômios ortogonais a partir de  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ .*

*Seja  $P_0(x) = 1$ , então*

$$P_1(x) = x - \frac{\langle x, P_0(x) \rangle}{\langle P_0(x), P_0(x) \rangle} P_0(x) = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x - \frac{1}{2},$$

pois  $\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$  e  $\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 dx = 1$ .

Além disso,

$$P_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, P_0(x) \rangle}{\langle P_0(x), P_0(x) \rangle} P_0(x) - \frac{\langle x^2, P_1(x) \rangle}{\langle P_1(x), P_1(x) \rangle} P_1(x),$$

onde

$$\begin{aligned} \langle x^2, 1 \rangle &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \\ \left\langle x^2, x - \frac{1}{2} \right\rangle &= \int_0^1 x^2 \left( x - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{12}, \\ \left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right\rangle &= \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

e assim  $P_2(x)$  será

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} - \left( x - \frac{1}{2} \right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Repetindo o processo, obtemos

$$\begin{aligned} P_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}, & P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + \frac{9}{7}x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{70} \\ P_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{20}{9}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{42}x - \frac{1}{252}, \end{aligned}$$

e assim por diante.

Portanto, obtemos uma sequência  $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots\}$  de polinômios ortogonais.

Ao longo do texto, vamos denotar os polinômios ortogonais de grau  $n$ ,  $P_n(x)$ , por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

## 2.1 Propriedades gerais

Nesta seção apresentamos algumas caracterizações de ortogonalidade para uma SPO dada.

**Teorema 1** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortogonais. Então,  $\{P_j(x)\}_{j=0}^m$  são linearmente independentes.*

**Demonstração.** Sejam  $\alpha_j, j = 0, 1, \dots, m$ , constantes reais tais que

$$\sum_{j=0}^m \alpha_j P_j(x) = 0.$$

Logo, para cada  $P_k(x), 0 \leq k \leq m$ , temos que

$$0 = \langle P_k, 0 \rangle = \left\langle P_k, \sum_{j=0}^m \alpha_j P_j(x) \right\rangle = \sum_{j=0}^m \alpha_j \langle P_k, P_j \rangle = \alpha_k \langle P_k, P_k \rangle,$$

ou seja,

$$\alpha_k \langle P_k, P_k \rangle = 0, \forall k = 0, 1, \dots, m,$$

pois  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de polinômios ortogonais.

Portanto,  $\alpha_k = 0, k = 0, \dots, m$ .

■

Nos próximos resultados vamos apresentar algumas caracterizações para uma SPO dada. As demonstrações são baseadas no fato de que o subconjunto  $\{P_k(x)\}_{k=0}^m$  de uma SPO constitui uma base para o subespaço de polinômios  $\mathbb{P}_m$  de grau menor ou igual a  $m$ , sendo este fato uma consequência imediata do teorema anterior.

**Teorema 2** *Sejam  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de polinômios e  $w(x)$  uma função peso no intervalo  $(a, b)$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a)  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  é uma sequência de polinômios ortogonais relativamente a  $w(x)$ .
- b)  $\langle P_n, \pi \rangle = 0, \quad \forall \pi(x) \in \mathbb{P}_m, n > m$ .
- c)  $\langle x^m, P_n \rangle = d_n \delta_{mn}$ , com  $d_n \neq 0, m = 0, 1, \dots, n$ , sendo  $\delta_{mn}$  o delta de Kronecker.

**Demonstração.** (a)  $\Rightarrow$  (b) Seja  $\pi(x)$  um polinômio de grau menor ou igual a  $m$ . Pelo Teorema 1 temos que  $\{P_k(x)\}_{k=0}^m$  é uma base para  $\mathbb{P}_m$ , pois  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  é uma sequência de polinômios ortogonais.

Logo, como  $\pi(x) \in \mathbb{P}_m$ , temos que existem  $\alpha_k, k = 0, \dots, m$ , tais que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_k P_k(x).$$

Portanto tem-se que

$$\langle \pi, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^m \alpha_k P_k(x), P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^m \alpha_k \langle P_k, P_n \rangle \stackrel{(a)}{=} 0.$$

(b)  $\Rightarrow$  (c) *i*) Suponha que  $m < n$  e definimos  $\pi(x) = x^m$ . Então pelo item b) segue que

$$\langle P_n, x^m \rangle = \langle P_n, \pi \rangle = 0.$$

*ii*) Seja agora  $m = n$ . Assim,  $\pi(x) = x^n \in \mathbb{P}_n$ . Logo, existem  $\alpha_j, j = 0, \dots, n$ , tais que

$$x^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x), \quad \alpha_n \neq 0.$$

Então

$$\langle x^n, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(x), P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle P_k, P_n \rangle \stackrel{(b)}{=} \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0.$$

(c)  $\Rightarrow$  (a) Consideremos  $P_m(x) = \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} x^k$  com  $n \geq m$ . Então

$$\langle P_m, P_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} x^k, P_n \right\rangle = \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle \stackrel{(c)}{=} \delta_{m,n} \alpha_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle = \delta_{m,n} \rho_n.$$

■

**Corolário 1** *Sejam  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  e  $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$  duas sequências de polinômios ortogonais em relação a função peso  $w(x)$  no intervalo  $(a, b)$ . Então existem constantes  $\sigma_n \neq 0, n = 0, 1, \dots$ , tais que*

$$Q_n(x) = \sigma_n P_n(x).$$

**Demonstração.** Como  $\{P_k(x)\}_{k=0}^m$  formam uma base para  $\mathbb{P}_m$  e tomando  $Q_m(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ , temos que existem  $\sigma_k, k = 0, 1, \dots, m$ , tais que

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m \sigma_k P_k(x), \quad \sigma_m \neq 0. \quad (2.3)$$

Por outro lado, pelo item b) do Teorema 2 segue que

$$\langle Q_m, P_0 \rangle = \langle Q_m, P_1 \rangle = \dots = \langle Q_m, P_{m-1} \rangle = 0.$$

Portanto, para  $j = 0, 1, \dots, m-1$ ,

$$0 = \langle Q_m, P_j \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^m \sigma_k P_k(x), P_j \right\rangle = \sum_{k=0}^m \sigma_k \langle P_k, P_j \rangle = \sigma_j \langle P_j, P_j \rangle,$$

e como  $\langle P_j, P_j \rangle > 0$ , temos que  $\sigma_j = 0, j = 0, 1, \dots, m-1$ . Assim, pela equação (2.3) tem-se

$$Q_m(x) = \sigma_m P_m(x).$$

Além disso, usando a equação anterior, podemos obter o valor de  $\sigma_m$  fazendo

$$\langle Q_m, P_m \rangle = \langle \sigma_m P_m, P_m \rangle = \sigma_m \langle P_m, P_m \rangle \Rightarrow \sigma_m = \frac{\langle Q_m, P_m \rangle}{\langle P_m, P_m \rangle}.$$

■

O colorário anterior mostra que, se existe uma SPO em relação a algum produto interno, então essa SPO é única, a menos de uma constante. Agora queremos mostrar que tal SPO sempre existe e para isso precisamos conhecer o conceito de determinante de Hankel.

**Definição 4 (Determinante de Hankel).** Dada uma sequência de momentos  $\mu_n$  como em (2.1), define-se por determinantes de Hankel de ordem  $n+1$ , os determinantes  $\Delta_n$  definidos da forma

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (2.4)$$

**Teorema 3** Seja  $w(x)$  uma função peso, com sequência de momentos  $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ . Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma sequência de polinômios ortogonais em relação a  $w(x)$  é

$$\Delta_n \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Demonstração.** Suponha que existe uma SPO  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  em relação à função peso  $w(x)$ , com sequência de momentos  $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ .

Temos, para  $m \leq n$ , e tomando  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i}x^i$ , que

$$\begin{aligned} \langle x^m, P_n \rangle &= \langle x^m, \sum_{i=0}^n a_{n,i}x^i \rangle = \sum_{i=0}^n a_{n,i} \langle x^m, x^i \rangle \\ &= \sum_{i=0}^n a_{n,i} \int_a^b x^m x^i w(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n a_{n,i} \int_a^b x^{m+i} w(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n a_{n,i} \mu_{m+i}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 2, segue que

$$\sum_{i=0}^n a_{n,i} \mu_{m+i} = \langle x^m, P_n \rangle = d_n \delta_{nm}, \quad d_n \neq 0.$$

Logo, fazendo  $m = 0, 1, \dots, n$ , obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Pelo Corolário 1, cada polinômio de uma SPO é unicamente determinado pelo coeficiente de maior ordem. Então,  $a_{n,n} = \frac{d_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , se, e somente se,  $\Delta_n \neq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$  ■

**Teorema 4** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  uma SPO em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $(a, b)$ . Então, para qualquer polinômio  $\pi(x)$  de grau  $n$ ,*

$$\langle \pi, P_n \rangle = \frac{\alpha_n a_{nn} \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad \Delta_{-1} = 1,$$

onde  $\alpha_n$  denota o coeficiente principal de  $\pi(x)$  e  $a_{nn}$  o coeficiente principal de  $P_n(x)$ .

**Demonstração.** Escrevendo

$$\pi(x) = \alpha_n x^n + \pi_{n-1}(x),$$

onde  $\pi_{n-1}(x)$  é um polinômio de grau menor igual a  $n - 1$ , temos, pelo Teorema 2,

$$\langle \pi, P_n \rangle = \alpha_n \langle x^n, P_n \rangle + \langle \pi_{n-1}, P_{n-1} \rangle = \alpha_n \langle x^n, P_n \rangle = \alpha_n d_n. \quad (2.6)$$

E, pelo teorema anterior,

$$a_{n,n} = \frac{d_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n}, \quad (2.7)$$

onde  $a_{nn}$  é o coeficiente principal de  $P_n$ . Portanto, substituindo (2.7) em (2.6) temos que

$$\langle \pi, P_n \rangle = \frac{\alpha_n a_{nn} \Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \quad \blacksquare$$

## 2.2 Relação de recorrência de três termos

Nesta seção vamos demonstrar que os polinômios ortogonais satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Este fato é uma das principais características desses polinômios, pois facilitam muito sua geração.

**Teorema 5 (Relação de Recorrência de Três Termos)** *Dada uma sequência de polinômios ortogonais  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $(a, b)$ , existem sequências  $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$  e  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números reais, tais que*

$$P_{n+1}(x) = (\eta_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.8)$$

com  $P_0(x) = 1$ ,  $P_{-1}(x) = 0$  e

$$\eta_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \eta_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0. \quad (2.9)$$

**Demonstração.** Seja  $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n,j}x^j \in \{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ .

Como  $xP_n(x) \in \mathbb{P}_{n+1}$  existem  $\gamma_i, i = 0, 1, \dots, n+1$ , tais que

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \gamma_i P_i(x). \quad (2.10)$$

Por outro lado, pelo Teorema 2 para  $j+1 < n$ , temos que

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_j(x)w(x) dx = \int_a^b xP_j(x)P_n(x)w(x) dx = \langle xP_j, P_n \rangle = 0,$$

e assim,

$$0 = \langle xP_n, P_j \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n+1} \gamma_i P_i(x), P_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n+1} \gamma_i \langle P_i, P_j \rangle = \gamma_j \langle P_j, P_j \rangle,$$

para  $j+1 < n$ .

Logo,  $\gamma_j = 0$ , para  $j < n-1$ . Portanto, reescrevendo a equação (2.10) temos

$$xP_n(x) = \gamma_{n+1}P_{n+1}(x) + \gamma_n P_n(x) + \gamma_{n-1}P_{n-1}(x),$$

que pode ser escrito como

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{\gamma_{n+1}}xP_n(x) - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}P_n(x) - \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n+1}}P_{n-1}(x),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(x) = (\eta_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad (2.11)$$

com

$$\eta_{n+1} = \frac{1}{\gamma_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n+1}}.$$

Finalmente calculamos os valores de  $\eta_{n+1}$ ,  $\beta_{n+1}$  e  $\alpha_{n+1}$ . Comparando os coeficientes dos termos de maior grau da igualdade na equação (2.10) tem-se  $a_{n,n} = \gamma_{n+1}a_{n+1,n+1}$ , daí  $\eta_{n+1} = a_{n+1,n+1}/a_{n,n}$ . Da equação (2.11) temos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \eta_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle,$$

ou seja,

$$\beta_{n+1} = \eta_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

De forma análoga,

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \eta_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle,$$

logo,

$$\alpha_{n+1} = \eta_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Da equação (2.11) tem-se  $P_n(x) = (\eta_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x)$ . Reescrevendo,

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\eta_n} P_n(x) + \frac{\beta_n}{\eta_n} P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\eta_n} P_{n-2}(x),$$

e como

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_{n-1}(x)w(x) dx = \int_a^b xP_{n-1}(x)P_n(x)w(x) dx = \langle xP_{n-1}, P_n \rangle,$$

obtemos que

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \langle xP_{n-1}, P_n \rangle = \frac{1}{\eta_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\eta_n} \langle P_{n-1}, P_n \rangle + \frac{\alpha_n}{\eta_n} \langle P_{n-2}, P_n \rangle = \frac{1}{\eta_n} \langle P_n, P_n \rangle.$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

■

Podemos representar de outra maneira a relação de recorrência de três termos, descrita no teorema anterior, usando uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos  $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  em relação a uma função peso  $w(x)$ , que pode ser obtida a partir de uma seqüência de polinômios ortogonais  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  em relação a  $w(x)$ . Para construí-los, basta dividir cada  $P_n(x)$  pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau, ou seja,

$$\hat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_{n,n}}, \quad n \geq 1.$$

Assim, a relação de recorrência de três termos para polinômios ortogonais mônicos é dada por

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - \hat{\beta}_{n+1})\hat{P}_n(x) - \hat{\alpha}_{n+1}\hat{P}_{n-1}(x), \quad (2.12)$$

onde

$$\hat{\beta}_{n+1} = \frac{\langle x\hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle} \quad e \quad \hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle}, \quad (2.13)$$

ou na forma matricial, fazendo  $n = 0, 1, \dots, m-1$ ,

$$x \begin{pmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{pmatrix} = \tilde{J}_m \begin{pmatrix} \hat{P}_0(x) \\ \hat{P}_1(x) \\ \hat{P}_2(x) \\ \vdots \\ \hat{P}_{m-2}(x) \\ \hat{P}_{m-1}(x) \end{pmatrix} + \hat{P}_m(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

onde  $\tilde{J}_m$  é a matriz (tridiagonal) de ordem  $m$

$$\tilde{J}_m = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\beta}_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{\beta}_{m-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{\alpha}_m & \hat{\beta}_m \end{pmatrix}.$$

Assim, em (2.14) podemos ver que os zeros de  $\hat{P}_m(x)$  são os autovalores de  $\tilde{J}_m$ , pois o polinômio  $P_0(x)$  é um polinômio constante diferente do polinômio nulo. Uma das consequências importantes da relação de recorrência de três termos é a seguinte identidade.

**Teorema 6 (Identidade de Christoffel-Darboux)** *Seja  $\{\hat{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos. Então, eles satisfazem a seguinte identidade*

$$\sum_{i=0}^n \frac{\hat{P}_i(x)\hat{P}_i(y)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\cdots\hat{\alpha}_{i+1}} = \frac{1}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\cdots\hat{\alpha}_{n+1}} \frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(y)P_{n+1}^*(x)}{x - y}. \quad (2.15)$$

**Demonstração.** Para facilitar a demonstração, vamos denotar por  $F_n(x, y)$  o lado direito de (2.15), isto é,

$$F_n(x, y) = \frac{1}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\cdots\hat{\alpha}_{n+1}} \frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(y)P_{n+1}^*(x)}{x - y}.$$

Da relação de recorrência de três termos descrita em (2.12) para  $i \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \hat{P}_{i+1}(x)\hat{P}_i(y) &= (x - \hat{\beta}_{i+1})\hat{P}_i(x)\hat{P}_i(y) - \hat{\alpha}_{i+1}\hat{P}_{i-1}(x)\hat{P}_i(y), \\ \hat{P}_{i+1}(y)\hat{P}_i(x) &= (y - \hat{\beta}_{i+1})\hat{P}_i(y)\hat{P}_i(x) - \hat{\alpha}_{i+1}\hat{P}_{i-1}(y)\hat{P}_i(x). \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda da primeira na equação acima, temos

$$\hat{P}_{i+1}(x)\hat{P}_i(y) - \hat{P}_{i+1}(y)\hat{P}_i(x) = (x - y)\hat{P}_i(x)\hat{P}_i(y) + \hat{\alpha}_{i+1} \left[ \hat{P}_{i-1}(y)\hat{P}_i(x) - \hat{P}_{i-1}(x)\hat{P}_i(y) \right],$$

ou, equivalentemente,

$$(x - y)\hat{P}_i(x)\hat{P}_i(y) = \hat{P}_{i+1}(x)\hat{P}_i(y) - \hat{P}_i(x)\hat{P}_{i+1}(y) - \hat{\alpha}_{i+1} \left[ \hat{P}_i(x)\hat{P}_{i-1}(y) - \hat{P}_{i-1}(x)\hat{P}_i(y) \right].$$

Dividindo a última equação por  $(\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\cdots\hat{\alpha}_{i+1})(x - y)$ , obtemos

$$\frac{\hat{P}_i(x)\hat{P}_i(y)}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\cdots\hat{\alpha}_{i+1}} = F_i(x, y) - F_{i-1}(x, y), \quad i \geq 0.$$

Somando sobre  $i$  na última expressão, desde 0 até  $n$ , obtemos o resultado desejado. ■

Além da relação de recorrência de três termos para polinômios ortogonais mônicos, podemos obter a relação de recorrência de três termos para polinômios ortonormais  $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , que serão dados por

$$P_{n+1}^*(x) = (\eta_{n+1}^*x - \beta_{n+1}^*)P_n^*(x) - \alpha_{n+1}^*P_{n-1}^*(x), \quad n \geq 0. \quad (2.16)$$

Vejam a relação que existe entre as sequências  $\{\hat{\alpha}_n\}_{n=0}^{\infty}$  e  $\{\hat{\beta}_n\}_{n=0}^{\infty}$ , que são obtidas da relação de três termos para polinômios ortogonais mônicos, e as sequências  $\{\alpha_n^*\}_{n=0}^{\infty}$  e  $\{\beta_n^*\}_{n=0}^{\infty}$  que são definidas em (2.16).

Da relação de recorrência (2.16), temos

$$P_{n+1}^*(x) = (\eta_{n+1}^*x - \eta_{n+1}^*\langle xP_n^*, P_n^* \rangle)P_n^*(x) - \frac{\eta_{n+1}^*}{\eta_n^*}P_{n-1}^*(x),$$

ou, equivalentemente,

$$xP_n^*(x) = \frac{1}{\eta_{n+1}^*}P_{n+1}^*(x) + \langle xP_n^*, P_n^* \rangle P_n^*(x) + \frac{1}{\eta_n^*}P_{n-1}^*(x).$$

Assim,

$$xP_n^*(x) = \lambda_n^*P_{n-1}^*(x) + \tau_{n+1}^*P_n^*(x) + \lambda_{n+1}^*P_{n+1}^*(x), \quad (2.17)$$

onde  $\lambda_{n+1}^* = \frac{1}{\eta_{n+1}^*}$  e  $\tau_{n+1}^* = \langle xP_n^*, P_n^* \rangle$ .

Observe que  $\hat{P}_n(x) = P_n^*(x)/a_{n,n}^*$ , e da equação (2.13) temos

$$\hat{\alpha}_{n+1} = \frac{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}, \hat{P}_{n-1} \rangle} = \frac{(a_{n-1,n-1}^*)^2}{(a_{n,n}^*)^2} = (\lambda_n^*)^2$$

e

$$\hat{\beta}_{n+1} = \frac{\langle x\hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle}{\langle \hat{P}_n, \hat{P}_n \rangle} = \langle xP_n^*, P_n^* \rangle = \tau_{n+1}^*.$$

Fazendo  $n = 1, 2, \dots, m-1$ , em (2.17) e expressando na forma matricial temos

$$x \begin{pmatrix} P_0^*(x) \\ P_1^*(x) \\ P_2^*(x) \\ \vdots \\ P_{m-2}^*(x) \\ P_{m-1}^*(x) \end{pmatrix} = \mathbf{J}_m \begin{pmatrix} P_0^*(x) \\ P_1^*(x) \\ P_2^*(x) \\ \vdots \\ P_{m-2}^*(x) \\ P_{m-1}^*(x) \end{pmatrix} + P_m^*(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_m^* \end{pmatrix},$$

onde  $\mathbf{J}_m$  é a matriz (tridiagonal) de ordem  $m$

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 & \sqrt{\hat{\alpha}_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\hat{\alpha}_2} & \hat{\beta}_2 & \sqrt{\hat{\alpha}_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{\alpha}_3} & \hat{\beta}_3 & \sqrt{\hat{\alpha}_4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{\beta}_{m-1} & \sqrt{\hat{\alpha}_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\hat{\alpha}_m} & \hat{\beta}_m \end{pmatrix}.$$

Assim, todas as raízes do polinômio  $P_m^*(x)$  será um autovalor da matriz  $\mathbf{J}_m$ , conhecida como a matriz de Jacobi de ordem  $m$ .

O seguinte teorema refere-se à Identidade de Christoffel-Darboux para os polinômios ortonormais.

**Corolário 2 (Identidade de Christoffel-Darboux)** *Seja  $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem a seguinte identidade*

$$\sum_{i=0}^n P_i^*(x)P_i^*(y) = \frac{1}{\eta_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y)}{x-y}. \quad (2.18)$$

**Demonstração.** Da relação de recorrência dada em (2.16) temos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) &= (\eta_{n+1}^*x - \beta_{n+1}^*)P_n^*(x)P_n^*(y) - \alpha_{n+1}^*P_{n-1}^*(x)P_n^*(y) \\ P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) &= (\eta_{n+1}^*y - \beta_{n+1}^*)P_n^*(y)P_n^*(x) - \alpha_{n+1}^*P_{n-1}^*(y)P_n^*(x). \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações acima, segue que

$$P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) = \eta_{n+1}^*(x-y)P_n^*(x)P_n^*(y) + \alpha_{n+1}^* [P_{n-1}^*(y)P_n^*(x) - P_{n-1}^*(x)P_n^*(y)],$$

e como  $\alpha_{n+1} = \eta_{n+1}^*/\eta_n^*$ ,

$$P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) = \frac{\eta_{n+1}^*}{\eta_n^*} [P_{n-1}^*(y)P_n^*(x) - P_{n-1}^*(x)P_n^*(y)] + \eta_{n+1}^*(x-y)P_n^*(x)P_n^*(y). \quad (2.19)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} P_n^*(x)P_{n-1}^*(y) - P_n^*(y)P_{n-1}^*(x) &= \frac{\eta_n^*}{\eta_{n-1}^*} [P_{n-2}^*(y)P_{n-1}^*(x) - P_{n-2}^*(x)P_{n-1}^*(y)] \\ &\quad + \eta_n^*(x-y)P_{n-1}^*(x)P_{n-1}^*(y). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) &= \frac{\eta_{n+1}^*}{\eta_{n-1}^*} [P_{n-2}^*(y)P_{n-1}^*(x) - P_{n-2}^*(x)P_{n-1}^*(y)] \\ &\quad + \eta_{n+1}^*(x-y)P_{n-1}^*(x)P_{n-1}^*(y) + \eta_{n+1}^*(x-y)P_n^*(x)P_n^*(y) \\ &= \frac{\eta_{n+1}^*}{\eta_{n-1}^*} [P_{n-2}^*(y)P_{n-1}^*(x) - P_{n-2}^*(x)P_{n-1}^*(y)] \\ &\quad + \eta_{n+1}^*(x-y) [P_{n-1}^*(x)P_{n-1}^*(y) + P_n^*(x)P_n^*(y)]. \end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio  $n$  vezes, temos

$$P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) = \frac{\eta_{n+1}^*}{\eta_1^*} [P_0^*(y)P_1^*(x) - P_0^*(x)P_1^*(y)] + \eta_{n+1}^*(x-y) \sum_{k=1}^n P_k^*(x)P_k^*(y). \quad (2.21)$$

Por outro lado temos que  $P_1^*(x) = a_{1,1}^*x + a_{1,0}^*$  e  $P_0^* = a_{0,0}^*$ . Então

$$\begin{aligned} P_0^*(y)P_1^*(x) - P_0^*(x)P_1^*(y) &= a_{0,0}^*(a_{1,1}^*x + a_{1,0}^*) - a_{0,0}^*(a_{1,1}^*y + a_{1,0}^*) \\ &= a_{0,0}^*a_{1,1}^*(x-y). \end{aligned}$$

Substituindo em (2.21), obtemos

$$P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) = \frac{\eta_{n+1}^*}{\eta_1^*} [a_{0,0}^*a_{1,1}^*(x-y)] + \eta_{n+1}^*(x-y) \sum_{k=1}^n P_k^*(x)P_k^*(y).$$

Como  $\eta_1^* = a_{1,1}^*/a_{0,0}^*$  e  $P_0^*(x) = P_0^*(y) = a_{0,0}^*$ , temos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_{n+1}^*(y)P_n^*(x) &= \eta_{n+1}^*(x-y)(a_{0,0}^*)^2 + \eta_{n+1}^*(x-y) \sum_{k=1}^n P_k^*(x)P_k^*(y) \\ &= \eta_{n+1}^*(x-y) \left[ P_0^*(x)P_0^*(y) + \sum_{k=1}^n P_k^*(x)P_k^*(y) \right] \\ &= \eta_{n+1}^*(x-y) \sum_{k=0}^n P_k^*(x)P_k^*(y). \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{i=0}^n P_i^*(x)P_i^*(y) = \frac{1}{\eta_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(y)P_{n+1}^*(x)}{x-y}.$$

■

Na Identidade de Cristoffel-Darboux (2.18), se somarmos e subtraímos  $P_{n+1}^*(x)P_n^*(x)$ , obtemos

$$\sum_{i=0}^n P_i^*(x)P_i^*(y) = \frac{1}{\eta_{n+1}^*} \left\{ \frac{P_n^*(x)(P_{n+1}^*(x) - P_{n+1}^*(y))}{x-y} - \frac{P_{n+1}^*(x)(P_n^*(x) - P_n^*(y))}{x-y} \right\}.$$

Fazendo  $y \rightarrow x$  em ambos membros da igualdade acima, obtemos a seguinte identidade, conhecida como Fórmula Confluente,

$$\sum_{i=0}^n (P_i^*(x))^2 = \frac{1}{\eta_{n+1}^*} \left\{ P_n^*(x)(P_{n+1}^*(x))' - P_{n+1}^*(x)(P_n^*(x))' \right\} > 0, \quad (2.22)$$

que é válida para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2.3 Zeros dos polinômios ortogonais

Nesta seção apresentamos os zeros dos polinômios ortogonais, que possuem diversas propriedades interessantes, as quais descreveremos a seguir.

**Teorema 7** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  uma SPO em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $(a, b)$ . Então  $P_n(x)$  tem exatamente  $n$  zeros reais, distintos e pertencem ao intervalo  $(a, b)$ .*

**Demonstração.** Vamos supor que  $P_n(x)$  tem só  $k < n$  zeros reais distintos no intervalo  $(a, b)$ . Sejam então  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$  tais zeros. Assim, temos

$$P_n(x) = (x - x_{1,n})^{n_1} (x - x_{2,n})^{n_2} \cdots (x - x_{k,n})^{n_k} Q(x),$$

onde  $Q(x)$  é um polinômio de grau  $(n - k)$  que tem zeros complexos ou zeros de multiplicidade par em  $(a, b)$  ou zeros fora de  $(a, b)$  e  $n_1, n_2, \dots, n_k$  são números inteiros ímpares. Desta forma,  $Q(x)$  não muda de sinal em  $(a, b)$ . Denotemos também

$$R(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_{i,n}) \quad \forall x \in (a, b). \quad (2.23)$$

Logo, multiplicando (2.23) por  $P_n(x)$ , obtemos

$$P_n(x)R(x) = (x - x_{1,n})^{n_1+1} (x - x_{2,n})^{n_2+1} \cdots (x - x_{k,n})^{n_k+1} Q(x),$$

e assim

$$\int_a^b P_n(x)R(x)w(x) dx = \int_a^b (x - x_{1,n})^{n_1+1} (x - x_{2,n})^{n_2+1} \cdots (x - x_{k,n})^{n_k+1} Q(x)w(x) dx \neq 0, \quad (2.24)$$

pois os números  $n_1 + 1, n_2 + 1, \dots, n_k + 1$  são números pares.

Por outro lado, como o polinômio  $R(x)$  tem grau  $k < n$ , pelo Teorema 2 temos que

$$\int_a^b P_n(x)R(x)w(x) dx = 0,$$

o qual gera um absurdo com (2.24). Portanto  $P_n(x)$  tem exatamente  $n$  zeros de multiplicidade ímpar em  $(a, b)$ .

Vejam agora que os zeros de  $P_n(x)$  são simples, ou seja,  $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 1$ . Suponhamos que  $P_n(x)$  tem zeros não simples, ou seja, existe  $\alpha$  zero não simples de  $P_n(x)$ .

Sendo  $\alpha$  um zero não simples de  $P_n(x)$ , podemos fatorar  $P_n(x)$  da seguinte forma

$$P_n(x) = (x - \alpha)^m S_{n-m}(x), \quad m \geq 2,$$

onde  $m$  é um número ímpar.

Denotemos também

$$T(x) = (x - \alpha)S_{n-m}(x), \quad m \geq 2.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \langle P_n(x), T(x) \rangle &= \int_a^b P_n(x)T(x)w(x) dx \\ &= \int_a^b (x - \alpha)^m S_{n-m}(x)(x - \alpha)S_{n-m}(x)w(x) dx \\ &= \int_a^b (x - \alpha)^{m+1} (S_{n-m}(x))^2 w(x) dx \neq 0, \end{aligned}$$

pois  $m$  é um número ímpar e  $w(x)$  é positivo por definição.

Por outro lado, como  $\text{grau}(T(x)) = n - m + 1 < n$ , pelo Teorema 2 temos que  $\langle P_n(x), T(x) \rangle = 0$ , o qual é um absurdo. Portanto, todos os zeros de  $P_n(x)$  são simples. Logo,  $P_n(x)$  tem  $n$  zeros reais e distintos em  $(a, b)$ .

■

**Teorema 8 (Propriedade de entrelaçamento)** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma SPO em relação à função peso  $w(x)$ . Então, entre dois zeros consecutivos de  $P_n(x)$ , existe somente um zero de  $P_{n+1}(x)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois zeros consecutivos de  $P_n(x)$  no intervalo  $(a, b)$ , ou seja,  $a < \alpha < \beta < b$ . Mostremos que existe um zero de  $P_{n+1}(x)$  no intervalo  $(\alpha, \beta)$ .

Como  $\alpha$  e  $\beta$  são zeros consecutivos de  $P_n(x)$  pelo teorema anterior temos que  $P'_n(\alpha)$  e  $P'_n(\beta)$  têm sinais diferentes. Logo, substituindo esses zeros em (2.22), obtemos

$$-P'_n(\alpha)P_{n+1}(\alpha) > 0 \quad e \quad -P'_n(\beta)P_{n+1}(\beta) > 0.$$

Assim, como  $P'_n(\alpha)$  e  $P'_n(\beta)$  têm sinais diferentes, segue que  $P_{n+1}(\alpha)$  e  $P_{n+1}(\beta)$  também têm sinais diferentes.

Sendo  $P_{n+1}(x)$  uma função contínua e desde que  $P_{n+1}(\alpha)$  e  $P_{n+1}(\beta)$  têm sinais diferentes com  $\alpha < \beta$ , então, pelo Teorema Bolzano-Weierstrass,  $P_{n+1}(x)$  tem um zero em  $(\alpha, \beta)$ .

■

**Exemplo 2** Usando os polinômios  $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)\}$  do Exemplo 1, podemos ver na Figura 2.1 que os zeros desses polinômios são reais, distintos e localizam-se no intervalo de ortogonalidade, que neste caso é  $(0, 1)$ . Além disso, possuem a propriedade de entrelaçamento, vista no teorema anterior.

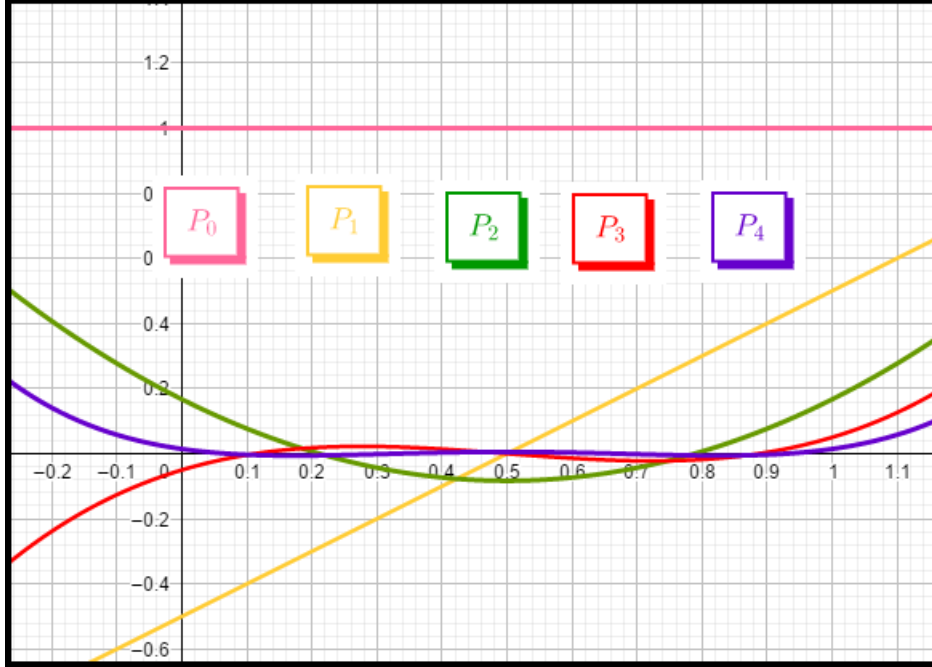


Figura 2.1: Polinômios ortogonais em relação a função peso  $w(x) = 1$  no intervalo  $(0, 1)$ .

## 2.4 Polinômios ortogonais clássicos

Segundo Chihara [13], os polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, de Gegenbauer, de Chebyshev de primeira, segunda, terceira e quarta espécies), de Laguerre e Hermite são chamados de polinômios ortogonais clássicos. A definição a seguir está no trabalho de Agarwal e Milovanović [1].

**Definição 5** Polinômios ortogonais em relação ao produto interno (2.2) no intervalo  $(a, b)$  são chamados de polinômios ortogonais clássicos se a função peso  $w(x)$  satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{d}{dx}(M(x)w(x)) = N(x)w(x),$$

onde

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } (a, b) = (-1, 1) \\ x, & \text{se } (a, b) = (0, \infty) \\ 1, & \text{se } (a, b) = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

e  $N(x)$  é um polinômio de grau 1.

**Exemplo 3** Mais adiante veremos que os polinômios Jacobi são ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$ , em relação à função peso  $w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ ,  $\alpha, \beta > -1$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Vamos ver que essa função peso satisfaz a equação diferencial da definição acima.

Como  $x \in [-1, 1]$ , então

$$M(x)w(x) = (1 - x^2)(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta = (1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1},$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(M(x)w(x)) &= -(\alpha + 1)(1 - x)^\alpha(1 + x)^{\beta+1} + (\beta + 1)(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^\beta \\ &= [-(\alpha + 1)(1 + x) + (\beta + 1)(1 - x)](1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta \\ &= [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x](1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta = N(x)w(x), \end{aligned}$$

onde  $N(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$  é um polinômio de grau 1. Portanto a função peso  $w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$  satisfaz a equação diferencial.

### 2.4.1 Preliminares

Nesta subseção, fornecemos uma breve introdução e apresentamos algumas propriedades importantes das funções gama e beta, que servirão para mostrar em detalhes propriedades específicas dos polinômios ortogonais clássicos. Para mais detalhes sobre essas e outras funções especiais veja [5, 20, 24].

Uma das primeiras funções especiais que veremos é a função gama, que foi descoberta por Euler no final da década de 1720 (veja [5]), na tentativa de encontrar uma continuação analítica da função fatorial.

Sejam  $x$  e  $n$  dois números inteiros não negativos. Para qualquer  $a \in \mathbb{C}$ , definimos o fatorial deslocado ou o símbolo Pochhammer  $(a)_n$  por

$$(a)_n = a(a + 1) \cdots (a + n - 1), \quad n > 0, \quad (a)_0 = 1. \quad (2.25)$$

Podemos então escrever

$$x! = \frac{(x + n)!}{(x + 1)_n}.$$

Mas

$$(x + n)! = (x + n)(x + n - 1) \cdots (n + 1)n(n - 1) \cdots (2)(1) = (n + 1)_x n!,$$

logo,

$$x! = \frac{(x + n)!}{(x + 1)_n} = \frac{(n + 1)_x n!}{(x + 1)_n} = \frac{n! n^x}{(x + 1)_n} \frac{(n + 1)_x}{n^x},$$

e como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)_x}{n^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)(n + 2) \cdots (n + x)}{n^x} = 1,$$

concluimos que

$$x! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x + 1)_n}. \quad (2.26)$$

Podemos ver que para  $x \in \mathbb{C}$  e  $x \neq -1, -2, -3, \dots$ , o limite em (2.26) existe e será chamado

$$\Gamma(x + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x + 1)_n}.$$

Note que se  $x = n$ , então  $\Gamma(x + 1) = x!$  e  $\Gamma(1) = 1$ .

**Definição 6** Para todo  $x \in \mathbb{C}$ ,  $x \neq -1, -2, -3, \dots$ , a função gama  $\Gamma(x)$  é definida por

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n}.$$

Uma consequência imediata da definição acima é a seguinte propriedade

**Propriedade 1**  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ .

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}\Gamma(x + 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x + 1)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x + 1)_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n!)n^{x-1}(x + n)}{x(x + 1)(x + 2) \cdots (x + n - 1)(x + n)} \\ &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x + 1)(x + 2) \cdots (x + n - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{(x)_n} \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

■

Vamos ver outra maneira de definir a função gama.

**Definição 7** Para  $x \in \mathbb{C}$  e  $\operatorname{Re}(x) > 0$ , a função gama  $\Gamma(x)$  pode ser escrita como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Vamos enunciar algumas propriedades da função gama e as demonstrações podem ser vistas nas referências citadas no início da subseção.

**Propriedade 2**  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

**Propriedade 3**  $\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$ ,  $0 < \operatorname{Re}(x) < 1$ .

**Propriedade 4**  $\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}^+$ .

Outra função especial que usaremos é a função beta, que é denotada por  $B(x, y)$  e pode ser definida da seguinte forma.

**Definição 8** A função beta  $B(x, y)$  é definida para  $x, y \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(x) > 0$  e  $\operatorname{Re}(y) > 0$  por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} dt, \quad (2.27)$$

conhecida como a integral de Euler de primeira espécie.

A função beta pode ser expressa em termos da função gama, como podemos ver no resultado abaixo:

**Teorema 9**

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}. \quad (2.28)$$

**Demonstração.** Da equação (2.27) temos

$$\begin{aligned}
B(x, y + 1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \left( \frac{1-t}{1-t} \right) dt \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \left( \frac{1}{1-t} - \frac{t}{1-t} \right) dt \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \left( (1-t)^{-1} - t(1-t)^{-1} \right) dt \\
&= \int_0^1 [t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t(1-t)^{y-1}] dt \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} dt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$B(x, y + 1) = B(x, y) - B(x + 1, y). \quad (2.29)$$

Por outro lado, integrando por partes  $B(x, y + 1)$  temos

$$B(x, y + 1) = \frac{y}{x} B(x + 1, y). \quad (2.30)$$

Assim, combinando (2.29) e (2.30), obtemos

$$B(x, y) = \frac{x+y}{y} B(x, y + 1).$$

Iterando a equação acima, temos

$$B(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{y(y+1)} B(x, y + 2) = \dots = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y + n).$$

Reescrevendo a equação acima, temos

$$\begin{aligned}
B(x, y) &= \frac{(x+y)_n n!}{n! (y)_n} \int_0^n \left( \frac{t}{n} \right)^{x-1} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^{y+n-1} \frac{dt}{n} \\
&= \frac{(x+y)_n n! n^{y-1}}{n! n^{y-1} (y)_n} \int_0^n \frac{t^{x-1}}{n^x} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^{y+n-1} dt \\
&= \frac{(x+y)_n n! n^{y-1}}{n! n^{x+y-1} (y)_n} \int_0^n t^{x-1} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^{y+n-1} dt.
\end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

assim usando a Definição 7 temos que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}.$$

■

Para  $x > 0$  e  $y > 0$ , vamos utilizar muitas vezes a notação

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}, \quad (2.31)$$

e para  $n$  inteiro e  $x > 0$  também usar a notação

$$\binom{x}{n} = \frac{\Gamma(x+1)}{n!\Gamma(x-n+1)}.$$

Finalmente temos a relação entre a função gama e o símbolo de Pochhammer, dada por:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \quad (2.32)$$

### 2.4.2 Polinômios de Jacobi

Nesta seção veremos que os polinômios de Jacobi são polinômios ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  em relação à função peso  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ,  $\alpha, \beta > -1$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Definição 9** *Os polinômios de Jacobi, denotados por  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-2)^{-n} (n!)^{-1} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \quad (2.33)$$

onde  $\alpha, \beta > -1$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Dependendo dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , existem diferentes tipos de polinômios de Jacobi, que são:

- Quando  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  (Polinômios de Chebyshev de primeira espécie).
- Quando  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  (Polinômios de Chebyshev de segunda espécie).
- Quando  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\beta = -\frac{1}{2}$  (Polinômios de Chebyshev de terceira espécie).
- Quando  $\alpha = -\frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{2}$  (Polinômios de Chebyshev de quarta espécie).
- Quando  $\alpha = \beta = 0$  (Polinômios de Legendre).
- Quando  $\alpha = \beta$  (Polinômios ultra-esféricos ou polinômios de Gegenbauer).

Em seguida, mostraremos algumas propriedades importantes dos polinômios de Jacobi.

**Teorema 10** *A a sequência de polinômios ortogonais de Jacobi  $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=1}^\infty$  satisfaz*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x). \quad (2.34)$$

**Demonstração.** Vamos mostrar por indução sobre  $n$ . Da fórmula de Rodrigues temos

$$\begin{aligned}
P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(1-x)^{\alpha+n+1} (1+x)^{\beta+n+1}] \\
&= \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(-1)(\alpha+n+1)(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n+1} \\
&\quad + (\beta+n+1)(1+x)^{\beta+n} (1-x)^{\alpha+n+1}] \\
&= \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(-1)(\alpha+n+1)(1+x)(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \\
&\quad + (\beta+n+1)(1-x)(1+x)^{\beta+n} (1-x)^{\alpha+n}] \\
&= \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \left\{ (-1)(\alpha+n+1) \left[ \left[ \frac{d^n}{dx^n} (1+x) \right] (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1+x) \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}) \right] + (\beta+n+1) \left[ \left[ \frac{d^n}{dx^n} (1-x) \right] (1+x)^{\beta+n} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1-x)^{\alpha+n} + (1-x) \frac{d^n}{dx^n} ((1+x)^{\beta+n} (1-x)^{\alpha+n}) \right] \right\} \\
&= \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \left\{ (-1)(\alpha+n+1)(1+x) \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] \right. \\
&\quad \left. + (\beta+n+1)(1-x) \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] \right\} \\
&= \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} [(-1)(\alpha+n+1)(1+x) + (\beta+n+1)(1-x)] \\
&\quad \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] \\
&= \frac{(-2)^{-1}}{n+1} [(-1)(\alpha+n+1)(1+x) + (\beta+n+1)(1-x)] \frac{(-2)^{-n}}{n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \\
&\quad \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] \\
&= \frac{(-2)^{-1}}{n+1} [(-1)(\alpha+n+1)(1+x) + (\beta+n+1)(1-x)] P_n^{(\alpha,\beta)}(x).
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução e organizando os termos anteriores temos,

$$\begin{aligned}
P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-2)^{-1}}{n+1} [(-1)(\alpha+n+1)(1+x) + (\beta+n+1)(1-x)] (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x) \\
&= \frac{(-2)^{-1}}{n+1} [(-1)(\alpha+n+1)(1+x) + (\beta+n+1)(1-x)] (-1)^n \frac{(-2)^{-n}}{n!} (1+x)^{-\beta} (1-x)^{-\alpha} \\
&\quad \frac{d^n}{dx^n} [(1+x)^{\beta+n} (1-x)^{\alpha+n}] \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1+x)^{-\beta} (1-x)^{-\alpha} [(\alpha+n+1)(1+x) + (-1)(\beta+n+1)(1-x)] \\
&\quad \frac{d^n}{dx^n} [(1+x)^{\beta+n} (1-x)^{\alpha+n}] \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1+x)^{-\beta} (1-x)^{-\alpha} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(1+x)^{\beta+n+1} (1-x)^{\alpha+n+1}] \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} (1-(-x))^{-\beta} (1+(-x))^{-\alpha} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(1-(-x))^{\beta+n+1} (1+(-x))^{\alpha+n+1}]. \\
&= (-1)^{n+1} P_{n+1}^{(\beta,\alpha)}(-x).
\end{aligned}$$

Então,

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^{n+1} P_{n+1}^{(\beta,\alpha)}(-x).$$

■

O seguinte teorema mostra outra maneira de representar os polinômios de Jacobi.

**Teorema 11** *A a sequência de polinômios ortogonais de Jacobi  $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  satisfaz*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (1-x)^k (1+x)^{n-k}. \quad (2.35)$$

**Demonstração.** Lembrando a fórmula de Leibniz para a enésima derivada de um produto:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n-k} \cdot g^k.$$

Da definição de Rodrigues para o polinômio de Jacobi, temos

$$M = (-2)^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

Aplicando a fórmula de Leibniz, segue que

$$M = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(1-x)^{\alpha+n}]^{(n-k)} [(1+x)^{\beta+n}]^{(k)}. \quad (2.36)$$

Derivando  $(1-x)^{\alpha+n}$   $n-k$  vezes obtemos

$$[(1-x)^{\alpha+n}]^{(n-k)} = (\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2) \cdots (\alpha+n-(n-k-1))(1-x)^{\alpha+k},$$

e usando a equação (2.25) temos

$$\begin{aligned} [(1-x)^{\alpha+n}]^{(n-k)} &= (-1)^{n-k} (\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2) \cdots (\alpha+k+1)(1-x)^{\alpha+k} \\ &= \frac{(-1)^{n-k} (\alpha+n) \cdots (\alpha+k+1)(\alpha+k) \cdots (\alpha+1)\alpha}{(\alpha+k) \cdots (\alpha+1)\alpha} (1-x)^{\alpha+k} \\ &= (-1)^{n-k} \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha)_{k+1}} (1-x)^{\alpha+k}. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$[(1+x)^{\beta+n}]^{(k)} = \frac{(\beta)_{n+1}}{(\beta)_{n-k+1}} (1+x)^{\beta+n-k}.$$

Então, substituindo essas duas últimas equações na equação (2.36) temos

$$M = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha)_{k+1}} (1-x)^{\alpha+k} \frac{(\beta)_{n+1}}{(\beta)_{n-k+1}} (1+x)^{\beta+n-k}.$$

Usando propriedades da função gama dada na equação (2.32), temos

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)} (1-x)^{\alpha+k} \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\beta + n - k + 1)} (1+x)^{\beta+n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n-k+1)} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)} (1-x)^{\alpha+k} \frac{\Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\beta + n - k + 1)} (1+x)^{\beta+n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} n! \binom{\alpha + n}{n-k} \binom{\beta + n}{k} (1-x)^{\alpha+k} (1+x)^{\beta+n-k} \\
&= n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{\alpha + n}{n-k} \binom{\beta + n}{k} (-1)^k (x-1)^k (x+1)^{n-k} \\
&= n! (-1)^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{k=0}^n \binom{\alpha + n}{n-k} \binom{\beta + n}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Empregando operações elementares e eliminando termos comuns, temos

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n-k} \binom{n + \beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

■

O seguinte corolário é uma consequência do teorema anterior, que mostra a representação do coeficiente principal do polinômio de Jacobi.

**Corolário 3** *O coeficiente principal do polinômio de Jacobi de grau  $n$   $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  é*

$$a_{n,n} = 2^{-n} \binom{2n + \alpha + \beta}{n} = \frac{2^{-n} \Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}. \quad (2.37)$$

**Demonstração.** Do Teorema 11, temos

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n-k} \binom{n + \beta}{k} (x-1)^k (1+x)^{n-k}.$$

Como  $(x-1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^{k-j} (-1)^j$  e  $(1+x)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} x^i$ , fazendo o produto de Cauchy em  $(x-1)^k (1+x)^{n-k}$ , temos

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n-k} \binom{n + \beta}{k} \left\{ x^n + \left[ \binom{n-k}{n-k-1} - \binom{k}{1} \right] x^{n-1} + \dots \right\}.$$

Assim, sendo  $a_{n,n}$  o coeficiente principal do polinômio  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , tem-se

$$a_{n,n} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n-k} \binom{n + \beta}{k}.$$

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são números inteiros e usando as propriedades da função gama segue que

$$a_{n,n} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n-k} \binom{n + \beta}{k} = 2^{-n} \binom{2n + \alpha + \beta}{n} = \frac{2^{-n} \Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}.$$

Agora, seja

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1+x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1+x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]. \quad (2.38)$$

Vamos encontrar o coeficiente principal do polinômio  $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ . Da fórmula de Leibniz temos

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} [(1+x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(1+x)^{\alpha+n}]^{(n-k)} [(1+x)^{\beta+n}]^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha+n) \cdots (\alpha+n-(n-k-1)) (1+x)^{\alpha+k} \\ &\quad (\beta+n)(\beta+n-1) \cdots (\beta+n-(k-1)) (1+x)^{\beta+n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha)_{k+1}} (1+x)^{\alpha+k} \frac{(\beta)_{n+1}}{(\beta)_{n-k+1}} (1+x)^{\beta+n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)} \\ &\quad (1+x)^{\alpha+\beta+n} \\ &= \sum_{k=0}^n n! \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} (1+x)^{\alpha+\beta+n}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d^n}{dx^n} [(1+x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] = \sum_{k=0}^n n! \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} (1+x)^{\alpha+\beta+n}.$$

Logo, substituindo a última igualdade na equação (2.38), temos

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1+x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \sum_{k=0}^n n! \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} (1+x)^{\alpha+\beta+n} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} (1+x)^n \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} \left[ x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Sendo  $b_{n,n}$  o coeficiente principal do polinômio  $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  tem-se

$$b_{n,n} = \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k},$$

e podemos observar que  $b_{n,n} = (-1)^n a_{n,n}$ .

Por outro lado podemos escrever  $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1+x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1+x)^{\alpha+\beta+2n}] \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n! (1+x)^{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\cdots(\alpha+\beta+n+1)(1+x)^{\alpha+\beta+n} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(\alpha+\beta)_{2n+1}}{(\alpha+\beta)_{n+1}} (1+x)^n \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \left[ x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \dots \right], \end{aligned}$$

daí segue que  $b_{n,n} = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$ . Mais como  $b_{n,n} = (-1)^n a_{n,n}$ , então

$$a_{n,n} = \frac{2^{-n} \Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

■

O seguinte resultado mostra a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi no intervalo  $[-1, 1]$  em relação à função peso  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , usando o produto interno dado na Definição 1.

**Corolário 4** *Os polinômios de Jacobi satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:*

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0. \quad (2.39)$$

**Demonstração.** Consideremos, sem perda de generalidade,  $n \geq m$ . Usando o Corolário 3 e o Teorema 2, temos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = \int_{-1}^1 a_{m,m} x^m P_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx,$$

pois  $P_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} x^k$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle &= a_{m,m} \int_{-1}^1 x^m P_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \int_{-1}^1 P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{(-2)^{-n}}{n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \frac{(-2)^{-n}}{n!} \int_{-1}^1 P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $\Phi_n(x) = (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}$  e integrando por partes, obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = \frac{(-2)^{-n}}{n!} (-1) \int_{-1}^1 (P_m^{(\alpha,\beta)}(x))^{(1)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\Phi_n(x)] dx.$$

Assim, integrando  $n$  vezes por partes temos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = \frac{(-2)^{-n}}{n!} (-1)^n \int_{-1}^1 (P_m^{(\alpha,\beta)}(x))^{(n)} \Phi_n(x) dx. \quad (2.40)$$

Considere os seguintes casos:

i) Se  $n > m$ , segue então que  $(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^{(n)} = 0$ . Logo, por (2.40),

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = 0.$$

ii) Se  $n = m$ , então de (2.40),

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle &= \frac{2^{-n}}{n!} \int_{-1}^1 (P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^{(n)} \Phi_n(x) dx \\ &= \frac{2^{-n}}{n!} \int_{-1}^1 (P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^{(n)} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx, \end{aligned}$$

mas como  $(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^{(n)} = a_{n,n} n(n-1)(n-2) \cdots (2)1 = a_{n,n} n!$ , segue que

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = 2^{-n} a_{n,n} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx.$$

Fazendo  $x = 2t - 1$  e substituindo na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle &= 2^{-n+1} a_{n,n} \int_0^1 (1 - (2t - 1))^{\alpha+n} (1 + (2t - 1))^{\beta+n} dx \\ &= 2^{-n+1} a_{n,n} \int_0^1 (2(1-t))^{\alpha+n} (2t)^{\beta+n} dx \\ &= 2^{-n+1} a_{n,n} \int_0^1 2^{\alpha+\beta+2n} (t-1)^{\alpha+n} t^{\beta+n} dx \\ &= 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} \int_{-1}^1 (t-1)^{\alpha+n} t^{\beta+n} dx. \end{aligned}$$

Usando a equação (2.27), temos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} B(\beta + n + 1, \alpha + n + 1).$$

Da relação entre a função gama e beta dada na equação (2.28) podemos escrever

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} \frac{\Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)}.$$

Substituindo nesta equação o coeficiente principal do polinômio dado no Corolário 3, obtemos

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle &= \frac{2^{\alpha+\beta+n+1}}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \frac{\Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!} \frac{\Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}. \end{aligned}$$

■

**Corolário 5** *As seguintes igualdades são válidas:*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha+n}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}, \quad (2.41)$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{\beta+n}{n} = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+1)}. \quad (2.42)$$

**Demonstração.** Do Teorema 11, temos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (1-x)^k (1+x)^{n-k}.$$

Reescrevendo o somatório acima, temos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \binom{\alpha+n}{n} (x+1)^n + 2^{-n} \sum_{k=1}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (1-x)^k (1+x)^{n-k},$$

e avaliando em  $x = 1$ , obtemos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 2^{-n} \binom{\alpha+n}{n} (1+1)^n + 0 = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}.$$

E para mostrar a outra igualdade é só usar a simetria dos polinômios de Jacobi dada no Teorema 10, onde  $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(1)$ . ■

Queremos obter a relação de recorrência para polinômios de Jacobi. Para isso, precisamos calcular os valores de  $\eta_{n+1}$ ,  $\beta_{n+1}$  e  $\alpha_{n+1}$ , dados em (2.8).

Logo, de (2.9) e (2.37), temos

$$\eta_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} = \frac{2^{-n-1} \frac{\Gamma(2(n+1)+\alpha+\beta+1)}{(n+1)! \Gamma(\alpha+\beta+(n+1)+1)}}{2^{-n} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}} = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+3)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+2)}.$$

Como  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , obtemos

$$\eta_{n+1} = \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (2.43)$$

De (2.9) e (2.39)

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{\eta_{n+1} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle}{\eta_n \langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, P_{n-1}^{(\alpha,\beta)} \rangle} \\ &= \frac{\frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}}{\frac{(\alpha+\beta+2(n-1)+2)(\alpha+\beta+2(n-1)+1)}{2n(\alpha+\beta+n)}} \times \frac{\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{(n-1)!(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(\alpha+\beta+n)}} \\ &= \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+n)}{(n+1)(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}. \end{aligned}$$

Novamente, como  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , obtemos

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (2.44)$$

Vamos calcular o valor de  $\beta_{n+1}$ . Para isso vamos utilizar a igualdade dada em (2.41). Agora, substituindo  $x = 1$  na relação recorrência (2.8), obtemos

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(1) = (\eta_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha,\beta)}(1) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1).$$

De (2.41),

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha + n + 2)}{\Gamma(n + 2)\Gamma(\alpha + 1)} &= (\eta_{n+1} - \beta_{n+1}) \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)} - \alpha_{n+1} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(n)\Gamma(\alpha + 1)} \\ \frac{(\alpha + n + 1)(\alpha + n)\Gamma(\alpha + n)}{(n + 1)n} &= (\eta_{n+1} - \beta_{n+1}) \frac{(\alpha + n)\Gamma(\alpha + n)}{n} - \alpha_{n+1}\Gamma(\alpha + n) \\ \frac{(\alpha + n + 1)(\alpha + n)}{(n + 1)n} &= (\eta_{n+1} - \beta_{n+1}) \frac{(\alpha + n)}{n} - \alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\beta_{n+1} = \eta_{n+1} - \alpha_{n+1} \frac{n}{\alpha + n} - \frac{\alpha + n + 1}{n + 1}.$$

Substituindo (2.43) e (2.44), obtemos

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}. \quad (2.45)$$

Assim, a relação de recorrência para os polinômios de Jacobi é

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (\eta_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.46)$$

onde  $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ ,  $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$ ,

$$\eta_{n+1} = \frac{(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + n)(\beta + n)}{(n + 1)(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + n + 1)},$$

e

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}.$$

### 2.4.3 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são polinômios ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  com relação à função peso  $w(x) = 1$ . Também representam um caso especial dos polinômios de Jacobi, com  $\alpha = \beta = 0$ . Eles podem ser definidos por meio da fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^n] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (2.47)$$

O coeficiente principal do polinômio de Legendre pode ser calculado a partir do coeficiente principal do polinômio de Jacobi, descrito no Corolário 3,

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(2n + 1)}{\Gamma(n + 1)} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Agora vejamos também a relação de ortogonalidade para os polinômios de Legendre, que é calculada a partir do Corolário 4.

$$\langle P_n, P_m \rangle = \frac{2\Gamma(n + 1)\Gamma(n + 1)}{(2n + 1)\Gamma(n + 1)} \delta_{nm} = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm} \quad n, m \geq 0.$$

Para encontrar a relação de recorrência de três termos, substituímos apenas os valores de  $\alpha = \beta = 0$  nas equações (2.43), (2.44) e (2.45), para obter  $\eta_{n+1}, \beta_{n+1}$  e  $\alpha_{n+1}$ . Assim, obtemos

$$\eta_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{n}{n+1}, \quad e \quad \beta_{n+1} = 0.$$

Portanto

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.48)$$

onde  $P_0(x) = 1$  e  $P_1(x) = x$ .

Na Tabela 2.1 mostramos os primeiros polinômios de Legendre e na Figura 2.2 seus gráficos.

$n$	$P_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Tabela 2.1: Primeiros polinômios de Legendre.

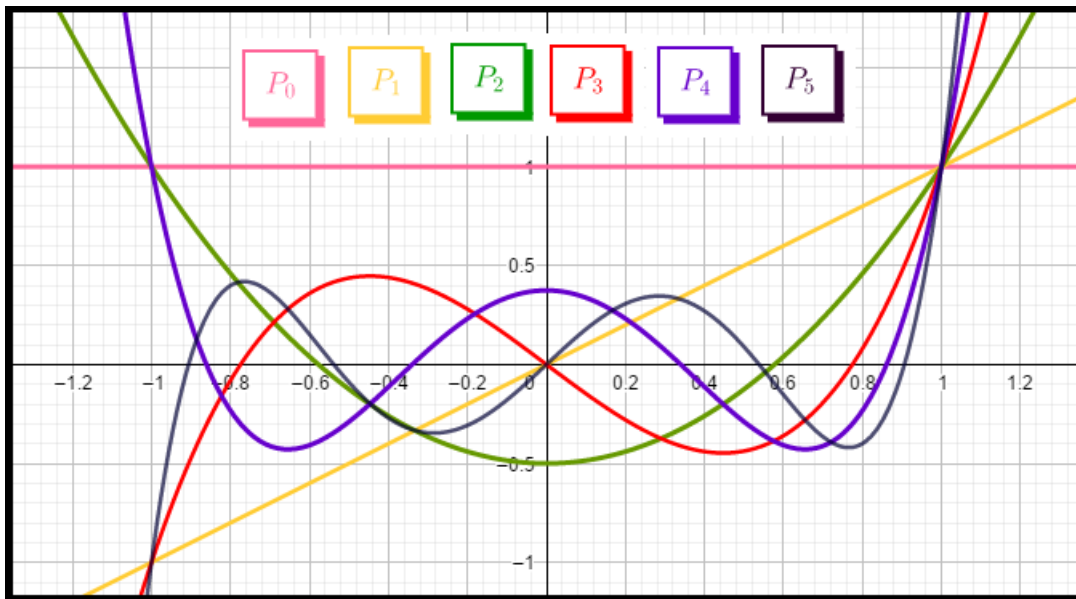


Figura 2.2: Polinômios de Legendre.

## 2.5 Polinômios quase-ortogonais

Nesta seção, veremos as propriedades dos polinômios quase-ortogonais. Para mais detalhes sugerimos [10, 12, 13, 16].

**Definição 10** *Seja  $R_n(x)$  um polinômio de grau  $n \geq r$ . Se  $R_n(x)$  satisfaz as condições*

$$\int_a^b x^k R_n(x) w(x) dx \begin{cases} = 0, & \text{para, } k = 0, \dots, n-1-r, \\ \neq 0, & \text{para, } k = n-r, \end{cases} \quad (2.49)$$

onde  $w(x)$  é uma função peso em  $[a, b]$ , então  $R_n(x)$  é um polinômio quase-ortogonal de ordem  $r$  em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $[a, b]$ .

**Teorema 12** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortogonais em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $[a, b]$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $R_n(x)$  seja um polinômio quase-ortogonal de ordem  $r$  em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $[a, b]$  é que*

$$R_n(x) = c_0 P_n(x) + c_1 P_{n-1}(x) + \dots + c_r P_{n-r}(x), \quad (2.50)$$

onde os  $c_i$ 's são números que podem depender de  $n$  e  $c_0 c_r \neq 0$ .

### Demonstração.

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $R_n(x)$  é um polinômio quase-ortogonal de ordem  $r$  em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $[a, b]$ .

Como  $\{P_j(x)\}_{j=0}^n$  formam uma base para  $\mathbb{P}_n$ , existem  $c_j, j = 0, 1, \dots, n$ , tais que

$$R_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j P_{n-j}(x), \quad c_0 \neq 0.$$

Desde que  $R_n(x)$  é um polinômio quase-ortogonal e tomando  $k = 0$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b x^0 R_n(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^n c_j \int_a^b x^0 P_{n-j}(x) w(x) dx \\ &= c_n \int_a^b x^0 P_0(x) w(x) dx, \end{aligned}$$

assim  $c_n = 0$ , pois  $\int_a^b x^0 P_0(x) w(x) dx \neq 0$ . Da mesma forma, para  $k = 1$  temos

$$0 = \int_a^b x^1 R_n(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_a^b x^1 P_{n-j}(x) w(x) dx = c_{n-1} \int_a^b x^1 P_1(x) w(x) dx,$$

segue que  $c_{n-1} = 0$ , pois  $\int_a^b x^1 P_1(x) w(x) dx \neq 0$ . Logo, fazendo o mesmo processo até  $k = n - 1 - r$ , obtemos  $c_{r+1} = 0$ .

Mas, se  $k = n - r$  tem-se

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{n-r} R_n(x) w(x) dx &= \sum_{j=0}^n c_j \int_a^b x^{n-r} P_{n-j}(x) w(x) dx \\ &= c_n \int_a^b x^{n-r} P_{n-r}(x) w(x) dx, \end{aligned}$$

logo,  $c_r \neq 0$  pois  $\int_a^b x^{n-r} R_n(x) w(x) dx \neq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Consideremos o polinômio  $R_n(x) = c_0 P_n(x) + \dots + c_r P_{n-r}(x)$  com  $c_0 c_r \neq 0$ . Assim, para  $k = 0, \dots, n - r$ , temos

$$\begin{aligned} \int_a^b x^k R_n(x) w(x) dx &= \int_a^b x^k (c_0 P_n(x) + \dots + c_r P_{n-r}(x)) w(x) dx \\ &= c_0 \int_a^b x^k P_n(x) w(x) dx + \dots + c_r \int_a^b x^k P_{n-r}(x) w(x) dx. \end{aligned}$$

Usando as propriedades de ortogonalidade dos polinômios  $P_0, \dots, P_{n-r}$  dadas no Teorema 2, podemos mostrar que as condições em (2.49) são satisfeitas. Portanto,  $R_n(x)$  é um polinômio quase-ortogonal de ordem  $r$ . ■

Vejam os de uma maneira mais geral, isto é, qualquer polinômio da forma

$$R(x) = g_0(x)P_n(x) + g_1(x)P_{n-1}(x) + \dots + g_m(x)P_{n-m}(x),$$

onde  $g_i$  é um polinômio de grau  $d_i$ , pode ser escrito como em (2.50). De fato, como  $\{P_n(x)\}$  é uma família de polinômios ortogonais, temos que satisfazem a relação de recorrência de três termos dados em (2.8), isto é,

$$\eta_{n+1}xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_{n+1}P_n(x) + \alpha_{n+1}P_{n-1}(x).$$

Observe que  $xP_n(x)$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $P_{n+1}$ ,  $P_n$  e  $P_{n-1}$ .

Multiplicando por  $x$  na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} x^2P_n(x) &= a_nxP_{n+1}(x) + b_nxP_n(x) + c_nxP_{n-1}(x) \\ &= A_nP_{n+2}(x) + B_nP_{n+1}(x) + C_nP_n(x) + D_nP_{n-1}(x) + E_nP_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma para  $i, j$  seja qual for, temos que  $x^iP_j$  pode ser escrito como uma combinação linear dos polinômios  $P_{j-i}, P_{j-i+1}, \dots, P_{j+i}$ . Assim,  $g_iP_{n-i}$  é uma combinação linear de  $P_{n-i-d_i}, \dots, P_{n-i+d_i}$ . Denotando por  $d = \max_i(n - i + d_i)$  e  $k = \min_i \{\max(n - i - d_i, 0)\}$ , temos que  $R$  tem grau  $d$  e é combinação linear dos polinômios  $P_k, \dots, P_d$ . Então, assumindo que os coeficientes de  $P_k$  e  $P_d$  são não nulos por (2.50) temos que  $R$  é um polinômio quase-ortogonal de grau  $d$  e ordem  $r = d - k = \max_i(d_i - i) + \max_i(d_i + i)$ .

**Teorema 13** *Se  $R_n(x)$  é um polinômio quase-ortogonal de ordem  $r$  em  $(a, b)$  em relação à função peso  $w(x)$ , então pelo menos  $(n - r)$  zeros distintos de  $R_n(x)$  estão no intervalo  $(a, b)$ .*

Mais detalhes desse resultado, assim como a sua demonstração podem ser vistos em [13].

Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortogonais em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $[a, b]$ . Sejam  $a < x_{1,n-1} < \dots < x_{n-1,n-1} < b$  os zeros de  $P_{n-1}(x)$ , e  $a < x_{1,n} < \dots < x_{n,n} < b$  os zeros de  $P_n(x)$ . Assim, denotemos por

$$f_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)},$$

e sem perda de generalidade assumimos que os coeficientes principais  $a_{n,n}$  dos polinômios  $P_n(x)$  têm o mesmo sinal. Então, para todo  $x < x_{1,n}$ ,  $f(x) < 0$  e para todo  $x > x_{n,n}$ ,  $f(x) > 0$ .

Primeiro consideramos o polinômio

$$R_n(x) = P_n(x) + \varsigma_n P_{n-1}(x),$$

onde  $\varsigma_n \neq 0$ . Pelo Teorema 12,  $R_n(x)$  é um polinômio quase-ortogonal. No seguinte teorema veremos as propriedades que satisfazem os zeros desse polinômio. Mais detalhes em [10].

**Teorema 14**

- (i) Os zeros  $y_1 < \dots < y_n$  de  $R_n(x)$  são reais e distintos e no máximo um deles está fora de  $(a, b)$ .
- (ii)
- (a) Se  $-\varsigma_n > 0$ , então  $x_{i,n} < y_i < x_{i,n-1}$  para  $i = 1, \dots, n-1$  e  $x_{n,n} < y_n$ .
- (b) Se  $-\varsigma_n < 0$ , então  $y_1 < x_{1,n}$  e  $x_{i-1,n-1} < y_i < x_{i,n}$  para  $i = 2, \dots, n$ .
- (iii) Se  $-\varsigma_n < f_n(a) < 0$ , então  $y_1 < a$ .
- (iv) Se  $-\varsigma_n > f_n(b) > 0$ , então  $b < y_n$ .
- (v) Se  $f_n(a) < -\varsigma_n < f_n(b)$ , então todos os zeros de  $R_n(x)$  estão em  $(a, b)$ .

**Demonstração.** Sejam  $x_{0,n-1} = -\infty$  e  $x_{n,n-1} = \infty$ . Reescrevendo a Fórmula Confluyente dada em (2.22), temos

$$P_{n-1}^2(x)f_n'(x) = P_n'(x)P_{n-1}(x) - P_n(x)P_{n-1}'(x) = \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n-1}}h_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{-1}P_i^2(x), \quad (2.51)$$

onde  $a_{n,n}$  é o coeficiente principal de  $P_n(x)$  e  $h_n = \int_a^b P_n^2(x)w(x) dx > 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $a_{n,n}$  e  $a_{n-1,n-1}$  têm o mesmo sinal, então  $f_n'(x) > 0$  para todo  $x \in (x_{i,n-1}, x_{i+1,n-1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , assim  $f(x)$  é uma função crescente em cada intervalo da forma  $(x_{i,n-1}, x_{i+1,n-1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Além disso,  $f(a) < f_n(x_{1,n}) = 0$  e  $0 = f_n(x_{n,n}) < f_n(b) = 0$ . Logo, como

$$\begin{aligned} R(x) = 0 &\Leftrightarrow P_n(x) + \varsigma_n P_{n-1}(x) = 0, \\ &\Leftrightarrow f_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)} = -\varsigma_n, \end{aligned}$$

e sendo  $y_1$  um zero de  $R(x)$ , temos que  $f_n(y_1) = -\varsigma_n$ . Então, se  $-\varsigma_n = f_n(y_1) < f(a) < 0$  segue que  $y_1 < a$ . Portanto, o caso (iii) é demonstrado e de forma similar, podemos mostrar os casos (iv) e (v).

Para mostrar (ii) parte (a), suponhamos que  $0 < -\varsigma_n$ , assim como  $f_n(x_{i,n}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  temos que  $f_n(x_{i,n}) < f_n(x)$  para todo  $x$  zero de  $R(x)$ . Portanto,  $x_{i,n} < y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Por outro lado pela propriedade de entrelaçamento dos zeros, temos que  $x_{i,n-1} < x_{i+1,n} < x_{i+1,n-1}$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ , então  $x_{i,n} < y_i < x_{i,n-1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  se  $0 < -\varsigma_n$ . De forma similar, podemos mostrar a parte (b). ■

Agora consideramos o polinômio

$$R_n(x) = P_n(x) + \varsigma_n P_{n-1}(x) + \phi_n P_{n-2}(x), \quad (2.52)$$

onde  $\varsigma_n$  e  $\phi_n \neq 0$  são números reais. Pelo Teorema 12,  $R_n(x)$  é um polinômio quase-ortogonal de ordem dois. No seguinte teorema veremos as propriedades que satisfazem os zeros desse polinômio.

**Teorema 15** Se  $\phi_n < 0$ , então todos os zeros de  $R_n(x)$  são reais, distintos e no máximo dois deles estão fora do intervalo  $(a, b)$ .

**Teorema 16** Se  $\phi_n < 0$ , então os zeros de  $R_n(x)$  são tais que  $y_1 < x_{1,n-1}$ ,  $x_{i-1,n-1} < y_i < x_{i,n-1}$  para  $i = 2, \dots, n-1$ , e  $x_{n-1,n-1} < y_n$ .

Além disso,

- (i)  $y_n < x_{n,n}$  se  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(x_{n,n}) < 0$  e  $y_n > x_{n,n}$  se  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(x_{n,n}) > 0$ ;
- (ii)  $y_n < b$  se  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(b) < f_n(b)$  e  $y_n > b$  se  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(b) > f_n(b)$ ;
- (iii)  $y_1 < x_{1,n}$  se  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(x_{1,n}) < 0$  e  $y_1 > x_{1,n}$  se  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(x_{1,n}) > 0$ ;
- (iv)  $y_1 < a$  se  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(a) < f_n(a)$  e  $y_1 > a$  se  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(a) > f_n(a)$ .

**Demonstração.** Sejam  $\omega$  e  $v$  dois zeros consecutivos de  $P_{n-1}(x)$ . Da segunda igualdade em (2.51) temos

$$\begin{aligned} P'_n(\omega)P_{n-1}(\omega) - P_n(\omega)P'_{n-1}(\omega) &= -P_n(\omega)P'_{n-1}(\omega) > 0, \\ P'_{n-1}(\omega)P_{n-2}(\omega) - P_{n-1}(\omega)P'_{n-2}(\omega) &= P'_{n-1}(\omega)P_{n-2}(\omega) > 0. \end{aligned}$$

Assim,  $P_n(\omega)$  e  $P_{n-2}(\omega)$  têm sinais opostos (similarmente para  $P_n(v)$  e  $P_{n-2}(v)$ ). Como  $\phi_n < 0$ , segue que  $P_n(\omega)$  e  $\phi_n P_{n-2}(\omega)$  possuem o mesmo sinal (similarmente para  $P_n(v)$  e  $\phi_n P_{n-2}(v)$ ). Além disso, pela propriedade de entrelaçamento dos zeros temos que  $P_n(\omega)$  e  $P_n(v)$  têm sinais opostos. Assim,  $R_n(\omega)$  e  $R_n(v)$  têm sinais opostos. Então,  $R_n(x)$  tem um zero entre  $\omega$  e  $v$ , o que comprova a propriedade de entrelaçamento dos zeros.

Vamos ver agora os outros dois zeros que estão faltando. Temos

$$\begin{aligned} R_n(x) = 0 &\Leftrightarrow 0 = P_n(x) + \varsigma_n P_{n-1}(x) + \phi_n P_{n-2}(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)} = -\varsigma_n - \phi_n \frac{P_{n-2}(x)}{P_{n-1}(x)} \\ &\Leftrightarrow f_n(x) = -\varsigma_n - \frac{\phi_n}{f_{n-1}(x)}. \end{aligned}$$

Logo, usando (2.51) podemos ver que  $f_{n-1}(x)$  é uma função crescente no intervalo  $(x_{n-2,n-2}, \infty)$ , sendo a demonstração dessa afirmação análoga à demonstração feita no Teorema 14. Por outro lado temos que  $f_{n-1}(x_{n-1,n-1}) = 0$ . Como  $f_{n-1}(x)$  é uma função crescente no intervalo  $(x_{n-2,n-2}, \infty)$ , temos para  $x < y \in (x_{n-2,n-2}, \infty)$  que  $f_{n-1}(x) < f_{n-1}(y)$ . Logo, suponhamos que  $f_{n-1}(x), f_{n-1}(y) \neq 0$  e  $\phi_n < 0$ , assim

$$-\varsigma_n - \frac{\phi_n}{f_{n-1}(y)} < -\varsigma_n - \frac{\phi_n}{f_{n-1}(x)}.$$

Portanto,  $-\varsigma_n - \phi_n/f_{n-1}(x)$  é decrescente desde  $-\varsigma_n$  até  $-\infty$  em  $(x_{n-2,n-2}, x_{n-1,n-1})$  e desde  $\infty$  até  $-\varsigma_n$  em  $(x_{n-1,n-1}, \infty)$ . Além disso,  $f_n(x)$  é uma função crescente no intervalo  $(x_{n-1,n-1}, \infty)$ . Portanto  $x_{n-1,n-1} < y_n$ . similarmente podemos mostrar que  $y_1 < x_{1,n-1}$ . Os outros casos são imediatos. ■

## 2.6 Aplicações

### 2.6.1 Introdução

Muitos valores de interesse para a ciência e engenharia são escritos por integrais. Estas integrais podem ser usadas para calcular comprimentos, áreas, volumes, massas, centros

de massa, etc.. Em todas estas aplicações, o objetivo é calcular uma integral definida

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

com a maior precisão e menor custo computacional possível. Muitas dessas integrais são difíceis de calcular analiticamente, porque em alguns casos a expressão analítica da função a ser integrada é desconhecida e seu valor é conhecido apenas em alguns pontos ou a função é muito complexa. Por exemplo, na Teoria das Probabilidades, para determinar a probabilidade de um evento que ocorre dentro de um intervalo  $[a, b]$ , é necessário calcular a integral

$$\beta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Acontece que  $f(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  é uma função cuja primitiva não pode ser expressa como uma combinação linear finita de funções simples.

Assim, para poder resolver esse tipo de integral é necessário desenvolver métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas. Neste trabalho estudaremos o método de quadratura gaussiana. Para mais detalhes sobre a integração numérica veja [4, 6, 11, 14, 15, 26, 27].

## 2.6.2 Fórmulas de quadratura interpolatórias

Vamos construir a fórmula de quadratura mediante um polinômio interpolador. Para fazer um estudo mais detalhado do assunto recomendamos os textos citados na subseção anterior.

Seja

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (2.53)$$

onde  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ .

As fórmulas do tipo

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n w_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n,$$

utilizadas para aproximar o valor numérico da integral  $I$ , são chamadas de fórmulas de quadratura, onde  $w_{n,k}$  são chamados pesos e  $x_{n,k}$  são os nós da fórmula de quadratura, para  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Para construí-las, basicamente vamos aproximar a função a ser integrada por meio de um polinômio que passa pelos nós  $\{(x_{n,k}, f(x_{n,k}))\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Ou seja,

$$f(x) = Q_n(x) + R_n(x).$$

Especificamente, se usamos a interpolação de Lagrange para construir o polinômio interpolador, obtemos

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) L_k(x),$$

onde  $L_k(x)$  é o  $k$ -ésimo polinômio interpolador de Lagrange

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_{n,i}}{x_{n,k} - x_{n,i}}.$$

Portanto, substituindo em (2.53), obtemos

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (Q_n(x) + R_n(x)) dx = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) \int_a^b L_k(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx,$$

ou seja,

$$I = \sum_{k=0}^n w_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n,$$

onde,

$$w_{n,k} = \int_a^b L_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

e

$$E_n = \int_a^b R_n(x) dx \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

### 2.6.3 Quadratura gaussiana

Vamos estudar as fórmulas de quadratura gaussiana, cujos nós serão os zeros de polinômios ortogonais.

Consideremos integrais da forma

$$I = \int_a^b f(x)w(x) dx \tag{2.54}$$

onde  $w(x)$  é uma função peso em  $(a, b)$ .

Suponhamos que a função  $f(x)$  é aproximada por polinômios de interpolação de Lagrange, então

$$f(x) = Q_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k})L_k(x) + R_n(x).$$

Assim, em (2.54) obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)w(x) dx = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) \int_a^b L_k(x)w(x) dx + \int_a^b R_n(x)w(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n w_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n, \end{aligned} \tag{2.55}$$

onde,

$$w_{n,k} = \int_a^b L_k(x)w(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

e

$$E_n = \int_a^b R_n(x)w(x) dx \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Nosso objetivo é integrar um polinômio de grau  $2n + 1$ . Se  $f(x)$  fosse um polinômio de grau  $2n + 1$ , então o erro seria  $E_n = 0$ . Assim,

$$f(x) = Q_{2n+1} = Q_n(x) + R_n(x).$$

Logo, como a função é aproximada pela interpolação de Lagrange e temos apenas  $n + 1$  nós da fórmula de quadratura, segue que  $R_n(x)$  tem que ser de grau  $2n + 1$ .

Portanto,

$$R_n(x) = r_n(x)L(x),$$

onde  $L(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_{n,j})$  e  $r_n(x)$  é um polinômio de grau  $n$ .

Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo  $(a, b)$  em relação à função peso  $w(x)$ . Pelo Teorema 1 temos

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j P_j(x)$$

e

$$r_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i P_i(x).$$

Portanto, o erro de integração é dado por

$$E_n = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n a_j b_i \int_a^b P_j(x) P_i(x) w(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i b_i \langle P_i, P_j \rangle,$$

pois  $\{P_n(x)\}$  é uma família de polinômios ortogonais. Como queremos que  $E_n = 0$ , então temos duas possibilidades: supondo que  $b_i = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , teríamos  $r_n(x) = 0$ , o que é impossível; portanto,  $a_i = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Assim o polinômio de Lagrange pode ser expresso como

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n+1} b_j P_j(x) = a_{n+1} P_{n+1}(x).$$

Portanto, para que o erro seja nulo, os nós da fórmula de quadratura devem ser os zeros do polinômio  $P_{n+1}(x)$ , que faz parte de uma SPO.

Por outro lado, reescrevendo  $Q_n(x)$ , temos

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) L_k(x) = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_{n,i}}{x_{n,k} - x_{n,i}} = \sum_{k=0}^n f(x_{n,k}) \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_{n,k}) P'_{n+1}(x_{n,k})}.$$

Assim, em (2.55) temos

$$I = \int_a^b f(x) w(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b f(x_{n,i}) \frac{w(x) P_n(x)}{(x - x_{n,i}) P'_n(x_{n,i})} dx + E_n.$$

Portanto, a fórmula de quadratura gaussiana é dada por

$$I = \int_a^b f(x) w(x) dx = \sum_{k=0}^n w_{n,k} f(x_{n,k}), \quad (2.56)$$

onde

$$w_{n,k} = \int_a^b \frac{w(x) P_{n+1}(x)}{(x - x_{n,k}) P'_{n+1}(x_{n,k})} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

**Teorema 17** Os pesos  $w_{n,k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) descritos em (2.56) são positivos.

**Demonstração.** Temos que

$$w_{n,k} = \int_a^b w(x)q_{n,k}(x) dx,$$

onde  $q_{n,k}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x-x_{n,k})P'_n(x_{n,k})}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Então,  $q_{n,k}^2(x) - q_{n,k}(x)$  é um polinômio de grau menor igual que  $2n$  que é nulo quando  $x = x_{n,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , que são os zeros de  $P_{n+1}(x)$ . Consequentemente,

$$q_{n,k}^2(x) - q_{n,k}(x) = P_{n+1}(x)t(x),$$

onde  $t(x)$  é um polinômio de grau menor igual que  $n - 1$ .

Assim,

$$\int_a^b w(x) (q_{n,k}^2(x) - q_{n,k}(x)) dx = \int_a^b t(x)P_{n+1}(x)w(x) dx = 0,$$

pela ortogonalidade dada no Teorema 2. Daí temos

$$w_{n,k} = \int_a^b q_{n,k}(x)w(x) dx = \int_a^b w(x) (q_{n,k}(x))^2 dx > 0.$$

■

**Teorema 18** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  uma SPO em relação à função peso  $w(x)$  no intervalo  $(a, b)$  e seja  $m < n$ . Então, entre quaisquer dois zeros de  $P_m(x)$  existe pelo menos um zero de  $P_n(x)$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que  $x_{m,k}$  e  $x_{m,k+1}$  são dois zeros consecutivos de  $P_m(x)$  e que  $P_n(x)$  não têm zeros em  $(x_{m,k}, x_{m,k+1})$ . Consideremos o polinômio

$$b(x) = \frac{P_m(x)}{(x - x_{m,k})(x - x_{m,k+1})}.$$

Então

$$b(x)P_m(x) \geq 0, \quad \forall x \notin (x_{m,k}, x_{m,k+1}).$$

Assim, a partir da fórmula de quadratura de Gauss, temos

$$I = \int_a^b b(x)P_m(x)w(x) dx = \sum_{i=1}^n w_{n,i}b(x_{n,i})P_m(x_{n,i}),$$

onde  $\{x_{n,i}\}_{i=1}^n$  são os zeros de  $P_n(x)$ .

Como  $P_n(x)$  não possui zeros em  $(x_{m,k}, x_{m,k+1})$ , concluímos que  $b(x_{n,i})P_m(x_{n,i}) \geq 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Além disso, temos  $w_{n,i} > 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , o que implica que a soma no lado direito não pode ser nula. No entanto, a integral no lado esquerdo é zero por ortogonalidade. Essa contradição prova que deve haver pelo menos um zero de  $P_n(x)$  entre os dois zeros consecutivos de  $P_m(x)$ .

■

## Polinômios de Chebyshev

Neste capítulo estudamos os polinômios de Chebyshev de primeira, segunda, terceira e quarta espécies, com suas respectivas propriedades. Para mais detalhes sobre o assunto sugerimos [2, 13, 17, 21].

### 3.1 Polinômios de Chebyshev de primeira espécie

Os polinômios de Chebyshev  $T_n(x)$  de primeira espécie são polinômios ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  em relação à função peso  $(1 - x^2)^{-1/2}$ .

**Definição 11** *Os polinômios de Chebyshev  $T_n(x)$  de primeira espécie, são polinômios de grau  $n$  em  $x$  definidos por*

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad x = \cos\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

**Teorema 19** *Os polinômios de Chebyshev  $T_n(x)$  de primeira espécie satisfazem a seguinte relação de recorrência*

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

onde  $T_0(x) = 1$  e  $T_1(x) = x$ .

**Demonstração.** Usando as identidades trigonométricas, temos

$$T_n(x) + T_{n-2}(x) = \cos(n)\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta \cos(n-1)\theta = 2xT_{n-1}(x).$$

■

Usando a relação de recorrência no teorema anterior vamos calcular os primeiros polinômios:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x = 2^0 x \\ T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2^2 x^3 - 3x \\ &\vdots \\ T_n(x) &= 2^{n-1} x^n + \dots \end{aligned}$$

Assim,  $a_{n,n} = 2^{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , que é o coeficiente principal do polinômio  $T_n(x)$ .

**Teorema 20** Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi, & \text{se, } m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se, } m = n > 0, \\ 0, & \text{se, } m \neq n. \end{cases}$$

**Demonstração.**

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_n(x) T_m(x) dx = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta.$$

i) Se  $m = n = 0$ ,

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \int_0^\pi \cos^2(0) d\theta = \pi.$$

ii) Se  $m = n > 0$ ,

$$\langle T_n, T_n \rangle = \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta &= \frac{\cos(n\theta) \operatorname{sen}(n\theta)}{n} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(n\theta) n \operatorname{sen}(n\theta)}{n} d\theta \\ &= \int_0^\pi [1 - \cos^2(n\theta)] d\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$\langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

iii) Se  $m \neq n$ .

Das identidades trigonométricas, temos

$$\cos(n\theta) \cos(m\theta) = \frac{1}{2} [\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \cos(m+n)\theta d\theta + \int_0^\pi \cos(m-n)\theta d\theta \right] \\ &= \frac{\operatorname{sen}(m+n)\theta}{2(m+n)} \Big|_0^\pi + \frac{\operatorname{sen}(m-n)\theta}{2(m-n)} \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

■

Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie são múltiplos dos polinômios de Jacobi quando  $\alpha = \beta = -1/2$ , ou seja,

$$T_n(x) = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x).$$

De fato, pelo Corolário 1, sabemos que

$$T_n(x) = \sigma_n P_n^{(-1/2, -1/2)}(x).$$

Logo comparando os coeficientes principais dos polinômios de Chebyshev e Jacobi para  $\alpha = \beta = 0$  e usando (2.37), temos

$$\sigma_n = \frac{a_{n,n}^T}{a_{n,n}^P} = \frac{2^{n-1}}{\frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}} = \frac{2^{n-1}}{\frac{\Gamma(2n+1)}{2^{n+1} \Gamma(n+1) \Gamma(n+1)}} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1},$$

onde  $a_{n,n}^T$  é o coeficiente principal do polinômio  $T_n$  e  $a_{n,n}^P$  é o coeficiente principal do polinômio  $P_n^{(-1/2, -1/2)}(x)$ .

Para calcular os zeros de  $T_n(x)$  consideremos a seguinte equação

$$\cos n\theta = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

cujas soluções são

$$n\theta = \left(k - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad k = 1, \dots, n.$$

Assim, os zeros de  $T_n(x)$  são dados quando

$$x = x_{k,n} = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Na Figura 3.1 apresentamos os gráficos dos primeiros polinômios de Chebyshev de primeira espécie, vistos na primeira parte da seção. Podemos também observar que a propriedade de entrelaçamento de zeros de polinômios de graus consecutivos é cumprida, demonstrada no Teorema 8.

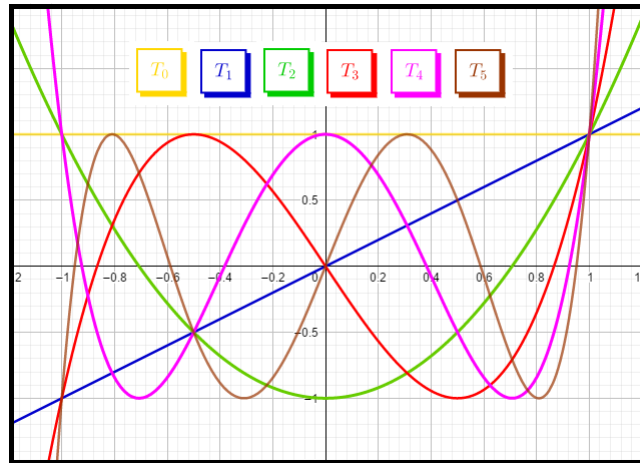


Figura 3.1: Polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

## 3.2 Polinômios de Chebyshev de segunda espécie

Os polinômios de Chebyshev  $U_n(x)$  de segunda espécie são polinômios ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  em relação à função peso  $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

**Definição 12** Os polinômios de Chebyshev  $U_n(x)$  de segunda espécie são polinômios de grau  $n$  em  $x$  definidos por

$$U_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \quad x = \cos\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

**Teorema 21** Os polinômios de Chebyshev  $U_n(x)$  de segunda espécie satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

onde  $U_0(x) = 1$  e  $U_1(x) = 2x$ .

**Demonstração.** Usando as identidades trigonométricas, temos

$$U_n(x) + U_{n-2}(x) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}(n-1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\cos\theta \operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2xU_n(x).$$

■

Podemos obter uma relação entre os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécies, usando a seguinte identidade:

$$\operatorname{sen}(n+1)\theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta = 2\operatorname{sen}\theta \cos n\theta,$$

ou seja,

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Usando a relação de recorrência no teorema anterior vamos calcular os primeiros polinômios

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 2xU_1(x) - U_0(x) = 2^2x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 2xU_2(x) - U_1(x) = 2^3x^3 - 4x \\ &\vdots \\ U_n(x) &= 2^n x^n + \dots \end{aligned}$$

Assim,  $a_{n,n} = 2^n$ ,  $n \geq 0$ , que é o coeficiente principal do polinômio  $U_n(x)$ .

**Teorema 22** Os polinômios de Chebyshev de segunda espécie satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle U_n, U_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se, } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se, } m = n. \end{cases}$$

**Demonstração.**

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n(x) U_m(x) dx = \int_0^\pi \operatorname{sen}(n+1)\theta \operatorname{sen}(m+1)\theta d\theta.$$

i) Se  $m = n$ ,

$$\langle U_n, U_n \rangle = \int_0^\pi \text{sen}^2(n+1)\theta \, d\theta.$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \text{sen}^2(n+1)\theta \, d\theta &= \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\theta(n+1) \cos(n+1)\theta}{n+1} \, d\theta \\ &= \int_0^\pi [1 - \text{sen}^2(n+1)\theta] \, d\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \text{sen}^2(n+1)\theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^\pi \text{sen}^2(n+1)\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$\langle U_n, U_n \rangle = \frac{\pi}{2}.$$

ii) Se  $m \neq n$ . Integrando duas vezes por partes, temos

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= \int_0^\pi \text{sen}(n+1)\theta \text{sen}(m+1)\theta \, d\theta \\ &= -\frac{\text{sen}(n+1)\theta \cos(m+1)\theta}{m+1} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{(n+1) \cos(n+1)\theta \cos(m+1)\theta}{m+1} \, d\theta \\ &= \frac{n+1}{m+1} \int_0^\pi \frac{(n+1) \text{sen}(n+1)\theta \text{sen}(m+1)\theta}{m+1} \, d\theta \\ &= \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \int_0^\pi \text{sen}(n+1)\theta \text{sen}(m+1)\theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \langle U_n, U_m \rangle. \end{aligned}$$

Como  $m \neq n$ , então  $\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \neq 0$ . Logo  $\langle U_n, U_m \rangle = 0$ .

■

Os polinômios de Chebyshev de segunda espécie são múltiplos dos polinômios de Jacobi quando  $\alpha = \beta = 1/2$ , ou seja,

$$U_n(x) = 2^{2n} \binom{2n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(1/2, 1/2)}(x).$$

A demonstração de esse fato é análoga à feita para os polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

Os zeros de  $U_n(x)$  são facilmente determinados de maneira similar aos zeros de  $\text{sen}(n+1)\theta$ , ou seja, consideremos a seguinte equação

$$\text{sen}(n+1)\theta = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

cuja solução é

$$\theta = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo os zeros de  $U_n(x)$  são dados quando

$$x = x_{k,n} = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Na Figura 3.2 apresentamos os gráficos dos primeiros polinômios de Chebyshev de segunda espécie.

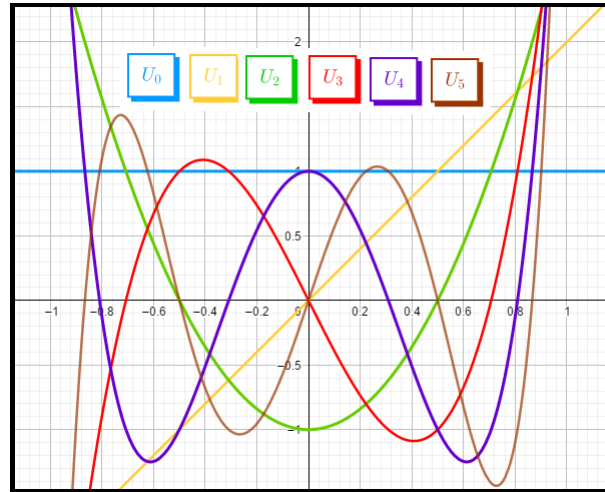


Figura 3.2: Polinômios de Chebyshev de segunda espécie.

### 3.3 Polinômios de Chebyshev de terceira espécie

Os polinômios de Chebyshev de terceira espécie são ortogonais em relação à função peso  $w_1(x) = (1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$ , no intervalo  $[-1, 1]$ .

**Definição 13** Os polinômios de Chebyshev  $V_n(x)$  de terceira espécie, são polinômios de grau  $n$  em  $x$  definidos por

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}, \quad (3.3)$$

onde  $x = \cos\theta$ .

**Teorema 23** Os polinômios de Chebyshev de terceira espécie satisfazem as seguinte relação de recorrência de três termos:

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x)$$

com  $V_0(x) = 1$  e  $V_1(x) = 2x - 1$ .

**Demonstração.** Segue imediatamente da Definição 13 e das seguinte relação:

$$2 \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \cos\theta = \cos\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta.$$

■

**Teorema 24** Os polinômios de Chebyshev de terceira espécie satisfaz a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 V_n(x)V_m(x)w_1(x) dx = \pi\delta_{n,m}.$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 V_n(x)V_m(x)w_1(x) dx &= 2 \int_{-1}^1 \frac{\cos((n + \frac{1}{2}) \arccos x) \cos((m + \frac{1}{2}) \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\
 &= 2 \int_0^\pi \cos(n + \frac{1}{2})\theta \cos(m + \frac{1}{2})\theta d\theta \\
 &= \int_0^\pi (\cos(n + m + 1)\theta + \cos(n - m + 1)\theta) d\theta \\
 &= \pi \delta_{n,m}.
 \end{aligned}$$

■

Os polinômios  $V_n(x)$  são, também, obtidos a partir de dois polinômios particulares de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , para dois casos especiais não simétricos  $\beta = -\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$V_n(x) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x).$$

A demonstração desse fato é análoga à feita para os polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

Os zeros dos polinômios de Chebyshev da terceira espécie pode ser calculado de maneira similar aos polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécies. Assim, os zeros de  $V_n(x)$  são dados por

$$x_{k,n} = \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2n + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Na Tabela 3.1 a seguir estão alguns polinômios de Chebyshev de terceira espécie, e na Figura 3.3 representam alguns desses polinômios. Também as propriedades de entrelaçamento de zeros de polinômios de graus consecutivos é cumprida, demonstrada no Teorema 8.

$n$	$V_n(x)$
0	1
1	$2x - 1$
2	$4x^2 - 2x - 1$
3	$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$
4	$16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$
5	$32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1$

Tabela 3.1: Polinômios de Chebyshev de terceira espécie.

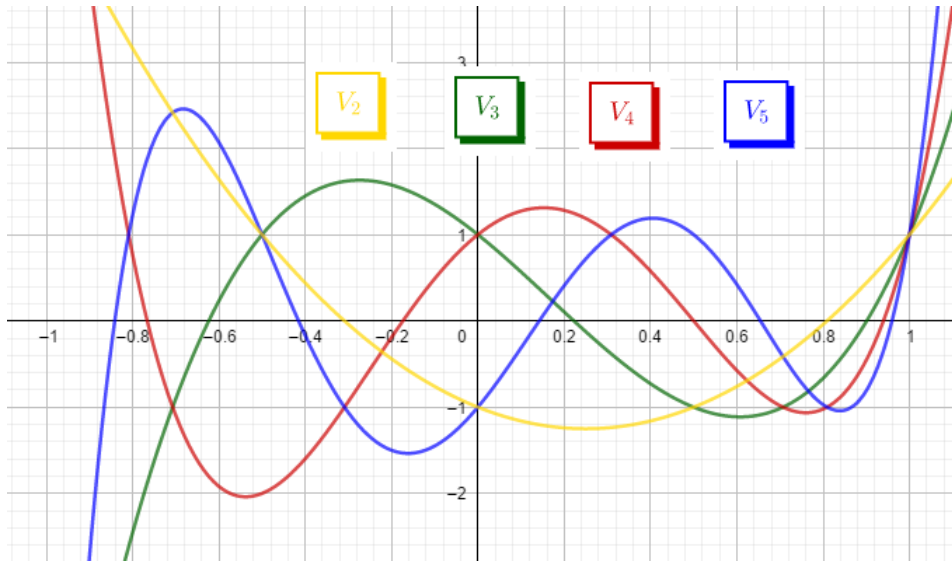


Figura 3.3: Polinômios de Chebyshev de terceira espécie.

### 3.4 Polinômios de Chebyshev de quarta espécie

Os polinômios de Chebyshev de quarta espécie são ortogonais em relação à função peso  $w_2(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$ , no intervalo  $[-1, 1]$ .

**Definição 14** Os polinômios de Chebyshev  $W_n(x)$ , de quarta espécie, são polinômios de grau  $n$  em  $x$  definidos por

$$W_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}, \quad (3.4)$$

onde  $x = \cos\theta$ .

**Teorema 25** Os polinômios de Chebyshev de quarta espécies satisfaz a seguinte relação de recorrência de três termos:

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad (n = 2, 3, \dots)$$

com  $W_0(x) = 1$  e  $W_1(x) = 2x + 1$ .

**Demonstração.** Segue imediatamente da Definição 14 e da seguinte relação:

$$2\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta \cos\theta = \operatorname{sen}(n + 1 + \frac{1}{2})\theta + \operatorname{sen}(n - 1 + \frac{1}{2})\theta.$$

■

**Teorema 26** Os polinômios de Chebyshev de quarta espécie satisfaz a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 W_n(x)W_m(x)w_2(x) dx = \pi\delta_{n,m}.$$

Os polinômios  $W_n(x)$  são, também, obtidos a partir de dois polinômios particulares de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , para dois casos especiais não simétricos  $\beta = -\alpha = -\frac{1}{2}$ :

$$W_n(x) = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x).$$

A demonstração desse fato é análoga à feita para os polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

Como  $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$ , segue que

$$V_n(-x) = (-1)^n W_n(x).$$

Os zeros dos polinômios de Chebyshev de quarta espécie podem ser calculados de maneira similar aos polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécies. Assim, os zeros de  $W_n(x)$  são dados por

$$x_{k,n} = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Na Tabela 3.2 a seguir estão alguns polinômios de Chebyshev de quarta espécie, e na Figura 3.4 representam alguns desses polinômios. Também as propriedades de entrelaçamento de zeros de polinômios de graus consecutivos é cumprida, demonstrada no Teorema 8.

$n$	$W_n(x)$
0	1
1	$2x + 1$
2	$4x^2 + 2x - 1$
3	$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$
4	$16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1$
5	$32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1$

Tabela 3.2: Polinômios de Chebyshev de quarta espécie.

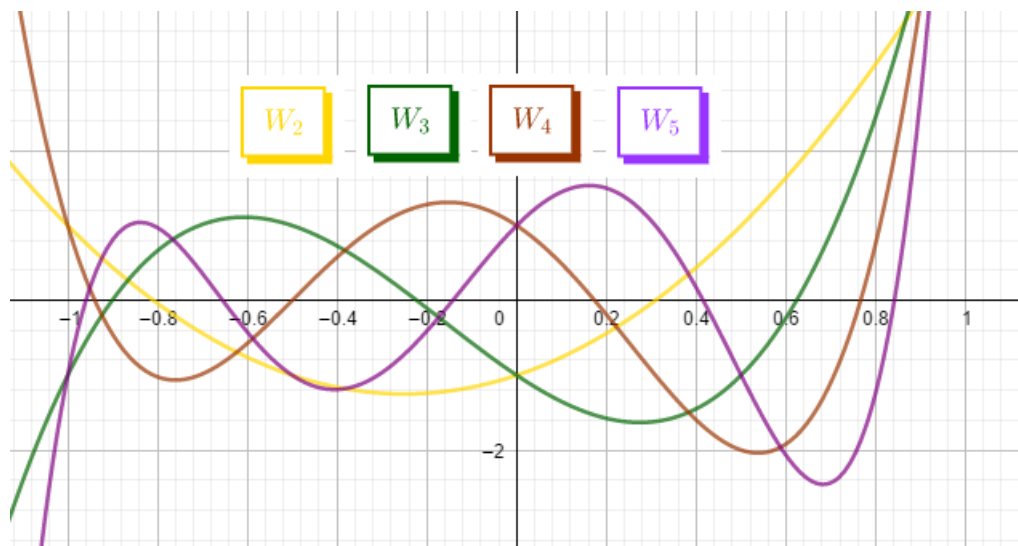


Figura 3.4: Polinômios de Chebyshev de quarta espécie.

Vamos ver a relação que existe entre os polinômios  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$ ,  $V_n(x)$  e  $W_n(x)$ . Para isso fazemos uma mudança de variável  $u = \cos(\theta/2)$  e  $t = \sin(\theta/2)$ . Das equações (3.1),

(3.2), (3.3) e (3.4) temos

$$T_n(x) = \cos n\theta = \cos\left(2n\frac{\theta}{2}\right) = \cos(2n \arccos u) = T_{2n}(u);$$

$$U_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\left((2n+2)\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = (2u)^{-1} \frac{\operatorname{sen}\left((2n+2)\arccos u\right)}{\operatorname{sen}(\arccos u)} = \frac{U_{2n+1}(u)}{2u};$$

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\left((2n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{u} = u^{-1} \cos\left((2n+1)\arccos u\right) = u^{-1}T_{2n+1}(u);$$

$$W_n(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\arccos u\right)}{\operatorname{sen}(\arccos u)} = U_{2n}(u).$$

Também temos a seguinte relação:

$$U_n(x) = \frac{1}{2} [V_n(x) + W_n(x)], \quad (3.5)$$

a qual deriva imediatamente da seguinte identidade trigonométrica:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \cos\frac{\theta}{2} + \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \right]. \end{aligned}$$

A equação (3.5) não é a única relação entre as famílias de polinômios  $\{V_n(x)\}$ ,  $\{W_n(x)\}$  e  $\{U_n(x)\}$ . De fato, usando as relações trigonométricas

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] &= \operatorname{sen}(n+1)\theta - \operatorname{sen}n\theta, \\ 2\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] &= \operatorname{sen}(n+1)\theta - \operatorname{sen}n\theta, \end{aligned}$$

e dividindo por  $\operatorname{sen}\theta$ , podemos deduzir que

$$\begin{aligned} V_n(x) &= U_n(x) - U_{n-1}(x), \\ W_n(x) &= U_n(x) + U_{n-1}(x). \end{aligned}$$

E finalmente outras relações que podem ser derivadas das definições são

$$V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x).$$

## Polinômios com zeros simétricos

Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades dos polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-invertíveis. Estes são polinômios cujos zeros são simétricos em relação à reta real  $\mathbb{R}$  ou ao círculo unitário  $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Para mais detalhes sobre o assunto sugerimos [22, 29].

### 4.1 Polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-invertíveis

**Definição 15** *Seja  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  um polinômio de grau  $n$  com coeficientes complexos. Vamos introduzir três polinômios:*

- *O polinômio conjugado*

$$\bar{P}(z) = \bar{a}_n z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 = \overline{P(\bar{z})}. \quad (4.1)$$

- *O polinômio recíproco*

$$P^*(z) = a_n + a_{n-1} z + \dots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n = z^n P(1/z). \quad (4.2)$$

- *O polinômio inverso*

$$P^\dagger(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_1 z^{n-1} + \bar{a}_0 z^n = z^n \overline{P(1/\bar{z})}. \quad (4.3)$$

Da definição anterior podemos deduzir que, se  $z_1, \dots, z_n$  são os zeros de  $P(z)$ , então  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$  são os zeros de  $\bar{P}(z)$ ,  $1/z_1, \dots, 1/z_n$  são os zeros de  $P^*(z)$  e  $1/\bar{z}_1, \dots, 1/\bar{z}_n$  são os zeros de  $P^\dagger(z)$ .

**Definição 16** *Seja  $P(z)$  um polinômio complexo e  $\xi$  um zero de  $P(z)$ . Então  $P(z)$  será chamado:*

- *auto-conjugado, se  $\bar{\xi}$  é também zero de  $P(z)$ .*
- *auto-recíproco, se  $1/\xi$  é também zero de  $P(z)$ .*
- *auto-invertível, se  $1/\bar{\xi}$  é também zero de  $P(z)$ .*

**Exemplo 4** Considere o seguinte polinômio  $P(z) = (3 + \sqrt{3}i)z^5 + (2\sqrt{3} + 2i)z^4 + (\sqrt{3} + i)z^3 + (3\sqrt{3} + 3i)z + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ , cujos zeros são  $z_1 = -0.75$ ,  $z_2 = -0.9 + 0.91i$ ,  $z_3 = -0.9 - 0.91i$ ,  $z_4 = 0.7 + 0.82i$  e  $z_5 = 0.7 - 0.82i$ . Então,  $P(z)$  é um polinômio auto-conjugado, pois  $z_1 = \bar{z}_1$ ,  $\bar{z}_2 = z_3$  e  $\bar{z}_4 = z_5$ .

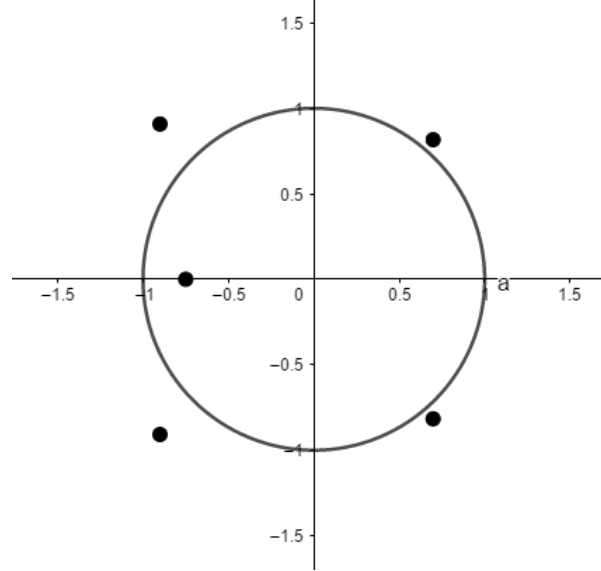


Figura 4.1: Localização dos zeros do polinômio  $P(z) = (3 + \sqrt{3}i)z^5 + (2\sqrt{3} + 2i)z^4 + (\sqrt{3} + i)z^3 + (3\sqrt{3} + 3i)z + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ .

**Exemplo 5** Considere o seguinte polinômio  $P(z) = z^7 - 1.5z^6 + 2z^5 - 0.5z^4 + 0.5z^3 - 2z^2 + 1.5z - 1$ , cujos zeros são  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0.66 + 1.26i$ ,  $z_3 = 0.66 - 1.26i$ ,  $z_4 = -0.73 + 0.68i$ ,  $z_5 = -0.73 - 0.68i$ ,  $z_6 = 0.32 + 0.62i$  e  $z_7 = 0.32 - 0.62i$ . Então,  $P(z)$  é um polinômio auto-conjugado, auto-recíproco e auto-invertível, pois  $\bar{z}_2 = z_3$ ,  $1/z_2 = z_7$ ,  $1/\bar{z}_2 = z_6$ ,  $1/z_4 = z_5$  e  $1/\bar{z}_4 = z_4$ .

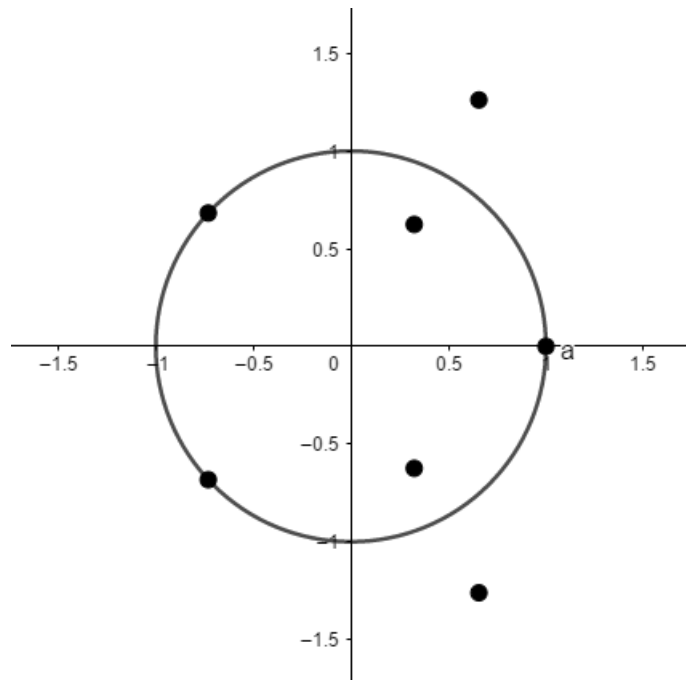


Figura 4.2: Localização dos zeros do polinômio  $P(z) = z^7 - 1.5z^6 + 2z^5 - 0.5z^4 + 0.5z^3 - 2z^2 + 1.5z - 1$ .

**Teorema 27** *Se  $P(z)$  é um polinômio auto-conjugado de grau ímpar, então necessariamente tem pelo menos um zero em  $\mathbb{R}$ . Similarmente, se  $P(z)$  é um polinômio auto-recíproco ou auto-invertível de grau ímpar, então necessariamente tem pelo menos um zero em  $S$ .*

**Demonstração.** Pela Definição 16, se  $\xi$  é zero não real de  $P(z)$ , então  $\bar{\xi}$  é também seu zero, logo os zeros não reais de  $p(z)$  aparecem por pares conjugados. Assim, se  $n$  é ímpar, deve haver pelo menos um zero real. Da mesma forma, os zeros de  $P^\dagger(z)$  ou  $P^*(z)$  que têm módulo diferente de 1 podem aparecer apenas em pares (inversos ou recíprocos); portanto, se  $P(z)$  tiver grau ímpar, então pelo menos um zero dele deve estar em  $S$ . ■

**Teorema 28** *Uma condição necessária e suficiente para que um polinômio complexo  $P(z)$  seja auto-conjugado, auto-recíproco, ou auto-invertível é que exista um número complexo  $\omega$  de módulo 1, de modo que uma das seguintes relações sejam satisfeitas, respectivamente:*

$$P(z) = \omega \bar{P}(z), \quad P(z) = \omega P^*(z), \quad P(z) = \omega P^\dagger(z). \quad (4.4)$$

**Demonstração.** É claro, por (4.1), (4.2) e (4.3), que essas condições são suficientes. Precisamos mostrar, portanto, que essas condições também são necessárias.

Suponhamos que  $P(z)$  seja um polinômio auto-conjugado. Sejam então  $z_1, \dots, z_n$  os zeros de  $P(z)$ . Logo, pela Definição 16,  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$  também são seus zeros. Assim,

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - \bar{z}_i) = a_n \prod_{i=1}^n \overline{(\bar{z} - z_i)} = (a_n/\bar{a}_n) \overline{P(\bar{z})} = \omega \bar{P}(z),$$

onde  $\omega = a_n/\bar{a}_n$  e  $|\omega| = |a_n/\bar{a}_n| = 1$ . Agora, suponhamos que  $P(z)$  é um polinômio auto-recíproco. Se  $z_1, \dots, z_n$  são os zeros de  $P(z)$ , então os recíprocos  $1/z_1, \dots, 1/z_n$  também são os zeros dele; assim

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \prod_{i=1}^n \left( z - \frac{1}{z_i} \right) = z^n a_n \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{1}{z_i z} \right) = (-1)^n z^n a_n \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{z_i z} - 1 \right) \\ &= \frac{(-1)^n z^n}{z_1 z_2 \cdots z_n} a_n \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{z} - z_i \right) = \frac{(-1)^n z^n}{z_1 z_2 \cdots z_n} P\left(\frac{1}{z}\right) = \omega P^*(z), \end{aligned}$$

onde  $\omega = (-1)^n/(z_1 z_2 \cdots z_n) = a_n/a_0$ . Da Definição 16 deduzimos que se  $P(z)$  é um polinômio auto-recíproco, então todos os seus zeros são não nulos. Logo para cada  $\xi$  zero de  $P(z)$ ,  $1/\xi$  é também seu zero o que implica que  $|z_1 z_2 \cdots z_n| = 1$ , portanto  $|\omega| = 1$ . Similarmente para um polinômio auto-invertível. ■

De (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) podemos ver que os coeficientes de um polinômio auto-conjugado, auto-recíproco e auto-invertível de grau  $n$  satisfazem, respectivamente, as seguintes relações:

$$a_k = \omega \bar{a}_k, \quad a_k = \omega a_{n-k}, \quad a_k = \omega \overline{a_{n-k}}, \quad |\omega| = 1, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (4.5)$$

Note que qualquer polinômio com coeficientes reais é um polinômio auto-conjugado. Para que um polinômio  $P(z)$  seja auto-conjugado, auto-recíproco e auto-invertível ao mesmo tempo é necessário que seus coeficientes sejam reais, o que implica que  $\omega = \pm 1$ . Isso sugere as seguintes definições adicionais:

**Definição 17** Um polinômio auto-recíproco real  $P(z)$  que satisfaça a relação  $P(z) = \omega z^n P(1/z)$  será chamado de polinômio auto-recíproco positivo se  $\omega = 1$  e polinômio auto-recíproco negativo se  $\omega = -1$ .

Se considerarmos um polinômio auto-recíproco positivo  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  de grau  $n$ , então por (4.5) os coeficientes satisfazem  $a_k = a_{n-k}$  para  $0 \leq k \leq n$ , enquanto os coeficientes de um polinômio de auto-recíproco negativo satisfazem  $a_k = -a_{n-k}$  para  $0 \leq k \leq n$ .

Algumas propriedades elementares dos polinômios auto-recíprocos positivos e negativos são as seguintes:

- (a) Se  $\xi$  é um zero de qualquer polinômio  $P(z)$  auto-recíproco positivo ou auto-recíproco negativo de grau  $n \geq 4$ , então  $1/\xi$ ,  $\bar{\xi}$  e  $1/\bar{\xi}$  são também zeros de  $P(z)$ . Em particular, o número de zeros desses polinômios que não estão em  $S$  ou em  $\mathbb{R}$  é sempre um múltiplo de 4.
- (b) Qualquer polinômio auto-recíproco negativo tem  $z = 1$  como zero e  $P(z)/(z-1)$  é auto-recíproco positivo. Além disso, se  $P(z)$  tiver grau par, então  $z = -1$  também é um zero dele e  $P(z)/(z^2-1)$  é um polinômio auto-recíproco positivo de grau par. De fato, pela Definição 17, temos

$$P(z) = \omega z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = -z^n P\left(\frac{1}{z}\right).$$

Substituindo  $z = 1$  temos,  $P(1) = -P(1)$  e portanto  $P(1) = 0$ . Similarmente se  $n$  for par  $P(-1) = 0$ . Para mostrar que  $P(z)/(z-1)$  e  $P(z)/(z^2-1)$  são auto-recíprocos positivos, fazemos  $G(z) = P(z)/(z-1)$  e  $R(z) = P(z)/(z^2-1)$ . Assim,

$$G(z) = \frac{P(z)}{z-1} = \frac{-z^n P(1/z)}{-z\left(\frac{1}{z}-1\right)} = z^{n-1} \frac{P\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}-1} = z^{n-1} G\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$R(z) = \frac{P(z)}{z^2-1} = \frac{-z^n P(1/z)}{-z^2\left(\frac{1}{z^2}-1\right)} = z^{n-2} \frac{P(1/z)}{\frac{1}{z^2}-1} = z^{n-2} R\left(\frac{1}{z}\right).$$

- (c) Qualquer polinômio auto-recíproco positivo  $P(z)$  de grau ímpar tem  $z = -1$  como zero e  $P(z)/(z+1)$  também é auto-recíproco positivo.
- (d) O produto de dois polinômios auto-recíprocos positivos, ou dois auto-recíprocos negativos, é auto-recíproco positivo enquanto o produto de um polinômio auto-recíproco positivo com um polinômio auto-recíproco negativo é auto-recíproco negativo.

Por outro lado, qualquer polinômio auto-recíproco positivo de grau par  $n = 2m$ , pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P(z) &= a_{2m} z^{2m} + a_{2m-1} z^{2m-1} + \dots + a_1 z + a_0 \\ &= z^m [a_{2m} z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}] \\ &= z^m \left[ a_0 \left( z^m + \frac{1}{z^m} \right) + a_1 \left( z^{m-1} + \frac{1}{z^{m-1}} \right) + \dots + a_{m-1} \left( z + \frac{1}{z} \right) + a_m \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde essa última igualdade ocorre desde que  $a_k = a_{n-k}$ , para  $0 \leq k \leq 2m$ .

A expressão obtida em (4.6) é muito importante pois facilitará muito a construção de alguns tipos de polinômios auto-recíprocos. Estudaremos essa expressão em mais detalhes no próximo capítulo.

## 4.2 Relação entre polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-invertíveis

A relação mais simples é dada pelos polinômios auto-recíprocos e auto-invertíveis, pois por (4.2) e (4.3) temos

$$P^\dagger(z) = \overline{P^*(z)} = \overline{P^*(\bar{z})}, \quad P^*(z) = \overline{P^\dagger(z)} = \overline{P^\dagger(\bar{z})}.$$

Portanto, se  $P(z)$  é um polinômio auto-recíproco então  $\bar{P}(z)$  será um polinômio auto-invertível, ou vice-versa.

A relação entre os polinômios auto-conjugados e auto-invertíveis não é tão simples de perceber. Para ver a relação entre esses polinômios usaremos as seguintes transformações de Möbius:

$$M(z) = \frac{z-i}{z+i} \quad \text{e} \quad W(z) = \frac{-i(z+1)}{z-1}.$$

Dado um polinômio  $P(z)$  de grau  $n$ , usamos transformações de Möbius definidas acima para definir os dois polinômios transformados como

$$Q(z) = (z+i)^n P(M(z)), \quad \text{e} \quad T(z) = (z-1)^n P(W(z)).$$

O seguinte teorema mostra como os zeros de  $Q(z)$  e  $T(z)$  estão relacionados com os zeros de  $P(z)$ .

**Teorema 29** *Sejam  $z_1, \dots, z_n$  os zeros de  $P(z)$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os respectivos zeros de  $Q(z)$ . Assumindo que  $P(1) \neq 0$ , temos que  $\lambda_1 = W(z_1), \dots, \lambda_n = W(z_n)$ . Similarmente, se  $\tau_1, \dots, \tau_n$  são os zeros de  $T(z)$ , então  $\tau_1 = T(z_1), \dots, \tau_n = T(z_n)$ , assumindo que  $P(-i) \neq 0$ .*

O seguinte teorema mostra que o conjunto de polinômios auto-invertíveis é isomorfo ao conjunto de polinômios auto-conjugados.

**Teorema 30** *Seja  $P(z)$  um polinômio auto-invertível. Então, o polinômio transformado  $Q(z) = (z+i)^n P(M(z))$  é um polinômio auto-conjugado. Da mesma forma, se  $P(z)$  é um polinômio auto-conjugado, então  $T(z) = (z-1)^n P(W(z))$  será um polinômio auto-invertível.*

**Demonstração.** Suponhamos que  $P(z)$  é um polinômio auto-invertível. Então, para qualquer  $\xi$  zero de  $P(z)$  temos que  $1/\bar{\xi}$  também é um zero de  $P(z)$ . Logo, pelo teorema anterior, os correspondentes zeros de  $Q(z)$  serão:

$$W(\xi) = -i \frac{\xi+1}{\xi-1} = \lambda \quad \text{e} \quad W\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right) = -i \frac{1/\bar{\xi}+1}{1/\bar{\xi}-1} = i \frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}-1} = \overline{W(\xi)} = \bar{\lambda}.$$

Pela Definição 16,  $Q(z)$  é um polinômio auto-conjugado. Inversamente, seja  $P(z)$  um polinômio auto-conjugado e tomamos dois de seus zeros  $\xi$  e  $\bar{\xi}$ ; pelo teorema anterior, os correspondentes zeros de  $T(z)$  serão:

$$T(\xi) = \frac{\xi-i}{\xi+i} = \tau \quad \text{e} \quad T(\bar{\xi}) = \frac{\bar{\xi}-i}{\bar{\xi}+1} = -\frac{1/\bar{\xi}+i}{1/\bar{\xi}-i} = \frac{1}{T(\xi)} = \frac{1}{\bar{\tau}}.$$

Assim, pela Definição 16,  $T(z)$  é um polinômio auto-invertível. ■



## Alguns tipos de polinômios auto-recíprocos

O objetivo deste capítulo é construir, a partir dos polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem um e dois, algumas classes de polinômios auto-recíprocos. Desta forma, através de resultados conhecidos sobre o comportamento dos zeros dos polinômios quase-ortogonais, será possível explorar o comportamento dos zeros destas classes de polinômios auto-recíprocos. Mais detalhes em [7, 8].

### 5.1 Introdução

Seja  $P(z) = \sum_{j=0}^{2n} a_j z^j$ ,  $a_{2n} \neq 0$  um polinômio auto-recíproco de grau  $2n$ , onde  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, \dots, 2n$ .

Observe que, como  $a_{2n-j} = a_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , temos

$$P(z) = \sum_{j=0}^{2n} z^n \left[ a_{2n} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right) + \dots + a_{n+1} \left( z + \frac{1}{z} \right) + a_n \right]. \quad (5.1)$$

Através da transformação

$$x = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad (5.2)$$

temos que  $T_j(x) = \frac{1}{2} \left( z^j + \frac{1}{z^j} \right)$ , onde  $T_j(x)$  é o polinômio de Chebyshev de primeira espécie, para mais detalhes dessa transformação, veja [18]. Mostremos por indução sobre  $j$ :

- Se  $j = 0$ ,  $T_0(x) = \frac{1}{2} \left( z^0 + \frac{1}{z^0} \right) = 1$ .
- Suponhamos que é válido para todo  $k \leq j$ , ou seja

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \left( z^k + \frac{1}{z^k} \right), \quad (5.3)$$

e mostremos que vale para todo  $k > j$ . Tomando  $j = k + 1$  temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}} \right) &= \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \left( z^k + \frac{1}{z^k} \right) - \frac{1}{2} \left( z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} \right) \\ &= 2 \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \frac{1}{2} \left( z^k + \frac{1}{z^k} \right) - \frac{1}{2} \left( z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} \right) \\ &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \end{aligned}$$

que é a relação de recorrência de três termos satisfeita pelos polinômios de Chebyshev, ou seja,

$$\frac{1}{2} \left( z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}} \right) = T_{k+1}(x).$$

Logo, reescrevendo (5.1) segue que

$$P(z) = 2z^n \left[ a_{2n}T_n(x) + a_{2n-1}T_{n-1}(x) + \cdots + a_{n+1}T_1(x) + \frac{a_n}{2}T_0(x) \right] = 2z^n C_n(x), \quad (5.4)$$

onde  $C(x) = a_{2n}T_n(x) + a_{2n-1}T_{n-1}(x) + \cdots + a_{n+1}T_1(x) + \frac{a_n}{2}T_0(x)$ .

**Teorema 31** *Seja  $P(z)$  um polinômio auto-recíproco real de grau  $2n$ .*

1.  $P(z)$  têm todos seus zeros no círculo unitário se, e somente se,  $C_n(x)$  têm todos seus zeros em  $[-1, 1]$ .
2. Se todos os zeros de  $C_n(x)$  estão em  $[-1, 1]$ , escritos como  $x_j = \cos\theta_j$ ,  $\theta_j \in [0, \pi]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , então todos os zeros  $z_k$  de  $P(z)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , são dados por  $z_k = e^{\pm i\theta_k}$ , onde

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_n \leq \pi.$$

**Demonstração.** Da equação (5.2) temos que

$$z^2 + 1 = 2xz, \quad (5.5)$$

$$z^j + \frac{1}{z_j} = 2x_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.6)$$

1. Suponhamos que  $P(z)$  têm todos seus zeros no círculo unitário. Como  $P(z)$  é um polinômio auto-recíproco real de grau  $2n$  temos que seus zeros são dados da seguinte forma:  $(z_j, \bar{z}_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , onde  $\bar{z}_j = \frac{1}{z_j}$  e  $|z_j|^2 = z_j \bar{z}_j = 1$ .

Assim,

$$\begin{aligned} P(z) &= a_{2n} \prod_{j=1}^n (z - z_j)(z - \bar{z}_j) \\ &= a_{2n} \prod_{j=1}^n (z^2 - z(z_j + \bar{z}_j) + 1). \end{aligned}$$

Substituindo (5.5) e (5.6) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} P(z) &= a_{2n} \prod_{j=1}^n (2xz - 2x_j z) \\ &= a_{2n} 2^n z^n \prod_{j=1}^n (x - x_j). \end{aligned}$$

Comparando com a equação (5.4), temos que

$$C_n(x) = 2^{n-1} a_{2n} \prod_{j=1}^n (x - x_j),$$

ou seja  $x_j, j = 1, \dots, n$ , são os zeros de  $C_n(x)$ .

Além disso,

$$x_j = \frac{1}{2} \left( z_j + \frac{1}{z_j} \right) = \operatorname{Re}(z_j).$$

Logo,

$$|x_j| = |\operatorname{Re}(z_j)| \leq |z_j| = 1,$$

$j = 1, \dots, n$ . Portanto, todos os zeros de  $C_n(x)$  estão em  $[-1, 1]$ .

Suponhamos que  $C_n(x)$  têm todos seus zeros em  $[-1, 1]$ . Por (5.4) temos que

$$\begin{aligned} P(z) &= 2z^n C_n(x) = 2z^n 2^{n-1} a_{2n} \prod_{j=1}^n (x - x_j) \\ &= a_{2n} \prod_{j=1}^n (2zx - 2x_j z) \\ &= a_{2n} \prod_{j=1}^n (z - z_j)(z - \bar{z}_j), \end{aligned}$$

onde  $\bar{z}_j = \frac{1}{z_j}, j = 1, \dots, n$ .

Além disso, por (5.6),

$$z_j^2 - 2x_j z_j + 1 = 0 \Leftrightarrow z_j = x_j \pm \left( \sqrt{1 - x_j^2} \right) i,$$

e assim,

$$|z_j|^2 = z_j \bar{z}_j = x_j^2 + (1 - x_j^2) = 1.$$

Portanto,  $|z_j| = 1, j = 1, \dots, n$ .

2. Suponhamos que todos os zeros de  $C_n(x)$  estão em  $[-1, 1]$ , escritos como  $x_j = \cos \theta_j, \theta_j \in [-1, 1], j = 1, \dots, n$ . Então pelo item anterior, todos os zeros  $z_j$  de  $P(z)$  estão no círculo unitário, assim podemos escrever  $z_j = e^{\pm i \gamma_j}$ . Logo, como  $x_j = \frac{1}{2} \left( z_j + \frac{1}{z_j} \right)$  temos

$$x_j = \frac{1}{2} (e^{\pm i \gamma_j} + e^{\mp i \gamma_j}) = \cos \gamma_j,$$

consequentemente,  $\theta_j = \gamma_j, j = 1, \dots, n$ .

■

## 5.2 Polinômios auto-recíprocos gerados pelos polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem um

Nesta seção vamos construir polinômios auto-recíprocos a partir dos polinômios quase-ortogonais de ordem um, estudados na Seção 2.5. Também estes polinômios quase-ortogonais podem ser encontrados em [10].

**Teorema 32** *Os polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem um geram a seguinte classe de polinômios auto recíprocos:*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{2n} a_{j,\alpha} z^j,$$

onde  $\alpha = T, U, V, W$  (relacionado com cada classe de polinômios de Chebyshev) e

1.  $a_{2n-2,T} = a_{2n-3,T} = \dots = a_{n,T} = 0$  e  $a_{2n,T} a_{2n-1,T} \neq 0$ ;
2.  $a_{2n,U} = a_{2n-2,U} = \dots = a_{n-2,U} = a_{n,U} \neq 0$  e  $a_{2n-1,U} = a_{2n-3,U} = \dots = a_{n+1,U} \neq 0$ ;
3.  $a_{2n-1,V} = -a_{2n-2,V} = a_{2n-3,V} = \dots = (-1)^n a_{n+1,V} = (-1)^{n-1} a_{n,V}$ ,  $a_{2n,V} \neq 0$  e  $a_{2n,V} \neq -a_{2n-1,V}$ ;
4.  $a_{2n-1,W} = a_{2n-1,W} = \dots = a_{n,W}$ ,  $a_{2n,W} \neq 0$  e  $a_{2n,W} \neq a_{2n-1,W}$ .

**Demonstração.** Consideremos o polinômio quase-ortogonal de Chebyshev de primeira espécie de ordem um, como no Teorema 12:

$$R_{n,T}(x) = c_{0,T} T_n(x) + c_{1,T} T_{n-1}(x), \quad (5.7)$$

onde  $c_{0,T} c_{1,T} \neq 0$ . Comparando com o polinômio  $C_n(x)$  de (5.4), obtemos  $c_{0,T} = a_{2n,T}$ ,  $c_{1,T} = a_{2n-1,T}$  e  $a_{2n-2,T} = a_{2n-3,T} = \dots = a_{n,T} = 0$ . Assim, o polinômio auto-recíproco será

$$P_T(z) = a_{2n,T} z^{2n} + a_{2n-1,T} z^{2n-1} + a_{2n-1,T} z + a_{2n,T}.$$

Neste caso, os elementos do Teorema 14, a partir de (5.7), serão

$$\varsigma_n = \varsigma_T = \frac{a_{2n-1,T}}{a_{2n,T}}$$

e

$$f_n(1) = f_{n,T}(1) = \frac{T_n(1)}{T_{n-1}(1)} = 1,$$

pois se  $x = 1$ , por (5.2) temos que  $1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \Leftrightarrow z = 1$ . Assim, como  $T_n(x) = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})$  segue que  $T_n(1) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Similarmente,  $f_n(-1) = f_{n,T}(-1) = -1$ .

Para obter a representação de  $P_U(z)$ ,  $P_V(z)$  e  $P_W(z)$ , utilizaremos os polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem um:

$$R_{n,U}(x) = c_{0,U} U_n(x) + c_{1,U} U_{n-1}(x), \quad (5.8)$$

$$R_{n,V}(x) = c_{0,V} V_n(x) + c_{1,V} V_{n-1}(x), \quad (5.9)$$

$$R_{n,W}(x) = c_{0,W} W_n(x) + c_{1,W} W_{n-1}(x), \quad (5.10)$$

onde  $c_{0,\alpha} c_{1,\alpha} \neq 0$  para  $\alpha = U, V, W$ .

Usando a relação  $2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x)$  podemos reescrever (5.8) da seguinte forma

$$\begin{aligned} R_{n,U}(x) &= c_{0,U}(2T_n(x) + u_{n-2}(x)) + c_{1,U}(2T_{n-1}(x) + U_{n-3}(x)) \\ &= c_{0,U}(2T_n(x) + 2T_{n-2}(x) + \cdots + 2T_2(x) + T_0(x)) \\ &\quad + c_{1,U}(2T_{n-1}(x) + 2T_{n-3}(x) + \cdots + 2T_3(x) + 2T_1(x)). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de (5.4) com  $P_U(z) = 2z^n R_{n,U}(x)$  temos que

$$2c_{0,U} = a_{2n,U} = a_{2n-2,U} = \cdots = a_{n+2,U} = a_{n,U}$$

e

$$2c_{1,U} = a_{2n-1,U} = a_{2n-3,U} = \cdots = a_{n+1,U}.$$

Assim, obtemos

$$P_U(z) = a_{2n,U}z^{2n} + a_{2n-1,U}z^{2n-1} + a_{2n,U}z^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1,U}z + a_{2n,U}.$$

A partir de (5.8) também podemos obter os elementos do Teorema 14, que serão

$$\varsigma_n = \varsigma_U = \frac{a_{2n-1,U}}{a_{2n,U}}$$

e

$$\begin{aligned} f_n(1) = f_{n,U}(1) &= \frac{U_n(1)}{U_{n-1}(1)} = \frac{2T_n(1) + 2T_{n-2}(1) + \cdots + 2T_2(1) + T_0(1)}{2T_{n-1}(1) + 2T_{n-3}(1) + \cdots + 2T_3(1) + 2T_1(1)} \\ &= \frac{2 + 2 + \cdots + 2 + 1}{2 + 2 + \cdots + 2} = \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Similarmente,  $f_n(-1) = f_{n,U}(-1) = -\frac{n+1}{n}$ .

Seguindo a mesma ideia e usando a equação (5.9) e a relação  $2T_n(x) = V_n(x) + V_{n-1}(x)$ , obtemos

$$P_V(z) = a_{2n,V}z^{2n} + a_{2n-1,V}z^{2n-1} - a_{2n-1,V}z^{2n-2} + a_{2n-1,V}z^{2n-3} + \cdots - a_{2n-1,V}z^2 + a_{2n-1,V}z + a_{2n,V},$$

onde os elementos do Teorema 14, a partir de (5.9), serão  $\varsigma_n = \varsigma_V = \left(\frac{a_{2n-1,V}}{a_{2n,V}} + 1\right)$ ,

$$f_n(1) = f_{n,V}(1) = 1 \text{ e } f_n(-1) = f_{n,V}(-1) = -\frac{2n+1}{2n-1}.$$

Finalmente, usando a equação (5.10) e a relação  $2T_n(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x)$ , obtemos

$$P_W(z) = a_{2n,W}z^{2n} + a_{2n-1,W}z^{2n-1} + a_{2n-1,W}z^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1,W}z^2 + a_{2n-1,W}z + a_{2n,W},$$

onde os elementos do Teorema 14, a partir de (5.10), serão  $\varsigma_n = \varsigma_W = -1 + \frac{a_{2n-1,W}}{a_{2n,W}}$ ,

$$f_n(1) = f_{n,W}(1) = \frac{2n+1}{2n-1} \text{ e } f_n(-1) = f_{n,W}(-1) = -1.$$

■

**Observação 1** Se  $a_{2n,V} = -a_{2n-1,V}$  no item 3 ou  $a_{2n,W} = a_{2n-1,W}$  no item 4 do Teorema 32, temos polinômios cujos coeficientes satisfazem as condições do item 2 do Teorema 32.

**Teorema 33** Quando o grau de um polinômio auto-recíproco real  $S(z)$  é ímpar, temos

$$S(z) = b_{2n+1}z^{2n+1} + b_{2n}z^{2n} + \cdots + b_1z + b_0 = b_{2n+1}(z+1)P(z),$$

onde  $P(z)$  é um polinômio auto-recíproco real de grau  $2n$ .

**Demonstração.** Sem perda de generalidade suponhamos que  $b_{2n+1} = 1$ . Logo, como  $S(z)$  é um polinômio auto-recíproco real de grau ímpar temos que  $z = -1$  é um zero dele pois pela Definição 17, temos

$$S(z) = z^{2n+1} S\left(\frac{1}{z}\right),$$

e substituindo  $z = -1$  temos,  $S(-1) = -S(-1)$  e portanto  $S(-1) = 0$ . Para mostrar que  $S(z)/(z+1)$  é um polinômio auto-recíproco real de grau par, fazemos  $P(z) = S(z)/(z+1)$ . Assim,

$$P(z) = \frac{S(z)}{z+1} = \frac{z^{2n+1} S(1/z)}{z\left(\frac{1}{z}+1\right)} = z^{2n} \frac{S\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}+1} = z^{2n} P\left(\frac{1}{z}\right).$$

Portanto,  $S(z) = b_{2n+1}(z+1)P(z)$ , onde  $P(z)$  é um polinômio auto-recíproco de grau par. ■

Consideremos

$$S_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_{j,\alpha} z^j = b_{2n+1,\alpha}(z+1)P_\alpha(z),$$

onde  $\alpha = T, U, V, W$ . Vamos calcular as expressões dos coeficientes de  $S_\alpha(z)$  a partir do Teorema 32:

1. Para  $\alpha = T$  temos que  $S_T(z) = b_{2n+1,T}(z+1)P_T(z)$ , assim pelo Teorema 32 temos que

$$\begin{aligned} S_T(z) &= b_{2n+1,T}(zP_T(z) + P_T(z)) \\ &= b_{2n+1,T} (a_{2n,T}z^{2n+1} + (a_{2n,T} + a_{2n-1,T})z^{2n} + a_{2n-1,T}z^{2n-1} + a_{2n-1,T}z^2 \\ &\quad + (a_{2n,T} + a_{2n-1,T})z + a_{2n,T}). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes da igualdade temos  $b_{2n-2,T} = b_{2n-3,T} = \dots = b_{n+1,T} = 0$ ,  $b_{2n+1,T}b_{2n-1,T} \neq 0$  e  $b_{2n,T} = b_{2n+1,T} + b_{2n-1,T}$ , ou seja

$$\begin{aligned} S_T(z) &= b_{2n+1,T}z^{2n+1} + (b_{2n+1,T} + b_{2n-1,T})z^{2n} + b_{2n-1,T}z^{2n-1} + b_{2n-1,T}z^2 \\ &\quad + (b_{2n+1,T} + b_{2n-1,T})z + b_{2n+1,T}. \end{aligned}$$

2. Para  $\alpha = U$  temos

$$\begin{aligned} S_U(z) &= b_{2n+1,U}(zP_U(z) + P_U(z)) \\ &= b_{2n+1,U} (a_{2n,U}z^{2n+1} + (a_{2n,U} + a_{2n-1,U})z^{2n} + (a_{2n,U} + a_{2n-1,U})z^{2n-1} + \dots \\ &\quad + (a_{2n,U} + a_{2n-1,U})z + a_{2n,U}). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes da igualdade obtemos  $b_{2n,U} = b_{2n-1,U} = \dots = b_{n+1,U}$  e  $b_{2n+1,U} \neq 0$ , ou seja,

$$S_U(z) = b_{2n+1,U}z^{2n+1} + b_{2n,U} \sum_{j=0}^{2n-1} z^{2n-j} + b_{2n+1,U}.$$

3. Para  $\alpha = V$  temos

$$\begin{aligned} S_V(z) &= b_{2n+1,V}(zP_V(z) + P_V(z)) \\ &= b_{2n+1,V} (a_{2n,V}z^{2n+1} + (a_{2n,V} + a_{2n-1,V})z^{2n} + (a_{2n,V} + a_{2n-1,V})z + a_{2n,V}). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes da igualdade obtemos  $b_{2n-1,V} = b_{2n-2,V} = b_{2n-3,V} = \dots = b_{n+1,V} = 0$  e  $b_{2n+1,V}b_{2n,V} \neq 0$ , ou seja,

$$S_V(z) = b_{2n+1,V}z^{2n+1} + b_{2n,V}z^{2n} + b_{2n,V}z + b_{2n+1,V}.$$

4. Para  $\alpha = W$ , da mesma forma que nos casos anteriores, temos

$b_{2n-1,W} = b_{2n-2,W} = \dots = b_{n+1,W}$ ,  $b_{2n+1,W}b_{2n-1,W} \neq 0$  e  $b_{2n,W} = b_{2n+1,W} + \frac{b_{2n-1,W}}{2}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} S_W(z) &= b_{2n+1,W}z^{2n+1} + \left( b_{2n+1,W} + \frac{b_{2n-1,W}}{2} \right) z^{2n} + b_{2n-1,W} \sum_{j=0}^{2n-3} z^{2n-1-j} \\ &\quad + \left( b_{2n+1,W} + \frac{b_{2n-1,W}}{2} \right) z + b_{2n+1,W}. \end{aligned}$$

O teorema a seguir mostra o comportamento dos zeros de alguns polinômios auto-recíprocos construídos a partir de polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem um.

**Teorema 34** *Sobre os zeros de  $P_\alpha(z)$  e  $S_\alpha(z)$  ( $\alpha = T, U, V, W$ ), temos:*

- (a) *Seus zeros são distintos (exceto no caso em que  $\varsigma_\alpha = -f_{n,\alpha}(1)$  ou  $\varsigma_\alpha = -f_{n,\alpha}(-1)$ ) e no máximo dois deles estão fora do círculo unitário (que são as raízes reais).*
- (b) *Se  $\varsigma_\alpha = -f_{n,\alpha}(\pm 1)$ ,  $z = \pm 1$  é zero de multiplicidade dois de  $P_\alpha(z)$ . Para  $\varsigma_\alpha = -f_{n,\alpha}(1)$ ,  $z = 1$  é zero de multiplicidade dois de  $S_\alpha(z)$  e se  $\varsigma_\alpha = -f_{n,\alpha}(-1)$ ,  $z = -1$  é zero de multiplicidade três de  $S_\alpha(z)$ .*
- (c) *Se  $-\varsigma_\alpha < f_{n,\alpha}(-1) < 0$ ,  $P_\alpha(z)$  (ou  $S_\alpha(z)$ ) tem dois zeros negativos e  $2n - 2$  (ou  $2n - 1$ ) zeros distintos no círculo unitário. Podemos representar os zeros negativos por  $z_{k,\alpha} \in (-\infty, -1)$  e  $1/z_{k,\alpha} \in (-1, 0)$ .*
- (d) *Se  $-\varsigma_\alpha > f_{n,\alpha}(1) > 0$ ,  $P_\alpha(z)$  (ou  $S_\alpha(z)$ ) tem dois zeros positivos e  $2n - 2$  (ou  $2n - 1$ ) zeros distintos no círculo unitário. Podemos representar os zeros positivos por  $z_{k,\alpha} \in (1, \infty)$  e  $1/z_{k,\alpha} \in (0, 1)$ .*
- (e) *Se  $f_{n,\alpha}(-1) < -\varsigma_\alpha < f_n(1)$ ,  $P_\alpha(z)$  e  $S_\alpha(z)$  têm todos seus zeros no círculo unitário. Eles são representados por  $z_{k,\alpha} = e^{\pm i\theta_{k,\alpha}}$ , com  $\theta_{k,\alpha} = \arccos x_{k,\alpha}$ , onde  $x_{k,\alpha}$ ,  $k = 1, \dots, n$  são os zeros de  $R_{n,\alpha}(x)$  (para  $S_\alpha(z)$ , temos  $x_{n+1,\alpha} = -1$  e  $\theta_{n+1,\alpha} = \arccos(-1) = \pi$ ). Além disso,*

$$0 \leq \theta_{1,\alpha} \leq \theta_{2,\alpha} \leq \dots \leq \theta_{n,\alpha} \leq \pi,$$

$\theta_{n+1,\alpha} = \pi$  (caso ímpar) e  $\theta_{j,\alpha}$   $j = 1, \dots, n$  são funções crescentes de  $a_\alpha$ .

**Demonstração.** Sejam  $x_{1,\alpha} < x_{2,\alpha} < \dots < x_{n,\alpha}$  os zeros de  $R_{n,\alpha}(x)$ .

(a) Como  $P_\alpha(z) = 2z^n R_{n,\alpha}(x)$  temos

$$P_\alpha(z) = 0 \Leftrightarrow R_{n,\alpha}(x) = 0, \quad (5.11)$$

e sendo  $R_{n,\alpha}(x)$  um polinômio quase-ortogonal de ordem um, pelo Teorema 14 segue que todos seus zeros são distintos e no máximo um deles está fora de  $(-1, 1)$ , digamos  $x_{n,\alpha}$ . Assim, pela equação (5.2) temos

$$x_{n,\alpha} = \frac{1}{2} \left( z_{n,\alpha} + \frac{1}{z_{n,\alpha}} \right),$$

então,  $2 < |2x_{n,\alpha}| \leq 2|z_{n,\alpha}|$ . Consequentemente,  $1/|z_{n,\alpha}| < 1$  e portanto no máximo dois zeros de  $P_\alpha(z)$  estão fora do círculo unitário.

(b) Por (5.11) temos que  $0 = R_{n,\alpha}(x) = c_{0,\alpha}Q_{\alpha,n}(x) + c_{1,\alpha}Q_{\alpha,n-1}(x)$ , onde  $Q_{\alpha,n} = T_n, U_n, V_n, W_n$  são os polinômios de Chebyshev. Assim,

$$\varsigma_\alpha = \frac{c_{1,\alpha}}{c_{0,\alpha}} = -\frac{Q_{\alpha,n}(x)}{Q_{\alpha,n-1}(x)} = -f_{n,\alpha}(x),$$

então, se  $x = 1$ , por (5.2) segue que  $(z - 1)^2 = 0$ , ou seja  $z = 1$  é um zero de multiplicidade dois de  $P_\alpha(z)$  quando  $\varsigma_\alpha = -f_{n,\alpha}(1)$ . Similarmente, se  $\varsigma_\alpha = -f_{n,\alpha}(-1)$ ,  $z = -1$  é um zero de multiplicidade dois de  $P_\alpha(z)$ . Para o polinômio  $S_\alpha(z)$  é similar aos casos anteriores, pois  $S_\alpha(z) = b_{2n+1,\alpha}(z + 1)P_\alpha(z)$ .

(c) Se  $-\varsigma_\alpha < f_{n,\alpha}(-1) < 0$ , pelo Teorema 14 temos que  $x_{1,\alpha} < -1$  e assim pelo Teorema 31, o correspondente zero  $z_{1,\alpha}$  de  $P_\alpha(z)$  não está no círculo unitário.

Como

$$x_{1,\alpha} = \frac{1}{2} \left( z_{1,\alpha} + \frac{1}{z_{1,\alpha}} \right),$$

segue que  $z_{1,\alpha}$  é real, portanto  $z_{1,\alpha} \in (-\infty, -1)$  e  $1/z_{1,\alpha} \in (-1, 0)$ , pois

$$\frac{1}{2} \left( z_{1,\alpha} + \frac{1}{z_{1,\alpha}} \right) < -1.$$

(d) A demonstração é semelhante ao caso anterior.

(e) Suponhamos que  $f_{n,\alpha}(-1) < -\varsigma_\alpha < f_n(1)$ . Pelo Teorema 14 temos que  $-1 < x_{1,\alpha} < x_{2,\alpha} < \dots < x_{n,\alpha} < 1$ . Logo, pelo Teorema 31, todos os correspondentes zeros de  $P_\alpha(z)$  estão no círculo unitário.

■

**Exemplo 6** Consideremos o seguinte polinômio auto-recíproco  $P_T(z) = 4z^6 + 3z^5 + 3z + 4$ , gerado por um polinômio quase-ortogonal de ordem um  $R_{3,T}(x)$ . Os elementos do Teorema 14 são  $\varsigma_T = \frac{3}{4}$ ,  $f_{3,T}(1) = 1$  e  $f_{3,T}(-1) = -1$ , assim como  $-1 < -\frac{3}{4} < 1$ , pelo teorema anterior segue que todos seus zeros estão no círculo unitário, como podemos ver na Figura 5.1.

**Exemplo 7** Consideremos o polinômio  $P_T(z) = z^8 + 2z^7 + 2z + 1$  que é um polinômio auto-recíproco construído a partir do polinômio quase-ortogonal de ordem um  $R_{4,T}(x)$ , onde os elementos do Teorema 14 são  $\varsigma_T = 2$ ,  $f_{4,T}(1) = 1$  e  $f_{4,T}(-1) = -1$ . Logo, como  $-2 < -1 = f_{4,T}(-1) < 0$  pelo teorema anterior segue que tem dois zeros fora do círculo unitário, que são negativos, como podemos ver na Figura 5.2.

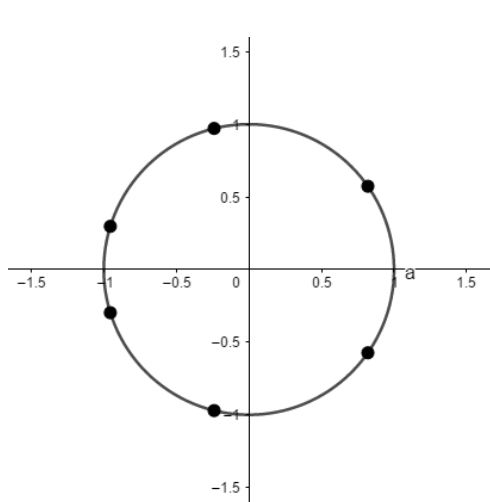


Figura 5.1: Zeros do polinômio  $P_T(z) = 4z^6 + 3z^5 + 3z + 4$ .

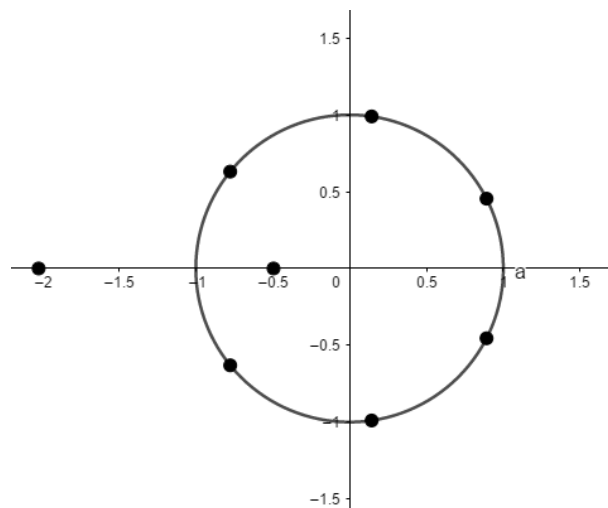


Figura 5.2: Zeros do polinômio  $P_T(z) = z^8 + 2z^7 + 2z + 1$ .

**Exemplo 8** Consideremos o seguinte polinômio auto-recíproco gerado por um polinômio quase ortogonal de Chebyshev  $R_{6,U}(x)$  de ordem 1:

$$P_U(z) = 2 \sum_{k=0}^6 z^{2k} + \lambda \sum_{k=0}^5 z^{2k+1}.$$

Na figura 5.3, podemos observar como é o comportamento dos zeros de  $P_U(z)$  quando  $\lambda$  assume diferentes valores em  $[-5, 5]$ .

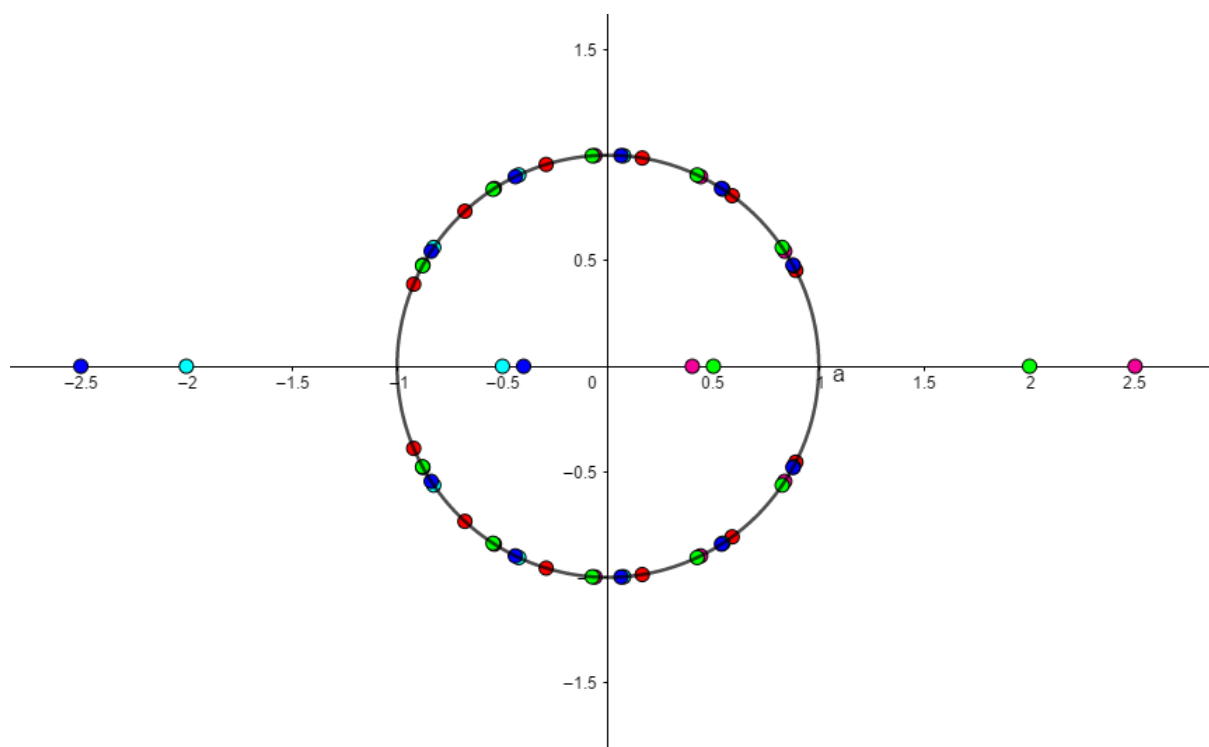


Figura 5.3: Zeros de  $P_U(z) = 2 \sum_{k=0}^6 z^{2k} + \lambda \sum_{k=0}^5 z^{2k+1}$  para diferentes valores de  $\lambda \in [-5, 5]$ .

### 5.3 Polinômios auto-recíprocos gerados pelos polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem dois

Nesta seção vamos construir polinômios auto-recíprocos a partir dos polinômios quase-ortogonais de ordem dois e assim estudaremos o comportamento de seus zeros. Para isso usaremos resultados já conhecidos sobre o comportamento de zeros de polinômios quase-ortogonais estudados na Seção 2.5.

**Teorema 35** *Os polinômios quase-ortogonais de Chebyshev de ordem dois geram a seguinte classe de polinômios auto-recíprocos*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{2n} a_{j,\alpha} z^j,$$

onde  $\alpha = T, U, V, W$  (são os polinômios de Chebyshev) e

1.  $a_{2n-3,T} = a_{2n-4,T} = \dots = a_{n,T} = 0$  e  $a_{2n,T} a_{2n-2,T} \neq 0$ ;
2.  $a_{2n-2,U} = a_{2n-4,U} = \dots = a_{n+2,U} = a_{n,U} \neq 0$ ,  $a_{2n-1,U} = a_{2n-3,U} = \dots = a_{n+1,U}$  e  $a_{2n,U} \neq a_{2n-2,U}$ ;
3.  $a_{2n-2,V} = -a_{2n-3,V} = a_{2n-4,V} = \dots = (-1)^{n+1} a_{n+1,V} = (-1)^n a_{n,V}$ ,  $a_{2n,V} \neq 0$  e  $a_{2n-2,V} \neq -a_{2n-1,V}$ ;
4.  $a_{2n-2,W} = a_{2n-3,W} = \dots = a_{n+1,W} = a_{n,W}$ ,  $a_{2n,W} \neq 0$  e  $a_{2n-2,W} \neq a_{2n-1,W}$ .

**Demonstração.** Consideremos o polinômio quase-ortogonal de Chebyshev de ordem dois

$$R_{n,T}(x) = c_{0,T} T_n(x) + c_{1,T} T_{n-1}(x) + c_{2,T} T_{n-2}(x), \quad (5.12)$$

onde  $c_{0,T} c_{2,T} \neq 0$ . Comparando com o polinômio  $C_n(x)$  de (5.4), obtemos  $c_{0,T} = a_{2n,T}$ ,  $c_{1,T} = a_{2n-1,T}$ ,  $c_{2,T} = a_{2n-2,T}$  e  $a_{2n-3,T} = a_{2n-3,T} = \dots = a_{n,T} = 0$ . Assim, o polinômio auto-recíproco será

$$P_T(z) = a_{2n,T} z^{2n} + a_{2n-1,T} z^{2n-1} + a_{2n-2,T} z^{2n-2} + a_{2n-2,T} z^2 + a_{2n-1,T} z + a_{2n,T},$$

onde os elementos dos Teoremas 15 e 16 são

$$\begin{aligned} \varsigma_n = \varsigma_T &= \frac{a_{2n-1,T}}{a_{2n,T}}, & \phi_n = \phi_T &= \frac{a_{2n-2,T}}{a_{2n,T}}, & f_{n-1}(1) &= f_{n-1,T}(1) = 1, \\ f_{n-1}(-1) &= f_{n-1,T}(-1) = -1 & \text{ e } & f_{n-1}(x_{n,n}^T) &= f_{n-1}(x_{n,n}^T) = \frac{T_{n-1}(x_{n,n}^T)}{T_{n-2}(x_{n,n}^T)}, \end{aligned}$$

onde  $x_{n,n}^T$  é zero de  $T_n(x)$ .

Para obter a representação de  $P_U(z)$ ,  $P_V(z)$  e  $P_W(z)$ , utilizaremos os polinômios quase-ortogonais de Chebyshev ordem dois em relação aos polinômios de Chebyshev de segunda, terceira e quarta espécies, respectivamente,

$$R_{n,U}(x) = c_{0,U} U_n(x) + c_{1,U} U_{n-1}(x) + c_{2,U} U_{n-2}(x), \quad (5.13)$$

$$R_{n,V}(x) = c_{0,V} V_n(x) + c_{1,V} V_{n-1}(x) + c_{2,V} V_{n-2}(x), \quad (5.14)$$

$$R_{n,W}(x) = c_{0,W} W_n(x) + c_{1,W} W_{n-1}(x) + c_{2,W} W_{n-2}(x), \quad (5.15)$$

onde  $c_{0,\alpha} c_{2,\alpha} \neq 0$  para  $\alpha = U, V, W$ .

Usando a relação  $2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x)$  podemos reescrever (5.13) da seguinte forma

$$\begin{aligned} R_{n,U}(x) &= c_{0,U}U_n(x) + c_{1,U}U_{n-1}(x) + c_{2,U}(U_n(x) - 2T_n(x)) \\ &= (c_{0,U} + c_{2,U})U_n(x) + c_{1,U}U_{n-1}(x) - 2c_{2,U}T_n(x) \\ &= (c_{0,U} + c_{2,U})(2T_n(x) + 2T_{n-2}(x) + \cdots + 2T_2(x) + T_0(x)) \\ &\quad + c_{1,U}(2T_{n-1}(x) + 2T_{n-3}(x) + \cdots + 2T_3(x) + 2T_1(x)) - 2c_{2,U}T_n(x). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de (5.4) com  $P_U(z) = 2z^n R_{n,U}(x)$  temos que

$$2c_{0,U} = a_{2n,U}, \quad 2c_{0,U} + 2c_{2,U} = a_{2n-2,U} = a_{2n-4} = \cdots = a_{n+2,U} = a_{n,U}$$

e

$$2c_{1,U} = a_{2n-1,U} = a_{2n-3,U} = \cdots = a_{n+1,U}.$$

Assim, obtemos

$$P_U(z) = a_{2n,U}z^{2n} + a_{2n-1,U}z^{2n-1} + a_{2n-2,U}z^{2n-2} + a_{2n-1,U}z^{2n-3} + \cdots + a_{2n-1,U}z + a_{2n,U}.$$

A partir de (5.13) também podemos obter os elementos dos Teoremas 15 e 16 que serão

$$\begin{aligned} \varsigma_n = \varsigma_U &= \frac{a_{2n-1,U}}{a_{2n,U}}, \quad \phi_n = \phi_U = \frac{a_{2n-2,U}}{a_{2n,U}} - 1, \quad f_{n-1}(1) = f_{n-1,U}(1) = \frac{n}{n-1} \\ f_{n-1}(-1) &= f_{n-1,U}(-1) = -\frac{n}{n-1} \quad \text{e} \quad f_{n-1}(x_{n,n}^U) = f_{n-1,U}(x_{n,n}^U) = \frac{U_{n-1}(x_{n,n}^U)}{U_{n-2}(x_{n,n}^U)}, \end{aligned}$$

onde  $x_{n,n}^U$  é zero de  $U_n(x)$ .

Seguindo a mesma ideia e usando a equação (5.15) e a relação  $2T_n(x) = V_n(x) + V_{n-1}(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_V(z) &= a_{2n,V}z^{2n} + a_{2n-1,V}z^{2n-1} + a_{2n-2,V}z^{2n-2} - a_{2n-2,V}z^{2n-3} + a_{2n-2,V}z^{2n-4} \\ &\quad + \cdots - a_{2n-2,V}z^3 + a_{2n-2,V}z^2 + a_{2n-1,V}z + a_{2n,V}. \end{aligned}$$

Neste caso, os elementos dos Teoremas 15 e 16 a partir de (5.15), serão

$$\begin{aligned} \varsigma_n = \varsigma_V &= \frac{a_{2n-1,V}}{a_{2n,V}} + 1, \quad \phi_n = \phi_V = \frac{a_{2n-2,V} + a_{2n-1,V}}{a_{2n,V}}, \quad f_{n-1}(1) = f_{n-1,V}(1) = 1, \\ f_{n-1}(-1) &= f_{n-1,V}(-1) = -\frac{2n-1}{2n-3} \quad \text{e} \quad f_{n-1}(x_{n,n}^V) = \frac{V_{n-1}(x_{n,n}^V)}{V_{n-2}(x_{n,n}^V)}, \end{aligned}$$

onde  $x_{n,n}^V$  é zero do polinômio  $V_n(x)$ .

Finalmente, usando a equação (5.15) e a relação  $2T_n(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_W(z) &= a_{2n,W}z^{2n} + a_{2n-1,W}z^{2n-1} + a_{2n-2,W}z^{2n-2} + a_{2n-2,W}z^{2n-3} + a_{2n-2,W}z^{2n-4} \\ &\quad + \cdots + a_{2n-2,W}z^3 + a_{2n-2,W}z^2 + a_{2n-1,W}z + a_{2n,W}. \end{aligned}$$

Neste caso, os elementos dos Teoremas 15 e 16, a partir de (5.15), serão

$$\begin{aligned} \varsigma_n = \varsigma_W &= \frac{a_{2n-1,W}}{a_{2n,W}} - 1, \quad \phi_n = \phi_W = \frac{a_{2n-2,W} - a_{2n-1,W}}{a_{2n,W}}, \quad f_{n-1}(1) = f_{n-1,W}(1) = \frac{2n-1}{2n-3}, \\ f_{n-1}(-1) &= f_{n-1,W}(-1) = -1 \quad \text{e} \quad f_{n-1}(x_{n,n}^W) = \frac{W_{n-1}(x_{n,n}^W)}{W_{n-2}(x_{n,n}^W)}, \end{aligned}$$

onde  $x_{n,n}^W$  é zero do polinômio  $W_n(x)$ .

■

Consideremos o polinômio de auto-recíproco de grau ímpar

$$S_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_{j,\alpha} z^j = b_{2n+1,\alpha} (z+1) P_\alpha(z),$$

onde  $\alpha = T, U, V, W$ . As expressões dos coeficientes de  $S_\alpha(z)$  a partir do Teorema 35 são:

1. Para  $\alpha = T$ , temos que  $b_{2n-3,T} = b_{2n-4,T} = \dots = b_{n+1,T} = 0$ ,  $b_{2n+1,T} b_{2n-2,T} \neq 0$  e  $b_{2n,T} = b_{2n+1,T} + b_{2n-1,T} - b_{2n-2,T}$ , assim o polinômio é dado por

$$S_T(z) = b_{2n+1,T} z^{2n+1} + (b_{2n+1,T} + b_{2n-1,T} - b_{2n-2,T}) z^{2n} + b_{2n-1,T} z^{2n-1} + b_{2n-2,T} z^{2n-2} + b_{2n-2,T} z^3 + b_{2n-1,T} z^2 + (b_{2n+1,T} + b_{2n-1,T} - b_{2n-2,T}) z + b_{2n+1,T}.$$

2. Para  $\alpha = U$ , temos que  $b_{2n-1,U} = b_{2n-2,U} = \dots = b_{n+1,U}$  e  $b_{2n+1,U} \neq 0$ , assim o polinômio é dado por

$$S_U(z) = b_{2n+1,U} z^{2n+1} + b_{2n,U} z^{2n} + b_{2n-1,U} \sum_{j=1}^{2n-2} z^{2n-j} + b_{2n,U} z + b_{2n+1,U}.$$

3. Para  $\alpha = V$ , temos que  $b_{2n-2,V} = b_{2n-3,V} = b_{2n-4,V} = \dots = b_{n+1,V} = 0$  e  $b_{2n+1,V} b_{2n-1,V} \neq 0$ . Assim, o polinômio é dado por

$$S_V(z) = b_{2n+1,V} z^{2n+1} + b_{2n,V} z^{2n} + b_{2n-1,V} z^{2n-1} + b_{2n-1} z^2 + b_{2n,V} z + b_{2n+1,V}.$$

4. Para  $\alpha = W$ , temos que  $b_{2n-2,W} = b_{2n-3,W} = \dots = b_{n+1,W}$ ,  $b_{2n+1,W} b_{2n-2,W} \neq 0$  e  $b_{2n,W} = b_{2n+1,W} + b_{2n-1,W} - \frac{b_{2n-1,W}}{2}$ . Assim, o polinômio é dado por

$$S_W(z) = b_{2n+1,W} z^{2n+1} + \left( b_{2n+1,W} + b_{2n-1,W} - \frac{b_{2n-2,W}}{2} \right) z^{2n} + b_{2n-2,W} \sum_{j=1}^{2n-4} z^{2n-1-j} + \left( b_{2n+1,W} + b_{2n-1,W} - \frac{b_{2n-2,W}}{2} \right) z + b_{2n+1,W}.$$

No seguinte teorema vamos analisar o comportamento dos zeros dos polinômios auto-recíprocos construídos a partir dos polinômios quase-ortogonais de ordem dois

$$R_{n,\alpha}(x) = c_{0,\alpha} Q_{\alpha,n}(x) + c_{1,\alpha} Q_{\alpha,n-1}(x) + c_{2,\alpha} Q_{\alpha,n-2}(x),$$

onde  $c_{0,\alpha} c_{2,\alpha} \neq 0$  e  $Q_{\alpha,n} = T_n, U_n, V_n, W_n$  (são os polinômios Chebyshev).

Sejam  $x_{1,n}^\alpha < x_{2,n}^\alpha < \dots < x_{n,n}^\alpha$  os zeros do polinômio  $Q_{\alpha,n}(x)$ . Usando o polinômio dado em (2.52) e lembrando que

$$f_{n,\alpha}(x) = \frac{Q_{n,\alpha}(x)}{Q_{n-1,\alpha}(x)},$$

podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 36** *Se  $\phi_\alpha < 0$ , então sobre os zeros de  $P_\alpha(z)$  e  $S_\alpha(z)$  ( $\alpha = T, U, V, W$ ), temos:*

- (a) *Todos seus zeros são distintos (exceto no caso em que  $f_{n,\alpha}(1) = -\varsigma_\alpha - \phi_\alpha / f_{n-1,\alpha}(1)$  ou  $f_{n,\alpha}(-1) = -\varsigma_\alpha - \phi_\alpha / f_{n-1,\alpha}(-1)$ ) e no máximo quatro deles estão fora do círculo unitário.*

- (b) Todos seus zeros estão no círculo unitário se algum das seguintes condições for cumprido
- (i)  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{n,n}^\alpha) < 0$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{1,n}^\alpha) > 0$ ;
  - (ii)  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{n,n}^\alpha) < 0$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(-1) > f_{n,\alpha}(-1)$ ;
  - (iii)  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(1) < f_{n,\alpha}(1)$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{1,n}^\alpha) > 0$ ;
  - (iii)  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(1) < f_{n,\alpha}(1)$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(-1) > f_{n,\alpha}(-1)$ ;
- (c) Tem dois zeros fora do círculo unitário que são negativos se algum das seguintes condições for cumprido
- (i)  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{n,n}^\alpha) < 0$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(-1) < f_{n,\alpha}(-1)$ ;
  - (ii)  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(1) < f_{n,\alpha}(1)$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(-1) < f_{n,\alpha}(-1)$ ;
- (d) Tem dois zeros fora do círculo unitário que são positivos se algum das seguintes condições for cumprido
- (i)  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{1,n}^\alpha) > 0$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(1) > f_{n,\alpha}(1)$ ;
  - (ii)  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(-1) > f_{n,\alpha}(-1)$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(1) > f_{n,\alpha}(1)$ ;
- (e) Tem quatro zeros fora do círculo unitário sendo dois negativos e dois positivos se  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(-1) < f_{n,\alpha}(-1)$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(1) > f_{n,\alpha}(1)$ .

**Demonstração.** Sejam  $x_{1,\alpha} < x_{2,\alpha} < \dots < x_{n,\alpha}$  os zeros de  $R_{n,\alpha}(x)$  e suponhamos que  $\phi_n < 0$ .

(a) Como  $P_\alpha(z) = 2z^n R_{n,\alpha}(x)$  temos

$$P_\alpha(z) = 0 \Leftrightarrow R_{n,\alpha}(x) = 0, \quad (5.16)$$

e sendo  $R_{n,\alpha}(x)$  um polinômio quase-ortogonal de ordem dois e  $\phi_n < 0$ , pelo Teorema 15 segue que todos seus zeros são distintos e no máximo dois deles está fora de  $(-1, 1)$ , digamos  $x_{1,\alpha}$  e  $x_{n,\alpha}$ . Assim, pela equação (5.2) temos

$$x_{1,\alpha} = \frac{1}{2} \left( z_{1,\alpha} + \frac{1}{z_{1,\alpha}} \right),$$

então,  $2 < |2x_{1,\alpha}| \leq 2|z_{1,\alpha}|$ . Consequentemente,  $1/|z_{1,\alpha}| < 1$ . Similarmente  $1 < |z_{n,\alpha}|$  e  $1/|z_{n,\alpha}| < 1$  e portanto no máximo quatro zeros de  $P_\alpha(z)$  estão fora do círculo unitário.

(b) Vamos supor que o caso (i) seja satisfeito, pois os outros casos são semelhantes. Assim se  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{n,n}^\alpha) < 0$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{1,n}^\alpha) > 0$ , então pelo Teorema 16 (parte (i) e (iii)) temos que  $x_{n,\alpha} < x_{n,n}^\alpha < 1$  e  $x_{1,\alpha} > x_{1,n}^\alpha > -1$ , ou seja,

$$-1 < x_{1,\alpha} < x_{2,\alpha} < \dots < x_{n,\alpha} < 1.$$

Portanto, pelo Teorema 31 todos os zeros de  $P_\alpha(z)$  estão no círculo unitário.

(c) Vamos supor que o caso (i) seja satisfeito, pois o caso (ii) é semelhante. Assim se  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(x_{n,n}^\alpha) < 0$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(-1) < f_{n,\alpha}(-1)$ , então pelo Teorema 16 (parte (i) e (iv)) temos que  $x_{n,\alpha} < x_{n,n}^\alpha < 1$  e  $x_{1,\alpha} < -1$ , ou seja,

$$x_{1,\alpha} < -1 < x_{2,\alpha} < \dots < x_{n,\alpha} < 1.$$

Assim, pelo Teorema 31, o correspondente zero  $z_{1,\alpha}$  de  $P_\alpha(z)$  não está no círculo unitário.

Como,

$$x_{1,\alpha} = \frac{1}{2} \left( z_{1,\alpha} + \frac{1}{z_{1,\alpha}} \right)$$

segue que  $z_{1,\alpha}$  é real, portanto  $z_{1,\alpha} \in (-\infty, -1)$  e  $1/z_{1,\alpha} \in (-1, 0)$  pois

$$\frac{1}{2} \left( z_{1,\alpha} + \frac{1}{z_{1,\alpha}} \right) < -1.$$

(d) A demonstração é semelhante ao caso anterior.

(e) Suponhamos que  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(-1) < f_{n,\alpha}(-1)$  e  $-\varsigma_\alpha - \phi_\alpha/f_{n-1,\alpha}(1) > f_{n,\alpha}(1)$ . Pelo Teorema 16 (parte (ii) e (iv)) temos que  $-1 > x_{1,\alpha}$  e  $x_{n,\alpha} > 1$ . Assim, pelo Teorema 31, os correspondentes zeros  $z_{1,\alpha}$  e  $z_{n,\alpha}$  de  $P_\alpha(z)$  não estão no círculo unitário.

Como,

$$x_{1,\alpha} = \frac{1}{2} \left( z_{1,\alpha} + \frac{1}{z_{1,\alpha}} \right) \quad \text{e} \quad x_{n,\alpha} = \frac{1}{2} \left( z_{n,\alpha} + \frac{1}{z_{n,\alpha}} \right),$$

segue que  $z_{1,\alpha}$  é real. Portanto,  $z_{1,\alpha} \in (-\infty, -1)$  e  $1/z_{1,\alpha} \in (-1, 0)$ , similarmente  $z_{n,\alpha} \in (1, \infty)$  e  $1/z_{n,\alpha} \in (0, 1)$  pois

$$\frac{1}{2} \left( z_{1,\alpha} + \frac{1}{z_{1,\alpha}} \right) < -1 \quad \text{e} \quad 1 < \frac{1}{2} \left( z_{n,\alpha} + \frac{1}{z_{n,\alpha}} \right).$$

■

**Exemplo 9** Consideremos o seguinte polinômio  $P_U(z) = 3z^6 + 2z^5 - 9z^4 + 2z^3 - 9z^2 + 2z + 3$ , gerado por um polinômio quase-ortogonal de ordem dois  $R_{3,U}(x)$ . Os elementos dos Teoremas 16 e 15 são  $\varsigma_U = \frac{2}{3}$ ,  $\phi_U = -4$ ,  $f_{2,U}(1) = \frac{3}{2}$ ,  $f_{2,U}(-1) = -\frac{3}{2}$ ,  $f_{3,U}(1) = \frac{4}{3}$  e  $f_{3,U}(-1) = -\frac{4}{3}$  e  $f_{3,T}(-1) = -1$ . Assim, como

$$-\varsigma_U - \phi_U/f_{2,U}(-1) = -\frac{2}{3} - 4 \left( \frac{2}{3} \right) = -\frac{10}{3} < -\frac{4}{3} = f_{3,U}(-1),$$

$$f_{3,U}(1) = \frac{4}{3} < 2 = -\frac{2}{3} + 4 \left( \frac{2}{3} \right) = -\varsigma_U - \phi_U/f_{2,U}(-1),$$

pelo teorema anterior segue que o polinômio tem quatro zeros fora do círculo unitário, ou seja dois positivos e dois negativos, como podemos ver na Figura 5.4.

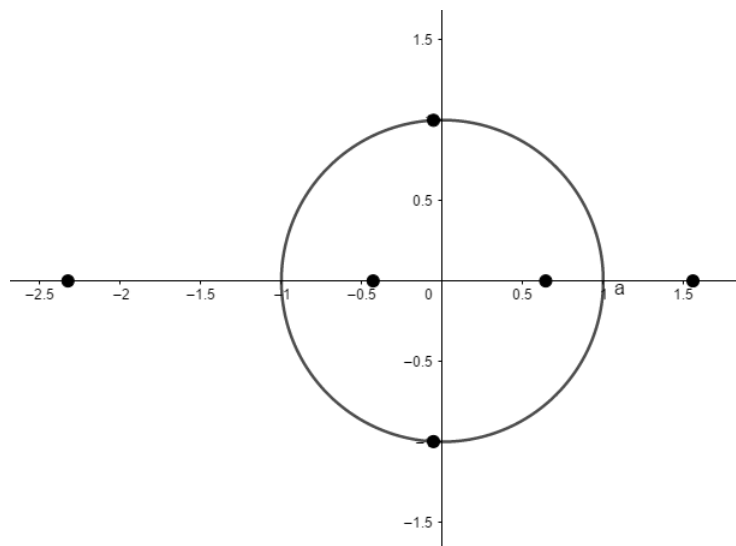


Figura 5.4: Zeros do polinômio  $P_U(z) = 3z^6 + 2z^5 - 9z^4 + 2z^3 - 9z^2 + 2z + 3$ .

**Exemplo 10** Consideremos o seguinte polinômio auto-recíproco gerado por um polinômio quase ortogonal de Chebyshev  $R_{6,T}(x)$  de ordem 2:

$$P_T(z) = z^{12} + \lambda z^{11} - 3z^{10} - 3z^2 + \lambda z + 1.$$

Na figura 5.5 podemos ver como é o comportamento dos zeros de  $P_T(z)$  quando  $\lambda$  assume alguns valores em  $[-5, 5]$ .

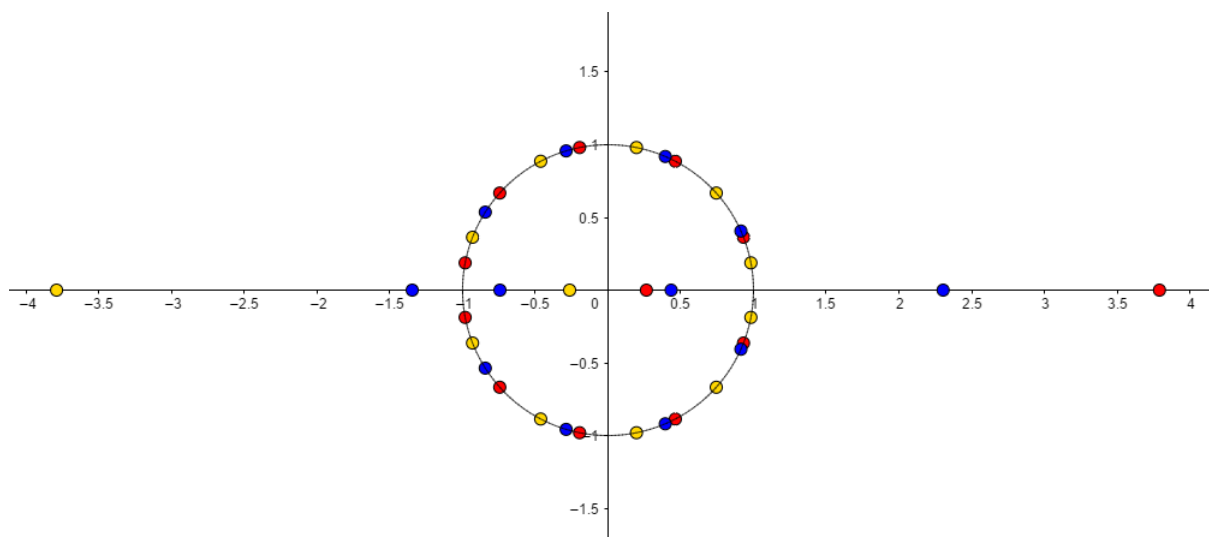


Figura 5.5: Zeros de  $P_T(z) = z^{12} + \lambda z^{11} - 3z^{10} - 3z^2 + \lambda z + 1$  quando  $\lambda$  assume alguns valores em  $[-5, 5]$ .



---

## Considerações Finais

Neste trabalho estudamos as principais propriedades e aplicações dos polinômios ortogonais. Mostramos o teorema da relação de recorrência de três termos que é uma propriedade muito importante, já que nos permite gerar uma família de polinômios ortogonais a partir das condições iniciais. Os zeros desses polinômios têm um comportamento muito interessante, pois são reais, distintos e localizam-se no intervalo de ortogonalidade, além de possuírem a propriedade do entrelaçamento. Como uma subclasse dos polinômios ortogonais, estudamos também os polinômios de Chebyshev e suas propriedades. Estudamos as principais propriedades dos polinômios auto-conjugados, auto-recíprocos e auto-invertíveis, cujos zeros são simétricos. Finalmente, construímos polinômios auto-recíprocos a partir de polinômios quase-ortogonais de ordem um e dois, os quais estudamos o comportamento de seus zeros. Com base no estudo do Capítulo 5, estamos elaborando um artigo para ser submetido a alguma revista internacional da área de matemática.



## Referências

---

- [1] AGARWAL, R. P., AND MILOVANOVIĆ, G. V. Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials. *Applied mathematics and computation* 128, 2-3 (2002), 151–166.
- [2] AGHIGH, K., MASJED-JAMEI, M., AND DEHGHAN, M. A survey on third and fourth kind of chebyshev polynomials and their applications. *Applied Mathematics and Computation* 199, 1 (2008), 2–12.
- [3] ÁLVAREZ NODARSE, R. Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 18, 19-45. (2001).
- [4] ANDRADE, E. X. L., BRACCIALI, C. F., AND RAFAELI, F. R. *Introdução aos Polinômios Ortogonais*. Notas em Matemática Aplicada, vol. 64, SBMAC, São Carlos, 2012.
- [5] ANDREWS, G., ASKEY, R., AND ROY, R. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Application, Cambridge University Press, 1999.
- [6] BAVER, F. L., RUTISHAUSER, H., AND STIEFEL, E. New aspects in numerical quadrature. *Proc. Symp. Appl. Math.* 15 (1963), 199–218.
- [7] BOTTA, V. Exploring the zeros of real self-reciprocal polynomials by chebyshev polynomials. *Disponível em <arXiv: 1709.03037 >, acesso em 01 de Junho de 2019* (08 2017).
- [8] BOTTA, V., BRACCIALI, C. F., AND PEREIRA, J. A. Some properties of classes of real self-reciprocal polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 433, 2 (2016), 1290–1304.
- [9] BREZINSKI, C. Padé-type approximation and general orthogonal polynomials.
- [10] BREZINSKI, C., DRIVER, K. A., AND REDIVO-ZAGLIA, M. Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials. *Applied Numerical Mathematics* 48 (2004), 157–168.
- [11] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., AND REYNOLDS, A. C. *Numerical Analysis*. Prindle, Weber & Achmidt, Inc., Boston, 1978.
- [12] CHIHARA, T. On quasi-orthogonal polynomials. *Proceedings of the American mathematical Society* 8, 4 (1957), 765–767.
- [13] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [14] CONTE, S. D. *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill, Inc., Tokio, 1978.

- 
- [15] DAVIS, P. J. *Interpolation and Approximation*. Blaisdell Publishing Co., 1967.
- [16] DICKINSON, D. On quasi-orthogonal polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society* 12, 2 (1961), 185–194.
- [17] FOX, L., AND PARKER, I. B. Chebyshev polynomials in numerical analysis. Tech. rep., 1968.
- [18] LAKATOS, P. On zeros of reciprocal polynomials. *Publicationes Mathematicae-Debrecen* 61, 3-4 (2002), 645–661.
- [19] LE MOYNE, L. Pronostico adaptivo de huracanes. *Geofísica Internacional* 12, 3.
- [20] LEBEDEV, N. N. *Special Functions and Their Application*. (translated by R.A. Silverman) Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [21] MASON, J. C., AND HANDSCOMB, D. C. *Chebyshev Polynomials*. Chapman and Hall, New York, NY, CRC, Boca Raton, 2003.
- [22] MILOVANOVIĆ, G. V., MITRINOVIĆ, D. S., AND RASSIAS, T. M. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. World Scientific, 1994.
- [23] RAFAELI, F. R. *Zeros de Polinômios Ortogonais na Reta Real*. Tese de doutorado, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, 2010.
- [24] RAINVILLE, E. D. *Special Functions*. The Macmillan Company, New York, 1960.
- [25] SÁNCHEZ, J. L. Polinomios ortogonales. [https://www.um.es/documents/118351/1884002/TFG\\_SANCHEZ+SALAS.pdf/0a3a3e79-5717-4aea-91ff-a3881edb4bbe](https://www.um.es/documents/118351/1884002/TFG_SANCHEZ+SALAS.pdf/0a3a3e79-5717-4aea-91ff-a3881edb4bbe), 2013.
- [26] STROUD, A. H. Gaussian quadrature formulas. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey*.
- [27] STROUD, A. H. Integration formulas and orthogonal polynomials. *SIAM J. Numer. Anal.* 4 (1967), 381–389.
- [28] SZEGÖ, G. *Orthogonal Polynomials*, vol. 23. Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.
- [29] VIEIRA, R. *Polynomials with Symmetric Zeros*. 03 2019. doi: 10.5772/intechopen.82728.