

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

**FORMAS DIFERENCIAIS**

Mateus Navarro Perucchi

Prof.Dr. Ricardo Paupitz (orientador)

Rio Claro (SP)

2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

MATEUS NAVARRO PERUCCHI

FORMAS DIFERENCIAIS

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Instituto de Geociências e  
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,  
da Universidade Estadual Paulista Júlio  
de Mesquita Filho, para obtenção do grau  
de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2013

MATEUS NAVARRO PERUCCHI

## FORMAS DIFERENCIAIS

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Instituto de Geociências e  
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,  
da Universidade Estadual Paulista Júlio  
de Mesquita Filho, para obtenção do grau  
de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof.Dr. (orientador) Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Prof.Dr. Roberto Eugenio Lagos Monaco

Prof.Dr. Francisco José dos Santos

Rio Claro, 06 de SETEMBRO de 2013.

Assinatura do aluno

Assinatura do orientador

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a meus pais, Carmen e Félix, pois sem eles eu jamais chegaria onde estou e, com certeza, também não saberia onde estaria indo. Eles são meus heróis particulares! Sou especialmente grato por todos os ensinamentos que recebi e que hoje formam meu caráter. Aprendi com eles a erguer a cabeça e jamais desistir diante as dificuldades; que podemos ser melhores todos os dias e que errar não é vergonhoso.

Não há palavras que possam descrever o sentimento de gratidão que tenho pelos meus pais. Carinho e admiração incondicional que levei ao longo de toda a minha graduação e levarei para sempre. Agradeço também, em especial, minha avó que apesar de não estar mais hoje presente foi capaz de me ensinar tudo o que eu sei sobre respeito ao próximo. Obrigado, mesmo que jamais tenha tido a possibilidade de dizer isso! Uma parte de mim será sempre saudade.

Um imenso sentimento de gratidão à pessoa que mais me ensina sobre a vida e que, com certeza, possui a ingenuidade e amor ao próximo que sonho um dia ver as pessoas terem uns pelos outros: minha irmã, Débora. Mesmo que ela nunca saiba o que está escrito aqui ou nas páginas adiante, ela me ensina todos os dias o que jamais nenhum livro será capaz de me ensinar: amar incondicionalmente! Ela é e sempre será o meu orgulho e a "minha pequena".

À minha namorada, Tainara, que tem sido também minha fonte de inspiração para conseguir alcançar meus objetivos e que sempre, não importa a circunstância me apóia com meus projetos pessoais. Obrigado por me ouvir e ser paciente e, mais ainda, enaltecer minhas vontades e somar felicidade em minha vida.

À meus amigos que ao longo da minha graduação foram irmãos! Foi a família que tive a possibilidade de escolher e fui acolhido por eles. Todos, sem exceção, são importantes nesta conquista. Ao longo da graduação aprendi a cultivar boas amizades que representarão grandes lembranças de momentos incríveis. Um muito obrigado pelos abraços, palavras em momentos oportunos, conversas filosóficas e, principalmente, por sempre me ouvirem, mesmo que não concordassem com o que eu estava dizendo. Vocês são incríveis e serão lembrados para sempre.

Gostaria de agradecer também aos bons professores que tive durante a graduação, pois estes me ensinaram muito do que sei. Em especial, gostaria de agradecer ao meu orientador, Ricardo Paupitz, pela maravilhosa oportunidade de trabalho e confiança concedida. Suas sugestões fundamentais, conversas e, principalmente, seu amplo conhecimento na área me permitiram o desenvolvimento deste trabalho.

Novamente, um muito obrigado a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para esta conquista pessoal.

## RESUMO

Neste trabalho, os estudos visaram avaliar a unificação de conceitos e teoremas de análise vetorial que contribuíram na compreensão de problemas físicos de maneira mais abrangente e muito mais concisa do que usando o cálculo vetorial. Estudamos a eletrodinâmica com formas diferenciais. Foram também apresentadas as relações de Maxwell com o formalismo das formas diferenciais permitindo além da formulação axiomática da Termodinâmica uma mais geométrica e generalizada. Outra característica observada durante o estudo do formalismo apresentado foi a possibilidade dele servir como substituto ao formalismo tensorial.

**Palavras-chave:** formas diferenciais, equações de Maxwell, Relações de Maxwell, Termodinâmica.

## ABSTRACT

In this work, studies aimed at evaluating the unification of concepts and theorems of vector analysis that contributed to the understanding of physical problems in a more comprehensive and more concise than using vector calculus. We study the electrodynamics with differential forms. Were also presented Maxwell's relations with formalism of differential forms in addition allowing formulation one more geometric and generalized. Another feature observed during the study of formalism presented was the possibility of it serving as a substitute to the tensor formalism.

**Keywords:** differential forms, Maxwell's equations, Maxwell's thermodynamics relations, thermodynamic.

## SUMÁRIO

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| Introdução                                              | 1  |
| 1.0 Formas Diferenciais                                 | 3  |
| 1.1 Contexto                                            |    |
| 1.2 Formas Diferenciais                                 | 4  |
| 1.2.1 1-formas                                          | 4  |
| 1.2.2 2-formas                                          | 4  |
| 1.2.3 3-formas                                          | 5  |
| 1.2.4 N-formas                                          | 5  |
| 1.3 Produto exterior cunha                              | 6  |
| 1.4 Derivada exterior                                   | 6  |
| 1.5 Lema de Poincaré                                    | 7  |
| 1.6 Integração de formas diferenciais                   | 9  |
| 1.7 Teorema de Stokes                                   | 10 |
| 1.8 Operador estrela de Hodge                           | 12 |
| 2.0 Aplicações em Física                                | 14 |
| 2.1 Introdução                                          |    |
| 2.2 Eletromagnetismo                                    | 14 |
| 2.2.1 Equações de Maxwell                               | 15 |
| 2.2.2 Tensor de Faraday                                 | 16 |
| 2.3 Termodinâmica                                       | 17 |
| Relações de Maxwell                                     | 17 |
| 2.3.1 Função energia interna $U(S, V, N)$               | 18 |
| 2.3.2 Função energia interna $U(S, V, \mu)$             | 19 |
| 2.3.3 Função energia interna $U(T, V, \mu)$             | 20 |
| 2.3.4 Função energia interna $U(S, P, \mu)$             | 20 |
| 2.3.5 Função energia livre de Helmholtz $F(T, V, N)$    | 21 |
| 2.3.6 Função entalpia $H(S, P, N)$                      | 22 |
| 2.3.7 Função entalpia livre (Função de Gibbs)           | 23 |
| 3.0 Exemplos                                            | 24 |
| 3.1 1-forma constante                                   | 24 |
| 3.2 Fluxo magnético através de uma superfície orientada | 24 |
| 3.3 Energia potencial                                   | 25 |
| 3.4 Teorema de Stokes                                   | 25 |
| 3.5 Teorema de Gauss                                    | 27 |
| 3.6 Campo elétrico de uma carga pontual                 | 28 |
| 4.0 Conclusão                                           | 29 |
| Bibliografia                                            | 30 |

## Introdução

Na física, no cálculo multivariável e, também, no tensorial as formas diferenciais são objetos matemáticos pertencentes a um espaço vetorial. De maneira informal, uma forma diferencial é uma soma de termos da forma  $f dx_i dx_j$ , ou  $g dx_i dx_j dx_k$ .

O conceito de formas diferenciais torna possível generalizar ideias do cálculo vetorial como gradiente, divergência e rotacional.

Um dos primeiros responsáveis pelo estudo dessa moderna notação utilizada das formas diferenciais foi Élie Cartan, matemático francês, que contribuiu trabalhos fundamentais em teorias de grupo de Lie, geometria e formas diferenciais. Embora o conceito de vetor como um segmento de reta não seja geral para um espaço-tempo, as formas diferenciais de Cartan são naturais em espaço-tempo curvado. O cálculo de Cartan leva a uma notável unificação de conceitos e teoremas de análise vetorial. Essa noção proposta por ele é baseada na correspondência um-para-um entre os espaços lineares de vetores de deslocamento e operadores diferenciais direcionais (componentes do gradiente formam uma base).

Élie Cartan desenvolveu também um importante estudo a álgebra de Grassmann que é comumente chamado de produto exterior (ou produto cunha), cujo significado que explicaremos mais adiante.

Seu estudo em álgebra de Grassmann fez com que ele aplicasse a sua teoria das formas diferenciais exteriores a uma grande variedade de problemas em geometria diferencial, dinâmica e até mesmo em relatividade. Em particular, os métodos matemáticos de Grassmann foram adotados demasiadamente tardes, mas tiveram influencia direta nos estudos da geometria diferencial propostos por Cartan que utilizaria a álgebra exterior.

O uso das formas diferenciais constitui a maneira rigorosa de tratar os diferenciais das funções reais sobre uma variedade. O complexo estudo das formas diferenciais leva a uma compreensão mais profunda das funções de estado, lagrangiano e hamiltoniano sobre os respectivos espaços de configuração ou espaços de fase do sistema físico.

O importante estudo das formas leva a compreensão de que matematicamente as formas diferenciáveis de grau  $k$  podem ser integradas sobre cadeias  $k$  dimensionais ou conjuntos de dimensões topológicas  $k$ . Este estudo nos leva a um resultado importante que generaliza diversos teoremas do cálculo vetorial, chamado de “Teorema de Stokes”.

O Teorema de Stokes generalizado (discutido na seção 1.7) mostra a relação entre a integral de uma forma diferencial  $\omega$  e a de sua derivada exterior  $d\omega$ . Este teorema tem como casos especiais, no contexto do cálculo vetorial usual, o Teorema de Gauss, de Stokes clássico e também o Teorema de Green. Para esclarecer a notação utilizada, mostramos abaixo como podem ser representadas em termos de formas diferenciais a integral de linha, de superfície e de volume:

Seja  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$  uma função vetorial diferenciável contínua numa região  $R$  do espaço tridimensional  $V_3$  e seja  $\omega_1 = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$  a forma 1 correspondente. Então, comparando

$$\begin{aligned}\int_C \omega_1 &= \int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_{[a,b]} \omega_1^* = \\ &= \int_a^b [f_1^*(t)x'(t) + f_2^*(t)y'(t) + f_3^*(t)z'(t)] dt\end{aligned}$$

Onde  $\omega_1^*$  é a comparação da 1-forma à integral de linha correspondente. Então:

$$\int_C f \cdot dr = \int (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$$

E obtemos

$$\int_C \omega_1 = \int_C f \cdot dr$$

Assim, a integral de uma 1-forma sobre uma curva é interpretada como uma *integral de linha*.

Se  $\omega_2 = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$  é a forma 2 correspondendo a  $\mathbf{f}$ , cuja integral de superfície pode ser expressa como  $\iint_S f \cdot dS$ , então

$$\iint_C \omega_2 = \iint_C f \cdot ds$$

Portanto, a integral da 2-forma sobre uma superfície é também interpretada como uma *integral de superfície*.

Se  $\omega_3 = f dx \wedge dy \wedge dz$  é uma forma 3 correspondente à função escalar  $f$ , cuja integral de volume é  $\iiint_R f dV$ , então

$$\iiint_R \omega_3 = \iiint_R f dV$$

Em consequência, a integral de uma forma 3 sobre uma região R corresponde a uma *integral de volume*.

Naturalmente as formas diferenciais fazem parte do cálculo vetorial, possuindo aplicações em vários ramos da ciência, sendo alguns estudos feitos em termodinâmica, eletromagnetismo, torção, geometria, simetrias em equações diferenciais, entre outros.

Em termodinâmica a aplicação da geometria realizada por Maxwell foi logo estendida pelo físico norte-americano Josiah Williard Gibbs, ao representar as propriedades termodinâmicas das substâncias por intermédio de superfícies entropia-volume-temperatura e os respectivos diagramas tipo “clapeyrianos”: entropia X temperatura (S-T), entropia-volume (S-V) e volume-temperatura (V-T).

O estudo analítico das superfícies feito pelo matemático francês Adrien Legendre, por intermédio de uma transformação matemática conhecida a partir

daí como transformada de Legendre, bem como o estudo das derivadas parciais, permitiu a demonstração das relações de Maxwell conhecidas hoje.

O teorema demonstrado pelo matemático Constantin Carathéodory sobre formas diferenciais, acrescido da pesquisa sistemática sobre tais formas realizada pelo matemático francês Élie Cartan, permitiram estudos posteriores sobre esses entes matemáticos, que levaram à formulação axiomática da Termodinâmica, inclusive as relações de Maxwell.

Para as equações de Maxwell no vácuo onde  $\epsilon$  e  $\mu$  são constantes em toda parte, elas simplificam-se consideravelmente uma vez que se as ferramentas das formas diferenciais e a geometria diferencial. Com isso, os campos elétrico e magnético são conjuntamente descritos por uma *2-forma* em um espaço-tempo quadridimensional, a qual é usualmente chamada **F**.

$$dF = 0$$

Onde  $d$  é a derivada exterior. As equações não-homogêneas de Maxwell tomam a forma elegante:

$$d * F = * J$$

Onde o *asterisco*, como veremos mais adiante é chamado de operador estrela de Hodge. Os campos são apresentados em unidades naturais onde  $\epsilon$  é 1; **J** é a *1-forma*, chamada de corrente elétrica, que satisfaz a equação da continuidade:

$$d * J = 0$$

A estrutura de forma diferencial trouxe considerável unificação à álgebra vetorial e, de forma mais geral, à análise tensorial variedades. Da mesma forma, a união dos teoremas de Stokes e Gauss que serão amplamente discutidos mais adiante, fornecerá uma reformulação elegante das equações de Maxwell.

## 1.0 Formas Diferenciais

### 1.1 Contexto

O conceito de forma diferencial se estende a uma generalização de ferramentas tais como o gradiente, divergência e rotacional. Tal conceito moderno e notação utilizada em aplicações físicas atuais se devem a Elie Cartan. O cálculo de Cartan leva a uma notável unificação de conceitos e teoremas de análise vetorial; mostrando que a utilização das formas diferenciais está amplamente disseminada em geometria diferencial e análise avançada.

Para Cartan a noção é de que o vetor se baseia na correspondência de um-para-um entre os espaços lineares de vetores de deslocamento e operadores diferenciais direcionais. [1]

A análise vetorial oferece uma maneira mais conveniente para tratar os problemas em física e o cálculo tensorial tornam ainda mais concisas e gerais as equações empregadas nestes problemas.

Uma grande vantagem do tratamento dos problemas físicos com formas diferenciais é que elas generalizam como tensores, porém com a simplicidade dos vetores.

## 1.2 Formas diferenciais

A forma diferencial exterior no espaço tridimensional com coordenadas  $x, y, z$  é uma expressão obtida somando e multiplicando funções reais e as diferenciais  $dx, dy, dz$  das coordenadas. As operações de adição e multiplicação obedecem às leis associativa e distributiva comuns; entretanto no caso da multiplicação, ela obedece à lei anticomutativa, já que não é comutativa.

Por esta razão, representamos esta multiplicação de formas, por uma *cunha*  $\wedge$ .

Se cada parcela de uma forma diferencial contém  $p dx_i$ , onde o  $p = 0, 1, 2$ , etc. a forma é chamada uma *forma diferencial de grau  $p$* , ou resumidamente, *forma  $p$* . Com isso:

- 0-forma é uma função diferenciável  $f(x, y, z)$ ;
- 1-forma é uma expressão  $fdx + gdy + hdz$ ;
- 2-forma é uma expressão  $fdx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdz \wedge dx$ ;
- 3-forma é uma expressão  $fdx \wedge dy \wedge dz$ . [2,3]

O exemplo não trivial mais notável de uma forma diferenciável é constituído pelas 1-formas ou também chamadas de formas *pfaffianas*. De maneira mais abrangente:

### 1.2.1 1-formas

Definindo  $dx, dy, dz$  em espaço euclidiano tridimensional como funções que atribuem a um segmento de reta do ponto P ao ponto Q a mudança correspondente em  $x, y, z$ . O símbolo  $dx$  representa “comprimento orientado da projeção de uma curva sobre o eixo  $x$ ” e assim vale para  $dy$  e  $dz$ . É possível observar também que  $dx, dy, dz$  podem ser infinitesimalmente pequenos e **não devem ser confundidos com as diferenciais ordinárias** que associamos com integrais e quocientes diferenciais. Uma função do tipo

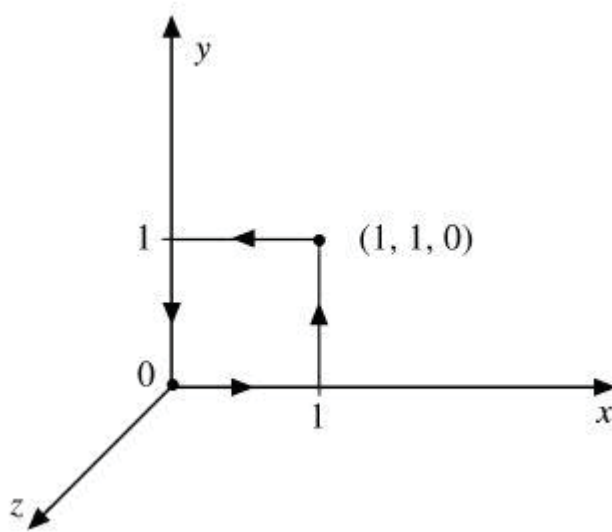
$$Adx + Bdy + Cdz, \quad A, B, C \text{ números reais}$$

é definida como **1-forma constante**.

### 1.2.2 2-formas

Considerando uma unidade de fluxo de massa na direção de  $z$ , isto é, um fluxo na direção de  $z$  crescente, de modo que uma unidade de massa

atravesse um quadrado unitário no plano  $xy$  em tempo unitário. A orientação simbolizada pela seqüência de pontos na Figura 1.2.2:



**Figura 1.2.2:** retângulo orientado em sentido anti-horário.

$$(0,0,0) \rightarrow (1,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (0,1,0) \rightarrow (0,0,0),$$

será denominada **anti-horária**, como de costume. Uma unidade de fluxo na direção  $z$  é definida pela função  $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$  que atribui a retângulos orientados no espaço a área orientada de suas projeções no plano  $xy$ . De modo semelhante, um fluxo unitário na direção  $x$  é descrito por  $dx dy = dy dx$  e um fluxo unitário na direção  $y$  por  $dz dx$ .

Sendo assim, essa ordem inversa é ditada pela convenção de orientação e  $dz dx = -dx dz$  por definição. Essa anti-simetria é consistente com o produto cruzado de dois vetores que representam áreas orientadas em espaço euclidiano.

Essa noção é generalizada para polígonos e superfícies diferenciáveis curvadas aproximadas por polígonos e volumes.

### 1.2.3 3-formas

Uma 3-forma  $dx dy dz$  representa um volume orientado. Por exemplo, o determinante de três vetores em espaço euclidiano muda de sinal se inverter a ordem de dois vetores. Só que esse determinante mede o volume orientado abrangido pelos três vetores; em particular,  $\int_V \rho(x, y, z) dx dy dz$  representa a carga total dentro do volume  $V$  se  $\rho$  for a densidade de carga. Formas diferenciais de dimensões mais altas em espaços de dimensões mais altas são definidas de maneira semelhante e denominadas formas  $k$  com  $k = 0, 1, 2, \dots$

### 1.2.4 $n$ -formas

Para tratar de  $n$ -formas o enfoque deve ser em que as 1-formas, 2-formas e 3-formas são tratadas simultaneamente, como instâncias diferentes de um mesmo tipo de objeto.

### 1.3 Produto exterior cunha

O produto exterior, ou simplesmente o produto cunha, é uma anti-simetrização ou alternância do produto tensorial. Essa anti-simetrização a álgebra de Grassmann prevê que se  $\{e_j\}$  for uma base no espaço vetorial, então:

$$e_i \wedge e_j = e_{ij} = -e_{ji} \Leftrightarrow i \neq j$$

$$e_i \wedge e_i = 0$$

Com isto, vamos supor que  $\alpha$  e  $\beta$  são, respectivamente,  $p$  e  $q$ -formas. Então o produto exterior entre elas associa uma  $(p+q)$ -forma  $\gamma$ , denotada por  $\gamma = \alpha \wedge \beta$ .

As propriedades básicas do produto exterior cunha são:

1.  $\alpha \wedge (a\beta + b\gamma) = a\alpha \wedge \beta + b\alpha \wedge \gamma$
2.  $\alpha \wedge (\eta \wedge \omega) = (\alpha \wedge \eta) \wedge \omega$
3.  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$

Sendo  $\alpha$  uma  $p$ -forma,  $\beta$  e  $\gamma$   $q$ -formas, respectivamente e  $a$  e  $b$  sendo escalares.

O espaço das 1-formas diferenciáveis é o espaço gerado pelo conjunto  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ , em que o elemento  $dx_i$  é dual do vetor  $e_i$  da base canônica do  $R^n$ , onde supomos  $n > 1$ . A partir da base das 1-formas podemos construir as bases de todas as outras  $p$ -formas, bastando para isto tomar o produto exterior entre os elementos da base das 1-formas. Note que se  $(p+q) > n$ , então  $\alpha \wedge \beta = 0$ .

### 1.4 Derivada Exterior

A derivada exterior de uma forma  $p\omega$  é uma forma  $(p+1)d\omega$  obtida aplicando um operador  $d$  para transformar  $\omega$  em  $d\omega$ . As definições de  $d\omega$  para formas no espaço tridimensional são as que estão abaixo.

Se a função diferenciável  $f$  é uma 0-forma, então  $df$  é a 1-forma, pela notação de Einstein teremos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Se  $\omega$  é uma 1-forma  $f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ , cujos coeficientes  $f_i$  são funções diferenciáveis, então  $d\omega$  é a 2-forma.

$$d\omega = df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz$$

Sendo  $\omega$  uma 2-forma, cujos coeficientes  $f_i$  são funções diferenciáveis, então  $d\omega$  é a 3-forma.

$$d\omega = df_1 \wedge dy \wedge dz + df_2 \wedge dz \wedge dx + df_3 \wedge dx \wedge dy$$

De maneira resumida, teríamos:

- $d(0\text{-forma}) = 1\text{-forma}$
- $d(1\text{-forma}) = 2\text{-forma}$
- $d(2\text{-forma}) = 3\text{-forma}$

As regras que governam as formas diferenciais, com  $\omega_k$  denotando uma forma  $k$ , são:

- $dx dx = 0 = dy dy = dz dz, dx_i^2 = 0$
- $dx dy = -dy dx, dx_i dx_j = -dx_j dx_i, i \neq j$
- $dx_1 dx_2 \dots dx_k$  é totalmente anti-simétrica na  $dx_i, i = 1, 2, \dots, k$
- $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$
- $d(\omega_k + \Omega_k) = d\omega_k + d\Omega_k$ , linearidade
- $d(d\omega_k) = 0$ , lema de Poincaré

Essa operação simples de diferenciação no sistema de formas diferenciais corresponde às operações de obter o gradiente de uma função escalar e o rotacional e a divergência de uma função vetorial. Isto pode ser observado de maneira esquemática na tabela abaixo.

|                 |                      | Formas Diferenciais    | Calculo Vetorial          |
|-----------------|----------------------|------------------------|---------------------------|
| função escalar  | $f(x,y,z)$           | $df$<br>1-forma        | $\nabla f$                |
| função vetorial | $\vec{v}_1(x, y, z)$ | $d\omega_1$<br>2-forma | $\nabla \times \vec{v}_1$ |
|                 | $\vec{v}_2(x, y, z)$ | $d\omega_2$<br>3-forma | $\nabla \cdot \vec{v}_2$  |

Podemos observar que as derivadas exteriores de formas gerais satisfazem à *propriedade de linearidade*:

$$d(a\alpha + b\beta) = ad\alpha + bd\beta$$

sendo que  $\alpha, \beta$  são formas arbitrárias e  $a, b$  são números.

## 1.5 Lema de Poincaré

No caso do **Lema de Poincaré**, citado acima, ele estabelece que se  $\omega$  é qualquer forma diferencial de funções diferenciáveis contínuas seu resultado é nulo.

Considerando que uma 0-forma é uma função escalar, façamos:

$$\omega = f(x, y, z)$$

onde  $f(x, y, z)$  é qualquer função duas vezes continuamente diferenciável. Com isso, teremos:

$$d\omega = df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(df) = df_x \wedge dx + df_y \wedge dy + df_z \wedge dz = \\ &= (f_{xx} dx + f_{yx} dy + f_{zx} dz) \wedge dx + (f_{xy} dx + f_{yy} dy + f_{yz} dz) \wedge dy + \\ &+ (f_{xz} dx + f_{yz} dy + f_{zz} dz) \wedge dz = \\ &= (f_{yz} - f_{zy}) dy \wedge dz + (f_{zx} - f_{xz}) dz \wedge dx + (f_{xy} - f_{yx}) dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Já que todos os coeficientes são nulos, pois  $f_{xy} = f_{yx}$ , etc. É interessante ressaltar que o **Lema de Poincaré** vale também para qualquer função continuamente diferenciável de  $n$  variáveis.

Utilizando dos cálculos anteriores e empregando o fluxograma acima, observa-se que a relação  $d(d\omega) = 0$  para uma 0-forma  $\omega$  corresponde à fórmula vetorial:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

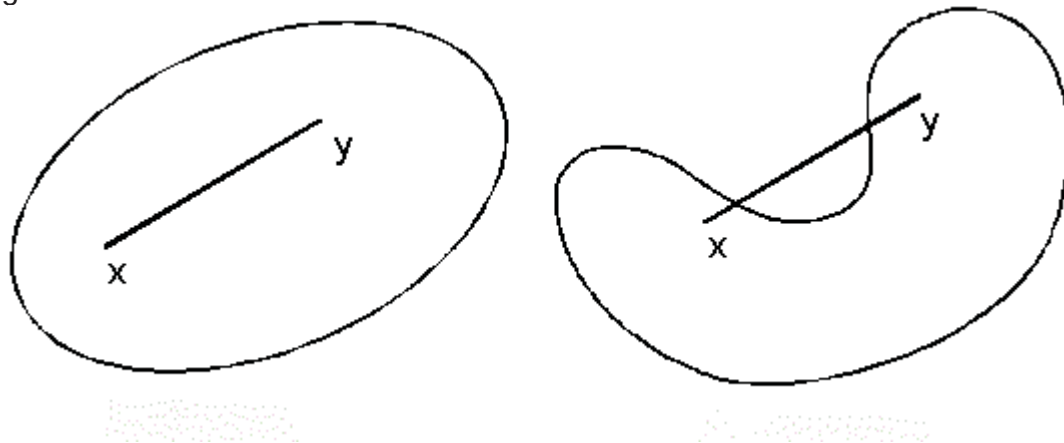
Da mesma maneira a 1-forma  $\omega$  corresponde à fórmula vetorial:

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$$

Foi discutido até então que se  $\alpha$  é uma 1-forma diferencial definida em uma região  $U$  de  $R^n$  então  $\alpha$  é fechada se  $d\alpha=0$  e, também, que é exata se existe  $f \in \Omega(U)$  tal que  $df = \alpha$ . Porém, como vimos anteriormente,  $d(df) = 0$ ; isto é, toda forma exata é fechada. A questão é se a recíproca é verdadeira: toda forma fechada é exata?

E a resposta para esta questão depende de que a região  $U$  do  $R^n$  seja convexa; isto é, dados pontos quaisquer  $x$  e  $y$  em  $U$ , o segmento de reta que

vai de  $x$  a  $y$  está totalmente contido em  $U$  – toda forma fechada sobre uma região aberta convexa é exata.



### Exemplo de forma fechada que não é exata [8]:

Considerando o campo magnético de um fio infinito, estendido ao longo do eixo  $z$ . Como o campo é constante ao longo de qualquer cilindro cujo eixo é o fio, basta considerar o que acontece em um plano perpendicular a  $z$ , digamos  $xy$ . Restringindo o campo a este plano:

$$\vec{B}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)} (-y, x, 0)$$

Será escolhida a intensidade da corrente de modo que os quocientes dos termos constantes seja 1 com o intuito de facilitar a notação. Este campo está definido na região  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  e

$$\tau = \tau_B = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Um cálculo direto mostra que  $d\tau = 0$ . Logo a forma  $\tau$  é fechada. Considere, agora, a curva  $C : [0, 2\pi] \rightarrow U$  que corresponde à circunferência de raio 1 parametrizada por:

$$C(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Como  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

$$C^*(\tau) = -\sin(t)d(\cos(t)) + \cos(t)d(\sin(t)) = (\sin^2(t) + \cos^2(t))dt = dt$$

Mas, isto significa que,

$$\int_C \tau = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

No entanto, como vimos anteriormente, se  $\tau$  fosse uma forma exata, a integral deveria ter dado zero porque o caminho é fechado. Contudo,  $\tau$  não pode ser exata.

## 1.6 Integração de Formas Diferenciais

Vamos imaginar uma integral de linha:

$$\int_S f(x)dx + g(y)dy + g(z)dz$$

E então vamos associar ao argumento da integral uma 1-forma  $\omega$ :

$$\omega = f(x)dx + g(y)dy + g(z)dz$$

Com isto, ao integrarmos a forma  $\omega$  em um caminho  $S$ , tal integral será definida por:

$$\int_S \omega = \int_S f(x)dx + g(y)dy + g(z)dz$$

No entanto, no caso de uma 2-forma, 3-forma, etc. elas são grandezas que associamos as integrais de superfície, volume, etc. Por exemplo:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_1(\vec{r}), F_2(\vec{r}), F_3(\vec{r}))$$

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy$$

Associamos a 2-forma ao integrando:

$$\eta = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

$$\int_S \eta = \int_S F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy$$

Da mesma maneira, se tivermos uma integral de volume, iremos associar a ela uma 3-forma:

$$\int_V \rho_0(\vec{r}) dV$$

$$\rho = \rho_0 dx \wedge dy \wedge dz$$

De modo que:

$$\int_V \rho = \int_V \rho_0(\vec{r}) dV$$

## 1.7 Teorema de Stokes

Seja  $\omega$  uma 1-forma diferencial definida em uma região  $U$  de  $R^n$ . Se  $E$  é um encadeamento de superfícies contido em  $U$ , então:

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

Para o caso mais simples em que a 1-forma  $gds$  é integrada no retângulo  $[0,1]^2$  a demonstração do teorema de Stokes para no plano ficará:

Como:

$$d(\omega) = \left( \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial t} \right) ds \wedge dt$$

temos que

$$\int_S d\omega = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial t} \right) ds dt$$

Isto é

$$\int_S d\omega = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial g}{\partial s} \right) ds dt - \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right) ds dt$$

Sabemos pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial s} ds dt = \int_0^1 (g(1,t) - g(0,t)) dt$$

Analogamente,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t} ds dt = \int_0^1 (g(s,1) - g(s,0)) ds$$

Assim,

$$\int_S d\omega = \int_0^1 (g(1,t) - g(0,t)) dt - \int_0^1 (g(s,1) - g(s,0)) ds$$

Que podemos por comodidade, reescrever assim:

$$\int_S d\omega = \int_0^1 (g(s,0) ds + g(1,t)) dt - \int_0^1 (g(s,1) - g(0,t)) dt$$

Entretanto, R tem lados:

$$L_1 = [0,1] \times \{0\}$$

$$L_2 = \{1\} \times [0,1]$$

$$L_3 = [0,1] \times \{1\}$$

$$L_4 = \{0\} \times [0,1]$$

Parametrizando  $L_1$  na forma  $(0,0) + s(1,0)$ , vemos que:

$$\int_{L_1} g ds = \int_0^1 g((0,0) + s(1,0)) ds = \int_0^1 g(s,0) ds$$

Que é semelhante a equação que reescrevemos acima. Cálculos semelhantes mostram que:

$$\int_{L_n} \omega = \int_{L_n} g ds$$

corresponde à n-ésima parcela daquela soma. Portanto,

$$\int_S d\omega = \int_{L_1} \omega + \int_{L_2} \omega - \int_{L_3} \omega - \int_{L_4} \omega$$

Porém, sabemos que a fronteira de S é:

$$\partial S = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

E isto nos permite concluir que:

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

Que expressa o chamado “Teorema de Stokes”.

## 1.8 Operador Estrela de Hodge

O operador estrela de Hodge é uma transformação linear, na verdade, um isomorfismo, entre os espaços das  $p$  e  $(p+q)$ -formas.

Sendo assim as diferenciais  $dx^i, i=1,2,\dots,m$ , formam uma base de um espaço vetorial que é considerado em relação às derivadas  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ; estas são 1-formas básicas.

Como exemplo, temos que o espaço vetorial  $\nu = \{(a_1 a_2 a_3)\}$  é dual ao espaço vetorial de planos (funções lineares de  $f$ ) em espaço euclidiano tridimensional  $\nu^* = \{f \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - d = 0\}$ . Então o gradiente

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (a_1 a_2 a_3)$$

nos fornece um mapa um-para-um, diferenciável, de  $\nu^*$  para  $\nu$ . Essas relações duais são generalizadas pelo operador estrela de Hodge, baseado no tensor  $\epsilon$  de Levi-Civita. Este tensor  $\epsilon$  é um símbolo particular do cálculo tensorial, também conhecido como símbolo de permutação. Que pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\epsilon_{ijkl\dots} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k, l, \dots) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, 3, 4, \dots) \\ -1 & \text{si } (i, j, k, l, \dots) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, 3, 4, \dots) \\ 0 & \text{se dois índices são iguais} \end{cases}$$

Onde as permutações pares e ímpares são escritas, respectivamente, como um produto de um número par ou ímpar de transposições (grupo de permutação).

Vamos supor que os vetores unitários  $\hat{x}_i$  é uma base ortonormal orientada do espaço euclidiano tridimensional. Então o operador estrela de Hodge de escalares é definido pelo elemento de base

$$*1 \equiv \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k = \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3$$

Correspondente a  $(\hat{x}_1 \times \hat{x}_2) \cdot \hat{x}_3$  em notação vetorial padrão. Aqui,  $\hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k$  é o produto externo totalmente anti-simétrico dos vetores unitários que correspondem a  $(\hat{x}_i \times \hat{x}_j) \cdot \hat{x}_k$  em notação vetorial padrão. Para vetores, o operador estrela de Hodge é definido para a base de vetores unitários como:

$$* \hat{x}_1 \equiv \frac{1}{2!} \varepsilon_i^{jk} \hat{x}_j \hat{x}_k$$

Sendo que para o caso acima em particular, temos:

$$* \hat{x}_1 = \hat{x}_2 \hat{x}_3$$

$$* \hat{x}_2 = \hat{x}_3 \hat{x}_1$$

$$* \hat{x}_3 = \hat{x}_1 \hat{x}_2$$

O operador estrela de Hodge para áreas orientadas é definido sobre elementos de área de base como:

$$* (\hat{x}_i \hat{x}_j) \equiv \varepsilon^{k}_{ij} \hat{x}_k$$

Portanto,

$$* (\hat{x}_1 \hat{x}_2) = \varepsilon^{3}_{12} \hat{x}_3 = \hat{x}_3$$

$$* (\hat{x}_1 \hat{x}_3) = \varepsilon^{2}_{13} \hat{x}_2 = -\hat{x}_2$$

$$* (\hat{x}_2 \hat{x}_3) = \varepsilon^{1}_{23} \hat{x}_1 = \hat{x}_1$$

Então, o operador estrela de Hodge, para volumes é definido como:

$$* (\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3) \equiv \varepsilon_{123} = 1$$

É interessante notar que o operador estrela de Hodge é responsável por operações que levam aos seguintes resultados:

$$d * df = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$d * d\omega = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}_1)$$

$$d * d\omega_2 = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v}_2)$$

## 2. Aplicações em física

### 2.1 Introdução

Com o desenvolvimento matemático do início do século XX, foram descobertos e estudados novos formalismos que se mostraram extremamente adequados ao estudo de diferentes aplicações em física.

As formas diferenciais, análise vetorial e também o cálculo tensorial, como visto anteriormente, nos oferecem maneiras mais abrangentes, convenientes e também mais concisas com o custo, é claro, de ser um pouco mais abstrata de compreender conceitos físicos envolvidos nestas aplicações.

## 2.2 Eletromagnetismo

### 2.2.1 Equações de Maxwell

Na forma integral as equações de Maxwell são expressas da seguinte forma:

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

sendo  $c$  a velocidade da luz no meio.

Além disso, temos a equação de continuidade:

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

A partir do Teorema de Stokes e associando aos integrandos das integrais de linha, superfície e volume às 1-forma, 2-formas e 3-formas, as equações anteriores se tornam, respectivamente:

$$dD = 4\pi\rho$$

$$dB = 0$$

$$dH = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$dE = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$dJ = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Equações estas que representam as equações de Maxwell em suas formas diferenciais no sentido usual.

Como vimos no capítulo anterior  $d^2 = 0$ , segue que se  $\omega$  e  $\alpha$  são, respectivamente, 0-forma e 1-forma, então:

$$\begin{aligned} d(E + d\omega) &= dE \\ d(B + d\alpha) &= dB \end{aligned}$$

Sendo que  $E$  e  $B$  são, respectivamente, 1 e 2-formas. Aplicando o operador  $d$  a uma 0-forma  $\omega$  ou a uma 1-forma  $\alpha$  é equivalente a tomar o gradiente de  $\omega$  ou o rotacional de  $\alpha$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned} d^2 \omega &= 0 \\ d^2 \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Ambas as equações anteriores nos dizem que o campo  $d\omega$  é irrotacional e o campo  $d\alpha$  é solenoidal.

De posse destas equações as relações constitutivas entre os campos elétricos e deslocamento elétrico, assim como do campo indução magnética e magnético são:

$$\begin{aligned} D &= *\epsilon E \\ B &= *\mu H \end{aligned}$$

onde  $*$  denota, como explicado anteriormente, o *operador estrela de Hodge*, ou também chamado de *dual de Hodge*.

### 2.2.2 Tensor de Faraday

Vamos considerar baseado em [9] a 2-forma  $F$ :

$$F = E \wedge dt + \frac{1}{c} B$$

Sendo que:

$$E = E(\vec{r}, t) = E_1(\vec{r}, t)dx + E_2(\vec{r}, t)dy + E_3(\vec{r}, t)dz$$

$$B = B(\vec{r}, t) = B_1(\vec{r}, t)dy \wedge dz + B_2(\vec{r}, t)dz \wedge dx + B_3(\vec{r}, t)dx \wedge dy$$

No caso, ambas as equações denotam, respectivamente, a 1-forma campo elétrico e a 2-forma campo indução magnética. Se aplicarmos o operador  $d$  na equação  $F$ :

$$\begin{aligned} dF &= dE \wedge dt + \frac{1}{c} dB = \\ &= dE \wedge dt + \frac{1}{c} (\nabla \cdot \vec{B}) dx \wedge dy \wedge dz + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \wedge dt = \\ &= \left( dE + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \right) \wedge dt = 0 \end{aligned}$$

O que nos leva a conclusão de que:

$$dF = 0$$

A equação  $dF$  é equivalente as equações de Maxwell em formas diferenciais vistas anteriormente que são homogêneas. Vamos considerar que 2-forma  $G$ , dual de  $F$ , num meio isotrópico tal que  $\mu = \epsilon = 1$ , seja:

$$G = *F = -E_1 dy \wedge dz + E_2 dx \wedge dz - E_3 dx \wedge dy + (H_1 dz \wedge dt + H_2 dx \wedge dt + H_3 dy \wedge dt)$$

Aplicando o operador  $d$  na equação anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} dG &= -(\nabla \cdot \vec{E}) dx \wedge dy \wedge dz + \\ &\left( -\frac{\partial E_3}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_2}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_3}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dt \\ &\left( \frac{\partial E_2}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_2}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) dx \wedge dz \wedge dt \\ &\left( -\frac{\partial E_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial H_2}{\partial y} - \mu \frac{\partial H_3}{\partial z} \right) dy \wedge dz \wedge dt \end{aligned}$$

Definindo como quadricorrente

$$J' = \rho dx dy dz + J \wedge dt$$

Segue que:

$$dG = *J'$$

Sendo a quadricorrente  $J'$  é definida de modo a se ter que:

$$\begin{aligned} *J' = & -(\nabla \cdot \vec{E}) dx \wedge dy \wedge dz + \\ & \left( -\frac{\partial E_3}{\partial t} - \mu \frac{\partial H_2}{\partial y} + \mu \frac{\partial H_3}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dt \\ & \left( \frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial H_2}{\partial z} + \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) dx \wedge dz \wedge dt \\ & \left( -\frac{\partial E_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial H_2}{\partial y} - \mu \frac{\partial H_3}{\partial z} \right) dy \wedge dz \wedge dt \end{aligned}$$

A equação  $dG$  é equivalente às equações de Maxwell não-homogêneas vistas em 2.1.1.

## 2.3 Termodinâmica

O tratamento das relações de Maxwell a seguir será baseado no trabalho do Prof. Bassalo [5]

### Relações de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879), matemático escocês, publicou um livro intitulado *Theory of Heat* em que deduziu relações entre as variáveis termodinâmicas: pressão (P), volume (V), entropia (S), temperatura (T), números de moles (N), potencial eletroquímico ( $\mu$ ) e suas derivadas parciais.

Relações estas que foram deduzidas utilizando de argumentos geométricos baseado no diagrama de eixos ortogonais pressão-volume (P – V). Essa aplicação da geometria à termodinâmica foi logo estendida pelo físico norte-americano Josiah Williard Gibbs (1839-1903), em 1873, ao representar as propriedades termodinâmicas das substâncias por intermédio de superfícies entropia-volume-temperatura e os respectivos diagramas: entropia-temperatura (S – T), entropia-volume (S – V) e volume-temperatura (V – T).

O estudo analítico das superfícies por meio da transformada de Legendre, feito pelo matemático francês Adrien Marie Legendre (1752-1833), e o estudo das derivadas parciais permitiu a demonstração das relações de Maxwell.

As formas diferenciais permitiram estudos posteriores que levaram à formulação axiomática da Termodinâmica, inclusive das próprias relações de Maxwell.

#### 2.3.1 Função Energia Interna $U(S, V, N)$

Para este caso a transformada de Legendre correspondente será dada por:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

Para o par de variáveis independentes, teremos para  $N = \text{constante}$ :

$$dT(S, V) = \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_{V, N} dS + \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S, N} dV$$

$$dP(S, V) = \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V, N} dS + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{S, N} dV$$

$$d\mu(S, V) = \left( \frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_{V, N} dS + \left( \frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{S, N} dV$$

Calculando a diferenciação exterior da expressão  $dU$  por intermédio da expressão  $d(a \wedge b) = (da) \wedge b + (-1)^p a \wedge db$  e também utilizando o Lema de Poincaré visto anteriormente, lembrando que os potenciais e as variáveis termodinâmicas são 0-formas e que  $dN = 0$ , resultará:

$$ddU = dT \wedge dS + T \wedge ddS - dP \wedge dV - P \wedge ddV = 0$$

$$\boxed{dT \wedge dS = dP \wedge dV}$$

Utilizando das expressões referentes as formas diferenciais e aplicando a diferenciação exterior as relações de Maxwell:

$$\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_{V, N} dS + \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S, N} dV \right] \wedge dS = \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V, N} dS + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{S, N} dV \right] \wedge dV$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S, N} dV \wedge dS = - \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V, N} dV \wedge dS \rightarrow \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S, N} = - \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V, N}$$

### 2.3.2 Função Energia Interna $U(S, V, \mu)$

Para este caso, vamos considerar que a transformada de Legendre correspondente será dada por:

$$dU = TdS - PdV - Nd\mu$$

E as relações de Maxwell correspondentes ao par  $(S, V)$ , considerando que para este par de variáveis independentes, teremos  $\mu$  sendo uma constante, será:

$$dT(S, V) = \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_{V, \mu} dS + \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S, \mu} dV$$

$$dP(S,V) = \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,\mu} dS + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{S,\mu} dV$$

$$dN(S,V) = \left( \frac{\partial N}{\partial S} \right)_{V,\mu} dS + \left( \frac{\partial N}{\partial V} \right)_{S,\mu} dV$$

Calculando a diferenciação externa de  $dU$  para energia interna por intermédio da mesma expressão utilizada em 2.2.1 junto ao Lema de Poincaré, resultará (lembrar que  $d\mu = 0$ ):

$$ddU = dT \wedge dS + T \wedge ddS - dP \wedge dV - P \wedge ddV = 0$$

$$\boxed{dT \wedge dS = dP \wedge dV}$$

Com isso:

$$\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_{V,\mu} dS + \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,\mu} dV \right] \wedge dS = \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,\mu} dS + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{S,\mu} dV \right] \wedge dV$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,\mu} dV \wedge dS = - \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,\mu} dV \wedge dS \rightarrow \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,\mu} = - \left( \frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,\mu}$$

### 2.3.3 Função Energia Interna $U(T, V, \mu)$

Neste caso a transformada de Legendre será:

$$dU = -SdT - PdV - Nd\mu$$

E para o caso das relações de Maxwell correspondentes ao par de variáveis independentes  $(T, \mu)$ , teremos para um  $V$  constante:

$$dS(T\mu) = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\mu,V} dT + \left( \frac{\partial S}{\partial \mu} \right)_{T,V} d\mu$$

$$dP(T\mu) = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\mu,V} dT + \left( \frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{T,V} d\mu$$

$$dN(T\mu) = \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu,V} dT + \left( \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T,V} d\mu$$

Utilizando a expressão para diferenciação exterior vista tanto em 2.2.1 quanto em 2.2.2 e usando o Lema de Poincaré lembrando que  $dV = 0$ , resultará:

$$ddU = -dS \wedge dT - S \wedge ddT - dN \wedge d\mu - N \wedge dd\mu = 0$$

$$\boxed{dS \wedge dT = -dN \wedge d\mu}$$

A partir das relações de Maxwell e considerando as formas diferenciais chegaremos que:

$$\left[ \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\mu, V} dT + \left( \frac{\partial S}{\partial \mu} \right)_{T, V} d\mu \right] \wedge dT = - \left[ \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu, V} dT + \left( \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T, V} d\mu \right] \wedge d\mu$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \mu} \right)_{T, V} d\mu \wedge dT = \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu, V} d\mu \wedge dT \rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial \mu} \right)_{T, V} = \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu, V}$$

### 2.3.4 Função Energia Interna $U(S, P, \mu)$

A transformada de Legendre para este caso, em específico, será dada por:

$$dU = TdS + VdP - Nd\mu$$

E para o par  $(S, P)$  de variáveis independentes, teremos para o caso de  $\mu$  constante as seguintes relações de Maxwell:

$$dT(S, P) = \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_{P, \mu} dS + \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S, \mu} dP$$

$$dV(S, P) = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P, \mu} dS + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{S, \mu} dP$$

$$dN(S, P) = \left( \frac{\partial N}{\partial S} \right)_{P, \mu} dS + \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right)_{S, \mu} dP$$

Calculando a diferenciação exterior da transformada de Legendre por intermédio da expressão utilizada no item 2.2.1 (e subseqüentes) e o Lema de Poincaré, lembrando que  $d\mu = 0$ , resultará:

$$ddU = dT \wedge dS + T \wedge ddS + dV \wedge dP + V \wedge ddP = 0$$

$$\boxed{dT \wedge dS = -dV \wedge dP}$$

Com isso:

$$\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_{P,\mu} dS + \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S,\mu} dP \right] \wedge dS = - \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P,\mu} dS + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{S,\mu} dP \right] \wedge dP$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S,\mu} dP \wedge dS = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P,\mu} dP \wedge dS \rightarrow \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S,\mu} = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P,\mu}$$

### 2.3.5 Função Energia Livre de Helmholtz $F(T, V, N)$

Para este caso a transformada de Legendre será dada pela expressão:

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN$$

E para o par  $(T, V)$  de varáveis independentes as relações de Maxwell serão dadas (considerando  $N = \text{constante}$ ) por:

$$dS(T, V) = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,N} dV$$

$$dP(T, V) = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} dT + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T,N} dV$$

$$d\mu(T, V) = \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{V,N} dT + \left( \frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{T,N} dV$$

Calculando a diferenciação exterior da transformada de Legendre por intermédio da expressão e utilizando do Lema de Poincaré, lembrando que  $dN = 0$ , resultará:

$$ddF = -dS \wedge dT - S \wedge ddT - dP \wedge dV - P \wedge ddV = 0$$

$$\boxed{dS \wedge dT = -dP \wedge dV}$$

Com isso:

$$\left[ \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,N} dV \right] \wedge dT = - \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} dT + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T,N} dV \right] \wedge dV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} dV \wedge dT = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} dV \wedge dT \rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$$

### 2.3.6 Função Entalpia H(S, P, N)

Neste caso a transformada de Legendre correspondente será dada por:

$$dH = TdS + VdP + \mu dN$$

Para o par (S, N) de variáveis independentes as relações de Maxwell serão dadas (P = constante), por:

$$dT(S, N) = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{N,P} dS + \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,P} dN$$

$$dV(S, N) = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{N,P} dS + \left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_{S,P} dN$$

$$d\mu(S, N) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{N,P} dS + \left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_{S,P} dN$$

Calculando a diferenciação exterior por intermédio da expressão vista anteriormente e utilizando o Lema de Poincaré e lembrando que  $dP = 0$ , resultará:

$$ddH = -dT \wedge dS - T \wedge ddS - d\mu \wedge dN - \mu \wedge ddN = 0$$

$$\boxed{dT \wedge dS = -d\mu \wedge dN}$$

Com isto e seguindo as formas diferenciais:

$$\left[ \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{N,P} dS + \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,P} dN \right] \wedge dS = - \left[ \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{N,P} dS + \left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_{S,P} dN \right] \wedge dN$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,P} dN \wedge dS = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{N,P} dN \wedge dS \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{N,P}$$

### 2.3.7 Função Entalpia Livre (Função de Gibbs)

A transformada de Legendre para este caso será dada por:

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN$$

Para o par (T, P) de variáveis independentes, teremos para o caso de N=constante:

$$dS(T, P) = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P, N} dT + \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T, N} dP$$

$$dV(T, P) = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, N} dT + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T, N} dP$$

$$d\mu(T, P) = \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{P, N} dT + \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{T, N} dP$$

Utilizando as expressões anteriores para calcular a diferenciação externa e também o Lema de Poincaré, resultará (lembrar que  $dN = 0$ ):

$$ddG = -dS \wedge dT - S \wedge ddT - dV \wedge dP - V \wedge ddP = 0$$

$$\boxed{dS \wedge dT = dV \wedge dP}$$

Com as relações de Maxwell e aplicando elas na expressão anterior, teremos:

$$\left[ \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P, N} dT + \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T, N} dP \right] \wedge dT = \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, N} dT + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T, N} dP \right] \wedge dP$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T, N} dP \wedge dT = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, N} dP \wedge dT \rightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T, N} = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, N}$$

### 3.0 Exemplos

#### 3.1 1-forma Constante [1]

Para uma força constante  $\mathbf{F} = (A, B, C)$ , o trabalho realizado ao longo do deslocamento  $P = (3, 2, 1)$  a  $Q = (4, 5, 6)$  é dado por:

$$W = A(4 - 3) + B(5 - 2) + C(6 - 1) = A + 3B + 5C$$

Se  $\mathbf{F}$  é um campo de força, então suas componentes retangulares  $A(x, y, z)$ ,  $B(x, y, z)$  e  $C(x, y, z)$  dependerão da localização e a **1-forma** (não-constante)  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  corresponderá ao conceito de trabalho realizado contra o campo de

força  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  ao longo de  $d\mathbf{r}$  sobre uma curva do espaço. Uma quantidade finita de trabalho

$$W = \int_C [A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz]$$

Envolve a familiar integral de linha ao longo de uma curva orientada  $C$  em que a 1-forma  $dW$  descreve a quantidade de trabalho para pequenos deslocamentos (segmentos na trajetória  $C$ ). Sob essa perspectiva, o integral

$\int_a^b f(x)dx$  de uma integral  $\int_a^b f(x)dx$  consistindo na função  $f$  e na medida  $dx$  como o

comprimento orientado aqui é considerado uma **1-forma**. O valor desta integral é obtido da integral de linha ordinária.

### 3.2 Fluxo Magnético Através de uma Superfície Orientada [1]

Se  $\mathbf{B}=(A, B, C)$  é uma indução magnética constante, então a constante **2-forma**

$$A dydz + B dzdx + C dxdy$$

descreve o fluxo magnético através de um retângulo orientado. Se  $\mathbf{B}$  é um campo de indução magnética que varia através de uma superfície  $S$ , então o fluxo

$$\phi = \int_S [B_x(\vec{r}) dydz + B_y(\vec{r}) dzdx + B_z(\vec{r}) dxdy]$$

através da superfície orientada  $S$  envolve a familiar integração de Riemann sobre ângulos orientados aproximadamente pequenos a partir dos quais  $S$  é montada.

A definição de  $\int \omega$  depende da decomposição de  $\omega = \sum_i \omega_i$ , em que cada uma das formas diferenciais  $\omega_i$  é não nula apenas em um pequeno trecho da superfície  $S$  que cobre a superfície. Então, pode-se demonstrar que  $\sum_i \int \omega_i$  converge, porque os trechos ficam cada vez menores e mais numerosos, até o limite  $\int \omega$ , que é independente dessas decomposições.

### 3.3 Energia Potencial [1]

Como aplicação em duas dimensões (por simplicidade), considere o potencial  $V(\mathbf{r})$  numa 0-forma e  $dV$  sua derivada exterior. Integrando  $V$  ao longo de uma trajetória orientada  $C$  de  $\mathbf{r}_1$  até  $\mathbf{r}_2$  temos

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = \int_C dV = \int_C \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right) = \int_C \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

Em que a última integral é a fórmula-padrão para a diferença de potencial de energia que faz parte do teorema de conservação de energia. A trajetória e a independência de parametrização são evidentes nesses casos especiais.

### 3.4 Teorema de Stokes [1]

Vamos esboçar, primeiramente, a derivação-padrão da versão mais simples do teorema de Stokes para um retângulo  $S = [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$  orientado em sentido anti-horário, sendo  $\partial S$  sua fronteira:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (Adx + Bdy) &= \int_a^b A(x, c) dx + \int_c^d B(b, y) dy + \int_b^a A(x, d) dx + \int_d^c B(a, y) dy \\ &= \int_c^d [B(b, y) - B(a, y)] dy - \int_a^b [A(x, d) - A(x, c)] dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial B}{\partial x} dx dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial A}{\partial y} dy dx \\ &= \int_S \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Que vale para qualquer superfície simplesmente conectada a  $S$  que possa ser reunida por retângulos.

Este mesmo teorema pode ser demonstrado utilizando as formas diferenciais em duas dimensões:

$$\begin{aligned} d(Adx + Bdy) &= dAdx + dBdy \\ &= \left( \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy \right) dx + \left( \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy \right) dy = \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Integrando sobre uma superfície  $S$  e sua fronteira  $\partial S$ , respectivamente, obtemos:

$$\int_{\partial S} (Adx + Bdy) = \int_S d(Adx + Bdy) = \int_S \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy$$

Aqui, as contribuições à esquerda da integral advindas de fronteiras internas se cancelam como de hábito, porque são orientadas em direções opostas sobre retângulos adjacentes. Para cada retângulo interno orientado que compõe a superfície simplesmente conectada  $S$ , usamos:

$$\int_S ddx = \int_{\partial S} dx = 0$$

É interessante notar que a derivada exterior gera automaticamente a componente  $z$  do rotacional.

Em três dimensões, o teorema de Stokes deriva da identidade de forma diferencial que envolve o potencial vetor  $A$  e a indução magnética  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ,

$$\begin{aligned} d(A_x dx + A_y dy + A_z dz) &= dA_x dx + dA_y dy + dA_z dz \\ &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \right) dx + \dots \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

gerando todos os componentes do rotacional em espaço tridimensional. Essa identidade é integrada sobre cada retângulo orientado que compõe a superfície simplesmente conectada  $S$  (que não tem buracos, isto é, onde cada curva se contrai até um ponto da superfície) e então é somada sobre todos os retângulos adjacentes, para resultar o fluxo magnético através de  $S$ ,

$$\phi = \int_S [B_x dydz + B_y dzdx + B_z dxdy] = \int_{\partial S} [A_x dx + A_y dy + A_z dz]$$

No caso de utilizar a notação-padrão de análise vetorial:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

### 3.5 Teorema de Gauss

Considere a lei de Gauss [1]. Integramos a densidade elétrica

$$\rho = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \text{ sobre o volume do paralelepípedo } V = [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f]$$

orientado por  $dxdydz$  (para o lado direito), o lado  $x=b$  de  $V$  orientado por  $dydz$  (sentido anti-horário, como vemos por  $x>b$ ), e assim por diante. Usando

$$E_x(b, y, z) - E_x(a, y, z) = \int_a^b \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

Temos na notação de formas diferenciais, somando sobre todos os paralelepípedos que compõe o volume  $\nu$ :

$$\int_{\partial \nu} E_x dydz = \int_{\nu} \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

Integrando a identidade (2-forma) do fluxo elétrico

$$\begin{aligned} d(E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy) &= dE_x dydz + dE_y dzdx + dE_z dxdy \\ &= \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

sobre a superfície simplesmente conectada  $\partial \nu$  temos o teorema de Gauss,

$$\int_{\partial \nu} E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy = \int_{\nu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Em notação-padrão de análise vetorial:

$$\int_{\partial \nu} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\nu} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r = \frac{q}{\epsilon_0}$$

### 3.6 Campo elétrico de uma carga pontual

Calcularemos o fluxo do campo elétrico correspondente a uma carga pontual  $q > 0$  através de uma esfera [8]. Pela lei de Coulomb, este campo é dado por:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{kq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

onde  $k$  é uma constante, que não precisamos explicitar.

Para calcular o fluxo, usamos a 2-forma correspondente, que neste caso será:

$$\Phi_E = \frac{kq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy)$$

Como o campo é central e a integração será sobre a superfície de uma esfera, é melhor utilizar coordenadas esféricas:

$$S(x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

onde  $r$  é o raio (constante!) da esfera. Com isso,

$$S^*(dx \wedge dy) = r^2 \sin(\phi) \cos(\phi) d\theta \wedge d\phi$$

$$S^*(dx \wedge dz) = r^2 \sin(\theta) \sin^2(\phi) d\theta \wedge d\phi$$

$$S^*(dy \wedge dz) = -r^2 \cos(\theta) \sin(\phi) d\theta \wedge d\phi$$

Portanto, após os devidos cancelamentos,

$$S^*(\Phi_E) = -kq \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\theta \wedge d\phi$$

Com isso o fluxo total através da esfera será:

$$\int_S \Phi_E = \int_R S^*(\Phi_E) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -kq \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\theta d\phi$$

$$\int_S \Phi_E = 2\pi kq \cos^2(\phi) \Big|_0^\pi = 4\pi kq$$

## 4.0 Conclusão

Foi possível observar durante a realização do trabalho, que as formas diferenciais levam a uma unificação de conceitos e teoremas de análise vetorial. Esta unificação contribui para a compreensão de diversos problemas físicos de uma maneira muito mais concisa do que ocorre com o uso do cálculo vetorial às custas de exigir uma abstração um pouco maior.

Na física teórica essa ferramenta matemática pode ser muito útil, pois ela nos revela uma estrutura geométrica presente em operações do cálculo vetorial que é difícil de perceber com as técnicas usuais do cálculo vetorial.

Um grande exemplo fica para o estudo das relações de Maxwell em Termodinâmica que são compactadas de modo bastante expressivo quando estudadas com o formalismo apresentado. Um benefício adicional é que as relações de Maxwell podem ser interpretadas de uma nova maneira; permitindo não só uma formulação axiomática da Termodinâmica, mas também apresentando um modo mais geométrico e generalizado.

Outra característica muito importante deste formalismo é que ele se presta, em alguns casos, a servir como substituto do formalismo tensorial. Muitas vezes o uso do cálculo exterior associado aos tensores permite obter resultados que seriam inviáveis utilizando somente cálculo tensorial.

Uma importante contribuição das formas diferenciais fica também para a generalização da idéia de um potencial; que é a recíproca do Lema de Poincaré.

## **Bibliografia**

[1] ARFKEN G; WEBER H. Métodos Matemáticos para Engenharia e Física. 1. ed. Campus Elsevier, 2007. 936p.

[2] FLANDERS H. Differential Forms with Applications on Physical Sciences. New York, New York: Dover, 1963.

[3] FLEMMING H. Formas Diferenciais. Disponível em: <http://fma.if.usp.br/~fleming/vfield/node41.html>. Acesso em: 02 de ago. 2013.

[4] HSU H. P. Análise Vetorial, Coleção Técnica, 1972.

[5] J. M. F. Bassalo, Revista Brasileira de Ensino de Física, 22, 210, 2000.

[6] SPIVAK M., Calculus on manifolds, Benjamin/Cummings, New York (1965).

[7] J.R. Tyldesley (1973). An introduction to Tensor Analysis: For Engineers and Applied Scientists. Longman.

[8] COUTINHO S. C. Cálculo vetorial com formas diferenciais.

[9] FREIRE, Igor L. Formas diferenciais em eletrodinâmica. 13 de dezembro de 2005.

## Bibliografia

- [1] ARFKEN G; WEBER H. Métodos Matemáticos para Engenharia e Física. 1. ed. Campus Elsevier, 2007. 936p.
- [2] FLANDERS H. Differential Forms with Applications on Physical Sciences. New York, New York: Dover, 1963.
- [3] FLEMMING H. Formas Diferenciais. Disponível em: <http://fma.if.usp.br/~fleming/vfield/node41.html>. Acesso em: 02 de ago. 2013.
- [4] HSU H. P. Análise Vetorial, Coleção Técnica, 1972.
- [5] J. M. F. Bassalo, Revista Brasileira de Ensino de Física, 22, 210, 2000.
- [6] SPIVAK M., Calculus on manifolds, Benjamin/Cummings, New York (1965).
- [7] J.R. Tyldesley (1973). An introduction to Tensor Analysis: For Engineers and Applied Scientists. Longman.
- [8] COUTINHO S. C. Cálculo vetorial com formas diferenciais.