



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# Oscilações Lineares e Não-Lineares em Circuitos Elétricos e Estudo de Circuitos Memristores Hamiltonianos

Elida Canaza Anchapuri

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Presidente Prudente - SP  
Setembro de 2020



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Oscilações Lineares e Não-Lineares em  
Circuitos Elétricos e Estudo de Circuitos  
Memristores Hamiltonianos**

Elida Canaza Anchapuri

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente - SP

Setembro de 2020

A539o	<p>Anchapuri, Elida Canaza</p> <p>Oscilações Lineares e Não-Lineares em Circuitos Elétricos e Estudo de Circuitos Memristores Hamiltonianos / Elida Canaza Anchapuri. -- Presidente Prudente, 2020</p> <p>97 f. : il.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente</p> <p>Orientador: Marcelo Messias</p> <p>1. Circuitos elétricos. 2. Memristor. 3. Sistemas hamiltonianos. I.</p> <p>Título.</p>
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Oscilações lineares e não lineares em circuitos elétricos e estudo de circuitos  
menristores Hamiltonianos

**AUTORA: ELIDA CANAZA ANCHAPURI**

**ORIENTADOR: MARCELO MESSIAS**

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA  
APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. MARCELO MESSIAS

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

**VIDEOCONFERÊNCIA**

Profa. Dra. CRISTIANE NESPOLI DE OLIVEIRA

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

**VIDEOCONFERÊNCIA**

Prof. Dr. ALISSON DE CARVALHO REINOL

Departamento Acadêmico de Matemática / Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Presidente Prudente, 16 de setembro de 2020

*Ao Deus pelo infinito amor e minha família, dedico.*

---

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por minha vida, família e amigos(as). Agradeço infinitamente a ele por ser aquela luz que guia meu caminho.

Ao Juan Carlos, meu esposo e companheiro da minha vida, por todo amor, compreensão e incentivo.

Aos meus pais Eduardo e Maura, a quem admiro e tenho como exemplos de vida.

Aos meus irmãos Brady, Marcos, Alexander e Diego por sempre acreditarem em mim.

Ao Professor Marcelo Messias pela paciência, apoio, incentivo e por todos os ensinamentos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da UNESP pelos conhecimentos transmitidos.

A todos os meus colegas da Pós-Graduação pela amizade e que de alguma ou outra forma me ajudaram, em especial ao Marcos e Rafael.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

*A natureza está escrita em linguagem matemática.*  
*Galileu Galilei*

# Resumo

---

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo detalhado da estabilidade das oscilações geradas pelas equações diferenciais ordinárias, lineares e não-lineares, que modelam circuitos elétricos. As soluções de tais equações podem ser periódicas, amortecidas ou caóticas. Iniciamos com o estudo dos circuitos  $RLC$ , modelados por equações lineares, e em seguida estudamos as conhecidas equações não-lineares de Van der Pol e Duffing. Com base nesse estudo, analisamos as bifurcações que ocorrem em sistemas não-lineares de equações diferenciais, que servem como modelo matemático de circuitos elétricos formados por certas combinações dos quatro componentes eletrônicos fundamentais: capacitor, indutor, resistor e memristor. A existência dos memristores (ou resistores com memória) foi teoricamente proposta na década de 1970, e sua construção física foi possível somente em 2008, com o desenvolvimento da nanotecnologia. Estima-se que tal componente possui um grande potencial de aplicações, sendo assim o estudo de modelos matemáticos de circuitos elétricos envolvendo memristores despertou grande interesse da comunidade científica. Além do estudo teórico das equações diferenciais, ao longo do trabalho desenvolvemos experimentos computacionais com o Software MAPLE™, para melhor compreender o comportamento das soluções. O principal objetivo da análise aqui desenvolvida é obter um melhor entendimento do comportamento dinâmico dos memristores, ao serem conectados aos outros componentes elétricos (capacitores, indutores e resistores).

Palavras-Chave: *Circuitos elétricos, Memristor, Sistemas hamiltonianos, Estabilidade, Bifurcações, Oscilações periódicas, Comportamento caótico.*



# Abstract

---

The present work aims to present a detailed study of the stability of oscillations generated by linear and non-linear ordinary differential equations, which are used to model electrical circuits. The solutions of such equations can be periodic, damped or chaotic. We start with the study of the *RLC* circuits, modeled by linear equations, and then we study the well-known non-linear van der Pol and Duffing equations. Based on this study, we analyzed the bifurcations that occur in a system of non-linear differential equations, which serves as a mathematical model of electrical circuit formed by some combinations of the four fundamental electronic components: capacitor, inductor, resistor and memristor. The existence of memristors (or memory resistor) was theoretically proposed in the 1970s, and their physical construction was only possible in 2008, with the development of nanotechnology. It is estimated that such a component has great potential for applications, so the study of mathematical models of electrical circuits involving memristors has aroused great interest in the scientific community. In addition to the theoretical study of differential equations, throughout the work we developed computational experiments with the Software MAPLE™, to better understand the behavior of the solutions. The main purpose of our analysis is to better understand the dynamical behavior of memristors, when connected to the other circuit elements (capacitors, inductors and resistors).

Keywords: *Electric circuits, Memristor, Hamiltonian systems, Stability, Periodic oscillations, Chaotic behavior.*



# Lista de Figuras

2.1	O conjunto invariante $S$ para o sistema (2.1). . . . .	20
2.2	Diagrama de estabilidade para a equação (2.3). . . . .	22
2.3	Uma trajetória $\Gamma$ de (2.1) que se aproxima do ponto $w$ -limite $p \in E$ . . . . .	28
2.4	Ciclo limite do sistema (2.8). . . . .	29
2.5	Aplicação de Poincaré. . . . .	30
2.6	A geometria da aplicação de Poincaré para uma órbita periódica. . . . .	31
2.7	Aplicação de Poincaré para o sistema (2.9). . . . .	32
3.1	Retratos de fase do sistema (3.2) para $\mu < 0, \mu = 0$ e $\mu > 0$ . . . . .	36
3.2	Retratos de fase da equação diferencial (3.4) ao variarmos o parâmetro $\mu$ . . . . .	37
3.3	Diagrama da bifurcação sela-nó da equação diferencial (3.4). . . . .	37
3.4	Retrato de fase para a equação diferencial (3.5). . . . .	37
3.5	Diagrama de bifurcação transcritical da equação diferencial (3.5). . . . .	38
3.6	Retrato de fase da equação diferencial (3.6). . . . .	38
3.7	Diagrama de bifurcação da bifurcação Pitchfork da equação diferencial (3.6). . . . .	38
3.8	Os retratos de fase para o sistema (3.8) para $\mu$ próximo de $\mu = 0$ . . . . .	40
3.9	Os retratos de fase para o sistema (3.9). . . . .	41
3.10	Os retratos de fase para o sistema (3.13), para diferentes valores de $\mu$ . . . . .	44
3.11	Órbita homoclínica. . . . .	44
3.12	Os retratos de fase para o sistema (3.15). (a) $(-1, 0)$ é um foco estável, (b) $(-1, 0)$ é um foco fraco estável, (c) existência de um ciclo limite, (d) Órbita homoclínica, (e) $(-1, 0)$ é um foco instável. . . . .	45
4.1	Trajetórias da equação (4.4). . . . .	48
4.2	Comportamento periódico de uma solução da equação (4.8) (sistema massa-mola sem atrito). . . . .	50
4.3	Esquema de um circuito elétrico LC. . . . .	50
4.4	Solução da equação (4.10) com $\sigma > \omega_0$ : movimento super-amortecido. . . . .	53
4.5	Solução da equação (4.10) com $\sigma < \omega_0$ : movimento sub-amortecido. . . . .	53
4.6	Solução da equação (4.10) com $\sigma = \omega_0$ : movimento criticamente amortecido. . . . .	54
4.7	(a) Retrato de fase no plano $(x, x')$ e (b), (c) soluções numéricas de $x(t), y(t) = x'(t)$ para a equação diferencial (4.11) com $w_d$ próximo de $w_0$ . . . . .	55
4.8	Fenômeno de ressonância das soluções da equação (4.11) quando $w_d = w_0$ . . . . .	55
4.9	Comportamento periódico dada pela solução particular $x_p(t)$ da equação (4.2), para $t > 0$ . . . . .	56
4.10	Retrato de fase para o sistema não-linear (4.16). . . . .	57
5.1	Circuito elétrico $RLC$ em série. . . . .	59
5.2	Possíveis tipos de movimentos da voltagem e corrente em um circuito elétrico RLC. . . . .	60
5.3	Retrato de fase do sistema (5.3) com $b = 0$ e diferentes valores de $k$ : existência de um ciclo-limite estável. . . . .	63

5.4	Retrato de fase, solução numérica $x(t)$ e seção de Poincaré, para o sistema (5.3) com $b = 15$ , $k = 5$ e $w = 7$ . O movimento corresponde a uma órbita quase-periódica. . . . .	64
5.5	Retrato de fase e solução numérica $x(t)$ e seção de Poincaré, para o sistema (5.3) com valores $b = 25$ , $k = 5$ e $w = 7$ . Corresponde à órbita periódica. . . . .	64
5.6	Retrato de fase, solução numérica de $x(t)$ e seção de Poincaré, para o sistema (5.3) com valores $b = 50$ , $k = 5$ e $w = 7$ . Corresponde à órbita quase-periódica. . . . .	64
5.7	Retrato de fase, solução numérica de $x(t)$ e seção de Poincaré, para o sistema (5.3) com valores $b = 55$ , $k = 5$ e $w = 7$ . Corresponde à órbita periódica. . . . .	65
5.8	(a) Retrato de fase para o sistema (5.3) com valores $k = b = 5$ e $w = 2.466$ : comportamento caótico das soluções. (b) Soluções $x(t)$ com condições iniciais $(4, 0)$ (azul) e $(4, 0001)$ (vermelha), mostrando divergência exponencial (ou sensibilidade com relação às condições iniciais). (c) Seção de Poincaré. . . . .	65
5.9	$\mu = 0$ , $k = 0$ . . . . .	67
5.10	$\mu = 0$ , $k = 0.5$ . . . . .	67
5.11	Retrato de fase e aplicação de Poincaré para o sistema (5.7) com $k = 0.3$ e $\omega = 1.25$ . A parte (h) mostra um atrator caótico na seção de Poincaré. . . . .	68
5.12	Esquema com os quatro elementos fundamentais de um circuito (resistor, capacitor, indutor e memristor) e suas relações com as variáveis voltagem, corrente, carga e fluxo. . . . .	70
5.13	Circuito elétrico $LM$ formado por um indutor $L$ e um dispositivo memristivo. . . . .	72
5.14	Retrato de fase do sistema (5.13) com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ . Os pontos de equilíbrio $(-\beta, \pm 1)$ são centros. . . . .	74
5.15	(a) e (b) Coordenadas $x(t)$ e $i(t)$ da solução do sistema (5.13) para $i \neq 0$ , com parâmetros $\alpha = 1$ , $\beta = 0$ e condições iniciais $x(0) = 0.1$ , $i(0) = 0.1$ . (c) Gráfico da voltagem $v(t) = M(x)i = (x + \beta)i$ . . . . .	75
5.16	Retrato de fase do sistema (5.13) para $i = 0$ . Não existem pontos de equilíbrio e as soluções ficam contidas em retas paralelas ao eixo- $x$ . . . . .	75
5.17	Retrato de fase do sistema (5.17) para $ix \neq 0$ , com os parâmetros $\alpha = 1$ , $\beta = 0.6$ . . . . .	77
5.18	Circuito elétrico $LM$ formado por um indutor $L$ e um dispositivo memristivo, ao qual foi conectada uma fonte de tensão periódica $v(t)$ . . . . .	77
5.19	Retrato de fase do sistema (5.22) com parâmetros $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ , $\omega = 1$ , a) $\mu = 0.2$ , b) $\mu = 0.3$ , c) $\mu = 1$ , d) $\mu = 2$ , com condição inicial $(0.1, 0.1)$ , $t \in (0, 100)$ . Apresentam comportamentos (a) e (b) não conservativos, (c) aparente comportamento quase-periódico e (d) periódico. . . . .	79
5.20	Retrato de fase e aplicação de Poincaré para o sistema (5.22) com $\mu = 0.8$ , $\omega = 1$ , $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ , com condição inicial $(0.1, 0.1)$ , $t \in (0, 10)$ . Corresponde a uma órbita periódica. . . . .	79
5.21	Retrato de fase e aplicação de Poincaré para o sistema (5.22) com $\mu = 0.7$ , $\omega = 1$ , $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ , com condição inicial $(0.1, 0.1)$ e $t \in (0, 500)$ . Aparente comportamento caótico das soluções. . . . .	80
5.22	Solução numérica de $x(t)$ , $i(t)$ do sistema (5.22) em função do tempo $t$ , com condições iniciais $(0.1, 0.1)$ e $(0.1, 0.001)$ , parâmetros $\alpha = 1$ , $\beta = 0$ , $\mu = 0.7$ , $\omega = 1$ e $t \in (-100, 100)$ . Oscilações não sinusoidais, mostrando divergência exponencial (sensibilidade com relação às condições iniciais). . . . .	80
5.23	Retrato de fase do sistema (5.23), com parâmetros $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ , $\omega = 1$ , a) $\mu = 0.3$ , b) $\mu = 0.7$ , condições iniciais $(0.86, -5)$ , $(-0, 86, -5)$ , e $t \in (-100, 100)$ . . . . .	81
5.24	Retrato de fase e aplicação de Poincaré para o sistema (5.23), com condição inicial $(0.86, -5)$ , parâmetros $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ , $\mu = 0.02$ , $\omega = 1$ , e $t \in (-100, 100)$ . Aparente comportamento caótico das soluções. . . . .	81

5.25	Gráfico das funções coordenadas $x(t)$ e $i(t)$ de uma solução do sistema (5.23) em função do tempo $t$ , com $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ , $\mu = 0.02$ e $\omega = 1$ . Condição inicial $(0.86, -5)$ e $t \in (0, 400)$ . . . . .	82
5.26	Circuito MLC. . . . .	82
5.27	Retrato de fase do sistema (5.26) restrito ao plano- $yz$ , com parâmetros $\alpha = 1$ , $\beta = 1$ e: a) $\mu = 0.5$ e $\omega = 2$ , b) $\mu = 1$ e $\omega = 0.3$ , e c) $\mu = 0$ e $\omega = 0.3$ . . . . .	85
5.28	Retratos de fase do sistema (5.26), com parâmetros $\alpha = 0.1$ , $\beta = 0.1$ , $\omega = 0.1$ , e: a) $\mu = 0$ , b) $\mu = 0.5$ e c) $\mu = 0.7$ , d) $\mu = 0.9$ , e) $\mu = 1.5$ . Em f) tomamos $\mu = 1$ , $\omega = 0$ . . . . .	86
5.29	(a) Retrato de fase do sistema (5.26) com parâmetros $\alpha = 0.1$ , $\beta = 1$ , $\mu = 0.1$ e $\omega = 0.1$ , condições iniciais $(-2, -2, -2.5)$ e $(2, 2, 1)$ , $t \in (0, 1500)$ . (b) Projeção no plano- $yz$ . . . . .	87
5.30	Coordenadas (a) $x(t)$ , (b) $y(t)$ e (c) $z(t)$ das soluções do sistema (5.26) com parâmetros $\alpha = 0.1$ , $\beta = 1$ , $\mu = 0.1$ e $\omega = 0.1$ , condições iniciais $(2, 2, 1)$ e $(2, 2, 0.001)$ , $t \in (0, 1500)$ . (Apresentam sensibilidade com respeito as condições iniciais). . . . .	87
5.31	Seções de Poincaré do sistema Memristor Hénon e Heiles (5.32). As curvas fechadas mostram soluções quase periódicas. . . . .	90



# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>19</b>
2.1 Teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias: alguns resultados fundamentais . . . . .	19
2.2 O fluxo definido por uma equação diferencial . . . . .	19
2.3 Linearização . . . . .	21
2.4 Estabilidade e funções de Lyapunov . . . . .	23
2.5 Sistemas hamiltonianos e sistemas gradiente . . . . .	25
2.6 Conjuntos limites e atratores . . . . .	27
2.7 Órbitas periódicas e ciclos limites . . . . .	29
2.8 Aplicação de Poincaré . . . . .	30
<b>3 Teoria das Bifurcações</b>	<b>35</b>
3.1 Estabilidade estrutural . . . . .	35
3.2 Bifurcações em pontos de equilíbrio não-hiperbólicos . . . . .	36
3.3 Bifurcações de Hopf e bifurcações de ciclos limites de um foco múltiplo . . . . .	40
3.4 Bifurcações de órbitas periódicas não-hiperbólicas . . . . .	42
3.5 Bifurcações homoclínicas . . . . .	44
<b>4 Oscilações Lineares e Não-Lineares</b>	<b>47</b>
4.1 Origem histórica . . . . .	47
4.2 Pêndulo linear não-amortecido e não-forçado . . . . .	48
4.3 Pêndulo linear amortecido e não-forçado . . . . .	52
4.4 Pêndulo linear não-amortecido e forçado . . . . .	54
4.5 Pêndulo linear amortecido e forçado . . . . .	55
4.6 Pêndulo não-linear não amortecido e não-forçado . . . . .	57
<b>5 Circuitos Elétricos</b>	<b>59</b>
5.1 Circuito RLC linear . . . . .	59
5.2 A equação de van der Pol . . . . .	61
5.3 A equação de Duffing . . . . .	66
5.4 Memristores . . . . .	69
5.5 Circuitos com memristor no plano . . . . .	71
5.5.1 Circuitos memristivos com dois elementos . . . . .	71

5.6	Circuitos memristivos no plano com forçamento periódico . . . . .	77
5.7	Circuito memristivo no espaço $\mathbb{R}^3$ . . . . .	82
5.8	Circuito memristivo hamiltoniano em $\mathbb{R}^4$ . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>91</b>
	<b>Referências</b>	<b>92</b>
<b>A</b>	<b>Equação hamiltoniana e equação de Pfaff</b>	<b>95</b>

# Introdução

A teoria das equações diferenciais tem sido muito utilizada em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo na Física e na Engenharia. Os sistemas de equações diferenciais ordinárias, particularmente, constituem um tópico bastante relevante no estudo das aplicações dos métodos matemáticos na modelagem e análise de fenômenos naturais. Devido à constante evolução da tecnologia, novas aplicações relacionadas à teoria das equações surgem com muita frequência. Um exemplo disso é a utilização dessas equações no estudo dos circuitos elétricos envolvendo o memristor, abreviação de *resistor com memória* (do inglês *memory resistor*), teorizado pelo cientista Leon Chua em 1971. Por mais de 150 anos, os componentes eletrônicos fundamentais conhecidos que compunham os circuitos elétricos eram o capacitor, o resistor e o indutor. Até então, estes três elementos eram teoricamente suficientes. No artigo [3], Chua realizou uma análise das relações matemáticas existentes entre as quatro variáveis de um circuito elétrico: corrente representada pela letra  $i$ , voltagem representada por  $v$ , carga  $q$  e o fluxo magnético  $\phi$ , e percebeu a existência de um quarto elemento, o qual chamou de Memristor, que estabelece uma relação não-linear entre voltagem e corrente,  $v = M(q)i$ , onde  $M(q)$  denota a Memristância, que é um tipo de resistência variável, em lugar da resistência constante  $R$  que caracteriza um resistor através da conhecida *Primeira Lei de Ohm*  $v = Ri$ .

Apesar de sua existência ter sido postulada em 1971, a realização física de um memristor como um componente eletrônico de dois terminais ocorreu somente em 2008, conforme artigo publicado na revista *Nature* por uma equipe de pesquisadores dos laboratórios da empresa HP (Hewlett Packard), liderada pelo Engenheiro Strukov [14]. Tal fato aumentou em muito o interesse no estudo de circuitos elétricos envolvendo os memristores, principalmente devido às suas potenciais aplicações em vários campos de interesse físico e tecnológico, como a construção de memórias não voláteis de computador, processadores de alta velocidade e baixo consumo, modelos biológicos de memória associativa, modelos simples de inteligência artificial, dentre outros. O recente livro [15], editado por Ronald Tetzlaff, da Faculty of Electrical and Computer Engineering, Institute of Circuits and Systems, Technische Universität, Dresden, Alemanha, pode ser consultado pelos interessados no assunto, pois traz artigos históricos sobre a descoberta teórica e a criação física dos memristores, artigos sobre a modelagem matemática e simulações computacionais de circuitos elétricos (ou eletrônicos) envolvendo memristores e aplicações desses componentes em diversas áreas do conhecimento.

Como a produção em larga escala de memristores e, conseqüentemente a construção de equipamentos eletrônicos envolvendo esses componentes, tem ainda um custo muito

elevado, há um grande interesse no estudo teórico de modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico dos memristores e suas associações com outros componentes eletrônicos. Tais modelos são, em geral, determinados por sistemas de equações diferenciais ordinárias, envolvendo parâmetros de controle. Quanto mais aprofundados forem estes estudos sobre o comportamento de sistemas dinâmicos envolvendo memristores, mais proveito poderemos tirar desses equipamentos e mais próximo chegaremos de uma produção em larga escala. Neste contexto, o objetivo deste trabalho é o estudo de alguns modelos matemáticos de circuitos elétricos formados pelos quatro componentes fundamentais: capacitores, indutores, resistores e memristores, em vários tipos de associações. É sabido da literatura existente que esses circuitos podem apresentar pontos de equilíbrio, oscilações periódicas e também comportamento caótico. Apresentaremos um estudo teórico e computacional de alguns destes modelos, buscando entender um pouco mais de seu rico comportamento dinâmico.

Mais precisamente, estudaremos os modelos matemáticos apresentados no artigo [7], no qual sistemas hamiltonianos são formulados para descrever circuitos elétricos não-lineares sem perda de energia, envolvendo memristores, capacitores, resistores e indutores. De modo geral, sabe-se que sistemas dissipativos não podem ser representados por sistemas hamiltonianos, porque as trajetórias são amortecidas e, portanto, não são periódicas. Porém, veremos que, em certos casos, circuitos elétricos envolvendo memristores dissipativos podem ser descritos por um sistema hamiltoniano, cujas soluções são constantes de movimento de uma determinada função que representa a energia do sistema [7]. Nosso foco principal será utilizar a teoria das bifurcações para analisar a estabilidade das oscilações das equações não-lineares que descrevem esses sistemas.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram necessários estudos preliminares sobre a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. Assim sendo, alguns resultados principais, que serão utilizados ao longo do texto, estão descritos no Capítulo 2, e foram extraídos principalmente da referência [10].

Em seguida, o Capítulo 3 apresenta alguns resultados sobre a teoria das bifurcações, incluindo bifurcações em sistemas hamiltonianos, e órbitas periódicas não hiperbólicas. Tais resultados podem ser encontrados em [10, 11, 17, 18].

No Capítulo 4, desenvolve-se um estudo dos modelos matemáticos que representam oscilações lineares e não-lineares em sistemas mecânicos, estudando-se principalmente o movimento do pêndulo e a estabilidade de suas oscilações, com base no texto referência [8].

## Preliminares

Neste capítulo começamos nosso estudo da teoria fundamental de sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

onde a função  $f \in C^1(E)$ ,  $E$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , e o ponto denota a derivada com relação a variável independente  $t$ . O material aqui apresentado tem como base a referência [10].

### 2.1 Teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias: alguns resultados fundamentais

**Definição 1** *Suponha que  $f \in C(E)$  onde  $E$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Então  $x(t)$  é uma solução da equação diferencial (2.1) sobre o intervalo  $I$  se  $x(t)$  é diferenciável sobre  $I$  e se para todo  $t \in I$ ,  $x(t) \in E$  e*

$$x'(t) = f(x(t)).$$

*Dado  $x_0 \in E$ ,  $x(t)$  é uma solução do problema do valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

*sobre um intervalo  $I$  se  $t_0 \in I$ ,  $x(t_0) = x_0$  e  $x(t)$  é uma solução da equação diferencial (2.1) sobre o intervalo  $I$ .*

**Definição 2** *Um ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  é chamado ponto de equilíbrio ou ponto crítico de (2.1) se  $f(\bar{x}) = 0$ . Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é chamado hiperbólico se nenhum dos autovalores da matriz jacobiana  $Df(\bar{x})$  tem parte real nula.*

### 2.2 O fluxo definido por uma equação diferencial

Na seguinte definição, denotamos o intervalo maximal de existência  $(\alpha, \beta)$  da solução  $\phi(t, x_0)$  do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

por  $I(x_0)$ . Os pontos de extremidade  $\alpha$  e  $\beta$  do intervalo maximal dependem, em geral, de  $x_0$ .

**Definição 3** *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f \in C^1(E)$ . Para  $x_0 \in E$ , seja  $\phi(t, x_0)$  a solução do problema de valor inicial (2.2) definida sobre o intervalo maximal  $I(x_0)$ . Então para  $t \in I(x_0)$ , o conjunto de aplicações  $\phi_t$  definidas por*

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

*é chamado o fluxo da equação (2.1) ou o fluxo definido pela equação diferencial (2.1);  $\phi_t$  é também referido como o fluxo do campo vetorial  $f(x)$ .*

**Definição 4** *Sejam  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(E)$  e  $\phi_t : E \rightarrow E$  o fluxo da equação diferencial (2.1) definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Então um conjunto  $S \subset E$  é chamado invariante com respeito ao fluxo  $\phi_t$  se  $\phi_t(S) \subset S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $S$  é chamado positivamente (ou negativamente) invariante com respeito ao fluxo  $\phi_t$  se  $\phi_t(S) \subset S$  para todo  $t \geq 0$  (ou  $t \leq 0$ ).*

**Exemplo 1** *Considere o sistema não-linear (2.1) em  $\mathbb{R}^2$ , com*

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}.$$

*A solução do problema do valor inicial (2.1) junto com a condição inicial  $x(0) = c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$  é dada por*

$$\phi_t(c) = \phi(t, c) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + \frac{c_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

*Agora mostramos que o conjunto*

$$S = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \frac{-x_1^2}{3} \right\}$$

*é invariante sob o fluxo  $\phi_t$ . De fato, se  $c \in S$ , então  $c_2 = \frac{-c_1^2}{3}$  donde segue que*

$$\phi_t(c) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ \frac{-c_1^2}{3} e^{-2t} \end{bmatrix} \in S.$$

*Portanto  $\phi_t(S) \subset S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

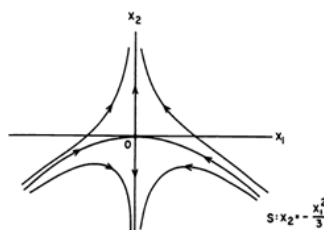


Figura 2.1: O conjunto invariante  $S$  para o sistema (2.1).

## 2.3 Linearização

Um bom caminho para começar o estudo do sistema não-linear (2.1) é determinar os pontos de equilíbrio do sistema e descrever o comportamento de (2.1) perto destes pontos. De fato, veremos que o comportamento local do sistema não-linear (2.1) próximo de um ponto de equilíbrio hiperbólico (que definiremos a seguir)  $x_0$  é determinado pelo comportamento do sistema linear

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.3)$$

onde a matriz  $A = Df(x_0)$  é a Jacobiana de  $f$  calculada em  $x_0$ . A função linear  $Ax = Df(x_0)x$  é chamada de parte linear de  $f$  em  $x_0$ . Este é um resultado muito importante, estabelecido pelo Teorema de Hartman-Grobman, que enunciaremos mais a frente, pois, no caso de  $A$  ser uma matriz constante, da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então podemos calcular explicitamente as soluções do sistema linear (2.3). As soluções dependem dos autovalores da matriz  $A$ , dados pelas soluções do polinômio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0,$$

que, por sua vez, depende do traço e do determinante da matriz  $A$ . Se  $\det A \neq 0$ , então a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema (2.3). Chamando  $\text{tr } A = p$  e  $\det A = q$ , vemos que o discriminante do polinômio característico será  $\Delta = p^2 - 4q$ , então temos os seguintes casos possíveis:

**Caso 1:**  $\Delta = p^2 - 4q > 0$ . Neste caso, a origem é um ponto de sela instável se  $q < 0$ , será um nó instável se  $p > 0$  e  $q > 0$  e será um nó assintoticamente estável se  $p < 0$  e  $q > 0$ .

**Caso 2:**  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ . Neste caso, a origem é um ponto espiral instável (as soluções se afastam da origem espiralando) se  $p > 0$ , será um centro estável se  $p = 0$  e será um ponto espiral assintoticamente estável (as soluções se aproximam da origem espiralando) se  $p < 0$ .

**Caso 3:**  $\Delta = p^2 - 4q = 0$ . Neste caso, a origem é um nó impróprio, que é estável se  $p < 0$  e um nó impróprio instável se  $p > 0$ .

Na Figura 2.2 apresentamos o diagrama traço-determinante (ou diagrama de estabilidade) da origem do sistema linear (2.3). Neste diagrama, fica claro qual o tipo e estabilidade da origem, com relação ao traço e ao determinante da matriz  $A$ .

Como dissemos acima, para um sistema não linear  $\dot{x} = f(x)$ , é importante considerarmos o sistema linear associado, na vizinhança de um ponto crítico  $x_0$ , dado por  $\dot{x} = Df(x_0)x$ , onde  $Df(x_0)$  denota a matriz jacobiana de  $f$  calculada no ponto  $x_0$ . Temos a seguinte definição.

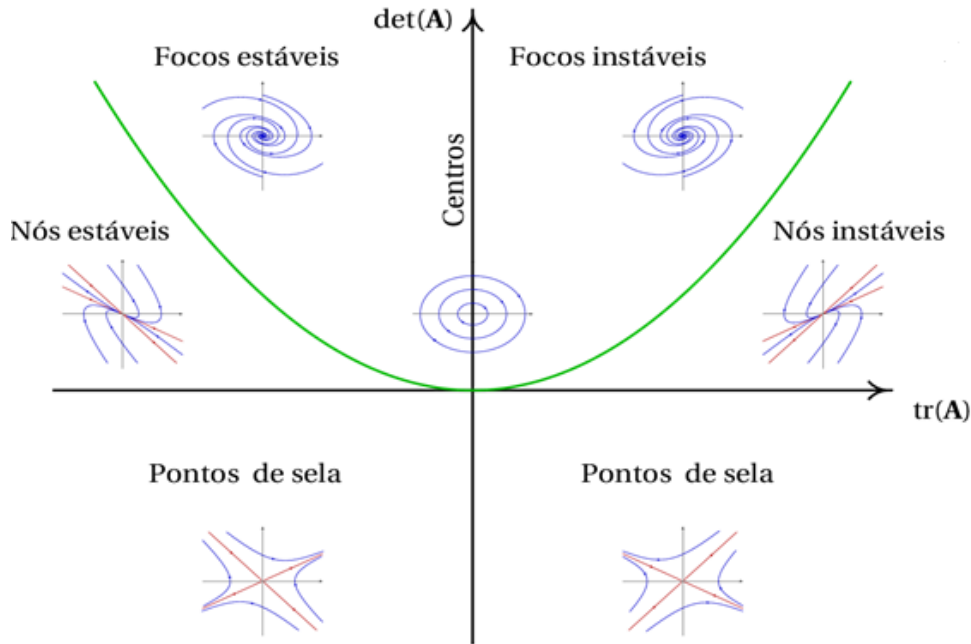


Figura 2.2: Diagrama de estabilidade para a equação (2.3).

**Definição 5** Um ponto de equilíbrio  $x_0$  de (2.1) é chamado de poço se todos os autovalores da matriz  $Df(x_0)$  tem parte real negativa; é chamado de fonte se todos os autovalores de  $Df(x_0)$  tem parte real positiva; e é chamado de sela se é um ponto de equilíbrio hiperbólico e  $Df(x_0)$  tem ao menos um autovalor com parte real positiva e ao menos um com parte real negativa.

**Exemplo 2** Considere o sistema não-linear determinado pela função

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Claramente  $x = (1, 0)^T$  e  $x = (-1, 0)^T$  são os pontos de equilíbrio de  $f(x)$ , e

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Df(1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$Df(-1, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim,  $(1, 0)$  é uma fonte e  $(-1, 0)$  é uma sela.

O teorema a seguir estabelece que próximo de um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x_0$ , o sistema não-linear (2.1) tem a mesma estrutura qualitativa (ou é equivalente) ao sistema linear (2.3) com  $A = Df(x_0)$ . Neste caso suponhamos que o ponto de equilíbrio  $x_0$  foi transladado para a origem. A prova pode ser encontrada em [10].

**Teorema 1 (Teorema de Hartman-Grobman).** Sejam  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem,  $f \in C^1(E)$  e  $\phi_t$  o fluxo do sistema não linear (2.1). Suponha que  $f(0) = 0$  e que a matriz  $A = Df(0)$  não tem autovalores com parte real zero. Então existe

um homeomorfismo  $H$  de um conjunto aberto  $U$  contendo a origem sobre um conjunto aberto  $V$  contendo a origem, tal que para cada  $x_0 \in U$ , existe um intervalo  $I_0 \subset \mathbb{R}$  contendo zero tal que para todo  $x_0 \in U$  e  $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0),$$

i.e.,  $H$  aplica trajetórias de (2.1) próximas da origem sobre trajetórias de (2.3) próximas da origem, preservando a parametrização no tempo.

Este é um dos teoremas mais importantes utilizados no estudo (local) de equações diferenciais ordinárias da forma (2.1). Porém, ele não vale no caso em que a origem é um centro para o sistema linearizado. Neste caso, outras ferramentas devem ser utilizadas, como as funções de Lyapunov, que tratamos na seção seguinte.

## 2.4 Estabilidade e funções de Lyapunov

Nesta seção, discutimos a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema não-linear (2.1). A estabilidade dos pontos de equilíbrio não-hiperbólicos (ou seja, aqueles que não podem ser estudados usando o Teorema 1) é tipicamente mais difícil para determinar. Um método indireto, devido a Lyapunov, é muito útil para decidir a estabilidade de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos. Antes de enunciar este método, vejamos uma definição relacionada.

**Definição 6** *Seja  $\phi_t$  o fluxo da equação diferencial (2.1), definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Um ponto de equilíbrio  $x_0$  de (2.1) é estável se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in N_\delta(x_0)$ , onde  $N_\delta(x_0)$  é uma vizinhança de  $x_0$ , e  $t \geq 0$  temos*

$$\phi_t(x) \in N_\varepsilon(x_0).$$

*O ponto de equilíbrio  $x_0$  é instável se não é estável, e  $x_0$  é assintoticamente estável se é estável e se existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in N_\delta(x_0)$  temos*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0.$$

**Observação 1** *Como os pontos de equilíbrio hiperbólicos são assintoticamente estáveis ou instáveis, a única possibilidade para um ponto de equilíbrio  $x_0$  de (2.1) ser estável mas não assintoticamente estável é quando  $Df(x_0)$  ter um autovalor zero ou um par de autovalores complexos conjugados imaginários puros  $\lambda = \pm ib$ .*

**Observação 2** *Pontos de equilíbrio estáveis que não são assintoticamente estáveis só podem ocorrer no caso em que o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico.*

A questão de saber se um ponto de equilíbrio não-hiperbólico é estável, assintoticamente estável ou instável é uma questão delicada. O seguinte teorema, devido ao matemático Aleksandr Lyapunov (1857-1918), é muito usado no estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [10].

**Teorema 2** *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $x_0$ . Suponha que  $f \in C^1(E)$  e que  $f(x_0) = 0$ . Suponha, além disso, que existe uma função de valor real  $V \in C^1(E)$  satisfazendo  $V(x_0) = 0$  e  $V(x) > 0$  se  $x \neq x_0$ . Então*

- Se  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in E$ ,  $x_0$  é estável;

- Se  $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x \in E \setminus \{x_0\}$ ,  $x_0$  é assintoticamente estável;
- Se  $\dot{V}(x) > 0$  para todo  $x \in E \setminus \{x_0\}$ ,  $x_0$  é instável.

**Observação 3** No Teorema 2,  $\dot{V}$  denota a derivada de  $V$  com relação à variável independente  $t$ , sobre as soluções de  $\dot{x} = f(x)$ . Usando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \dot{V}(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual no  $\mathbb{R}^n$  e  $x(t)$  é uma solução da equação  $\dot{x} = f(x)$ .

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as hipóteses do Teorema 2 é chamada uma *função Lyapunov* para a equação  $\dot{x} = f(x)$  em  $x = x_0$ . Observe que esta função, quando existe, em geral não é única. Vejamos um exemplo de como utilizar o Teorema 2.

**Exemplo 3** Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2.\end{aligned}$$

A origem é um ponto de equilíbrio deste sistema e tem-se que a matriz jacobiana calculada na origem é dada por

$$Df(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto  $Df(0)$  tem autovalores  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ ; assim a origem é um ponto de equilíbrio não-hiperbólico. Logo, usemos o método de Lyapunov para estudar sua estabilidade. Consideremos a função

$$V(x) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2,$$

com  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  constantes positivas, sendo portanto positiva definida e, assim, uma candidata natural a função de Lyapunov para a origem do sistema dado. Resolvendo  $\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$ , temos

$$\frac{1}{2}\dot{V}(x) = (c_1 - c_2 + c_3)x_1x_2x_3 + (-2c_1 + c_2)x_1x_2.$$

Então, escolhendo  $c_2 = 2c_1$  e  $c_3 = c_1 > 0$ , temos  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$  e  $\dot{V}(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ , donde segue do Teorema 2 que  $x = 0$  é estável. Em particular, escolhendo  $c_1 = c_3 = 1$  e  $c_2 = 2$ , vemos que as trajetórias do sistema estão dentro do elipsoide  $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = c^2$ .

**Observação 4** Um ponto de equilíbrio hiperbólico é assintoticamente estável se, e somente se, é um poço (ou seja, todos os autovalores da matriz jacobiana calculada neste ponto tem parte real negativa).

Existem sistemas especiais de equações diferenciais ordinárias que são definidos utilizando funções auxiliares, de forma análoga ao que é feito no teorema de Lyapunov. Dois exemplos são os sistemas gradiente e os sistemas hamiltonianos, que descrevemos na próxima seção.

## 2.5 Sistemas hamiltonianos e sistemas gradiente

Nesta seção, estudamos dois tipos importantes de sistemas de equações diferenciais ordinárias, que surgem muito frequentemente na modelagem matemática de problemas físicos, particularmente problemas relacionados à Mecânica e Mecânica Celeste. São os chamados sistemas hamiltonianos e sistemas gradiente, que definimos a seguir.

**Definição 7** *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{2n}$  e seja  $H \in C^2(E)$  onde  $H = H(x, y)$  com  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Um sistema da forma*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \left( \frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T,$$

é chamado sistema hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade em  $E$ . A função  $H$  é chamada de hamiltoniana do sistema (2.4).

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 4** *Uma função qualquer  $H : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  em  $A$ , gera um sistema hamiltoniano com um grau de liberdade, da forma*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\tag{2.5}$$

Por exemplo, se tomarmos a função  $H(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$ , obtemos o sistema hamiltoniano associado dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 3y^2, \\ \dot{y} &= -2x - 2y,\end{aligned}\tag{2.6}$$

Uma propriedade importante dos sistemas hamiltonianos é que a função hamiltoniana  $H$  é constante ao longo das soluções do sistema. De fato, se  $H : A \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função hamiltoniana do sistema (2.4) e  $(x, y) = (x(t), y(t))$  é uma solução desse sistema, então usando a Regra da Cadeia temos

$$\dot{H}(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

donde segue que  $H(x, y) = c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, as soluções  $(x, y) = (x(t), y(t))$  do sistema hamiltoniano (2.4) estão contidas nas curvas de nível da função  $H$ .

Para sistemas físicos (ou mecânicos), usando a Lei da Conservação de Energia, podemos considerar a função  $H$  como sendo a energia total do sistema (descrito pelas equações (2.4)), e dizer que essa energia é conservada ao longo do tempo. Essa ideia é amplamente utilizada na modelagem de fenômenos físicos, especialmente quando utilizada em conjunto com a Segunda Lei de Newton. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 5** Consideremos as variáveis  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$  pertencentes ao espaço  $\mathbb{R}^2$ . A função  $H(x, y) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2}$ , pode ser vista como a função energia para o pêndulo esférico, cujo movimento é modelado matematicamente pelo sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_1 &= -x_1, \\ \dot{y}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

Este sistema é equivalente ao par de osciladores harmônicos desacoplados

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= 0.\end{aligned}$$

**Exemplo 6** No caso dos sistemas mecânicos, obtidos a partir da Segunda Lei de Newton, segundo a qual a força aplicada a uma partícula é igual à massa vezes a sua aceleração, ou, em termos de equações diferenciais  $F(x, \dot{x}) = m \ddot{x}$ , basta que a força tangencial não dependa da velocidade  $v = \dot{x}$ , para que o sistema seja conservativo (ou hamiltoniano). Nesse caso, a função hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{m} \int_{x_0}^x F(s) ds,$$

que é a energia mecânica total, dada pela soma da energia cinética  $E_c(v)$  mais potencial  $U(x)$ , ou seja,

$$E_c(v) = \frac{v^2}{2}, \quad e \quad U(x) = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x F(s) ds,$$

onde  $x = x(t)$  denota a posição e  $v = v(t) = \dot{x}(t)$  a velocidade da partícula. Neste caso, tem-se o sistema hamiltoniano associado, dado por

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial v} = v,$$

$$\dot{v} = \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{F(x)}{m}.$$

Num sistema mecânico conservativo, os pontos de equilíbrio estáveis são os mínimos locais da energia potencial e os pontos de equilíbrio instáveis são os máximos locais da energia potencial.

Passemos agora aos sistemas gradiente.

**Definição 8** Sejam  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $V : E \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  em  $E$ . Um sistema da forma

$$\dot{x} = f(x) = -\text{grad}V(x), \tag{2.7}$$

onde

$$\text{grad}V = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$$

é chamado sistema gradiente de  $V$  sobre  $E$ .

Por serem definidos a partir de uma função real, os sistemas gradiente tem algumas propriedades cujas provas são imediatas, que são as seguintes (conforme [10]):

- Os pontos de equilíbrio do sistema (2.7) (ou seja, os pontos onde  $f(x) = 0$ ) coincidem com os pontos críticos de  $V$ .
- Num sistema gradiente em  $\mathbb{R}^2$ , os pontos de equilíbrio não degenerados são selas ou nós. Além disso, se  $(x_0, y_0)$  é um ponto de sela para  $V(x, y)$ , então é um ponto de sela do sistema (2.7); se  $(x_0, y_0)$  é um ponto de máximo ou de mínimo local (estrito) de  $V(x, y)$ , então este ponto é, respectivamente, um nó instável e um nó estável do sistema (2.7).
- O vetor gradiente  $\text{grad } V(x)$  é perpendicular à superfície de nível  $V(x) = \text{constante}$  no ponto  $x$ . Usando esse fato, mostra-se que os pontos de mínimo local de  $V$  são pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis do sistema (2.7).
- A função  $V(x(t))$  é tal que  $\frac{dV}{dt}(x(t)) < 0$  ao longo das soluções não nulas do sistema (2.7). Logo,  $V$  é estritamente decrescente ao longo das soluções desse sistema. Portanto, um sistema gradiente não possui órbitas periódicas.

Vejamos um exemplo de campo gradiente.

**Exemplo 7** *Seja  $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$ . O sistema gradiente (2.7) então tem a forma*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \dot{y} &= -2y\end{aligned}$$

*e existem pontos de equilíbrio em  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(1, 0)$ . Segue das propriedades enunciadas acima que  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  são nós estáveis e que  $(\frac{1}{2}, 0)$  é uma sela para este sistema.*

## 2.6 Conjuntos limites e atratores

De modo geral, chamamos de sistema dinâmico uma função  $\phi(t, x)$ , definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ , que descreve como os pontos  $x \in E$  se movem com relação ao tempo. Mais precisamente, temos.

**Definição 9** *Um sistema dinâmico sobre  $E$  é uma  $C^1$ -aplicação*

$$\phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

*onde  $E$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e se  $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ , então  $\phi_t$  satisfaz*

- $\phi_0(x) = x$  para todo  $x \in E$  e
- $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  e  $x \in E$ .

É claro que o fluxo de uma equação diferencial ordinária pode ser visto como um sistema dinâmico. Mais especificamente, temos.

**Definição 10** *Dada a equação diferencial (2.1), com  $f \in C^1(E)$  e  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , a solução  $\phi(t, x_0)$  do problema do valor inicial (2.1) satisfazendo  $x(0) = x_0$ , com  $x_0 \in E$  será um sistema dinâmico sobre  $E$  se, e somente se, para todo  $x_0 \in E$ ,  $\phi(t, x_0)$  é definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; i.e., se, e somente se, para todo  $x_0 \in E$ , o intervalo máximo de existência  $I(x_0)$  de  $\phi(t, x_0)$  é  $(-\infty, \infty)$ .*

**Definição 11** Um ponto  $p \in E$  é um ponto  $\omega$ -limite da trajetória  $\phi(t, x)$  do sistema (2.1) se existe uma sequência  $t_n \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = p.$$

Similarmente, se existe uma sequência  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = q,$$

e o ponto  $q \in E$ , então  $q$  é chamado um ponto  $\alpha$ -limite da trajetória  $\phi(t, x)$  de (2.1).

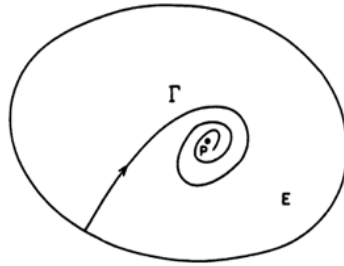


Figura 2.3: Uma trajetória  $\Gamma$  de (2.1) que se aproxima do ponto  $\omega$ -limite  $p \in E$ .

**Definição 12** O conjunto de todos os pontos  $\omega$ -limite de uma trajetória  $\Gamma$  é chamado o conjunto  $\omega$ -limite de  $\Gamma$  e é denotado por  $\omega(\Gamma)$ . O conjunto de todos os pontos  $\alpha$ -limites de uma trajetória  $\Gamma$  é chamado o conjunto  $\alpha$ -limite de  $\Gamma$  e é denotado por  $\alpha(\Gamma)$ . O conjunto  $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$ , de todos os pontos limites de  $\Gamma$  é chamado o conjunto limite de  $\Gamma$ .

**Definição 13** Um conjunto fechado invariante  $A \subset E$  é chamado um conjunto atrator de (2.1) se existe alguma vizinhança  $U$  de  $A$  tal que, para todo  $x \in U$ ,  $\phi_t(x) \in U$  para todo  $t \geq 0$  e  $\phi_t(x) \rightarrow A$  com  $t \rightarrow +\infty$ .

**Observação 5** Se  $q$  é algum ponto regular em  $\alpha(\Gamma)$  ou  $\omega(\Gamma)$  então a trajetória através de  $q$  é chamada uma órbita limite de  $\Gamma$ .

**Observação 6** Nem todo conjunto  $\omega$ -limite de uma trajetória do sistema (2.1) é um conjunto atrator de (2.1); por exemplo, uma sela  $x_0$  de um sistema planar (2.1) é o conjunto  $\omega$ -limite de duas trajetórias em uma vizinhança  $N(x_0)$  mas não há outras trajetórias através dos pontos em  $N(x_0)$  que se aproximam de  $x_0$  com  $t \rightarrow +\infty$ .

**Exemplo 8** Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

A origem é um ponto de equilíbrio deste sistema; o fluxo espirala ao redor da origem no sentido anti-horário. Para  $r = 1$ ,  $\dot{r} = 0$ , logo o círculo de raio 1 descreve uma trajetória  $\Gamma_0$  deste sistema. E para  $0 < r < 1$ ,  $\dot{r} > 0$ , donde segue que as soluções que iniciam no

anel  $0 < r < 1$  são espirais crescentes, que tendem para  $r = 1$ ; por outro lado, para  $r > 1$ ,  $\dot{r} < 0$ , donde seque que as soluções que iniciam na região  $r > 1$  são espirais decrescentes, que também tendem para  $r = 1$ . Neste caso, o círculo de raio  $r = 1$  é um ciclo-limite estável  $\Gamma_0$  deste sistema, sendo que tal ciclo é o conjunto  $\omega$ -limite de cada trajetória deste sistema, exceto o ponto de equilíbrio na origem. Além disso,  $\Gamma_0$  é o seu próprio conjunto  $\alpha$  e  $\omega$ -limite. Podemos dizer que  $\Gamma_0$  é um atrator do sistema (2.8). Veja a Figura 2.4.

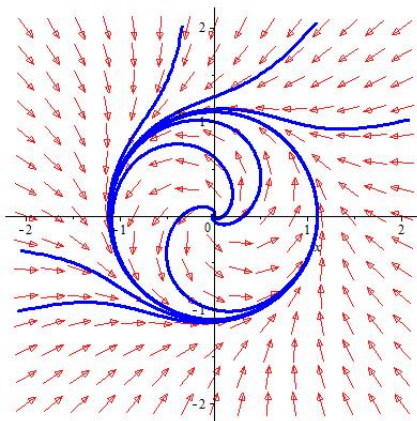


Figura 2.4: Ciclo limite do sistema (2.8).

## 2.7 Órbitas periódicas e ciclos limites

**Definição 14** Um ciclo ou órbita periódica de (2.1) é uma curva solução fechada de (2.1), na qual não há pontos de equilíbrio. Uma órbita periódica  $\Gamma$  é chamada:

- estável se para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma vizinhança  $U$  de  $\Gamma$  tal que para todo  $x \in U$ ,  $d(\Gamma_x^+, \Gamma) < \varepsilon$ ; i.e., se para todo  $x \in U$  e  $t \geq 0$ ,  $d(\phi(t, x), \Gamma) < \varepsilon$ ;
- instável se não é estável;
- assintoticamente estável se é estável e se para todos os pontos  $x$  em alguma vizinhança  $U$  de  $\Gamma$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), \Gamma) = 0.$$

**Definição 15** Sejam  $\Gamma$  uma órbita periódica e  $N$  uma vizinhança de  $\Gamma$ . As variedades locais estável e instável de  $\Gamma$  são dadas respectivamente, por

$$S(\Gamma) = \{x \in N \mid d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow \infty \text{ e } \phi_t(x) \in N \text{ para } t \geq 0\},$$

e

$$U(\Gamma) = \{x \in N \mid d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow -\infty \text{ e } \phi_t(x) \in N \text{ para } t \leq 0\}.$$

**Definição 16** Um ciclo-limite  $\Gamma$  de um sistema planar é um ciclo de (2.1) que é o conjunto  $\alpha$  ou  $\omega$ -limite de alguma trajetória de (2.1) que não seja  $\Gamma$ . Se um ciclo  $\Gamma$  é o conjunto,

- $\omega$ -limite de cada trajetória em alguma vizinhança de  $\Gamma$ , então  $\Gamma$  é chamado um ciclo  $\omega$ -limite ou ciclo-limite estável;
- $\alpha$ -limite de cada trajetória em alguma vizinhança de  $\Gamma$ , então  $\Gamma$  é chamado um ciclo  $\alpha$ -limite ou ciclo-limite instável;

- $\omega$ -limite de uma trajetória que não seja  $\Gamma$  e o conjunto  $\alpha$ -limite de uma trajetória que não seja  $\Gamma$ , então  $\Gamma$  é chamado um ciclo-limite semi-estável.

Para estudar a estabilidade de um ciclo-limite, existe uma ferramenta matemática muito útil, chamada aplicação de retorno, ou aplicação de Poincaré, que descreveremos na próxima seção.

## 2.8 Aplicação de Poincaré

**Definição 17** Se  $\Gamma$  é uma órbita periódica do sistema (2.1) através do ponto  $x_0$  e  $\Sigma$  é um hiperplano perpendicular a  $\Gamma$  em  $x_0$ , então para algum ponto  $x \in \Sigma$  suficientemente próximo de  $x_0$ , a solução de (2.1) que inicia em  $x$  em  $t = 0$ , ou seja  $\phi_t(x)$  com  $\phi_0(x) = x$ , deve intersectar  $\Sigma$  em um ponto  $P(x)$ , próximo de  $x_0$ , em um tempo  $t > 0$ ; a aplicação  $x \mapsto P(x)$  é chamada aplicação de Poincaré (ver Figura 2.5).

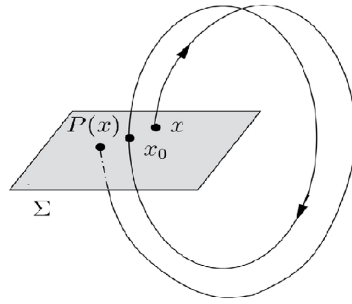


Figura 2.5: Aplicação de Poincaré.

O seguinte teorema estabelece a existência e a continuidade da aplicação de Poincaré  $P(x)$  e de sua primeira derivada  $DP(x)$ . A prova desse teorema decorre da dependência contínua das soluções do sistema (2.1) com relação às condições iniciais, e pode ser encontrada em [10].

**Teorema 3** Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f \in C^1(E)$ . Suponha que  $\phi_t(x_0)$  é uma órbita solução de (2.1) de período  $T$  e que o ciclo

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\}$$

esteja contido em  $E$ . Seja  $\Sigma$  o hiperplano ortogonal a  $\Gamma$  em  $x_0$ ; i.e., seja

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Então existe um  $\delta > 0$  e uma única função  $\tau(x)$ , definida e continuamente diferenciável para  $x \in N_\delta(x_0)$ , tal que  $\tau(x_0) = T$  e

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$$

para todo  $x \in N_\delta(x_0)$  (ver Figura 2.6).

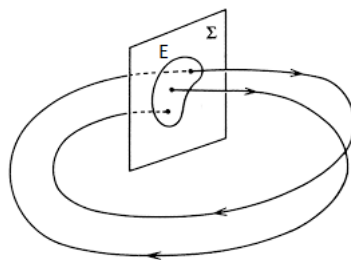


Figura 2.6: A geometria da aplicação de Poincaré para uma órbita periódica.

**Definição 18** Seja  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $\delta$  e  $\tau(x)$  definida como no teorema anterior. Então para  $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ , a função

$$P(x) = \phi_{\tau(x)}(x),$$

é chamada aplicação de Poincaré para  $\Gamma$  em  $x_0$ .

Vejamos no exemplo seguinte, como podemos construir a aplicação de Poincaré de um sistema no plano, e observar algumas de suas propriedades, que permitem o estudo da estabilidade de uma órbita periódica.

**Exemplo 9** Consideremos o sistema estudado no exemplo (8),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

que possui o ciclo-limite  $\Gamma$ , dado pelo círculo unitário e, portanto, pode ser escrito parametricamente como  $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$ . Neste caso, a aplicação de Poincaré para  $\Gamma$  pode ser encontrada resolvendo este sistema escrito em coordenadas polares, que é dado por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

Tomemos as condições iniciais  $r(0) = r_0$  e  $\theta(0) = \theta_0$ . A primeira equação pode ser resolvida como uma equação diferencial separável ou como uma equação de Bernoulli. A solução é dada por

$$r(t, r_0) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-\frac{1}{2}};$$

a solução da segunda equação é imediata, dada por

$$\theta(t, r_0) = t + \theta_0.$$

Tomando a seção transversal  $\Sigma = \{(r, \theta) \mid r > 0, \theta = \theta_0\}$ , vemos que  $\Sigma$  é perpendicular a  $\Gamma$  e a trajetória com condição inicial no ponto  $(r_0, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$  em  $t = 0$ , cruza  $\Sigma$  novamente no tempo  $t = 2\pi$ ; destas considerações, segue que a aplicação de Poincaré é dada por (ver Figura 2.7)

$$P(r_0) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Observamos claramente  $P(1) = 1$ , o que corresponde ao ciclo  $\Gamma$  e, além disso, temos que

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{3}{2}}$$

donde segue que  $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$ .

Sabemos, do exemplo 8, que o ciclo limite  $\Gamma$  do sistema (2.9) é estável, e acabamos de mostrar que  $P'(1) < 1$ . Na verdade, essa relação entre a derivada da aplicação de Poincaré em um ponto da órbita e sua estabilidade existe de fato, como veremos a seguir.

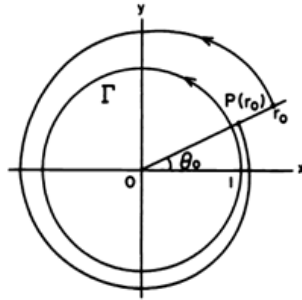


Figura 2.7: Aplicação de Poincaré para o sistema (2.9).

**Teorema 4** *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  e suponha que  $f \in C^1(E)$ . Seja  $\gamma(t)$  uma solução periódica de (2.1) de período  $T$ . Então a derivada da aplicação Poincaré  $P(s)$  a longo da linha reta  $\Sigma$  normal a  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$  em  $x = 0$  é dada por*

$$P'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt,$$

onde  $\nabla \cdot f$  é o divergente de  $f$ .

**Corolário 1** *Considerando a hipótese do teorema anterior, a solução periódica  $\gamma(t)$  é um ciclo-limite estável se*

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0$$

e é um ciclo limite-instável se

$$\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0.$$

Se essa integral for nula, então  $\Gamma$  pode ser um ciclo-limite estável, instável ou semi-estável, ou pode ainda pertencer a uma faixa contínua de ciclos.

As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em [10], e serão omitidas aqui.

**Definição 19** *Seja  $P(s)$  a aplicação de Poincaré para um ciclo  $\Gamma$  de um sistema planar analítico (2.1) e seja*

$$d(s) = P(s) - s$$

a função deslocamento. Então se

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \quad e \quad d^{(k)}(0) \neq 0,$$

$\Gamma$  é chamado um ciclo-limite múltiplo de multiplicidade  $k$ . Se  $k = 1$  então  $\Gamma$  é chamado um ciclo-limite simples.

Um resultado mais geral sobre a aplicação de Poincaré de um sistema planar que possui um foco na origem pode ser também enunciada da seguinte maneira: suponha que o sistema planar analítico (2.1) tem um foco na origem e que  $\det Df(0) \neq 0$ . Então (2.1) é linearmente equivalente ao sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - by + p(x, y), \\ \dot{y} &= bx + ay + q(x, y),\end{aligned}\tag{2.10}$$

com  $b \neq 0$  onde as expansões das séries de potências de  $p$  e  $q$  começam com termos de segundo grau. Em coordenadas polares, este sistema tem a forma

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar + O(r^2), \\ \dot{\theta} &= b + O(r).\end{aligned}$$

Seja  $(r(t, r_0, \theta_0), \theta(t, r_0, \theta_0))$  a solução deste sistema satisfazendo a condição inicial  $r(0, r_0, \theta_0) = r_0$  e  $\theta(0, r_0, \theta_0) = \theta_0$ . Então para  $r_0 > 0$  suficientemente pequeno e  $b > 0$ ,  $\theta(t, r_0, \theta_0)$  é uma função estritamente crescente de  $t$ . Seja  $t(\theta, r_0, \theta_0)$  a inversa desta função estritamente crescente e para um valor fixo  $\theta_0$ , defina a função

$$P(r_0) = r(t(\theta_0 + 2\pi, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0).$$

Então para todo  $r_0 > 0$  suficientemente pequeno,  $P(r_0)$  é uma função analítica de  $r_0$  que é chamada a aplicação de Poincaré para o foco na origem de (2.10). Similarmente, para  $b < 0$ ,  $\theta(t, r_0, \theta_0)$  é uma função decrescente de  $t$  e a fórmula

$$P(r_0) = r(t(\theta_0 - 2\pi, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0).$$

é usada para definir a aplicação de Poincaré para o foco na origem nesse caso.

Finalizamos esta seção observando que, além de ser muito útil para determinação da estabilidade de ciclos-limites de sistemas de equações diferenciais ordinárias no plano, a aplicação de Poincaré pode ser utilizada também para estudo de comportamentos complexos das soluções de sistemas de equações em dimensões maiores ou iguais a três, como a duplicação de períodos de órbitas periódicas, a existência de toros invariantes, e até o comportamento caótico das soluções e a existência de atratores estranhos. Veremos exemplos desse tipo de utilização da aplicação de Poincaré no Capítulo 5, ao estudarmos sistemas hamiltonianos com perturbação periódica (equações de Van der Pol e Duffing) e também circuitos elétricos envolvendo memristores.



# Teoria das Bifurcações

Neste capítulo, abordaremos a questão de como o comportamento qualitativo do sistema  $\dot{x} = f(x)$ , muda conforme mudamos a função ou campo vetorial  $f$ , no caso especial em que esse campo depende de um parâmetro real  $\mu$ . Tais mudanças são chamadas de *bifurcações*. Se o comportamento qualitativo das soluções não se altera quando variamos o parâmetro  $\mu$ , então o sistema (2.1) ou o campo vetorial  $f$  é chamado *estruturalmente estável* [2].

Mais precisamente, ao longo deste capítulo, cujo conteúdo apresentado tem como base o livro [10], estudaremos vários tipos de bifurcações que ocorrem em sistemas da forma

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (3.1)$$

dependendo de um parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$ . Em particular estudaremos bifurcações em pontos de equilíbrio e órbitas periódicas não-hiperbólicas. Estes tipos de bifurcações são chamadas bifurcações locais, pois são mudanças nas curvas soluções que ocorrem numa vizinhança dos pontos de equilíbrio ou das órbitas periódicas. Também consideraremos bifurcações globais, tais como bifurcações homoclínicas e bifurcações de ciclos limites de uma família a um-parâmetro de órbitas periódicas, como aquelas existentes em torno de um centro.

## 3.1 Estabilidade estrutural

**Definição 20** *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Um campo vetorial  $f \in C^1(E)$  é chamado estruturalmente estável se existe um  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $g \in C^1(E)$  com*

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon,$$

*$f$  e  $g$  são topologicamente equivalentes sobre  $E$ . Se o campo vetorial  $f \in C^1(E)$  não é estruturalmente estável, então  $f$  é chamado estruturalmente instável.*

**Exemplo 10** *O sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2, \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - 1)^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

*é estruturalmente instável sobre algum subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$  que contém o disco unitário em seu interior. Isso pode ser visto considerando o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu], \\ \dot{y} &= x + y[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu], \end{aligned}$$

que está  $\varepsilon$ -próximo do sistema acima se  $|\mu| = \frac{\varepsilon}{(d+2)}$  onde  $d$  é o diâmetro de  $K$ . Escrevendo este último sistema em coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r[(r^2 - 1)^2 - \mu], \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Uma análise do sistema (3.3) mostra que:

- Para  $\mu < 0$  a origem é um foco instável;
- Se  $\mu = 0$  o sistema é estruturalmente instável, e tem um ciclo-limite semi-estável não-hiperbólico, representado por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$ . O número  $\mu = 0$  é chamado um valor de bifurcação.
- e para  $\mu > 0$ , o sistema tem dois ciclos-limites hiperbólicos; um instável e outro estável.

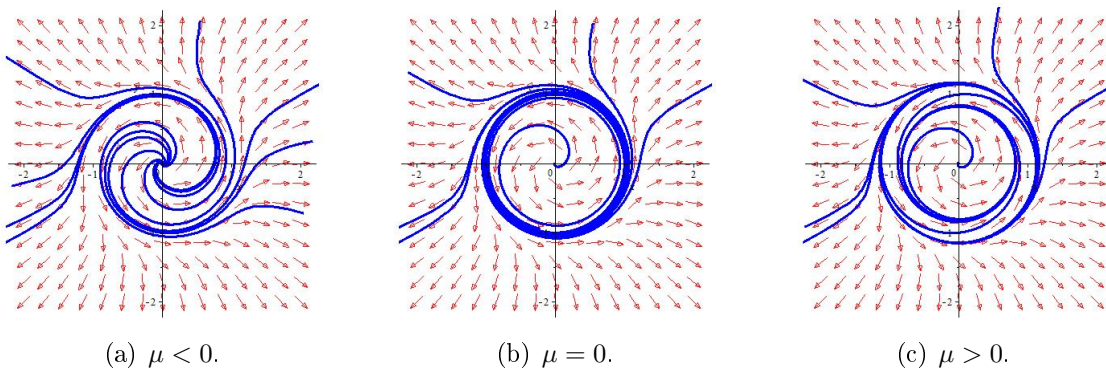


Figura 3.1: Retratos de fase do sistema (3.2) para  $\mu < 0, \mu = 0$  e  $\mu > 0$ .

## 3.2 Bifurcações em pontos de equilíbrio não-hiperbólicos

Nesta seção, estudaremos como o comportamento qualitativo do conjunto de soluções do sistema (3.1), dependendo do parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$ , muda conforme o campo vetorial  $f$  passa por um ponto no conjunto de bifurcações ou quando o parâmetro  $\mu$  varia através de um valor de bifurcação, conforme ilustrado com o sistema (3.2). Começaremos o estudo de bifurcações de campos vetoriais com os tipos mais simples de bifurcações que ocorrem em sistemas dinâmicos (ou equações diferenciais de primeira ordem), que são aquelas bifurcações em pontos de equilíbrio não-hiperbólicos. De fato, faremos uma discussão sobre as bifurcações que ocorrem nos pontos de equilíbrio do sistema (3.1), com  $x \in \mathbb{R}$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ . Os três tipos mais simples de bifurcações que ocorrem em um ponto crítico não-hiperbólico de (3.1) são ilustradas nos seguintes exemplos.

**Exemplo 11** Considere o sistema unidimensional

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2.\tag{3.4}$$

Os pontos de equilíbrio desse sistema são  $x = \pm\sqrt{\mu}$ . Para  $\mu > 0$  existem 2 pontos de equilíbrio em  $x = \pm\sqrt{\mu}$ . A derivada de  $f$  com relação a  $x$  é dada por  $Df(x, \mu) = -2x$ , logo  $Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \mp 2\sqrt{\mu}$ , donde segue que o ponto crítico  $x = \sqrt{\mu}$  é estável, enquanto o ponto crítico  $x = -\sqrt{\mu}$  é instável. Para  $\mu = 0$ , existe só um ponto crítico em  $x = 0$ , que é um ponto crítico não-hiperbólico, pois  $Df(0, 0) = 0$ ; o campo vetorial unidimensional

$f(x) = -x^2$  é estruturalmente instável, pois  $\mu = 0$  é um valor de bifurcação. Para  $\mu < 0$  não existem pontos críticos. Ver Figura 3.2

Para  $\mu > 0$  as variedades (unidimensionais) estável e instável para a equação diferencial nesse exemplo são dados por  $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, \infty)$  e  $W^u(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, \sqrt{\mu})$ ; para  $\mu = 0$ , a variedade central unidimensional é dada por  $W^c(0) = (-\infty, \infty)$ . Esse tipo de bifurcação é chamado bifurcação sela-nó. Seu diagrama de bifurcação é mostrado na Figura 3.3.

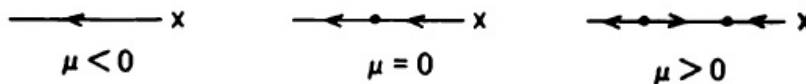


Figura 3.2: Retratos de fase da equação diferencial (3.4) ao variarmos o parâmetro  $\mu$ .

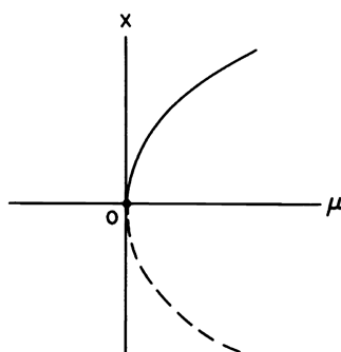


Figura 3.3: Diagrama da bifurcação sela-nó da equação diferencial (3.4).

**Exemplo 12** Considere o sistema unidimensional

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2. \quad (3.5)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (3.5) são  $x = 0$  e  $x = \mu$ . Para  $\mu = 0$  existe um único ponto de equilíbrio em  $x = 0$ , que é não-hiperbólico, pois  $Df(0, 0) = 0$ ; para  $\mu \neq 0$ , existem dois pontos de equilíbrio  $x = 0$  e  $x = \mu$ , que mudam de estabilidade local, conforme o sinal de  $\mu$  (ver Figura 3.4). Assim, o campo vetorial unidimensional  $f(x) = -x^2$  é estruturalmente instável, sendo que  $\mu = 0$  é um valor de bifurcação. Esse tipo de bifurcação é chamado uma bifurcação transcritical. Ver Figura 3.5.

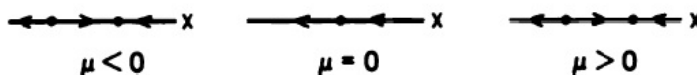


Figura 3.4: Retrato de fase para a equação diferencial (3.5).

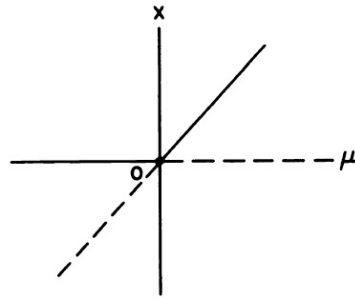


Figura 3.5: Diagrama de bifurcação transcritical da equação diferencial (3.5).

**Exemplo 13** Consideremos o sistema unidimensional

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3. \quad (3.6)$$

Para  $\mu > 0$  existem pontos de equilíbrios em  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{\mu}$ . Para  $\mu \leq 0$ ,  $x = 0$  é o único ponto de equilíbrio não-hiperbólico em  $x = 0$ , pois  $Df(0,0) = 0$ ; o campo vetorial  $f(x) = -x^3$  é estruturalmente instável; e  $\mu = 0$  é um valor de bifurcação. Para  $\mu < 0$  a variedade unidimensional estável é dada por  $W^s(0) = (-\infty, \infty)$ ; entretanto, para  $\mu = 0$  a variedade unidimensional estável  $W^s(0)$  coincide com a variedade unidimensional central  $W^c(0) = (-\infty, \infty)$ . Esse tipo de bifurcação é chamado uma bifurcação Pitchfork. Ver diagrama na Figura 3.7.



Figura 3.6: Retrato de fase da equação diferencial (3.6).

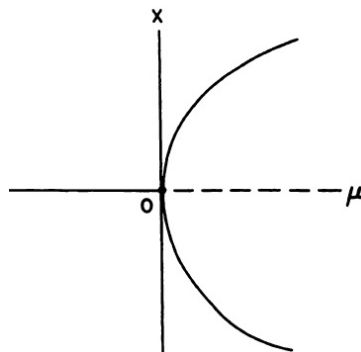


Figura 3.7: Diagrama de bifurcação da bifurcação Pitchfork da equação diferencial (3.6).

As bifurcações acima ocorrem também em sistemas de equações diferenciais ordinárias no  $\mathbb{R}^n$ . Este é o conteúdo do teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [10].

**Teorema 5 (Sotomayor).** Considere o sistema de equações diferenciais  $\dot{x} = f(x, \mu)$ , com  $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e  $f$  de classe  $C^1$  em um aberto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Suponha que  $f(x_0, \mu_0) = 0$  e que a  $n \times n$  matriz  $A \equiv Df(x_0, \mu_0)$  tem um autovalor  $\lambda = 0$  com autovetor  $v$  e que  $A^T$  tem um autovetor  $w$  correspondente ao autovalor  $\lambda = 0$ . Suponha ainda que  $A$  tem

$k$  autovalores com parte real negativa e  $(n - k - 1)$  autovalores com parte real positiva e que as seguintes condições são satisfeitas

$$w^T f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0, \quad w^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq 0. \quad (3.7)$$

Então existe uma curva suave de pontos de equilíbrios de (3.1) em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , passando pelo ponto  $(x_0, \mu_0)$  e tangente ao hiperplano  $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$ . Dependendo dos sinais das expressões em (3.7), não existem pontos de equilíbrios de (3.1) próximos de  $x_0$  quando  $\mu < \mu_0$  (ou quando  $\mu > \mu_0$ ) e existem dois pontos de equilíbrios de (3.1) próximos de  $x_0$  quando  $\mu > \mu_0$  (ou quando  $\mu < \mu_0$ ). Os dois pontos de equilíbrio de (3.1) próximos de  $x_0$  são hiperbólicos e têm variedades estáveis de dimensões  $k$  e  $k + 1$  respectivamente; i.e.; no sistema (3.1) ocorre uma bifurcação sela-nó no ponto de equilíbrio  $x_0$ , quando o parâmetro  $\mu$  passa pelo valor de bifurcação  $\mu = \mu_0$ .

Se as condições (3.7) são mudadas para

$$\begin{aligned} w^T f_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ w^T [Df_\mu(x_0, \mu_0)v] &\neq 0 \text{ e} \\ w^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] &\neq 0, \end{aligned}$$

então o sistema (3.1) experimenta uma bifurcação transcítica no ponto de equilíbrio  $x_0$  quando o parâmetro  $\mu$  passa pelo valor de bifurcação  $\mu = \mu_0$ , e o diagrama de bifurcação é dado pela Figura 3.5 com o eixo- $x$  na direção do autovetor  $v$ .

Se as condições (3.7) são mudadas para

$$\begin{aligned} w^T f_\mu(x_0, \mu_0) &= 0, \\ w^T [Df_\mu(x_0, \mu_0)v] &\neq 0, \\ w^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] &= 0, \text{ e } w^T [D^3 f(x_0, \mu_0)(v, v, v)] \neq 0, \end{aligned}$$

então o sistema (3.1) experimenta uma bifurcação Pitchfork no ponto de equilíbrio  $x_0$  quando o parâmetro  $\mu$  passa pelo valor de bifurcação  $\mu = \mu_0$  e o diagrama de bifurcação é como mostrado na Figura 3.7 com o eixo- $x$  na direção do autovetor  $v$ .

**Exemplo 14** Consideremos o sistema bidimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Na notação do teorema de Sotomayor, temos:

$$A = Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$f_\mu(0, 0) = (1, 0)^T$ ,  $v = w = (1, 0)^T$ ,  $w^T f_\mu(0, 0) = 1$  e  $w^T [D^2 f(0, 0)(v, v)] = -2$ . Então existe uma bifurcação no ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  no valor de bifurcação  $\mu = 0$ . Para  $\mu < 0$  não existem pontos de equilíbrio e para  $\mu = 0$  existe um ponto de equilíbrio na origem que é uma sela-nó. Para  $\mu > 0$  existem dois pontos críticos em  $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ ; onde  $(\sqrt{\mu}, 0)$  é um nó estável e  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  é uma sela. Em seguida mostramos o retrato de fase para este sistema.

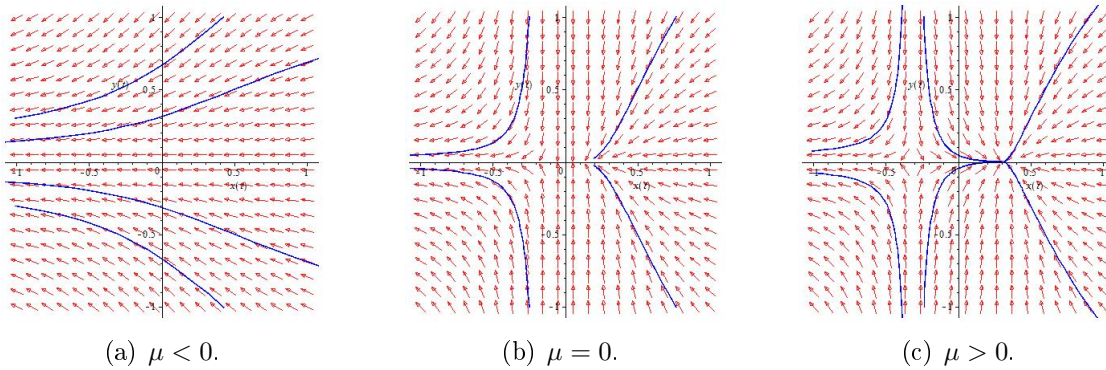


Figura 3.8: Os retratos de fase para o sistema (3.8) para  $\mu$  próximo de  $\mu = 0$ .

### 3.3 Bifurcações de Hopf e bifurcações de ciclos limites de um foco múltiplo

Nesta seção consideramos os tipos de bifurcações que podem ocorrer quando a matriz  $Df(x_0, \mu_0)$  tem um par de autovalores imaginários puros e nenhum outro autovalor com parte real zero. Neste caso, o teorema da função implícita garante que para cada  $\mu$  perto de  $\mu_0$  existirá um único ponto de equilíbrio  $x_\mu$  perto  $x_0$ ; no entanto, se os autovalores de  $Df(x_\mu, \mu)$  atravessam o eixo imaginário em  $\mu = \mu_0$ , então as dimensões das variedades estável e instável de  $x_\mu$  vão mudar e o retrato de fase local de (3.1) mudará com  $\mu$ , quando este passa pelo valor de bifurcação  $\mu_0$ .

**Exemplo 15 (Uma bifurcação de Hopf)** Considere o sistema planar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

cujos únicos pontos de equilíbrio são a origem. A matriz Jacobiana desse sistema calculada na origem é dada por

$$Df(0, \mu) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix},$$

que tem como autovalores  $\lambda = \mu \pm i$ . Logo, para  $\mu < 0$ , a origem é um foco estável e para  $\mu > 0$  é um foco instável. Para  $\mu = 0$ ,  $Df(0, 0)$  tem um par de autovalores imaginários puros, assim a origem é um centro ou um foco para este sistema não-linear. Escrevendo (3.9) em coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

com o que podemos mostrar que para  $\mu = 0$  a origem é um foco estável e para  $\mu > 0$  existe um ciclo limite estável contido no círculo de raio  $r = \sqrt{\mu}$ , que pode ser parametrizado por:

$$\Gamma_\mu: \gamma_\mu(t) = \sqrt{\mu}(\cos t, \sin t)^T.$$

A curva  $\Gamma_\mu$  representa uma família a um-parâmetro de ciclos limites desse sistema. O ciclo cresce proporcionalmente ao valor de  $\mu$  (ver Figura 3.9).

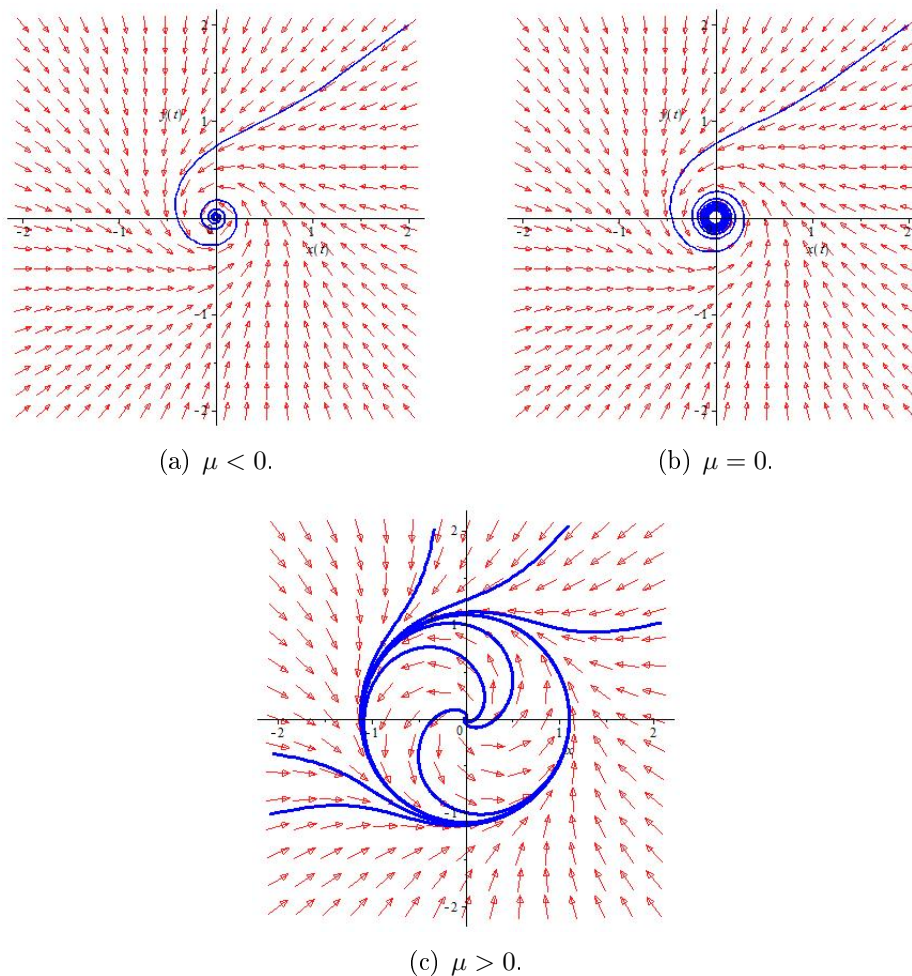


Figura 3.9: Os retratos de fase para o sistema (3.9).

Vejamos um resultado mais geral sobre a bifurcação de Hopf que ocorre em um sistema planar analítico, da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y + p(x, y), \\ \dot{y} &= x + \mu y + q(x, y), \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde as funções  $p$  e  $q$  são dadas por

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j = (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots$$

e

$$q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots$$

Neste caso, para  $\mu = 0$ ,  $Df(0, 0)$  tem um par de autovalores imaginários puros e a origem é chamada um foco fraco ou um foco múltiplo. A multiplicidade  $m$  de um foco múltiplo foi definido em termos da aplicação Poincaré  $P(s)$  para o foco. Pelo teorema de Poincaré, temos

$$P'(0) = e^{2\pi\mu}.$$

Para o sistema (3.10) e para  $\mu = 0$  temos  $P'(0) = 1$ , ou equivalentemente  $d'(0) = 0$ , onde  $d(s) = P(s) - s$  é a função deslocamento. Para  $\mu = 0$  em (3.10), o número de Lyapunov

$\sigma$  é dado pela equação

$$\sigma = \frac{3\pi}{2} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})]. \quad (3.11)$$

Em particular, se  $\sigma \neq 0$ , então a origem é um foco fraco de multiplicidade 1, sendo estável se  $\sigma < 0$  e instável se  $\sigma > 0$ , e a bifurcação Hopf ocorre na origem para o valor de bifurcação  $\mu = 0$ . De fato, vale o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [10].

**Teorema 6 (Bifurcação de Hopf).** *Se  $\sigma \neq 0$ , então uma bifurcação de Hopf ocorre na origem do sistema planar analítico (3.10), no valor de bifurcação  $\mu = 0$ ; em particular, se  $\sigma < 0$ , então um único ciclo limite estável bifurca da origem de (3.10) para  $\mu > 0$  suficientemente pequeno, e se  $\sigma > 0$ , então um único ciclo limite instável bifurca da origem de (3.10) para  $\mu < 0$  suficientemente pequeno. Se  $\sigma < 0$ , os retratos de fase para o sistema planar (3.10), para  $\mu$  numa vizinhança de  $\mu = 0$  são equivalentes aos mostrados na Figura 3.9.*

**Observação 7** *No primeiro caso, para  $\sigma < 0$  no teorema anterior onde o ponto crítico gera um ciclo limite estável, com  $\mu$  que passa através do valor de bifurcação  $\mu = 0$ , é chamada uma bifurcação de Hopf supercrítica e no segundo caso, para  $\sigma > 0$ , onde o ponto de equilíbrio gera um ciclo limite instável com  $\mu$  que passa através do valor de bifurcação  $\mu = 0$ , é chamada uma bifurcação de Hopf subcrítica.*

### 3.4 Bifurcações de órbitas periódicas não-hiperbólicas

Nesta seção, vamos considerar sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

dependendo de um parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$  onde  $f \in C^1(E \times J)$ ,  $E$  é um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $J \subset \mathbb{R}$  é um intervalo. Seja  $\phi_t(x, \mu)$  o fluxo do sistema (3.1) e assumamos que para  $\mu = \mu_0$ , o sistema (3.1) tem uma órbita periódica  $\Gamma_0 \subset E$  dada por  $x = \phi_t(x_0, \mu_0)$ . Seja  $\Sigma$  o hiperplano perpendicular a  $\Gamma_0$  no ponto  $x_0 \in \Gamma_0$ . Então, usando o teorema da função implícita, pode ser mostrado que existe uma  $C^1$ -função  $\tau(x, \mu)$  definida em uma vizinhança  $N_\delta(x_0, \mu_0)$  do ponto  $(x_0, \mu_0) \in E \times J$  tal que

$$\phi_{\tau(x, \mu)}(x, \mu) \in \Sigma,$$

para todo  $(x, \mu) \in N_\delta(x_0, \mu_0)$ . Se  $P(x, \mu)$  tem uma família a um parâmetro de pontos fixos  $x_\mu$ , então temos a seguinte fórmula para a derivada da Aplicação de Poincaré de um  $C^1$ -sistema planar (3.1) (conforme vimos no Capítulo 2):

$$DP(x_\mu, \mu) = \exp \int_0^{T_\mu} \nabla \cdot f(\gamma_\mu(t), \mu) dt, \quad (3.12)$$

em um ponto  $x_\mu \in \Gamma_\mu$  onde a família a um-parâmetro de órbitas periódicas

$$\Gamma_\mu : \{x = \gamma_\mu(t), 0 \leq t \leq T_\mu\},$$

onde  $T_\mu$  é o período de  $\gamma_\mu(t)$  e  $\nabla \cdot f$  é a divergência de  $f$ . Aqui ilustramos a dependência da aplicação de Poincaré  $P(x, \mu)$  sobre o parâmetro  $\mu$  com um exemplo.

**Exemplo 16** (Uma bifurcação sela-nó em uma órbita periódica). Considere o sistema planar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x[\mu - (x^2 + y^2 - 1)^2], \\ \dot{y} &= x - y[\mu - (x^2 + y^2 - 1)^2].\end{aligned}\quad (3.13)$$

Escrito em coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r[\mu - (r^2 - 1)^2], \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

Para  $\mu > 0$  existem duas famílias a um-parâmetro de órbitas periódicas

$$\Gamma_{\mu}^{\pm} = \sqrt{1 \pm \mu^{\frac{1}{2}}}(\cos t, \sin t)^T,$$

com parâmetro  $\mu$ . A origem é instável para  $0 < \mu < 1$ , o menor ciclo-limite  $\Gamma_{\mu}^{-}$  é estável e o ciclo-limite maior  $\Gamma_{\mu}^{+}$  é instável. Para  $\mu = 0$  existe um ciclo-limite semi-estável  $\Gamma_0$  representado por  $\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)^T$ . Notemos que existe uma bifurcação de Hopf supercrítica na origem no valor de bifurcação  $\mu = 1$ .

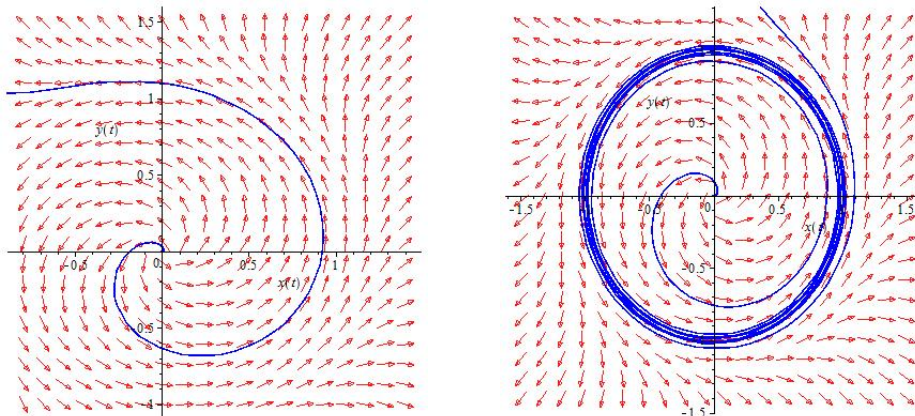
Os pontos  $r_{\mu}^{\pm} = \sqrt{1 \pm \mu^{\frac{1}{2}}}$  são pontos fixos da aplicação de Poincaré  $P(r, \mu)$  da órbita periódica  $\gamma_0(t)$  ao longo de qualquer raio da origem

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, \theta = \theta_0\};$$

i.e., temos  $d(\sqrt{1 \pm \mu^{\frac{1}{2}}}, \mu) = 0$  onde  $d(r, \mu) = P(r, \mu) - r$  é a função distância (ou deslocamento). O diagrama de bifurcação é dado pelo gráfico da relação  $d(r, \mu) = 0$  no plano  $(\mu, r)$ . Usando a equação (3.12), podemos calcular a derivada da aplicação de Poincaré em  $r_{\mu}^{\pm} = \sqrt{1 \pm \mu^{\frac{1}{2}}}$ , que é dada por

$$DP(\sqrt{1 \pm \mu^{\frac{1}{2}}}, \mu) = e^{\pm 8\mu^{\frac{1}{2}}(1 \pm \mu^{\frac{1}{2}})\pi}.$$

Também vemos que, se  $0 < \mu < 1$  então  $DP(\sqrt{1 - \mu^{\frac{1}{2}}}, \mu) < 1$  e  $DP(\sqrt{1 + \mu^{\frac{1}{2}}}, \mu) > 1$ , donde temos que o ciclo limite menor é estável e o ciclo limite maior é instável. Portanto, para  $\mu = 0$  temos  $DP(1, 0) = 1$ , i.e.;  $\gamma_0(t)$  é uma órbita periódica não-hiperbólica com ambos os expoentes característicos iguais a zero. Ver Figuras 3.10,



(a)  $\mu < 0$ .

(b)  $\mu = 0$ .

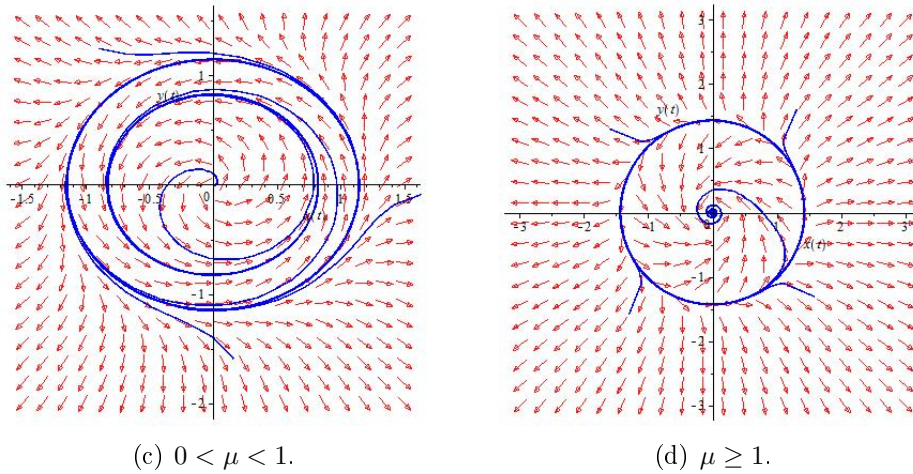


Figura 3.10: Os retratos de fase para o sistema (3.13), para diferentes valores de  $\mu$ .

### 3.5 Bifurcações homoclínicas

Nesta seção, consideraremos bifurcações homoclínicas para campos vetoriais planares

$$\dot{x} = f(x). \quad (3.14)$$

Assumimos que (3.14) é um sistema planar que tem uma órbita homoclínica ( $S_0$ ) ao ponto de sela  $x_0$ , conforme mostrado na Figura 3.11.

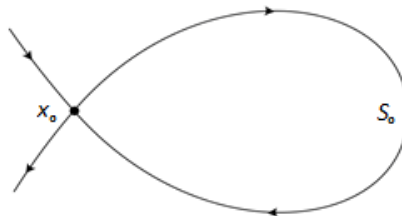


Figura 3.11: Órbita homoclínica.

**Definição 21** Um ciclo separatriz  $S_0$  é chamado separatriz simples se a quantidade

$$\sigma_0 \equiv \nabla \cdot f(x_0) \neq 0.$$

$S_0$  é estável (ou instável) se todas as trajetórias em alguma vizinhança de  $S_0$  se aproximam de  $S_0$  com  $t \rightarrow \infty$  (ou com  $t \rightarrow -\infty$ ).

Valem os seguintes resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [10].

**Teorema 7** Seja  $x_0$  uma sela topológica do sistema planar analítico (3.14) e seja  $S_0$  um ciclo separatriz simples em  $x_0$ . Então  $S_0$  é estável se, e somente se,  $\sigma_0 < 0$ .

**Teorema 8** Se  $S_0$  é um ciclo separatriz simples em uma sela topológica  $x_0$  de um sistema planar analítico (3.14), então

(i) existe  $\delta > 0$  e  $\varepsilon > 0$  tal que algum sistema  $\varepsilon$ -próximo de (3.14) na norma  $C^1$  tem ao menos um ciclo-limite em uma  $\delta$ -vizinhança  $N_\delta(S_0)$  de  $S_0$ , e

(ii) para algum  $\delta > 0$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um sistema analítico  $\varepsilon$ -próximo de (3.14) na norma  $C^1$  que tem exatamente um ciclo-limite em  $N_\delta(S_0)$ .

Além disso, se tal ciclo limite existir, será estável se  $\sigma_0 < 0$  e instável se  $\sigma_0 > 0$ .

Vejamos um exemplo.

**Exemplo 17** O sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + x^2 - xy + \mu y.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Define uma família de campos vetoriais com parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$ . Os pontos de equilíbrio do sistema (3.15) são  $(0, 0)$  e  $(-1, 0)$  e a matriz Jacobiana no ponto  $(x, y)$  é dada por

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 + 2x - y & -x + \mu \end{bmatrix}.$$

Os autovalores no ponto  $(0, 0)$  são  $\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2}$ , logo o ponto  $(0, 0)$  é uma sela para quaisquer valores de  $\mu \in \mathbb{R}$ . No entanto, no ponto  $(-1, 0)$  existe um foco fraco estável para  $\mu = -1$ , ver Figura 3.12 (b). E assim vemos que um único ciclo-limite estável é gerado em  $-1 < \mu < -0.85$  no ponto  $(-1, 0)$ . Este ciclo-limite expande monotonicamente com  $\mu$  crescente até cruzar o ponto sela na origem e forma um órbita homoclínica estável  $S_0$ , em um valor de bifurcação  $\mu = -0.85$ . Pelo teorema (7) O ciclo separatrix  $S_0$  é estável, pois  $\sigma = \mu_0 \leq 0$ . Essa sequência de bifurcações é mostrada nas Figuras 3.12.

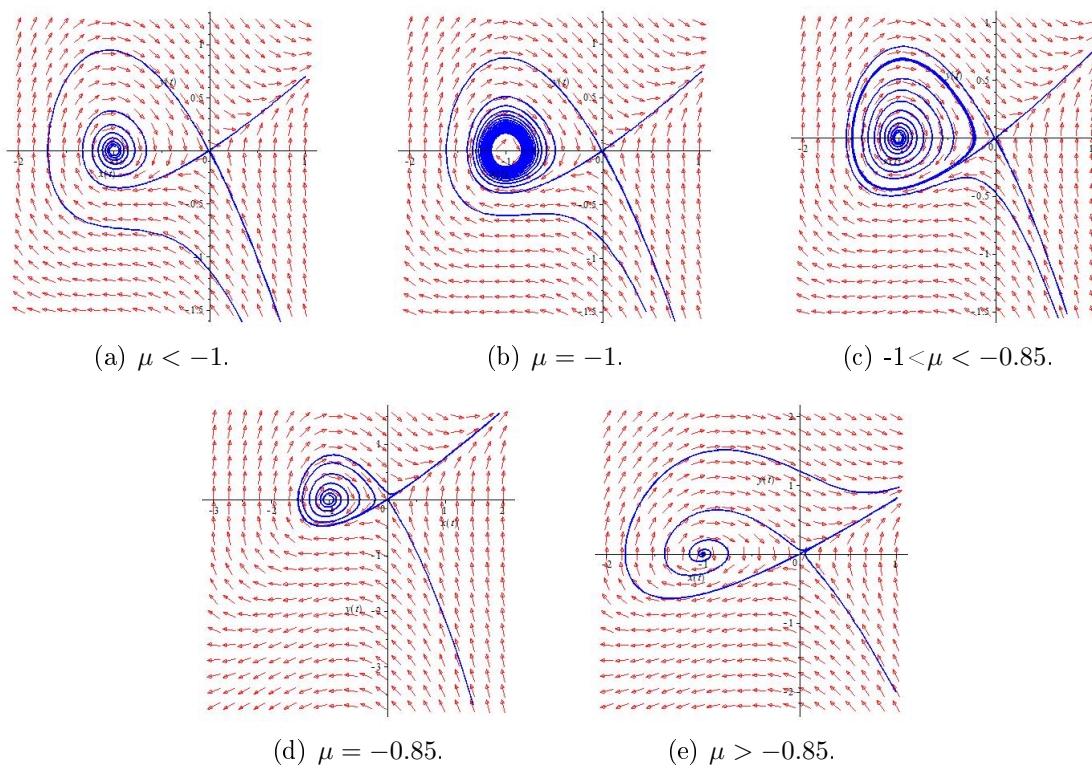


Figura 3.12: Os retratos de fase para o sistema (3.15). (a)  $(-1, 0)$  é um foco estável, (b)  $(-1, 0)$  é um foco fraco estável, (c) existência de um ciclo limite, (d) Órbita homoclínica, (e)  $(-1, 0)$  é um foco instável.



# Oscilações Lineares e Não-Lineares

Neste capítulo, estudamos os comportamentos periódicos representados por soluções de equações diferenciais lineares e não-lineares. Obtemos a solução analítica de uma equação diferencial linear de segunda ordem, que contém um termo que representa um forçamento harmônico. Ressaltamos a importância de se analisar essa equação e discutimos os possíveis comportamentos dinâmicos. O material aqui apresentado tem como base a referência [8].

## 4.1 Origem histórica

Talvez, o pêndulo tenha sido o sistema físico responsável pelo nascimento da teoria de sistemas Dinâmicos. Num dia de 1581, no interior da catedral de Pisa, Galileu se surpreendeu observando um candelabro que oscilava, e teve a ideia de estimar o período da oscilação contando seus próprios batimentos cardíacos. Galileu desejava descobrir se o período de oscilação do candelabro diminuía, conforme a amplitude do movimento tornava-se cada vez menor. Em sua casa, Galileu fez alguns experimentos com pedras amarradas em barbantes e concluiu que o período das pequenas oscilações não dependia nem da amplitude do movimento, nem da massa  $m$  da pedra. O período dependia apenas do comprimento efetivo  $l$  do barbante (a distância entre o ponto de sustentação do barbante e o centro de massa da pedra).

Naqueles anos, Galileu ainda trabalhava como médico e achou uma aplicação para a ideia que teve na catedral: passou a usar o comprimento de pêndulos para avaliar o batimento cardíaco de pacientes. A partir dessa época, Galileu foi se afastando cada vez mais da Medicina, passando a dedicar-se ao estudo da Astronomia e da Física.

Atualmente, sabemos que as oscilações de um pêndulo podem ser modeladas matematicamente por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, obtida com base na Segunda Lei de Newton. Mais precisamente, o comportamento dinâmico de um pêndulo num campo gravitacional, sujeito a um amortecimento linear e a um forçamento harmônico, é descrito pela equação:

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mgl \sin \theta = F \cos(\omega_d t), \quad (4.1)$$

onde  $\theta$  é o deslocamento angular do pêndulo em relação ao eixo vertical que passa pelo seu ponto de sustentação;  $ml^2$  é o momento de inércia;  $b$  é a constante de amortecimento;  $mgl \sin \theta$  é o torque restaurador devido à aceleração gravitacional  $g$ ; e  $F \cos(\omega_d t)$  é o torque externo de amplitude  $F$  e frequência angular  $\omega_d$ . Essa equação é normalmente

reescrita como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\sigma \frac{d\theta}{dt} + w_0^2 \sin \theta = f \cos(w_d t), \quad (4.2)$$

onde  $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $2\sigma \equiv \frac{b}{ml^2}$  e  $f \equiv \frac{F}{ml^2}$ . Por conveniência, toma-se  $2\sigma$  como o coeficiente de amortecimento.

Neste capítulo, estudamos os diferentes tipos de oscilações do pêndulo, descritos pelas soluções da equação (4.2). Nas próximas seções apresentamos os casos linear e não-linear, com e sem amortecimento e termo forçante. Em particular, veremos que as conclusões tiradas por Galileu há mais de 400 anos só são válidas no caso em que o pêndulo é não-amortecido ( $\sigma = 0$ ), não-forçado ( $f = 0$ ), e para oscilações cujo deslocamento angular  $\theta$ , em torno da posição de equilíbrio  $\theta^* = 0$ , é pequeno, de modo que se considera  $\sin \theta \approx \theta$ . Nessa aproximação, o movimento do pêndulo é governado pela equação diferencial linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad (4.3)$$

que estudamos na próxima seção.

## 4.2 Pêndulo linear não-amortecido e não-forçado

Alguns sistemas físicos simples são descritos pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = 0, \quad (4.4)$$

sendo  $w_0 > 0$  uma constante positiva. Essa equação, reescrita em termos de variáveis de estado, torna-se

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -w_0^2 x. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A solução desse sistema diferencial é

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t). \quad (4.6)$$

Podemos ver que os autovalores da matriz Jacobiana desse sistema no ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  são  $\lambda_{1,2} = \pm iw_0$ ; ou seja, são complexos conjugados com parte real nula. Assim, o ponto de equilíbrio  $(x, y) = (0, 0)$  é um centro, ver Figura 4.1.

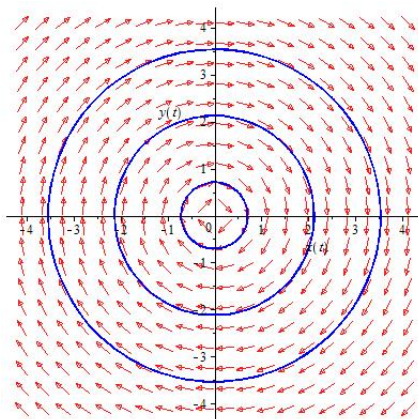


Figura 4.1: Trajetórias da equação (4.4).

Como a equação (4.4) é de segunda ordem, é necessário conhecer  $x(t)$  e  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  no instante inicial  $t = 0$  para se determinar as constantes  $A_1$  e  $A_2$ . Para  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ , temos

$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{y_0}{w_0}.$$

Por conveniência, consideremos  $A_1$  e  $A_2$  como os catetos de um triângulo. Seja  $A$  a hipotenusa desse triângulo e  $\phi$  o ângulo entre o cateto de lado  $A_1$  e a hipotenusa. Usando relações trigonométricas, mostra-se que:

$$A = \sqrt{(A_1)^2 + (A_2)^2}, \quad \cos \phi = \frac{A_1}{A}, \quad \sin \phi = \frac{A_2}{A}.$$

Dessa maneira, a solução (4.6) pode ser reescrita como:

$$x(t) = A[\cos(w_0 t) \cos(\phi) + \sin(w_0 t) \sin(\phi)] = A \cos(w_0 t - \phi). \quad (4.7)$$

As constantes  $A$  e  $\phi$  podem ser interpretadas como a amplitude e a fase do movimento, e são obtidas a partir de  $x_0$  e  $y_0$  por:

$$A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{y_0}{w_0}\right)^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0 w_0}\right).$$

Comparando (4.4) e (4.3), verifica-se que, para o pêndulo,  $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . A relação entre a frequência angular  $w_d$  e o período de oscilação  $T$  é  $T = \frac{2\pi}{w_d}$ . Observamos então, que o período  $T$  do movimento do pêndulo depende apenas do comprimento  $l$  do pêndulo, já que a força  $g$  da gravidade pode ser considerada constante.

Além de servir como modelo matemático para o movimento do pêndulo, a equação (4.4) é muito usada também no estudo de outros fenômenos oscilatórios, como o movimento de uma massa presa à uma mola (sistema massa-mola) e as oscilações de corrente e voltagem em um circuito elétrico. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 18** *Um sistema massa-mola que oscila livremente numa superfície horizontal sem atrito, obedece à equação:*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (4.8)$$

onde  $k$  é a constante da mola e  $m$  a massa. O deslocamento  $x(t)$  do corpo de massa  $m$  é medido em relação à posição de equilíbrio  $x = 0$ , que é aquela posição na qual se anula a força exercida pela mola de constante elástica  $k$ . Nesse caso, então, a frequência do movimento vale  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  (ou seja, depende da constante  $k$  da mola e da massa  $m$ ). Uma solução  $x(t)$ , periódica, da equação (4.8) é mostrada na Figura 4.2.

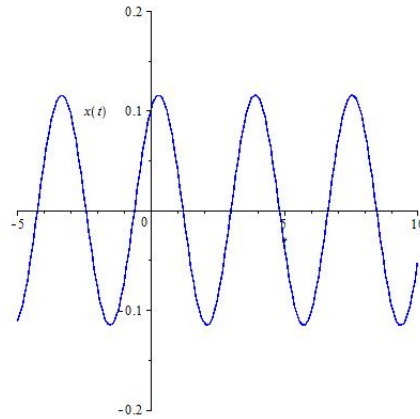


Figura 4.2: Comportamento periódico de uma solução da equação (4.8) (sistema massa-mola sem atrito).

**Exemplo 19** Circuito Elétrico formado por um Indutor e um Capacitor (circuito LC)

Considere o circuito elétrico cujo esquema é mostrado na Figura 4.3, formado por um Capacitor (denotado por  $C$ ) e um indutor (denotado por  $L$ ), ligados em série.

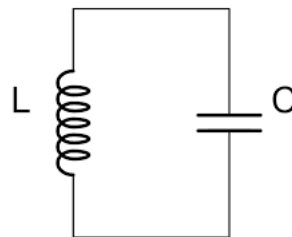


Figura 4.3: Esquema de um circuito elétrico LC.

É muito interessante observar que, do ponto de vista formal, um circuito LC é análogo a um oscilador harmônico simples, dado pela equação (4.8), ou seja, é equivalente a um sistema do tipo massa-mola (ou ao pêndulo linear sem amortecimento). Com efeito, sejam  $i$  a corrente no circuito,  $q$  a carga elétrica,  $C$  a capacitância e  $L$  a indutância. Sabe-se que a corrente circulante no circuito passa pelo indutor, criando conseqüentemente campos magnéticos. Isto significa que, parte da carga  $q$  (ou energia) que estava armazenada no capacitor, é transformada em energia magnética no indutor. Vamos encontrar uma equação que descreva o comportamento temporal das cargas e correntes neste circuito, determinando as equações para  $q$  e  $i$  usando a Lei da Conservação de energia, como a seguir.

Sabe-se que as energias armazenadas num capacitor e num indutor são dadas, respectivamente, por:

$$U_c = \frac{q^2}{2C} \quad \text{e} \quad U_p = \frac{Li^2}{2}.$$

Como o sistema é fechado e ideal, temos que a energia total ( $U_T$ ) no circuito é constante. Além disso, como existem apenas dois elementos no circuito, podemos afirmar que a energia total deve ser uma soma das energias elétrica ( $U_c$ ) e magnética ( $U_p$ ), produzidas no capacitor e no indutor respectivamente. Assim temos que

$$U_T = U_p + U_c = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{constante}.$$

Derivando com relação ao tempo  $t$ , obtemos

$$\frac{dU_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0,$$

donde segue que

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0.$$

Lembrando agora que  $i = \frac{dq}{dt}$ , dividindo a equação por  $Li$ , obtemos finalmente

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0, \quad (4.9)$$

Fazendo as seguintes correspondências com as variáveis do sistema massa-mola:  $x \rightarrow q$ ,  $\dot{x} \rightarrow i$ ,  $m \rightarrow L$ ,  $k \rightarrow \frac{1}{C}$ , obtemos que a solução da equação (4.9) é dada por:

$$q(t) = Q \cos(\omega t + \phi),$$

onde  $Q$  é a amplitude das oscilações da carga,  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  é a frequência angular natural das oscilações eletromagnéticas e  $\phi$  é uma constante de fase, como no caso mecânico. A corrente no circuito  $LC$  é:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q \sin(\omega t + \phi) = -I \sin(\omega t + \phi).$$

No circuito  $LC$ , a amplitude e a constante de fase são determinadas pelas condições iniciais  $i(0)$  e  $q(0)$  e evoluem de acordo com a equação (4.9). Como já vimos anteriormente, as soluções para as diferentes condições iniciais são elipses centradas na origem, que é um ponto de equilíbrio estável (ver Figura 4.1).

A energia elétrica armazenada no capacitor em qualquer instante  $t$  é:

$$U_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi).$$

A energia magnética armazenada no indutor é, por sua vez:

$$U_p = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega^2Q^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{Q^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi),$$

pois  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ . Então,  $U_c + U_p = \frac{Q^2}{2C}$ . A soma (energia total eletromagnética) permanece constante.

**Observação 8** Chama-se de movimento harmônico simples um movimento periódico, descrito por uma única função senoidal e caracterizado por uma única frequência angular  $\omega_d$ . Tal movimento só pode ocorrer em sistemas conservativos.

Do sistema (4.5), obtém-se que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\omega_0^2 x}.$$

Então

$$\frac{y(t)^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x(t)^2}{2} = \frac{y(0)^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x(0)^2}{2} = E.$$

O termo contendo  $y^2$  refere-se à energia cinética, e o termo contendo  $x^2$  refere-se à energia potencial. Em todo instante, a soma entre a energia cinética e a energia potencial mantém-se constante e igual à quantidade de energia total  $E$  que o sistema possui no instante inicial  $t = 0$ .

Newton realizou experimentos com pêndulos para comprovar essa conclusão, obtida a partir da sua segunda lei. Ele verificou que pêndulos de comprimentos idênticos, com massas diferentes, oscilavam com o mesmo período, para pequenas amplitudes de oscilação. Acredita-se que tal conclusão já havia sido obtida por Galileu.

### 4.3 Pêndulo linear amortecido e não-forçado

No mundo real, não há oscilações que se perpetuam indefinidamente, pois sempre ocorre algum tipo de perda de energia nos sistemas, sejam eles mecânicos, elétricos ou mesmo biológicos. Por exemplo, a amplitude de oscilação do candelabro, que supostamente foi observada por Galileu, diminuía com o passar do tempo, em virtude do atrito com o ar e do atrito entre o fio e o ponto de sustentação.

Supondo que o amortecimento sofrido pelo pêndulo, devido à perda de energia, é proporcional à velocidade do movimento que ele executa, suas oscilações podem ser modeladas matematicamente pela equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sigma \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0. \quad (4.10)$$

Essa equação é equivalente à equação de um sistema massa-mola em que o atrito é proporcional à velocidade da massa; ou à equação de um circuito elétrico do tipo RLC, que será estudado no Capítulo 5 (equação (5.1)), caso em que o resistor  $R$  é o responsável pelo termo dissipativo no circuito. A equação (4.10), reescrita em termos de variáveis de estado, fazendo-se  $x' = y$ , torna-se;

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -w_0^2 x - 2\sigma y. \end{aligned}$$

O único ponto de equilíbrio desse sistema linear é a origem  $(x, y) = (0, 0)$ , sendo que os autovalores da matriz que o determina são  $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - w_0^2}$ . Assim, a evolução dinâmica desse sistema depende da relação entre o coeficiente  $\sigma$  do termo dissipativo e a frequência  $w_0$  do movimento sem amortecimento. Tem-se então três comportamentos distintos possíveis, que descrevemos a seguir.

- **Movimento super-amortecido:** Para  $\sigma > w_0$ , os autovalores são reais e negativos, de modo que o ponto de equilíbrio  $(x, y) = (0, 0)$  é um nó assintoticamente estável. Nesse caso, a solução da equação homogênea (4.10) é

$$x_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - w_0^2})t} + A_2 e^{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - w_0^2})t},$$

sendo as constantes  $A_1$  e  $A_2$  determinadas em termos da condição inicial. O pêndulo tende para a posição de equilíbrio sem oscilar em torno dela, conforme mostra a Figura 4.4.

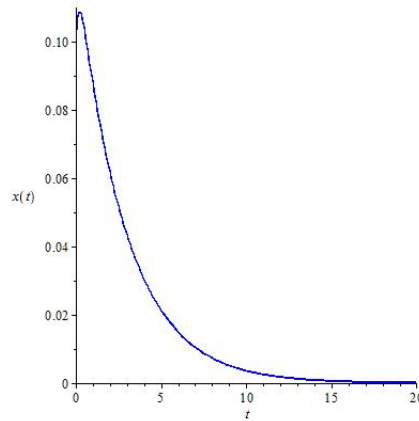


Figura 4.4: Solução da equação (4.10) com  $\sigma > \omega_0$ : movimento super-amortecido.

- **Movimento sub-amortecido:** Para  $\sigma < \omega_0$ , os autovalores são complexos conjugados com parte real negativa, de modo que o ponto de equilíbrio  $(x, y) = (0, 0)$  é um foco assintoticamente estável. Nesse caso, a solução da equação (4.10) é:

$$x_h(t) = e^{-\sigma t} [A_1 \cos(\sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} t) + A_2 \sin(\sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} t)].$$

Pode-se escrever esta expressão numa forma mais conveniente, usando o mesmo procedimento exposto anteriormente, através do qual  $A_1$  e  $A_2$  foram tomadas como catetos de um triângulo retângulo. Desta forma, obtemos:

$$x_h(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} t - \phi).$$

A amplitude do movimento, dada por  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ , e a fase  $\phi = \arctan(\frac{A_2}{A_1})$  são determinadas a partir da condição inicial. Como  $|\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} t - \phi)| \leq 1$ , então  $x_h(t)$  permanece confinado entre curvas proporcionais a  $e^{-\sigma t}$  e  $-e^{-\sigma t}$ , que são chamadas de *envoltórias* da solução. Nesse caso, as envoltórias são exponenciais decrescentes, ou seja, o sistema oscila com uma amplitude que diminui continuamente. O pêndulo tende para o ponto de equilíbrio na origem  $(x, y) = (0, 0)$ , oscilando em torno deste ponto, conforme mostrado na Figura 4.5.

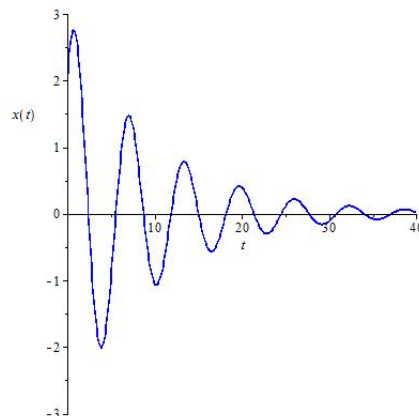


Figura 4.5: Solução da equação (4.10) com  $\sigma < \omega_0$ : movimento sub-amortecido.

- **Movimento criticamente amortecido.** Para  $\sigma = \omega_0$ , os autovalores são reais, iguais e negativos, de modo que o ponto de equilíbrio  $(x, y) = (0, 0)$  é um nó impróprio

assintoticamente estável. Nesse caso, a solução da equação (4.10) é:

$$x_h(t) = e^{-\sigma t}(A_1 + A_2 t).$$

Se as constantes  $A_1$  e  $A_2$  são números positivos ou números negativos, o pêndulo tende para a posição de equilíbrio sem passar por ela. Entretanto, se a condição inicial é tal que  $A_1 > 0$  e  $A_2 < 0$ , ou vice-versa, então, o pêndulo passa pela posição de equilíbrio no tempo  $t = \frac{A_1}{A_2}$  e, após esse instante, tende à posição de equilíbrio monotonicamente.

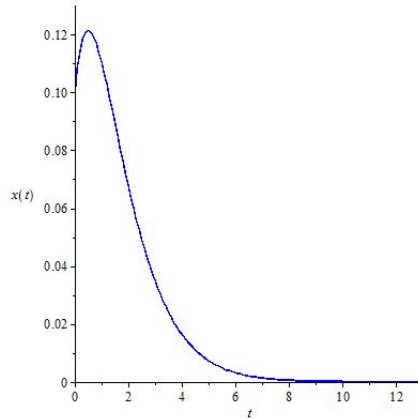


Figura 4.6: Solução da equação (4.10) com  $\sigma = w_0$ : movimento criticamente amortecido.

## 4.4 Pêndulo linear não-amortecido e forçado

Consideremos agora a equação (4.2), com  $\sigma = 0$  (livre de amortecimento) mas com o termo forçante periódico, dado por  $f \cos(w_d t)$ , com  $f > 0$ . Com isso, a amplitude dessa força é  $f > 0$  e ela varia periodicamente com  $t \geq 0$  como  $\cos(wt)$ . A solução geral da equação

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + w_0^2 x = f \cos(w_d t), \quad (4.11)$$

é dada pela soma da solução  $x_h$  da equação homogênea associada, dada por  $\frac{d^2 x}{dt^2} + w_0^2 x = 0$ , com uma solução particular  $x_p$  da equação completa. Isto é:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Suponha que  $w_0 \neq w_d$ . Nesse caso, pode-se procurar uma solução particular para a equação não-homogênea (4.11) da seguinte forma:

$$x_p(t) = B_1 \cos(w_d t) + B_2 \sin(w_d t). \quad (4.12)$$

Derivando (4.12) duas vezes e substituindo em (4.11), obtemos que  $x_p(t)$  é solução daquela equação se  $B_1 = \frac{f}{w_0^2 - w_d^2}$  e  $B_2 = 0$ . Portanto, a solução geral de (4.11) é

$$x(t) = A_1 \cos(w_0 t) + A_2 \sin(w_0 t) + \frac{f}{w_0^2 - w_d^2} \cos(w_d t). \quad (4.13)$$

Quando  $w_d$  está próximo de  $w_0$ , a solução (4.13) produz o fenômeno conhecido como **batimento**, esse fenômeno acontece quando ocorre o encontro (interferência) de ondas com

frequências próximas, produzindo uma onda de amplitude variável. Note que, em alguns momentos, a interferência é construtiva (as ondas se somam) e em outros, é destrutiva (as ondas se anulam), conforme mostram os gráficos na Figura 4.7.

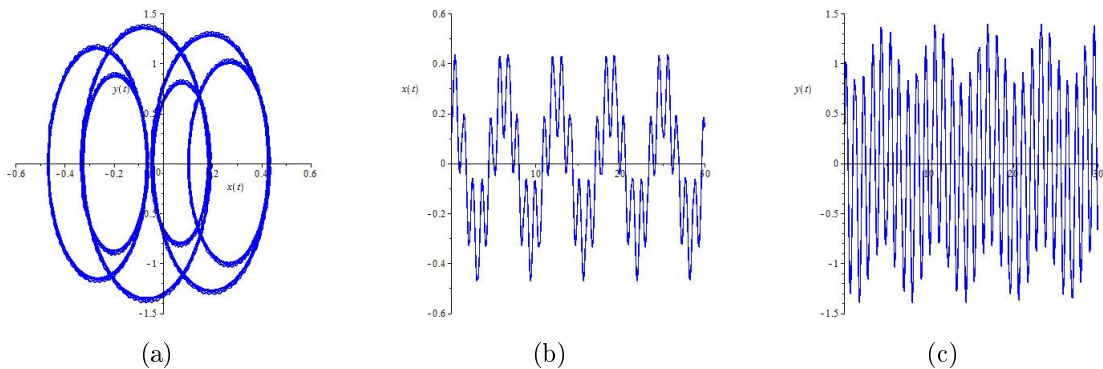


Figura 4.7: (a) Retrato de fase no plano  $(x, x')$  e (b), (c) soluções numéricas de  $x(t)$ ,  $y(t) = x'(t)$  para a equação diferencial (4.11) com  $w_d$  próximo de  $w_0$ .

Se as condições iniciais são  $x(0) = 0$  e  $y(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ , obtemos  $A_2 = 0$  e  $A_1 = -\frac{f}{\omega_0^2 - \omega_d^2}$ , de modo que a solução de (4.11) é dado por

$$x(t) = \left[ \frac{2f}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \sin\left(\frac{(\omega_0 - \omega_d)t}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{(\omega_0 + \omega_d)t}{2}\right). \quad (4.14)$$

A solução (4.14) nem sempre é periódica. Ela será periódica dependendo da relação entre  $\omega_0$  e  $\omega_d$ . De fato, No caso em que  $\omega_d = \omega_0$  ocorre o fenômeno de *ressonância*, isto é, a solução (4.14) não é limitada, tende para infinito oscilando, como mostrado na Figura 4.8.

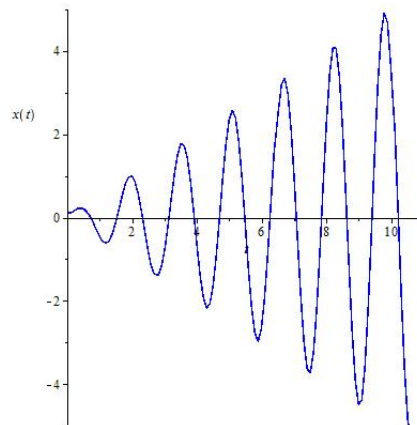


Figura 4.8: Fenômeno de ressonância das soluções da equação (4.11) quando  $w_d = w_0$ .

## 4.5 Pêndulo linear amortecido e forçado

A solução geral da equação (4.2), no caso em que  $\sigma \neq 0$  e  $f \neq 0$ , é dada pela soma da solução  $x_h$  da equação homogênea com a solução particular  $x_p$  da equação completa. A solução da equação homogênea depende da relação entre  $\sigma$  e  $w_0$ . Como no caso em que  $\sigma = 0$ ,  $f \neq 0$  e  $w_0 \neq w_d$ , aqui também se procura por uma solução particular que tenha a seguinte forma:

$$x_p(t) = B_1 \cos(w_d t) + B_2 \sin(w_d t). \quad (4.15)$$

Derivando (4.15) duas vezes e substituindo em (4.2) mostra-se que (4.15) é solução se

$$B_1 = \frac{f(w_0^2 - w_d^2)}{4\sigma^2 w_d^2 + (w_0^2 - w_d^2)^2}, \quad B_2 = \frac{2f\sigma w_d}{4\sigma^2 w_d^2 + (w_0^2 - w_d^2)^2}.$$

A solução particular  $x_p$  pode ser escrita numa forma mais compacta em termos de uma fase  $\phi$ , que se relaciona com as constantes  $B_1$  e  $B_2$  por  $\cos \phi = \frac{B_1}{f}$ ,  $\sin \phi = \frac{B_2}{f}$ . Em termos de  $\phi$ , escreve-se a solução particular como

$$x_p(t) = \frac{f}{4\sigma^2 w_d^2 + (w_0^2 - w_d^2)^2} \cos(w_d t - \phi) = A \cos(w_d t - \phi),$$

onde

$$\phi = \arctan \frac{2\sigma w_d}{w_0^2 - w_d^2} \quad e \quad A = \frac{f}{4\sigma^2 w_d^2 + (w_0^2 - w_d^2)^2}$$

denotam a fase e a amplitude do movimento, respectivamente. Portanto, a solução da equação (4.2) com  $\sigma \neq 0$  e  $f \neq 0$  é dada pela soma da equação homogênea  $x_h(t)$  e particular  $x_p(t)$ ,

$$x(t) = x_h(t) + A \cos(w_d t - \phi).$$

Onde  $x_h(t)$  é dado em três comportamentos distintos dados no sistema (4.10), todas as soluções tendem para a posição de equilíbrio conforme mostrado nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6. No caso de um pêndulo linear, amortecido e forçado harmonicamente, observa-se:

- Quando  $t \rightarrow \infty$ , então  $x_h(t) \rightarrow 0$  para quaisquer valores (positivos) de  $\sigma$  e  $w_0$ . Neste caso,  $x_h(t)$  representa o comportamento transiente do sistema. Os efeitos da condição inicial, que influenciam  $x_h(t)$ , desaparecem para  $t \rightarrow \infty$ . Assim, a solução assintótica desse sistema é dada pela sua solução particular, pois  $x(t) \rightarrow x_p(t)$ . Esse resultado revela que o pêndulo passa a oscilar na mesma frequência do forçamento externo, embora não na mesma fase (pois  $\phi \neq 0$  para  $\sigma \neq 0$ ).

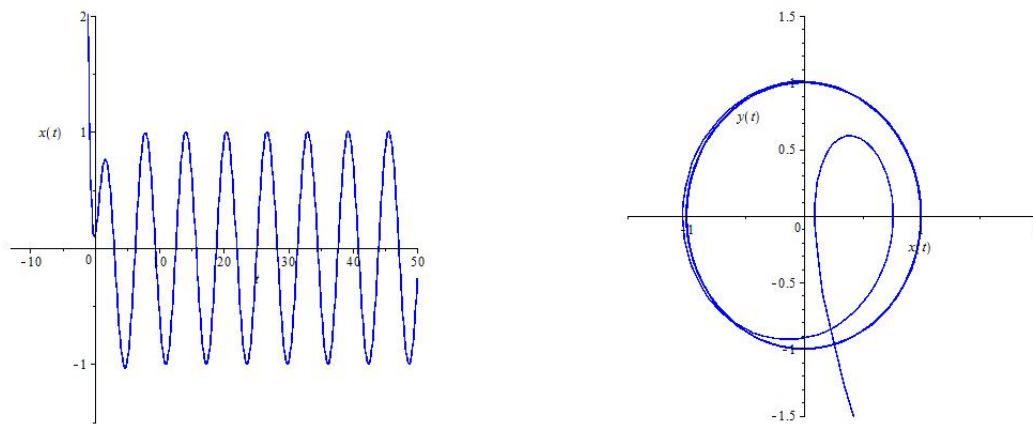


Figura 4.9: Comportamento periódico dada pela solução particular  $x_p(t)$  da equação (4.2), para  $t > 0$ .

- Variando  $w_d$ , observa-se que  $A$  atinge seu máximo em  $w_{d(max)} = \sqrt{w_0^2 - 2\sigma^2}$ , pois, para esse valor

$$\left. \frac{dA}{dw_d} \right|_{w_d=w_{d(max)}} = 0 \quad e \quad \left. \frac{d^2 A}{dw_d^2} \right|_{w_d=w_{d(max)}} \neq 0,$$

é um valor finito. No caso sem atrito,  $A$  cresce de maneira ilimitada. Portanto, um modelo com  $\sigma \neq 0$  deve ser mais adequado para descrever uma corda de piano que oscila com amplitude finita, sob a excitação de um som ressonante.

## 4.6 Pêndulo não-linear não amortecido e não-forçado

No caso em que  $\sigma = f = 0$ , a equação diferencial de segunda ordem (4.2) pode ser reescrita como um sistema não linear de duas equações de primeira ordem, da forma

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= w, \\ \frac{dw}{dt} &= -w_0^2 \sin \theta,\end{aligned}\tag{4.16}$$

que é o sistema não-linear que modela matematicamente o movimento de um pêndulo não amortecido e não-forçado. A curva solução desta equação no espaço de fase, a partir de uma condição inicial  $(\theta(0), w(0))$ , pode ser determinada analiticamente, pois:

$$\frac{d\theta}{dw} = -\frac{w}{w_0^2 \sin \theta} \implies \frac{1}{2w_0^2} w(t)^2 - \cos(\theta(t)) = \frac{1}{2w_0^2} w(0)^2 - \cos(\theta(0)).$$

Com essa expressão, indica-se que, próximo aos pontos de equilíbrio, o retrato de fase do sistema que descreve o pêndulo não-linear (4.16) é composto por trajetórias fechadas. Essas trajetórias representam movimentos de oscilação, conforme mostrado na Figura 4.10.

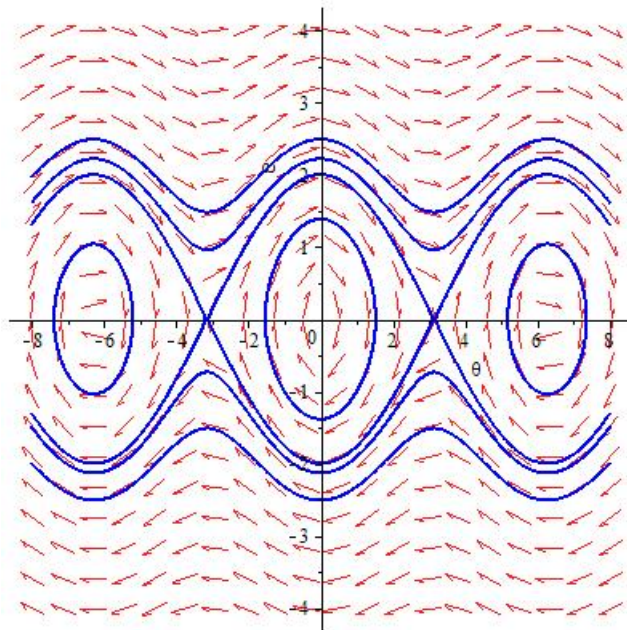


Figura 4.10: Retrato de fase para o sistema não-linear (4.16).

Por conveniência, tome  $t = 0$  como a constante em que a velocidade angular do pêndulo é nula, o que ocorre quando  $\theta$  atinge seu valor máximo,  $\theta_{max}$ . Com essa escolha, a equação para  $\theta(t)$  torna-se:

$$\frac{d\theta}{dt} = w = \sqrt{2w_0^2 \sqrt{\cos \theta(t) - \cos \theta_{max}}}.$$

Essa equação não pode ser integrada em termos de funções elementares. Se esses cálculos fossem factíveis, o período  $T$  de oscilação do pêndulo poderia ser obtido, analiticamente,

do seguinte modo. Sabe-se que o pêndulo gasta um tempo igual a  $\frac{T}{4}$  para ir de  $\theta = 0$  até  $\theta_{max}$ . Portanto

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}w_0} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta(t) - \cos \theta_{max}}}.$$

Desta expressão, podemos observar que o período de oscilação  $T$  de um pêndulo não-linear depende da abertura máxima angular do movimento,  $\theta_{max}$ , que, por sua vez, é determinada pela condição inicial do problema. Portanto, cada trajetória fechada no espaço de fase é percorrida com uma velocidade diferente. Esse resultado é fundamental para se compreender a definição de estabilidade orbital. As equações de estado de um pêndulo não-linear não podem ser integradas analiticamente no tempo, nem mesmo no caso sem amortecimento e sem forçamento externo. Isso mostra a dificuldade de se obter soluções exatas de equações diferenciais não-lineares e a utilidade dos métodos qualitativos de análise de tais equações, desenvolvidos por Poincaré e muito utilizados até os dias de hoje.

No próximo capítulo, veremos como esses fenômenos oscilatórios, tanto lineares quanto não lineares, ocorrem no estudo de circuitos elétricos modelados matematicamente por equações diferenciais ordinárias. Veremos também um novo tipo de oscilação (ou dinâmica) nos circuitos elétricos: as oscilações caóticas, que aparecem em sistemas planares com perturbação periódica e também em sistemas de equações diferenciais ordinárias definidos em dimensões maiores que dois.

# Circuitos Elétricos

## 5.1 Circuito RLC linear

Consideremos um circuito elétrico formado por um capacitor  $C$ , um indutor  $L$  e um resistor  $R$ , ligados em série, conforme mostrado na Figura 5.1. Um circuito  $RLC$  também é conhecido como circuito ressonante, e é chamado de circuito de segunda ordem, pois a tensão ou corrente fluindo no circuito pode ser descrita por uma equação diferencial de segunda ordem, conforme a que vimos no Capítulo 4, ou seja, uma equação da forma (4.10), na qual os coeficientes  $\sigma$  e  $w_0$  são positivos, pois os circuitos em estudo são passivos. Neste caso, o parâmetro  $\sigma$  é chamado de amortecimento e  $w_0$  de frequência natural não amortecida, conforme descrito em [8].

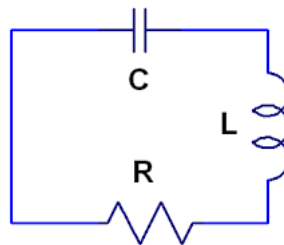


Figura 5.1: Circuito elétrico  $RLC$  em série.

De modo geral, a resistência  $R$  é bastante significativa em um circuito  $RLC$  pois desempenha um papel análogo ao do amortecimento  $\sigma$  de um sistema mecânico (visto no Capítulo 4 - equação (4.10)), tornando a equação que descreve o circuito equivalente à equação de um sistema massa-mola, em que o atrito é proporcional à velocidade da massa. Assim, a energia eletromagnética do circuito  $RLC$  decresce com o tempo, porque a energia é dissipada em forma de calor no resistor, e é de se esperar que a carga no capacitor e a corrente no circuito tendam para zero com o passar do tempo, mas que possam ocorrer oscilações na carga e na corrente enquanto estão se dissipando. Portanto, o circuito  $RLC$  deve apresentar comportamento análogo ao do oscilador harmônico amortecido e não forçado (4.10). Obtemos então a seguinte equação como modelo matemático do circuito  $RLC$  [8]

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = 0.$$

Substituindo  $i$  por  $\frac{dq}{dt}$  e  $\frac{di}{dt}$  por  $\frac{d^2q}{dt^2}$ , vem

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (5.1)$$

Escrita como um sistema planar, em termos de variáveis de estado, a equação (5.1) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= i, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{1}{LC}q, \end{aligned}$$

onde  $q$  denota a carga e  $i$  a corrente no circuito RLC. A Segunda Lei de Newton aplicada ao sistema massa-mola linear com atrito (ou o pêndulo linear com amortecimento), não forçado, foi estudada no Capítulo 4, sendo modelado pela equação diferencial (4.10), que é equivalente à equação (5.1). Assim, sabemos que existem três comportamentos distintos: movimento super-amortecido, sub-amortecido e com amortecimento crítico (conforme mostrado na Figura 5.2). Do que sabemos sobre eletricidade, podemos inferir que um circuito RLC como o apresentado acima deva executar uma oscilação amortecida, pois o resistor transforma irreversivelmente energia elétrica em energia térmica. A perda de energia elétrica, na forma do calor produzido no resistor, é diretamente proporcional à energia eletromagnética armazenada no capacitor e no indutor (quanto mais energia armazenada nestes componentes, mais calor - ou energia térmica - será dissipada no resistor, o que depende também da resistência  $R$  do resistor). Daí os diferentes tipos de oscilações do sistema.

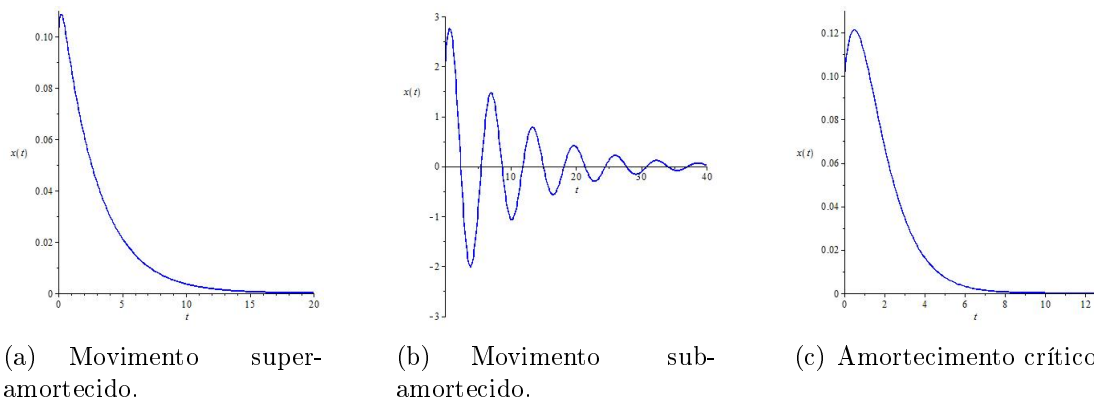


Figura 5.2: Possíveis tipos de movimentos da voltagem e corrente em um circuito elétrico RLC.

**Observação 9** *i) Se o fator de amortecimento  $R$  não é muito grande, o sistema oscila e a amplitude das oscilações decresce exponencialmente, tendendo para zero (movimento sub-amortecido, mostrado na Figura (5.2) (b)). De fato, a resistência  $R$  é equivalente ao atrito ou amortecimento  $\sigma$  do sistema massa-mola ou pêndulo linear.*

*ii) Se o fator de amortecimento é maior do que um certo valor crítico, o sistema não oscila e o seu deslocamento tende a zero monotonicamente (movimento super-amortecido, mostrado na Figura 5.2 (a)).*

Assim, pode-se ver que a evolução dinâmica da equação (5.1), com coeficiente de amortecimento  $R$ , é análoga à equação do pêndulo linear, amortecido e não-forçado (4.10),

onde  $x = q$ ,  $2\sigma = \frac{R}{L}$  e  $\frac{1}{LC} = \omega_o^2$ . Também ao considerar a equação (5.1) com uma força externa (ao conectar uma fonte de tensão ao circuito RLC), temos que o sistema se comporta dinamicamente da mesma maneira que o pêndulo linear, amortecido e forçado, estudado na seção 4.5. Como o estudo da equação (5.1) é análogo ao estudo desenvolvido no Capítulo 4 para a equação (4.10), não repetiremos este estudo neste capítulo. Em vez disso, passamos ao estudo de um oscilador não-linear, conhecido como oscilador de van der Pol, também relacionado a um circuito elétrico, que apresenta comportamento dinâmico muito interessante, distinto daquele apresentado pelas soluções da equação linear (5.1).

## 5.2 A equação de van der Pol

O oscilador de van der Pol foi proposto em 1920 pelo engenheiro elétrico e físico holandês Balthasar van der Pol (1889-1959), com o objetivo de estudar a propagação das ondas de rádio, teoria dos circuitos elétricos e física matemática. A equação de van der Pol é um importante tipo de equação diferencial não-linear, usualmente citada no estudo de sistemas que apresentam ciclos-limites estáveis e também comportamento caótico (caos determinístico). Além de estar descrita em vários textos de equações diferenciais ordinárias e sistemas dinâmicos, como [1, 2, 10, 13, 17, 18], um estudo aprofundado desta equação, com notas históricas interessantes, pode ser encontrado em [16].

Aqui, apresentaremos um estudo sintético das propriedades dinâmicas da equação de van der Pol, com base nas referências [13, 16]. Em sua forma completa, tal equação é dada por

$$\ddot{x} - k(1 - x^2)\dot{x} + x = b \cos(\omega t), \quad (5.2)$$

onde, para simplificar, usamos o ponto para denotar a deriva  $\frac{d}{dt}$  com relação à variável independente  $t$ , e onde o amortecimento  $k(1 - x^2)$  é não constante, o que evidencia sua diferença em relação à equação (5.1). Fazendo  $\dot{x} = y$ , a equação (5.2) pode ser escrita, equivalentemente, como o sistema diferencial no plano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + k(1 - x^2)y + b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Este é um dos sistemas mais conhecidos e intensamente estudados em dinâmica não-linear. Muitos esforços foram feitos para aproximar as soluções da equação (5.2) (ou do sistema (5.3)) ou construir aplicações simples que descrevam qualitativamente características importantes de sua dinâmica. Sabe-se hoje que as soluções são oscilações, que podem ser periódicas (no caso  $b = 0$ ) ou não periódicas (no caso  $b \neq 0$ ); neste oscilador a energia é dissipada em amplitudes grandes e gerada em amplitudes pequenas.

Vários problemas de oscilações com amortecimento não-linear são modelados dinamicamente pela equação de van der Pol, sendo a principal característica dos sistemas que permitem essa modelagem a existência de um ciclo-limite, para o qual tendem suas trajetórias quando  $t \rightarrow \infty$ . De fato, veremos a seguir que, independentemente da amplitude inicial de movimento desses sistemas (ou seja, da condição inicial dada), as trajetórias no retrato de fase sempre tendem para uma única curva fechada, que corresponde a uma solução periódica, quando o tempo tende ao infinito. Inicialmente, estudaremos o comportamento para o caso da equação de van der Pol autônoma, ou equivalentemente, estudaremos o sistema (5.3) com  $b = 0$ , variando-se o parâmetro de amortecimento  $k > 0$ , para ver o tipo de bifurcações que ocorrem nas soluções no plano de fase. Em seguida, trataremos o caso não autônomo ( $b \neq 0$ ).

**Caso 1:**  $k > 0$  e  $b = 0$ . Consideremos o sistema (5.3) com  $b = 0$ . Neste caso, é fácil ver que a origem é o único ponto de equilíbrio, sendo a sua estabilidade local determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana nesse ponto, dada por

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{bmatrix},$$

que são

$$\lambda_{1,2} = \frac{k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4}.$$

Logo, os autovalores podem ser reais ou complexos conjugados, se  $k \geq 2$  ou  $0 < k < 2$ , respectivamente. O ponto de equilíbrio será localmente assintoticamente estável se a parte real dos autovalores for negativa, e localmente instável caso seja positiva. Podemos verificar facilmente que, seja qual for o valor de  $k > 0$ , o ponto de equilíbrio será sempre localmente instável. A diferença é que, caso  $0 < k < 2$  as soluções divergirão em espiral da origem (foco ou espiral instável), ao passo que, se  $k \geq 2$  a divergência ocorre exponencialmente (nó instável).

Embora a origem seja um ponto de equilíbrio localmente instável do sistema (5.3) para  $k > 0$ , mais precisamente uma espiral instável para valores pequenos do parâmetro  $k$ , desde os primeiros estudos de van der Pol sabe-se que este sistema apresenta um ciclo-limite estável, que fica próximo do círculo  $x^2 + y^2 = 1$  para valores positivos de  $k$ , próximos de zero, e se deforma quando aumentamos o valor de  $k$ , conforme mostrado na Figura 5.3. Observe que o amortecimento (não constante)  $-k(1 - x^2)$  é positivo para  $|x| > 1$ , o que indica que as curvas soluções são amortecidas. Porém, para  $|x| < 1$  o amortecimento é negativo, o que faz com que as soluções se afastem da origem. Esta mudança de sinal no amortecimento faz com que o ciclo-limite seja gerado no plano de fase.

Uma prova analítica da existência do ciclo-limite estável para a equação de van der Pol (5.2) com  $b = 0$  pode ser feita utilizando o seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada em [13].

**Teorema 9 (Teorema de Lienard)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que*

- a)  $F(x) = \int_0^x f(s)ds$  é ímpar em  $x$ , isto é,  $F(-x) = -F(x)$ .
- b)  $F(x) \rightarrow \infty$  se  $x \rightarrow \infty$  e existe  $\beta > 0$  tal que, se  $x > \beta$ ,  $F$  é crescente.
- c) Existe  $\alpha > 0$  tal que  $F(x) < 0$  se  $0 < x < \alpha$ .

Então a equação de segunda ordem

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0 \tag{5.4}$$

chamada de equação de Lienard, admite uma solução periódica não constante.

**Observação 10** *A equação (5.4) é equivalente ao sistema (chamado sistema de Lienard)*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{5.5}$$

*Prova-se também que, se  $\alpha = \beta$  nas hipóteses do Teorema de Lienard, então o sistema (5.5) tem uma única órbita periódica, que, necessariamente, será estável. Portanto, neste caso a equação (5.4) terá também uma única solução periódica (ou ciclo-limite) estável.*

**Corolário 2** *A equação de van der Pol (5.2) com  $b = 0$  e  $k > 0$  tem uma única solução periódica não constante que é estável.*

**Demonstração.** Em comparação com a equação de Lienard, na equação de van der Pol (5.2) com  $b = 0$  temos  $f(x) = -k(1-x^2)$ , donde seque que  $F(x) = \int_0^x f(s)ds = -k(x - \frac{x^3}{3})$ , que é uma função ímpar em  $x$ . Além disso,  $F$  é crescente para  $x > 1$  (e, em particular, é crescente para  $x > \sqrt{3}$ ),  $F(x) \rightarrow \infty$  se  $x \rightarrow \infty$  e  $F(x) < 0$  para  $0 < x < \sqrt{3}$ . Assim, podemos considerar  $\alpha = \beta = \sqrt{3}$ . Portanto, a conclusão segue do Teorema de Lienard e da Observação 10. ■

Utilizando o software Maple, desenhamos os retratos de fase do sistema para três valores diferentes do parâmetro  $k$ , conforme mostrado na Figura 5.3. Nos retratos de fase podemos ver claramente que as trajetórias tendem para um ciclo-limite quando  $t \rightarrow \infty$ , assim podemos dizer que este ciclo é o conjunto  $\omega$ -limite de todas as soluções do sistema, menos a origem, que é um ponto crítico instável.

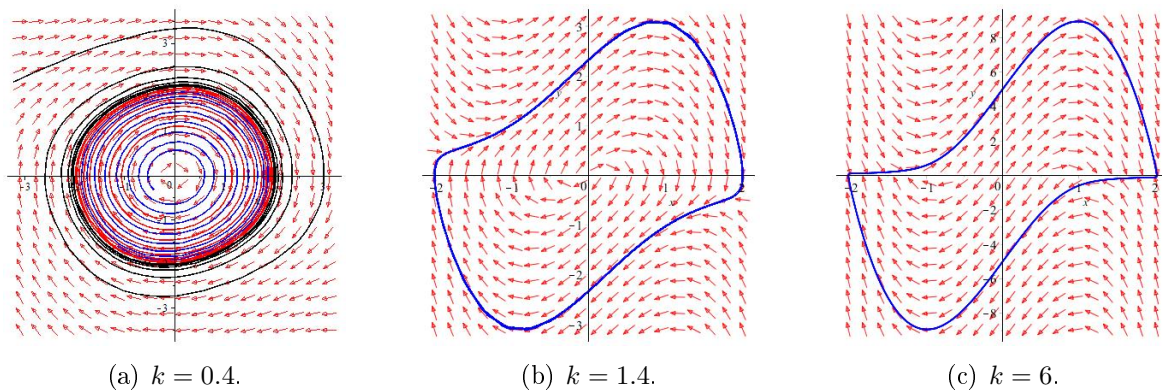


Figura 5.3: Retrato de fase do sistema (5.3) com  $b = 0$  e diferentes valores de  $k$ : existência de um ciclo-limite estável.

Pela Figura 5.3, podemos observar que, quanto menor for o parâmetro  $k$ , mais parecidas serão as oscilações a uma função periódica de frequência única (função seno ou cosseno). De fato, para o amortecimento  $k = 0$  o comportamento da equação (5.2) é análogo a do pêndulo linear (4.4), ou seja, tem um centro linear na origem. Quanto maior for o valor do parâmetro  $k$ , mais complicadas serão as oscilações, como mostra a Figura 5.3 (a), correspondendo à sobreposição de funções senoidais com várias frequências diferentes, e o ciclo-limite tem uma forma mais complicada no espaço de fase.

**Caso 2:**  $k > 0$ ,  $b > 0$ . No caso em que os parâmetros  $k$  e  $b$  são diferentes de zero, a equação de van der Pol é não autônoma, e as soluções ficam bem mais complicadas. Apresentamos a seguir alguns retratos de fase para diferentes valores da amplitude  $b$  do forçamento periódico, mantendo constantes o amortecimento  $k = 5$  e a frequência  $w = 7$ . Aqui, utilizamos alguns dos valores dos parâmetros usados em [16], onde observou-se que, variando a amplitude  $b$ , ocorre uma sucessão de oscilações periódicas e quase periódicas, conforme mostrado nas Figuras 5.4 e 5.5, nas quais apresentamos, além do retrato de fase do sistema (5.3), a evolução temporal da solução  $x(t)$ , ambos com condição inicial  $x(0) = 4$ ,  $y(0) = 0$ .

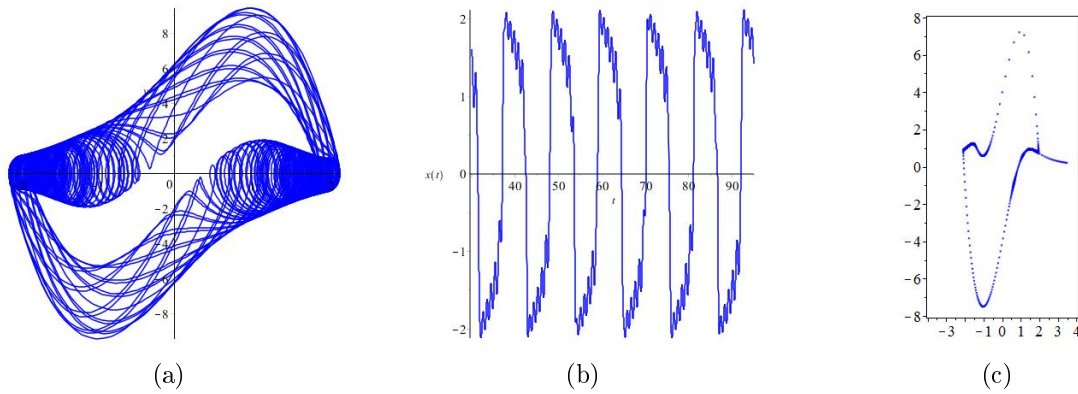


Figura 5.4: Retrato de fase, solução numérica  $x(t)$  e seção de Poincaré, para o sistema (5.3) com  $b = 15$ ,  $k = 5$  e  $w = 7$ . O movimento corresponde a uma órbita quase-periódica.

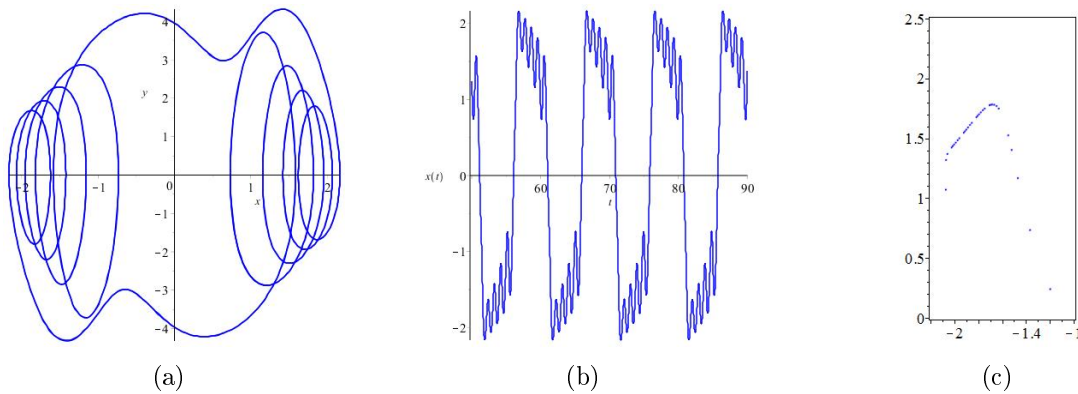


Figura 5.5: Retrato de fase e solução numérica  $x(t)$  e seção de Poincaré, para o sistema (5.3) com valores  $b = 25$ ,  $k = 5$  e  $w = 7$ . Corresponde à órbita periódica.

De maneira semelhante apresentamos dois conjuntos de retratos de fase para valores maiores de  $b$ , para os quais aparecem um conjunto de órbitas quase periódicas e um conjunto de trajetórias periódicas. Ver Figuras 5.6 e 5.7.

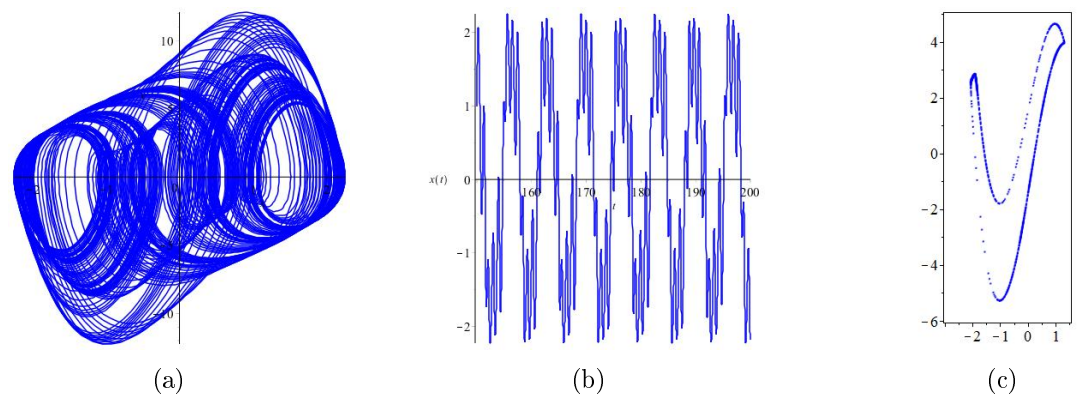


Figura 5.6: Retrato de fase, solução numérica de  $x(t)$  e seção de Poincaré, para o sistema (5.3) com valores  $b = 50$ ,  $k = 5$  e  $w = 7$ . Corresponde à órbita quase-periódica.

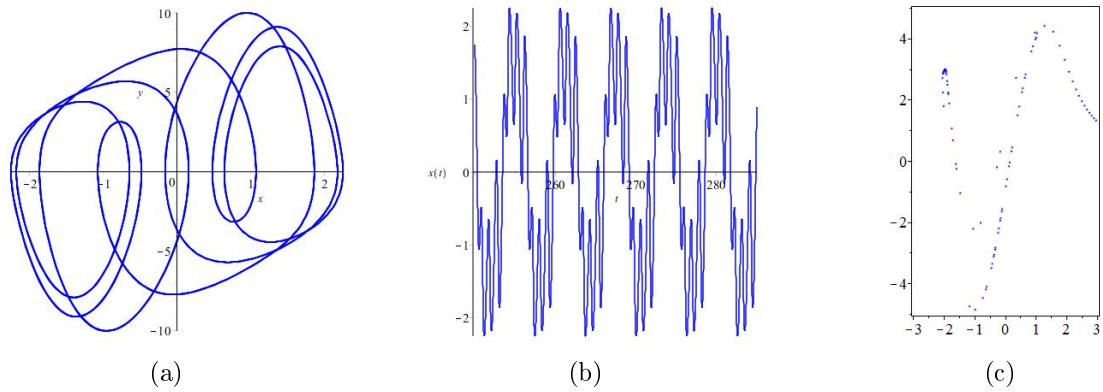


Figura 5.7: Retrato de fase, solução numérica de  $x(t)$  e seção de Poincaré, para o sistema (5.3) com valores  $b = 55$ ,  $k = 5$  e  $w = 7$ . Corresponde à órbita periódica.

Por outro lado, fixando o amortecimento  $k$  e a amplitude  $b$  da perturbação periódica, e variando a frequência  $\omega$  da função periódica, mostra-se que o sistema de van der Pol (5.3) pode apresentar comportamento caótico, via uma cascata de duplicação de períodos que ocorre com a oscilação periódica (conforme [16]). Por exemplo, fixando-se  $k = b = 5$  e variando-se o valor de  $w$  de 2.463 a 2.466, observa-se uma dessas ocorrências de duplicação de períodos, culminando com o aparecimento do comportamento caótico das soluções, conforme mostrado na Figura 5.8. Na parte (b) desta figura, vemos as soluções  $x(t)$  com condições iniciais  $(4, 0)$  e  $(4, 0.001)$ , que apresentam sensibilidade com relação às condições iniciais, uma das características do comportamento caótico. Para um estudo detalhado da equação de van der Pol, indicamos o leitor à dissertação [16] e referências ali contidas.

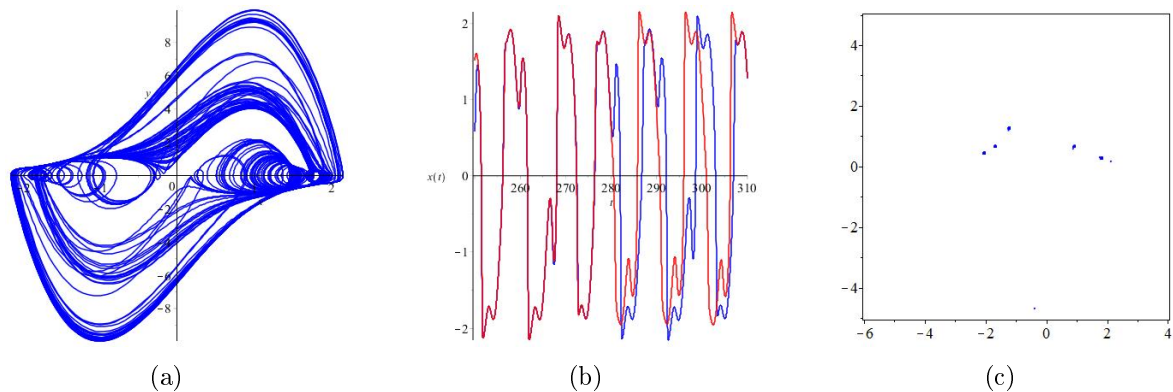


Figura 5.8: (a) Retrato de fase para o sistema (5.3) com valores  $k = b = 5$  e  $w = 2.466$ : comportamento caótico das soluções. (b) Soluções  $x(t)$  com condições iniciais  $(4, 0)$  (azul) e  $(4, 0.001)$  (vermelha), mostrando divergência exponencial (ou sensibilidade com relação às condições iniciais). (c) Seção de Poincaré.

É interessante observar que, em seus trabalhos ainda na década 1920, van der Pol, juntamente com seu colega van der Mark, observaram o surgimento dessas “oscilações irregulares”, que chamaram de *ruído* (ou *irregular noise*) nos circuitos, sem saber porém que se tratava de comportamento caótico das soluções, como é conhecido hoje. Pelo que se sabe, esta foi uma das primeiras observações de oscilações caóticas em um circuito eletrônico em um tubo de vácuo.

Não nos aprofundaremos mais neste estudo da equação de van der Pol, pois nosso objetivo principal nestas notas é o estudo dos circuitos com memristores, desenvolvido mais adiante, nos quais também pode ocorrer comportamento caótico.

### 5.3 A equação de Duffing

A equação de Duffing (ou oscilador de Duffing), devida a George Duffing (1861-1944), é uma equação diferencial não-linear de segunda ordem. Assim, muitos problemas de dinâmica não-linear podem ser modelados utilizando a equação de Duffing, que é dada por [17, 18]

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 - x = \mu \cos(\omega t), \quad (5.6)$$

que descreve certos osciladores forçados e amortecidos. Na equação (5.6)  $k$  é a constante de amortecimento,  $\mu$  representa a amplitude e  $\omega$  é a frequência da força motriz. Fisicamente, a equação modela um pêndulo elástico, com uma mola cuja deformação não obedece à Lei de Hooke. A equação de Duffing é um exemplo de um sistema dinâmico que exhibe comportamento caótico, conforme mostrado em [17, 18]. Fazendo  $\dot{x} = y$ , a equação de Duffing pode ser escrita como um sistema diferencial da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - ky - x^3 + \mu \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (5.7)$$

A equação pode ser usada para modelar um pêndulo forçado periodicamente, que tenha uma força de restauração cúbica, onde  $x(t)$  representa o deslocamento e  $\dot{x}(t)$  representa a velocidade da massa. Pode também ser usada para modelar circuitos resistor-indutor-capacitor (RLC) forçados periodicamente, com elementos de circuito não-lineares, onde  $x(t)$  representa a carga oscilante no circuito no instante  $t$  e  $\dot{x}(t)$  representa a corrente. Neste trabalho, vamos considerar a aplicação Poincaré e diagramas de bifurcação para o sistema (5.7), conforme apresentado em [9].

- Se  $\mu = 0$  e  $k = 0$ , então os pontos de equilíbrio do sistema (5.7) são  $(0, 0)$  e  $(\pm 1, 0)$ . Os autovalores da matriz Jacobiana no ponto  $(0, 0)$  são  $\lambda = \pm 1$  e nos pontos  $(\pm 1, 0)$  são  $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ . Neste caso, temos ainda que o sistema é hamiltoniano, com função hamiltoniana dada por

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2}.$$

De fato, para  $\mu = 0$  e  $k = 0$  o sistema fica da forma

$$\dot{x} = y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = x - x^3 = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Portanto, o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  é um ponto sela para o sistema (5.7) (pois é um ponto de máximo da hamiltoniana  $H(x, y)$ ) e os pontos  $(\pm 1, 0)$  são centros (pois são pontos de mínimo de  $H(x, y)$ ), conforme mostrado na Figura 5.9. Observe também que existem duas órbitas homoclínicas à origem, simétricas, que correspondem à curva de nível zero de  $H(x, y)$ , e existem órbitas periódicas maiores, envolvendo as órbitas homoclínicas e os centros no interior destas. O retrato de fase é simétrico em relação aos eixos coordenados. Esse é um tipo de comportamento comum em sistemas hamiltonianos.

- Para  $\mu = 0$  e  $k \neq 0$ , a estrutura hamiltoniana (e conseqüentemente a simetria) do sistema é quebrada, embora os pontos de equilíbrio continuem sendo os mesmos,  $(0, 0)$  e  $(\pm 1, 0)$ . Neste caso, os autovalores da matriz Jacobiana no ponto  $(0, 0)$  e nos pontos  $(\pm 1, 0)$  são, respectivamente,

$$\lambda = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{k^2 - 8}}{2},$$

donde segue pelo Teorema de Hartman-Grobman, que a origem é um ponto de sela para todos os valores de  $k$  e os pontos  $(\pm 1, 0)$  são: espirais estáveis se  $0 < k^2 < 8$ ; nós impróprios estáveis se  $k^2 = 8$  e nós assintoticamente estáveis se  $k^2 > 8$ . O retrato de fase do sistema para  $k = 0.5$  é dado na Figura 5.10.

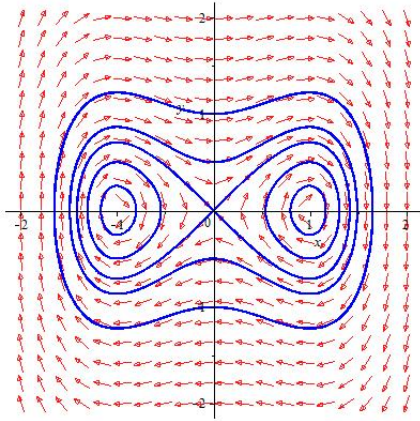


Figura 5.9:  $\mu = 0, k = 0$ .

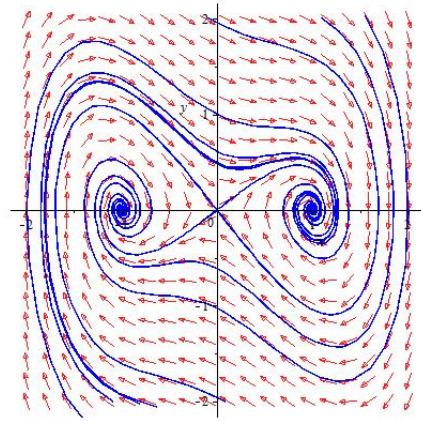
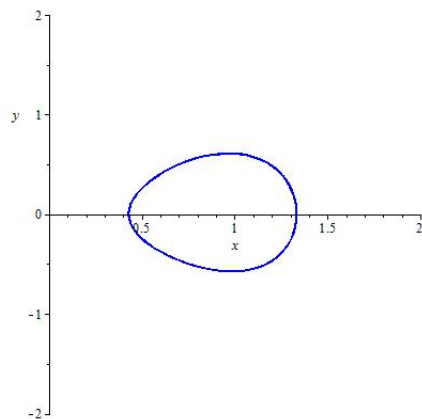
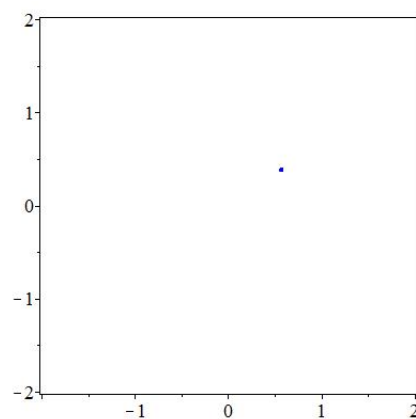


Figura 5.10:  $\mu = 0, k = 0.5$ .

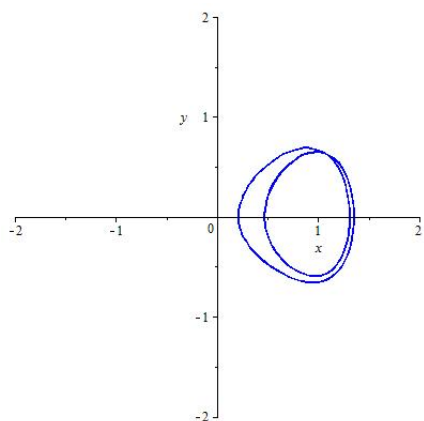
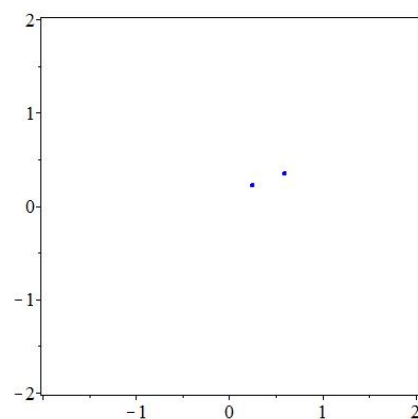
- Se  $k \neq 0$  e  $\mu \neq 0$  no sistema (5.7), então ele passa a ser não autônomo, e podemos observar que as soluções se tornam bem mais complicadas, passando a existir órbitas periódicas com diferentes períodos, podendo ocorrer, para determinados valores dos parâmetros, comportamento caótico das soluções. De fato, sabe-se da literatura [17, 18], a perturbação periódica de órbitas homoclínicas de sistemas hamiltonianos, como as quais existem para a equação de Duffing (ver Figura 5.10), levam à ocorrência de comportamento caótico das soluções, que ocorre também devido a uma cascata de duplicação de períodos. Nas figuras a seguir, apresentamos alguns retratos de fase do sistema (5.7) e a respectiva seção de Poincaré, donde mostram esses tipos de comportamento. Não entraremos em detalhes sobre a dinâmica do sistema de Duffing, cujo estudo na literatura é bastante conhecido, pois nosso objetivo principal é o estudo dos memristores, que faremos na próxima seção.



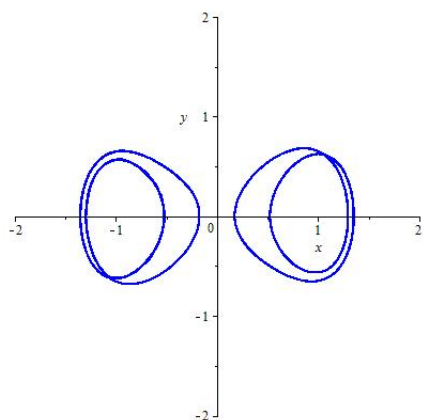
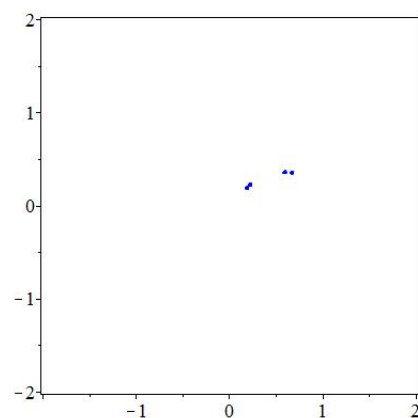
(a)  $\mu = 0.2$ .



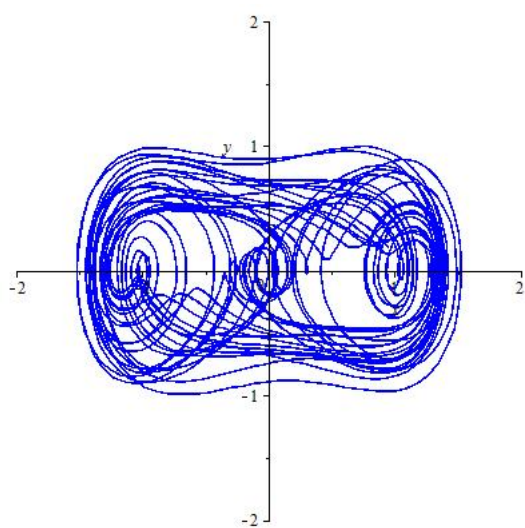
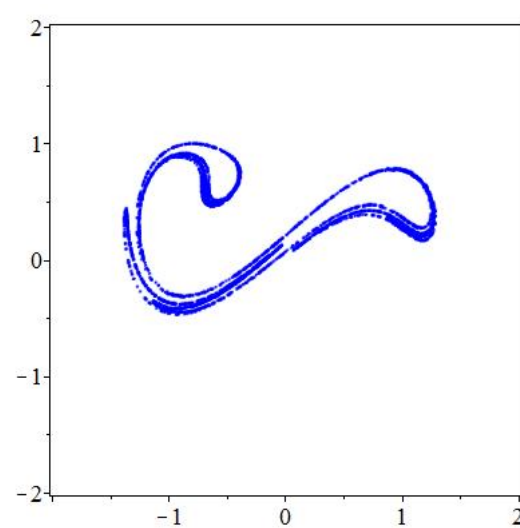
(b) Órbita periódica com período 1.

(c)  $\mu = 0.3$ .

(d) Órbita periódica com período 2.

(e)  $\mu = 0.31$ .

(f) Duas órbitas periódicas cada uma com período 2.

(g)  $\mu = 0.5$ .

(h) Caos.

Figura 5.11: Retrato de fase e aplicação de Poincaré para o sistema (5.7) com  $k = 0.3$  e  $\omega = 1.25$ . A parte (h) mostra um atrator caótico na seção de Poincaré.

## 5.4 Memristores

Por mais de 150 anos, os elementos fundamentais conhecidos de um circuito elétrico foram o capacitor, o resistor e o indutor [4, 8, 15, 12]. Porém, no início da década de setenta, no seminal artigo [3], Leon Chua, engenheiro elétrico da Universidade da Califórnia em Berkeley, observou que existem seis possíveis diferentes relações matemáticas entre pares das quatro variáveis fundamentais presentes em um circuito elétrico: corrente (denotada por  $i$ ), voltagem ( $v$ ), carga elétrica ( $q$ ) e fluxo magnético ( $\phi$ ) (ver Figura 5.12). Duas destas relações são dadas pela definição de corrente elétrica (taxa de variação da carga elétrica com o tempo) e pela Lei de Faraday (que diz que a voltagem no circuito é igual a taxa de variação do fluxo magnético), ou seja, matematicamente temos:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad v(t) = \frac{d\phi}{dt}.$$

As outras três relações decorrem das equações básicas de um circuito, que são

$$R = \frac{dv}{di}, \quad C = \frac{dq}{dv} \quad \text{e} \quad L = \frac{d\phi}{di},$$

onde  $R$ ,  $C$  e  $L$  representam a resistência, a capacitância e a indutância, respectivamente (ver Figura 5.12).

Chua percebeu a falta de um elemento básico que relacionasse a taxa de variação da carga  $q$  e do fluxo  $\phi$  nos circuitos. Postulou então, em 1971 [3], a existência desse quarto elemento fundamental, o qual chamou de *Memristor*, que é uma abreviação de "Memory Resistor" (ou resistor com memória). Chua demonstrou matematicamente que esse dispositivo hipotético poderia estabelecer uma relação funcional **não-linear** entre o fluxo  $\phi$  e a carga  $q$ , semelhante a relação linear entre voltagem e corrente, determinada por um resistor e dada pela 1ª Lei de Ohm, ou seja,  $v = Ri$ . Isto equivale a dizer que a resistência desse novo dispositivo poderia variar de acordo com a quantidade de carga que passa através dele e o dispositivo poderia armazenar (ou "memorizar") o valor da resistência, mesmo depois da corrente ser desligada (daí deriva o nome *memory resistor*). Além disso, Chua provou cujas propriedades do memristor não poderiam ser reproduzidas por qualquer combinação dos outros três elementos, por isso o memristor é considerado um elemento eletrônico fundamental, o quarto elemento.

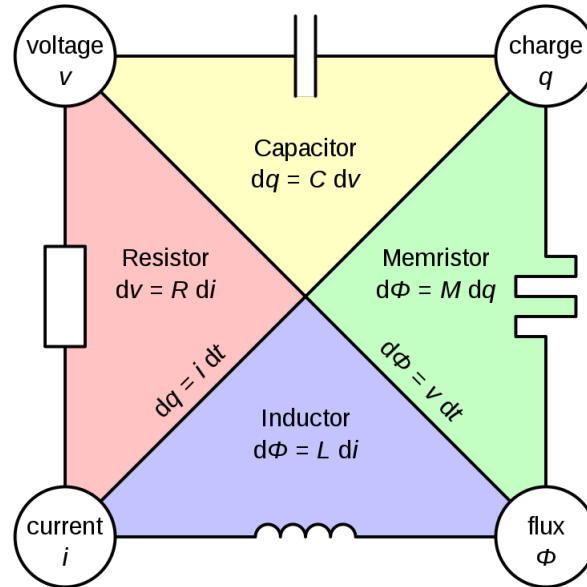


Figura 5.12: Esquema com os quatro elementos fundamentais de um circuito (resistor, capacitor, indutor e memristor) e suas relações com as variáveis tensão, corrente, carga e fluxo.

Matematicamente, a tensão que atravessa um memristor de carga controlada pode ser derivada então da relação entre carga e fluxo, da seguinte maneira

$$v(t) = M(q)i(t),$$

onde  $M(q) = \frac{d\phi(q)}{dq}$  é chamada de *memristância*. Da mesma forma, a corrente que atravessa um memristor de fluxo controlado é dada por

$$i(t) = W(\phi)v(t),$$

onde  $W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi}$  é chamada de *memdutância*. O memristor caracterizado por uma curva diferenciável  $q(\phi)$  (resp.  $\phi(q)$ ) é *passivo* se, e somente se,  $M(q)$  (resp.  $W(\phi)$ ) é não-negativa, isto é

$$M(q) = \frac{d\phi(q)}{dq} \geq 0, \quad \left( \text{resp. } W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi} \geq 0 \right).$$

Conforme dito na introdução deste texto, apesar de Chua ter postulado a existência do memristor em 1971, sua realização física só foi possível em 2008, com o desenvolvimento da nanotecnologia, e se deu devido ao trabalho de um grupo de pesquisadores dos laboratórios da HP (Hewlett Packard Lab). A descoberta física do memristor foi publicada na revista *Nature* [14] (a interessante história sobre a gênese deste trabalho está descrita com detalhes na referência [15]). A partir de então, o interesse no estudo das propriedades desse novo componente e da sua relação com os outros componentes fundamentais da eletrônica cresceu exponencialmente. De fato, uma busca pela palavra “memristor” no aplicativo de buscas *Google*, na data de 21/08/2020, produziu aproximadamente 543 mil resultados. Isto se deve às várias possíveis aplicações dos memristores em diversas áreas tecnológicas, devido às suas propriedades físicas.

Porém, a construção física dos memristores é ainda um processo extremamente caro sendo, no momento, impossível de se concretizar em escala industrial e comercial. Com

isso, torna-se importante o estudo teórico de circuitos elétricos envolvendo memristores, a partir de suas propriedades matemáticas, descobertas (ou postuladas) por Chua em [3] e aprofundadas por Chua e Kang em [4].

Neste contexto, além dos circuitos do tipo *RLC* (que envolvem um resistor, um indutor e um capacitor) já apresentados neste texto, podem agora ser construídos circuitos envolvendo também os memristores. Na verdade, vários tipos de circuitos elétricos (ou eletrônicos) envolvendo combinações desses quatro elementos básicos podem ser construídos, com aplicações em diversas áreas tecnológicas, conforme [15] e referências ali contidas. Sendo assim, utilizando a teoria qualitativa e de bifurcações, apresentada nos capítulos e seções anteriores, nas próximas seções estudamos alguns modelos matemáticos de circuitos elétricos envolvendo memristores, modelados por equações diferenciais ordinárias. O estudo apresentado tem como base principal o artigo [7].

## 5.5 Circuitos com memristor no plano

Conforme vimos nos capítulos anteriores, as equações do movimento de um sistema mecânico sem perda de energia (ou sistema conservativo) podem ser obtidas a partir de uma função escalar, chamada de hamiltoniana, que representa a energia total do sistema. De fato, vimos como exemplos as equações do pêndulo ideal (linear e não-linear) sem amortecimento, estudadas nas seções 4.2 e 4.6 do capítulo 4, o pêndulo esférico, a equação de Duffing sem amortecimento (Figura 5.9), e sistemas mecânicos conservativos em geral. Em tais sistemas, observa-se que as curvas de nível da função hamiltoniana determinam as soluções do sistema que são, em geral, órbitas periódicas.

Na linha do que é feito para o estudo de oscilações mecânicas, também podem ser formuladas equações hamiltonianas para circuitos elétricos não-lineares sem perdas de energia eletromagnética, conforme é feito por exemplo em [5]. Por outro lado, acreditava-se que, para sistemas *dissipativos*, mecânicos ou elétricos, para os quais ocorre algum tipo de perda de energia, não poderiam ser utilizadas equações hamiltonianas, porque as soluções são amortecidas e não periódicas. Porém, em [7], os autores mostraram que equações hamiltonianas podem sim ser reformuladas para descrever circuitos elétricos envolvendo memristores [3] ou dispositivos memristivos [4], conectados a capacitores e/ou indutores, sendo que a função hamiltoniana pode ser obtida do princípio de conservação de carga e fluxo, análogo ao princípio de conservação de energia em sistemas mecânicos. Este resultado é surpreendente e nada intuitivo, pois os memristores e os dispositivos memristivos são basicamente dissipativos, embora sejam dotados de memória. Talvez seja esta a propriedade que faz com que os circuitos com memristores se comportem como conservativos.

Seguindo então o que é feito em [7], nas seções seguintes apresentamos estudos de dispositivos com memristores que, quando conectados com capacitores e/ou indutores, podem ser descritos por uma função hamiltoniana cujas curvas e superfícies de nível são constantes do movimento de carga no circuito.

### 5.5.1 Circuitos memristivos com dois elementos

Considere o circuito na Figura 5.13, que consiste de um indutor e um dispositivo memristivo.

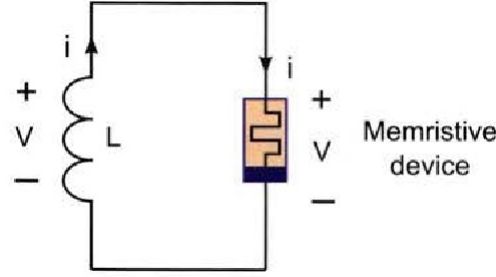


Figura 5.13: Circuito elétrico  $LM$  formado por um indutor  $L$  e um dispositivo memristivo.

O dispositivo memristivo de corrente controlada é descrito pelas equações [4]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(i)g(x), \\ v &= M(x)i,\end{aligned}\tag{5.8}$$

onde  $v$  e  $i$  denotam a voltagem e a corrente, respectivamente,  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  e  $M(\cdot)$  são funções escalares contínuas, sendo que a função não-linear  $M(x)$  representa a memristância [3, 4]. Aplicando as Leis de Kirchhoff de voltagem e corrente a este circuito, obtemos que sua dinâmica é descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(i)g(x), \\ L\frac{di}{dt} &= -M(x)i.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Se  $g(x)i \neq 0$ , a equação (5.9) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)i} \left( \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{f(i)}{i}, \\ \frac{1}{g(x)i} \left( \frac{di}{dt} \right) &= -\frac{M(x)}{Lg(x)}.\end{aligned}$$

Esta equação pode ser escrita na forma da equação de Pfaff (ver Apêndice A), descrevendo um sistema conservativo

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)i} \left( \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{\partial H}{\partial i}, \\ \frac{1}{g(x)i} \left( \frac{di}{dt} \right) &= -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\tag{5.10}$$

onde  $H(x, i) = \int \frac{M(x)}{Lg(x)} dx + \int \frac{f(i)}{i} di$ , sendo que o sistema de Pfaff (5.10) tem soluções  $(x, i) = (x(t), i(t))$ , que estão contidas nas curvas de nível de  $H$ , pois

$$\frac{dH}{dt}(x, i) = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial i} \frac{di}{dt} = -\frac{1}{g(x)i} \left( \frac{di}{dt} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) + \frac{1}{g(x)i} \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{di}{dt} \right) = 0.$$

Então, fazendo uma reparametrização do tempo (rescaling), tomando  $d\tau = g(x)idt$ , podemos escrever (5.10) como um sistema hamiltoniano da forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial i}, \\ \frac{di}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\tag{5.11}$$

onde  $g(x)i \neq 0$  e a função hamiltoniana de (5.11) é dada por

$$H(x, i) = \int \frac{M(x)}{Lg(x)} dx + \int \frac{f(i)}{i} di. \quad (5.12)$$

Note que a função hamiltoniana  $H(x, i)$  é conservada sobre cada trajetória  $(x(t), i(t))$  com condição inicial  $(x(0), i(0))$ , para toda escala de tempo  $\tau \geq 0$ , pois

$$\frac{dH(x, i)}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial i} \frac{di}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial i} - \frac{\partial H}{\partial i} \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Logo, vemos que a função hamiltoniana  $H(x(t), i(t))$  é também conservada em função do tempo  $t$ ,

$$\frac{dH(x, i)}{dt} = \frac{dH(x, i)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = 0 \cdot [g(x)i] = 0.$$

Com os cálculos acima, mostramos que vale a seguinte proposição.

**Proposição 1** *Os sistemas diferenciais (5.9), (5.10) e (5.11) possuem a mesma integral  $H(x, i) = H_0$  invariante com relação ao tempo, para todo  $t \geq 0$ , exceto nos pontos  $(x, i)$  onde  $g(x)i = 0$ . Portanto esses sistemas são conservativos.*

No artigo [7], os símbolos  $H_x$  e  $H_i$  são chamados, respectivamente, de *energia pseudo-potencial* e *energia pseudo-cinética*, e são definidos por

$$H_x(x) = \int \frac{M(x)}{Lg(x)} dx, \quad \text{e} \quad H_i(i) = \int \frac{f(i)}{i} di,$$

onde a função hamiltoniana  $H(x, i)$  é a soma da energia pseudo-potencial  $H_x$  com a energia pseudo-cinética  $H_i$ , sendo  $H(x, i) = H_x(x) + H_i(i)$  a energia total do sistema (5.11).

Vejamos alguns exemplos de sistemas hamiltonianos que modelam o circuito  $LM$  mostrado na Figura 5.13, escolhendo casos particulares para as funções  $f$ ,  $g$  e  $M$ . É claro que, para cada particular escolha dessas funções, teremos um tipo de dinâmica para este circuito.

**Exemplo 20** *Tomando-se  $f(i) = \alpha(i^2 - 1)$ ,  $g(x) = 1$  e  $M(x) = x + \beta$ ,  $L = 1$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes, o sistema (5.9) toma a forma*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(i^2 - 1), \\ \frac{di}{dt} &= -(x + \beta)i. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Neste caso, os pontos de equilíbrio são  $(-\beta, \pm 1)$  e os autovalores da matriz Jacobiana desse sistema nos pontos de equilíbrio  $(-\beta, \pm 1)$  são  $\lambda = \pm \sqrt{2\alpha}j$  (sendo  $j$  a unidade imaginária - para não confundir com a corrente  $i$ ), ou seja, são imaginários puros. Como o sistema é hamiltoniano, podemos concluir que os pontos de equilíbrio  $(-\beta, \pm 1)$  são centros. De fato, para  $g(x)i = i \neq 0$ , (5.13) pode ser escrito na forma da equação de Pfaff

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \left( \frac{dx}{dt} \right) &= \alpha \left( i - \frac{1}{i} \right), \\ \frac{1}{i} \left( \frac{di}{dt} \right) &= -(x + \beta). \end{aligned}$$

Fazendo o rescaling de tempo  $d\tau = (g(x)i)dt = i dt$ , obtemos o sistema hamiltoniano associado, com respeito à escala de tempo  $\tau$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \alpha\left(i - \frac{1}{i}\right), \\ \frac{di}{d\tau} &= -(x + \beta).\end{aligned}\tag{5.14}$$

A função hamiltoniana de (5.14) é dada por:

$$H(x, i) = \int (x + \beta)dx + \int \alpha\left(i - \frac{1}{i}\right)di = \frac{x^2}{2} + \beta x + \alpha\left(\frac{i^2}{2} - \ln|i|\right),\tag{5.15}$$

onde  $i \neq 0$ . Assim, as soluções ficam contidas nas curvas de nível

$$\frac{x^2}{2} + \beta x + \alpha\left(\frac{i^2}{2} - \ln|i|\right) = H_0,\tag{5.16}$$

onde  $H_0$  é constante e  $i \neq 0$ . De fato, se  $\psi(\tau) = (x(\tau), i(\tau))$  é uma solução de (5.14), então

$$\frac{dH(\psi(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial i} \frac{di}{d\tau} = (x + \beta)\left(\alpha i - \frac{\alpha}{i}\right) + \left(\alpha i - \frac{\alpha}{i}\right)(-x - \beta) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{dH(\psi(\tau))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = 0.$$

A função hamiltoniana é a soma da energia pseudo-cinética  $H_x(x)$  com a energia pseudo-potencial  $H_i(i)$ , que são dadas respectivamente por:

$$H_x(x) = \int \frac{M(x)}{Lg(x)}dx = \frac{x^2}{2} + \beta x, \quad e \quad H_i(i) = \int \frac{f(i)}{i}di = \alpha\left(\frac{i^2}{2} - \ln|i|\right).$$

As soluções do sistema (5.13) para  $i \neq 0$ , com diferentes condições iniciais, que correspondem às curvas de nível (5.16) para diferentes valores de  $H_0$ , são mostradas na Figura 5.14.

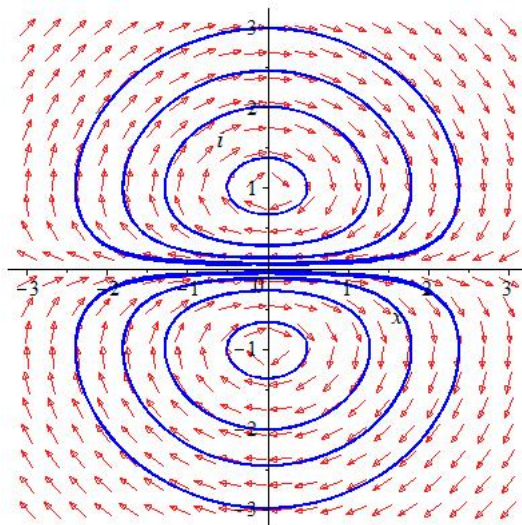


Figura 5.14: Retrato de fase do sistema (5.13) com  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ . Os pontos de equilíbrio  $(-\beta, \pm 1)$  são centros.

Na Figura 5.15 (a) e (b) plotamos as curvas coordenadas  $x(t)$  e  $i(t)$  da solução do sistema (5.13) com parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , em função de tempo  $t$ , com condições iniciais  $x(0) = 0.1$ ,  $i(0) = 0.1$ . Na Figura 5.15 (c), plotamos a voltagem  $v(t) = M(x)i = (x + \beta)i$ .

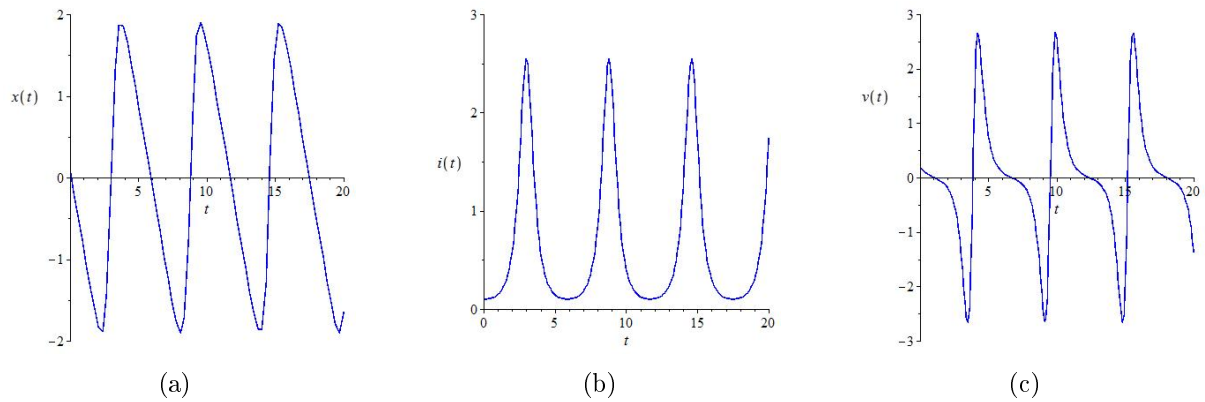


Figura 5.15: (a) e (b) Coordenadas  $x(t)$  e  $i(t)$  da solução do sistema (5.13) para  $i \neq 0$ , com parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  e condições iniciais  $x(0) = 0.1$ ,  $i(0) = 0.1$ . (c) Gráfico da voltagem  $v(t) = M(x)i = (x + \beta)i$ .

No caso  $i = 0$ , o sistema (5.13) é trivial: não existem pontos de equilíbrio e as soluções ficam contidas em retas paralelas ao eixo- $x$  (ver Figura 5.16).

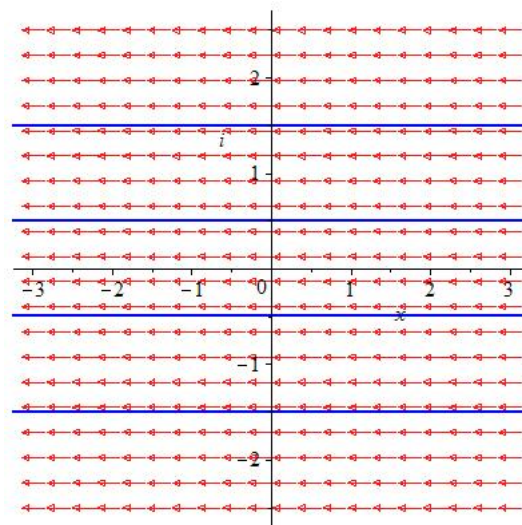


Figura 5.16: Retrato de fase do sistema (5.13) para  $i = 0$ . Não existem pontos de equilíbrio e as soluções ficam contidas em retas paralelas ao eixo- $x$ .

**Exemplo 21** Considere  $f(i) = i + \beta$ ,  $g(x) = -x$ ,  $M(x) = \alpha(x^2 - 1)$  e  $L = 1$  com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes. Usando estas funções a equação (5.9) pode ser reformulada como:

$$\frac{dx}{dt} = -(i + \beta)x, \quad (5.17)$$

$$\frac{di}{dt} = -\alpha(x^2 - 1)i.$$

Neste caso,  $(0, 0)$  e  $(\pm 1, -\beta)$  são os pontos de equilíbrio. Os autovalores da matriz Jacobiana do sistema (5.17) nos pontos de equilíbrio  $(\pm 1, -\beta)$  são  $\lambda = \mp\sqrt{2\alpha\beta}j$ ,  $j = \text{unidade}$

imaginária, e no ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  são  $\lambda = -\beta$  e  $\lambda = \alpha$ . Como o sistema é hamiltoniano, temos que os pontos de equilíbrio  $(\pm 1, -\beta)$  são centros, sendo que a estabilidade do equilíbrio  $(0, 0)$  depende do sinal dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Para valores positivos desses parâmetros, a origem será um ponto de sela. O sistema (5.17) pode ser escrito na forma da equação de Pfaff,

$$\begin{aligned}\frac{1}{ix} \frac{dx}{dt} &= - \left( 1 + \frac{\beta}{i} \right), \\ \frac{1}{ix} \frac{di}{dt} &= -\alpha \left( x - \frac{1}{x} \right),\end{aligned}$$

onde  $-g(x)i = -(-xi) = ix \neq 0$ . Logo, fazendo o scaling de tempo  $d\tau = -(g(x)i)dt = ixdt$  o sistema hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= - \left( 1 + \frac{\beta}{i} \right), \\ \frac{di}{d\tau} &= -\alpha \left( x - \frac{1}{x} \right).\end{aligned}\tag{5.18}$$

A função hamiltoniana de (5.18) é dada por

$$\begin{aligned}H(x, i) &= - \int \frac{M(x)}{Lg(x)} dx - \int \frac{f(i)}{i} di = \int \alpha \left( x - \frac{1}{x} \right) dx - \int \left( 1 + \frac{\beta}{i} \right) di \\ &= \alpha \left( \frac{x^2}{2} - \ln |x| \right) - i - \beta \ln |i|,\end{aligned}\tag{5.19}$$

onde  $ix \neq 0$ . Assim, as soluções do sistema (5.17), mostradas na Figura 5.17, estão contidas nas curvas de nível da função  $H$ , dadas por

$$\alpha \left( \frac{x^2}{2} - \ln |x| \right) - i - \beta \ln |i| = H_0,$$

onde  $H_0$  é constante e  $ix \neq 0$ . De fato, se  $\psi(\tau) = (x(\tau), i(\tau))$  é uma solução de (5.18), então

$$\frac{dH(\psi(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial i} \frac{di}{d\tau} = \left( \alpha x - \frac{\alpha}{x} \right) \left( -1 - \frac{\beta}{i} \right) + \left( -1 - \frac{\beta}{i} \right) \left( -\alpha x + \frac{\alpha}{x} \right) = 0.$$

Portanto, voltando o scaling de tempo e considerando as soluções do sistema (5.17), temos

$$\frac{dH(\psi(\tau))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = 0.$$

A energia pseudo-potencial e a energia pseudo-cinética são dados por

$$H_x(x) = \alpha \left( \frac{x^2}{2} - \ln |x| \right) \quad e \quad H_i(i) = -i - \beta \ln |i|.$$

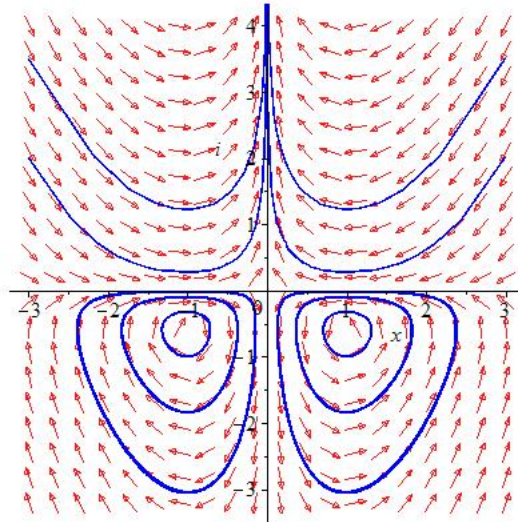


Figura 5.17: Retrato de fase do sistema (5.17) para  $ix \neq 0$ , com os parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.6$ .

Observe que, neste caso, se tomarmos uma condição inicial no primeiro ou segundo quadrantes (ou seja, com  $x(0) > 0$  e  $i(0) > 0$  ou  $x(0) < 0$  e  $i(0) > 0$ ), então, teremos uma solução ilimitada, que tende para o infinito quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

## 5.6 Circuitos memristivos no plano com forçamento periódico

Considere o circuito  $LM$ , formado por um indutor e um memristor, mostrado na Figura 5.13, cuja dinâmica é descrita pelo sistema (5.9). Vamos conectar uma fonte de tensão periódica  $v(t) = \mu \cos(\omega t)$  em série neste circuito, conforme mostrado na Figura 5.18.

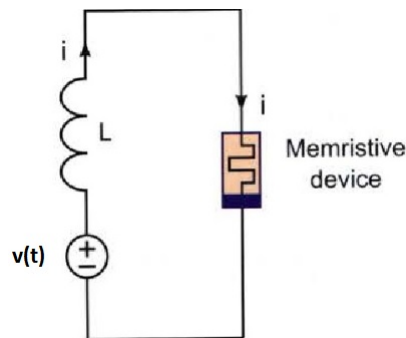


Figura 5.18: Circuito elétrico  $LM$  formado por um indutor  $L$  e um dispositivo memristivo, ao qual foi conectada uma fonte de tensão periódica  $v(t)$ .

Este é um procedimento bastante comum no estudo de circuitos elétricos, que corresponde por exemplo, a ligar uma bateria no circuito ou conectá-lo a uma tomada, e pode levar a mudanças significativas na dinâmica do sistema, que pode passar a apresentar órbitas periódicas de vários períodos, órbitas quase-periódicas e até mesmo comportamento caótico, dependendo dos valores dos parâmetros  $\mu$  e  $\omega$ , conforme vimos que acontece com as equações de van der Pol e Duffing. Vejamos então o que ocorre no caso do circuito 5.18.

Aplicando a lei de Kirchhoff para o circuito 5.18, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(i)g(x), \\ L\frac{di}{dt} &= -M(x)i + \mu \cos(\omega t).\end{aligned}\tag{5.20}$$

Usando a equação de Pfaff (5.10), onde  $H$  é a função hamiltoniana (5.12), a equação (5.20) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q}\left(\frac{dx}{dt}\right) &= \frac{\partial H}{\partial i}, \\ \frac{1}{Q}\left(\frac{di}{dt}\right) &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\mu \cos(\omega t)}{LQ},\end{aligned}\tag{5.21}$$

onde  $Q(x, i) = g(x)i \neq 0$ . Note que, para  $\mu \neq 0$ , o sistema (5.21) não é conservativo, pois

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial i} + \frac{\partial H}{\partial i} \left[ -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\mu \cos(\omega t)}{LQ} \right] = \left( \frac{\mu \cos(\omega t)}{LQ} \right) \frac{\partial H}{\partial i} \neq 0,$$

ou seja,  $H(x, i)$  não é uma função hamiltoniana para o sistema (5.21). Então, é de se esperar que a dinâmica desse sistema deve mudar bastante com relação aos estudos apresentados nas seções anteriores.

A seguir mostramos alguns exemplos de equação (5.20) usando as funções dos exemplos 20 e (21).

**Exemplo 22** *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha(i^2 - 1), \\ \frac{di}{dt} &= -(x + \beta)i + \mu \cos(\omega t),\end{aligned}\tag{5.22}$$

onde  $v(t) = \mu \cos(\omega t)$  é uma fonte de tensão,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  e  $\omega$  são parâmetros de controle. Para  $\mu = 0$ , o comportamento dinâmico do sistema (5.22) é o mesmo que o do sistema (5.13), que é um sistema hamiltoniano. As curvas de nível da função hamiltoniana (5.15) são curvas fechadas e os pontos de equilíbrio  $(-\beta, \pm 1)$  são centros. Vejamos o que ocorre com as perturbações periódicas deste sistema, ao tomarmos  $\mu$  e  $\omega$  distintos de zero. Apresentaremos um estudo numérico de alguns destes casos, mostrando que as soluções podem ter comportamento bastante complexo.

- Já vimos que, para  $\mu \neq 0$ , o sistema não é conservativo. Agora analisando o que ocorre para alguns valores particulares dos parâmetros, vemos os comportamentos dinâmicos do sistema (5.22) que são dados nas Figuras 5.19 a 5.22.

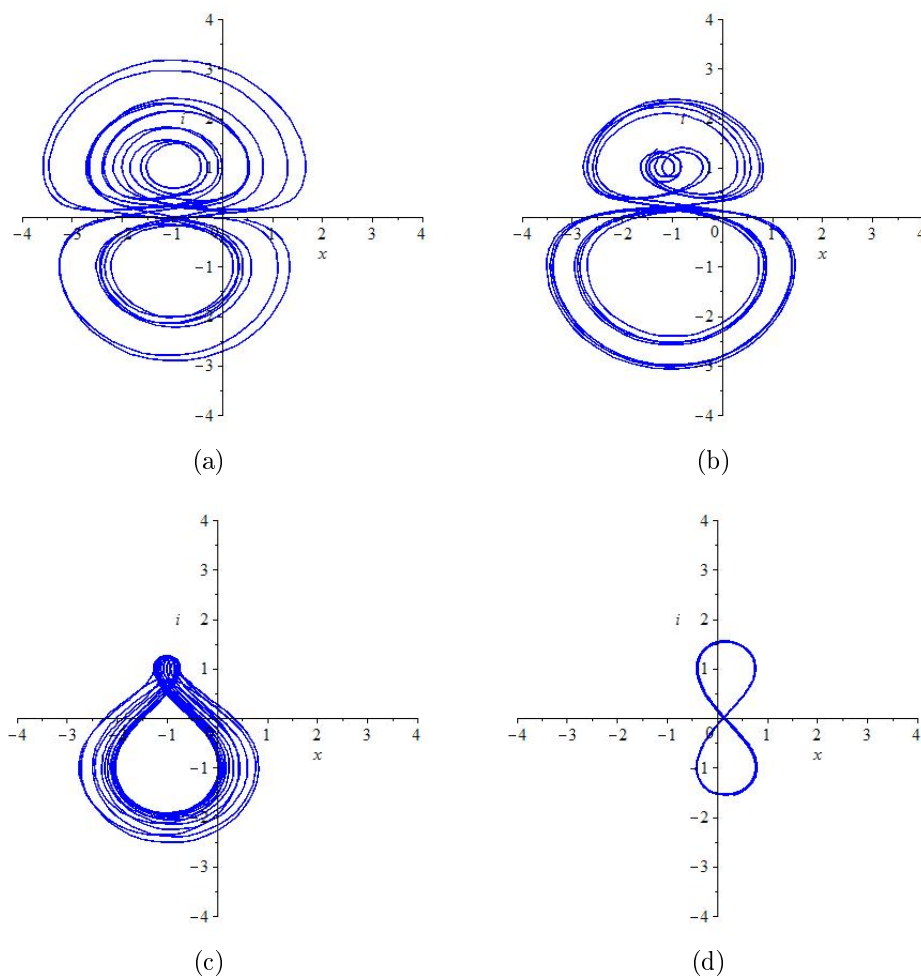


Figura 5.19: Retrato de fase do sistema (5.22) com parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\omega = 1$ , a)  $\mu = 0.2$ , b)  $\mu = 0.3$ , c)  $\mu = 1$ , d)  $\mu = 2$ , com condição inicial  $(0.1, 0.1)$ ,  $t \in (0, 100)$ . Apresentam comportamentos (a) e (b) não conservativos, (c) Aparente comportamento quase-periódico e (d) periódico.

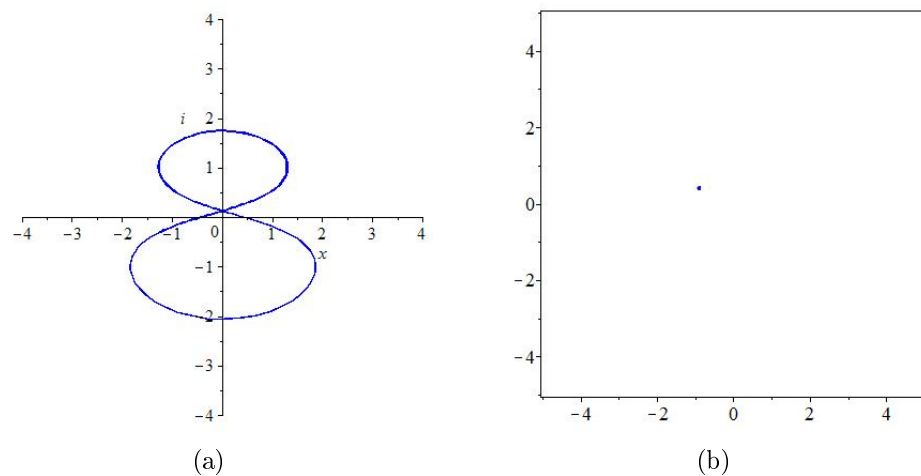


Figura 5.20: Retrato de fase e aplicação de Poincaré para o sistema (5.22) com  $\mu = 0.8$ ,  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $\beta = 0$ , com condição inicial  $(0.1, 0.1)$ ,  $t \in (0, 10)$ . Corresponde a uma órbita periódica.

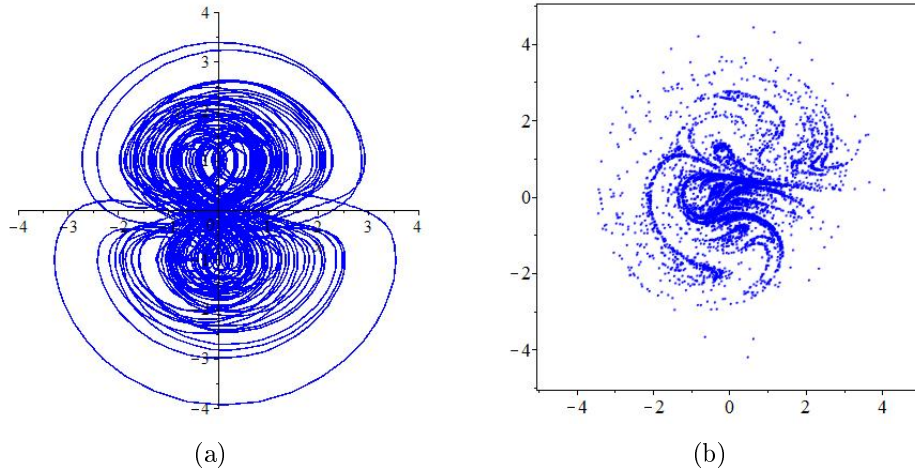


Figura 5.21: Retrato de fase e aplicação de Poincaré para o sistema (5.22) com  $\mu = 0.7$ ,  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , com condição inicial  $(0.1, 0.1)$  e  $t \in (0, 500)$ . Aparente comportamento caótico das soluções.

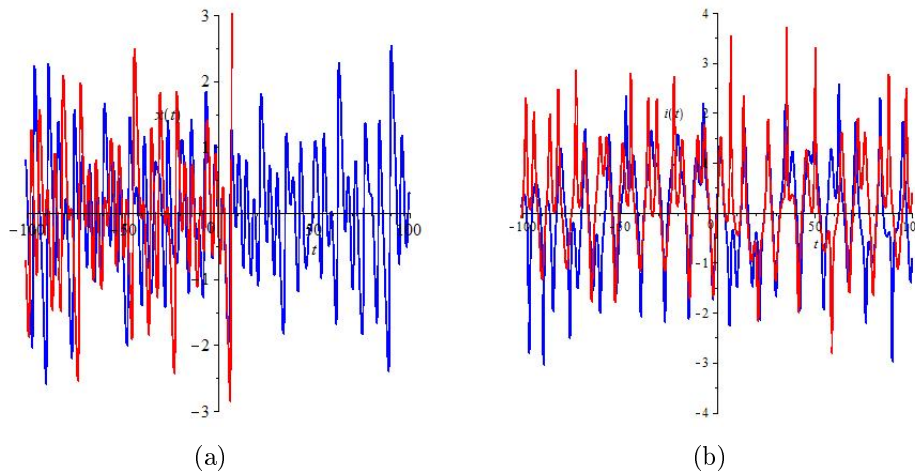


Figura 5.22: Solução numérica de  $x(t)$ ,  $i(t)$  do sistema (5.22) em função do tempo  $t$ , com condições iniciais  $(0.1, 0.1)$  e  $(0.1, 0.001)$ , parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0.7$ ,  $\omega = 1$  e  $t \in (-100, 100)$ . Oscilações não sinusoidais, mostrando divergência exponencial (sensibilidade com relação às condições iniciais).

**Exemplo 23** Considere o sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(i + \beta)x, \\ \frac{di}{dt} &= -\alpha(x^2 - 1)i + \mu \cos(\omega t), \end{aligned} \tag{5.23}$$

onde  $v(t) = \mu \cos(\omega t)$  é uma fonte de tensão e  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  e  $\omega$  são parâmetros de controle. Para  $\mu = 0$ , temos a mesma equação do exemplo (21), logo o comportamento dinâmico do sistema (5.23) é o mesmo que o do sistema (5.17) (ver Figura 5.17), que é hamiltoniano com função hamiltoniana (5.19), ou seja o sistema é conservativo.

Em seguida, estudaremos numericamente o comportamento das soluções do sistema (5.23) para alguns valores  $\mu \neq 0$ .

- Para  $\mu \neq 0$ , o sistema deixa de ser conservativo. O comportamento dinâmico do sistema (5.23), variando os parâmetros são dadas nas figuras a seguir;

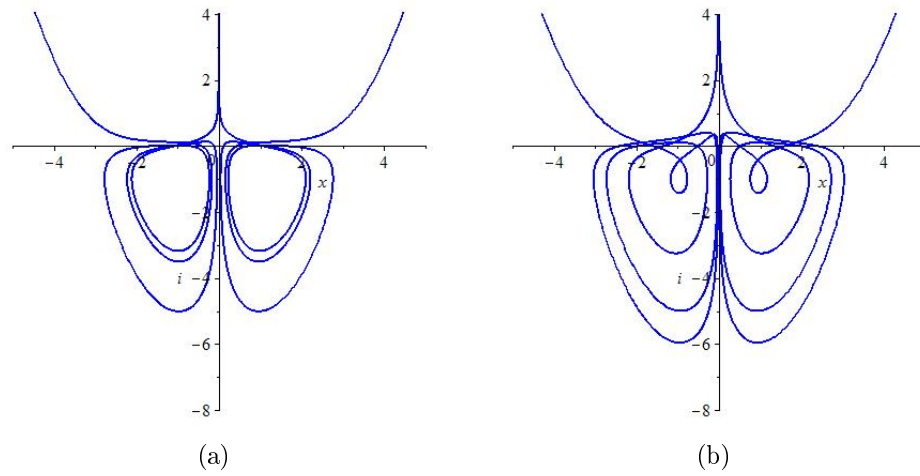


Figura 5.23: Retrato de fase do sistema (5.23), com parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\omega = 1$ , a)  $\mu = 0.3$ , b)  $\mu = 0.7$ , condições iniciais  $(0.86, -5)$ ,  $(-0, 86, -5)$ , e  $t \in (-100, 100)$ .

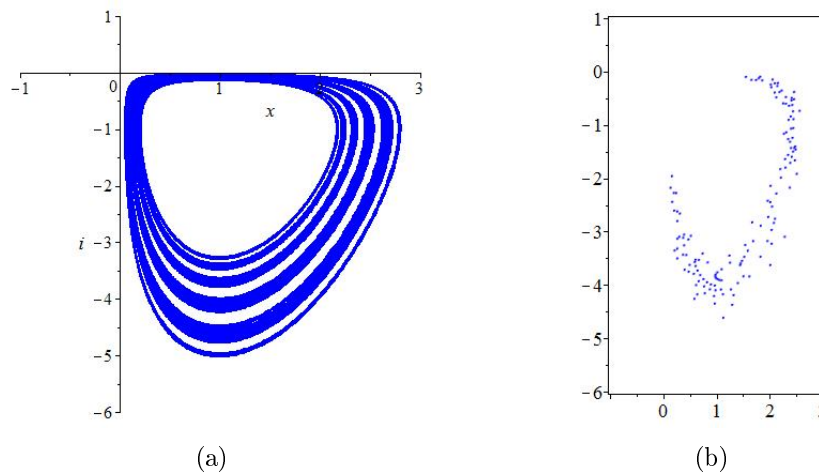


Figura 5.24: Retrato de fase e aplicação de Poincaré para o sistema (5.23), com condição inicial  $(0.86, -5)$ , parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\omega = 1$ , e  $t \in (-100, 100)$ . Aparente comportamento caótico das soluções.

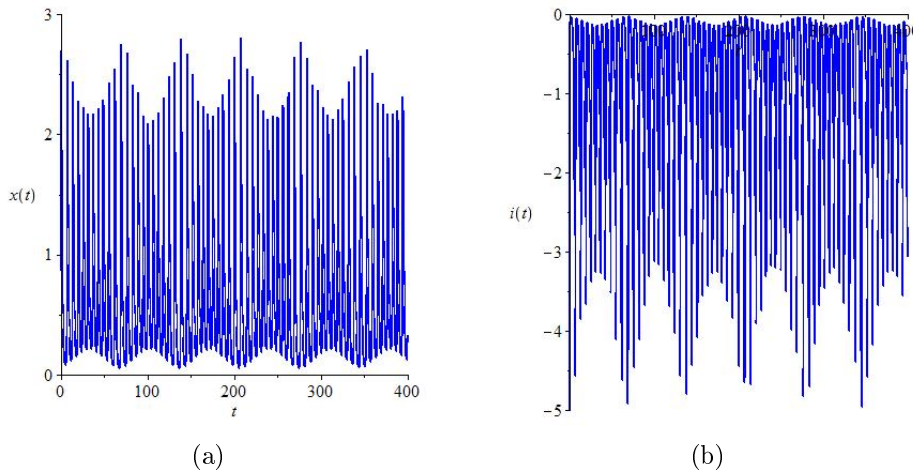


Figura 5.25: Gráfico das funções coordenadas  $x(t)$  e  $i(t)$  de uma solução do sistema (5.23) em função do tempo  $t$ , com  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.02$  e  $\omega = 1$ . Condição inicial  $(0.86, -5)$  e  $t \in (0, 400)$ .

## 5.7 Circuito memristivo no espaço $\mathbb{R}^3$

Consideremos, agora, um circuito que consiste de um indutor linear passivo, um capacitor linear passivo, e um memristor ativo (ou dispositivo memristivo ativo), ligados em série, cujo esquema é mostrado na Figura 5.26, e que é chamado de circuito *MLC* (memristor–indutor–capacitor).

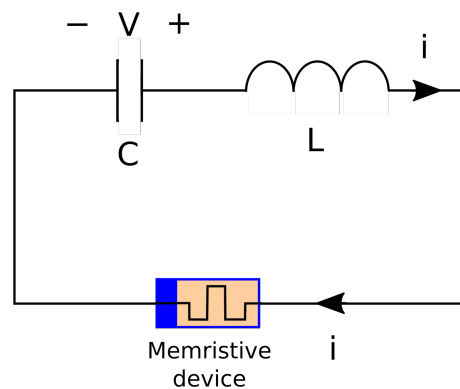


Figura 5.26: Circuito MLC.

Supondo que o memristor é descrito pela equação (5.8), e aplicando as Leis de Corrente e Voltagem de Kirchhoff ao circuito (5.26), chegamos ao sistema de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(i)g(x), \\ L \frac{di}{dt} &= v - M(x)i, \\ C \frac{dv}{dt} &= -i, \end{aligned}$$

no qual  $i$  denota a corrente,  $v$  a voltagem,  $L$  a indutância,  $C$  a capacitância,  $x$  é a variável de estado interno do memristor e  $M(x)$  denota a memristência.

Chamando  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  e fazendo a mudança de variáveis

$$y = \frac{i}{\omega}, \quad e \quad z = -Cv,$$

obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(\omega y)g(x), \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega z - \frac{M(x)y}{L}, \\ \frac{dz}{dt} &= \omega y. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Embora o sistema (5.24) não seja hamiltoniano (já que sistemas hamiltonianos são definidos para espaços de dimensão par), este sistema pode apresentar, para certos valores dos parâmetros, funções escalares que são constantes ao longo de suas trajetórias, chamadas *integrais primeiras* do sistema. Recordemos que uma função  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma integral primeira do sistema (5.24) se for localmente não constante e se for constante sobre as soluções  $(x(t), y(t), z(t))$  deste sistema, ou seja, se

$$\frac{dH}{dt}(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0.$$

Mostremos que o sistema (5.24) tem integrais primeiras, para certos valores dos parâmetros. De fato, seguindo as ideias apresentadas nas seções anteriores, tomando as funções

$$H_1(x, y, z) = \int \frac{M(x)}{Lg(x)} dx + \int \frac{f(\omega y)}{y} dy \quad e \quad H_2(x, y, z) = \frac{y^2 + z^2}{2},$$

podemos reformular o sistema (5.24), escrevendo-o da forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= h(x, y) \frac{\partial H_1(x, y, z)}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dt} &= -h(x, y) \frac{\partial H_1(x, y, z)}{\partial x} - \omega \frac{\partial H_2(x, y, z)}{\partial z}, \\ \frac{dz}{dt} &= \omega \frac{\partial H_2(x, y, z)}{\partial y}, \end{aligned} \tag{5.25}$$

onde  $h(x, y) = yg(x)$ . Desta forma, fica fácil observar que

$$\begin{aligned} \frac{dH_1(x, y, z)}{dt} &= 0, \quad \text{se } \omega = 0, \\ \frac{dH_2(x, y, z)}{dt} &= 0, \quad \text{se } h(x, y) = 0, \end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned} \frac{dH_1(x, y, z)}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{M(x)}{Lg(x)} f(\omega y)g(x) + \frac{f(\omega y)}{y} \left( -\omega z - \frac{M(x)y}{L} \right) \\ &= -\omega \frac{z}{y} f(\omega y), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{dH_2(x, y, z)}{dt} &= \frac{\partial H_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H_2}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\
&= y \left( -h(x, y) \frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x} - \omega \frac{\partial H_2(y, z)}{\partial z} \right) + z \left( \omega \frac{\partial H_2(y, z)}{\partial y} \right) \\
&= -h(x, y) y \left( \frac{M(x)}{Lg(x)} \right) - y\omega z + z\omega y \\
&= -h(x, y) \frac{yM(x)}{Lg(x)}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $H_1$  e  $H_2$  definidas acima são integrais primeiras de (5.24) se  $\omega = 0$  e nos pontos onde  $h(x, y) = yg(x)$  se anula. Esta função  $h$  pode depender de parâmetros (como veremos), assim pode ocorrer que, para algum valor desses parâmetros,  $H_2$  seja uma integral primeira do sistema. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 24** Tomemos  $f(\omega y) = y + \beta$ ,  $g(x) = -x$ ,  $\frac{M(x)}{L} = \alpha(x^2 - \mu)$ , onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\mu$  são constantes. Substituindo estas funções no sistema (5.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -x(y + \beta), \\
\frac{dy}{dt} &= -\omega z - \alpha(x^2 - \mu)y, \\
\frac{dz}{dt} &= \omega y.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Para  $\beta \neq 0$ , a origem  $(0, 0, 0)$  é o único ponto de equilíbrio do sistema (5.26). A matriz Jacobiana deste sistema é dada por

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y - \beta & -x & 0 \\ -2\alpha xy & -\alpha x^2 + \alpha\mu & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix},$$

donde segue que, quando calculada no equilíbrio  $(0, 0, 0)$  fornece

$$J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\mu & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de  $J(0, 0, 0)$  são

$$\lambda_1 = -\beta, \quad \text{e} \quad \lambda_{2,3} = \frac{\alpha\mu \pm \sqrt{\alpha^2\mu^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Como estamos considerando todos os parâmetros positivos, segue então que a origem será sempre um ponto instável, do tipo sela, com variedade estável  $W^s(0)$  de dimensão um e variedade instável  $W^u(0)$  de dimensão dois. Será do tipo sela-foco se  $\alpha^2\mu^2 - 4\omega^2 < 0$ , ou seja, se  $\omega > \alpha\mu/2$ .

Nesta análise, torna-se importante calcularmos os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = -\beta$ , pois pelo Teorema da Variedade Estável [17], a reta gerada por esses autovetores é tangente à variedade estável do ponto de sela na origem  $(0, 0, 0)$ . Tais autovetores são da forma  $(x, 0, 0)$ , com  $x \neq 0$ . Logo, a reta tangente à variedade estável é a reta gerada

pelo vetor  $(1, 0, 0)$ , ou seja, o eixo- $x$ . De fato, podemos observar que o eixo- $x$  é invariante pelo fluxo do sistema (5.26), pois para  $y = z = 0$ , o sistema se reduz a

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

donde segue que a variedade estável (global) do ponto de equilíbrio na origem é o eixo- $x$ .

Por outro lado, para  $x = 0$ , o sistema se reduz a

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega z + \alpha\mu y, \quad \frac{dz}{dt} = \omega y, \quad (5.27)$$

donde segue que o plano- $yz$  também é invariante pelo fluxo do sistema (5.26), ou seja, a variedade instável (global) do ponto de equilíbrio na origem é dada pelo plano- $yz$ . Neste plano invariante, o sistema é linear, com um único ponto de equilíbrio na origem  $(0, 0)$  se  $\alpha\mu\omega \neq 0$ , com autovalores associados dados por

$$\lambda_{2,3} = \frac{\alpha\mu \pm \sqrt{\alpha^2\mu^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Considerando os parâmetros positivos, a origem para o sistema linear (5.27), que corresponde ao sistema (5.26) restrito ao plano- $yz$ , será um nó instável se  $\alpha^2\mu^2 - 4\omega^2 > 0$ ; um nó impróprio instável se  $\alpha^2\mu^2 - 4\omega^2 = 0$  e um foco instável se  $\alpha^2\mu^2 - 4\omega^2 < 0$ . Observe que, se  $\alpha = 0$  ou  $\mu = 0$ , teremos um centro na origem, no plano- $yz$ .

O fato do plano- $yz$  ser invariante mostra que uma solução  $(x(t), y(t), z(t))$  com condição inicial  $(x(0), y(0), z(0))$  na qual  $x(0) > 0$  (respectivamente,  $x(0) < 0$ ) permanecerá no semi-espaço  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$  (respectivamente,  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\}$ ), para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Usando o software Maple, plotamos os retratos de fase do sistema (5.26) restrito ao plano invariante  $yz$ , para valores distintos dos parâmetros, para observarmos a mudança no comportamento das soluções, veja a Figura 5.27.

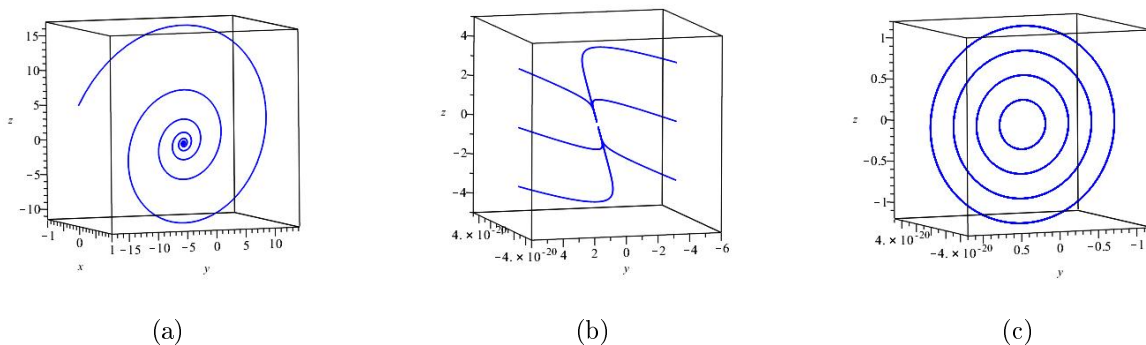


Figura 5.27: Retrato de fase do sistema (5.26) restrito ao plano- $yz$ , com parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  e: a)  $\mu = 0.5$  e  $\omega = 2$ , b)  $\mu = 1$  e  $\omega = 0.3$ , e c)  $\mu = 0$  e  $\omega = 0.3$ .

Faremos agora um estudo sobre a existência de integrais primeiras para o sistema (5.26). Usando as ideias apresentadas no início desta seção, consideremos

$$\begin{aligned} H_1(x, y, z) &= \int \frac{y + \beta}{y} dy + \int \frac{\alpha(x^2 - \mu)}{-x} dx \\ &= y + \beta \ln|y| - \alpha \frac{x^2}{2} + \alpha\mu \ln|x| + c, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{dH_1(x, y, z)}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \left(-\alpha x + \frac{\alpha\mu}{x}\right) (-xy - \beta x) + \left(1 + \frac{\beta}{y}\right) [-\omega z - \alpha(x^2 - \mu)y] \\ &= \omega z \left(\frac{\beta}{y} - 1\right). \end{aligned}$$

Assim,  $H_1(x, y, z) = 0$  para  $\omega = 0$ , o que indica que esta é uma integral primeira do sistema (5.26). Por outro lado, para  $\alpha = 0$

$$H_2(x, y, z) = \frac{z^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

é outra integral primeira do sistema (5.26), pois

$$\begin{aligned} \frac{dH_2(x, y, z)}{dt} &= y[-\omega z - \alpha(x^2 - \mu)y] + z\omega y \\ &= \alpha y^2(\mu - x^2). \end{aligned}$$

Portanto  $H_2(x, y, z)$  é constante ao longo das soluções do sistema (5.26), se  $\alpha = 0$ .

Na Figura 5.28, apresentamos o comportamento das soluções do sistema (5.26) para alguns valores dos parâmetros, sendo que as figuras (a) e (f) mostram as órbitas fechadas no espaço, correspondentes aos casos em que o sistema tem uma integral primeira ( $\mu = 0$  e  $\omega = 0$ ). Por outro lado, para valores dos parâmetros distintos de zero, casos em que não há integrais primeiras, as soluções do sistema (5.26) parecem apresentar comportamento bastante complexo, conforme mostrado nas Figuras 5.28 (b)–(e).

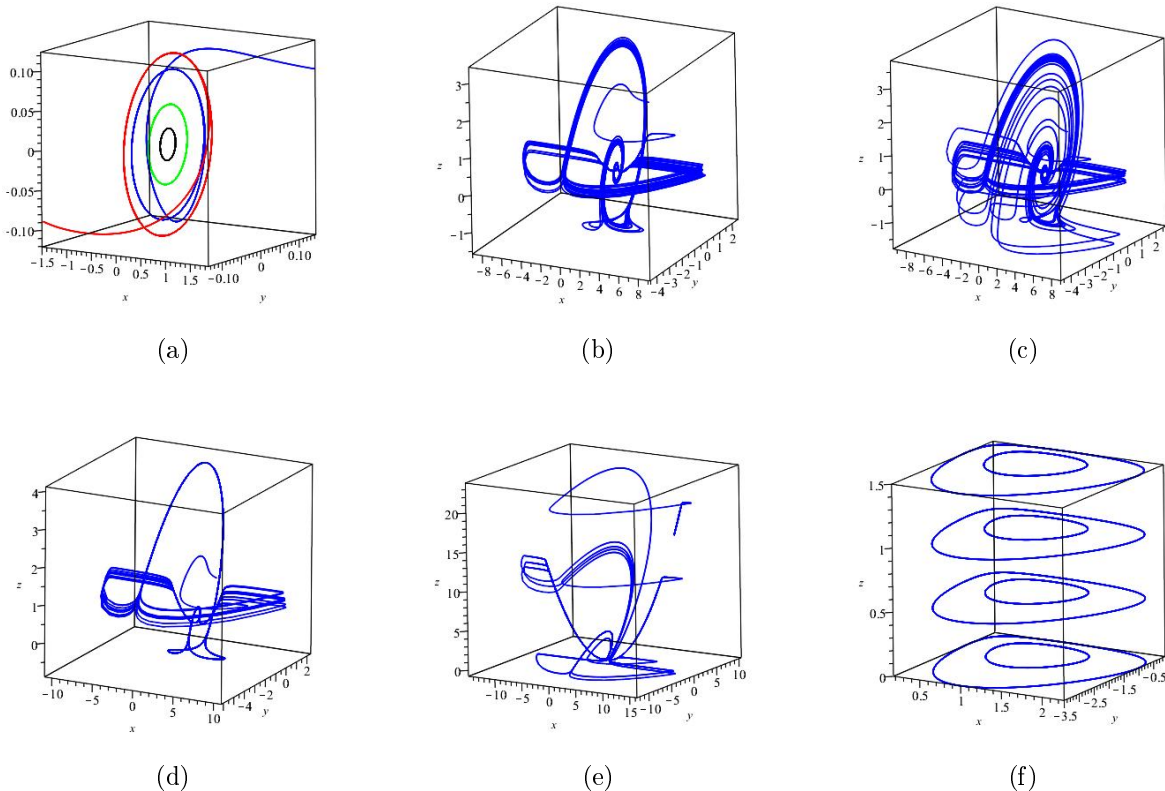


Figura 5.28: Retratos de fase do sistema (5.26), com parâmetros  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\omega = 0.1$ , e: a)  $\mu = 0$ , b)  $\mu = 0.5$  e c)  $\mu = 0.7$ , d)  $\mu = 0.9$ , e)  $\mu = 1.5$ . Em f) tomamos  $\mu = 1$ ,  $\omega = 0$ .

As soluções do sistema (5.26) podem apresentar comportamento bastante complexo, aparente a um atrator caótico, conforme mostram as Figuras 5.29 e 5.30. Não há uma prova analítica da existência deste atrator, mas apenas evidências numéricas.

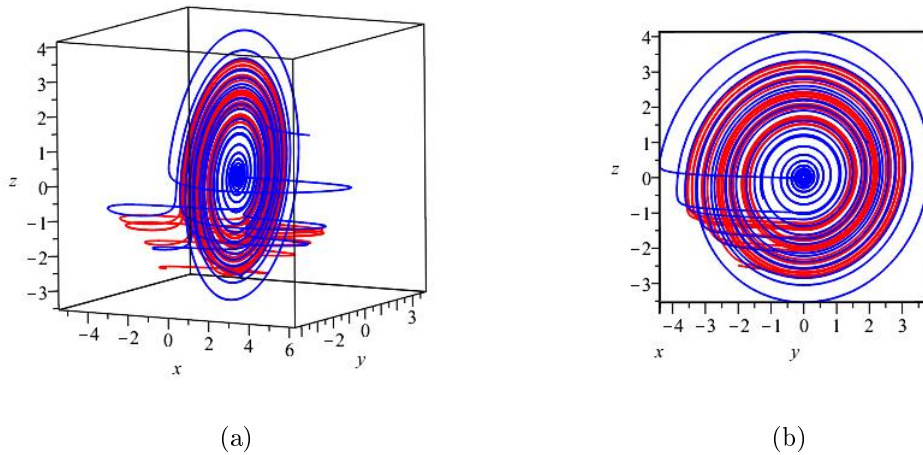


Figura 5.29: (a) Retrato de fase do sistema (5.26) com parâmetros  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\omega = 0.1$ , condições iniciais  $(-2, -2, -2.5)$  e  $(2, 2, 1)$ ,  $t \in (0, 1500)$ . (b) Projeção no plano- $yz$ .

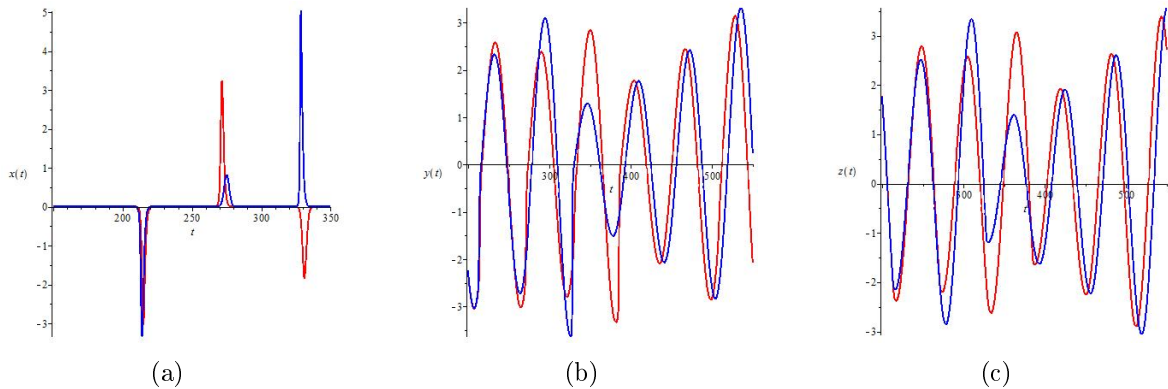


Figura 5.30: Coordenadas (a)  $x(t)$ , (b)  $y(t)$  e (c)  $z(t)$  das soluções do sistema (5.26) com parâmetros  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\omega = 0.1$ , condições iniciais  $(2, 2, 1)$  e  $(2, 2, 0.001)$ ,  $t \in (0, 1500)$ . (Apresentam sensibilidade com respeito as condições iniciais).

## 5.8 Circuito memristivo hamiltoniano em $\mathbb{R}^4$

Consideremos a função hamiltoniana  $H = T + V$ , definida pela soma das energias cinética  $T$  e potencial  $V$ , onde

$$T = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}, \quad \text{e} \quad V = V(x_1, x_2), \quad (5.28)$$

onde  $x_i$  denota a posição de uma partícula de massa  $m_i$  e  $p_i$  com  $i = 1, 2$ , denotam o momento  $p_i = m_i \dot{x}_i$ . Desta forma, as equações de movimento das partículas podem ser obtidas da Segunda Lei de Newton, diferenciando a equação

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m_i},$$

com  $i = 1, 2$ . Obtemos então o seguinte sistema hamiltoniano:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial x_1} = \frac{-\partial V}{\partial x_1}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial x_2} = \frac{-\partial V}{\partial x_2}.\end{aligned}\tag{5.29}$$

É claro que  $H = H(x_1, x_2, p_1, p_2) = T + V$  dada em (5.28) é uma função hamiltoniana para este sistema, pois

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dt} \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) \left( \frac{p_1}{m_1} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) \left( \frac{p_2}{m_2} \right) + \left( \frac{p_1}{m_1} \right) \left( \frac{-\partial V}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{p_2}{m_2} \right) \left( \frac{-\partial V}{\partial x_2} \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim,  $H(x_1, x_2, p_1, p_2)$  é constante ao longo das soluções do sistema (5.29). Podemos utilizar este sistema para descrever o comportamento dinâmico de dois circuitos ML (envolvendo um memristor e um indutor) acoplados. De fato, tomando

$$m_1 = L_1, \quad m_2 = L_2, \quad p_1 = L_1 \ln |i_1|, \quad p_2 = L_2 \ln |i_2|, \quad q_1 = x_1, \quad \text{e} \quad q_2 = x_2,$$

em (5.28) e (5.29), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \tilde{T} + \tilde{V}, \\ \tilde{T} &= \frac{L_1 \ln^2 |i_1|}{2} + \frac{L_2 \ln^2 |i_2|}{2}, \\ \tilde{V} &= V(x_1, x_2),\end{aligned}$$

onde obtemos o sistema em  $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \ln |i_1|, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \ln |i_2|, \\ L_1 \frac{di_1}{dt} &= - \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_1} \right) i_1, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} &= - \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_2} \right) i_2.\end{aligned}\tag{5.30}$$

respectivamente, onde  $i_k \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ . O sistema (5.30) tem as soluções contidas na superfície de nível  $\tilde{H} = \tilde{H}_0$ , onde  $\tilde{H}_0$  é constante.

Das considerações acima, podemos observar que

$$i_1 = e^{\frac{p_1}{m_1}}, \quad i_2 = e^{\frac{p_2}{m_2}}, \quad x_1 = q_1, \quad x_2 = q_2, \quad L_1 = m_1, \quad \text{e} \quad L_2 = m_2. \quad (5.31)$$

Considerando então os dispositivos memristivos de corrente-controlada, determinados pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \ln |i_1|, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \ln |i_2|, \\ v_1 &= M_1(x_1, x_2)i_1, \\ v_2 &= M_2(x_1, x_2)i_2. \end{aligned}$$

onde  $v_1, v_2$  denota o voltagem e  $i_1, i_2$  a corrente do dispositivo memristor, onde o memristor é descrito por

$$\begin{aligned} M_1(x_1, x_2) &= \frac{\partial \tilde{V}(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \\ M_2(x_1, x_2) &= \frac{\partial \tilde{V}(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

### Exemplo 25 Escolha

$$\begin{aligned} T(p_1, p_2) &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}, \\ V(q_1, q_2) &= \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3, \\ p_k &= \ln |i_k|, \\ m_k &= 1, \end{aligned}$$

onde  $k = 1, 2$ . Substituindo-o no sistema (5.30). O sistema que modela do circuito memristivo, usando a hamiltoniana do tipo Hénon e Heiles, é dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \ln |i_1|, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \ln |i_2|, \\ \frac{di_1}{dt} &= (-x_1 - 2x_1 x_2)i_1, \\ \frac{di_2}{dt} &= (-x_2 - x_1^2 + x_2^2)i_2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

e a função hamiltoniana é descrita por

$$H = \frac{(\ln |i_1|)^2 + (\ln |i_2|)^2}{2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_1^2 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3. \quad (5.33)$$

As trajetórias movem-se nas superfícies de nível da hamiltoniana (5.33). Portanto, vemos que, na Figura 5.31 (a) para  $H = 0.1099990000$  na seção de Poincaré começamos ver o

comportamento caótico e duas regiões com órbitas elípticas, e para  $H = 0.1099040000$  mostra-se quatro regiões com órbitas elípticas, ver Figura (5.31) (b). No entanto, se nós acrescentamos a energia  $H = 0.1106000000$ , ainda pode-se ver que aparenta ter algumas órbitas elípticas, e existem ilhas de comportamento não caótico que são preenchidas com um conjunto completamente aleatório de pontos gerados de um só conjunto de condições iniciais. Se a energia é aumentada para  $H = 0.1241430000$ , a solução com provável comportamento caótico tenta preencher todo o espaço de fase. Mostramos na Figura 5.31 (a)–(d) as seções de Poincaré do sistema memristivo do tipo Hénon e Heiles (5.32)

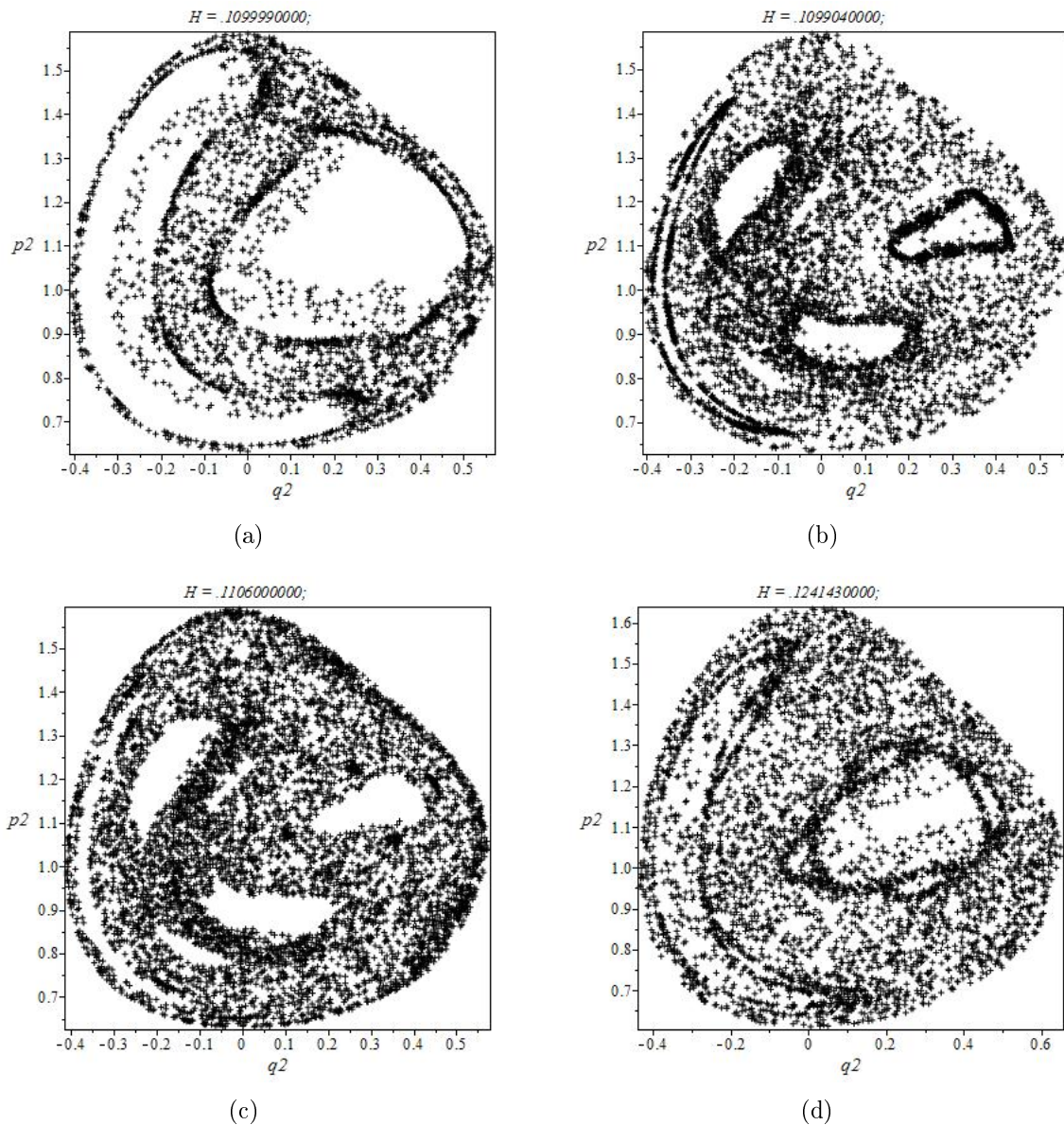


Figura 5.31: Seções de Poincaré do sistema Memristor Hénon e Heiles (5.32). As curvas fechadas mostram soluções quase periódicas.

## Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos um estudo da estabilidade das oscilações determinadas por equações diferenciais ordinárias lineares e não-lineares, que modelam circuitos mecânicos e elétricos. Utilizamos a teoria qualitativa e de bifurcações para analisar o comportamento das soluções das equações que modelam o movimento de um pêndulo (linear e não-linear), movimento de carga em circuitos do tipo *RLC* (que envolvem um resistor, um indutor e um capacitor), estudamos as equações não-lineares de Van der Pol e Duffing e, finalmente, analisamos as bifurcações que ocorrem em circuitos elétricos envolvendo memristores. No caso dos circuitos com memristores, mostramos que as soluções das equações que os modelam matematicamente, conforme apresentadas em [7], podem apresentar oscilações periódicas, amortecidas e caóticas. Além do estudo teórico das equações diferenciais ordinárias, desenvolvido principalmente com base nas referências [8, 10, 13, 17], realizamos experimentos computacionais usando o software MAPLE™, para melhor compreensão da dinâmica das soluções e suas bifurcações.

No caso específico dos circuitos envolvendo memristores, capacitores, resistores e indutores, estudamos circuitos memristivos hamiltonianos no plano, com e sem forçamento periódico, na linha do que é feito no artigo [7]. Estudamos também circuitos memristivos espaço no  $\mathbb{R}^3$  que apresentam integrais primeiras e plano invariante, desenvolvemos uma análise da dinâmica e bifurcações deste sistema, complementando o estudo puramente numérico que é apresentado em [7]. Além disso, apresentamos um breve estudo dos sistemas hamiltonianos memristivos no  $\mathbb{R}^4$ , que podem apresentar comportamento bastante complexo. O estudo de tais modelos de circuitos memristivos permitiu um melhor entendimento da dinâmica e das condições de estabilidade desses osciladores não-lineares, que dependem diretamente dos parâmetros envolvidos nos sistemas. Vimos que, além das oscilações periódicas, os circuitos memristivos podem apresentar comportamentos bastante complexos (cujas simulações numéricas indicam serem caóticos), nos casos de sistemas hamiltonianos com perturbação periódica, no caso de circuitos memristivos no espaço  $\mathbb{R}^3$  e também no  $\mathbb{R}^4$ . Tal entendimento se torna importante, pois evidencia o fato de os memristores, além de poderem ser usados para construção de memórias não voláteis de computadores, apresentam potenciais aplicações em vários outros campos de interesse físico e tecnológico, como criptografia de dados para transmissão segura de informações digitais, processadores de alta velocidade e baixo consumo, modelos biológicos de memória associativa, modelos simples de inteligência artificial, redes neurais, *machine learning*, dentre outros, conforme descrito, por exemplo, na referência [15]. Só para se ter uma ideia das aplicações dos memristores, os autores de [15] observam que, por serem construídos em escala nanométrica, o potencial desses dispositivos é espantoso: algo como todos os

---

livros da Biblioteca do Congresso norte americano digitalizados e armazenados em um dispositivo de memória do tamanho de um polegar!

Neste contexto, finalizamos observando então que, além dos circuitos do tipo  $RLC$  (que envolvem um resistor, um indutor e um capacitor) vastamente estudados na literatura, podem ser construídos circuitos envolvendo também um memristor. Na verdade, vários tipos de circuitos elétricos envolvendo combinações desses quatro elementos básicos podem ser construídos e analisados matematicamente, do ponto de vista dinâmico. Apresentamos alguns casos nesta dissertação, mas há muito trabalho ainda a ser feito, tanto por físicos, engenheiros, químicos e também matemáticos.

---

## Referências

- [1] ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., AND KHAIKIN, S. E. *Theory of Oscillators*. Dover, NY, 1987.
- [2] CHOW, S. N., AND HALE, J. K. *Methods of Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] CHUA, L. O. Memristor – the missing circuit element. *IEEE Transact. Circuit. Th. CT-18* (1971), 507–519.
- [4] CHUA, L. O., AND KANG, S. M. Memristive devices and systems. *Proc. IEEE 64* (1976), 209–223.
- [5] CHUA, L. O., AND MCPHERSON, J. D. Explicit topological formulation of lagrangian and hamiltonian equations for nonlinear networks. *IEEE Trans. Circuits Syst. CAS-21* (1974), 277–286.
- [6] DAVOLI, M. Estabilidade de sistemas dinâmicos: Estudo do memristor. *Dissertação de Mestrado, FCT/UNESP, Presidente Prudente* (2014), 1–119.
- [7] ITOH, M., AND CHUA, L. O. Memristor hamiltonian circuits. *Int. J. Bifurcation and Chaos 21*, 9 (2011), 2395–2425.
- [8] KELLER, F. J., GETTYS, W. E., AND SKOVE, M. J. *Física*, vol. 2. Pearson education do Brasil, São Paulo, 1999.
- [9] LYNCH, S. *Dynamical systems with applications using Maple*. Springer science, United Kingdom, 2000.
- [10] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [11] RUELLE, D. *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*. Academic Press, New York, 1989.
- [12] SCARABELLO, M. C. Estudo de sistemas lineares por partes com três zonas e aplicação na análise de um circuito elétrico envolvendo um memristor. *Dissertação de Mestrado, FCT/UNESP, Presidente Prudente* (2012).
- [13] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA-CNPq, Rio de Janeiro, 1979.
- [14] STRUKOV, D. B., SNIDER, G. S., STEWART, D. R., AND WILLIAMS, R. S. The missing memristor found. *Nature 453* (2008), 80–83.
- [15] TETZLAFF, R. *Memristors and Memristive Systems*. Springer verlag, Heidelberg, 2014.

- 
- [16] TSATSOS, M. Theoretical and numerical study of the van der pol equation. *Dissertation (diploma thesis), Physics Department, Aristotle University of Thessaloniki* (2006).
- [17] WIGGINS, S. *Global bifurcations and chaos*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [18] WIGGINS, S. *Introduction to Applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag, New York, 1996.

# Equação hamiltoniana e equação de Pfaff

A equação de Lagrange, segundo [1], pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $L(q, \dot{q})$  denota uma função real que depende da coordenada  $q$  e da velocidade  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ , chamada de função lagrangeana. A equação lagrangeana também pode ser escrito na forma

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  denota o momento.

A equação hamiltoniana, segundo [1], pode ser obtida pelo princípio variacional dado da seguinte forma

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \{p\dot{q} - H(p, q)\} dt = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde  $L(q, \dot{q})$  denota a função lagrangeana,  $H(p, q) = p\dot{q} - L$  denota o hamiltoniano, e  $\delta$  denota uma variação suave arbitrária do caminho sujeito à condição  $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$ . A equação (A.3) pode ser escrita como:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt = 0. \quad (\text{A.4})$$

Aplicando a regra de integração por partes ao segundo termo da equação (A.4), obtemos

$$\int_{t_0}^{t_1} p \delta \dot{q} dt = p \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p} \delta q dt = - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p} \delta q dt. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, a equação (A.4) pode ser escrita da forma

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left( \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right\} dt = 0. \quad (\text{A.6})$$

Da equação (A.6), obtemos a equação hamiltoniana

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Observe que a equação hamiltoniana tem a integral

$$H(p, q) = h,\tag{A.8}$$

onde  $h$  é alguma constante.

Consideremos a equação variacional mais geral da forma (conforme [1])

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (X\dot{x} + Y\dot{y} - F)dt = 0,\tag{A.9}$$

onde  $X$ ,  $Y$  e  $F$  são funções reais de  $x$  e  $y$ . Como

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_0}^{t_1} (X\dot{x})dt &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta X\dot{x} + X\delta\dot{x})dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta X\dot{x} - \dot{X}\delta x)dt + X\delta x \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta X\dot{x} - \delta x\dot{X})dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y \right) \dot{x} - \left( \frac{\partial X}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial X}{\partial y}\dot{y} \right) \delta x \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial y}\dot{x}\delta y - \frac{\partial X}{\partial y}\dot{y}\delta x \right) \right\} dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_0}^{t_1} (Y\dot{y})dt &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta Y\dot{y} + Y\delta\dot{y})dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left( \frac{\partial Y}{\partial x}\dot{y}\delta x - \frac{\partial Y}{\partial x}\dot{x}\delta y \right) \right\} dt\end{aligned}$$

e

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} Fdt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x}\delta x - \frac{\partial F}{\partial y}\delta y \right) dt,$$

a equação (A.9) pode ser escrita como

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left( Q(x, y)\dot{x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y - \left( Q(x, y)\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta x \right\} dt = 0,\tag{A.10}$$

donde  $Q(x, y) = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$ . Então, obtemos a equação de Pfaff [1] dada da seguinte forma

$$\begin{aligned}Q(x, y)\dot{x} &= \frac{\partial F}{\partial y}, \\ Q(x, y)\dot{y} &= -\frac{\partial F}{\partial x},\end{aligned}\tag{A.11}$$

que é a forma geral das equações que descrevem um sistema conservativo.

A equação (A.11) tem a solução  $F(x, y) = C$  ( $C = \text{constante}$ ), pois

$$\frac{dF(x, y)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} = \{-Q(x, y)\dot{y}\}\dot{x} + \{Q(x, y)\dot{x}\}\dot{y} = 0.$$

Se  $Q(x, y) > 0$ , o sistema (A.11) pode ser transformado em um sistema hamiltoniano. De fato, fazendo a mudança da variável independente  $t$  por  $d\tau = \frac{dt}{Q(x, y)}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{\partial F}{\partial x}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Nesta transformação, multiplicamos a velocidade no ponto  $(x, y)$  pelo valor da função  $Q(x, y) > 0$  neste ponto, o que não altera as trajetórias, mudando apenas a escala de tempo (rescaling). Se  $Q(x, y) < 0$ , a orientação temporal das trajetórias é invertida.