

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor, o texto completo desta t e s e será disponibilizado somente a parti de 10/04/2025.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE CIÊNCIAS – CÂMPUS BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA**

FERNANDO OLIVEIRA GARCIA

**ANÁLISE COMPLEXA: USO DE *SOFTWARE* NA INTERPRETAÇÃO
GRÁFICA**



**BAURU
2024**

FERNANDO OLIVEIRA GARCIA

ANÁLISE COMPLEXA: USO DE *SOFTWARE* NA INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor junto ao Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Câmpus de Bauru.

Orientador: Prof. Dr. Aguinaldo Robinson de Souza

Coorientadora: Dr.^a Emília de Mendonça Rosa Marques

**BAURU
2024**

G216a Garcia, Fernando Oliveira
Análise Complexa : uso de software na interpretação gráfica
/ Fernando Oliveira Garcia. -- Bauru, 2024
110 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Faculdade de Ciências, Bauru
Orientador: Aguinaldo Robinson de Souza
Coorientadora: Emília de Mendonça Rosa Marques

1. Panorama Analítico. 2. Educação. 3. Análise Complexa. 4.
Função. 5. Domínio de cores. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, Bauru. Dados
fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Fernando Oliveira Garcia

Análise Complexa: uso de *software* na interpretação gráfica

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor junto ao programa de Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Câmpus de Bauru.

COMISSÃO EXAMINADORA

Data da defesa/entrega: 9/4/2024

MEMBROS COMPONENTES DA BANCA EXAMINADORA:

Presidente e Orientador: Dr. Aguinaldo Robinson de Souza
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – Unesp/Bauru – SP

Membro Titular: Dr. Thiago Pedro Pinto
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS/Mato Grosso do Sul – MS

Membro Titular: Dra. Rosemeiry de Castro Prado
Faculdade de Tecnologia – Fatec/Ourinhos – SP

Membro Titular: Dr. Wilson Massashiro Yonezawa
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – Unesp/Bauru – SP

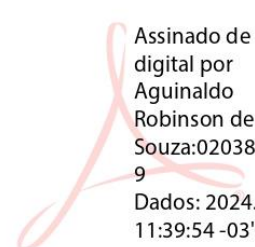
Membro Titular: Dr.^a Patrícia Fernanda de Oliveira Cabral
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – Unesp/Bauru – SP

Local: Universidade Estadual Paulista
Faculdade de Ciências
Unesp – Câmpus de Bauru

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE FERNANDO OLIVEIRA GARCIA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 09 dias do mês de abril do ano de 2024, às 14:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de FERNANDO OLIVEIRA GARCIA, intitulada **Análise Complexa: uso de software na interpretação gráfica**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Assoc. AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Química / Faculdade de Ciências UnespCâmpus de Bauru, Prof. Dr. THIAGO PEDRO PINTO (Participação Virtual) do(a) Instituto de Matemática / Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Profa. Dra. ROSEMEIRY DE CASTRO PRADO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Tecnologia de São Paulo - Fatec câmpus Ourinhos, Prof. Dr. WILSON MASSASHIRO YONEZAWA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Computação / Faculdade de Ciências - UNESP Bauru, Profa. Dra. PATRÍCIA FERNANDA DE OLIVEIRA CABRAL (Participação Virtual) do(a) Departamento de Química / Universidade Estadual Paulista. Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: **APROVADO**. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof. Assoc. AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA



Assinado de forma
digital por
Aguinaldo
Robinson de
Souza:0203820983
9
Dados: 2024.04.10
11:39:54 -03'00'

Ao meu querido pai Gercino (*in memoriam*), que sempre me apoiou, incentivou e foi companheiro em todo o tempo, mas que, no início dessa jornada, teve que se ausentar para tomar sua morada no céu.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela dádiva da vida e por ter me mantido em pé, mesmo em meio às circunstâncias.

Sou grato à minha família, pelo carinho e paciência com que me apoiaram.

Deixo um agradecimento especial ao meu orientador, pelo incentivo, pela dedicação e também pela paciência com que me conduziu neste processo de pesquisa. E também à professora Emília, por toda ajuda com o *software*.

Também quero agradecer à Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), local em que me formei e onde trabalho atualmente, pela possibilidade de afastamento enquanto desenvolvia minha tese.

Não posso deixar de agradecer também à empresa Embarcadero, pela colaboração com o Programa Acadêmico, na seção das licenças do *software* Delphi, que possibilitou o F(C): Funções Complexas e agora também no F(C): Análise Complexa.

“Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar as possibilidades para a sua
própria produção ou a sua construção”.

Paulo Freire
Pedagogia da Autonomia (1996)

GARCIA, Fernando Oliveira. Análise Complexa: uso de *software* na interpretação gráfica. 2024. 110f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Unesp, Faculdade de Ciências, Bauru, 2024.

RESUMO

A abordagem de conceitos dos números complexos parece ter ficado de lado à medida que documentos oficiais, como os PCNs e a BNCC, não definem com clareza certos parâmetros para o conteúdo. Dentro desse contexto, a matemática, mais especificamente esse assunto, pode ser algo confuso à compreensão dos estudantes, colaborando ao estigma de que a matemática é algo complicado de se aprender. A pergunta que norteou este trabalho foi: “Qual a relevância das ferramentas gráficas na representação de funções de variáveis complexas?” Na tentativa de encontrar respostas a essa pergunta, fez-se um levantamento em bases de dados científicas, intencionando relacionar convergências e divergências entre algumas pesquisas. A busca levou ao desenvolvimento de um *software* para a plotagem gráfica de funções de variável complexa e elementos de Análise Complexa. Os resultados indicam que a maioria das pesquisas analisadas utiliza o *software* Geogebra como principal ferramenta de plotagem gráfica de funções; o domínio colorido ocorre em poucas pesquisas, sendo o uso do plano de Argand-Gauss a forma mais comum de representação gráfica apresentada. As pesquisas apontam que há relevância na utilização de *softwares* de plotagem gráfica nos ambientes de aprendizado de funções. Uma sequência didática foi elaborada para abordagem do tema. O *software* desenvolvido viabiliza a representação gráfica de funções de variável complexa, e suas possíveis derivadas, em que o usuário pode interagir com gráficos baseados no mapa de cores e em Panoramas Analíticos.

Palavras-chave: Panorama Analítico. Educação. Análise Complexa. Função. Domínio de cores.

GARCIA, Fernando Oliveira. Complex Analysis: use of software in graphic interpretation. 110f. Dissertation (Ph.D. in Education for Science) – São Paulo State University (Unesp), School of Sciences, Bauru, SP, 2024.

ABSTRACT

The approach to complex number concepts seems to have been left aside as official documents such as the PCNs and the BNCC do not clearly define certain parameters for the content. Within this context, mathematics, more specifically this subject, can be confusing for students to understand, contributing to the stigma that mathematics is something complicated to learn. The question that guided this work was: "What is the relevance of graphical tools in representing functions of complex variables? In an attempt to find answers to this question, a survey was carried out in scientific databases, intending to relate convergences and divergences between some research. This search led to the development of software for the graphical plotting of complex variable functions and Complex Analysis elements. The results indicate that the majority of research analyzed uses the Geogebra software as the main software for graphical plotting of functions, the colored domain occurs in few studies, with the use of the Argand-Gauss plane being the most common form of graphical representation presented. Research shows that there is relevance in using graphical plotting software in function learning environments. A didactic sequence is designed to approach the topic. The developed software enables the graphical representation of complex variable functions and their possible derivatives, in which the user can interact with graphics based on color maps and Analytical Landscape.

Keywords: Analytics Landscape. Education. Complex Analysis. Function. Domain of colors.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Interface do <i>software</i> SageMath.....	44
Figura 2 – Ambiente <i>web</i> WolframAlpha	45
Figura 3 – <i>Software</i> Maple	46
Figura 4 – Interface Delphi 10.4	77
Figura 5 – Interface GLScene	78
Figura 6 – Representação gráfica das funções do <i>software</i>	79
Figura 7 – Mapa de cores	80
Figura 8 – Primeiros resultados da plotagem de derivadas	81
Figura 9 – Interface principal do <i>software</i> F(C): Análise Complexa.....	82
Figura 10 – Interface com plotagem de derivadas	82
Figura 11 – Interface com janela do Panorama Analítico	83
Figura 12 – Menu principal.....	84
Figura 13 – Janela do Panorama Analítico da função $\tan(z)$	84
Figura 14 – Panorama Analítico da função $\ln(z)$	86
Figura 15 – Programação derivada tangente	88

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Quantitativo por conteúdo.....	56
Gráfico 2 – Percentual do GeoGebra em relação a outros <i>softwares</i>	57
Gráfico 3 – Distribuição por nível escolar	58
Gráfico 4 – Distribuição por tipo de trabalho	61

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Oferta de disciplina relacionada às variáveis complexas	17
Quadro 2 – <i>Softwares</i> para abordagem de funções.....	41
Quadro 3 – Relação de <i>softwares</i> de plotagem de funções complexas	43
Quadro 4 – Comparativo entre os <i>softwares</i>	47
Quadro 5 – Comando de busca nas bases de dados.	51
Quadro 6 – Categorias de análise assumidas no estudo dos artigos da pesquisa. ..	52
Quadro 7 – Termos utilizados e quantitativo de trabalhos em Periódicos Capes.....	53
Quadro 8 – Termos utilizados e quantitativo de trabalhos em BDTD.....	54
Quadro 9 – Termos utilizados e quantitativo na Base de dados da UAB Portugal....	55
Quadro 10 – Total de trabalhos relacionados.....	55
Quadro 11 – Trabalhos selecionados que abordam números complexos.....	59
Quadro 12 – Trabalhos selecionados que abordam funções complexas	60

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Justificativa da pesquisa.....	14
1.2 Relato da trajetória da pesquisa	20
1.3 Organização da tese	22
2. A MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS	23
2.1 O conjunto dos números complexos	23
2.1.1 Funções complexas.....	25
2.1.2 Análise Complexa	28
2.2 Educação matemática e tecnologia.....	29
2.2.1 Abordagem tecnológica	33
2.2.2 Utilização das tecnologias em sala de aula	37
2.2.3 Utilização das tecnologias no ensino de matemática.....	39
3 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO	48
3.1 Condução do levantamento	53
3.2 Apresentação e descrição dos dados	56
3.3 Análise dos dados	62
3.3.1 Análise dos trabalhos que abordam números complexos.....	63
3.3.2 Análise dos trabalhos que abordam funções complexas	66
3.3.3 Principais características de um <i>software</i> voltado para números e funções complexas	72
4 DESENVOLVIMENTO DO SOFTWARE.....	74
4.1 Embarcadero e o pacote GLScene	76
4.2 <i>Software</i>	79
4.3 Funcionalidades.....	84
4.4 Dificuldades para o desenvolvimento	86
4.4 Elaboração de uma sequência didática.....	89
4.5 Análise do <i>software</i> e seu desenvolvimento	93
CONSIDERAÇÕES FINAIS	100
REFERÊNCIAS.....	104

1 INTRODUÇÃO

A intenção de desenvolver esta tese surgiu primeiramente da vivência e das experiências como professor de matemática na Educação Básica e, atualmente, no curso de licenciatura em que leciono. Dessas vivências, foi possível observar como pode ser relevante o uso das ferramentas tecnológicas à promoção de um aprendizado mais produtivo e também como essas ferramentas viabilizam uma aula mais dinâmica, em contraponto ao habitual quadro e giz. Certa vez, em sala de aula, ao ser indagado por alguns licenciandos do primeiro ano do curso de matemática sobre a impossibilidade de obter uma solução dentro do conjunto dos números reais para uma determinada equação real, houve um despertar sobre como poderia se lançar luz sobre esse problema, desvencilhando-se da habitual resposta que se limita a dizer que: “Este problema não tem solução no conjunto real.”, como se apenas essa afirmação bastasse para o momento, desconsiderando as questões mais recorrentes como: “Se a equação não admite solução real, como obtenho a solução?”, “Qual o significado da afirmação: não admite solução real?”. Outrora, na Educação Básica, deparamo-nos com a dificuldade de compreensão dos estudantes sobre o porquê não existir raiz quadrada para número negativo. Essas situações corriqueiras de sala de aula despertaram o interesse em investigar novas formas de apresentação de elementos do conjunto dos números complexos.

Desse modo, esta pesquisa tem por objetivos desenvolver uma nova abordagem para o conjunto de números complexos e derivadas de funções complexas por meio de recursos de tecnologia; apresentar passos de como elaborar uma ferramenta tecnológica (*software*) que possibilite a visualização de elementos de funções e derivadas complexas; discutir as dificuldades no desenvolvimento de ferramentas de tecnologia por professores que detêm apenas conhecimento específico de sua área de formação, neste caso, a matemática, e analisar a ferramenta desenvolvida.

1.1 Justificativa da pesquisa

O conjunto dos números complexos é um tema não abordado de maneira integral durante a Educação Básica e os motivos podem ser os mais diversos, como:

a valorização de outros conteúdos em detrimento a este ou o pouco domínio do professor em relação ao assunto, entre outros. Conforme descreve Silveira (2002, p. 8), alguns professores da disciplina de matemática sugerem torná-la mais fácil, pressupondo “que ela seja difícil”. Observando manifestações de um grupo de estudantes que considera essa disciplina “chata e misteriosa, que assusta e causa pavor” (SILVEIRA, 2002, p. 8), a pesquisadora destaca o sentimento de medo desses sujeitos de não terem êxito no aprendizado. Em uma disciplina da área de Exatas, uma questão ou problema pode requerer uma resposta única e formalizada, exigindo conhecimento e domínio de todo um repertório de conceitos e também a mobilização de ideias para se chegar à resposta desejada, e essa imposição de se obter ou não tal resposta pode despertar esses sentimentos negativos.

Ao verificar os documentos oficiais que norteiam a Educação Básica, em busca de subsídios quanto à abordagem do conjunto dos números complexos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) preveem que esse tema pode ser flexibilizado, apoiando-se no fato de que, por não ter muitas aplicações, sua compreensão se torna sem sentido aos estudantes que não pretendem dar seguimento ao estudo nas áreas de exatas (BRASIL, 2002). Consecutivamente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento vigente, nem mesmo descreve o conteúdo, assim como outros conteúdos matemáticos (BRASIL, 2017), deixando uma lacuna quanto à abordagem desse tema e corroborando para a ideia da pouca utilidade, pois, como afirma Amorim (2014):

[...] é necessária uma mudança na prática de ensino desse conteúdo, pois da maneira como ele é transmitido não só pelos profissionais do ensino, mas também pela maneira como se apresenta nos materiais didáticos, transmite ao aluno a ideia de que esse conteúdo não tem qualquer importância e seu estudo para nada serve, pois é totalmente desarticulado da própria matemática (AMORIM, 2014, p. 152).

Essa situação, em que não são previstos conteúdos de relevância à área de matemática, submete o professor e demais atores educacionais a uma posição pouco confortável, pois como é possível abordar conteúdos cujos documentos oficiais pouco exploram ou até mesmo mencionam? Como vão justificar a inclusão desses conteúdos se a documentação oficial trata com superficialidade? E, por consequência, parte dos estudantes da educação básica se forma sem o domínio desses conceitos, podendo ingressar em Instituições de Ensino Superior, levando

consigo um déficit de conteúdos. O pouco contato dos estudantes com esse conteúdo se reflete principalmente nos cursos superiores de Exatas, quando o aperfeiçoamento do conhecimento na área exige o resgate de elementos considerados fundamentais ao avanço nos estudos.

Ao fazer uma sondagem nas ementas dos cursos presenciais de matemática oferecidos pelas sete Universidades Estaduais do Estado do Paraná, observou-se que, dos 14 cursos de licenciatura oferecidos, apenas seis oferecem duas disciplinas obrigatórias, em que o conteúdo dos números complexos está previsto. Em oito desses cursos, tal conteúdo está previsto em uma única disciplina, ou seja, mais da metade dos cursos de licenciatura em matemática oferecidos nesse Estado disponibilizam somente uma disciplina com abordagem do tema, correspondendo a uma parcela pequena quando comparado ao conteúdo de cálculo diferencial e integral, por exemplo, que está vigente em 100% das grades, e levando-se em consideração também o tempo de formação, pois esses cursos têm média de duração de quatro anos.

Averiguando a grade curricular, os cursos de licenciatura aparecem em desvantagem em relação aos cursos de bacharelado, quanto à oferta de conteúdo relacionado às variáveis complexas. Observou-se que, dos cursos de licenciatura, em somente dois tal conteúdo é oferecido em disciplina regular (não optativa). A disciplina em modalidade optativa é oferecida em apenas três universidades. Em contrapartida, de acordo com o Quadro 1, dos quatro cursos de bacharelado em matemática existentes, todos oferecem disciplinas que abordam o tema “variáveis complexas”. Tal situação dá indícios de que poderá haver um despreparo profissional do professor de matemática quanto ao domínio dos elementos que constituem o tema, pois, se o professor em formação não entra em contato com esse conteúdo, como poderá desenvolvê-lo dentro da Educação Básica? E se o professor não detém esse conhecimento, o preparo do estudante que está sendo formado na Educação Básica, quanto a este conteúdo, pode ser limitado ou frustrado. Isso pode se refletir futuramente no fracasso desse estudante ao ingressar na Educação Superior, desencadeando, entre outros problemas, a desmotivação e até mesmo o abandono.

As sete universidades estaduais do Paraná oferecem, juntas, 14 cursos de licenciatura e 4 cursos de bacharelado em Matemática. Os cursos de bacharelado são ofertados na Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Estadual

de Maringá (UEM), Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) e Universidade Estadual do Centro Oeste (UNICENTRO). As demais universidades ofertam somente o curso de licenciatura: Universidade Estadual do Oeste (UNIOESTE), Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP) e Universidade do Paraná (UNESPAR). Ocorre que, ao verificar a grade curricular dos cursos de licenciatura, em uma mesma universidade pode haver diferenças entre a grade curricular dos cursos, variando de acordo com o câmpus à qual o curso pertence.

Quadro 1 – Oferta de disciplina relacionada às variáveis complexas

Curso		Oferta
UEL	Bacharelado – curso único	Sim
UEM	Bacharelado – curso único	Sim
UEPG	Bacharelado – curso único	Sim
UNICENTRO	Bacharelado – curso único	Sim
UEL	Licenciatura – curso único	Não
UEM	Licenciatura – curso único	Sim
UEPG	Licenciatura – curso único	Não
UNIOESTE	Licenciatura – câmpus <i>Cascavel</i>	Sim
	Licenciatura – câmpus <i>Foz do Iguaçu</i>	Não
UNICENTRO	Licenciatura – câmpus Guarapuava	Sim (optativa)
	Licenciatura – câmpus Irati	Sim (optativa)
UENP	Licenciatura – câmpus Jacarezinho	Não
	Licenciatura – câmpus Cornélio Procópio	Sim (optativa)
UNESPAR	Licenciatura – câmpus Apucarana	Não
	Licenciatura – câmpus Campo Mourão	Não
	Licenciatura – câmpus Paranaguá	Não
	Licenciatura – câmpus Paranavaí	Não
	Licenciatura – câmpus União da Vitória	Não

Fonte: autor, baseado nas grades curriculares dos cursos selecionados.

Limitamo-nos a relacionar apenas os cursos de matemática oferecidos por universidades públicas estaduais no Estado do Paraná; dessa forma, não podemos fazer afirmações mais gerais. Observa-se um indício de como se configura a grade curricular dos cursos de licenciatura em matemática oferecidos em âmbito estadual, e a oferta de disciplinas relacionadas aos números complexos e às variáveis complexas. Há ainda que se considerar que foram encontrados Projetos Políticos de Curso anteriores a 2019; algumas universidades já disponibilizaram mais de uma

grade, indicando que o curso está promovendo adequações para atender às Diretrizes Curriculares Nacionais à Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e também à Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação) (2019). Esse movimento de adequação dos cursos de formação de professores indica que ainda poderá haver redução na carga horária destinada aos conceitos de números complexos e também de outras disciplinas e conteúdos de referência, visando atender a novas determinações, como a curricularização da extensão universitária¹.

Outros cursos da área de exatas como: os cursos de Engenharia, Física, Química, por exemplo, também oferecem disciplinas que utilizam números complexos ou funções de variável complexa. E, nesses casos, a lacuna pode ser ainda maior, se o professor responsável por lecionar tais disciplinas, formado em um curso de matemática com esta configuração, teve pouco ou quase nenhum contato com esse conteúdo em seu curso de formação.

A abordagem dos números complexos na Educação Básica é um tema relevante, principalmente quando se conjectura o preparo de estudantes que ingressarão nos cursos superiores da área de Exatas. Não é um conteúdo da matemática pura, visto de forma isolada e sem aplicação, está relacionado com diversos conceitos, especialmente com a trigonometria. Assim, pode ser utilizado em situações da vida cotidiana, em problemas que envolvam divisão, ou uma representação polinomial, relacionando o teorema de Pitágoras ou conceitos da Geometria Euclidiana. De acordo com Fassis e Gadotti (2021), as funções de variável complexa são elementos verdadeiramente importantes e aplicados nas mais diversas áreas do conhecimento, como o processamento de imagens, a dinâmica de fluídos, nas engenharias e diversas outras áreas em que a solução de problemas envolvendo geometria seja abordada. Os problemas mais familiares, explorados em nível básico, são os que tratam de otimização, com enunciados onde se procura obter a maior área construída com certa quantidade de material. Outros problemas, por exemplo, envolvem descobrir o maior perímetro a ser cercado com uma quantidade fixa de arame ou tela.

¹ curricularização da extensão universitária adequa o Projeto Pedagógico de Curso (PPC), visando garantir uma carga horária mínima para ações de extensão, atendendo à Resolução do Conselho Nacional de Educação (Resolução nº 7/2018).

Nesse sentido, a abordagem do tema na educação básica é necessária e relevante. Entretanto, como afirma Amorim (2014, p. 152), a “falta de contextualização e a maneira como eles são abordados” remetem a ideia de que esses conteúdos para pouco servem”. A autora sugere que a utilização de *softwares* como o Geogebra, possibilita construções geométricas que embasam o entendimento do assunto e são também ferramentas motivadoras do estudo. Ao analisar o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) e o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), a autora considera que a forma como esses documentos tratam o assunto é insuficiente para possibilitar ao estudante a apropriação dos conhecimentos mínimos necessário, destacando que o foco está somente na manipulação de resoluções de equações polinomiais, desmerecendo os benefícios da manipulação geométrica.

A experiência de lecionar matemática no nível superior, especialmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), propiciou maior interesse em estudar maneiras variadas de abordagem dessa disciplina, que tantas vezes é vista como “pesada”, devido ao volume de informação, rígidos exercícios algébricos e visualizações geométricas.

Logo, uma ferramenta para maior interação com o conteúdo de funções complexas – proporcionando o acesso aos principais pontos de abordagem desse conteúdo de maneira dinâmica e que promova a inserção desse conteúdo nos mais diversos cursos de exatas, principalmente os cursos de licenciatura em matemática, viabilizando um aperfeiçoamento do estudante – pode ser bem-vinda no processo de ensino e aprendizagem.

As vivências na Educação Básica nos possibilitaram um olhar de maior interesse pelo uso das tecnologias, uma vez que essas ferramentas proporcionam interações, aproximações e a realização de atividades que seriam inviáveis somente com os recursos físicos de uma sala de aula tradicional, sobretudo, com a escassez de material, fato recorrente na educação pública do país. Partimos da premissa de que o uso das tecnologias pode trazer benefícios, quando empregado de maneira planejada, pois a tecnologia por si não resolve os problemas da educação, mas, como afirma Papert (2001), a educação sem tecnologia está condicionada a falhar. As oportunidades de explorar a tecnologia são diversas, como o construcionismo (termo criado por Papert), que sintetiza a teoria de Piaget e alia os recursos tecnológicos viabilizando a construção da aprendizagem por meio de elementos que

sejam significativos para o estudante (PAPERT, 1986, p. 8). A utilização dessas ferramentas tem sido foco de diversas pesquisas nos últimos tempos e o entendimento é que somente o emprego de ferramentas tecnológicas não garante a ascensão da educação a patamares mais elevados de qualidade, a figura do professor também é imprescindível nos ambientes de estudo (FREIRE, 1976; MORAN, 2017; PAPERT, 2001; SOFFNER, 2013).

1.2 Relato da trajetória da pesquisa

O plano inicial desta pesquisa era desenvolver uma ferramenta tecnológica no formato de *software*, que possibilitasse a plotagem gráfica de funções de variável complexa, suas derivadas, integrais e demais elementos que compõem o estudo dos principais rudimentos da Análise Complexa, promovendo maior interação desse tema nos cursos de nível superior. Todavia, deparamo-nos com a dificuldade quanto ao tempo de execução no momento inicial do desenvolvimento. De fato, esses assuntos demandam um conhecimento matemático aprofundado, o que exigiria longas horas de estudo e revisão de conteúdos e, em seguida, a implementação do algoritmo, que por sua vez, também exigiria muitas horas de programação. Dessa forma, foi preciso delimitar o tema e essa delimitação ocorreu após a observância sobre quais tópicos seriam mais relevantes para se implementar na ferramenta a ser desenvolvida.

Fez-se uma análise de alguns livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e Análise Complexa (SPIEGEL, 1973; CHURCHILL, 1975; LIMA, 1989; GUIDORIZZI, 2001; BERNARDES JR.; FERNANDEZ, 2006; SOARES, 2016) e se optou por trabalhar com funções e derivadas de funções complexas, pois são pontos que antecedem ao tema de Integral. A ordem condicionada na maioria dos livros se dá pela abordagem dos seguintes temas: funções, limites, derivadas, séries e somente então integrais. Desse modo, a opção por desenvolver uma ferramenta que abordasse apenas funções e derivadas permitiria ao usuário adentrar em tópicos como o limite de funções, continuidade, pontos singulares, zeros e demais assuntos que poderiam ser investigados com o auxílio da plotagem gráfica desse tipo de função.

Após a análise de livros que abordam o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Complexa, mais especificamente com funções de variável

complexa, surgiu a necessidade de averiguar quais são os *softwares* já existentes e que tipo de interação promovem. Outro ponto necessário de averiguação seria como as pesquisas científicas vêm tratando o tema números complexos e funções complexas e qual a relevância desse tema às pesquisas científicas e como o uso de recurso de tecnologia tem ganhado espaço nas aulas de matemática dos diversos níveis de ensino. Para tanto, elaborou-se um levantamento de dados sobre o estado da arte relacionado ao tema: *softwares*, números complexos e funções complexas. Esse levantamento levou em consideração apenas bases de dados científicas sem a restrição de período de publicação.

Um dos resultados do levantamento revela que são poucos os trabalhos que utilizam *software* para plotagem gráfica de números e funções complexas e a maioria das representações dos elementos relativos ao conjunto dos números complexos se resume ao plano de Argand-Gauss. Esse tipo de representação se limita à representação dos elementos do conjunto dos números complexos por um plano cartesiano, podendo ser um desafio para o estudante, pois, via de regra, há confusão na tentativa de se fazer relação entre as funções de variável complexa e as funções de variável real. Poucos foram os trabalhos que apresentam uma representação diferente da abordagem com o plano de Argand- Gauss. Dos poucos trabalhos que apresentam tipos diferentes de abordagem, destaca-se o de Silva (2006). Nesta pesquisa, o autor desenvolve um *software* de plotagem gráfica para representação de funções de variável complexa utilizando uma paleta de cores. Essa paleta de cores, elaborada por Thaller (2000), possibilita que um plano cartesiano possa representar um número complexo de maneira bidimensional permitindo uma maior visualização do resultado, já que adota elementos coloridos.

A lacuna da impossibilidade de visualizar o gráfico de uma função complexa mobilizou Silva (2006) no desenvolvimento de um *software* que facilitasse a visualização do gráfico de funções de uma variável complexa, por meio do domínio de cores. De acordo com o autor, o conceito pode ser abstrato aos estudantes, mesmo assim, é possível representá-lo de uma forma gráfica.

Motivado pela interação promovida por esse *software*, iniciou-se o desenvolvimento de um recurso tecnológico, baseado nas ideias de Silva (2006), para a representação de elementos e conteúdos relacionados aos elementos de Análise Complexa, com respaldo teórico no domínio de cores. Sendo assim, o resultado da construção da ferramenta tecnológica foi uma tentativa de produzir um

software baseado no *software* FC-Funções Complexas, implementando atualizações à abordagem de elementos da Análise Complexa, partindo-se da seguinte indagação: qual a relevância das ferramentas gráficas na representação de funções de variável complexa?

Considera-se aqui, que essas ferramentas gráficas, nomeadas aplicativos, *software* ou aplicações, possibilitem a plotagem gráfica de funções de variável complexa e com intenção de viabilizar uma maior interação do usuário com o conteúdo apresentado. A presente pesquisa descreve o desenvolvimento de uma ferramenta tecnológica, que sintetiza atributos, na expectativa de que proporcionem maior dinamicidade às aulas de matemática, principalmente as aulas que seguem os padrões tradicionais de ensino e ocorrem de forma monótona, cujo educador é detentor do conhecimento e o aprendiz passivo, e não se leva em conta os conhecimentos prévios dos educandos, tão pouco se considera discutir a sociedade do século 21 e suas transformações impulsionadas pelos avanços em tecnologia.

1.3 Organização da tese

Esta tese está organizada em cinco capítulos. O Capítulo 2 apresenta uma revisão de literatura sobre o tema “A matemática e as tecnologias”. No Capítulo 3, apresentamos um levantamento bibliográfico, a partir de trabalhos acadêmicos em bancos de dados de artigos, teses e dissertações. Apresentamos também uma breve descrição dos trabalhos e uma análise dos pontos negativos e positivos considerados mais relevantes pelas pesquisas selecionadas. O Capítulo 4 traz os pontos principais no desenvolvimento do *software*; algumas características são descritas na intenção de promover a ferramenta e também é feita uma análise do *software* e das dificuldades no seu desenvolvimento. Uma sequência didática é também apresentada neste capítulo. Por fim, o Capítulo 5 traz as últimas considerações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa intencionou desenvolver recursos de tecnologia como instrumento educacional à abordagem do conjunto dos números complexos, funções e derivadas complexas. O desenvolvimento de uma ferramenta, como um *software*, é uma ação que leva tempo e exige do desenvolvedor conhecimento e interesse pela área a que está relacionada. Embora os avanços tecnológicos tenham se acentuado recorrentemente, há uma necessidade de que as pessoas detenham domínio sobre as ferramentas de tecnologia para utilizá-las de forma eficaz e adequá-las às suas realidades. O desenvolvimento de *softwares* específicos para abordagem de assuntos em sala de aula ainda parece ser um pouco distante da realidade do professor; dessa forma, é importante ressaltar que, em países como o Brasil, onde o investimento em educação é escasso, faz-se demasiadamente importante rever as ferramentas que os discentes e docentes dispõem para suas aulas. O desenvolvimento do *software* apresentado possibilitou o alcance do objetivo proposto, permitindo a reflexão sobre a responsabilidade e as ações do professor diante da sociedade e da turma com a qual está lecionando. Nesse sentido, pudemos ultrapassar tais objetivos traçados, no sentido de apresentar alguma reflexão sobre a importância do professor frente ao uso de tecnologia e sua importância aos avanços da sociedade na direção da igualdade entre os sujeitos.

Na Educação Básica, o professor passa cerca de um ano lecionando para a mesma turma, assim, entende-se que ele tem maior dimensão das necessidades e dos anseios de cada estudante e, se ele for capacitado ao desenvolvimento ou à habilidade de manuseio de *softwares*, pode ter mais chances de melhorar sua didática, criando oportunidades para aproximar o estudante do aprendizado tecnológico, proporcionando interações e um melhor preparo, para que este sujeito possa exercer com maior habilidade sua responsabilidade cidadã.

Promover ações diversificadas, como a proposição de um *software*, dão indícios aos estudantes da dimensão que essas ferramentas podem alcançar e de que há possibilidades de viabilizar ações globais como, a produção de um *software* que faça consultas públicas, para que se possa aumentar a participação coletiva em assuntos políticos, que são decididos apenas por uma pequena classe, ou explorar a matemática financeira praticada pelas instituições bancárias e inferir sobre os impactos sociais dessa prática.

Ao incentivar a manipulação e o desenvolvimento de novas tecnologias, o professor pode melhor visualizar as mazelas às quais aquele estudante está sujeito, entender melhor as dificuldades que este enfrenta e lhe propor novos desafios. Entretanto, se o professor não está preparado para promover ações com o uso de tecnologia, motivando o estudante a enfrentar novos desafios, tampouco o estudante poderá, por si, conseguir extrapolar os conceitos que lhe são ensinados e colocá-los em ação na transformação de uma sociedade justa e igualitária. A promoção e o uso de tecnologias nos ambientes de aprendizagem podem produzir, de muitas formas, efeitos benéficos na sociedade. Apenas partindo de um melhor entendimento de como é o funcionamento das redes sociais e de toda a matemática por trás de pequenas ações ali realizadas, é possível permitir que o cidadão tenha um melhor entendimento dessa avalanche tecnológica que invade seu cotidiano.

Ao lançar um olhar sobre os *softwares* voltados à abordagem de funções e números complexos, observou-se que *softwares* de geometria dinâmica, em especial o Geogebra, são os que mais figuram nas pesquisas com essa temática. Observou-se que o plano de Argand-Gauss é o meio mais utilizado para representar gráficos de funções e números complexos, inferindo-se que, por se tratar de uma representação cartesiana, seja uma maneira mais circunjacente à representação de funções, por ser um conceito mais revisto nas escolas. Nesse sentido, as pesquisas – objetos de análise deste trabalho – apontam que há certa relevância na utilização de *softwares* de plotagem gráfica nos ambientes de aprendizado de funções, em especial funções complexas.

Destaca-se, ainda, que a valorização dos elementos gráficos que compõem o tema números e funções complexas é pertinente na abordagem, representando um contraponto em relação às tentativas de ensino embasadas apenas na apresentação do conteúdo pelo método baseado na representação algébrica e cálculos envolvendo equações. Nesse ponto, o *software* desenvolvido tem um diferencial, ao proporcionar a plotagem gráfica por meio de elementos tridimensionais e bidimensionais, de maneira interativa e intuitiva, podendo motivar o usuário, estudante ou professor, a fazer inferências e atribuir maior significado aos diversos fenômenos estudados.

O conjunto dos números complexos é um assunto com pouco destaque na educação básica e, por vezes, deixado para outro momento. A utilização de *software* de plotagem gráfica, entretanto, pode trazer à tona o aprendizado desses conceitos

que são, por vezes, considerados muito avançados. A produção de um *software* que facilite a visualização de elementos gráficos de funções de variáveis complexas, com aporte da paleta de cores e de um Panorama Analítico pode, por exemplo, oportunizar também avanços em pesquisas tecnológicas, não só na área educacional, possibilitando um melhor ajuizar da realidade da sala de aula e também da realidade e das necessidades científicas, promovendo aportes metodológicos e gerando novas formas de ensino e aprendizado. Logo, acredita-se que este trabalho pode contribuir com a área de ensino da matemática, principalmente quanto à reflexão sobre temas que por vezes são pouco explorados, como o conjunto dos números complexos e sua importância para a formação fundamentada do estudante.

Não é pretensão deste trabalho propor como tarefa do professor o desenvolvimento de ferramentas de tecnologia. O entendimento está no fato de que o professor é conhecedor da realidade cognitiva de seus estudantes e por ter domínio de sua área de conhecimento; portanto, o incentivo para que o professor possa desenvolver ferramentas de tecnologia é substancial para agregar de forma positiva elementos de tecnologia na Educação Básica. Isso, entretanto, só pode ocorrer se houver a valorização do professor e de sua mão de obra. É preciso valorizar a capacitação, a melhoria do salário, o tempo de preparo de sua atividade e prover subsídios para o material didático.

Entende-se que o desenvolvimento da ferramenta aqui apresentada enfrentou desafios não esperados, comprometendo o alcance das ações pretendidas. Identificamos como limitações deste trabalho a não aplicação em sala de aula, na intenção de compreender se a ferramenta apresenta um bom leiaute e boa interação entre os recursos implementados. Seria importante ouvir a impressão de professores e também de estudantes quanto à utilização do *software*. Uma avaliação da ergonomia e a validação seriam essenciais à difusão imediata do *software*, entretanto, esses feitos não foram realizados. Pretende-se que esta ferramenta seja disponibilizada, de forma gratuita, via página profissional em provedores das universidades que participaram desta pesquisa. Dessa forma, surge um novo desafio: viabilizar a capacitação para manipulação do *software*. Essa capacitação poderá ocorrer pela disponibilização de vídeos instrutivos e fóruns de discussão digital. É importante também a composição de um material instrucional quanto aos recursos e ao ferramental disponíveis no *software* para melhor interação dos

interessados. Esses pontos aqui destacados ficarão para ações futuras, destacando a possibilidade de realização de pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, Anderson Fernandes de. **O pensamento de Paulo Freire sobre a tecnologia**: traçando novas perspectivas. V Colóquio Internacional Paulo Freire – Recife, 19 a 22-setembro 2005. Disponível em: https://www.academia.edu/download/57194406/O_PENSAMENTO_DE_PAULO_FREIRE_SOBRE_A_TECNOLOGIA_TR.pdf. Acesso em: 23 ago. 2022.
- ALVES, Francisco Régis Vieira. Engenharia didática para o ensino de variável complexa: visualização de conceitos relacionados ao processo matemático de integração. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 11, n. 2, p. 3-29, 2018. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6812491>. Acesso em: 17 mar. 2022.
- ALVES, Francisco Regis Vieira. Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): A Proposal for Historical Research in Brazil on Recurring Number Sequences. **The Mathematics Enthusiast**, v. 19, n. 1, p. 239-274, 2022. Disponível em: <https://search.proquest.com/openview/710e516e6f5d5ae21bd10709f433b3af/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2030106>. Acesso em: 22 jan. 2023.
- ALVES, Francisco Regis Vieira; ROMEU, Mairton Cavalcante. Análise visual complexa: gráficos e diferenciabilidade de funções. **Revista Thema**, v. 14, n. 4, p. 114-127, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/555>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- ALVES, Francisco Regis Vieira; MARINHO, Monique Rafaela Monteiro. Engenharia Didática no contexto da Transição Complexa do Cálculo-TCC: o caso da série de Laurent. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 12, n. 2, p. 1-28, 2017. Disponível em: <http://www.scielo.org.ar/pdf/reiec/v12n2/v12n2a05.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2023.
- AMORIM, Tânia Mara. **O estudo dos números complexos no ensino médio: uma abordagem com a utilização do Geogebra**. 2014. Dissertação. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4475>. Acesso em: 29 jan. 2023.
- AZEVEDO, Pablo Vinicius Almeida. **As Superfícies de Costa Triplamente Periódicas**. 2009. Universidade Federal do ABC. Dissertação. Disponível em: http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=6235. Acesso em: 23 mar. 2023.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.
- BELTRÃO, Isabel do Socorro Lobato; VÍTOR, Cláudio Barros; DOS SANTOS BARBOSA, Irecê. Software Geogebra: uma ferramenta na prática docente para o ensino dos números complexos no ensino médio. **Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, v. 3, n. 05, 2017.

BERNARDES JR., Nilson da Costa; FERNANDEZ, Cecília de Souza – **Introdução às Funções de Variáveis Complexas**. Coleção Textos Universitários, Publicação SBM, Rio de Janeiro, 2006.

BICHO, Alessandro de Lima; SILVEIRA, Luiz Gonzaga Junior; CRUZ, Adailton José Alves; RAPOSO, Alberto Barbosa. Programação gráfica 3D com OpenGL, Open Inventor e Java 3D. **Revista Eletrônica de Iniciação Científica – REIC**. 2002. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/2938>. Acesso em: 3 de mar 2022.

BITENCOURT, Lopes Agner; VARGAS, Paulo Roberto; FELICETTI, Vera Lucia. Uma proposta pedagógica: usando o software Geogebra na rotação vectores complexos. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 11, n. 21, p. 5-15, 2014. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5893184>. Acesso em: 12 dez. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira Versão. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 23 set. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2). Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 22 ago. 2022.

BRASIL. Resolução CNE/CP n.2, de 20 de dezembro de 2019. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação)**, 2019b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file>. Acesso em: 12 dez. 2023.

CAMPOS, Fernanda; CAMPOS, Gilda; ROCHA, Ana Regina. **Dez etapas para o desenvolvimento de software educacional do tipo hipermídia**. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA. Barranquilla. Colômbia. 1996. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Gilda-Campos/publication/228724840_Dez_etapas_para_o_desenvolvimento_de_software_educacional_do_tipo_hipermidia/links/0c9605179390c760e4000000/Dez-etapas-para-o-desenvolvimento-de-software-educacional-do-tipo-hipermidia.pdf. Acesso em: 2 jan. 2024.

CHURCHILL, Ruel Vance. **Variáveis complexas e suas aplicações**. Tradução: Tadaí Yoshika; Revisão técnica: Alfredo Alves de Farias. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

EDUMATEC (Educação Matemática e Tecnologia Informática). **Softwares**. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/softwares/softwares_index.php. Acesso em: 18 ago. 2022.

EMBARCADERO. Embarcadero Tecnologias: Delphi11.2. Disponível em: <https://www.embarcadero.com/br/products/delphi>. Acesso em: 25 de set. de 2022.

FASSIS, Maria Júlia; GADOTTI, Marta Cilene. **Funções complexas**: uma abordagem geométrica. CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 2021. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/245>. Acesso em: 12 dez. 2022.

FREIRE, Paulo. **A Educação na Cidade**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

FREIRE, Paulo. **Educação e Mudança**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 81. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2022.

GARCIA, Fernando Oliveira; Filho, Moacir Pereira de Souza; Souza, Aguinaldo Robinson de; Marques, Emília de Mendonça Rosa. O GeoGebra na experimentação matemática: um levantamento bibliográfico em periódicos indexados na plataforma da capes. **Tecné, Episteme y Didaxis**: TED, (50), 221236, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.17227/ted.num50-10582>. Acesso em: 2 mar. 2023.

GERMANO, José Gleisson da Costa. **Uma proposta de abordagem dos Números Complexos com o uso do Geogebra**. 2016. 132f. 2016. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/21536>. Acesso em: 2 mar. 2023.

GOMES, Julia Alves; BOURSCHELD, Jacinta Lourdes Weber. **Utilização de aplicativos educacionais como recurso didático-pedagógico durante os processos de alfabetização e letramento**. Curso de Especialização em Linguagens e Tecnologias em Educação do Instituto Federal Sul-rio-grandense, Campus Passo Fundo, na cidade de Passo Fundo, 2017. Disponível em: <https://painel.passofundo.ifsul.edu.br/uploads/arq/201807021803311579237863.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2022.

GRAVINA, Maria Alice; CONTIERO, Lucas de Oliveira. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?. **RENOTE**, v. 9, n. 1, 2011. Disponível em: <https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/21917>. Acesso em: 2 dez 2022.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo**. v. 2 e 3. LTC, 2001.

INAFUCO, Julio K. **As equações algébricas no ensino médio: um estudo de uma sequência didática utilizando software gráfico**. 2006. Dissertação. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/89445>. Acesso em: 12 dez. 2022.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Vol. 2. Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1989.

MAGARINUS, Renata. **Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem**. Universidade Federal de Santa Maria - Centro de Ciências Naturais e Exatas. Santa Maria – RS, 2013 Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10933/MAGARINUS%2C%20RENATA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 14 ago. 2022.

MARINHO, Monique Rafaela Monteiro; ALVES, Francisco Regis Vieira. Estudo da série de Laurent com recurso ao Geogebra: contributo da Engenharia Didática. **Indagatio Didactica**, v. 8, n. 5, p. 165-196, 2016. Disponível em: <https://proa.ua.pt/index.php/id/article/view/2497>. Acesso em: 14 dez. 2022.

MARINHO, João Jefferson Faria; SANTOS, Raphael Francisco Gomes dos; MARTINO, Luciana Santos da Silva. Construção do Aerofólio de Joukowski Assimétrico por meio da Transformação de Karman-Trefftz, para $n=2$, utilizando o GeoGebra 5.0. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 2, p. e4001-e4001, 2020.

MENDES JÚNIOR, Daniel de Carvalho. **Uma nova abordagem dos complexos para o Ensino Médio**: o estudo dos fractais e do caos na composição do conjunto preenchido de Julia e o conjunto de Mandelbrot. 2017. 109 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. Disponível em: <https://bit.ly/38YiXv0>. Acesso em: 20 abr. 2022.

MORAN, José Manuel. **Tecnologias digitais para uma aprendizagem ativa e inovadora**. MORAN, José. A Educação que Desejamos: novos desafios e como chegar lá, v. 5, p. 1-232, 2017. Papirus, 5. ed, cap. 4. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2017/11/tecnologias_moran.pdf. Acesso em: 15 ago. 2022.

NUNES, Euderley de Castro. **A esfera de Riemann**: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio. 2015. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/4247>. Acesso em: 12 dez. 2022.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. **Números Complexos**: Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. 2010. Dissertação Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/handle/handle/11449>. Acesso em: 23 mar. 2023.

OLIVEIRA, Fabio Luiz de. **A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias**. 2017. Dissertação. Disponível em:

https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/10023/1/LIVRO_Produ%C3%A7%C3%A3oConhecimentoMatem%C3%A1tico.pdf. Acesso em: 22 fev. 2023.

OLIVEIRA, Thúlio José de. **Sobre números complexos e abordagens no ensino médio**. 2020. Dissertação. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/27748>. Acesso em: 12 dez. 2023.

PAPERT, Seymour. **LOGO: Computadores e Educação**. São Paulo: Brasiliense, 1986.

PAPERT, Seymour. **Education for the knowledge society: a Russia-oriented perspective on technology and school**. IITE Newsletter. UNESCO, Nº 1, janeiro-março 2001.

PASSOS, Marinez Meneghello; NARDI, Roberto; ARRUDA, Sergio de Mello. **A Formação de Professores: uma revisão das últimas décadas em revistas brasileiras da área de Educação Matemática**. Ensino de Ciência e Matemática I: temas sobre formação de professores. São Paulo: Cultura Acadêmica, p. 193-207, 2009. Disponível em: <https://books.scielo.org/id/g5q2h/pdf/nardi-9788579830044-13.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2023.

PAULO, Rafael dos Reis. **Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos**. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pelotas. Disponível em: <https://repositorio.ufpel.edu.br/handle/prefix/4585>. Acesso em: 5 dez. 2023.

PEREIRA, Elaine Veloso Fernandes. **Sobre números escritos como soma de dois quadrados e uma atividade de ensino que relaciona ternos pitagóricos e números complexos**. 2021. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/13174>. Acesso em: 15 out. 2023.

PEREIRA, Gabriela Gimenes. **Uma proposta didática para o ensino de funções de variável complexa no ensino médio usando planilha eletrônica**. 2017. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/7755>. Acesso em: 15 out. 2022.

REIS, Márcio Vaiz dos. **Conjunto de Mandelbrot**. 2016. Dissertação de mestrado. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/6343/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20M%C3%A1rcio%20Vaiz%20dos%20Reis%20-%202016.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2023.

ROSSINI, Gustavo Feltrin. **Grafos e seu polinômio característico**. 2017. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/13500>. Acesso em: 15 out. 2023.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do aluno: 3.^a série do Ensino Médio, Matemática**. São Paulo: SEE, 2014.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática – Ensino Fundamental II e Ensino Médio**. São Paulo, SEE: 2010.

SANTOS, Laudo Claumir. **Funções complexas de uma variável complexa**: uma abordagem via software Mathematica. 1998. Dissertação. [sn]. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=502551>. Acesso em: 23 mar. 2023.

SILVA, Edvaldo Lima da. **Construção e Validação de um Objeto Tecnológico de Aprendizagem em Matemática para Funções de uma Variável Complexa**. 126 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita Filho, 2006. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/BibliotecaVirtual/DetalhaDocumentoAction.do?idDocumento=12#>. Acesso em: 25 set. 2022.

SILVA, Gersonilo Oliveira da. **Instabilidade e bifurcação num problema de $N+1$ corpos**. 2011. Tese. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/7137>. Acesso em: 13 nov. 2022.

SILVA, José Marcos da. **O ensino do conteúdo Funções na escola de Ensino Médio José Paulo de França da cidade de Mari – PB**: o que dizem os professores? Universidade Aberta do Brasil Centro de Ciências Exatas da Natureza. Mari- PB 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/773/1/JMS26082014.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2022.

SILVA, Marcos. **Sala de aula interativa**: a educação presencial e a distância em sintonia com a era digital e com a cidadania. Rio de Janeiro: Quartec. 2001. Disponível em: <http://www.portcom.intercom.org.br/pdfs/80725539872289892038323523789435604834.pdf>. Acesso em: 16 ago. 2022.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Matemática é difícil**: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002, Caxambu. Anais... ANPED, 2002. Disponível em: http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf. Acesso em: 2 jan. 2024.

SOARES, Márcio Gomes. **Cálculo em uma Variável Complexa**. Coleção Matemática Universitária. Publicação IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

SOFFNER, Renato. **Tecnologia e educação: um diálogo Freire – Papert**. Centro de Educação – UFPE. Revista Tópicos Educacionais - UFPE, Recife, v.19, n.1, jan/jun. 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/topicoseducacionais/article/viewFile/22353/18549#:~:text=Para%20Freire%2C%20o%20emprego%20da,%2C%20inicialmente%2C%20imbu%C3%ADdo%20de%20ideologia>. Acesso em: 24 ago. 2022.

SOUSA, Adriana Santos; SANT'ANA, Claudinei de Camargo. **Formação de professores e a inserção de recursos didáticos digitais nas aulas de**