

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS  
CÂMPUS DE RIO CLARO**

**ELAINE CAIRE**

**A HISTÓRIA DA ORIGEM DA CURVA NORMAL**

**Dissertação de mestrado  
apresentada ao Instituto de  
Geociências e Ciências Exatas  
do Campus de Rio Claro, da  
Universidade Estadual  
Paulista Júlio de Mesquita  
Filho, como parte dos  
requisitos para obtenção do  
título de Mestre em Educação  
Matemática.**

**Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira**

**RIO CLARO  
2013**

510.09 Caire, Elaine  
C136h A história da origem da curva normal / Elaine Caire. - Rio  
Claro, 2013  
108 f. : il., figs., gráfs., forms.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Marcos Vieira Teixeira

1. Matemática - História. 2. História da matemática. I.  
Título.

**ELAINE CAIRE**

**A HISTÓRIA DA ORIGEM DA CURVA NORMAL**

**Dissertação de Mestrado  
apresentada ao Instituto de  
Geociências e Ciências Exatas do  
Campus de Rio Claro, da  
Universidade Estadual Paulista  
Júlio de Mesquita Filho, como  
parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em  
Educação Matemática.**

**Comissão Examinadora**

-----  
**Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira**

-----  
**Prof. Dr. Antonio Carlos Simões Pião**

-----  
**Prof. Dr. César Ricardo Peon Martins**

**Rio Claro , 19 de setembro de 2013**

*Aos meus pais pela oportunidade  
que me deram de viver, de amar,  
de evoluir...*

*Ao Papai que me ensinou meus  
primeiros problemas matemáticos de  
“toca” quando ainda eu mal balbuciava  
palavras, mas já contava patas de bichos...  
Saudades...*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Força que nos guia para o Bem Maior, Deus, agradeço a meus pais, pelo incentivo e exemplos de dedicação e persistência. Aos meus filhos e familiares pela aceitação, paciência. Ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira pela paciência, sapiência em me mostrar melhores caminhos. Ao Prof. Dr. Antonio Carlos Pião, Prof. Dr. Sérgio Nobre e Prof. Dr. César Ricardo Peon Martins pelas preciosas observações e orientações.

A todos amigos e colegas que me impulsionaram mesmo nos momentos mais difíceis que passei na elaboração deste trabalho quando perdi (por algum tempo...) meu maior incentivador e amigo, meu PAI.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	8
<b>CAPÍTULO I</b>	
O SIGNIFICADO DA CURVA NORMAL OU CURVA EM FORMA DE SINO	15
<b>CAPÍTULO II</b>	
ARTIGO <i>HISTORICAL NOTE ON THE NORMAL CURVE OF ERRORS</i>	20
CORRESPONDÊNCIAS ENTRE KARL PEARSON E R.C.ARCHIBALD	24
NOTAS:Biografia James Stirling, Karl Pearson e Raymond Claire Archibald	26
<b>CAPÍTULO III</b>	
BIOGRAFIA ABRAHAM DE MOIVRE	31
<i>MISCELLANEA ANALYTICA</i> E SUPLEMENTOS.	33
ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES <i>MISCELLANEA ANALYTICA</i> E SUPLEMENTO <i>APPROXIMATIO AD SUMMAM TERMINORUM BINOMII <math>(a + b)^n</math> IN SERIEM EXPANSI</i>	35
<b>CAPÍTULO IV</b>	
CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	76
<b>ANEXO I</b> TRADUÇÃO <i>APPROXIMATIO AD SUMMAM TERMINORUM BINOMII <math>(a + b)^n</math> IN SERIEM EXPANSI</i>	78
<b>ANEXO II</b> ARS CONJECTANDI LEI DOS GRANDES NÚMEROS	88
<b>ANEXO III</b> DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL	93
<b>ANEXO IV</b> DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA	94
<b>ANEXO V</b> TEOREMA DE BAYES	95
<b>ANEXO VI</b> MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	96
<b>ANEXO VII</b> DEDUÇÃO FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE	98
<b>ANEXO VIII</b> CARTAS TROCADAS ENTRE ARCHIBALD E PEARSON	103

## RESUMO

Esta investigação tem como objetivo a história da origem da curva normal identificando a contribuição de Abraham de Moivre na dedução da fórmula para a função densidade de distribuição normal.

Serão analisados trechos de obras originais de Abraham de Moivre, Jacob Bernoulli, James Stirling.

**Palavras-chave:** Curva Normal. História da Matemática.

## **ABSTRACT**

This research aims at the history of the origin of the normal curve identifying the contribution of Abraham de Moivre in deducing the formula for the density function of normal distribution.

Parts of original works of Abraham de Moivre, Jacob Bernoulli, James Stirling will be analysed.

**Keywords:** Normal Curve. History of Mathematics.

## INTRODUÇÃO

### A CURVA NORMAL

Nos séculos XVIII e XIX, matemáticos e físicos desenvolveram uma função densidade de probabilidade que descrevia bem os erros experimentais obtidos em medidas físicas. Nas ciências de observação e experimentais, todos os resultados da observação estão sujeitos a erros. A imperfeição de nossos sentidos, dos instrumentos utilizados, variações de tempo são, entre outras, causas de erros. Essa função densidade de probabilidade resultou na bem conhecida curva em forma de sino, chamada de distribuição normal ou gaussiana. Essa distribuição fornece uma boa aproximação de curvas de frequência para medidas de dimensões e características humanas.

Os primeiros matemáticos consideravam a distribuição apenas como uma aproximação conveniente para a distribuição binomial, que constitui um modelo probabilístico resultante do binômio de Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 de janeiro de 1643-Londres, 31 de março de 1727) físico e matemático inglês.

No início do século XIX uma maior valorização de sua importância apareceu com os trabalhos de Pierre Simon Laplace ( Beaumonte-em-Auge, 23 de março de 1749- Paris, 5 de março de 1827) matemático, astrônomo e físico francês e Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de abril de 1777- Göttingen, 23 de fevereiro de 1855) matemático, astrônomo e físico alemão. A distribuição normal tornou-se amplamente aceita como base em muitos trabalhos estatísticos, principalmente em astronomia. A distribuição normal pode ser usada como aproximação para outras distribuições.

A primeira publicação da distribuição normal (como uma aproximação da distribuição binomial) apareceu em um panfleto datado de 12 de novembro de 1733. O panfleto estava em latim; em 1738, Abraham de Moivre (Vitry-le-François, Champanhe, França, 26 de maio de 1667- Londres, 27 de novembro de 1754) publicou em *The Doctrine of Chances* (2ª edição) a tradução para o inglês .

Em 1774 (Determiner l'ê milieu que l'on doit prendre entre trois observations données d'un même phénoméné, *Mémoires de Mathématique et Physique présentées à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans*) Laplace obteve a distribuição normal como uma aproximação da distribuição hipergeométrica e quatro anos mais tarde ele dispôs em tabelas a probabilidade integral.

Os trabalhos de Gauss em 1809 (*Theoria Motus Corporum Coelestium*) e em 1816 (*Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Zeitschrift Astronomi*) estabeleceram técnicas baseadas na distribuição normal que tornaram-se métodos padrões usados no século XIX. Os argumentos teóricos usados na distribuição normal eram baseados no Teorema Central do Limite.

A Curva Normal é a forma gráfica de uma função de probabilidade  $f(x)$  dada por uma função específica resultante do binômio de Newton  $(p+q)^n$  onde  $p=q=1/2$  com  $n$  infinitamente grande. Um caso especial do referido binômio.

Entende-se por distribuição normal, a curva perfeitamente simétrica de variáveis contínuas oriunda do desenvolvimento do binômio de Newton, desde que  $p=q=1/2$  e com potência alta.

Lembrando Binômio de Newton:

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &= 1 \\ (1+x)^1 &= 1+x \\ (1+x)^2 &= 1+2x+x^2 \\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3 \\ (1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 \\ (1+x)^5 &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Figura retirada de <http://www.mathpages.com/home/kmath642/kmath642.htm> acesso em 25/05/2012

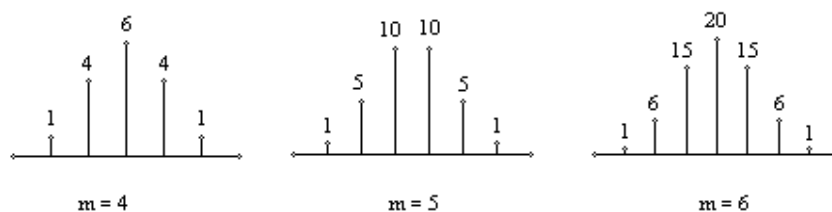


Figura retirada de <http://www.mathpages.com/home/kmath642/kmath642.htm> acesso em 25/05/2012

Como Anexo no final desse trabalho há uma demonstração da função densidade de probabilidade baseada nas observações de Moivre a respeito dos coeficientes do binômio de Newton que resultaram e influenciaram seu trabalho em relação à curva normal.

## PARÂMETROS DA CURVA NORMAL

A equação da curva normal baseia-se em dois parâmetros: a média e o desvio padrão que definem uma determinada população, com uma característica qualquer.

## PROPRIEDADES DA CURVA NORMAL

- 1) A curva é uma função de  $x$ , e o seu domínio estende-se de  $-\infty$  a  $+\infty$
- 2) A curva é assintótica; nunca tocar o eixo horizontal, e portanto a função de  $x$  jamais se anula.
- 3) A área compreendida pela curva nesse intervalo é exatamente igual a 1
- 4) A função tem um máximo, que corresponde ao seu ponto médio, ou seja, à média da distribuição.
- 5) A distribuição é simétrica em torno da média.
- 6) A curva tem dois pontos de inflexão, simétricos em relação à média. Esses pontos de inflexão são desvio padrão da distribuição normal.

Após trabalhos de ilustres matemáticos a função densidade de probabilidade é estudada atualmente considerando uma variável aleatória contínua  $X$ , que assuma valores entre  $-\infty < x < \infty$ , temos uma distribuição normal se a função densidade de probabilidade for dada por:

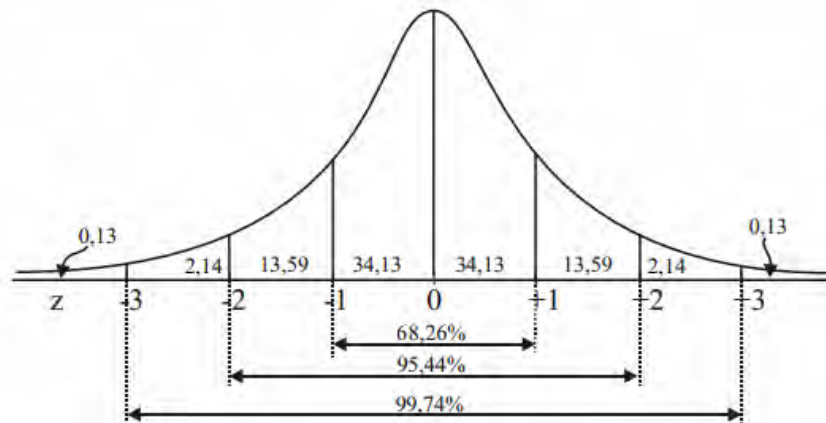
$$f(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} \right) \cdot e^{\left( -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)}$$

para  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$  e  $\sigma^2 > 0$

Onde  $\mu$ , **média** da população, e  $\sigma$ , **desvio padrão**, são parâmetros que especificam completamente uma distribuição normal. Uma forma resumida de dizer que a variável  $X$  tem distribuição normal é  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Exemplo de curva normal com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$

$$f(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \right) \cdot e^{\left( -\frac{x^2}{2} \right)}$$



Curva Normal com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$

Figura retirada site <http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf> acesso em 20/05/2013

A média posiciona o centro, enquanto o desvio-padrão fornece o grau de dispersão.

A média é o ponto da curva normal onde a primeira derivada de sua equação é igual a zero e o desvio padrão os dois pontos de inflexão dessa curva, ou seja, onde a sua segunda

derivada é igual a zero. Verifica-se derivando a equação

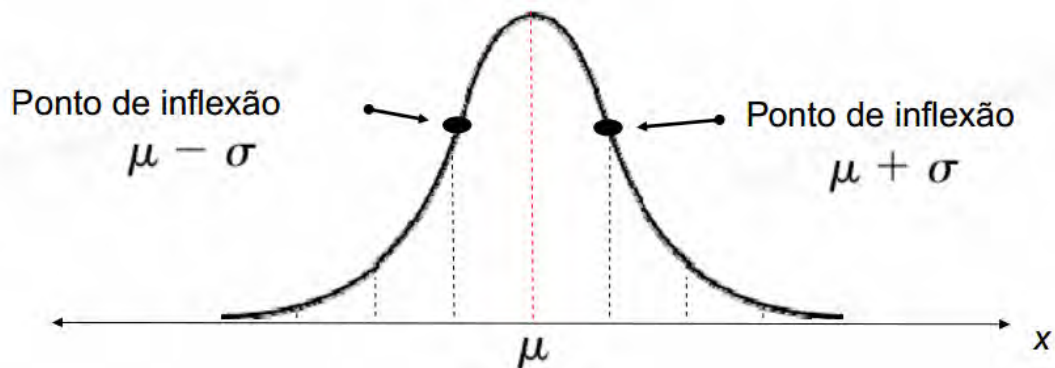
$$f(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \cdot e^{\left( -\frac{x^2}{2} \right)}$$


Figura retirada do site [http://www.gpcmb.ufma.br/steimacher/estat/Aula8-Cap\\_05.pdf](http://www.gpcmb.ufma.br/steimacher/estat/Aula8-Cap_05.pdf) acesso em 25/06/2013

Os pontos onde a curvatura muda são chamados pontos de inflexão, ou seja, o gráfico curva-se para baixo entre os pontos de inflexão e para cima à direita e à esquerda.

A área abaixo da curva entre dois valores da variável  $x$  representa a probabilidade para variáveis contínuas.

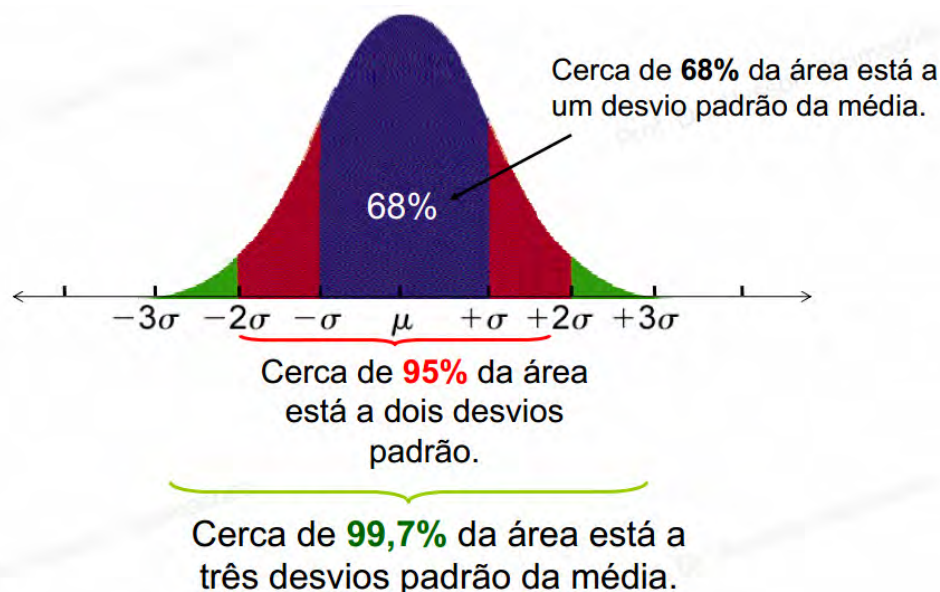


Figura retirada do site [http://www.gpcmb.ufma.br/steimacher/estat/Aula8-Cap\\_05.pdf](http://www.gpcmb.ufma.br/steimacher/estat/Aula8-Cap_05.pdf) acesso em 25/06/2013

Então a função de distribuição de probabilidade normal é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

## A POLÊMICA SOBRE A ORIGEM DA CURVA NORMAL

Um artigo de Karl Pearson (Londres, 27 de Março de 1857 - 27 de Abril de 1936) *Historical Note on the Original of the Normal Curve of Errors* editado em sua revista *Biometrika* questionava a origem e a história da curva normal.

Até então a descoberta da Curva Normal era atribuída erroneamente a Gauss no século XIX.. Essa atribuição, segundo Pearson, é devido a uma referência que Laplace fez a Gauss em *Théorie Analytique des Probabilités* publicado em 1812.

A maior importância sobre os trabalhos que levaram à função densidade de probabilidade era então atribuída aos trabalhos de Gauss e Laplace.

De fato, em seu *History of The Theory of Probability* no artigo 324, Isaac Todhunter (Rye, 23 de novembro de 1820-Cambridge, 1 de março de 1884) matemático do Reino Unido. somente cita o panfleto *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem*

*expansi* ,inserido em *The Doctrine of Chances* (1738), dizendo que Moivre tinha mostrado apenas para os amigos e não dá maior importância para o fato.

Pearson dá créditos a Abraham de Moivre a ser o primeiro a desenvolver a fórmula da “curva normal”, pois tal panfleto teria sido encontrado como um suplemento, denominado *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi* ,datado de 12 de novembro de 1733, de *Miscellanea Analytica* ,editado por Moivre em 1730.

Nesse suplemento, Pearson encontrou o primeiro tratamento conhecido dado à probabilidade integral e essencialmente à curva normal. Esse suplemento, embora datado de 12 de novembro de 1733, foi adicionado somente a algumas cópias de *Miscellanea Analytica* de Abraham de Moivre editado em 1730 e portanto somente poucos exemplares conhecidos atualmente de *Miscellanea Analytica* contém esse suplemento, pois alguns livros já haviam sido distribuídos. Daí surgirem algumas discussões entre Pearson e Raymond Claire Archibald (7 de outubro de 1875-26 de julho de 1955) quanto a esse ser um suplemento ou não de *Miscellanea Analytica* e quanto a sua importância histórica sob a visão de Todhunter ter ou não dado importância a esse suplemento em seu *History of the Theory of Probability*

O suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi* encontra-se traduzido em anexo e vários itens e corolários serão demonstrados nesse trabalho.

Abaixo temos as prioridades dadas a Moivre por Pearson em seu artigo:

- Sobre o tratamento à probabilidade integral o que será demonstrado nesse trabalho com a tradução e demonstração de partes de *Miscellanea Analytica* e do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi*
- Sobre o teorema de Stirling .

A partir de um cronograma de fatos descrito abaixo, este item será comentado:

1729: Carta de James Stirling (Garden, Stirling, Escócia, maio de 1692- Edinburgh, Escócia, 5 de dezembro de 1770) a Moivre introduzida no próprio *Miscellanea* a respeito de uma demonstração, já feita por Moivre, onde há erro na consideração de uma série supostamente convergente por Moivre.

1730: Publicação *Miscellanea Analytica* . Partes de *Miscellanea* serão demonstrados no que se refere a chamada Fórmula de Stirling.

1730 Publicação *Methodus Differentialis* de James Stirling que demonstra o teor de sua carta que foi publicada em *Miscellanea Analytica*

1730 Suplemento Auxiliar de 20 páginas do *Miscellanea* onde Moivre repensa a chamada Fórmula de Stirling e dá outra demonstração.

Nesse trabalho há traduções de textos originais de Abraham de Moivre do latim ou do inglês contendo algumas demonstrações importantes que levaram à função densidade de probabilidade. Algumas vezes haverá a necessidade de se utilizar linguagem matemática moderna para um melhor entendimento.

Serão estudados os trechos das seguintes obras: *Miscellanea Analytica* (Moivre), *The Doctrine of Chances* edições 1738 (Moivre), *Ars Conjectandi* (Bernoulli), onde aparece a Lei dos Grandes Números, *Methodus Differentialis* (Stirling).

O livro de Todhunter *History of the Mathematical Theory of the Probability* e alguns artigos em revistas científicas dos matemáticos Karl Pearson em *Biometrika*, artigos de Denis Lanier e Didier Troutox em revistas do IREM (Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques ), outros artigos e sites da Internet também serão avaliados.

Algumas demonstrações necessárias para a demonstração objeto do trabalho estão disponibilizadas em anexos no final do trabalho.

## CAPÍTULO I

### SIGNIFICADO DA CURVA NORMAL ou CURVA EM FORMA DE SINO

O nome "curva em forma de sino" deve-se a Esprit Jouffret (1837-1904) matemático e militar que primeiro utilizou o termo "superfície de sino" em 1872. O nome "distribuição normal", foi inventado por Charles S. Peirce (Cambridge, 10 de setembro de 1839- Milford, 19 de abril de 1914) filósofo e matemático, Francis Galton (Birmingham, 16 de fevereiro de 1822-Haslemere, Surrey, 17 de janeiro de 1911) matemático, antropólogo, estatístico e Wilhelm Lexis (Eschweiler, 17 de julho de 1837– Gottingen, 25 de outubro de 1914) economista e estatístico alemão por volta de 1875.

Também é conhecida como curva de Gauss ou gaussiana. Essa curva descreve tanto fenômenos físicos como financeiros e tem uma propriedade que é enunciada como Teorema Central do Limite que diz que podemos aproximar outras distribuições sob determinadas hipóteses gerais pela normal quando o número de observações fica grande. O Teorema Central do Limite afirma que quando o tamanho da amostra aumenta a distribuição amostral da sua média (distribuição de frequência das médias amostrais) aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal.

Assumir a distribuição normal em pesquisa está baseado em dois fundamentos: quando a própria distribuição dos eventos é normal ou quando a distribuição não é normal, mas o número de casos for grande. A distribuição da média amostral padronizada tende à normal e o Teorema Central do Limite dá apoio ao uso da normal como distribuição de erros, pois em muitas situações reais é possível interpretar o erro de uma observação como resultante de muitos erros pequenos e independentes. Por exemplo, a distribuição de alturas de homens adultos de certa idade pode ser considerada aproximadamente normal, pois a altura pode ser pensada como soma de muitos efeitos pequenos e independentes. Aplicações da distribuição normal incluem ruído térmico em resistores e em outros sistemas físicos que possuem um componente dissipativo; ruídos de baixa-frequência e variabilidade em parâmetros de componentes manufaturados e de organismos biológicos (por exemplo, altura, peso, inteligência).

Segundo Julian L. Simon da Universidade de Illinois em *The Journal of Educational Research*. v. 61, n.10, July-August, p. 435-438,1968, a curva normal como é comumente chamada, não “aparece” na natureza e não há nada de comum ou normal nisso.

Para Simon, a curva normal é criada pelo pesquisador, que controla as variáveis que fazem com que a distribuição original não se pareça com a normal. O aparecimento da Distribuição Normal indica, apenas, que foi permitida a atuação da maioria dentre as mais importantes variáveis, enquanto as restantes, dentre muitas relevantes variáveis, tiveram pequena influência.

A Curva Normal é apresentada na forma de *erros* e, de fato, a Curva Normal é algumas vezes chamada de “Lei dos Erros”. Em qualquer medição, há um número elevado de pequenas fontes de erros, pequenos erros não identificáveis. Nas ciências de observação e experimentais, todos os resultados da observação estão sujeitos a erros.

A imperfeição de nossos sentidos, dos instrumentos utilizados, variações de tempo são, entre outras, causas de erros.

O valor mais provável dos dados é o que mais se aproxima do verdadeiro, isto é, com menor erro possível.

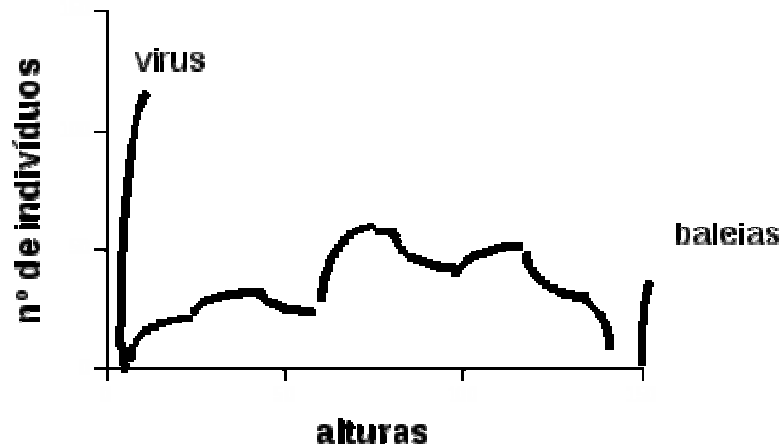
Os erros de que falamos são erros acidentais, ou seja, não são constantes ou variáveis regulares.

A probabilidade de um erro é uma função do próprio erro e há a mesma probabilidade de cometer um erro positivo como um erro negativo de igual valor.

Isto explica porque a Curva Normal é tão comumente empregada no andamento de um estudo científico; pois *sempre* existem erros, e os erros com freqüência são “Normalmente distribuídos”. Existe uma regra uma norma de distribuição em torno da média. Quando você decide avaliar um determinado fenômeno, é sua a decisão de *não* avaliar todos os outros fenômenos neste mundo, quer sejam similares ou não em relação ao que você está avaliando. A escolha é efetuada sob determinada proposta científica . Quanto mais homogêneo for o conjunto de eventos escolhido para avaliação, com maior probabilidade a Curva Normal será um bom ajuste dos dados e portanto, a escolha é feita pelo pesquisador. Agora, se o cientista observa uma medição discrepante, então, o pesquisador tem duas possibilidades: ou a trata como fato isolado ou verifica a causa que originou o fato dispersivo.

Para sedimentar sua teoria sobre o aparecimento e utilização da curva normal, Simon dá exemplo da variável altura. Imaginemos por um devaneio qualquer, pudéssemos avaliar a altura de todos os seres vivos sobre o planeta Terra. Isso dependeria muito do que seria

avaliado, de que seres seriam considerados, se, por exemplo, baleias e vírus poderiam ser medidos individualmente. O gráfico poderia ser este muito longe do que seria uma curva



normal...

.Curva imaginária sobre todos os organismos vivos.

Gráfico retirado artigo *What Does the Normal Curve “Mean”?* *The Journal of Education Research*

Ele poderia efetuar um levantamento da altura de todos os mamíferos,mas não saberia nem mesmo opinar qual seria a forma da curva.

Segundo Simon, neste mesmo artigo, mesmo que o cientista efetuasse um levantamento sobre a altura da espécie *Homo sapiens* também teríamos resultados bastante diferentes da curva normal. Para demonstrar o dito acima, Simon começa a esboçar possíveis gráficos, considerando a altura dos pigmeus da África, aborígenes da Austrália e mais o número de crianças no mundo.

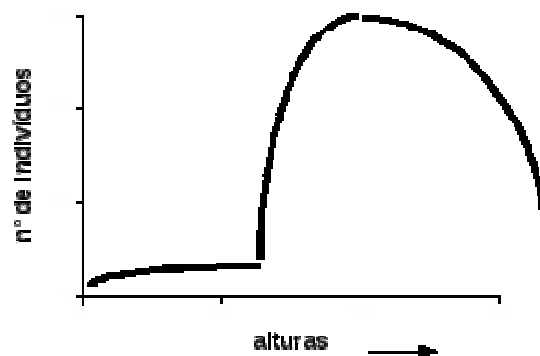


Gráfico retirado artigo *What Does the Normal Curve “Mean”?* *The Journal of Education Research*

Verifica-se, então, que para conseguirmos algo mais parecido com o que chamaríamos de curva normal, precisaríamos isolar as raças para uma classificação mais homogênea das alturas como o dos pigmeus, depois as crianças e poderíamos chegar a uma curva como abaixo:

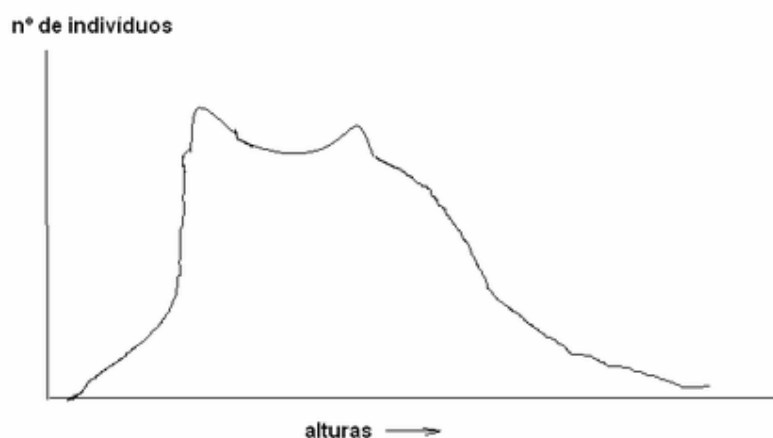


Gráfico retirado artigo *What Does the Normal Curve “Mean”?* *The Journal of Education Research*

Aqui temos a exclusão dos pigmeus da África e os aborígenes da Austrália e também a exclusão das crianças. Mas qualquer um enxergaria dois picos e entende que seriam a inclusão de homens e de mulheres. Os estudos em geral apresentam separadamente a distribuição de homens e de mulheres que pode parecer com a Curva Normal.

Se formos sucessivamente fazendo novas classificações, diminuindo nosso espaço amostral, nosso campo amostral, estreitando os dados segundo a idade, o país de origem, dos ancestrais, educação e outras variáveis, cada uma das curvas resultantes será próxima e cada vez mais próxima da Normal. Por quê? Porque a variação nas alturas em cada uma das classificações, ou dos sub-grupos, é o resultado de muitíssimas variáveis, cada uma delas tendo um efeito relativamente pequeno, mas nenhuma delas tem um efeito grande ou que possamos juntar informações: elementos específicos da dieta, quantidade de exercício, fatores genéticos e psicológicos, e assim por diante. Neste processo de homogeneidade da população a distribuição começa a se parecer com a normal. Segundo Simon, as curvas chamadas de Normal são feitas e não nascidas.

Para Simon, quando há o aparecimento da Curva Normal, significa que a pesquisa chegou a bom termo, ou seja, a investigação científica está completa.

Moivre em 1733 também acreditava que quando chegou à curva normal, conseguiu um teorema teológico de que estava determinando a frequência das irregularidades (erros) do Plano Original da Divindade contido em *The Doctrine of Chances* de 1738.

De qualquer forma a média desta curva representa uma norma e segundo o dicionário do Aurélio a palavra norma significa um “estado habitual” conforme a regra estabelecida, isto é, as coisas todas deveriam se comportar como a média e o que se desvia da média seria considerado erro. Daí a possível idéia de se chamar esta curva como Normal.

## CAPÍTULO II

Uma análise mais detalhada do artigo *Historical Note on the Normal Curve of Errors* de Karl Pearson será constituída neste capítulo, assim como a contestação de outro pesquisador e historiador matemático, R.C.Archibald.

### ARTIGO *Historical Note on the Normal Curve of Errors* DE KARL PEARSON

Esse artigo foi extraído da revista **Biometrika** que se trata de uma revista científica estatística fundada por Pearson, Galton e Francis Ysidro Edgeworth (Edgeworthstown, County Longford, Irlanda, 8 de fevereiro de 1845-Oxford, Inglaterra, 13 de fevereiro de 1926) economista, a revista é mais focada em assuntos na área de bioestatística. Downloaded from <http://biomet.oxfordjournals.org> by Elaine Caire on May 19, 2010.(licença concedida para pesquisa) .Atualmente é publicada pela Universidade de Oxford .

Este artigo não só coloca Abraham de Moivre como o principal matemático na dedução da função densidade de probabilidade como também o coloca como pioneiro neste estudo.

De acordo com Karl Pearson, em seu artigo *Historical Note on the Normal Curve of Errors* (1924) a descoberta da Curva Normal é atribuída erroneamente a Gauss no século XIX. Essa atribuição, segundo Pearson, é devido à referência que Laplace faz a Gauss em *Théorie analytique des Probabilités* publicado em 1812.

Mas *Mémoire sur les Probabilités* de Laplace que foi publicado em *Histoire de l'Académie de Sciences* em 1778,já continha a função da curva normal e enfatizava a importância da probabilidade integral. Ou seja, segundo Pearson, Laplace em 1774(*Mémoires... présents à l'Académie*, T.vi.p.6) quando discutiu o Teorema de Bayes também chegou a curva de erros exponencial, a distribuição exponencial.

Já o trabalho de Gauss está todo no século XIX. Seu livro *Theoria motus corporum coelestium* foi publicado em 1809 onde apareceu pela primeira vez seu método dos mínimos quadrados.

Inicialmente, Pearson acreditava que o nome de Laplace deveria estar associado à curva normal e à probabilidade integral antes de Gauss, todavia quando estudou Moivre ele

obteve uma data anterior a Laplace e Gauss. Quando Pearson estudou Moivre em seu **Miscellanea Analytica** publicado em 1730 verificou que em muitas cópias deste trabalho havia um suplemento anexado com paginação separada terminando numa tabela de 14 figuras de logaritmos de fatoriais de 10! a 900! com diferenças de 10 e que somente poucas cópias tinham um segundo suplemento com paginação separada (pp. 1-7) e datado de 12 de novembro de 1733. Este segundo suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi* só poderia ser adicionado a cópias vendidas três anos após a emissão do livro original e isso explica sua raridade.

Em seu artigo, Pearson diz que todas as três cópias da University College Library tinham o primeiro suplemento, mas somente um tinha o segundo suplemento. A cópia do British Museum Library teria o primeiro, mas não o segundo. Das três cópias de Cambridge (University Library) uma teria o primeiro suplemento e nenhuma das outras duas teriam o segundo suplemento. A Royal Society com duas cópias, uma com o primeiro suplemento e a outra nenhum suplemento. A University Library Edinburgh teria duas cópias uma com o primeiro suplemento e outra sem suplementos e a Bodleian Library teria uma cópia sem suplementos

Segundo Pearson, o segundo suplemento contém o primeiro tratamento à probabilidade integral. Neste, Moivre encontra a razão entre o termo máximo da binomial e um termo a uma distância  $l$  do termo máximo e utiliza o que chamamos atualmente de Fórmula de Stirling como:

$$m! = B \times \sqrt{m} \cdot e^{(-m)} m^m$$

Para tal, Moivre considerou o valor da potência bem grande, infinita.

Ele determinou uma constante que ele chamou de **B** e que o logaritmo hiperbólico de **B** seja dado por:

$$\log B = 1 - 1/12 + 1/360 - 1/1260 + 1/1680$$

que resulta :

$$\log B = 0,3992235$$

Daí,  $B = 2,5074$

Ou seja,

$$m! = 2.5074 \times \sqrt{m} e^{-m} m^m.$$

Moivre descreve James Stirling como um amigo que muito lhe ensinou e que lhe trouxe um diferente processo para encontrar o valor de B como a raiz quadrada da circunferência de raio unitário encontrando um valor de 2,506628 e segundo Pearson, o fato de Stirling mostrar que o valor aritmético da constante  $\sqrt{2\pi}$  não entitula a ele a autoria do teorema.

Moivre chama tal constante de  $\sqrt{c}$  depois procede como é mostrado abaixo:

I) O logaritmo hiperbólico da razão entre o termo de distância x para o termo máximo

para o termo máximo com n bastante grande é  $-\frac{x^2}{(2\sigma^2)}$  em outra notação :

$$y = y_0 e^{\left(-\frac{x^2}{(2\sigma^2)}\right)}$$

Moivre toma dois casos  $(1+1)^n$  e  $(a+b)^n$ . Para o primeiro caso :

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times n\right)} \quad \text{e para o segundo caso :} \quad \sigma = \sqrt{\left(\frac{a}{(a+b)} \times \frac{b}{(a+b)} \times n\right)}$$

Moivre não cita  $\sigma$  como desvio padrão da binomial  $\sigma = \sqrt{pqn}$

II) Ele indica (Lema II), que a posição do termo máximo é dado por  $nq$  e ele mostra que a razão da soma dos termos entre  $nq - x$  e  $nq + x$  para a soma de todos os termos e introduz pela primeira vez a probabilidade integral.

III) Ele encontra o valor de  $y_0$ , e diz que a razão entre o termo máximo de  $(a+b)^n$  para a soma de todos os termos (denotando por N o total da população) é:

$$\frac{(a+b)}{(\sqrt{abcn})} e \frac{y_0}{N} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})}$$

E para obter a probabilidade integral, Moivre chega a :

$$\int y_0 e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}\right)} dx$$

Segundo Pearson a prova do Teorema de Bernoulli em *Ars Conjectandi* é laboriosa, insatisfatória e não utiliza as idéias de desvio padrão utilizadas por Moivre, ou seja, as idéias de que a precisão aumenta inversamente com a raiz quadrada do número de experimentos, e

que em muitos livros encontramos atualmente a demonstração deste Teorema utilizando desvio padrão.

Pearson enfatiza este segundo suplemento e dá prioridades a Moivre sobre os seguintes temas:

- Sobre o tratamento à probabilidade integral
- Sobre o teorema de Stirling
- Sobre a prioridade dada ao chamado Teorema de Bernoulli, a conhecida atualmente como Lei dos Grandes Números

Pearson faz uma crítica a Todhunter que escreveu *The History of the Theory of Probability* dizendo que ele provavelmente utilizou uma edição de 1730 do *Miscellanea Analytica* que não continha suplemento, pois nos artigos. 324 e 335, Todhunter descreve sobre o assunto superficialmente, porque não teria entendido que este suplemento que dá prioridade a Moivre não apenas como o descobridor da curva normal, mas também no teorema chamado de Stirling.

No artigo 335 Todhunter apenas cita que Moivre teria conseguido o logaritmo da razão entre o termo distante  $l$  do termo médio de uma binomial e o termo médio seria  $\frac{2l}{n}$  e que teria obtido um valor para a soma dos  $l$  precedidos ou seguidos do termo médio para 3600 tentativas a probabilidade que seria de 0,682688 e o que número de vezes que o evento aconteceria entre 1800+30 e 1800-30.

Pearson ainda diz que o mesmo assunto é tratado com 23 anos mais tarde, na edição de 1756 *The Doctrine of Chances* de p 243-250, e que Todhunter em seu *History of The Theory of Probability*, Arts. 324 e 335, passou sobre o assunto mais superficialmente porque ele não tinha compreendido que este suplemento dá prioridade para Moivre não só como o descobridor da curva normal, mas também no teorema de Stirling. Nem como entendemos o Teorema de Bernoulli que a medida de precisão depende do inverso da raiz quadrada do tamanho da amostra que é devido a Moivre e não a Bernoulli e que para Moivre seu problema era teológico, pois determinava a frequência de irregularidades do projeto original da Divindade.

## CORRESPONDÊNCIAS ENTRE Karl Pearson e R.C.Archibald

CARTA e ARTIGO *Abraham de Moivre* e *A Rare Pamphlet of Moivre and some of his Discoveries* de RAYMOND CLAIRE ARCHBALD

Em 22 de fevereiro de 1926, R.C.Archibald da Brown University escreve uma carta a Karl Pearson intitulada *Abraham de Moivre* questionando o artigo *Historical Note on the Original of the Normal Curve of Errors* de Pearson na revista *Biometrika*, e diz que Pearson cometeu um deslize ao assumir que o segundo suplemento encontrado no final de uma cópia de *Miscellanea Analytica* na University College em Londres seria realmente um segundo suplemento e que o livro de Todhunter não teria considerado este suplemento.

Em seu artigo Pearson escreve que o assunto do que se refere o suplemento (probabilidade integral utilizando quadratura) teria sido tratado em 1756 por Moivre em *The Doctrine of Chances* e que Todhunter em seu *The History of the Theory of Probability* teria “passado” muito superficialmente o que surpreende Archibald porque na edição de 1738 o suplemento já apareceria como argumentou Archibald.

No prefácio que Moivre escreve em seu suplemento editado juntamente com a edição de 1738 do *The Doctrine of Chances*, Moivre diz que iria traduzir um texto que foi impresso em 12 de novembro de 1733 e que teria sido somente comunicado aos amigos, que nunca se tornou público. Portanto, para R.C.Archibald era claro que a publicação em questão seria não um segundo suplemento para *Miscellanea Analytica*, mas teria se tornado público em primeiro lugar em inglês em 1738 em *The Doctrine of Chances*.

Pearson por sua vez responde às críticas ao seu artigo *Historical Note on the Original of the Normal Curve of Errors* na mesma revista *Biometrika* em 18 de março de 1926 e responde a R.C.Archibald que provavelmente Archibald não tenha visto a cópia do suplemento inserida no exemplar de *Miscellanea Analytica* encontrado na University College, pois a cópia do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi* contém o mesmo tipo de grafia de *Miscellanea Analytica*, mesma paginação do primeiro suplemento e impresso no mesmo papel e mesmo formato do primeiro suplemento e do *Miscellanea*. Também justifica que a metade das cópias do *Miscellanea* conhecidas até 1926, não continha o primeiro suplemento e que apenas as últimas cópias do *Miscellanea* tinham anexadas cópias do *Approximatio*. Também relata nesta resposta a Archibald que para a História da Estatística as mais importantes contribuições

foram feitas nas edições de 1738 e 1756 do *The Doctrine of Chances*. Ele responde que as edições de 1738 e 1756 são diferentes e que a edição de 1756 é a edição que ele teria estudado e trabalhado daí a citação em seu artigo. Um importante princípio que mantém a estabilidade das razões não aparece em 1733 em *Approximatio*, primeiramente aparecendo em 1738 onde as 7 linhas do Corolário X são acrescidas para 15 linhas e em 1756, o Corolário ocupa 160 linhas ou 4 páginas. De fato, 6 páginas do *Approximatio* tornam-se 11 páginas e meia em 1756.

Em seu artigo *A Rare Pamphlet of Moivre and some of his Discoveries* publicado em *Isis* 8 (1926) 671-683 (revista fundada em 1912 dedicada à História da Ciência), Archibald inicia seu artigo dizendo que Pearson dá uma nova importância a Moivre no contexto histórico da época.

Archibald diz que Pearson se baseou em *Ars Conjectandi Pars Quarta* (1713) de Jacob Bernoulli e num panfleto encontrado em 1733 e questiona as prioridades que Pearson dá a Moivre:

- Sobre o tratamento à probabilidade integral
- Sobre o teorema de Stirling
- Sobre a prioridade dada ao chamado Teorema de Bernoulli, a Lei dos Grandes Números utilizando pela primeira vez a idéia de desvio padrão.

Como anexos, estão traduzidas as cartas entre Pearson e Archibald que foram editadas em revistas *Nature* e *Isis* respectivamente.

**NOTAS:****BIOGRAFIA DE JAMES STIRLING**

**James Stirling** (Garden, Escócia, maio de 1692-Edinburgh, Escócia, 5 de dezembro de 1770) sua mãe Anna Hamilton e seu pai Archibald Stirling.

A família era forte defensora da causa jacobita ( Igreja Ortodoxa Jacobita) e isso tem uma influência significativa sobre a vida de James Stirling. A causa Jacobita era a do rei Stuart, James II, exilado após a Revolução de 1688, e seus descendentes. Quando James Stirling tinha uns 17 anos, seu pai foi preso e acusado de alta traição por causa de sua simpatia à causa jacobita. No entanto, ele foi absolvido das acusações.

Nenhuma informação absolutamente confiável sobre o ensino de graduação de Stirling na Escócia, é conhecido. De acordo com uma fonte, ele foi educado na Universidade de Glasgow, enquanto a outra fonte indica que ele participou juntamente com seu pai, da Universidade de Edimburgo. Em 1711, Stirling matriculou no Balliol College, Oxford, Inglaterra, com bolsa de estudo de pós-graduação para o qual foi inicialmente isento por ser simpatizante da causa jacobina.

Em 1717 Stirling publicou seu primeiro trabalho *Lineae Tertii Ordinis Neutonianae* a respeito da teoria de Newton sobre curvas , sobre a catenária.

Stirling em 1719 em Veneza , apresentou seu trabalho *Methodus differentialis newtoniana Illustrata* à Royal Society de Londres.

No final de 1724 Stirling viajou para Londres, onde permaneceu por 10 anos. Estes foram 10 anos em que Stirling foi muito ativo matematicamente, correspondendo-se com muitos matemáticos e desfrutando de amizade com Newton . Newton propôs a Stirling uma bolsa da Royal Society de Londres e, em 3 de novembro de 1726, Stirling foi eleito.

Em Londres, Stirling publicou sua obra mais importante *Methodus differentialis* em 1730. Esse livro é um tratado sobre a série infinita, soma, interpolação e quadratura e a fórmula assintótica para  $n!$  Neste livro Stirling também estuda a função gama e a função hipergeométrica.

Moivre publicou *Miscellanea Analytica* em 1730. Stirling escreveu para Moivre apontando alguns erros que ele tinha feito em uma tabela de logaritmos de fatoriais no livro. Moivre foi usou as idéias de Stirling e publicou um Suplemento Auxiliar de *Miscellanea Analytica* alguns meses mais tarde.

Stirling foi eleito membro da Royal Academy de Berlim em 1746.

Bibliografia baseada <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Stirling.html>.

Acesso em 21/09/2013

## **BIOGRAFIA DE KARL PEARSON**

**Karl Pearson** (Londres, 27 de março de 1857 - Coldharbour, Surrey, Inglaterra, 27 de abril de 1936): sua mãe Fanny Smith e seu pai William Pearson, um advogado de família de Yorkshire.

Carl usou este nome até 23 anos quando mudou a grafia para Karl.

Karl, junto com seu um irmão mais velho e uma irmã mais nova, foram criados em uma família de classe média alta. Depois de ter sido educado em casa até a idade de nove anos, ele foi enviado a University College School, em Londres. Ele estudou lá até dezesseis anos, mas ele foi, então, obrigado a abandonar devido a uma doença. Um professor particular foi contratado para ensiná-lo em casa. Foi então admitido em Cambridge em 1875 .

Em Cambridge ele foi ensinado por Stokes, Maxwell, Cayley e Burnside.

Lá estudou com Routh, Stokes, Cayley, e Clerk Maxwell.

Ele se formou na Universidade de Cambridge em 1879 como o Third Wrangler in Mathematical Tripos (o que significa que ele foi classificado em terceiro lugar entre aqueles que ganharam um grau de Primeira Classe). Em seguida, ele viajou para a Alemanha para estudar na Universidade de Heidelberg. Lá ele estudou física com GH Quincke e metafísica sob Kuno Fischer. Em seguida, ele visitou a Universidade de Berlim, onde frequentou as aulas do famoso fisiologista Emil Du Bois-Reymond sobre darwinismo.

Seu primeiro livro, *The New Werther*, foi publicado no momento. Nele Pearson dá uma indicação clara de por que ele estudou tantos assuntos diversos, de ciência a filosofia.

“Corro da ciência para a filosofia, e da filosofia aos nossos velhos amigos, os poetas, e então, o excesso de cansaço pelo excesso de idealismo, eu gosto de me tornar prático em voltar para a ciência. Alguma vez você já tentou imaginar tudo o que há no mundo, que vale a pena conhecer e que não é um assunto no universo é indigno de estudo? Os gigantes da literatura, os mistérios do espaço, as tentativas de Boltzmann e Crookes para penetrar muito laboratório da Natureza, a teoria kantiana do universo, e as mais recentes descobertas na embriologia, com seus contos maravilhosos do desenvolvimento da vida o que uma imensidão além do nosso alcance! ... A humanidade parece à beira de uma nova e gloriosa descoberta. O que Newton fez para simplificar os movimentos planetários agora deve ser feito para se unir em um todo as várias teorias isoladas de física matemática.”

Durante 1882-1884, lecionou em torno de Londres em uma ampla variedade de tópicos, tais como a vida social alemão, a influência de Martinho Lutero, e os temas históricos. Ele também escreveu ensaios, artigos e opiniões, bem como a substituição de professores de matemática no Colégio do Rei e da Universidade College London.

Ele passou a maior parte de sua carreira na University College, em Londres, depois que ele foi nomeado para a cadeira de Matemática Aplicada em 1885.

De 1884 a 1890 Pearson foi altamente produtivo. Deu palestras sobre estática, dinâmica e mecânica, realizou também pesquisas sobre uma série de temas históricos, como a evolução do cristianismo ocidental.

Casou-se com em 1890 e teve três filhos; Egon Pearson (nascido em 1895) que seguiu a profissão do pai e duas filhas.

Pearson é conhecido como um dos fundadores da estatística, mas chegamos a 1890 e aos 33 anos, professor de matemática aplicada, apesar de ter uma grande reputação em uma ampla variedade de áreas, ainda não tinha começado a trabalhar em problemas estatísticos.

Dois eventos mudaram o rumo de sua carreira. O primeiro foi a publicação por Galton de seu livro *Natural Inheritance* em 1889. A segunda foi a nomeação de Walter Frank Raphael Weldon (Highgate, Londres 15 de Março de 1860 - Oxford, 13 de Abril de 1906) como professor de Zoologia da University College de Londres., em 1890. Através do livro de Weldon e Galton, Pearson tornou-se interessado no desenvolvimento de métodos matemáticos para estudar os processos de hereditariedade e evolução. De 1893 a 1912, ele escreveu 18 artigos *Mathematical Contributions to the Theory of Evolution*, que contêm o seu mais valioso trabalho. Estes documentos contêm as contribuições para análise de regressão, o coeficiente de correlação e inclui o teste do qui-quadrado de significância estatística (1900).

Seu livro *A Grammar of Science* (1892) foi notável na medida em que antecipou algumas das idéias da teoria da relatividade. Foi abrangente e tentou estender a influência da ciência em todos os aspectos. Pearson cunhou o termo "desvio padrão", em 1893. Seu trabalho foi influenciado pela obra de Edgeworth.

Pearson foi co-fundador, com Weldon e Galton, da revista estatística *Biometrika*. O primeiro volume foi editado em outubro de 1901 com Pearson como seu editor, um papel que ele continuou a manter até sua morte 35 anos depois.

Em torno de 1906 Pearson criou um centro de pós-graduação.

Pearson estava entre os professores universitários mais influentes de seu tempo, ele fez um grande esforço para ser inteligível e conseguiu segurar um grande público, quer de estudantes ou meros ouvintes casuais que estavam sem interesse especial em seus temas.

Tinha uma crença intensa e genuína na liberdade de pensamento, mas era capaz de atribuir diferenças intelectuais de opinião à estupidez. As relações pessoais entre ele e seus alunos foram muitas vezes, dolorosamente interrompidas durante anos, mas a maioria dessas amizades quebradas foram retomadas. Apenas diferenças intelectuais perturbavam a harmonia; nas relações sociais normais da vida ele era um anfitrião encantador, convidado, ou companheiro de viagem. A influência de Pearson sobre aqueles que só o conheciam através de seus escritos também foi excelente. Ele era admirado e temido, ao invés de amado e por muitos ele despertou hostilidade.

Ele recebeu um diploma honorário da Universidade de St Andrews e da Universidade de Londres. Ele também foi eleito membro da Royal Society of Edinburgh.

Retomando algumas de suas principais contribuições são:

- **Regressão linear e correlação:** Um de seus clássicos conjuntos de dados (inicialmente recolhidos por Galton) envolve a regressão da altura dos filhos em relação à de seus pais. O coeficiente de correlação produto-momento de Pearson, é nomeado assim como homenagem a ele, foi a primeira medida de força de associação a ser introduzido em estatística.
- **Classificação das distribuições:** O trabalho de Pearson sobre classificação das distribuições probabilidade constitui a base para uma ampla teoria moderna estatística, em particular, a família exponencial de distribuições é fundamental para a teoria do modelo linear generalizado.
- **Teste Chi-quadrado de Pearson:** Um tipo particular de teste qui-quadrado, um teste de significância estatística.

- Coeficiente de correlação e dois coeficientes de assimetria

Bibliografia baseada <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pearson.html>  
artigo de Artigo por: J J O'Connor e Robertson E F acesso em 25/05/2013  
e [http://pt.wikipedia.org/wiki/Karl\\_Pearson](http://pt.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson) acesso em 25/05/2013

## **BIOGRAFIA DE RAYMOND CLAIRE**

**Raymond .Claire** Archibald (Nova Scotia, Canadá 07 de outubro de 1875 – New Brunswick, Canadá 26 de julho de 1955).

Seu trabalho em matemática era principalmente a história da matemática. Ele publicou obras como *Euclid's book On Division of Figures* with a restoration (1915), *Benjamin Peirce* 1809-1880 (1925), *Outline of the History of Mathematics* (1932), *The scientific achievements of Nathaniel Bowditch* (1937), *Semicentennial History of the American Mathematical Society 1888-1938* (1938, reimpresso em 1988), *Fifty mathematical table makers* (1948).

Bibliografia baseada em <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Archibald.html>  
acesso em 25/05/2013

## CAPÍTULO III

### BIOGRAFIA DE ABRAHAM DE MOIVRE

**ABRAHAM DE MOIVRE** (Vitry le François, Champanhe, França, 26 de maio de 1667 – Londres, 27 de novembro de 1754). Seu pai trabalhava como cirurgião e a família era estável financeiramente. Os pais de Moivre eram protestantes, mas primeiro ele frequentou a escola católica dos Irmãos Cristãos em Vitry que era uma escola tolerante, especialmente dadas as tensões religiosas na França naquele momento. Quando tinha onze anos de idade seus pais o mandaram para a Academia Protestante em Sedan, onde passou quatro anos estudando grego.

O Édito de Nantes havia garantido a liberdade de culto na França desde 1598, mas, apesar de ter realizado qualquer extensão do culto protestante na França legalmente impossível, ele foi muito perseguido pelo clero da Igreja Católica e pelos parlamentos locais franceses. Apesar do édito, a Academia Protestante em Sedan foi suprimida em 1682 e Moivre, forçado a se mudar, então estudou lógica em Saumur até 1684. Embora a matemática não era uma parte do curso que ele estava estudando, Moivre lia textos de matemática. Em particular, ele leu o *Tratado de Huygens* sobre jogos de azar *De ratiociniis em ludo aleae*. Moivre foi morar em Paris e continuou seus estudos no Collège de Harcourt, onde fez cursos de física e pela primeira vez teve formação matemática formal.

A perseguição religiosa dos protestantes tornou-se muito grave depois que Louis XIV revogou o Édito de Nantes em 1685. Neste momento, Moivre foi preso por suas crenças religiosas no convento de St Martin. Não está claro quanto tempo ele se manteve lá, já que biógrafos católicos romanos indicam que logo após isso, ele emigrou para a Inglaterra enquanto que biógrafos protestantes dizem que ele foi preso até 27 de abril de 1688 e depois viajou para a Inglaterra. Depois de chegar em Londres, ele se tornou um professor particular de matemática, visitando os alunos que ele ensinou e também docente nas cafeterias de Londres.

Quando chegou a Londres, Moivre era um matemático competente, com um bom conhecimento de muitos dos textos-padrão. No entanto, depois que ele fez uma visita ao conde de Devonshire, levando com ele uma carta de apresentação, foi mostrado ao *Principia*

de Newton. Ele percebeu de imediato que este era um trabalho muito mais profundo do que aqueles que ele havia estudado e decidiu que teria que ler e entender esta obra-prima.

Moivre foi pioneiro no desenvolvimento da geometria analítica e da teoria da probabilidade. Publicou *The Doctrine of Chances A method of calculating the probabilities of events in play* in 1718 em latim.

*The Doctrine of Chances* apareceu em novas edições expandidas em 1738 e 1756.

Moivre também investigou estatísticas de mortalidade e a fundação da teoria de anuidades. Um trabalho inovador por Edmond Halley (Haggerston, 8 de novembro de 1656-Greenwich, 14 de janeiro de 1742) foi a produção de tábuas de mortalidade, com base em cinco anos de dados, para a cidade de Breslau, que publicou em 1693. Foi um dos primeiros trabalhos a respeito da mortalidade e idade em uma população e foi muito influente na produção de tabelas atuariais no seguro de vida. É quase certo que a amizade de Moivre com Halley levou ao seu interesse em rendas e anuidades e publicou *Annuities on lives*. Edições posteriores apareceram em 1743, 1750, 1752 e 1756.

Em *Miscellanea Analytica* (1730) aparece a fórmula de Stirling (injustamente atribuída a Stirling) que Moivre usou em 1733 para derivar a curva normal como uma aproximação para a binomial. Na segunda edição do livro, em 1738, Moivre dá crédito a Stirling por uma melhoria para a fórmula. Moivre escreveu:

“Eu desisti de avançar mais até o meu digno e sábio amigo James Stirling, que havia se aplicado mais, depois de mim descobriu que  $c = \sqrt{(2\pi)}$

Moivre também é lembrado por sua fórmula para  $(\cos x + i \sin x)^n$  que foi importante no início do desenvolvimento da teoria dos números complexos.

Apesar da eminência científica de Moivre, a sua renda principal era como professor particular de matemática e ele morreu na pobreza. Moivre esperou a vida inteira uma cadeira de matemática, mas os estrangeiros estavam em desvantagem na Inglaterra e embora livre de discriminação religiosa, ele ainda sofreu discriminação como um francês na Inglaterra. Desesperado para obter uma cadeira em Cambridge, ele implorou Johann Bernoulli para persuadir Leibniz para escrever e apoiá-lo. Ele o fez em 1710 para explicar a Leibniz que Moivre estava vivendo em extrema pobreza. Na verdade Leibniz conheceu Moivre, quando ele estava em Londres em 1673 e tentou obter uma cátedra de Moivre na Alemanha, mas sem sucesso. Mesmo os seus influentes amigos ingleses, como Newton e Halley não conseguiram ajudá-lo a obter um posto de professor universitário.

Na verdade Moivre revisou a tradução latina de *Óptica* de Newton e dedicou a Newton *The Doctrine of Chances*. Newton retribuiu o elogio dizendo para aqueles que o questionaram sobre o *Principia*:

“Vá ao Sr. Moivre, ele sabe essas coisas melhor do que eu.”

Moivre, como Cardano, previu o dia da sua própria morte, dia 27 de novembro de 1754. Ele descobriu que ele estava dormindo 15 minutos a mais cada noite e somando a progressão aritmética, calculou que ele iria morrer no dia em que ele dormiu por 24 horas. Ele estava certo!

Bibliografia baseada em [http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/De\\_Moivre.html](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/De_Moivre.html)  
acesso em 25/05/2013

### **MISCELLANEA ANALYTICA**

Em 1730 Moivre publicou *Miscellanea Analytica da seriebus et quadraturis* e um suplemento de 20 páginas deste livro. Em 1733 Moivre publicou outro suplemento o *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi*

Segundo Lanier e Trotoux, alguns textos desse livro foram escritos a partir da década de 1720. Existe também uma carta de Stirling datada de 1729 a Moivre que é bastante importante para o trato desse trabalho e está incluída em seu livro.

Em *Miscellanea Analytica*, temos demonstrações de resultados com muitos termos empregados sem justificção detalhada e que teriam aparecido em suas publicações anteriores. O interesse deste livro é o seu conteúdo matemático de alto nível. O livro contém cartas e relatos de discussões entre Moivre e outros matemáticos.

Moivre estuda as trajetórias dos corpos celestes, o estudo das séries recorrentes além de resolver inúmeros problemas no campo da probabilidade.

*Miscellanea Analytica* é constituído pelos seguintes livros:

Liber primus. *De ordinatis rationalibus in simpliciores resolvendis.*

Liber II. *Scholium ad praecedentia.*

Liber III.

Liber IV.

Liber V. *De binomio a + b ad potestatem permagnam evecto.*

Liber VI. *De seriebus hyperbolicis, circularibus, mixtis, & determinatis.*

Liber VII. *Responsio ad quasdam criminationes.*

Liber VIII. *De viribus centripetis, itemque de maximis & minimis mutationibus quae in motu corporum coelestium occurrunt, disquisitio geometrica.*

O Livro V é dedicado ao estudo do binômio com potência infinita. O capítulo II deste Livro diz respeito ao seguinte problema: Dois jogadores com a mesma probabilidade de ganhar considerando a quantidade de jogadas  $n$ . Avalia então, a probabilidade de se obter sucesso em  $n/2$  vezes, quando  $n$  é muito grande. (já pensando talvez, na atualmente conhecida, Lei dos Grandes Números, que diz que: Se um evento de probabilidade  $p$  é observado repetidamente em ocasiões independentes, a proporção da frequência observada deste evento em relação ao total número de repetições converge em direção a  $p$  à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande.).

#### SUPLEMENTO DE MISCELLANEA ANALYTICA *Approximatio ad Summam*

#### *Termonorum Binomii (a+b)<sup>n</sup> in Seriem expansi (Moivre) 1733*

Esse suplemento embora seja datado de 12 de novembro de 1733 foi adicionado a algumas cópias de *Miscellanea Analytica* de Abraham de Moivre editado em 1730. Somente poucos exemplares conhecidos atualmente de *Miscellanea Analytica* contém esse suplemento

O referido suplemento contém o primeiro tratamento conhecido da probabilidade integral e essencialmente da curva normal. Isto antecede a discussão de Laplace em meio século.

Moivre encontrou a razão entre o termo máximo de uma binomial e o termo a uma determinada distância do termo médio.

Ele usou o chamado Teorema de Stirling e supôs uma potência muito grande para o binômio  $(a + b)^n$  com base na Lei dos Grandes Números de Jacob Bernoulli.

### ***THE DOCTRINE OF CHANCES***

Em 1718 Moivre edita a primeira edição em latim de *The Doctrine of Chances*, mas é a partir da segunda edição em 1738, primeira em inglês, que Moivre adiciona pela primeira vez o suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi* das páginas 235 a 242 e altera o corolário 10 de 7 para 15 linhas. Na terceira edição em 1756 há algumas modificações em relação à primeira edição, o Corolário 10 passa a ocupar 4 páginas, ou seja, as primeiras 6 páginas do original passam a ser 11 páginas e meia. *The Doctrine of Chances* trata de problemas envolvendo jogos e duração de jogos.

### ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES de *Miscellanea Analytica*

Em 1730 Moivre publica seu *Miscellanea Analytica*, *Liber V De binomio  $a+b$  ad potestatem permagnam evecto*. Destaca-se o problema III, na página 102. Esse problema é posteriormente demonstrado nas páginas 124 a 128 do *Liber VI De Seriebus Hiperbolicis, Circularibus, Mixtis, & Determinatis*.

Na página 102 no problema III, Moivre cita o coeficiente do termo médio com **potência muito grande** ou encontra a razão entre os coeficientes do termo médio e a soma de todos os coeficientes, o que retorna depois em 1733 no suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi*, ítem I (tradução minha do *Miscellanea Analytica* 1730, edição em latim)

Seja  $n$  a potência da binomial  $(a + b)^n$  e  $a=b=1$ . A razão do termo médio está para a

soma  $2^n$ , assim como  $\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n} a 1$

Moivre diz que “negligenciou” algumas séries e conclui então que:

$$\frac{2 \frac{21}{125} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n} \text{ ou } \frac{2 \frac{21}{125} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{n-1}}$$

Em termos mais modernos para melhor entendimento temos:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2 \frac{21}{125} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$$

Ele utiliza aproximações e fornece uma tabela de resultados( p.103 e 104 do Liber V) até 14 casas decimais de logaritmos de números inteiros de partindo de 10 até 900 com intervalo de 10.

Ele calcula para n=900 utilizando tabela de logaritmos , (na página 105 do Liber V) conseguindo assim a razão entre o termo médio e a soma de todos os termos. A tabela de logaritmos utilizada por Moivre era de logaritmos de fatoriais, ou seja, de somatória de logaritmos.

$$\log\left(\frac{C_{900}^{450}}{2^{900}}\right) = \bar{8},4246886444 \quad \text{ou seja, } \frac{C_{900}^{450}}{2^{900}} = 0,026588$$

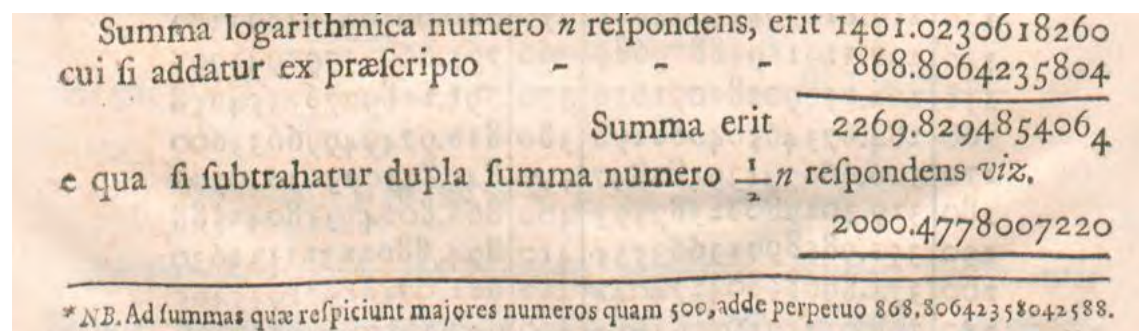


Figura retirada da página 104 Liber V de *Miscellanea Analytica*

O valor de  $\log 900! = 2.2698294854064$  e  $2 \cdot \log 450! = 2000.4778007220$  que subtraindo obtem-se  $269.3516846844$  que novamente será subtraído de  $\log 2^{900} = 270.9269960400$

A diferença entre os valores abaixo resulta em um número negativo que era denotado como abaixo:

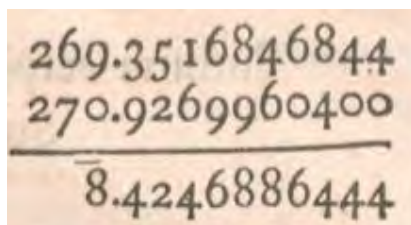


Figura retirada da página 105 Liber V de *Miscellanea Analytica*

Para nosso valor atual significa que teríamos  $-1,5753113556$  e  $10^{(-1,5753113556)} = 0,026588$

Moivre então considerou o valor da constante  $2^{\frac{21}{125}}$  obtendo:

$$\log\left(\frac{2^{\frac{21}{125}}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}\right) = \bar{8},4246435020$$

que corresponde a 0,26585, muito próximo a 0,026588

Obs: A constante de  $2^{\frac{21}{125}}$  é demonstrada no Liber VI sobre séries hiperbólicas, portanto utiliza logaritmo hiperbólico.

Moivre no livro *Miscellanea Analytica* nas páginas citadas abaixo demonstra como teria “chegado” aos primeiros cálculos que aparecem no ítem I do suplemento “Approximatio..”

O Livro VI ( páginas 124 a 128) é dedicado ao estudo das séries hiperbólicas. Utiliza integração, usando as idéias do cálculo por Newton e Leibniz. No trecho estudado, Moivre vai justificar os resultados obtidos no ítem I do suplemento *Approximatio..*

O texto abaixo está de acordo com o original traduzido diretamente do original em latim “*Miscellanea Analytica*” de Moivre 1730 a menos dos parênteses onde há uma explicação com termos mais modernos para um melhor entendimento deste trabalho. Moivre em sua demonstração utiliza a grafia  $\log$  para logaritmo hiperbólico.

Para cálculo do coeficiente do termo médio de um binômio, partamos de :

$$\frac{n-l+1}{l} \times \frac{n-l+2}{l-1} \times \frac{n-l+3}{l-2} \times \frac{n-l+4}{l-3} \times \frac{n-l+5}{l-4} \dots$$

Como sendo a combinação de n elementos tomados l a l

Para o termo médio  $l = \binom{n}{2}$ , então:

$$\frac{\frac{1}{2}n + 1}{\frac{1}{2}n} \times \frac{\frac{1}{2}n + 2}{\frac{1}{2}n - 1} \times \frac{\frac{1}{2}n + 3}{\frac{1}{2}n - 2} \times \frac{\frac{1}{2}n + 4}{\frac{1}{2}n - 3} \times \frac{\frac{1}{2}n + 5}{\frac{1}{2}n - 4} \dots$$

Agora  $m = \left(\frac{1}{2}\right)n$  e rearrajando os termos teremos:

$$\frac{m + 1}{m - 1} \times \frac{m + 2}{m - 2} \times \frac{m + 3}{m - 3} \times \frac{m + 4}{m - 4} \times \frac{m + 5}{m - 5} \dots \frac{2m}{m}$$

O próximo passo dado por Moivre é:

Aplicação de logaritmo

$$\log 2 + \begin{cases} 2 \times \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} + \dots \right) \\ 2 \times \left( \frac{2}{m} + \frac{8}{[3]m^3} + \frac{32}{5m^5} + \frac{128}{7m^7} + \frac{512}{9m^9} + \dots \right) \\ 2 \times \left( \frac{3}{m} + \frac{27}{3m^3} + \frac{243}{5m^5} + \frac{2187}{7m^7} + \frac{19683}{9m^9} + \dots \right) \end{cases} \text{TABELA 1}$$

Explicando em termos mais modernos:

$$C_{2m}^m = \frac{m + 1}{m} \times \frac{m + 2}{m - 1} \times \frac{m + 3}{m - 2} \times \dots \times \frac{2m}{1}$$

Ou rearranjando desta forma como descrito mais acima:

$$\frac{m + 1}{m - 1} \times \frac{m + 2}{m - 2} \times \frac{m + 3}{m - 3} \times \frac{m + 4}{m - 4} \times \frac{m + 5}{m - 5} \dots \frac{2m}{m}$$

Um **parêntese** para aplicação de logaritmo e justificando em termos de somatória para melhor entendimento do que está transcrito do livro *Miscellanea Analytica*:

$$\log(C_{2m}^m) = \sum_{k=1}^{m-1} \log\left(\frac{m+k}{m-k}\right) + \log(2) = \sum_{k=1}^{m-1} \log\left(\frac{1 + \frac{k}{m}}{1 - \frac{k}{m}}\right) + \log(2)$$

Observando que k varia de 1 a m-1 e utilizando a série de Taylor, já conhecida por Moivre aplicando série de Brook Taylor (Londres, 18 de agosto de 1685 -Londres,30 de novembro de 1731) matemático britânico:

Série de Taylor:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{para } |x| < 1,$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i (x^{i+1} - (-x)^{i+1})}{i+1} = 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

Considera-se  $i=2j$  porque  $i$  precisa ser par, quando  $i$  é imparo valor da expressão acima resulta zero.

Obtemos então, chamando de  $x = \frac{k}{m}$ :

$$\log(C_{2m}^m) - \sum_{k=1}^{m-1} 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2j+1} \times \frac{k^{2j+1}}{m^{2j+1}} + \log(2) \quad \text{Equação A}$$

Conseguimos então explicar a tabela desenvolvida por Moivre com a série acima.

Voltemos ao *Miscellanea*...

Como trata-se de uma somatória em *Miscellanea*, Moivre soma os termos da TABELA 1 por colunas:

$$\log 2 + \begin{cases} 2x \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{[5]m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} + \dots \right) \\ 2x \left( \frac{2}{m} + \frac{8}{[3]m^3} + \frac{32}{5m^5} + \frac{128}{7m^7} + \frac{512}{9m^9} + \dots \right) \\ 2x \left( \frac{3}{m} + \frac{27}{3m^3} + \frac{243}{5m^5} + \frac{2187}{7m^7} + \frac{19683}{9m^9} + \dots \right) \end{cases}$$

$$I = \frac{2}{m} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots)_{j=0}$$

$$II = \frac{2}{3m^3} \times (1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + \dots)_{j=1}$$

$$III = \frac{2}{5m^5} \times (1 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 8^5 + \dots)_{j=2}$$

$$IV = \frac{2}{7m^7} \times (1 + 2^7 + 3^7 + 4^7 + 5^7 + 6^7 + 7^7 + 8^7 + \dots)_{j=3}$$

A coluna I temos a série dos  $m-1$  primeiros inteiros e Moivre troca a variável  $m-1$  por  $s$ , ou seja,  $m-1=s$

Então teremos segundo Bernoulli (soma de potências), a somatória das colunas I,II,III,IV, respectivamente: ( Moivre já conhecia estes dados, por *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli) como:

TABELA 2:

$$\frac{ss + s}{m} \quad (\text{Facilmente conseguida pela somatória de uma PA dos } m-1 \text{ primeiros inteiros})$$

$$\frac{\frac{1}{2}s^4 + s^3 + \frac{1}{2}ss}{3m^3}$$

$$\frac{\frac{1}{3}s^6 + s^5 + \frac{5}{6}s^4 + \frac{1}{6}ss \dots}{5m^5}$$

$$\frac{\frac{1}{4}s^8 + s^7 + \frac{7}{6}s^6 + \frac{7}{12}s^4 \dots}{7m^7}$$

$$\frac{\frac{1}{5}s^{10} + s^9 + \frac{3}{2}s^8 + \frac{7}{5}s^6 \dots}{9m^9}$$

Agora para obtermos a soma das somas, Moivre considerou  $x = \frac{s}{m}$  e considerando a somatória somente da primeira coluna:

$$s \times \left( x + \frac{1}{2x^3}x^3 + \frac{1}{3x^5}x^5 + \frac{1}{4x^7}x^7 + \frac{1}{5x^9}x^9 + \dots \right)$$

Que é igual a :

$$s \times \left( \frac{2}{1x^2}x + \frac{2}{3x^4}x^3 + \frac{2}{5x^6}x^5 + \frac{2}{7x^8}x^7 + \frac{2}{9x^{10}}x^9 + \dots \right)$$

Como visto na página 37, temos que :

$$\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \dots$$

Que é igual a :

$$\log \frac{1+x}{1-x} = v$$

Então, agora multiplicando pela derivada de x (fluente, como era na época conhecida a derivada) teremos:

$$\frac{2x\dot{x}}{1} + \frac{2x^3\dot{x}}{3} + \frac{2x^5\dot{x}}{5} + \frac{2x^7\dot{x}}{7} + \frac{2x^9\dot{x}}{9} + \dots = v\dot{x}$$

Agora integrando por partes os dois lados da equação teremos:

$$\frac{2x^2}{1 \times 2} + \frac{2x^4}{3 \times 4} + \frac{2x^6}{5 \times 6} + \frac{2x^8}{7 \times 8} + \dots = x \log \frac{1+x}{1-x} - \log \frac{1}{1-x}$$

Finalmente, se substituirmos  $x = \frac{s}{m}$  e multiplicarmos por **m** teremos

(Lembrando também que temos que substituir  $s = m - 1$ , para a igualdade abaixo)

Primeira série:

$$\begin{aligned} \frac{ss}{m} + \frac{s^4}{2 \times 3m^3} + \frac{s^6}{3 \times 5 \times m^5} + \frac{s^8}{4 \times 7 \times m^7} + \dots &= mx \log \frac{1+x}{1-x} - m \log \frac{1}{1-x} \\ &= (2m-1) \log(2m-1) - 2m \log(m) \end{aligned}$$

Analogamente, a soma da segunda coluna será a segunda série:

$$\frac{s}{m} + \frac{s^3}{3m^3} + \frac{s^5}{5m^5} + \frac{s^7}{7m^7} + \frac{s^9}{9m^9} \dots$$

Que resulta em :

$$\frac{1}{2} \log \frac{m+s}{m-s} = \frac{1}{2} \log(2m-1)$$

O somatório total das duas séries mais  $\log 2$  e subtraindo logaritmo de  $2^{2m}$  será então:

$$\left(2m - \frac{1}{2}\right) \log(2m - 1) - 2m \log(2m) + \log 2$$

Agora se considerarmos  $2m=n$  teremos o valor encontrado por Moivre no ítem I do suplemento *Approximatio*...:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{\left(2 \cdot (n-1)^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right)}{n^n}$$

Pois:

$$\log \frac{\left(2 \cdot (n-1)^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right)}{n^n} \text{ é igual a } \left(2m - \frac{1}{2}\right) \log(2m - 1) - 2m \log(2m) + \log 2$$

Vamos perceber que Moivre não está considerando as outras séries envolvidas, no caso as somatórias das próximas colunas.

Moivre ainda descreve em *Miscellanea* que se fizer a somatória das séries posteriores, da terceira, quarta, quinta e sexta colunas encontra uma série que alterna valores em positivo e negativo. Moivre acreditou que esta série convergia e que não haveria necessidade de mais outros valores. E que esta série teria um valor de:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} \dots$$

Na página 126 do Liber VI de *Miscellanea Analytica*, Moivre faz os cálculos com logaritmos hiperbólico:

$$\ln \left( \frac{C_n^{n/2}}{2^n} \right) \approx \ln \left( \frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n} \right) + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$$

$2A=2,1682$  que Moivre considera :

$$\frac{2 \frac{21}{125} (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$$

Concluindo então com a tábua de logaritmos:

$$\ln \left( \frac{C_n^{n/2}}{2^n} \right) \approx \ln \left( \frac{2,1682(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n} \right)$$

Portanto, Moivre chega a constante de  $2,168 = 2 + 21/125$

No entanto, Moivre acreditava que a série fosse convergente o que não é verdade, a série é divergente. Ele continuou com seus cálculos apenas até onde conseguia boa aproximação, ou seja, até os quatro primeiros termos da série alternada.

Esta série foi notada por Stirling quando enviou a carta a Moivre.

#### CARTA DE JAMES STIRLING A ABRAHAM DE MOIVRE

Esta carta se encontra no livro *Miscellanea Analytica* livro VII capítulo II páginas 170 a 172 .

A carta se inicia com os motivos que incentivaram Stirling ao estudo de interpolação de séries. Stirling havia sugerido ao Dr. James Alexander Cuming, um nobre escocês, que alguns problemas de interpolação de séries podiam ser resolvidos utilizando método diferencial de Newton, o que Dr. Alex Cuming duvidou que Stirling conseguisse tal feito, o que impulsionou Stirling ao trabalho.

Stirling inicia com uma proposição dizendo que tendo uma binomial com  $n$  par ou  $n-1$  ímpar e  $(1+1)^n$ , o termo médio está para a somatória de todos os termos assim com a unidade está para a média geométrica entre a série abaixo e o semi círculo. O círculo para Stirling tinha diâmetro igual a 1.

Esta série teria sido conseguida pelo Método Diferencial de Newton para interpolação de séries :

$$n + \frac{A}{2(n+2)} + \frac{9B}{4(n+4)} + \frac{25C}{6(n+6)} + \frac{49D}{8(n+8)} + \frac{81E}{10(n+10)} + \dots$$

Esta série é conseguida através de uma relação de recorrência

Então em termos modernos teríamos:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \times S}}$$

Stirling dá um exemplo numérico com  $n=100$ , ou seja, com um binômio com  $n=100$  ou  $n=99$ , chegando à conclusão que os resultados para  $n=100$  ou  $n=99$  são muito próximos. E utilizando séries recorrentes dá outra aproximação que se segue.

Além disso, para Stirling, na prática, não seria necessário utilizar os termos da série efetivamente, apenas tomar a média entre semi circunferência do círculo de raio unitário já seria uma melhor aproximação:

$$\frac{2^n}{C_n^{n/2}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right)}$$

Stirling diz que encontrou esta solução utilizando o Método Diferencial de Newton e que omitiria a demonstração porque iria publicá-la posteriormente. Esta seria publicada como proposição XXIII página 119 do *Methodus Differentialis* em 1730 .

Chamando  $c=4/\pi$  então Stirling obtém:

$$\frac{2^n}{C_n^{n/2}} \approx \sqrt{\frac{c}{2n + 1}}$$

O que traduzindo em termos mais modernos conseguimos...

Enfim a fórmula de Stirling:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

PUBLICAÇÃO DE METHODUS DIFFERENTIALIS JAMES STIRLING

A proposição XXIII de seu livro *Methodus Differentialis* tem a mesma forma e enunciado que sua carta a Moivre em que Stirling omitiu a demonstração.

O *Methodus Differentialis* de Stirling se situa na mesma Escola de Análise de John Wallis (Ashford, Kent, 22 de Novembro de 1616-Oxford, 28 de Outubro de 1703), matemático britânico e Newton continuando em Taylor, se consagrando pela somatória de séries e problemas de aceleração de convergência e aproximações numéricas.

Stirling estudou o cálculo de probabilidades sobre a dinâmica do trabalho de Jacques Bernoulli, sobre o que chamamos de lei dos grandes números.

O primeiro passo de Stirling na direção da avaliação de  $n!$  é devido a Wallis em *Arithmetica Infinitorum* (1655) e o *Treatise of Algebra* (1685).

Stirling trabalhou em interpolação de séries e avaliou  $(\frac{1}{2})!$  conseguido como primeiro termo numa relação de recorrência.

Trabalhou a sequência  $\log n!$ . Avaliou  $\log(10,5)$

Stirling usando relação de recorrência, conseguiu o valor de  $0,5!$  que é expresso como 0.8862269

Ele utilizou os trabalhos de Wallis para determinação da integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Que encontrou um produto infinito

Ou seja, a área de um semi círculo de diâmetro 1. Para isso, Wallis em *Arithmetica Infinitorum* Pars Secunda *Interpolatione Serium* utilizou o método de Cavalieri.

Na proposição CXXI página 92 de *Arithmetica Infinitorum*, Wallis estuda a área de um semi-círculo e diz que a razão entre a área do círculo e o quadrado do diâmetro está entre 1 e  $3/2$ . Na prop. CXXVII, Wallis utiliza a área do semi-círculo conseguido por interpolação de séries e consegue o valor conhecido para  $\pi$ .

## PROP. CXXI. Corollarium.

**I**deoq; Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipsis qualibet ad Parallelogrammum sibi circumscriptum,) eam habet rationem, quam habent Radices quadratice universales Residuorum seriei infinite Aequalium serie Secundarum multiplicata, ad seriem illam Aequalium.

O O 2

Nam

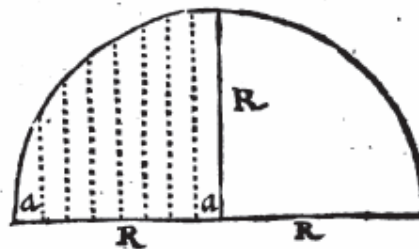
Digitized by Google

92

Arithmetica Infinitorum.

Prop. 121a

Nam si circuli Radius ponatur R, (cujus Pars infinite parva  $\frac{R}{\infty} = a$ ,) eique insistant Perpendiculares sive sinus recti numero infiniti Quadrantem circuli complentes; erunt illæ perpendiculares medietate proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum est;) hoc est.



Páginas 92 de *Arithmetica Infinitorum* John Wallis disponível em [http://books.google.com.br/books/about/Arithmetica\\_infinitorum.htm](http://books.google.com.br/books/about/Arithmetica_infinitorum.htm) acesso em 20/12/2012

Stirling ainda estudou o termo geral chamando de  $u_n$ :

$$u_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$$

E consegui uma relação de recorrência na Proposição XVIII do livro *Methodus Differentialis*:

$$u_{n+1} = u_n \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

Na proposição XXIV Exemplum I Stirling encontra o valor de:

$$\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Utilizando relação de recorrência acima desenvolvida e o resultado obtido por Wallis, Stirling deduz a conhecida “Fórmula de Stirling”.

Mas é em sua proposição XXVIII que é demonstrando o valor de  $\ln(n!)$ , utilizando o Método das Diferenças de Newton.

Stirling consegue demonstrar que :

$$\ln(m!) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \ln\left(m + \frac{1}{2}\right) - \left(m + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(2m+1)^{2k+1}}$$

ou ainda expandindo a série:

$$\begin{aligned} \ln(n!) = & \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{12} \frac{1}{2n+1} + \frac{7}{360} \frac{1}{(2n-1)^3} \\ & - \frac{31}{1260} \frac{1}{(2n-1)^5} + \dots \end{aligned}$$

PUBLICAÇÃO SUPLEMENTO AUXILIAR DE 20 PÁGINAS MISCELLANEA  
ANALYTICA

Após a publicação de *Miscellanea Analytica* em 1730, Moivre publicou um suplemento auxiliar de 20 páginas alterando e completando algumas demonstrações suas. Ele inicia seu suplemento dizendo que tinha negligenciado algumas séries, isso porque ele havia recebido em 1729, ou seja, antes da publicação do livro de Stirling uma carta do mesmo datada de 19 de junho de 1729 corrigindo as aproximações (série) e tábua de logaritmos.

É após a publicação do *Methodus Differentialis* que demonstra a chamada fórmula de Stirling,

Moivre então publica esse suplemento auxiliar de *Miscellanea Analytica* de 20 páginas, dizendo que muito tinha aprendido com uma carta de Stirling e que a tabela de logaritmos do *Miscellanea Analytica* não tinha precisão a partir da quinta casa decimal e que Stirling havia indicado uma série que convergia mais rapidamente que a série que ele utilizou. Disse também que se ele tivesse se aplicado mais horas poderia ter resolvido o problema corretamente e disse que após a carta de Stirling ele teve tempo para repensar no problema e resolver de maneira diferente daquela utilizada por Stirling para  $\log n!$ .

Moivre então em seu suplemento utiliza outra série e encontra forma similar a de Stirling .

Moivre repensou a fórmula e novamente utilizando séries e deduzindo a partir de  $\log(m-1)!$

Como já visto:

$$\log \frac{2(2m-1)^{\left(2m-\frac{1}{2}\right)}}{(2m)^{(2m)}} \text{ é igual a } \left(2m-\frac{1}{2}\right) \log(2m-1) - 2m \log(2m) + \log 2$$

Foi obtido através de quadratura (integral) e as frações obtidas através de séries:

A primeira fração se originará através da somatória da terceira coluna referente à TABELA 2

$$\frac{ss}{6m^3} \times \left( 1 + \frac{ss}{mm} + \frac{s^4}{m^4} + \frac{s^6}{m^6} + \frac{s^8}{m^8} + \dots \right)$$

Aqui vemos uma PG de razão infinita  $q = \frac{s^2}{m^2}$

com  $s=m-1$  consegue-se :

$$\frac{1}{6m} \times \frac{(m-1)^2}{2m-1}$$

que se reduz a  $\frac{1}{12}$  considerando  $m \rightarrow \infty$

De forma análoga ele chega às outras frações.

Em seu problema I Moivre calcula o logaritmo de um produto com  $m-1$  termos:

Uma tabela então é organizada, utilizando expansões logarítmicas em série de Taylor:

Considerando que:

$$\log \frac{x}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \dots$$

com  $|x| > 1$

TABELA 3:

$$\log \frac{m}{m-1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{2mm} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{4m^4} + \frac{1}{5m^5} + \dots$$

$$\log \frac{m}{m-2} = \frac{2}{m} + \frac{4}{2mm} + \frac{8}{3m^3} + \frac{16}{4m^4} + \frac{32}{5m^5} + \dots$$

$$\log \frac{m}{m-3} = \frac{3}{m} + \frac{9}{2mm} + \frac{27}{3m^3} + \frac{81}{4m^4} + \frac{243}{5m^5} + \dots$$

$$\log \frac{m}{m-4} = \frac{4}{m} + \frac{16}{2mm} + \frac{64}{3m^3} + \frac{256}{4m^4} + \frac{1024}{5m^5} + \dots$$

Na somatória por colunas Moivre chega a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \frac{3}{m} + \frac{4}{m} + \frac{5}{m} + \dots + \frac{m-1}{m} \\ & \frac{1}{2mm} + \frac{4}{2mm} + \frac{9}{2mm} + \frac{16}{2mm} + \frac{25}{2mm} + \dots + \frac{(m-1)^2}{2mm} \\ & \frac{1}{3m^3} + \frac{8}{3m^3} + \frac{27}{3m^3} + \frac{64}{3m^3} + \frac{125}{3m^3} + \dots + \frac{(m-1)^3}{[3m^3]} \\ & \frac{1}{4m^4} + \frac{16}{4m^4} + \frac{81}{4m^4} + \frac{256}{4m^4} + \frac{625}{4m^4} + \dots + \frac{(m-1)^4}{4m^4} \end{aligned}$$

Por outro lado, agora analisaremos dados obtidos por Jacob Bernoulli.

Utilizando as tabelas de Bernoulli já conhecidas por Moivre encontradas em *Ars Conjectandi* (*Pars secunda* páginas 97 e 98) onde:

$\int l^c$  significa a somatória dos  $l$  primeiros termos elevado a uma potência  $c$

$$\begin{aligned}
\int, 1 &= \frac{1}{2}11 + \frac{1}{2}1 \\
\int, 1^2 &= \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}11 + \frac{1}{6}1 \\
\int, 1^3 &= \frac{1}{4}1^4 + \frac{1}{2}1^3 + \frac{1}{4}11 \\
\int, 1^4 &= \frac{1}{5}1^5 + \frac{1}{2}1^4 + \frac{1}{3}1^3 * -\frac{1}{30}1 \\
\int, 1^5 &= \frac{1}{6}1^6 + \frac{1}{2}1^5 + \frac{5}{12}1^4 * -\frac{1}{12}11 \\
\int, 1^6 &= \frac{1}{7}1^7 + \frac{1}{2}1^6 + \frac{1}{2}1^5 * -\frac{1}{6}1^3 * +\frac{1}{42}1 \\
\int, 1^7 &= \frac{1}{8}1^8 + \frac{1}{2}1^7 + \frac{7}{12}1^6 * -\frac{7}{24}1^4 * +\frac{1}{12}11 \\
\int, 1^8 &= \frac{1}{9}1^9 + \frac{1}{2}1^8 + \frac{2}{3}1^7 * -\frac{7}{15}1^5 * +\frac{2}{9}1^3 * -\frac{1}{30}1 \\
\int, 1^9 &= \frac{1}{10}1^{10} + \frac{1}{2}1^9 + \frac{3}{4}1^8 * -\frac{7}{10}1^6 * +\frac{1}{2}1^4 * -\frac{3}{20}11 \\
\int, 1^{10} &= \frac{1}{11}1^{11} + \frac{1}{2}1^{10} + \frac{5}{6}1^9 * -11^7 * +11^5 * -\frac{1}{2}1^3 * +\frac{5}{6[6]}1
\end{aligned}$$

Tabela retirada de *Ars Conjectandi* Pars Secunda pág 97

Bernoulli então generalizando encontra A,B,C,e D:

$$\int (I^c) = \left( \frac{1}{(c+1)} \right) I^{(c+1)} + \left( \frac{1}{2} \right) I^c + \left( \frac{c}{2} \right) A I^{(c-1)} + \frac{(c(c-1)(c-2))}{(2 \cdot 3 \cdot 4)} B I^{(c-3)} + \dots$$

$$\int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} B n^{c-3} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C n^{c-5} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4 \cdot c - 5 \cdot c - 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} D n^{c-7} + \dots$$

Figura retirada de *Ars conjectandi* página 97

Utilizando Bernoulli deduz os coeficientes A,B,C,D:

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}$$

Para as séries acima a tabela de Bernoulli se transforma em:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2}ll}{m} + \frac{\frac{1}{2}l}{m} \\ & \frac{\frac{1}{3}l^3}{2mm} + \frac{\frac{1}{2}ll}{2mm} + \frac{\frac{1}{6}l}{2mm} \\ & \frac{\frac{1}{4}l^4}{3m^3} + \frac{\frac{1}{2}l^3}{3m^3} + \frac{\frac{1}{4}ll}{3m^3} \\ & \frac{\frac{1}{5}l^5}{4m^4} + \frac{\frac{1}{2}l^4}{4m^4} + \frac{\frac{1}{3}l^3}{4m^4} * - \frac{\frac{1}{30}l}{4m^4} \end{aligned}$$

Somando agora em colunas teremos:

$$\begin{aligned} & m \times \left[ \frac{1}{2} \times \frac{ll}{mm} + \frac{1}{6} \times \frac{l^3}{m^3} + \frac{1}{12} \times \frac{l^4}{m^4} + \frac{1}{20} \times \frac{l^5}{m^5} + \dots \right] \\ & \frac{\frac{1}{2}l}{m} + \frac{\frac{1}{4}ll}{mm} + \frac{1}{6} \frac{l^3}{m^3} + \frac{1}{8} \frac{l^4}{m^4} + \frac{1}{10} \frac{l^5}{m^5} + \dots \\ & \frac{A}{2m} \times \left[ \frac{1}{m} + \frac{ll}{mm} + \frac{l^3}{m^3} + \frac{l^4}{m^4} + \frac{l^5}{m^5} + \dots \right] \\ & \frac{B}{3 \times 4m^3} \times \left[ \frac{3l}{m} + \frac{6ll}{mm} + \frac{10l^3}{m^3} + \frac{15l^4}{m^4} + \frac{21l^5}{m^5} + \dots \right] \\ & \frac{C}{5 \times 6m^5} \times \left[ \frac{5l}{m} + \frac{15ll}{mm} + \frac{35l^3}{m^3} + \frac{70l^4}{m^4} + \frac{126l^5}{m^5} + \dots \right] \\ & \frac{D}{7 \times 8m^7} \times \left[ \frac{7l}{m} + \frac{28ll}{mm} + \frac{84l^3}{m^3} + \frac{210l^4}{m^4} + \frac{462l^5}{m^5} + \dots \right] \end{aligned}$$

Fazendo  $x = \frac{l}{m}$  teremos:

E assim a primeira série será:

$$m \times \left[ \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \dots \right]$$

E usando os mesmos artifícios anteriores utilizados em *Miscellanea Analytica* Moivre encontra o valor para a primeira série.

Como  $\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$  é igual a  $v$  que é igual a :

$$x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

E multiplicando por  $\dot{x}$  ambos os lados teremos:

$$x\dot{x} + \frac{1}{2}xx\dot{x} + \frac{1}{3}x^3\dot{x} + \frac{1}{4}x^4\dot{x} + \dots = v\dot{x}$$

Integrando e com  $x = \frac{l}{m}$  fazendo  $l = m - 1$ , Moivre consegue a primeira série:

$$m - 1 - \log m$$

Para a segunda série de:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\log m$$

Resultará na soma das duas séries:

$$m - 1 - \frac{1}{2}\log m$$

A terceira série consegue pela somatória de uma PG de razão  $\frac{l}{m}$  :

Resulta então:

$$\frac{A}{2m} x(m-1)$$

Substituindo  $A=1/6$  conseguido por Bernoulli obtém-se:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{12m}$$

Subtraindo de :

$$(m - 1)\log m$$

Pois como visto acima, trata-se da somatória de todos os termos da TABELA 3 então precisaremos subtrair o valor de  $\log m^{(m-1)}$ . Obteremos para a primeira, segunda, terceira e sucessivamente até a sexta série os valores:

TABELA 4:

$$\begin{aligned} & \left(m - \frac{1}{2}\right)\log m \\ & +1 - m \\ & -\frac{1}{12} + \frac{1}{12m} \\ & +\frac{1}{360} - \frac{1}{360m^3} \\ & -\frac{1}{1260} + \frac{1}{1260m^5} \\ & +\frac{1}{1680} - \frac{1}{1680m^7} \end{aligned}$$

Que representará então:  $\log (m-1)!$

Considere então o cálculo de  $m-1=1$ , ou seja : calcule o valor de  $\log 1$ , obviamente  $m=2$  e encontre:

$\log 1!$  Será igual a :

$$\frac{3}{2}\log 2 - 2 + \frac{1}{12 \times 2} - \frac{1}{360 \times 8} + \frac{1}{1260 \times 32} - \frac{1}{1680 \times 128} \dots + 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} + \dots$$

Como  $\log 1=0$  então teremos que:

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \dots$$

É igual a :

$$2 - \frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{12 \times 2} + \frac{1}{360 \times 8} - \frac{1}{1260 \times 32} + \frac{1}{1680 \times 128} - \frac{1}{1188 \times 512} \dots$$

que segundo Moivre que converge de maneira mais aceitável.

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi item I*

Se uma binomial do tipo  $(1 + 1)^n$  elevada a uma potência grande, a razão entre o termo médio e a soma de todos os termos  $2^n$  é:

$$\frac{2A \times \sqrt{n-1} \sqrt[n]{n}}{n^n \times \sqrt{n-1}}$$

Moivre considerou o logaritmo hiperbólico de A como:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$$

Pois como já demonstrado:

$$\ln \left( \frac{C_n^{n/2}}{2^n} \right) \approx \ln \left( \frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n} \right) + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$$

E considerando como uma Quantidade :

$$\frac{\sqrt[n]{n-1}}{n^n} \text{ ou } 1 - \frac{1}{n} \Big| ^n \text{ O traço ao lado da expressão significa } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Como:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n-1)^n}{n^n}$$

Para  $n \rightarrow \infty$  obtemos  $e^{(-1)}$ ,

pois,  $\lim_{(n \rightarrow \infty)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{(-1)}$

Portanto  $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  é igual a  $-1$  quando  $n \rightarrow \infty$

Moivre conclui da expressão acima que:

$$\ln \frac{\left(2(n-1)^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right)}{n^n} \approx \ln \frac{2}{(e\sqrt{(n-1)})} = \ln \frac{2}{\sqrt{(n-1)}} - 1$$

Moivre denota logaritmo hiperbólico de  $\mathbf{B}$  como:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} - 1$$

A expressão será então escrita como:

$$\frac{2B}{\sqrt{n-1}}$$

ou apenas:

$$\frac{2B}{\sqrt{n}} \text{ pois considera-se } n \rightarrow \infty$$

Considerando agora  $\ln B$  como :

$$1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$$

(Note que Moivre também chama de  $\ln B$  esta outra série):

A expressão ficará:

$$\frac{2}{B\sqrt{n}}$$

E fazendo um comparativo com a expressão de Stirling:

$$\ln\left(\frac{C_n^{n/2}}{2^n}\right) \approx \ln\left(\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}\right) + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$$

$$\ln\frac{(2(n-1))^{(n-\frac{1}{2})}}{n^n} \approx \ln\frac{2}{(e\sqrt{(n-1)})} = \ln\frac{2}{\sqrt{(n-1)}} - 1 \approx \ln\frac{2}{\sqrt{n}} - 1$$

Por outro lado na expressão de Stirling temos:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

Aplicando logaritmo hiperbólico  $\ln\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2\pi$

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \dots = \left(\frac{1}{2}\right)\ln 2\pi$$

Portanto:

$$B = \sqrt{(2\pi)}$$

**Obs:** Se tivermos:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

Conseqüentemente:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Ou seja, se substituirmos  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$  para cálculo de  $\frac{C_n^{n/2}}{2^n}$  obteremos o resultado conseguido por Stirling

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi item II*

O logaritmo da razão entre o termo médio e um termo qualquer distante  $l$  do termo médio, admitindo  $m = \frac{1}{2} \cdot n$ .

$$\overline{m + l - \frac{1}{2}} \times \log \overline{m + l - 1} + \overline{m - l + \frac{1}{2}} \times \log \overline{m - l + 1} - 2m \times \log m + \log \frac{m+1}{m}$$

Considerando:

$$n! \approx \sqrt{(2\pi n)} \cdot n^n \cdot e^{(-n)}$$

$$\frac{\left( \frac{(2m)!}{(m! \cdot m!)} \right)}{\left( \frac{(2m)!}{((m+l)! \cdot (m-l)!)} \right)}$$

Simplificando consegue-se:

$$\frac{((m+l)! \cdot (m-l)!)}{(m!)^2}$$

Utilizando a aproximação de Stirling (Moivre)  $n! \approx \sqrt{(2\pi n)} \cdot n^n \cdot e^{(-n)}$  facilmente chegamos a :

$$\frac{\left( (m-l)^{\left(m-l+\frac{1}{2}\right)} \right) \cdot (m+l)^{\left(m+l+\frac{1}{2}\right)} }{m^{(2m+1)}}$$

Ou seja, o valor encontrado acima é conseguido com a expressão abaixo encontrada por Moivre em *Miscellanea Analytica* considerando que  $m$  é um número muito grande e aplicando logaritmo:

$$m + l - \frac{1}{2} \times \log m + l - 1 + m - l + \frac{1}{2} \times \log m - l + 1 - 2m \times \log m + \log \frac{m+1}{m}$$

(O traço acima atualmente significa parêntese, como era escrito em *Miscellanea Analytica*)

Em *Miscellanea Analytica* páginas 128 e 129 “in” quer dizer multiplicação.

Que se trata da razão entre o coeficiente do termo médio e o coeficiente do termo distante  $p$  do termo médio será:

Que é exatamente

$$\frac{m-p}{m} \text{ in } \frac{m-1}{m-1} \times \frac{m-2}{m-2} \times \frac{m-3}{m-3} \times \frac{m-4}{m-4} \times \frac{m-5}{m-5}$$

Figura retirada de *Miscellanea Analytica* página 128

Aplicando log temos então:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times \frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \frac{1}{9m^9} \text{ etc.} \\ 2 \times \frac{2}{m} + \frac{2^3}{3m^3} + \frac{2^5}{5m^5} + \frac{2^7}{7m^7} + \frac{2^9}{9m^9} \text{ etc.} \\ 2 \times \frac{3}{m} + \frac{3^3}{3m^3} + \frac{3^5}{5m^5} + \frac{3^7}{7m^7} + \frac{3^9}{9m^9} \text{ etc.} \\ \dots \\ 2 \times \frac{p-1}{m} + \frac{(p-1)^3}{3m^3} + \frac{(p-1)^5}{5m^5} + \frac{(p-1)^7}{7m^7} + \frac{(p-1)^9}{9m^9} \text{ etc.} \end{array} \right\} + \log. \frac{m-p}{p}$$

Figura retirada página 129 de *Miscellanea Analytica*

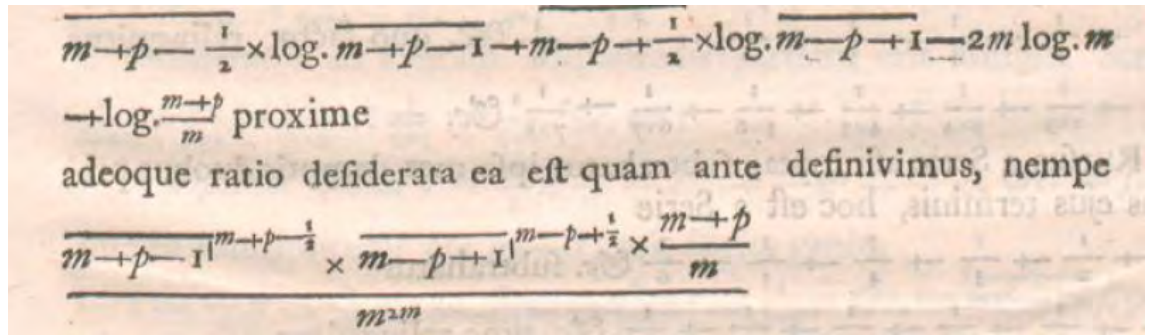


Figura retirada página 129 de *Miscellanea Analytica*

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii*

$(a + b)^n$  in Seriem expansi Corolário I

Se  $m$  ou  $\frac{1}{2}n$  for infinitamente grande podemos admitir que:

O logaritmo da razão entre um termo distante  $l$  tem para o termo médio será :

$$\frac{2l}{n}$$

Ou, se chamarmos  $y$  como termo distante  $l$  do termo médio e  $y_0$  o termo médio teremos:

$$\ln \frac{y}{y_0} = -\frac{(2l)}{n}$$

Considerando o item II que:

A razão entre o termo médio e um termo qualquer distante  $l$  do termo médio é:

$$\frac{y_0}{y} = \frac{\left( (m-l)^{\left(m-l+\frac{1}{2}\right)} \cdot (m+l)^{\left(m+l+\frac{1}{2}\right)} \right)}{m^{(2m+1)}}$$

Então o logaritmo da razão entre um termo distante  $l$  tem para o termo médio será:

$$\ln \frac{m^{(2m+1)}}{\left(m-l\right)\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\left(m+l\right)\left(m+l+\frac{1}{2}\right)}$$

Que será igual a :

$$-\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{m}\right)-\left(m+l+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{l}{m}\right)$$

Se considerarmos :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} \dots$$

$x = \frac{l}{m}$  e substituímos na equação levando em conta que  $m \rightarrow \infty$  encontramos

$$\frac{2ll}{n}$$

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii*  
 $(a+b)^n$  in Seriem expansi Corolário 2

Considerando  $y$  como termo distante  $l$  do termo médio e  $y_0$  o termo médio, teremos:

$$y = y_0 \cdot e^{\left(\frac{-2ll}{n}\right)}$$

Como:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Fazendo  $x = -\frac{(2l)}{n}$

$$e\left(-\frac{(2l)}{n}\right) = 1 - \frac{2l}{n} + \frac{4l^2}{2nn} - \frac{8l^3}{6n^3} + \frac{16l^4}{24n^4} - \frac{32l^5}{120n^5} + \frac{64l^6}{720n^6}$$

E como:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

A somatória dos termos a uma distância  $l$  interceptada pelo termo médio será:

$$\int y = \int y_0 \cdot e\left(-\frac{(2l)}{n}\right)$$

Como  $y_0$  é constante:

Integrando a série acima, resulta a seguinte série:

$$l - \frac{2l^3}{1 \times 3n} + \frac{4l^5}{2 \times 5nn} - \frac{8l^7}{6 \times 7n^3} + \frac{16l^9}{24 \times 9n^4} - \frac{32l^{11}}{120 \times 11n^5}$$

que é a série:

$$\frac{((-2)^k \cdot l^{(2k+1)})}{((k!)n^k(2k+1))}$$

Multiplicando a integral da série por  $\frac{2}{\sqrt{nc}}$

$$\frac{2}{\sqrt{(nc)}} \times l - \frac{2l^3}{1 \times 3n} + \frac{4l^5}{2 \times 5nn} - \frac{8l^7}{6 \times 7n^3} + \frac{16l^9}{24 \times 9n^4} - \frac{32l^{11}}{120 \times 11n^5}$$

E supondo:  $l = s\sqrt{n}$

Ficamos com:

$$\frac{2}{\sqrt{c}} \times s - \frac{(2s^3)}{3} + \frac{(4s^3)}{(2 \times 5)} - \frac{(8s^7)}{(6 \times 7)} + \frac{(16s^9)}{(24 \times 9)} - \frac{(32s^{11})}{120} \times 11$$

Agora se consideramos

$$s = \frac{1}{2}$$

ou

$$l = \frac{1}{2} \sqrt{n}$$

Agora:

$$\frac{2}{\sqrt{c}} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{(3 \times 4)} + \frac{1}{(2 \times 5 \times 8)} - \frac{1}{(6 \times 7 \times 16)} + \frac{1}{(24 \times 9 \times 32)} - \frac{1}{(120 \times 11 \times 64)}$$

Que converge rápido com a ajuda de sete ou oito termos.

A somatória da série dá 0,427812, multiplicado por  $\frac{2}{\sqrt{(2\pi)}}$  que é 0,797884 que resulta 0,341344

Ou:

$$\frac{2}{\sqrt{(2\pi)}} \times 0,427812$$

Que resulta 0,341344

Então Moivre utilizando uma tábua de logaritmos, encontra que o número procurado será 0,341344 (A área do termo médio até um termo  $l$ )

Moivre utiliza a série com  $s = \frac{1}{2}$  pois converge mais rápido, ou  $l = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n}$

Lema:

Num evento onde as probabilidades de acontecer ou falhar são iguais num certo número de experimentos, percebe-se que se  $l$  for um dado número menor que  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ , então a probabilidade deste de nem ocorrer mais frequentemente que  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+l}$  e nem mais raramente que  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-l}$ . Se dois termos L e L que tem igual distância do meio termo da binomial,  $(1+1)^n$ , por um intervalo igual a  $l$ , seja a soma dos termos entre L e L e junto com os extremos, será a probabilidade requerida será a fração  $\frac{f}{2^n}$

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi Corolário 3*

Se tivermos um número infinito de experimentos, a probabilidade de um evento com igual número de chances de ocorrer ou falhar deve nem aparecer mais frequentemente que  $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$  vezes nem mais raramente que  $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$  vezes e será expresso pelo dobro do exposto no Corolário 2, ou seja, 0,682688 e conseqüentemente a probabilidade de falha será 0,317312 (1-0,682688) ou seja a razão entre essas probabilidades é próxima do termo 28 para o 13, ou seja,  $\frac{0,682688}{0,317312} \approx \frac{28}{13}$

Neste caso considerou-se  $l = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n}$

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii*  
 $(a + b)^n$  in Seriem expansi Corolário 4

Considerando um número infinito de eventos, mesmo não sendo aplicáveis, podemos considerar as conclusões anteriores.

Se tivermos  $n = 3600$ ,  $\frac{1}{2}n = 1800$  e  $\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} = \frac{1}{2}\sqrt{3600} = 30$  então a probabilidade do evento não está nem mais que 1830 nem menos que 1770 será de 0,682688 pois fazendo  $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$  o que resulta em 1830 e  $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$  que é igual a 1770.

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii*  
 $(a + b)^n$  in Seriem expansi Corolário 5

Temos então uma lei do Máximo fundamental para altas potências, a razão entre a soma de todos os termos inclui os extremos distantes de ambos os lados de um intervalo igual a  $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ , para a soma de todos os termos a 0,682688 ou 28/41, ou seja, como a probabilidade de

falha é de 0,317312 e tínhamos no Corolário 3 que  $\frac{0,682688}{0,317312} \approx \frac{28}{13}$  a probabilidade será

$$\frac{28}{(13 + 28)} = \frac{28}{41}$$

Se tivermos  $\frac{1}{4}\sqrt{2n}$ . Suponha  $n = 3600$  então temos

$\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{(2 \cdot 3600)}$  aproximadamente 21,2 que não é acima de  $\frac{1}{169}$ , pois  $\frac{21,2}{3600}$  é menor que

$\frac{1}{169}$  então o excesso de acontecimentos acima de 1800 vezes em 3600 experimentos não será mais que 21.

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii*  
 $(a + b)^n$  in Seriem expansi Corolário 6

A Quadratura de Newton- Cotes trata-se de uma fórmula de quadratura interpolatória, atualmente conhecida como a regra de Simpson dos 3/8, que utiliza um polinômio do interpolador de Lagrange do 3º grau.

Onde temos:

$$h = \frac{(b - a)}{3}, \text{ e:}$$

Considerando 4 pontos A,B,C,D

$$\frac{1 \times \overline{A + D} + 3 \times \overline{B + C}}{8} \times l \quad \text{Fórmula de quadratura}$$

Considerando 4 pontos e conseqüentemente 3 intervalos:

$$l_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$$

$$l_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} = \left(\frac{4}{6}\right)\sqrt{n}$$

Conseguimos:

$$\frac{3}{6}\sqrt{n}, \frac{4}{6}\sqrt{n}, \frac{5}{6}\sqrt{n}, \frac{6}{6}\sqrt{n}$$

E

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

Substituindo cada  $l_1, l_2, l_3, l_4$  em  $\frac{(2H)}{n}$

Obteremos:

$$-\frac{1}{2} \quad -\frac{8}{9} \quad -\frac{25}{18} \quad -\frac{2}{1}$$

Fazendo  $e^{-\frac{(2l)}{n}}$  com os valores acima temos:

0,60653; 0,41111; 0,24935; 0,13534 que seriam os valores das ordenadas A, B, C e

D substituídos na Fórmula de Quadratura e considerando  $l = \frac{1}{2}\sqrt{n}$  resulta em:

$$\frac{(1 \times (0,60653 + 0,13534) + 3 \times (0,41111 + 0,24935))}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{n} \text{ que é igual a}$$

$$0,170203 \times \sqrt{n}$$

Os valores foram substituídos na Fórmula da Quadratura para se obter a área ou

$$\int e^{-\left(\frac{(2l)}{n}\right)}$$

Lembrando que:

$$\int y = \int y_0 \cdot e^{-\left(\frac{(2l)}{n}\right)}$$

Multiplica-se o valor encontrado com a quadratura  $0,170203 \times \sqrt{n}$  por  $\frac{2}{\sqrt{(nc)}}$

$$0,170203 \times \sqrt{n} \times \frac{2}{\sqrt{(2\pi n)}}$$

Obtendo 0,13580

E depois multiplicamos por 2, pois temos os dois lados da curva interceptada pelo termo médio conseguindo: 0,27160 .

Somando com 0,682688 que é resultante de  $0,341344 \times 2$  como visto no Corolário 4

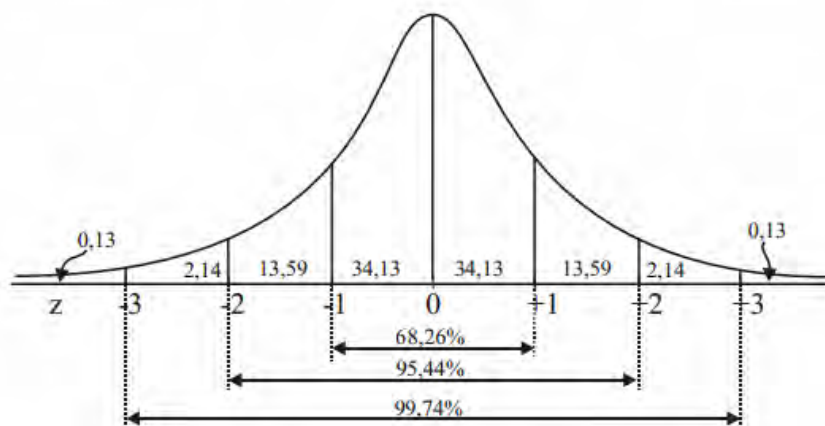
Dando a soma total de 0,95428 e que a probabilidade de um evento acontecer mais

frequentemente que  $\left(\frac{1}{2}\right)n + \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} = \left(\frac{1}{2}\right)n + \sqrt{n}$  ou menos frequentemente que

$\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sqrt{n}$  é  $0,04572 = (1 - 0,95428)$ , que diz que as chances de um evento acontecer mais freqüentemente nem mais raramente que dentro dos limites atribuídos são de 21 para 1 aproximadamente, ou seja,  $\frac{0,95428}{0,04572} \approx \frac{21}{1}$

E pelas mesmas razões a probabilidade de um evento aparecer mais freqüentemente que  $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{n}$  nem mais raramente que  $\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{n}$  será de  $0,99874$ , ou seja, as chances serão de 369 para 1.

Comparando com a curva hoje conhecida, percebemos que Moivre teve menos sucesso quanto à precisão dos valores onde observamos que ele obteve  $0,95428$  para o que encontramos  $0,9544$  e  $0,99874$  para o atual  $0,9974$ .



Curva Normal ou Curva de Freqüência.

Figura retirada site <http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf> acesso em 20/05/2013

Aplicando exemplos, Moivre supõe  $n = 3600$  e requer uma probabilidade que o evento aconteça nem mais freqüentemente que 1850 nem mais raramente que 1750.

Considerando  $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1800$  considerou a variação entre 1850 e 1750, que neste caso

$50 = s\sqrt{n}$ , agora supondo  $n = 3600$ ,  $\sqrt{n} = 60$ , substituindo  $s = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ , então o dobro da soma dos termos corresponde ao intervalo de  $\frac{5}{6}\sqrt{n}$ .

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii*  
 $(a + b)^n$  in Seriem expansi Lema 2

Numa expansão  $(a + b)^n$ , o maior termo é aquele cujos índices das potências de  $a$  e  $b$  tem a mesma proporção das quantidades de  $a$  e  $b$ . Por exemplo: Se  $a$  está para  $b$  numa proporção de 3 para 2 então:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$$

O maior termo é o  $210a^6b^4$ . Mas se  $a$  está para  $b$  numa proporção de 4 para 1 então o maior termo será:  $45a^8b^2$ . O maior termo será correspondente à média será  $n \cdot \frac{a}{(a+b)}$

Cada termo na expansão do binômio é dado por:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Analogamente se considerarmos e  $p = a$  e  $1-p = b$  observamos que seja  $k$  o maior termo então:

$$k = n \cdot \frac{a}{(a+b)}. \text{ Daí teremos: } \frac{k}{n} = \frac{a}{(a+b)}$$

Logo:

$$\frac{(n-k)}{k} = \frac{b}{a}$$

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{(n-k)} \text{ o que prova que no caso de } \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \text{ o maior termo será } 210a^6b^4 \text{ e}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{1} \text{ o maior termo será } 45a^8b^2$$

Numa binomial com  $a \neq b \neq 1$ , o maior termo é o que consideramos como esperança

$E(x)$  que neste caso será  $E(x) = n \cdot \frac{a}{(a+b)}$ , que significa a somatória do produto entre cada  $x$  e sua respectiva probabilidade.

Dedução de Moivre seguindo os passos do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi* utilizando *Miscellanea Analytica Lema 3*

Se num evento que depende de chances, a probabilidade de acontecimento ou falha está em alguma proporção e suponha  $a$  e  $b$ , num certo número de experimentos, então a probabilidade que nunca acontece mais freqüentemente que algumas vezes será  $\frac{an}{a+b} + l$  e não mais raramente que  $\frac{an}{a+b} - l$ . Seja L e R equidistantes pelo intervalo  $l$  do maior termo, seja S a soma dos termos inclusos entre L e R juntos com os extremos, então a probabilidade será

$$\frac{S}{(a+b)^n}$$

$\frac{an}{a+b}$  é a posição do termo máximo

Como visto no Lema 2 o maior termo será  $k = n \cdot \frac{a}{(a+b)}$

Que é a esperança, ou a média, como já mostrado acima e a probabilidade ocorre como também já visto no Lema anterior entre  $\frac{an}{a+b} - l$  e  $\frac{an}{a+b} + l$  inclusive.

A área entre estes extremos inclusos, ou seja, a probabilidade será a somatória de todos os termos entre os extremos citados S dividido por  $(a+b)^n$  que que seria toda a expansão do binômio.

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii*  
 $(a + b)^n$  in Seriem expansi Corolário 8

A razão numa potência infinita o maior termo para a soma de todo o resto será :

$$\frac{a + b}{\sqrt{abnc}}$$

Onde  $c$  denota a circunferência de raio unitário. Dada uma razão de  $l$  para  $n$  não inteira, mas concebida entre um dado número  $p$  e  $\sqrt{n}$  então  $l$  será expresso por  $p\sqrt{n}$  no caso dos dois termos  $L$  e  $R$  serem iguais.

E ainda considerando:

$$\sigma = \sqrt{\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \times n}$$

que significa o desvio padrão de uma binomial

sendo a probabilidade de sucesso  $\frac{a}{(a+b)}$  e de falha  $\frac{b}{(a+b)}$ , prova-se que o desvio padrão é obtido como na fórmula acima.

Substituindo na relação entre o termo médio e a soma de todos os termos:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \quad \text{Neste caso tínhamos que } \sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot n\right)}, \text{ pois a binomial era}$$

$(1 + 1)^n$  e as probabilidades de sucesso e falha eram iguais a  $\frac{1}{2}$ . Daí :

$$\frac{2}{\sqrt{(2\pi n)}} = \frac{1}{(\sqrt{(2\pi)} \cdot \sigma)}$$

Analogamente,

Seja  $S$  a somatória de todos os termos de  $(a + b)^n$  e  $y_0$  o termo máximo então:

$$\frac{y_0}{S} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)}$$

Substituindo  $\sigma = \sqrt{\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \times n}$  na equação  $\frac{y_0}{S} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)}$  obteremos:

$$\frac{a+b}{\sqrt{abn}}$$

Dedução do suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi Corolário 9*

Com potência infinita, qualquer termo distante num intervalo  $l$  então o logaritmo da razão entre este termo e o maior deles será  $-\frac{\overline{a+b^2}}{2abn} \times ll$

Tomando:

$$-\frac{2ll}{n} \text{ para o caso que } \sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot n\right)} \text{ daí, } n = 4\sigma^2$$

Substituindo temos que:

$$-\frac{(2ll)}{n} = -\frac{(2ll)}{(4\sigma^2)}$$

com

$$\sigma = \sqrt{\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \times n}$$

Obteremos:

$$-\frac{(2H)}{(4\sigma^2)} = -\frac{(2H)}{\left(\frac{(4abn)}{(a+b)^2}\right)} \text{ que resulta finalmente:}$$

$$-\frac{a+b^2}{2abn} \times H$$

### **Corolário 10**

Se as probabilidades de sucesso ou falha estão em qualquer razão de desigualdade, os problemas relacionados com a soma dos termos do binômio  $(a+b)^n$  ficam resolvidos com a mesma facilidade, como aqueles em que a Probabilidade de acontecer e não estão em uma relação de igualdade.

Do que foi dito, segue-se que probabilidade muito pouco perturba os acontecimentos que em sua constituição natural foram projetados para acontecer ou falhar, de acordo com uma lei determinada. A fim de ajudar a nossa concepção, imaginemos uma peça redonda de metal, com duas faces polidas rostos, diferindo em nada além de sua cor, supondo uma branca e o outra preta. É claro que podemos dizer que essa peça tem igual facilidade exibir uma face branca ou preta. Se jogarmos a peça, terá igual facilidade em exibir a face branca ou preta, mas o que temos visto em nosso problema LXXXVII, que chance embora pode produzir uma desigualdade aparente, ou de uma forma com mais vezes repetidas, vai perpetuamente tendendo a uma proporção de igualdade. Vimos no problema atual, que em um grande número de experimentos, tais como 3600, que seria a probabilidade superior a 2 para 1, que uma das faces, suponha que a branca, não deve aparecer com mais freqüência do que 1830 vezes, nem mais raramente do que 1770, ou em outros termos, que deve não ser acima ou

abaixo da igualdade  $\frac{1}{120}$  parte do todo o número de aparições, e segundo a mesma regra de que, se o número de ensaios forem 14.400 em vez de 3600, então ainda seria superior as chances de 2 a 1, que as aparições de um jeito ou de outro o faria não desviar-se da igualdade

$\frac{1}{260}$  parte do todo mas em 1000000 tentativas seriam as chances acima de 2 a 1, cujo desvio não seria mais que  $\frac{1}{2000}$  parte do todo.

.Mas as chances aumentariam a uma taxa prodigiosa, se em vez de tomar tais limites estreitos em ambos os lados do Termo de Igualdade, que é representado por  $l = \frac{1}{2} \sqrt{n}$  e dobramos esses limites ou triplicarmos.

No primeiro caso as probabilidades seriam de 21 para 1 e, no segundo 369 para 1, e ainda muito maior quadruplicando e, finalmente, infinitamente grande. A extensão desses limites suportará uma proporção considerável do todo, se o todo for infinito, cada razão será facilmente percebida pelos matemáticos, que sabem, que a raiz quadrada de qualquer potência (índice) é menor que a potência, quando o índice for grande.

E o que temos dito é também aplicável a uma relação de desigualdade, como aparece no Corolário 9. E, assim, em todos os casos, as possibilidades produzem irregularidades (erros), ainda que as probabilidades sejam infinitamente grandes, mas no decorrer do tempo, essas irregularidades não terão qualquer proporção para a recorrência dessa Ordem que resulta naturalmente do Projeto Original.

## CAPÍTULO IV

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

É indiscutível a importância da Curva Normal para as ciências em geral, em toda a área do conhecimento humano encontramos formas de se prever fenômenos, modelando conjuntos de medidas na natureza, na indústria e no comércio.

A polêmica quanto à descoberta e história da função normal, da função probabilidade da curva normal é ainda bastante discutida nos meios acadêmicos, tanto que a referida curva é conhecida como Curva de Gauss.

Discutiu-se também a idéia do panfleto *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi* de 1733 ser ou não um suplemento de *Miscellanea Analytica*, questionada por Archibald.

De fato, verifica-se que Moivre antecedeu Gauss e Laplace na descoberta da curva normal conforme foi deduzido e transcrito com o suplemento *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi* de 1733. E constatado que Moivre realmente encontrou a fórmula chamada de Stirling a menos de uma constante.

Em *Miscellanea*, Moivre inseriu uma carta de Stirling, na qual este corrige uma série infinita supostamente dada como convergente por Moivre, mas não a demonstra porque no mesmo ano da publicação de *Miscellanea*, Stirling iria publicar *Methodus Differentialis* contendo a demonstração da carta enviada a Moivre.

Após a publicação de *Methodus Differentialis*, Moivre decide publicar um suplemento auxiliar de 20 páginas e faz uma melhor aproximação para a série então encontrada por ele. Para Moivre a série convergiu bem nos 5 primeiros termos, mas para se ter certeza de sua convergência ele sentiu a necessidade de se determinar mais valores e deu outra maneira de cálculo para os valores posteriores.

Para seus cálculos posteriores em *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi*, Moivre utiliza a constante encontrada por Stirling.

Moivre encontrou a constante  $B = 2,5074$  muito próxima da constante de Stirling  $\sqrt{2\pi} = 2,50662$

Portanto realmente segue a tese de que Moivre antecipou Stirling na conhecida fórmula a menos de um erro menor que  $10^{-3}$

#### FÓRMULA STIRLING/MOIVRE

Stirling deduziu em sua carta enviada a Moivre em 1729:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

Para Moivre em *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi*:

$$\frac{C_n^{n/2}}{2^n} \approx \frac{2}{B\sqrt{n}}$$

A partir de motivações muito diferentes Moivre e Stirling discutem a questão de avaliação de  $n!$  Moivre estava interessado na aplicação do cálculo das probabilidades, especificamente na investigação que leva à lei dos grandes números e que levou à descoberta em 1733 da aproximação normal à distribuição binomial .

A probabilidade integral também aparece no Corolário 2 de *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi* , permitindo o cálculo da área sob a curva..

Para Pearson, Moivre deu uma aplicação mais convincente à Lei dos Grandes Números. Ele verificou no Corolário 10 que a precisão de um processo de amostragem é dada pelo inverso do desvio padrão; assim, quanto menor a variabilidade em torno da média das possíveis amostras, maior a precisão, o que aumenta também com o tamanho da amostra. Como anexo consta a tradução de *Ars Conjectandi* de James Bernoulli em 1713. Alguns matemáticos entendem que a demonstração de Bernoulli é precisa, embora de difícil entendimento, outros, no entanto, como Pearson, entendem que Moivre aplica a definição de desvio padrão que possibilita a demonstração da Lei dos Grandes Números.

A meu ver, embora de difícil compreensão, a Lei dos Grandes Números é demonstrada sem a utilização de desvio padrão por James ou Jacob Bernoulli em *Ars Conjectandi*, conforme avalei e traduzi no Anexo II, discordando de Karl Pearson em *Historical Note On The Normal Curve of Errors*.

## BIBLIOGRAFIA E OBRAS CONSULTADAS

MOIVRE, de Abraham. Miscellanea Analytica. Londres,1730 em <http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1256109> acesso em 13/02/2012.

MOIVRE, de Abraham.The Doctrine of Chances or a Method of Calculing The Probabilities of Events in Play. Second Edition. Paris: A Millar, 1738.

BERNOULLI, Nicolas. Ars Conjectandi. Basle,1713.

STIRLING , James. Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum. Londres, 1730.

NEWTON, Isaac. The Mathematical Principles of Natural Philosophy. First american edition.New York.,1848.

WALLIS, John. Arthmetica Infinitorum.Tho.Robinson.1656.

LANIER, Denis et TROUTOX, Didier. La Formule de Stirling. In *Analyse & démarche analytique*, Actes du 11<sup>e</sup> colloque, Reims 1996, éd. IREM de Reims, 1998.

TODHUNTER, Isaac. History of the Mathematical Theory of Probability. 1<sup>a</sup> Edition. Cambridge: Macmillan and Co,1865.

PEARSON, Karl et. al. Historical Note on the Origin of the Normal Curve of Errors. *Biometrika*, Oxford, v. 16, p.402-404, Oxford,1924.

WALKER, Helen M. On the Law of Normal Probability. In: SMITH, David Eugene. *A Source Book In Mathematics*. Second Edition. New York: Dover Publications, Inc,1959. p.566-576.

Integrating the Bell Curve. Disponível em <http://www.mathpages.com..> Acesso em 20 mai.2010.

Abraham de Moivre .Disponível em:

<http://www.york.ac.uk/depts/math/histstat/demoivrenotes.pdf>. Acesso em 26/09/2012.

STHAL, SAUL. The Evolution The Normal Distribution. In: *Mathematics Magazine*. April 2006,vol 79 n° 2.

SIMON, Julian L. What does the Normal Curve Mean? In *The Journal of Education Research*.Vol 61. Number 10. July-August 1968

CRUZ, José Amostragem Estatística. Universidade Federal de Sergipe,1978.

VIRGILII, Filippo Manual de Estatística 2<sup>a</sup> Edição. Oficina da Estatística,1908.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Raymond\\_Clare\\_Archibald](http://en.wikipedia.org/wiki/Raymond_Clare_Archibald) acesso em 25/05/2013.

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pearson.html> acesso em 25/05/2013.

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Karl\\_Pearson](http://pt.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson) acesso em 25/05/2013.

[http://www.gpcmb.ufma.br/steimacher/estat/Aula8-Cap\\_05.pdf](http://www.gpcmb.ufma.br/steimacher/estat/Aula8-Cap_05.pdf) acesso em 25/06/2013.

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Stirling.html> acesso em 21/09/2013.

## ANEXO I

TRADUÇÃO SUPLEMENTO *APPROXIMATIO AD SUMMAM TERMINORUM BINOMII*  $(a + b)^n$  *IN SERIEM EXPANSI* EDIÇÃO 1738 DO *THE DOCTRINE OF CHANCES* páginas 235 a 243.

**Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi**

**Um método de aproximar os termos de um binômio por uma série onde são deduzidas algumas regras práticas que estimam o grau de aprovação de alguns experimentos edição 1738**

A solução de problemas envolvendo jogos de azar muitas vezes exige o estudo de binômios com potências muito elevadas, o que além de ser bastante laborioso apresenta grande dificuldade que poucas pessoas assumiram esta tarefa ao lado de James e Nicolas Bernoulli, dois grandes matemáticos. Eu sei que ninguém tentou isso e que eles tiveram grande habilidade e louvor devido seu trabalho. Eles fizeram uma aproximação para determinação de limites amplos dentro do que a soma dos termos estava contida. Como determinaram um amplo limite dentro do qual demonstraram que a soma dos termos estava contida. Este método foi brevemente descrito em *Miscellanea Analytica* (1730). Agora adicionei alguns pensamentos numa ordem mais clara de entendimento.

I) Há mais ou menos 12 anos encontrei o seguinte:

Se uma binomial do tipo  $(1 + 1)^n$   $n$  uma potência grande, a razão entre o termo médio e a soma de todos os termos  $2^n$  é:

$$\frac{2A \times \sqrt{n-1} \sqrt[n]{n}}{n^n \times \sqrt{n-1}}$$

Logaritmo hiperbólico de A é:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$$

E considerando como uma Quantidade :

$$\frac{\overline{n-1}^n}{n^n} \text{ ou } \left| 1 - \frac{1}{n} \right|^n$$

que são próximos quando  $n$  é grande ou uma potência infinita.

Portanto, esta Quantidade representa o número cujo logaritmo hiperbólico é  $-1$ .

Logaritmo hiperbólico de  $\mathbf{B}$  é :

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} - 1$$

A expressão será então escrita como:

$$\frac{2B}{\sqrt{n} - 1}$$

ou apenas:

$$\frac{2B}{\sqrt{n}}$$

Considerando agora logaritmo hiperbólico de  $\mathbf{B}$  como:

$$1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680}$$

A expressão ficará:

$$\frac{2}{B\sqrt{n}}$$

Quando comecei esta pesquisa eu me contentei a encontrar o valor de  $\mathbf{B}$  que foi conseguido através da soma de séries e percebi que a série convergia lentamente e que tinha alcançado meu propósito, até que meu digno amigo James Stirling que havia se aplicado mais

na investigação, descobriu um valor de  $B$  como a raiz quadrada da circunferência de um círculo de raio unitário. Ele chamou então a circunferência de  $c$  e a razão do termo médio para a soma de todos os termos será então:

$$\frac{2}{\sqrt{nc}}$$

Mas independente da forma que foi conseguido o valor de  $B$  seja pela circunferência do círculo ou através de série logarítmica ainda possuo o prazer desta descoberta.

II) O logaritmo da razão entre o termo médio e um termo qualquer distante  $l$  do termo médio, admitindo  $m=1/2*n$ .

$$\overline{m+l-\frac{1}{2}} \times \log \overline{m+l-1} + \overline{m-l+\frac{1}{2}} \times \log \overline{m-l+1} - 2m \times \log m + \log_m^{m+1}$$

Corolário I

Se  $m$  ou  $1/2 n$  for infinitamente grande podemos admitir que:

O logaritmo da razão entre um termo distante  $l$  tem para o termo médio será :

$$\frac{2ll}{n}$$

Corolário 2:

O número que corresponde ao logaritmo hiperbólico de :

$$\frac{2l}{n} \text{ é :}$$

$$1 - \frac{2l}{n} + \frac{4l^2}{2nn} - \frac{8l^3}{6n^3} + \frac{16l^4}{24n^4} - \frac{32l^5}{120n^5} + \frac{64l^6}{720n^6}$$

E a soma de todos os termos entre o termo médio a uma distância  $l$  será:

$$\frac{2}{\sqrt{nc}}$$

Multiplicado pela integral da série acima, resulta a seguinte série:

$$l - \frac{2l^3}{1 \times 3n} + \frac{4l^5}{2 \times 5nn} - \frac{8l^7}{6 \times 7n^3} + \frac{16l^9}{24 \times 9n^4} - \frac{32l^{11}}{120 \times 11n^5}$$

E como  $l$  é :

$$s\sqrt{n}$$

ou

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

teremos

$$\frac{2}{\sqrt{c}} \text{ multiplicado por}$$

$$\int -\frac{2f^3}{3} + \frac{4f^5}{2 \times 5} - \frac{8f^7}{6 \times 7} + \frac{16f^9}{24 \times 9} - 32 \frac{f^{11}}{120 \times 11}$$

E considere:

$$\int = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{c}} \text{ multiplicado por}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5 \times 8} - \frac{1}{6 \times 7 \times 16} + \frac{1}{24 \times 9 \times 32} + \frac{1}{120 \times 11 \times 64}$$

Que converge rápido com a ajuda de sete ou oito termos.

Como a somatória da série dá 0,427812

Utilizando uma tábua de logaritmos, encontra-se o número procurado que será 0,341344.

Lema:

Num evento onde as probabilidades de acontecer ou falhar são iguais num certo número de experimentos, percebe-se que se  $l$  for um dado número menor que  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ , então a probabilidade deste de nem ocorrer mais frequentemente que  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+l}$  e nem mais raramente que  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-l}$ . Se dois termos L e L que tem igual distância do meio termo da binomial,  $(1+1)^n$ , por um intervalo igual a  $l$ , seja a soma dos termos entre L e L e junto com os extremos, será a probabilidade requerida será a fração  $\frac{f}{2^n}$  que já se encontra nos Princípios do *The Doctrine of Chances* e para Moivre não requeria demonstração.

Corolário 3

Se tivermos um número infinito de experimentos, a probabilidade de um evento com igual número de chances de ocorrer ou falhar deve nem aparecer mais frequentemente que

$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$  vezes nem mais raramente que  $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$  vezes e será expresso pelo dobro do exposto no Corolário 2, ou seja, 0,682688 e conseqüentemente a probabilidade de falha será 0,317312 que é a probabilidade que completa a unidade, ou seja, a razão entre essas probabilidades está do termo 28 para o 13.

Corolário 4:

Considerando um número infinito de eventos, mesmo não sendo aplicáveis, podemos considerar as conclusões anteriores.

Se tivermos  $n=3600$ ,  $1/2n$  será 1800 e  $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$  será 30 então a probabilidade do evento aparecer nem mais que 1830 nem mais raramente que 1770 será de 0,682688 ou seja, aproximadamente 28/41.

Corolário 5

Temos então uma lei do Máximo fundamental para altas potências, a razão entre a soma de todos os termos inclui os extremos distantes de ambos os lados de um intervalo igual a  $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ , que leva a soma de todos os termos a 0,682688 ou 28/41.

Poderá ser utilizado considerando  $n$  um número muito grande. A probabilidade de  $\frac{28}{41}$ , ou probabilidade de 28 para 13. Se tivermos  $\frac{1}{4}\sqrt{2n}$ . Suponha  $n=3600$  então temos 21.2 que não é acima de  $\frac{1}{169}$  então o excesso de acontecimentos acima de 1800 vezes em 3600 experimentos não será mais que 21.

Corolário 6:

Se  $l$  for interpretado como  $\sqrt{n}$  as séries não convergem tão rápido como quando considera-se  $l$  por  $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ . Moivre então utiliza um artifício utilizado por Newton, Stirling e Cotes, que determina a área de uma curva conhecendo as ordenadas utilizando intervalos iguais. Também conhecida como Quadratura de Newton.

Seja  $\frac{1 \times \overline{A+D} + 3 \times \overline{B+C}}{8} \times l$  ordenadas seqüenciais e as distâncias  $\frac{3}{6}\sqrt{n}, \frac{4}{6}\sqrt{n}, \frac{5}{6}\sqrt{n}, \frac{6}{6}\sqrt{n}$

Elevando ao quadrado, dobrando e dividindo por  $n$ , mudando o sinal teremos  $-1/2, -8/9, -25/18, -2/1$ . Obteremos assim: e elevado a esses valores teremos: 0,60653; 0,41111; 0,24935; 0,13534 e substituindo na quadratura de Newton e considerando  $l - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ . O resultado será:

**0.170203**  $\times \sqrt{n}$ . Temos que multiplicar pelo valor do termo médio e dobrar para obtermos a probabilidade do intervalo todo então temos que: 0,27160 e somando com o valor 0,682688 conseguimos:0,95428 que é o intervalo de  $\sqrt{n}$ . A probabilidade do contrário será:

0,04572 que mostra que a probabilidade de um evento não ocorrer mais nem mais raramente está dentro dos limites assegurados de 21 para 1. A probabilidade de um evento ocorrer nem mais que  $1/2^n + 3/2\sqrt{n}$  nem mais raramente que  $1/2^n - 3/2\sqrt{n}$  será de 0,99874. A probabilidade será de 369 para 1.

Agora para um evento não acontecer nem com frequência 1850 vezes nem mais raramente que 1750 vezes e seja o número de experimentos onde a metade é 1800. Então fazendo os números estarem entre 1850 e 1750 e  $50 = \int \sqrt{n}$  e  $n = 3600$  então  $\sqrt{n} = 60$

$50 = 60s$  e conseqüentemente  $s = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$  o dobro da soma dos termos corresponde ao intervalo de  $\frac{5}{6}\sqrt{n}$  sobre a soma de todos os termos.

Lema 2:

Numa expansão  $(a + b)^n$ , o maior termo é aquele cujos índices das potências de  $a$  e  $b$  tem a mesma proporção das quantidades de  $a$  e  $b$ . Por exemplo: Se  $a$  está para  $b$  numa proporção de 3 para 2 então:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}$$

, ou seja o maior termo é o  $210a^5b^5$ . Mas se  $a$  está para  $b$  numa proporção de 4 para 1 então o maior termo será:  $45a^8b^2$

Lema 3:

Se num evento que depende de chances, a probabilidade de acontecimento ou falha está em alguma proporção e suponha  $a$  e  $b$ , num certo número de experimentos, então a probabilidade que nunca acontece mais freqüentemente que algumas vezes será  $\frac{an}{a+b} + l$  e não mais raramente que  $\frac{an}{a+b} - l$ . Seja L e R equidistantes pelo intervalo  $l$  do maior termo, seja S a soma dos termos inclusos entre L e R juntos com os extremos, então a probabilidade será

$$\frac{S}{(a+b)^n}$$

$\frac{an}{a+b}$  é a posição do termo máximo.

## Corolário 8

A razão numa potência infinita o maior termo para a soma de todo o resto será :

$$\frac{a+b}{\sqrt{abnc}}$$

Onde  $c$  denota a circunferência de raio unitário. E ainda considerando:

$$\sigma - \sqrt{\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \times n}$$

## Corolário 9

Com potência infinita, qualquer termo distante num intervalo  $l$  então o logaritmo da

razão entre este termo e o maior deles será  $-\frac{\overline{a+b^2}}{2abn} \times ll$

## Corolário 10

Se as probabilidades de sucesso ou falha estão em qualquer razão de desigualdade, os problemas relacionados com a soma dos termos do binômio  $(a+b)^n$  ficam resolvidos com a mesma facilidade, como aqueles em que a Probabilidade de acontecer e não estão em uma relação de igualdade.

Do que foi dito, segue-se que chance muito pouco perturba os acontecimentos que em sua constituição natural foram projetados para acontecer ou falhar, de acordo com uma lei determinada, pois se a fim de ajudar a nossa concepção, imaginemos uma peça redonda de metal, com duas faces polidas rostos, diferindo em nada além de sua cor, supondo uma branca

e a outra preta, é claro que podemos dizer que essa peça tem igual facilidade de exibir uma face branca ou preta. Se jogarmos a peça, terá igual facilidade de exibir a face branca ou preta., mas o que temos visto em nosso problema LXXXVII, que a chance embora pode produzir uma desigualdade aparente, ou de uma forma com mais vezes repetidas, vai perpetuamente tendendo a uma proporção de igualdade, vimos no problema atual, que em um grande número de experimentos, tais como 3600, que seria a probabilidade superior a 2 para 1, que uma das faces, suponha que a branca, não deve aparecer com mais frequência do que 1830 vezes, nem mais raramente do que 1770, ou em outros termos, que deve não ser acima ou abaixo da igualdade  $\frac{1}{120}$  parte do todo o número de aparições, e segundo a mesma regra de que, se o número de ensaios forem 14.400 em vez de 3600, então ainda seria superior as chances de 2 a 1, que as aparições ou um jeito ou de outro o faria não desviar-se da igualdade  $\frac{1}{260}$  parte do todo mas em 1000000 tentativas seriam as chances acima de 2 a 1, cujo desvio não seria mais que  $\frac{1}{2000}$  parte do todo.

.Mas as chances aumentariam a uma taxa prodigiosa, se em vez de tomar tais limites estreitos em ambos os lados do Termo de Igualdade, que é representado por  $t = \frac{1}{2} \sqrt{n}$  e dobramos esses limites ou triplicarmos.

No primeiro caso as probabilidades seriam de 21 para 1 e, no segundo 369 para 1, e ainda muito maior quadruplicando e, finalmente, infinitamente grande. A extensão desses limites suportará uma proporção considerável do todo, se o todo for infinito, cada razão será facilmente percebida pelos matemáticos, que sabem, que a raiz quadrada de qualquer potência (índice) é menor que a potência, quando o índice for grande.

E o que temos dito é também aplicável a uma relação de desigualdade, como aparece no Corolário 9. E, assim, em todos os casos, as possibilidades produzem irregularidades (erros), ainda as probabilidades sejam infinitamente grandes, mas no decorrer do tempo, essas irregularidades não terão qualquer proporção para a recorrência dessa Ordem que resulta naturalmente do Projeto Original.

## ANEXO II

### *ARS CONJECTANDI* (1713) JACOB BERNOULLI

Jacob Bernoulli foi um matemático suíço que primeiro utilizou o termo integral. Ele foi o primeiro matemático da família Bernoulli de famosos cientistas do século XVIII.

Oito anos a morte de Jacob Bernoulli, apareceu um manuscrito não terminado denominado *Ars Conjectandi*, impresso em agosto de 1713, em Basel, juntamente com um tratado sobre séries infinitas e uma carta em francês para Jeu de Paume. The Tractatus de seriebus infinitis constitue uma reimpressão de 5 dissertações sobre séries infinitas publicadas entre 1686 e 1704.

Um pequeno prefácio foi contribuição de Nikolaus Bernoulli, sobrinho de Jacob Bernoulli

Moivre se baseou no livro *Ars Conjectandi, opus posthumum tractatus de seriebus infinitis* de Jacob Bernoulli. Na quarta parte do livro denominada Pars Quarta, ele propõe aplicações em problemas cívicos, morais e econômicos. Neste livro J. Bernoulli prova a Lei dos Grandes Números, que é o primeiro teorema limite da probabilidade, estabelecendo uma relação entre probabilidade e frequência relativa, esta lei foi provada utilizando cálculos com coeficientes binomiais.

A Frequência Relativa de um evento é definida como sendo a relação entre o número de vezes em que um evento aconteceu numa dada série de repetições de um experimento aleatório e o número total de repetições do referido experimento.

### *Teorema de Bernoulli e Lei dos Grandes Números*

Suponha uma urna cujo conteúdo é desconhecido. Pergunta-se então qual a probabilidade de se tirar o número 3 cujo conteúdo nos é desconhecido?

À primeira vista nos parece um problema insolúvel, mas se procedermos com sucessivas e continuadas extrações podemos adquirir a certeza de reprodução de acontecimentos futuros e podemos determinar seu grau de probabilidade.

Repetindo indefinidamente o número de provas, a probabilidade de um acontecimento se aproxima da certeza, à medida que se multiplicam as provas, tem-se uma probabilidade sempre crescente de sorte que a relação entre o número de acontecimentos favoráveis e o dos contrários não se afastará da relação existente entre suas respectivas probabilidades além de um dado limite. Ou seja, quanto maior o número de observações de que possamos dispor, tanto mais provável será o valor que delas tiramos; um número infinito de observações nos daria a certeza absoluta.

Quando assistimos a repetição dos fatos, ainda que nos sejam desconhecidas as causas que os produzem, adquirimos a convicção e a confiança de que tais fatos deverão reproduzir-se dentro de determinados limites.

O teorema de Bernoulli é aplicado tanto aos jogos como à mortalidade humana, tanto à extração de uma esfera de uma urna como na determinação da lei da criminalidade.

Em outras palavras, a "Lei dos Grandes Números", afirma que, numa série imensa de experimentos, a frequência relativa de um evento se aproxima cada vez mais da sua probabilidade. Assim, dada uma longa série de experimentos, pode-se calcular a probabilidade de um evento, ou então, dada a probabilidade de um evento, se pode calcular o número de vezes que ele deve ocorrer numa longa série de tentativas.

A Lei dos Grandes Números em *Ars Conjectandi Pars Quarta*

Em *Ars Conjectandi* Bernoulli no Capítulo V do Pars Quarta demonstra cinco Lemas antes de demonstrar o que hoje podemos entender como Lei dos Grandes Números.

A Proposição Principal segue abaixo traduzida e representa a demonstração da Lei dos Grandes Números de Jacob Bernoulli

Páginas 228 até 239 *Ars Conjectandi*(1713)(Tradução)

São nomeados os casos em que algum evento pode ocorrer como fecundos ou férteis e estéreis quando o evento não ocorre. Da mesma forma eu nomeei experiências férteis se algum caso aparece nelas e inférteis quando observo algum estéril.

Se o número de casos férteis está para o número de casos estéreis precisamente ou

aproximadamente como  $\frac{r}{s}$ ; ou ao número de todos os casos, como  $\frac{r}{(r+s)}$  ou como  $r/t$

(todos os casos) de modo que esta proporção está contida entre os limites  $\frac{(r+1)}{t}$  e  $\frac{(r-1)}{t}$ .

É possível mostrar tomado um número de experimentos tal que este será um número de vezes  $c$  maior que o número de observações férteis e ocorrerá entre os limite se a razão entre os

números de observações férteis para o número total não será maior que  $\frac{(r+1)}{t}$  nem menor

que  $\frac{(r-1)}{t}$ .

Portanto, que o número de casos férteis para o número de casos estéreis é exatamente ou aproximadamente a razão  $r/s$  e, portanto, a razão entre os casos férteis para todos os

casos, será  $\frac{r}{(r+s)}$  ou  $\frac{r}{t}$  que estão dentro dos limites  $\frac{(r+1)}{t}$  e  $\frac{(r-1)}{t}$ . Deve ser

demonstrado com muitas tentativas e pode ser mais provável que algumas vezes ( $c$  vezes) que o número de observações férteis cairá entre esses limites do que fora destes limites, isto é, será  $c$  vezes mais provável que o número de férteis para todas as observações estará numa

razão não superior a  $\frac{(r+1)}{t}$  nem menor que  $\frac{(r-1)}{t}$ .

Suponha o número de observações  $nt$ . Determine a expectativa ou probabilidade de todos sem exceção serem fecundos. Que todos eles tenham 1 ou 2,3,4 estéreis. Há  $t$  casos em cada observação  $r$  deles fecundos e  $s$  estéreis e que casos separados de uma observação podem ser combinados de outra observação e novamente combinados com casos de separados da terceira do quarto....

Falta de estéreis

$$r^{nt}; t^{nt}$$

Aqui encontramos as probabilidades no caso de uma binomial

$$\frac{nt}{1} r^{nt-1} s; t^{nt}, \frac{nt(nt-1)}{1.2} r^{nt-2} s^2; t^{nt}, \frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1.2.3} r^{nt-3} s^3; t^{nt}$$

O número de casos que podem acontecer que todos os experimentos são fecundos ou todos exceto um estéril, dois três, quatro...

$$r^{nt}, \frac{nt}{1} r^{nt-1} s, \frac{nt(nt-1)}{1.2} r^{nt-2} s^2, \frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1.2.3} r^{nt-3} s^3$$

Segue que

Consequentemente, o número total de casos em que não estão mais que  $nr + n$ , e não menos do que  $nr - n$  observações fecundas, é expressa pela soma do termos situados entre os limites. O número total dos outros casos em que há ocorrer quer observações mais ou menos fecunda é expressa por a soma dos outros termos para além dos limites .A potência do binômio pode ser tão grande que a soma dos termos entre os limites é maior que  $c$  vezes a soma de todos os termos fora dos limites.

$$\frac{nr + n}{nt} e \frac{nr - n}{nt} \text{ ou } \frac{r + 1}{t} e \frac{r - 1}{t}$$

Aqui podemos entender os limites em que a probabilidade ocorre. Bernoulli ainda exemplifica:

Sejam  $r=30$  e  $s=20$  e  $t=50$  os limites  $31/50$  e  $29/50$ . Suponha  $c=1000$

$$m > \frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1) - \log r} = \frac{42787536}{142405} < 301, nt = mt + \frac{mst}{r+1} < 24728$$

$$m > \frac{\log[c(r-1)]}{\log(s+1) - \log s} = \frac{44623980}{211893} < 211, nt = mt + \frac{mrt}{s+1} < 25550$$

Quanto maior o número de observações, no caso c, a razão entre o número de observações férteis e o número total ficará mais vezes dentro do limite pré-estabelecido.

## ANEXO III

### DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

A distribuição binomial em sua essência constitui um modelo probabilístico resultante do binômio de Newton, trata-se de uma distribuição teórico estatística de variáveis discretas (de natureza descontínua) que admitem valores bem determinados como  $p$  e  $q$  (sucesso e fracasso), duas alternativas mutuamente exclusivas.

Os experimentos binomiais são também conhecidos como de Bernoulli.

Em *Ars Conjectandi*, Jacob Bernoulli nos apresenta a distribuição binomial ou de Bernoulli escrita como conhecemos hoje:

Considerando  $Y$  com Distribuição Binomial teremos:

A Probabilidade de ocorrer  $y$  (número de sucessos ocorridos em  $n$  repetições) em  $n$  (número total de repetições) e  $p$  probabilidade de sucesso,  $q$  probabilidade de fracasso:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}, \text{ onde } \begin{cases} y = 0, 1, 2, 3, \dots, n \\ q = 1 - p \text{ e } \binom{n}{y} = \frac{n!}{y!(n-y)!} \end{cases}$$

Bernoulli estudou na mencionada obra o comportamento da probabilidade da frequência em função de um número indefinido de provas formulando o então Teorema de Bernoulli ou Lei dos Grandes Números.

A Distribuição Binomial tem as seguintes peculiaridades:

Média  $\mu = n \cdot p$

Desvio Padrão  $\sigma = \sqrt{npq}$

## ANEXO IV

### DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

Considere uma população com  $N$  objetos nos quais  $M$  são classificados como do tipo A e  $N-M$  são classificados como do tipo B. Tomamos uma amostra ao acaso, sem reposição e não ordenada de  $n$  objetos. Seja  $X$  a variável aleatória que conta o número de objetos classificados como do tipo A na amostra. Então a distribuição de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$P[X = k] = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

sendo  $k$  inteiro

Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição hipergeométrica de parâmetros  $M$ ,  $N$  e  $n$  se sua função de probabilidade for dada da maneira acima. Denotamos  $X \sim \text{Hgeo}(M, N, n)$

## ANEXO V

### TEOREMA DE BAYES

Os eventos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  são eventos mutuamente exclusivos, cuja união é todo o espaço amostral de um experimento. O evento  $B$  é um evento com probabilidade diferente de zero ( $\Pr(B) \neq 0$ ). Sendo assim:

$$\Pr(A_i | B) = \frac{\Pr(B | A_i) \cdot \Pr(A_i)}{\sum_{x=1}^k \Pr(B | A_x) \cdot \Pr(A_x)}$$

Figura retirada <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/12/no-cerne-do-enem-o-teorema-de-bayes.html> acesso em 01/06/2013

## ANEXO VI

### MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Gauss é chamado para resolver um problema de estimativa de uma órbita de um asteróide. Em 1 de Janeiro de 1801, Giuseppe Piazzi (1746-1826), diretor do Observatório de Palermo, tinha descoberto o asteróide Ceres.

Tornava-se claro que as poucas observações registradas pelo astrônomo de Palermo não eram suficientes para calcular a sua órbita com a necessária precisão. Até aquela data, os métodos utilizados pelos matemáticos e astrônomos necessitavam de muito mais observações e espalhadas ao longo de um período muito mais longo.

Foi então que entrou em cena Carl Friedrich Gauss.

Gauss determinou uma órbita para Ceres com base num método de combinar observações e, com base nelas, estimar os parâmetros de uma função neste caso uma órbita. Esse método veio a ser conhecido como o método dos mínimos quadrados.

Gauss verificou que se dado um conjunto de observações, a média aritmética é o valor que minimiza a soma dos quadrados dos desvios (enquanto a mediana minimiza a soma dos desvios absolutos).

O método consiste em obter uma curva ou no caso de regressão linear uma reta que se ajuste melhor aos dados observados.

Sejam os dados observados:

O critério é encontrar os coeficientes  $a$  e  $b$  da reta  $y = a + bx$  de regressão que minimizem a soma dos quadrados dos desvios

O método dos mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, ou seja, minimiza

$$\sum_{i=1}^n e_i^2$$

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

A minimização se dá ao derivar  $S(a, b)$  em relação a  $a$  e  $b$  e igualar a zero:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a - bx_i) = 0$$

Distribuindo e dividindo a primeira expressão por  $2n$  temos:

$$\frac{-2 \sum_{i=1}^n y_i}{2n} + \frac{2 \sum_{i=1}^n a}{2n} - \frac{2 \sum_{i=1}^n bx_i}{2n} = \frac{0}{2n}$$

$$\frac{-\sum_{i=1}^n y_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n a}{n} + \frac{b \sum_{i=1}^n x_i}{n} = 0$$

$$-\bar{y} + a + b\bar{x} = 0$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

onde  $\bar{y}$  é a média amostral de  $y$

$\bar{x}$  é a média amostral de  $x$ .

Substituindo esse resultado na segunda expressão temos:

$$-2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y} + b\bar{x} - bx_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [x_i (y_i - \bar{y}) + x_i b (\bar{x} - x_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y}) + b \sum_{i=1}^n x_i (\bar{x} - x_i) = 0$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})}$$

## ANEXO VII

Uma dedução da função densidade de probabilidade de Moivre partindo coeficientes binomiais. Tradução de <http://www.mathpages.com/home/kmath642/kmath642.htm>

Neste suplemento “Approximatio” Moivre fez observações sobre os coeficientes das expansões binomiais descobertas por Newton 60 anos antes:

$$(1+x)^0 = 1$$

$$(1+x)^1 = 1+x$$

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$$

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$

$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$

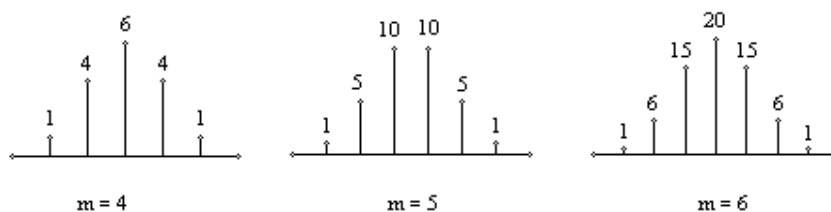
$$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$

etc.

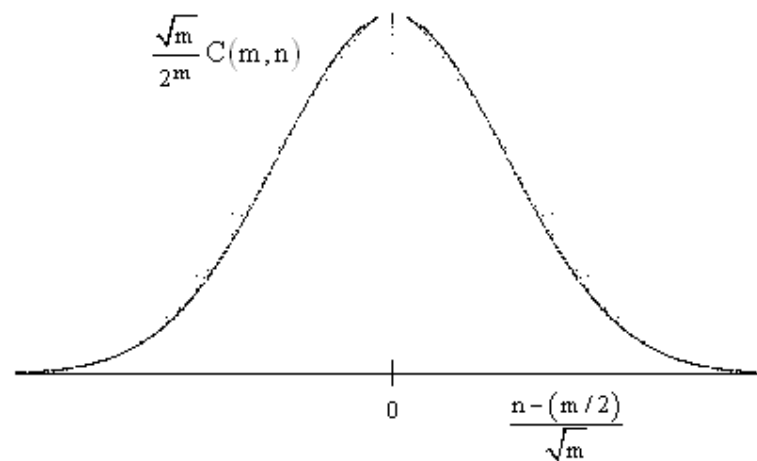
Seja  $C(m,n)$  o coeficiente de  $x^n$  da expansão  $(1+x)^m$

Moivre observou que a soma dos coeficientes é  $2^m$

E que a soma normalizada é obviamente igual a 1, também verificou que os coeficientes são simétricos. Assim podemos considerar o termo central por  $m/2$ .



Ainda , notou que se multiplicasse pela raiz quadrada de m os coeficientes normalizados e dividisse os índices pela raiz quadrada de m e que conforme m tivesse acréscimos, os coeficientes convergiam para uma mesma curva. Ele trabalhou com 60 expansões binomiais.



Considerando  $x$  a abscissa teremos:

$$x = \frac{n - (m/2)}{\sqrt{m}} \quad n = x\sqrt{m} + (m/2)$$

Teremos então a função:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m}}{2^m} C\left(m, (m/2) + x\sqrt{m}\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m}}{2^m} \frac{m!}{\left((m/2) + x\sqrt{m}\right)! \left((m/2) - x\sqrt{m}\right)!} \end{aligned} \quad (1)$$

Consideremos agora a razão entre  $f(x)$  e  $f(0)$ :

$$\frac{f(x)}{f(0)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m/2)! (m/2)!}{\left((m/2) + x\sqrt{m}\right)! \left((m/2) - x\sqrt{m}\right)!}$$

Se substituirmos  $m = 4k^2$  e  $k$  ir para o infinito, pois  $m$  vai para o infinito:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{f(0)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k^2)! (2k^2)!}{(2k^2 + 2kx)! (2k^2 - 2kx)!} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k^2)(2k^2 - 1) \dots (2k^2 - 2kx + 2)(2k^2 - 2kx + 1)}{(2k^2 + 1)(2k^2 + 2) \dots (2k^2 + 2kx - 1)(2k^2 + 2kx)} \end{aligned}$$

Ainda somando e subtraindo  $\frac{1}{2}$  no numerador em cada parêntese:

$$\frac{f(x)}{f(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(2k^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(2k^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(2k^2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) \dots \left(2k^2 + \frac{1}{2} - \frac{4kx-1}{2}\right)}{\left(2k^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(2k^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \left(2k^2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) \dots \left(2k^2 + \frac{1}{2} + \frac{4kx-1}{2}\right)}$$

Dividindo numerador e denominador por  $2k^2$  e  $\frac{1}{2}$  será não considerado no limite teremos:

$$\frac{f(x)}{f(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \left(1 - \frac{3}{4k^2}\right) \left(1 - \frac{5}{4k^2}\right) \dots \left(1 - \frac{4kx-1}{4k^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4k^2}\right) \left(1 + \frac{3}{4k^2}\right) \left(1 + \frac{5}{4k^2}\right) \dots \left(1 + \frac{4kx-1}{4k^2}\right)}$$

Aplicando  $\ln$  dos dois lados:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{3}{4k^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{5}{4k^2}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{4kx-1}{4k^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \ln\left(1 + \frac{1}{4k^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{3}{4k^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{4k^2}\right) - \dots - \ln\left(1 + \frac{4kx-1}{4k^2}\right) \right] \end{aligned}$$

Usando a expansão de Taylor (já conhecida por Moivre) para  $\ln(1-x) = -x - x^2/2 + e$   $\ln(1+x) = x - x^2/2 + e$  segue-se:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} -2 \frac{1+3+5+\dots+(4kx-1)}{4k^2}$$

A soma da PA é  $(2kx)^2$  então:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{(2kx)^2}{2k^2} = -2x^2$$

Portanto:

$$f(x) = f(0) e^{-2x^2}$$

**Como encontrar  $f(0)$  através da fórmula de Stirling:**

Considerando que  $f_{\infty}(0)$  é o limite de  $f(0)$  podemos usar a fórmula de Stirling...

Abrimos aqui um parêntese:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Em outras palavras:

A fórmula de Stirling foi descoberta por Moivre e publicada em 1730 em *Miscellanea Analytica*. Mais tarde, no mesmo ano, com resultados mais precisos é publicada por James Stirling em *Methodus Differentialis*.

Foi Stirling que determinou a constante  $f(0)$ :

Considere  $x=0$  e  $m=2u$  em substituindo em (1):

$$f(0) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2u} (2u)!}{2^{2u} (u)!(u)!} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2u} (2u)^{2u} e^{-2u} \sqrt{2\pi 2u}}{2^{2u} (u^u e^{-u} \sqrt{2\pi u})^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Notando que a integral no intervalo de a exigência de  $x = -\infty$  to  $+\infty$  é igual a 1, será necessário avaliar a integral de  $f(x)/f(0)$  para que a integral de  $f(x)$  seja 1.

$$\left[ \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx \right] \left[ \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2} dy \right] = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-2(x^2+y^2)} dx dy$$

E transformando em coordenadas polares com  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$  temos uma área  $dA = dydx = r d\theta dr$ .

Daí:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r e^{-2r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Como a integral de  $f(x)$  precisa ser 1 então:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}$$

Equação Final

**Observação:**

Nesta demonstração não aparece  $\sigma$  o desvio padrão, pois a função  $f(x)$  é definida

como  $\frac{\sqrt{m}}{2^m} C^{(m,n)}$  sendo  $x = \frac{\left(n - \frac{m}{2}\right)}{\sqrt{n}}$  diferente do que propôs Moivre.

Para Moivre,  $l = n - \left(\frac{m}{2}\right)$  e a constante é  $\frac{2}{\left(\sqrt{(2\pi n)}\right)}$  que fazendo a analogia com esta demonstração acima temos que:

$f(0)$  é  $\frac{2}{\left(\sqrt{(2\pi n)}\right)} \cdot \sqrt{n}$  que é igual a  $\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} = \frac{\sqrt{(2\pi)}}{\pi}$  e ainda se substituirmos na Equação Final  $x = \frac{l}{\sqrt{n}}$  encontramos a equação encontrada por Moivre  $y = y_0 \cdot e^{\left(\frac{(-2l)}{n}\right)}$

Para a forma atual da equação da Curva Normal, temos:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\left(\sqrt{(2\pi)\sigma}\right)}\right) \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{(2\sigma^2)}\right)}$$

A constante é a mesma encontrada por Moivre em seu suplemento *Approximatio...*

$l = x - \mu$  e  $\sigma = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$  pois trata-se de binomial assim  $n = 4\sigma^2$  substituindo em  $y = y_0 \cdot e^{\left(\frac{(-2l)}{n}\right)}$  encontramos a função densidade com a forma atual.

## ANEXO VIII

### CARTAS TROCADAS ENTRE RAYMOND ARCHIBALD E KARL PEARSON

#### CARTA DE RAYMOND ARCHIBALD A KARL PEARSON

Nas valiosas e interessantes contribuições para *Biometrika*, entre 1924 e 1925, Karl Pearson estabeleceu certos fatos (não todos novos), o que, sem dúvida, resultam em Abraham de Moivre ocupando um lugar mais importante do que antes na história da matemática. Os resultados são atingidos através de um estudo cuidadoso de:

(a) Teorema "James de Bernoulli .

(b), uma publicação de Moivre datada de 12 de novembro de 1733. Em relação a esta publicação Pearson faz certas afirmações que requerem comentário, já que a partir delas inferências erradas pode ser facilmente deduzidas.

Esta publicação é intitulado: *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a+b)^n$  in Seriem expansi* e foi encontrada com uma cópia de *Miscellanea Analytica*, 1730.

Observações de Pearson:

"Muitas cópias desse trabalho ligado a eles um Suplemento com paginação separada, terminando em uma tabela de 14 figuras de logaritmos de fatoriais de  $10!$  a  $900!$  Por diferenças de 10. Mas apenas alguns poucos exemplares [Pearson diz que somente um] tem um segundo suplemento, também com paginação separada (pp. 1-7) e datada de 12 de novembro de 1733. Esse segundo suplemento só poderia ser adicionado a exemplares de cópias vendidas, três anos após a emissão do livro original, e isso explica sua raridade. Todhunter em *History of the Theory of Probability* parece ter discutido esta questão a respeito de *Miscellanea Analytica* e parece nunca ter deparado com este suplemento"

Pearson aqui comete dois deslizes:

(a) em assumir que, porque este "segundo suplemento" está vinculado ao final de uma cópia na Biblioteca University College, ele realmente é um segundo suplemento,

(b) em afirmar que esta publicação não foi considerada em *History of the Theory of Probability* por. Todhunter Curiosamente, na última parte do seu primeiro artigo, após ter indicado os resultados do "segundo suplemento", Pearson observa:" O mesmo assunto é

tratado 23 anos mais tarde, na edição *The Doctrine of Chances* de ,pp 243-250. Todhunter em *History of the Theory of Probability*, Arts. 324 e 335, passou sobre o assunto muito superficialmente. "Será que Pearson esqueceu que uma tradução de seu "Suplemento" foi assim tratada por Moivre em 1756 e em 1865 por Todhunter? Que essa tradução apareceu também 18 anos antes e não foi reconhecida.

Além disso, Moivre prefacia sua tradução com a instrução:

*"Eu vou aqui traduzir um panfleto meu que foi impresso em 12 de novembro de 1733, e foi comunicada a alguns amigos, mas ainda não se tornou público, reservando-me o direito de ampliar meus próprios pensamentos caso a ocasião exigir."*

Por isso, é claro que a publicação em questão não era um "segundo suplemento" para *Miscellanea Analytica*, mas foi a primeira" tornou-se público ", e em inglês, em 1738.

Um fac-símile deste panfleto aparecerá em um número inicial de *Isis*. Seria interessante saber se alguma outra cópia do panfleto original de Moivre existe.

RAYMOND CLARE ARCHIBALD.

Brown University,

Providence, R.I.,

22 de fevereiro.

(Tradução site <http://www.york.ac.uk/depts/math/histstat/demoivrenotes.pdf> acesso em 09/03/2012)

CARTA DE KARL PEARSON A RAYMOND ARCHIBALD

Eu estou contente que a carta do Prof Archibald me permite voltar ao assunto Moivre alegando ser o primeiro descobridor da curva normal de erros geralmente atribuída de Laplace ou Gauss.

Eu não acho que o professor Archibald tem escrito, ou é o que ele pensa - e, possivelmente, pode ser - a única cópia do *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii (a+b)<sup>n</sup> in Seriem expansi*

Tem a mesma forma não usual de paginação do primeiro suplemento e é impresso no mesmo papel e é do mesmo formato de *Miscellanea* e do primeiro suplemento.

Cerca de metade das cópias conhecidas de *Miscellanea Analytica* não tem o primeiro suplemento, eu acho que é bastante provável que o *Approximatio* só foi anexado com alguns últimos exemplares da *Miscellanea Analytica* emitido após novembro de 1733.

De qualquer forma, que é onde eu deveria procurá-la em primeiro lugar.

Eu disse no meu artigo que Moivre tratou do mesmo assunto em sua *The Doctrine of Chances*, de 1756, porque essa era a edição que eu estava trabalhando.

Prof Archibald disse que foi igualmente tratado na edição de 1738, e na edição de 1756 foi uma mera tradução ", exceto pequenas alterações "Isso não é correto, pois na história das estatísticas as mais importantes alterações foram feitas em 1738 e 1756.

O princípio importante que mantém a igualdade das razões não aparece em 1733 em *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii (a+b)<sup>n</sup> in Seriem expansi* , aparece pela primeira vez timidamente em 1738 em *The Doctrine of Chances* , onde as sete linhas do corolário X são aumentados para cerca de cinquenta linhas, e em 1756, este corolário ocupa cerca de quatro páginas ou cerca de 160 linhas. De fato, as 6 páginas do *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii (a + b)<sup>n</sup> in Seriem expansi* se tornam 11 páginas e meia em 1756. Como Moivre observou de forma adequada, ele reservou para si mesmo , o direito de ampliar meus próprios pensamentos. Essa ampliação, desenvolvendo a idéia de Newton, de uma divindade onipresente, que mantém os valores médios estatísticos, formaram a fundação de desenvolvimento estatístico de Derham, Sussmilch, Niewentyt, Price a Quetelet e Florence Nightingale. Esses podem ser matematicamente pontos 'menores', mas são vitais para a história das estatísticas, e minha referência a estas adições no penúltimo parágrafo do meu artigo poderia ter mostrado ao Prof Archibald que eu estava ciente das diferenças entre o original *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii (a + b)<sup>n</sup> in Seriem expansi* e o mesmo encontrado em *Doctrine of Chances*. Meu erro estava em não reconhecer que em 1738 *Doutrina of Chances* de 6 páginas e meia se tornaram um pouco mais de 8 e depois 11 páginas e meia em 1756, ou seja, 18 anos mais tarde "

Quanto ao Dr. Todhunter, não tenho nada a retirar, na minha opinião, em seu Art. 335 ele perdeu totalmente idéia de realização do *Approximatio*..., bem como o sua ampliação em *The Doctrine of Chances*. Ele não diz: "Aqui está o original do Teorema de Stirling, aqui é a primeira aparição da curva normal, aqui Moivre antecipou Laplace como este antecipou Gauss". Ele nem se refere ao modo em que Moivre expandiu a teologia newtoniana e estatística durante quase um século. Quase em todo seu *History...* Todhunter aproveita um pouco de álgebra de um livro de memórias realmente importante e muitas vezes fala em exercícios escolares

Todhunter falha quase que inteiramente por pegar um desvio da evolução científica, ou para tratar que a evolução em relação à corrente de pensamento, o que influencia a ciência tanto quanto a ciência influencia o pensamento geral. As causas que levaram Moivre para seu "*Approximatio*" ou Bayes para seu teorema eram mais teológicas e sociológicas do que puramente matemáticas e até se reconhece que os matemáticos ingleses pós-newtoniano foram mais influenciados pela teologia de Newton que por sua matemática, a história da ciência no século XVIII - em particular a dos cientistas que eram membros da Royal Society - deve permanecer obscuro.

KARL PEARSON.

18 março de 1926.

Nature 117 (1926 17 de abril), 551-552.

(Tradução site <http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/demoivrenotes.pdf> acesso em 09/03/2012)

### ***UM RARO PANFLETO DE MOIVRE E ALGUMAS DE SUAS DESCOBERTAS***

Como resultado de dois estudos recentes de Karl Pearson uma informação é valiosa e muda a posição que Abraham de Moivre ocupa na história da matemática. Estes estudos são baseados em uma consideração de:

- (a) *Pars Quarta* de Jean Bernoulli *Ars Conjectandi* que contém o que é propriamente chamado Teorema de Bernoulli e
- (b) um panfleto 12 de novembro de Moivre de 1733

O principal objetivo deste artigo é resumir alguns dos resultados de Pearson, para tirar o equívoco que um de seus panfletos pode causar, e apresentar um fac-símile do panfleto *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii  $(a + b)^n$  in Seriem expansi*

PEARSON inicia seu artigo como se segue:

“É usual para atribuir a descoberta da curva normal de Gauss para curva dos erros.

Isto é apenas devido ao fato de que Laplace publicou em 1812 *Théorie analytique des Probabilités* e para isso a maioria dos escritores se referem. Mas Laplace publicou *Mémoire sur les Probabilités* em *Histoire de Acad'emie des Sciences* em 1778, esse livro

contém a função curva normal, e enfatiza a importância da probabilidade integral. E em (*Mémoires ... présentés* T. IV. p. 6) discute o teorema de Bayes também chegou à curva exponencial de erros como uma aproximação à série hipergeométricos. Todos trabalhos de Gauss estão no século XIX. Seu *Theoria motus corporum coelestium* publicado em 1809, sua teoria dos mínimos quadrados e sua teoria de combinatória de observações mais tarde.

Sem dúvida que o nome de Laplace deve ser relacionado com a curva normal e a probabilidade integral, antes de Gauss.

Mas Moivre antecede tanto Laplace quanto Gauss.

O assunto é muito simples historicamente. Moivre publicou em 1730 *Miscellanea Analytica*, ainda uma mina de riqueza quase totalmente explorado. Muitas cópias desse trabalho tem anexadas um suplemento com paginação independente, que termina em uma tabela de 14 figura logaritmos de fatoriais de 10! a 900! por diferenças de 10. Mas apenas alguns poucos exemplares [Pearson encontrou apenas um!] ter um segundo suplemento, também com paginação separada (pp. 1-7) e datada de 12 de novembro de 1733. O segundo suplemento só poderia ser adicionado ao de cópias vendidas três anos após a edição do livro original, e isso explica sua raridade. Todhunter em *History of the Theory Probability* parece ter usado *Miscellanea Analytica*, mas nunca ter se deparado com este suplemento por isso nunca deparado com este suplemento diz Pearson.

No último parágrafo Pearson faz declarações que podem facilmente confundir: em primeiro lugar, na sugestão que o “segundo suplemento” estava anexado no final de uma cópia do *Miscellanea Analytica* na University College, em Londres, era realmente um suplemento, em segundo lugar, ao afirmar que esta publicação não foi considerado por Todhunter em *History of the Theory Probability*

Uma questão é fato que o “segundo suplemento” apareceu em inglês, exceto por algumas pequenas alterações na segunda e terceira edição de *The Doctrine of Chances*. Todhunter considera isto nos parágrafos 324 e 335 de seu *History of the Theory Probability*. Além disso prefácios de Moivre em sua tradução constam a declaração: “*Eu traduzi meu panfleto que foi impresso em 12 de novembro de 1733, e comuniquei para alguns amigos, mas ainda não tornei público, reservando-me o direito de ampliar meus próprios pensamentos, como ocasião deve exigir*”. Por isso, é evidente que a publicação em questão não era segundo suplemento de *Miscellanea Analytica* de Moivre. Outra cópia do panfleto original de Moivre está em Preussische Staatsbibliothek, Berlim.

Pearson dá prioridade a Moivre em:

1. Apresentar o primeiro tratamento do integral de probabilidade, e essencialmente à curva normal;
2. Formulação e utilização do teorema, impropriamente chamado teorema de Stirling;
3. Enunciar o teorema de que a medida de precisão depende da inversa da raiz quadrada do tamanho da amostra, portanto, muitas vezes chamado de Teorema de Bernoulli embora seja inteiramente devido a Moivre.

Além disso, para este teorema de Moivre apreciou uma imensa gama de aplicações.

*“Para ele, era um problema teológico, ele determinou a frequência de irregularidades do projeto original da Divindade. Sem entender esse lado da questão, é impossível compreender a história das estatísticas de Moivre através Derham e Sussmilch a Quetelet ue culminou com o princípio moderno da estabilidade de razões”* . Ninguém tinha verdadeira noção das idéias de desvio padrão antes de Moivre.

Pearson conclui seu segundo artigo com o que segue: *“Bernoulli viu a importância de um determinado problema, assim como Ptolomeu, mas seria um pouco absurdo para chamar a solução de Kepler ou Newton do movimento planetário com o nome de Ptolomeu. No entanto, um erro de magnitude parece-me feito quando o método de Moivre é discutido sem referência de seu autor, sob o título de Teorema de Bernoulli . A contribuição de Bernoulli para a matemática é considerável, mas eles têm sido exagerada. O Pars Quarta do **Ars Conjectandi** não tem a importância, que foi atribuído ao mesmo.”*

Agora, um segundo teorema para que Moivre merece crédito, ou seja, erroneamente associado com o nome de Stirling, Moivre encontra a razão do máximo termo de uma binomial com o termo a uma distância  $x$  a partir do máximo.

Ele supõe uma potência tão grande, que pode praticamente usar:

$$m! = \text{const.} \times \sqrt{m} e^{-m} m^m.$$

Ele determina a constante que ele chama de  $B$  pelo teorema que o logaritmo hiperbólico de  $B$  é dado por:

$$\log_e B = 1 - 1/12 + 1/360 - 1/1260 + 1/1680$$

Onde encontra  $B = 2,5074$

Resultando:

$$m! = 2.5074 \times \sqrt{m} e^{-m} m^m.$$

Então Moivre afirma: "Quando eu comecei esse questionamento, contentei-me para em determinar em geral o valor de  $B$ , o que foi feito pela adição de alguns termos de uma série acima escrita, mas como eu percebi que convergia, mas lentamente, e vendo ao mesmo tempo que o que eu tinha feito respondia ao meu propósito razoavelmente bem, eu desisti prosseguir, até que meu digno e sábio amigo Sr. James Stirling, que tinha se dedicado mais a este questionamento, descobriu que a quantidade  $B$  que denota a raiz quadrada de uma circunferência de um círculo cujo raio é a unidade"

Pearson observa muito justamente:

"Considero que o fato de que Stirling mostrou que a constante aritmética de Moivre aritmética era  $\sqrt{2\pi}$  que não lhe dá o direito de reivindicar o teorema que é erroneamente chamado de Teorema de Stirling".

R.C. ARCHIBALD

Isis 8 (1926), 671-683.

(Tradução site <http://www.york.ac.uk/depts/math/histstat/demoivrenotes.pdf> acesso em 09/03/2012)