

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

SOPHIE ASSUNÇÃO CARRARO

**ESTUDO E PROJETO DE CONTROLE AUTOMÁTICO PARA UM SISTEMA
AEROPÊNDULO**

Ilha Solteira - SP
2023

SOPHIE ASSUNÇÃO CARRARO

**ESTUDO E PROJETO DE CONTROLE AUTOMÁTICO PARA UM SISTEMA
AEROPÊNDULO**

Trabalho de Graduação apresentado à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” câmpus de Ilha Solteira (FEIS UNESP), como parte dos requisitos para obtenção do grau de Engenheira Eletricista.

Prof. Dr. Rodrigo Cardim
Orientador

Ilha Solteira - SP
2023

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C313e Carraro, Sophie Assunção.
Estudo e projeto de controle automático para um sistema aeropêndulo /
Sophie Assunção Carraro. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
72 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia elétrica) -
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2023

Orientador: Rodrigo Cardim

Inclui bibliografia

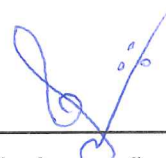
1. Controladores. 2. Modelagem matemática em espaço de estados. 3.
Sistema viga-hélice. 4. LMIs (Linear Matrix Inequalities).

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos trinta dias do mês de junho do ano de dois mil e vinte e três, a discente **Sophie Assunção Carraro**, matriculada sob o nº 182054756, tendo como banca examinadora o seu orientador, o Prof. Dr. Rodrigo Cardim, o Prof. Dr. Carlos Antonio Alves e o Mestrando Dante Javier Solis Oncoy, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "Estudo e Projeto de Controle Automático para um Sistema Aeropêndulo" obtendo a nota 9,5 (Nove e meio) e conceito Aprovado.



Prof. Dr. Rodrigo Cardim
- orientador -



Sophie Assunção Carraro
- discente -



Prof. Dr. Carlos Antonio Alves
- Membro da Banca -



Mestrando Dante Javier Solis Oncoy
- Membro da Banca -

Dedico este trabalho a todos que me apoiaram e me incentivaram nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento deste trabalho de graduação contou com a ajuda e apoio de diversas pessoas, dentre as quais agradeço:

Aos meus pais, Ione Maria Assunção Carraro e Eduardo Carraro, por terem me apresentado o curso de Engenharia Elétrica, além de me incentivarem e apoiarem do começo ao fim, mesmo nos momentos mais difíceis.

À minha irmã, Paola Assunção Carraro, por me mostrar um mundo mais colorido e feliz, o que fez eu me tornar uma pessoa melhor.

À minha família, principalmente minhas avós, Lilia Maria Alves Assunção e Isa Yara Coradi Carraro, e minha madrinha, Yara Maria Alves Assunção, por celebrarem cada conquista minha.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rodrigo Cardim, por aceitar me orientar na minha pesquisa e no trabalho de graduação, permitindo que eu me desenvolvesse mais na área de controle. Além de ser um ótimo professor e profissional, que vou levar como exemplo para a vida.

A todos os pesquisadores do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), em específico ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira e Dr. Bruno Sereni por todo o esforço e dedicação para apresentar aos alunos a área de controle e o LPC, mesmo durante as aulas remotas.

A todos os meus colegas da turma 2018/2, principalmente, Amanda Meira Ishicava Bortoloci, Thiago Lombarde Vitoriano e Vitor Kamikihara De Souza, pelos trabalhos em grupo, pela excursão à Angra dos Reis e pelos momentos divertidos que tivemos ao longo destes cinco anos. Também agradeço aos demais amigos que conheci na graduação, por todo apoio e incentivo.

À equipe Zebra Aerodesign e aos membros por todo o companheirismo e ensinamentos, que me ajudaram muito a crescer profissionalmente. Além de me acolherem com muito carinho e me ensinarem a acolher os novos membros, mostrando que o Zebra Aerodesign é mais que uma equipe, é uma família.

À empresa Bosch e aos meus gestores pela oportunidade de fazer estágio em parceria com a Stellantis, na área de controle e calibração de sistemas de propulsão automotiva. Também agradeço aos meus colegas de trabalho pelos ensinamentos e suporte.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da bolsa de pesquisa.

*“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa,
nunca tem medo e nunca se arrepende”.*

Leonardo da Vinci

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre a teoria de controle moderno e modelagem matemática de sistemas dinâmicos, dando ênfase em modelos matemáticos em espaço de estados e aplicação de LMIs para o projeto de controladores. O trabalho de graduação tem como modelo de estudo o Aeropêndulo, presente no Laboratório de Pesquisa em Controle - LPC, que consiste em um sistema Viga-Hélice controlável com um grau de liberdade para permitir a rotação da viga em determinados ângulos. Desse modo, esta pesquisa propõe o estudo teórico de controle moderno, abordando diversos tópicos como a realização da análise sobre a modelagem matemática em espaço de estados do sistema Viga-Hélice, a utilização de simulações através do software MatLab/Simulink, envolvendo uma pesquisa em desenvolvimento por meio de uma iniciação científica, o projeto de controladores baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e, por fim, a descrição teórica do controle chaveado baseado em modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno. O desenvolvimento deste trabalho, assim como os resultados obtidos poderão contribuir com a comunidade acadêmica, principalmente com o LPC, para a elaboração de novas pesquisas sobre o mesmo tema.

Palavras-chave: Controladores; Modelagem Matemática em Espaço de Estados; Sistema Viga-Hélice; LMIs (*Linear Matrix Inequalities*).

ABSTRACT

This work aims to present a study on modern control theory and mathematical modeling of dynamical systems, emphasizing mathematical models in state space and application of LMIs for controller design. The graduation work has as a study model the Aeropendulum, present in the Control Research Laboratory - LPC, which consists of a controllable propeller driven pendulum system with a degree of freedom to allow the rotation of the beam at certain angles. In this way, this research proposes the theoretical study of modern control, addressing various topics such as the analysis of the mathematical modeling in state space of the Aeropendulum system, the use of simulations through the MatLab/Simulink software, involving a research already developed through a scientific initiation, the control project based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and, finally, a theoretical description of switched control based on fuzzy Takagi-Sugeno models. The development of this work, as well as the results obtained, will be able to contribute to the academic community, mainly the LPC, for the elaboration of new researches on the same theme.

Keywords: Controllers; Mathematical Modeling in State Space; Propeller Driven Pendulum System; LMIs (Linear Matrix Inequalities).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo representado no espaço de estados.....	21
Figura 2	- Interpretação geométrica de estabilidade: a, estável; b, assintoticamente estável; c, instável.....	31
Figura 3	- Sistema Aeropêndulo presente no LPC.....	35
Figura 4	- Sistema de engrenagens e transferidor de grau acoplados ao eixo.....	36
Figura 5	- Ilustração dos parâmetros do sistema Aeropêndulo.....	37
Figura 6	- Exemplificação da relação trigonométrica.....	38
Figura 7	- Resposta ao degrau em malha aberta para 10 amostras.....	40
Figura 8	- Entrada $u_t(t) = 1160\mu s$ para o sistema em malha aberta.....	43
Figura 9	- Saída $\theta_t(t)$ com $u_t(t) = 1160\mu s$ para o sistema em malha aberta.....	44
Figura 10	- Entradas $u(t) = u_t(t) - u_0$ usadas para a identificação com $u_t(t) = 1160\mu s$	44
Figura 11	- Saídas $\theta_t(t)$ usadas para a identificação com $u_t(t) = 1160\mu s$	44
Figura 12	- Saídas $\theta(t)$ do sistema por meio da substituição de parâmetros e pela identificação <i>fuzzy</i> T-S.....	47
Figura 13	- Diagrama de blocos que representa o sistema Aeropêndulo.....	49
Figura 14	- Diagrama de blocos do controlador de servossistemas do tipo 1 para o Aeropêndulo.....	50
Figura 15	- Circuito do controlador do Aeropêndulo montado no Simulink.....	54
Figura 16	- Resposta do Aeropêndulo com controlador de servomecanismos via LMIs.....	55
Figura 17	- Resposta do Aeropêndulo com controlador de servossistemas, sendo $\gamma = 6.8$	56
Figura 18	- Resposta do Aeropêndulo com controlador de servossistemas, sendo $\gamma = 1.8$	56

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CP	<i>Convex Problem</i> (Problema Convexo)
ESC	<i>Electronic Speed Controller</i> (Controlador Eletrônico de Velocidade)
EVP	<i>Eigenvalue Problem</i> (Problema de Autovalor)
FEIS	Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
GEVP	<i>Generalized Eigenvalue Problem</i> (Problema de Autovalor Generalizado)
LMIs	<i>Linear Matrix Inequalities</i> (Desigualdades Matriciais Lineares)
LMILab	<i>LMI Laboratory</i> (Laboratório de LMI)
LMIP	<i>LMI Problem</i> (Problema de Factibilidade de uma LMI)
LPC	Laboratório de Pesquisa em Controle
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> (Modulação por Largura de Pulso)
SeDuMi	<i>Self-Dual Minimization Inequalities</i> (Desigualdade de Minimização Auto-Dual)
T-S	Takagi-Sugeno
UNESP	Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Yalmip	<i>Yet Another LMI Parser</i> (Mais um analisador de LMI)

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N}	Conjunto de números naturais
\mathbb{R}	Conjunto de números reais
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $m \times n$
\mathbb{R}^n	Conjunto de vetores reais de dimensão $n \times 1$
\mathbb{K}_r	Conjunto $\{1, 2, \dots, r\} \subset \mathbb{N}$, dos primeiros r números naturais
$Nul(M)$	Espaço nulo ou núcleo de uma matriz M .
M^T	Transposta da matriz real M
M^{-1}	Inversa da matriz real M
$\ x\ $	Norma euclidiana do vetor $x \in \mathbb{R}^n$: $\ x\ = \sqrt{x^T x}$
$arg * \min_{l \in \mathbb{K}_r} \{h_l\}$	Menor índice $j \in \mathbb{K}_r$ tal que, para o conjunto $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$, $h_j = \min_{l \in \mathbb{K}_r} \{h_l\}$
t	Tempo
t_0	Tempo inicial
\in	Pertence
\subset	Contido
\subseteq	Contido em
\forall	Qualquer
\exists	Existe
∞	Infinito

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	OBJETIVOS.....	17
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	17
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	19
2.1	MODELAGEM MATEMÁTICA EM ESPAÇO DE ESTADOS.....	19
2.1.1	Definição Matemática de Espaço de Estados.....	20
2.1.2	Representação de Funções de Transferência no Espaço de Estados.....	22
2.1.2.1	<i>Forma Canônica Controlável.....</i>	<i>23</i>
2.1.2.2	<i>Forma Canônica Observável.....</i>	<i>23</i>
2.1.2.3	<i>Forma Canônica Diagonal.....</i>	<i>23</i>
2.1.2.4	<i>Forma Canônica de Jordan.....</i>	<i>24</i>
2.2	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES.....	25
2.2.1	Definição Matemática de Desigualdades Matriciais Lineares.....	27
2.2.1.1	<i>Problema de Factibilidade de uma LMI (LMIP).....</i>	<i>28</i>
2.2.1.2	<i>Problema de Autovalor (EVP).....</i>	<i>28</i>
2.2.1.3	<i>Problema de Autovalor Generalizado (GEVP).....</i>	<i>29</i>
2.2.1.4	<i>Problema Convexo (CP).....</i>	<i>30</i>
2.3	ESTABILIDADE SEGUNDO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV.....	30
3	SISTEMA AEROPÊNDULO.....	34
3.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA AEROPÊNDULO.....	34
3.2	EQUACIONAMENTO DO SISTEMA AEROPENDULO.....	36
3.3	MODELAGEM EM ESPAÇO DE ESTADOS DO AEROPENDULO.....	41
3.4	IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA AEROPENDULO.....	42
4	PROJETO DE CONTROLADORES PARA O AEROPÊNDULO.....	48
4.1	<i>TOOLBOX YALMIP E SOLVERS LMILAB E SEDUMI.....</i>	<i>48</i>
4.2	CONTROLADOR DO AEROPÊNDULO UTILIZANDO LMIS.....	49
4.3	RESULTADOS OBTIDOS.....	54

5	CONTROLE CHAVEADO POR MODELOS <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO.....	57
5.1	SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO DESCRITOS POR MODELOS <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO.....	57
5.2	LEI DE CONTROLE CHAVEADO.....	58
5.3	PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO UTILIZANDO LMIS E MODELOS <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO PARA O PROBLEMA DA ESTABILIDADE LOCAL.....	59
6	CONCLUSÃO.....	65
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	67
	REFERÊNCIAS.....	68

1 INTRODUÇÃO

Um sistema de controle pode ser definido como uma interconexão de componentes formando uma configuração de sistema que irá produzir uma resposta desejada deste sistema. A base para a análise de um sistema é formada pelos fundamentos fornecidos pela teoria dos sistemas lineares, que supõe uma relação de causa e efeito para os componentes de um sistema. Dessa maneira, a relação de entrada-saída representa a causa e o efeito do processo. Um sistema de controle pode ser de malha aberta (sem realimentação) e de malha fechada (com realimentação), sendo que controle automático consiste em na modelagem de um sistema de controle de malha fechada (DORF; BISHOP, 2001)

À medida que os sistemas modernos se tornaram mais complexos, com muitas entradas e saídas, a descrição de um sistema de controle moderno passou a exigir um grande número de equações. Por esse motivo, a teoria clássica de controle, que somente trata de sistemas com uma entrada e uma saída, tornou-se insuficiente para solucionar sistemas modernos que possuem múltiplas entradas e saídas. Contudo, com a evolução da tecnologia após a Segunda Guerra Mundial e o aumento da disponibilidade de computadores digitais, a partir de 1960, foi possível realizar a análise de sistemas complexos diretamente no domínio do tempo (OGATA, 2011).

Dessa maneira, foi desenvolvida a teoria de controle moderno, com base na análise e na síntese do domínio de tempo com emprego de variáveis de estado. O principal objetivo do surgimento desta nova teoria foi lidar com a crescente complexidade dos sistemas modernos, além de seus requisitos rigorosos relativos à precisão, à importância e ao custo em aplicações militares, espaciais e industriais. É importante ressaltar que a teoria de controle moderno é essencialmente uma abordagem no domínio de tempo e no domínio da frequência, enquanto a teoria de controle convencional é uma abordagem no domínio da frequência complexa. (OGATA, 2011).

Para compreender e controlar sistemas complexos, deve-se obter os modelos matemáticos quantitativos destes sistemas (DORF; BISHOP, 2001). O modelo matemático de um sistema dinâmico é definido como um conjunto de equações que representa a dinâmica do sistema com uma certa precisão. Um sistema pode ser representado de muitas maneiras diferentes, portanto, pode apresentar vários modelos matemáticos, assumindo diferentes formas, a depender da perspectiva a ser considerada. Uma vez obtido o modelo matemático de um sistema, podem ser utilizadas várias ferramentas analíticas e de computação para efeito de análise e síntese (OGATA, 2011).

A representação de um sistema dinâmico em espaço de estados é um modelo matemático composto por um conjunto de variáveis de estado. Sendo as variáveis de estado o menor conjunto de variáveis que determinam o comportamento ou a resposta futura de um sistema quando são conhecidos o estado presente do sistema, os sinais de excitações de entrada e as equações que descrevem a dinâmica. Em um sistema dinâmico, o estado do sistema em um instante t é descrito em termos de um conjunto de variáveis de estado, tal que o conhecimento dos valores destas variáveis e das funções de entrada, com as equações que descrevem a dinâmica, fornecem os estados futuros e a saída futura do sistema (DORF; BISHOP, 2001).

A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. A representação de um dado sistema no espaço de estados não é única, mas o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer uma das diferentes representações do mesmo sistema no espaço de estados (OGATA, 2011).

Esse tipo de representação que descreve o sistema no domínio do tempo é mais conveniente para representar sistemas não-lineares e multivariáveis do que a função de transferência (AGUIRRE, 2007). Como o modelo utilizado para este estudo de controle moderno trata-se do Aeropêndulo, um sistema não-linear, a modelagem matemática em espaço de estados foi escolhida para ser utilizada na representação do sistema, assim como, foi definida a aplicação de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) para o projeto de controladores deste trabalho.

Desigualdades Matriciais Lineares ou LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) são ferramentas matemáticas amplamente aplicadas na teoria de controle, que surgiram por volta de 1890 quando Aleksandr Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo a chamada teoria de Lyapunov. Essa metodologia pode solucionar problemas complexos que envolvem muitas variáveis matriciais, de forma que é possível impor diversas restrições a essas variáveis, dependendo dos requisitos de projeto, constituindo um método flexível para a síntese de controladores (BOYD *et al.*, 1994).

As LMIs são comumente utilizadas para a análise da estabilidade e projeto de controladores para sistemas (BOYD *et al.*, 1994). Com o desenvolvimento de algoritmos numéricos mais complexos, a solução computacional de LMIs tornou-se possível e cada vez mais acessível e eficiente. Por esse motivo, atualmente, as Desigualdades Matriciais Lineares estão sendo objeto de estudo de muitas pesquisas por renomados pesquisadores mundiais, tendo aplicações em diversas áreas de controle.

Para compreender a maneira como o projeto de controle irá agir, é necessário entender o funcionamento do modelo base deste trabalho de pesquisa. Em vista disso, o Aeropêndulo, também chamado de sistema Viga-Hélice, foi projetado e construído por Veiga (2016) no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP).

Pode-se descrever este sistema, resumidamente, como uma viga apoiada em um anteparo, sendo que em uma das extremidades da viga há um motor de corrente contínua com uma hélice acoplada e na outra extremidade há um contrapeso ajustável. A viga possui um grau de liberdade para rotacionar em torno do eixo em ângulos determinados e medidos através de um potenciômetro, e este movimento de rotação é feito pela propulsão gerada pelo conjunto motor e hélice. Logo, o objetivo do sistema Aeropêndulo é controlar o ângulo de inclinação da haste em relação à horizontal.

O sistema Viga-Hélice presente no LPC é bem semelhante ao sistema QNET VTOL da fabricante Quanser[®], em quesito de funcionalidade. Por esse motivo, esse sistema serviu como base para o equacionamento do Aeropêndulo no presente trabalho, assim como naqueles produzidos por Veiga (2016) e Gonçalves (2019). Em Silva, H. (2020) e Bertholim (2022) foi tomada uma abordagem diferente para o equacionamento, uma vez que outro ponto de referência foi adotado. Contudo, todos esses trabalhos foram utilizados como modelo para o estudo e desenvolvimento do projeto, principalmente, diante dos parâmetros estabelecidos e das possíveis funções de transferência que descrevem este sistema.

Neste estudo, a identificação do sistema Aeropêndulo é necessária para viabilizar as implementações do projeto de controladores. Mesmo diante de certa semelhança, o sistema Viga-Hélice presente no Laboratório de Pesquisa em Controle possui parâmetros diferentes dos normalmente encontrados nas bibliografias e, a partir disso, foi definido utilizar, como base da identificação, os trabalhos de Silva, H. (2020) e Bertholim (2022), que se referenciaram pelo trabalho de Job e Jose (2015) e adaptaram-se para o equipamento do Laboratório de Pesquisa em Controle da FEIS UNESP. Dessa maneira, é possível determinar o instante e o valor de entrada inicial utilizados no sistema.

Com a utilização da forma canônica controlável, que é uma das representações de funções de transferência no espaço de estados, definida em Ogata (2011), obtêm-se os modelos locais lineares para os diversos pontos de operação e as matrizes de estado e de entrada. Neste trabalho foram encontradas essas matrizes de estado e de entrada por meio dos valores dos parâmetros fornecidos no trabalho de Veiga (2016) e foram utilizadas, como recurso de comparação, as matrizes do trabalho de Bertholim (2022), identificadas através do software

MatLab/Simulink e modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno. Após realizar a identificação do sistema, torna-se possível iniciar o projeto de controladores do Aeropêndulo.

Existem inúmeras maneiras de se realizar um projeto de controle moderno, utilizando diversas teorias, ainda em andamento na atualidade. Algumas dessas formas podem ser mais simplificadas e outras mais complexas, a depender do sistema em análise e da abordagem empregada para o projeto de controladores. Neste trabalho, optou-se por realizar o projeto de controladores do sistema Aeropêndulo por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), pelo fato de ser uma ótima alternativa utilizada na teoria de controle moderno para projetos em sistemas representados na modelagem matemática em espaço de estados.

Para solucionar numericamente as LMIs deste estudo, foi utilizado o software MatLab/Simulink com o auxílio da *toolbox* Yalmip e dos *solvers* LMILab e SeDuMi. Atualmente, o LMILab e o SeDuMi, são os dois *solvers* mais usados na literatura especializada para a resolução de LMIs. Dependendo do problema, um *solver* será mais veloz que o outro, porém, geralmente, o Yalmip funciona de maneira mais rápida com o SeDuMi (SILVA, E.; BUZACHERO, 2011).

O projeto de controladores do Aeropêndulo por meio de LMIs foi implementado e simulado pelo Simulink, tomando como referência o diagrama de blocos do trabalho de Yamanaka *et al.* (2022b) e o livro de Ogata (2011). A simulação é de extrema importância, dado que por meio dela é possível identificar qualquer erro ou problema antes de implementar o controlador no Aeropêndulo em bancada, evitando, assim, possíveis danos ao equipamento.

Por fim, este trabalho aborda teoricamente um projeto de controle chaveado por meio de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S), que pode ser aplicado em trabalhos futuros acerca do sistema Aeropêndulo. No geral, modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno se apresentam enquanto uma ferramenta importante para a realização de projetos de controladores, principalmente porque facilitam o uso de LMIs (BOYD *et al.*, 1994). Isso se deve ao fato de estes modelos possibilitarem a representação de sistema como uma combinação de modelos locais lineares, ponderados por funções de pertinência (TAKAGI; SUGENO, 1985).

Os parâmetros destas funções de pertinência dependem do conhecimento do projetista sobre o comportamento do sistema e podem ser obtidos através de um processo de identificação. Contudo, nem sempre é trivial determinar as funções e os parâmetros que melhor se ajustam ao sistema (TANIGUCHI *et al.*, 2001), de modo que em alguns casos são necessárias técnicas de otimização para determinar esses parâmetros (MACHADO, 1998).

1.1 OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a teoria de controle moderno de sistemas dinâmicos, por meio da modelagem matemática em espaço de estados e pelo projeto de controladores do Aeropêndulo (sistema Viga-Hélice) disponível no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da FEIS UNESP, utilizando a aplicação de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Deste modo, para atingir o objetivo principal descrito, pretende-se realizar os seguintes processos:

- Conduzir um estudo teórico de controle moderno.
- Fazer uma análise completa do funcionamento do Aeropêndulo, incluindo descrição, equacionamento, modelagem em espaço de estados e identificação deste sistema.
- Realizar a identificação dos valores das variáveis do sistema Aeropêndulo por meio da teoria de espaço de estados.
- Obter um modelo de simulação, por meio do software MatLab/Simulink, que descreva o sistema Aeropêndulo.
- Desenvolver o projeto de controladores para o Aeropêndulo, baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).
- Apresentar teoricamente um projeto de controle chaveado por meio de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno para auxiliar projetos futuros.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Para alcançar os objetivos citados no tópico anterior, serão realizadas algumas etapas durante o trabalho de forma linear. Assim, em busca de manter a apresentação dos estudos e dos resultados obtidos de maneira adequada, o trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: Apresenta a introdução deste trabalho de graduação, assim como os objetivos e a organização do texto disposto no trabalho.
- Capítulo 2: Apresenta os conceitos fundamentais para o entendimento do trabalho. Deste modo, engloba a teoria e definição matemática dos tópicos: modelagem matemática em espaços de estados, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e estabilidade segundo método direto de Lyapunov.

- Capítulo 3: Descreve o sistema Aeropêndulo instalado no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), assim como seu funcionamento para estudo e análise deste modelo não-linear. Este capítulo apresenta a descrição, o equacionamento, a modelagem matemática em espaço de estados e a identificação deste sistema.
- Capítulo 4: Apresenta o projeto de controladores para o Aeropêndulo, que consiste no controle utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Além de abordar a solução numérica através do software MatLab, com o auxílio da *toolbox* Yalmip e dos *solvers* LMILab e SeDuMi, a simulação do circuito que representa o modelo do controlador de servossistemas para o Aeropêndulo, e os resultados obtidos.
- Capítulo 5: Apresenta de forma teórica um projeto de controle chaveado por meio de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, mostrando a representação de sistemas não lineares incertos discretos no tempo via *fuzzy* T-S e a lei de controle chaveado.
- Capítulo 6: Apresenta a conclusão final sobre o trabalho desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Este capítulo tem a finalidade de apresentar alguns conceitos fundamentais acerca da teoria de controle para o entendimento da análise produzida. Assim sendo, serão apresentadas: as teorias e definições matemáticas sobre modelagem matemática em espaço de estados, que será utilizada para identificar o sistema; Desigualdades Matriciais Lineares, necessárias para projetar os controladores e identificar o sistema; e, por fim, estabilidade segundo método direto de Lyapunov, utilizado para analisar a estabilidade do sistema.

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA EM ESPAÇO DE ESTADOS

A teoria de controle moderno foi desenvolvida para solucionar problemas complexos com muitas entradas e saídas que começaram a surgir com o avanço da tecnologia. A base desta nova teoria é dada pela análise e pela síntese do domínio do tempo com o emprego de variáveis de estado, forma a qual consolida-se a modelagem matemática em espaço de estados. O avanço que o controle moderno proporcionou está associado com a abordagem, essencialmente, no domínio de tempo e no domínio de frequência.

Para compreender o espaço de estados, é importante definir os seguintes conceitos que edificam esta modelagem matemática:

- **Estado:** O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, chamadas de variáveis de estado, tais que o conhecimento dessas variáveis em $t = t_0$, junto ao conhecimento da entrada para $t \geq t_0$, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$ (OGATA, 2011).
- **Variáveis de estado:** As variáveis de estado de um sistema dinâmico são aquelas que constituem o menor conjunto constituem o menor conjunto de variáveis capaz de determinar o estado desse sistema dinâmico. Se pelo menos n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n são necessárias para descrever todo o comportamento de um sistema dinâmico (de tal modo que, sendo a dada a entrada para $t \geq t_0$ e especificado o estado inicial em $t = t_0$, o estado futuro do sistema fique completamente estabelecido), então essas n variáveis formam um conjunto de variáveis de estado. É importante ressaltar que essas variáveis de estado não necessitam ser quantitativas fisicamente mensuráveis ou observáveis, portanto, qualquer variável pode ser

escolhida. Essa liberdade de escolha das variáveis de estado é uma vantagem dos métodos de espaço de estados. Entretanto, na prática, é conveniente escolher para as variáveis de estado grandezas que sejam facilmente mensuráveis, caso isso seja possível, porque as leis do controle ótimo requerem a realimentação de todas as variáveis de estado com ponderação adequada (OGATA, 2011).

- **Valor de estado:** Se forem necessárias n variáveis de estado para descrever completamente o comportamento de dado sistema, então essas n variáveis de estado poderão ser consideradas como os n componentes de um vetor x . Esse vetor é chamado de vetor de estado e pode ser definido como vetor que determina univocamente o estado do sistema $x(t)$ para qualquer instante $t \geq t_0$, uma vez que é dado o estado em $t = t_0$ e é especificada a entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$ (OGATA, 2011).
- **Espaço de estados:** O espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos de x_1, x_2, \dots, x_n , onde x_1, x_2, \dots, x_n são as variáveis de estado, é denominado espaço de estados. Qualquer estado pode ser denominado por um ponto no estado de estados (OGATA, 2011).
- **Equação no espaço de estados:** A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. A representação de um dado sistema no espaço de estados não é única, mas o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer uma das diferentes representações do mesmo sistema no espaço de estados (OGATA, 2011).

2.1.1 Definição Matemática de Espaço de Estados

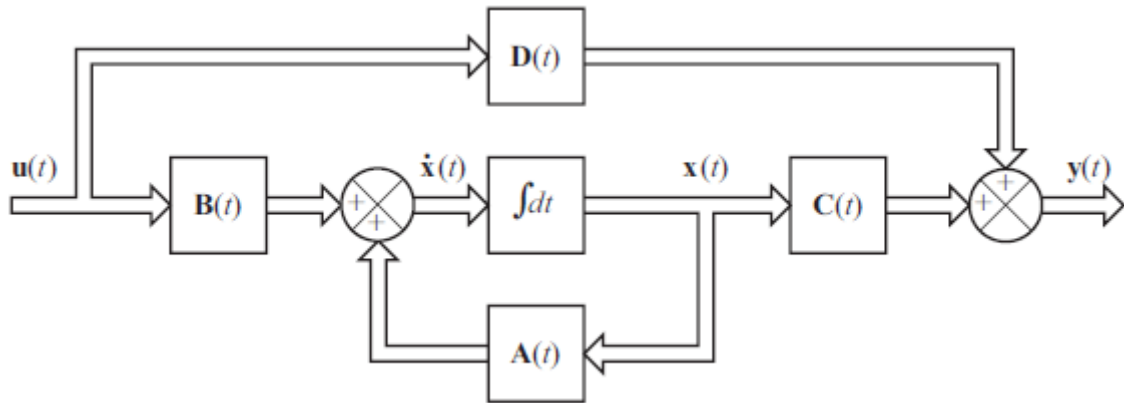
Supondo que um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas envolva n integradores, considerando que existam r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ e m saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. As equações linearizadas de estado, dada por $\dot{x}(t)$, e de saída, dada por $\dot{y}(t)$, são representadas pelas equações (1) e (2) respectivamente (OGATA, 2011).

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2)$$

Sendo $A(t)$ a matriz de estado, $B(t)$ a matriz de entrada, $C(t)$ a matriz de saída e $D(t)$ a matriz de transmissão direta. As equações (1) e (2) são representadas no diagrama de blocos da Figura 1.

Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo representado no espaço de estados.



Fonte: (OGATA, 2011).

Caso as funções vetoriais não envolvam o tempo t explicitamente, o sistema é denominado de sistema invariante no tempo. Neste caso, as equações (1) e (2) podem ser simplificadas para (OGATA, 2011):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4)$$

As equações (3) e (4) são, respectivamente, a equação de estado de um sistema linear invariante no tempo e a equação de saída para o mesmo sistema. De modo geral, a modelagem matemática em espaço de estados de um sistema de controle é representada por essas últimas equações descritas acima.

Um sistema dinâmico que consiste em um número finito de elementos concentrados pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias, nas quais o tempo é a variável independente. Uma equação diferencial de ordem n pode ser representada por uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem. Se n elementos do vetor formam um conjunto de variáveis de estado, então a equação diferencial vetorial-matricial é uma equação de estado (OGATA, 2011).

Sendo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída do sistema, com as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ constantes, pode-se definir a equação de estado matricial-vetorial diferencial da seguinte forma (OGATA, 2011):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_x} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n_x} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n_x1} & a_{n_x2} & \cdots & a_{n_xn_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n_u} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n_u} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n_x1} & b_{n_x2} & \cdots & b_{n_xn_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_u} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n_x} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n_x} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ c_{n_y1} & c_{n_y2} & \cdots & c_{n_y n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n_u} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n_u} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ d_{n_y1} & d_{n_y2} & \cdots & d_{n_y n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_u} \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.1.2 Representação de Funções de Transferência no Espaço de Estados

Existem diversas técnicas para a obtenção da representação de funções de transferência no espaço de estados, dentre elas pode-se citar as formas controlável, observável, diagonal e de Jordan (OGATA, 2011).

Essas formas estão englobadas dentro da representação no espaço de estados em formas canônicas. Portanto, deve-se considerar um sistema definido por:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (7)$$

Sendo u a entrada do sistema e y a saída. Essa equação também pode ser escrita na forma da função de transferência como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (8)$$

As formas controlável, observável, diagonal e de Jordan serão descritas nos tópicos a seguir e utilizadas no decorrer do trabalho para a representação do Aeropêndulo em espaço de estados, sendo adquiridas de Ogata (2011).

2.1.2.1 Forma Canônica Controlável

A forma canônica controlável é importante na discussão do projeto de sistemas de controle pela abordagem por alocação de polos. Essa forma é representada a seguir (OGATA, 2011):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (10)$$

2.1.2.2 Forma Canônica Observável

A forma canônica observável é representada por (OGATA, 2011):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \quad (11)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (12)$$

2.1.2.3 Forma Canônica Diagonal

Para a forma canônica diagonal deve-se supor o caso em que o polinômio do denominador envolve somente raízes distintas. Portanto, a função de transferência definida pela Equação (8) deve ser escrita para o caso de raízes distintas, como (OGATA, 2011):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \dots + \frac{c_n}{s+p_n} \quad (13)$$

A forma canônica diagonal da representação em espaço de estados é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (14)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (15)$$

2.1.2.4 Forma Canônica de Jordan

Para a forma canônica de Jordan, deve-se considerar o caso em que o polinômio do denominador da equação (8) envolve múltiplas raízes. Neste caso, a forma canônica diagonal precisa ser modificada para a forma canônica de Jordan. Suponha que os p_i sejam diferentes entre si, exceto pelos três primeiros p_i que são iguais, ou seja, $p_1 = p_2 = p_3$. Então, a forma fatorada da função de transferência resulta em (OGATA, 2011):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)^3 (s+p_4)(s+p_5) \dots (s+p_n)} \quad (16)$$

Fazendo a expansão em frações parciais, tem-se:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \dots + \frac{c_n}{s+p_n} \quad (17)$$

Desse modo, a representação deste sistema em espaço de estados na forma canônica de Jordan é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & -p_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (18)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (19)$$

2.2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Desigualdades Matriciais Lineares ou LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) são uma das abordagens matemáticas mais aplicadas na teoria e análise de controle de sistemas dinâmicos. Os primeiros indícios das LMIs na história começaram por volta de 1890 com a publicação da obra de Aleksandr Lyapunov sobre a Teoria de Lyapunov. Esta teoria mostra que a equação diferencial, dada na equação (20), é estável, ou seja, todas as trajetórias convergem para zero, se e somente se existe uma matriz P definida positivamente, que respeite a inequação mostrada em (21) (BOYD *et al.*, 1994).

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) \quad (20)$$

$$A^T P + PA < 0 \quad (21)$$

A inequação $A^T P + PA < 0$ para $P > 0$ é chamada de desigualdade de Lyapunov na matriz P , que se enquadra como uma forma especial de uma LMI. Essa desigualdade pode ser resolvida analiticamente por meio da solução de um conjunto de equações lineares. A resolução pode ser obtida ao escolher qualquer valor de $Q = Q^T > 0$ e resolver a equação linear $A^T P + PA = -Q$ para a matriz P definida positivamente se o sistema é estável (BOYD *et al.*, 1994).

Após a divulgação da Teoria de Lyapunov, começaram a surgir vários estudos que, em conjunto com a evolução da tecnologia, consolidaram as LMIs. De maneira resumida, são

apresentados alguns eventos importantes que marcaram a história da evolução de LMIs na teoria de controle:

- Por volta de 1890: Primeira aparição de uma LMI pela Teoria de Lyapunov, na qual foi demonstrado que uma desigualdade pode ser resolvida analiticamente por meio da solução de um conjunto de equações lineares (BOYD *et al.*, 1994).
- Década de 1940: Aplicação dos métodos de Lyapunov em problemas reais de engenharia e controle com possível solução manual de pequenas LMIs. Lur'e, Postnikov e outros pesquisadores da União Soviética que foram os precursores dessa evolução ao aplicarem a Teoria de Lyapunov em problemas de estabilidade de sistemas de controle com não-linearidade no atuador (BOYD *et al.*, 1994).
- Início dos anos 1960: Redução da solução de LMIs a critérios gráficos por meio do lema positivo-real (PR). Esse lema foi elaborado por Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores, contribuindo na resolução de uma certa família de LMIs através de métodos gráficos (BOYD *et al.*, 1994).
- Final dos anos 1960: Foi descoberto que a família de LMIs que aparece no lema PR poderia ser resolvida pela resolução de uma certa equação algébrica de Riccati (ARE), não mais apenas por meios gráficos (BOYD *et al.*, 1994).
- Década de 1970: Foi descoberto que as LMIs podem ser formuladas como problemas de otimização convexa e solucionadas via algoritmos numéricos. Essa descoberta, provavelmente, foi mostrada por Pyatnitskii e Skorodinskii (BOYD *et al.*, 1994).
- Início dos anos 1980: Foi reconhecido que muitas LMIs podem ser resolvidas por computador por meio de programação convexa. Foi desenvolvido, por Karmarkar em 1984, um método de programação linear que resolve problemas de LMIs com convergência polinomial (BOYD *et al.*, 1994).
- Final dos anos 1980: Desenvolvimento de algoritmos de pontos interiores para LMIs. Este método, desenvolvido por Nesterov e Nemirovski em 1988, se aplica diretamente em problemas de programação convexa, envolvendo LMIs (BOYD *et al.*, 1994).

De maneira resumida, as Desigualdades Matriciais Lineares podem solucionar problemas complexos que envolvem muitas variáveis matriciais, possibilitando impor inúmeras

restrições a essas variáveis, dependendo dos requisitos de projeto, de modo que se torna possível criar um método flexível para a síntese de controladores. Por esse motivo, as LMIs, geralmente, são utilizadas para a análise da estabilidade e projeto de controladores para sistemas.

Atualmente, as LMIs estão sendo objeto de estudo de muitos estudos por renomados pesquisadores mundiais, tendo sido aplicadas nas mais diversas áreas: controle de sistemas contínuos e discretos no tempo, controle ótimo, controle robusto, redução de modelos, controle de sistemas não lineares, teoria de filtros robustos, identificação de sistemas, controle com estrutura variável, controle lógico usando lógica *fuzzy*, detecção, localização e quantificação de falhas estruturais em sistemas mecânicos (SILVA, S., 2005).

2.2.1 Definição Matemática de Desigualdades Matriciais Lineares

Uma LMI é definida como uma desigualdade matricial da forma:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (22)$$

Sendo $x \in \mathbb{R}^m$ a variável e as matrizes simétricas $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ são dadas. O símbolo da desigualdade da inequação (22) significa que $F(x)$ é positivo-definido, ou seja, $u^T F(x) u > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$. A LMI desta inequação é equivalente a um conjunto de n inequações polinomiais em x , assim, os principais mínimos de $F(x)$ devem ser positivos (BOYD *et al.*, 1994).

As LMIs podem ser estritas, como é apresentado na forma (22) ou não estritas, como apresentado a seguir:

$$F(x) \geq 0 \quad (23)$$

Neste trabalho serão mais abordadas as Desigualdades Matriciais Lineares estritas, representadas por (22). De modo geral, uma LMI estrita é uma restrição convexa em x , provando que o conjunto $\{x \mid F(x) > 0\}$ é convexo. Em particular, desigualdades lineares, desigualdades quadráticas (convexas), desigualdades de normas matriciais e restrições que surgem na teoria de controle, como Lyapunov e desigualdades matriciais quadráticas convexas, podem ser representadas na forma de uma LMI.

Quando as matrizes F_i são diagonais, a LMI $F(x) > 0$ é apenas um conjunto de desigualdades lineares. Já as desigualdades não lineares (convexas) são convertidas para a forma de LMI usando os complementos de Schur, seguindo a ideia a seguir (BOYD *et al.*, 1994):

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (24)$$

Considerando a LMI dada em (24) e sendo $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$ e $S(x)$ dependente afim de x . Logo, esta inequação é equivalente a seguinte desigualdade matricial (BOYD *et al.*, 1994):

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S^T(x) > 0, \quad R(x) > 0 \quad (25)$$

2.2.1.1 Problema de Factibilidade de uma LMI (LMIP)

Dada uma LMI $F(x) > 0$, o problema de factibilidade de uma LMI, também chamado de LMIP (do inglês *LMI Problem*) é encontrar x^{fact} tal que a desigualdade $F(x^{fact}) > 0$ é verdadeira, ou determinar que a LMI é infactível. De maneira resumida, o LIMP é um problema de factibilidade convexa. Um exemplo de LIMP é a própria desigualdade de Lyapunov, dada na inequação (21) (SILVA, S., 2005).

2.2.1.2 Problema de Autovalor (EVP)

O problema de autovalor (EVP – do inglês *Eigenvalue Problem*) é minimizar o máximo autovalor de uma matriz que depende muito de uma variável, sujeita a uma restrição de LMI, ou determinar que a restrição é inviável (BOYD *et al.*, 1994):

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \lambda \\ \text{sujeito à} & \lambda I - A(x) > 0, \quad B(x) > 0 \end{array} \quad (26)$$

Sendo A e B matrizes simétricas que dependem da variável de otimização x .

O EVP é um problema de otimização convexa e pode aparecer na forma equivalente de uma função linear minimizada, sujeita a LMI:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c^T x \\ &\text{sujeito à} && F(x) > 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Sendo F uma função afim de x . No caso especial em que as matrizes F_i são todas diagonais, esse problema se reduz ao problema geral de programação linear, no qual deve-se minimizar a função linear $c^T x$, sujeita a um conjunto de desigualdades lineares em x .

Outra forma equivalente de representar o EPV, sendo A afim de (x, λ) é:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \lambda \\ &\text{sujeito à} && A(x, \lambda) > 0 \end{aligned} \tag{28}$$

2.2.1.3 Problema de Autovalor Generalizado (GEVP)

O problema de autovalor generalizado (GEVP – do inglês *Generalized Eigenvalue Problem*) é minimizar o máximo autovalor generalizado de um par de matrizes que dependem de uma variável, sujeita a restrições de LMI. A forma geral de um GEVP é (BOYD *et al.*, 1994):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \lambda \\ &\text{sujeito à} && \lambda B(x) - A(x) > 0, \quad B(x) > 0, \quad C(x) > 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Sendo A , B e C matrizes simétricas que são funções afins de x . Quando as matrizes são todas diagonais e $A(x)$ e $B(x)$ são escalares, o problema é reduzido para um problema de programação linear-fracional geral.

Outra forma equivalente de representar o GEPV, sendo A afim de (x, λ) é semelhante à forma equivalente do EPV:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \lambda \\ &\text{sujeito à} && A(x, \lambda) > 0 \end{aligned} \tag{30}$$

2.2.1.4 Problema Convexo (CP)

Embora LMIP, EVP e GEVP sejam os problemas mais relevantes, é preciso citar o problema convexo (CP – do inglês *Convex Problem*), que possui a forma (BOYD *et al.*, 1994):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \log \det A(x)^{-1} \\ &\text{sujeito à} && A(x) > 0, \quad B(x) > 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Sendo A e B matrizes simétricas que dependem de x . É possível observar que quando $A > 0$, $\log \det A^{-1}$ é uma função convexa de A . Além disso, um problema CP pode ser transformado em um EPV, pois $A(x) > \lambda$ pode ser representado como uma LMI em x e λ .

2.3 ESTABILIDADE SEGUNDO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

Existem diversos estudos para a análise da estabilidade de um sistema na teoria de controle, sendo o método direto de Lyapunov um desses estudos. O método direto de Lyapunov é utilizado para o estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos em tempo contínuo ou discreto.

Considere um sistema dinâmico autônomo discreto no tempo representado pela equação a seguir:

$$x(k+1) = \varphi(x(k)), \quad x(0) \tag{32}$$

Sendo $x(0)$ uma condição inicial dada, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ uma função não linear e $x(k) \in D$ o vetor de estado.

Antes de prosseguir com o método direto de Lyapunov, faz-se necessário definir alguns conceitos sobre estabilidade na teoria de controle.

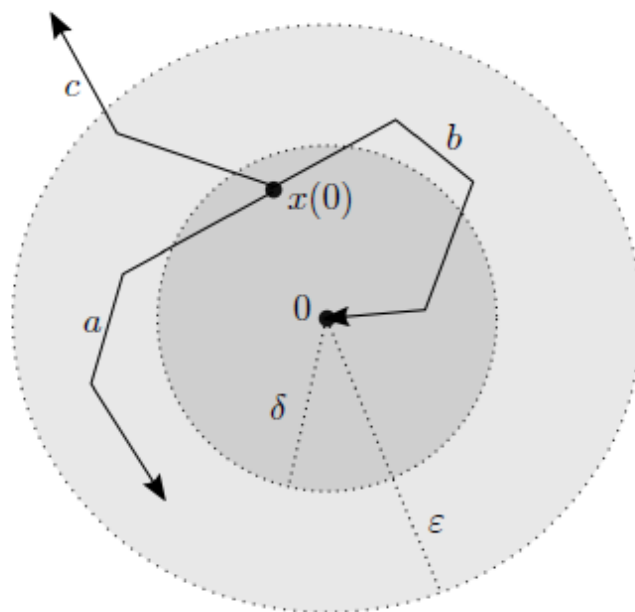
O ponto de equilíbrio do sistema representado em (32) pode ser considerado a origem, pois é possível fazer a mudança de variáveis $\bar{x}(k) = x(k) - x_e$, sendo x_e o ponto de equilíbrio. Dessa maneira, pode-se considerar que $\varphi(x(k))$, satisfaz $\varphi(0) = 0$ (SANTOS, 2020).

Definição: (SANTOS, 2020) O ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema (32) é:

- Estável se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(k)\| < \varepsilon, \forall k \geq 0$;
- Instável se não é estável, ou seja, se para algum número positivo em $\varepsilon > 0$, independentemente de sua dimensão, sempre há um estado x_0 em δ tal que a trajetória começando neste estado deixe a região ε ;
- Assintoticamente estável se é estável e adicionalmente δ pode ser escolhido de forma que $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$.

A Figura a seguir apresenta uma interpretação geométrica de estabilidade com as regiões descritas anteriormente.

Figura 2 – Interpretação geométrica de estabilidade: a, estável; b, assintoticamente estável; c, instável.



Fonte: (SANTOS, 2020).

O método direto de Lyapunov, também chamado de segundo método de Lyapunov, é o procedimento clássico para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos. Este método é baseado no conceito de energia dos sistemas e tem como objetivo estudar o comportamento das trajetórias do sistema nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, através do uso de funções definidas positivas, denominadas de funções de Lyapunov. A escolha dessas funções é feita de forma particular para cada caso e podem ser interpretadas como a energia total do sistema, ou seja, as funções de Lyapunov podem ser associadas à energia necessária para o deslocamento entre pontos do espaço de estados (VIDYASAGAR, 1993).

Segundo Lyapunov, a estabilidade do ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema dinâmico discreto no tempo, representado por (32), é assegurada pelo seguinte Teorema (KALMAN; BERTRAM, 1959; KHALIL, 2002; LASSALE, 1986).

Teorema 1: (SANTOS, 2020) Considere $x = 0$ o ponto de equilíbrio do sistema (32). Seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua definida em uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de $x = 0$. Se:

- (i) $V(0) = 0$ e $V(x(k)) > 0, \forall x(k) \neq 0$,
- (ii) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq 0, \forall x(k) \in U \setminus \{0\}$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é localmente estável. Se além disso:
- (iii) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \forall x(k) \in U \setminus \{0\}$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é localmente assintoticamente estável.

Uma função escalar que satisfaz as condições (i) e (ii) ou (i) e (iii) do Teorema 1 é denominada função de Lyapunov. Quando as condições (i) e (ii) ou (i) e (iii) são satisfeitas, $U \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de domínio de estabilidade (assintótica) local do sistema (32). Se $U = \mathbb{R}^n$ e $V(x(k)) \rightarrow \infty$ quando $\|x(k)\| \rightarrow \infty$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente (assintoticamente) estável (SANTOS, 2020).

A função $V(x(k))$ que satisfaz a condição (i) é dita definida positiva. Se $V(0) = 0$ e $V(x(k)) \geq 0, \forall x(k) \neq 0$, então $V(x(k))$ é dita semi-definida positiva. Esta função pode ser representada de forma quadrática por uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um vetor $x \in \mathbb{R}^n$:

$$V(x) = x^T P x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

O critério de Sylvester estabelece que uma matriz real e simétrica A é positiva definida se e somente se todos os menores principais de A forem positivos, ou seja (SANTOS, 2020):

$$\det(A_k) > 0, \quad \forall k = \{1, 2, \dots, n\} \quad (34)$$

Sendo A_k o menor principal de ordem k da matriz A .

Pelo critério de Sylvester é possível verificar se a matriz P é ou não definida positiva. Logo, se as restrições a seguir forem verdadeiras, a matriz P será definida positiva (SANTOS, 2020).

$$P_{11} > 0, \quad \det \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \det \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (35)$$

É importante evidenciar que o Teorema 1 apresenta uma condição suficiente de estabilidade. Assim, caso um teste de análise de estabilidade falhe para uma função particular candidata $V(x(k))$, nada pode ser concluído em relação à instabilidade, pois pode existir outra função de Lyapunov que atenda as condições do Teorema 1 (SANTOS, 2020).

3 SISTEMA AEROPÊNDULO

O sistema que será utilizado como modelo base da pesquisa deste trabalho para a modelagem matemática e implementação do projeto de controladores é o Aeropêndulo. Por esse motivo, neste capítulo será apresentado o Aeropêndulo, também chamado de sistema Viga-Hélice, descrevendo seu funcionamento, sua função de transferência a modelagem matemática em espaço de estados e a identificação do sistema. Compreendendo o funcionamento deste sistema de forma detalhada e incluindo todos os parâmetros matemáticos necessários, juntamente com a teoria abordada no capítulo anterior, será possível iniciar a identificação e implementação dos controladores.

3.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA AEROPÊNDULO

O Aeropêndulo, ou sistema Viga-Hélice, foi proposto por Veiga (2016) e construído no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Por se tratar de um sistema com dinâmica não-linear com um funcionamento interessante, este equipamento foi escolhido para ser a base da pesquisa que culmina neste trabalho de graduação.

De maneira resumida, este sistema consiste em uma viga apoiada em um anteparo que permite um grau de liberdade para rotação da viga em ângulos determinados e medidos através de um potenciômetro. Em uma das extremidades há um propulsor, um motor de corrente contínua *brushless* (sem escovas), que, ligado a um atuador, pode ser controlado por sinal modulado em largura de pulso (PWM, do inglês *Pulse Width Modulation*) e é responsável por gerar a rotação da hélice. Na outra extremidade há uma massa de posição variável, que permite um contrapeso ajustável. Portanto, a meta deste sistema é controlar o ângulo de inclinação da haste em relação à horizontal (GONÇALVES, 2019).

Na estrutura do Aeropêndulo, a viga é feita de alumínio, de forma oca para auxiliar na redução da massa e permitir a passagem dos componentes elétricos, e a base fixa é feita de ferro para dar suporte e peso enquanto o equipamento estiver em funcionamento, já que a potência exercida pelo motor requer uma estrutura reforçada.

Em questões dimensionais, a altura da base até a articulação central, também chamada de pivô, é de 0,4 metros e foi escolhida baseada no ângulo de movimentação da haste, obtendo uma amplitude de ângulo máximo positivo igual a 55° e ângulo máximo negativo igual a -40°

com relação à horizontal. A viga do Aeropêndulo possui 1 metro de comprimento e a articulação central é posicionada a 0,6 metros de distância do propulsor e 0,4 metros de distância da extremidade que possui o peso (VEIGA, 2016).

Essa assimetria foi criada propositalmente, pensando na dinâmica do sistema, fazendo com que exista um desequilíbrio natural, no qual o centro de massa da haste não esteja posicionado de maneira coincidente com a posição do pivô (VEIGA, 2016). Além disso, o contrapeso ajustável permite modificar o centro de massa da haste facilmente de acordo com a configuração dos testes em bancada.

A estrutura do Aeropêndulo é mostrada pela Figura a seguir, sendo o propulsor e a hélice localizados na extremidade esquerda, o contrapeso variável na extremidade direita e o pivô no centro da articulação:

Figura 3 – Sistema Aeropêndulo presente no LPC.



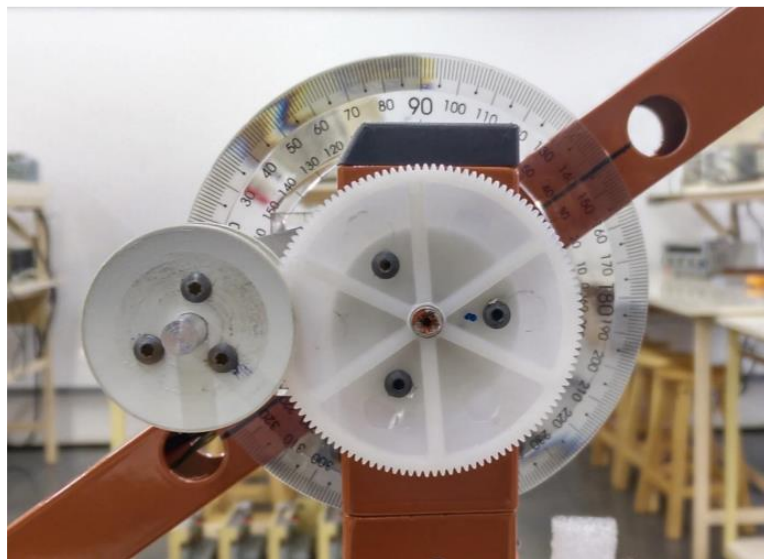
Fonte: (VEIGA, 2016).

O motor de corrente contínua *brushless* escolhido por Veiga (2016) possui rotor externo e acoplado a hélice, faz a propulsão do sistema. Como o motor *brushless* não pode ser ligado diretamente em uma fonte de alimentação, um controlador eletrônico de velocidade (ESC, do inglês *Electronic Speed Control*) é conectado ao sistema, fazendo o papel de atuador que aciona o motor. O ESC é capaz de controlar a velocidade, o tempo de aceleração, o tempo de frenagem e a potência cinética do motor *brushless*, variando a transição entre as diversas fases de alimentação, isso é feito por um microprocessador instalado internamente no ESC. O sinal de

controle usado para alimentar o ESC é fornecido um sinal modulado em largura de pulso (PWM) com amplitude de 5V, range entre 1000 μ s e 1800 μ s e frequência de 500 Hz.

Para melhorar a precisão, o equipamento possui um sistema de engrenagens que transformam os 95° de movimentação da viga para 300° de amplitude do potenciômetro, aproximadamente. Além do sistema de engrenagens, o equipamento também possui um transferidor acoplado ao eixo, visando uma melhoria na mensuração do ângulo da viga na acurácia de leitura, como pode ser visualizado na figura a seguir (VEIGA, 2016).

Figura 4 – Sistema de engrenagens e transferidor de grau acoplados ao eixo.



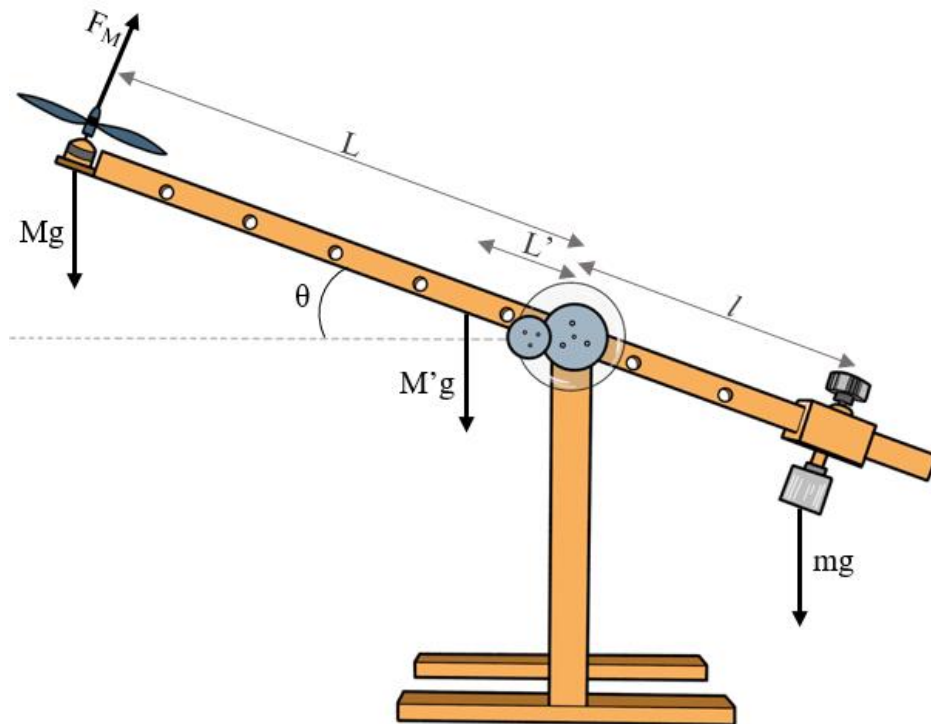
Fonte: (VEIGA, 2016).

O controle em tempo real e a comunicação entre o equipamento e o microcomputador são feitos por uma placa de aquisição de dados Q2-USB, permitindo a interface com o software MatLab/Simulink (SILVA, H., 2020).

3.2 EQUACIONAMENTO DO SISTEMA AEROPENDULO

O equacionamento do sistema Aeropêndulo é essencial para ser utilizado como embasamento para a representação do sistema na modelagem matemática em espaço de estados. Neste trabalho, foi utilizado como base o equacionamento descrito por Veiga (2016) e Gonçalves (2019), que é fundamentado pela equação do sistema QNET VTOL da fabricante Quanser[®]. A figura abaixo ilustra de forma esquemática os parâmetros do sistema Aeropêndulo.

Figura 5 – Ilustração dos parâmetros do sistema Aeropêndulo.



Fonte: Própria autora.

Os parâmetros do sistema são descritos a seguir:

- M : soma da massa do motor com a hélice;
- M' : massa da haste;
- m : massa do contrapeso;
- L : distância do eixo ao centro da massa do motor;
- L' : distância do eixo ao centro da massa da haste;
- l : distância do eixo ao centro da massa do contrapeso;
- θ : ângulo entre a haste e a horizontal;
- g : aceleração da gravidade;
- F_M : força de empuxo do motor;
- K_M : constante da força de empuxo do motor em função da tensão aplicada;
- V_M : tensão aplicada no motor;
- T : torque;
- J_V : momento de inércia da viga em relação ao eixo de rotação;
- J : momento de inércia da viga em torno do seu próprio eixo;
- B : coeficiente de amortecimento viscoso;
- K : coeficiente de rigidez.

A força de empuxo do motor é dada pela multiplicação da constante K_M pela tensão aplicada ao motor V_M , como mostrado na equação (36), e o torque é dado pela multiplicação da força pela distância do motor até o eixo de articulação e é equivalente a somatória dos momentos angulares atuantes na haste devido aos pesos, como apresentado na equação (37).

$$F_M = K_M V_M \quad (36)$$

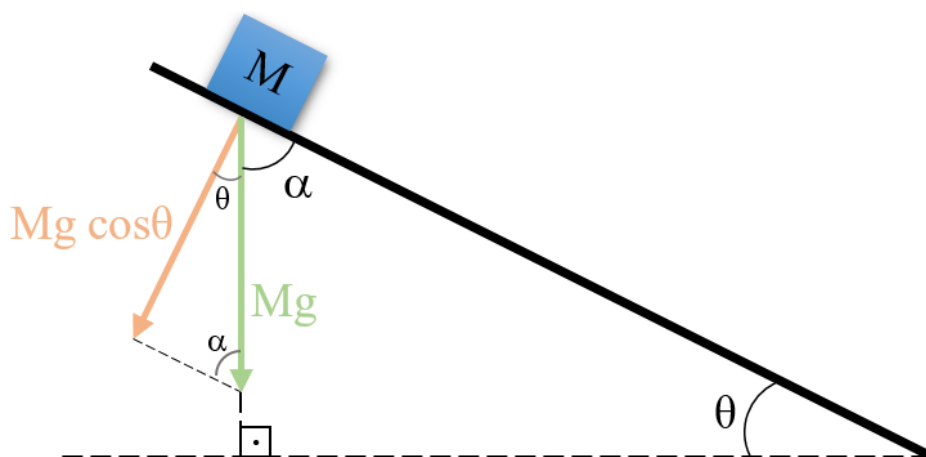
$$T = F_M L = \sum \text{massa} \cdot g \cdot \text{distância} \cdot \sin\alpha \quad (37)$$

No caso deste trabalho, o estudo deve ser feito em torno do ângulo θ entre a haste e a horizontal. Como os ângulos α e θ são complementares, pode-se fazer a seguinte substituição:

$$\sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha) = \cos(\theta) \quad (38)$$

A Figura 6 exemplifica a relação trigonométrica adotada para encontrar os momentos angulares de cada elemento de massa atuantes na viga.

Figura 6 – Exemplificação da relação trigonométrica.



Fonte: Própria autora.

Aplicando a Lei de Newton e o momento angular, considerando a relação trigonométrica adotada, tem-se a seguinte equação:

$$MgL \cos(\theta) + M'gL' \cos(\theta) - mgl \cos(\theta) = T = F_M L = K_M V_M L \quad (39)$$

Considera-se como ponto de equilíbrio quando o sistema está parado em $\theta = 0^\circ$. Linearizando o modelo em torno do ponto de equilíbrio, pode-se considerar:

$$\theta \approx 0 \therefore \cos(\theta) = 1 \quad (40)$$

Dessa maneira, a equação (39) pode ser reescrita como:

$$MgL + M'gL' - mgl = T = F_M L = K_M V_M L \quad (41)$$

Caso seja adotado que no momento de equilíbrio o somatório das forças resultantes de torque é igual a zero, pode-se obter:

$$mgl - MgL - M'gL' + F_{Meq}L = 0 \quad (42)$$

$$F_{Meq} = Mg + \frac{M'gL'}{L} - \frac{mgl}{L} \quad (43)$$

Sendo F_{Meq} a força necessária para o equilíbrio $\theta = 0^\circ$.

A continuação do equacionamento será baseada no modelo do sistema QNET VTOL fabricado pela Quanser[®], que é bem similar ao sistema Viga-Hélice construído. No material do fabricante são descritas as funções e os modelos matemáticos empregados na construção e na operação do VTOL. Seguindo este material, a equação do movimento é dada por:

$$J_V \ddot{\theta}(t) + B \dot{\theta}(t) + K \theta(t) = F_M(t)L = K_M V_M(t)L \quad (44)$$

Sendo B o coeficiente de amortecimento viscoso, devido aos atritos do sistema, K o coeficiente de rigidez e J_V o momento de inércia da viga em relação ao eixo de rotação, que pode ser representado por:

$$J_V = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = ML^2 + M'L'^2 + J \quad (45)$$

Nesta equação, J é o momento de inércia da viga em torno do seu próprio eixo.

Com base nas equações (44) e (45) é possível obter a função de transferência $G(s)$ do sistema Aeropêndulo, que relaciona o ângulo de saída $\theta(s)$ com a tensão de entrada aplicada no motor $V_M(s)$:

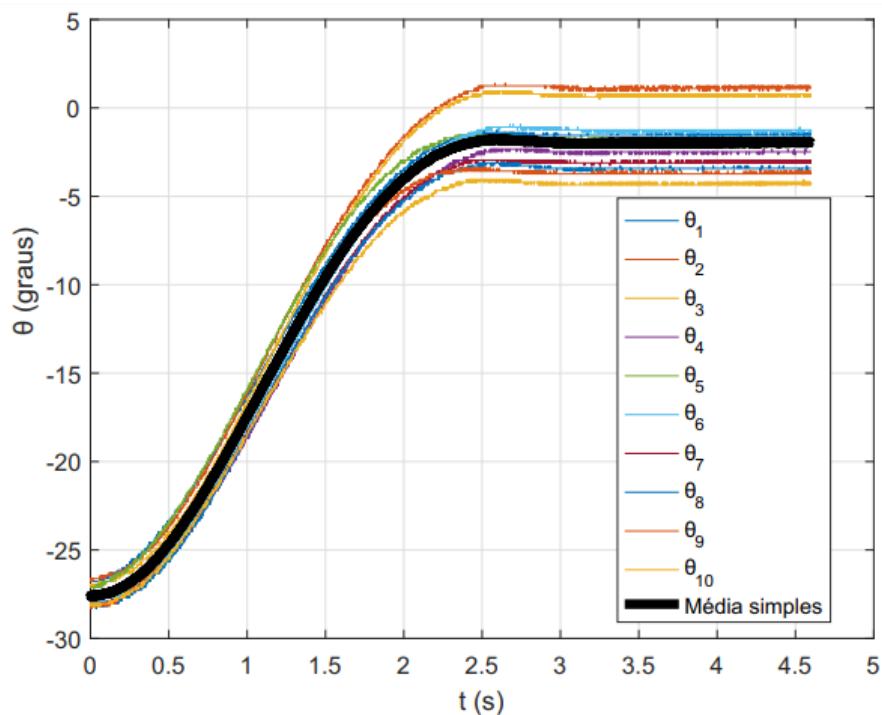
$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_M(s)} = \frac{K_M L}{J_V s^2 + B s + K} = \frac{\frac{K_M L}{J_V}}{s^2 + \frac{B}{J_V} s + \frac{K}{J_V}} \quad (46)$$

Substituindo J_V , a função de transferência também pode ser escrita da forma:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_M(s)} = \frac{K_M L}{(M L^2 + M' L'^2 + J) s^2 + B s + K} \quad (47)$$

Na Figura 7, é possível observar o comportamento da resposta ao degrau aplicado diversas vezes consecutivas. Nela, é possível observar a não linearidade do sistema (GONÇALVES, 2019).

Figura 7 – Resposta ao degrau em malha aberta para 10 amostras.



Fonte: (GONÇALVES, 2019).

É relevante apontar que a dinâmica do Aeropêndulo possui um comportamento não linear para grandes variações do ângulo θ e encontrar um modelo linear em torno de um ponto de operação é de extrema importância dentro da perspectiva da engenharia de controle, pois pode facilitar o projeto de controladores, uma vez que permite a utilização de toda a teoria e técnicas de controle linear, sobretudo ao considerar pequenos movimentos em torno do ponto de operação escolhido (GONÇALVES, 2019).

Em Bertholim (2022), a função de transferência foi definida de forma que ao se adaptar pelos parâmetros adotados neste trabalho, pode ser escrita da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_M(s)} = \frac{\frac{K_M}{J}}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{M'gL'}{J} + \frac{MgL}{J} - \frac{mgl}{J}} \quad (48)$$

De modo geral, nos trabalhos de Veiga (2016) e Gonçalves (2019) foi adotada a função de transferência dada na equação (46), que representa um modelo linear em torno do ponto de operação e facilita o projeto de controladores. Em Silva, H. (2020) foi adotado um sistema a partir de pontos de operação utilizando sistemas lineares combinados com as funções de pertinência, de modo que a resultante desta combinação se torna um sistema não linear. E, em Bertholim (2022), foi obtido um modelo de simulação que abrange toda a região de operação, por meio da utilização, assim como em Silva, H. (2020), de sistemas lineares combinados com as funções de pertinência, resultando na função de transferência dada pela equação (48).

3.3 MODELAGEM EM ESPAÇO DE ESTADOS DO AEROPENDULO

A partir das funções de transferência obtidas na seção anterior é possível representar o sistema na modelagem matemática em espaço de estados, de maneira não linear. Utilizando a função de transferência representada pela equação (46) e a forma canônica controlável descrita anteriormente, o sistema em espaço de estados pode ser descrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K \text{sen}(\theta)}{J_V \theta} & -\frac{B}{J_V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_M L}{J_V} \end{bmatrix} u(t) \quad (49)$$

Em contrapartida, usando a função de transferência representada pela equação (48) e a forma canônica controlável, o sistema representado em espaço de estados fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(M'L' + ML - ml)g \operatorname{sen}(\theta)}{J\theta} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_M}{J} \end{bmatrix} u(t) \quad (50)$$

Relembrando que M' é a massa da haste (kg), M é a soma da massa do motor com a hélice (kg), m é a massa do contrapeso (kg), L' é a distância do eixo ao centro da massa da haste (m), L é a distância do eixo ao centro da massa do motor (m), l é a distância do eixo ao centro da massa do contrapeso (m), g é a aceleração da gravidade (m/s^2), K é o coeficiente de rigidez (N/m), J_V é o momento de inércia da viga em relação ao eixo de rotação (kgm^2), J é o momento de inércia da viga em torno do seu próprio eixo (kgm^2), B é o coeficiente de amortecimento viscoso (Nms/rad), K_M é a constante da força de empuxo do motor em função da tensão aplicada (N/V), $u(t)$ é a entrada do sistema (ms), θ é o estado do sistema que representa o deslocamento angular (rad) e $\dot{\theta}$ é o estado do sistema que representa a velocidade angular (rad/s).

A equação (50) é semelhante àquela utilizada no trabalho de Bertholim (2022), contudo escrita a partir dos parâmetros adotados neste trabalho. Para essa representação em modelagem matemática foi usado como referência o trabalho de Job e Jose (2015) e adaptado para o sistema do Aeropêndulo desta pesquisa. Contudo, ambas as representações em espaço de estados, dadas nas equações (49) e (50), serão utilizadas como objeto de estudos neste trabalho.

3.4 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA AEROPENDULO

A identificação do sistema Viga-Hélice foi obtida através do uso do software MatLab para estimar os coeficientes que compõem a função de transferência e descrevem a dinâmica do sistema, considerado entradas do tipo rampa no sistema em malha aberta. Por conta da dinâmica do sistema, que possui uma zona morta de operação, foi necessário determinar o valor de entrada inicial u_0 para retirar o sistema de repouso e fazer o tratamento dos dados obtidos. Para os mesmos valores de entrada, foram identificados valores diferentes que retiram o sistema desta zona morta de operação.

Para determinar o instante e o valor de entrada inicial u_0 que retira o sistema de repouso, foi utilizado como referência o trabalho de Silva, H. (2020) através da análise dos gráficos dados pelas Figuras 8, 9, 10 e 11, que foram plotados considerando $u_t(t) = 1160\mu s$.

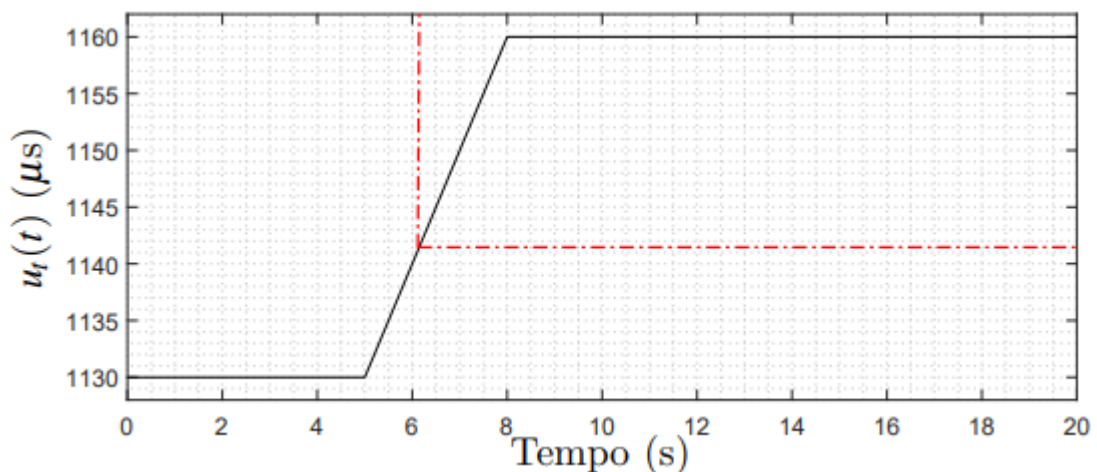
A Figura 8 mostra a entrada $u_t(t) = 1160\mu s$ para o sistema em malha aberta e a Figura 9 mostra a saída do sistema para esta entrada especificada. O instante é determinado no momento em que o sistema entra em regime transitório no gráfico de saída da Figura 9, sendo aproximadamente 6 segundos. Com o instante definido, é possível encontrar o valor de u_0 no gráfico de entrada da Figura 8, sendo aproximadamente $1142\mu s$. As linhas tracejadas em vermelho indicam o instante e o valor de u_0 encontrados.

É visível que nas Figuras 10 e 11 ocorreu um deslocamento no tempo e uma mudança referencial, sendo os gráficos destas figuras usados na identificação do sistema. Considerando $u_t(t)$ a entrada total que inclui a entrada inicial u_0 necessária para retirar o sistema da zona morta de operação, a entrada utilizada na identificação é dada pela equação (51):

$$u(t) = u_t(t) - u_0 \quad (51)$$

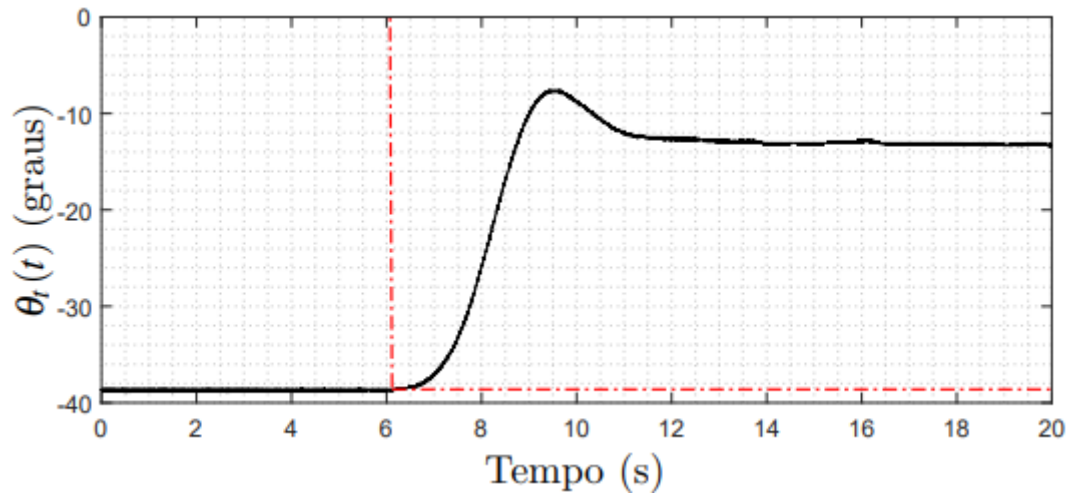
Na Figura 10 são apresentados os dados de entrada $u(t)$ repetidos para um mesmo valor de $u_t(t)$ e na Figura 11 são apresentados os dados de saída do sistema para cada entrada correspondente.

Figura 8 – Entrada $u_t(t) = 1160\mu s$ para o sistema em malha aberta.



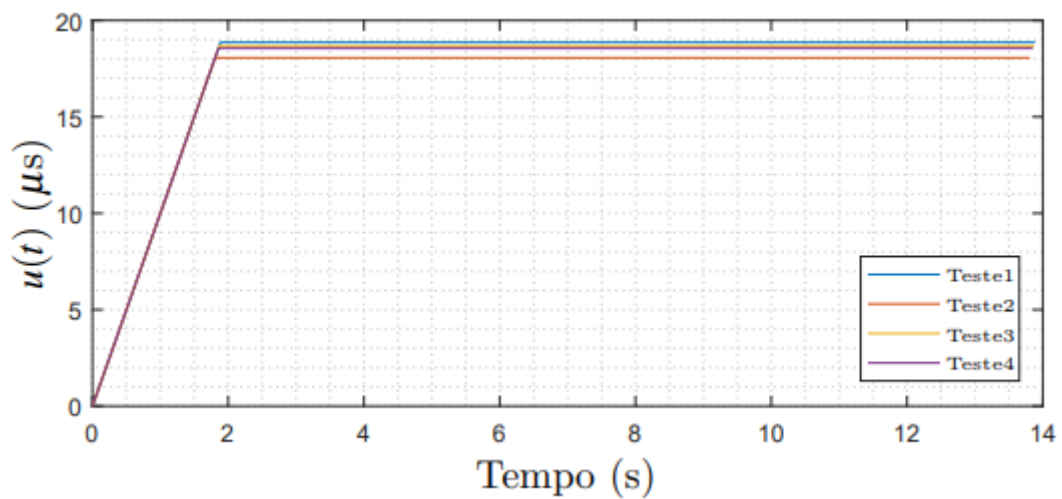
Fonte: (SILVA, H., 2020).

Figura 9 – Saída $\theta_t(t)$ com $u_t(t) = 1160\mu s$ para o sistema em malha aberta.



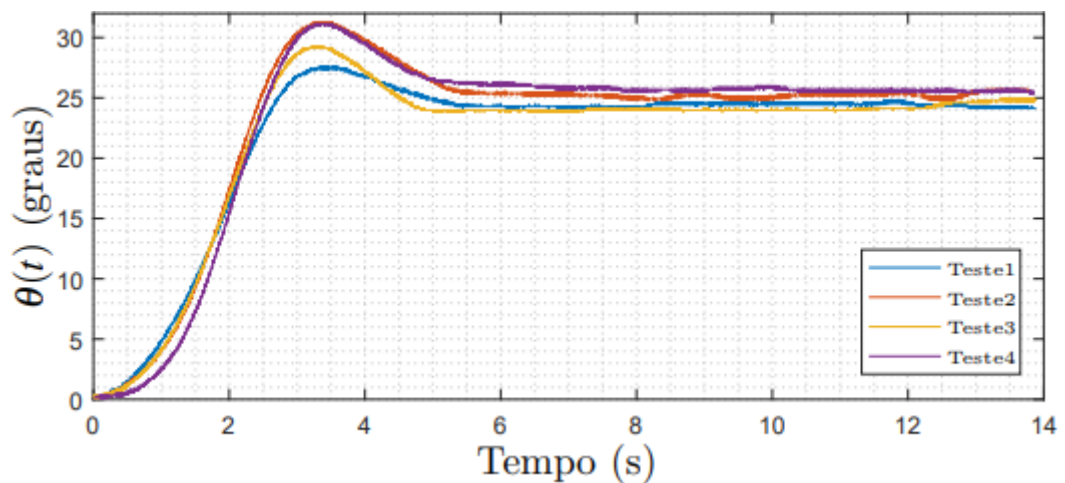
Fonte: (SILVA, H., 2020).

Figura 10 – Entradas $u(t) = u_t(t) - u_0$ usadas para a identificação com $u_t(t) = 1160\mu s$.



Fonte: (SILVA, H., 2020).

Figura 11 – Saídas $\theta_t(t)$ usadas para a identificação com $u_t(t) = 1160\mu s$.



Fonte: (SILVA, H., 2020).

Para encontrar a matriz de estado A e a matriz de entrada B , tomou-se como base a equação (50), que é a representação do sistema do Aeropêndulo em espaço de estados usada no trabalho de Bertholim (2022). Separando esta equação na forma apresentada na equação (3), tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(M'L' + ML - ml)g \operatorname{sen}(\theta)}{J\theta} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_M}{J} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Utilizando modelos *fuzzy* T-S (TAKAGI; SUGENO, 1985), é possível obter modelos locais discretos, considerando uma taxa de amostragem $T = 0,02$ s e $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. A partir do software MatLab/Simulink, os coeficientes das matrizes de estado e de entrada são estimados. Desta maneira, as matrizes representadas pelas equações (52) e (53) assumem, respectivamente, os valores de (54) e (55) (BERTHOLIM, 2022):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,083 & -3,031 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -29,892 & -3,031 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,069 \end{bmatrix} \quad (55)$$

As matrizes de estado e de entrada, representadas pelas equações (54) e (55), foram obtidas na identificação do sistema no estudo de Bertholim (2022), através do software MatLab/Simulink e de modelos *fuzzy* T-S. Enquanto neste trabalho, as matrizes de estado e de entrada serão encontradas pela substituição dos valores dos parâmetros fornecidos no trabalho de Veiga (2016), sendo estas matrizes que serão utilizadas para prosseguir com o projeto de controladores. Logo, o intuito de apresentar as matrizes identificadas por Bertholim (2022) é fazer uma síntese comparativa entre ambos os modelos matemáticos.

Desta forma, separando equação (49), que representa o sistema do Aeropêndulo em espaço de estados, na forma apresentada na equação (3), tem-se as seguintes matrizes de estado e de entrada:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K \operatorname{sen}(\theta)}{J_V \theta} & -\frac{B}{J_V} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_M L}{J_V} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Em Veiga (2016) foram considerados os seguintes valores dos parâmetros para a simulação do método ITAE por partes:

- $L = 0,6 \text{ m};$
- $K_M = 1,4 \text{ (N/m)};$
- $J_V = 0,1 \text{ (kgm}^2\text{)};$
- $B = 0,3;$
- $K = 0,5;$

Considerando uma linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio:

$$\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta \quad (58)$$

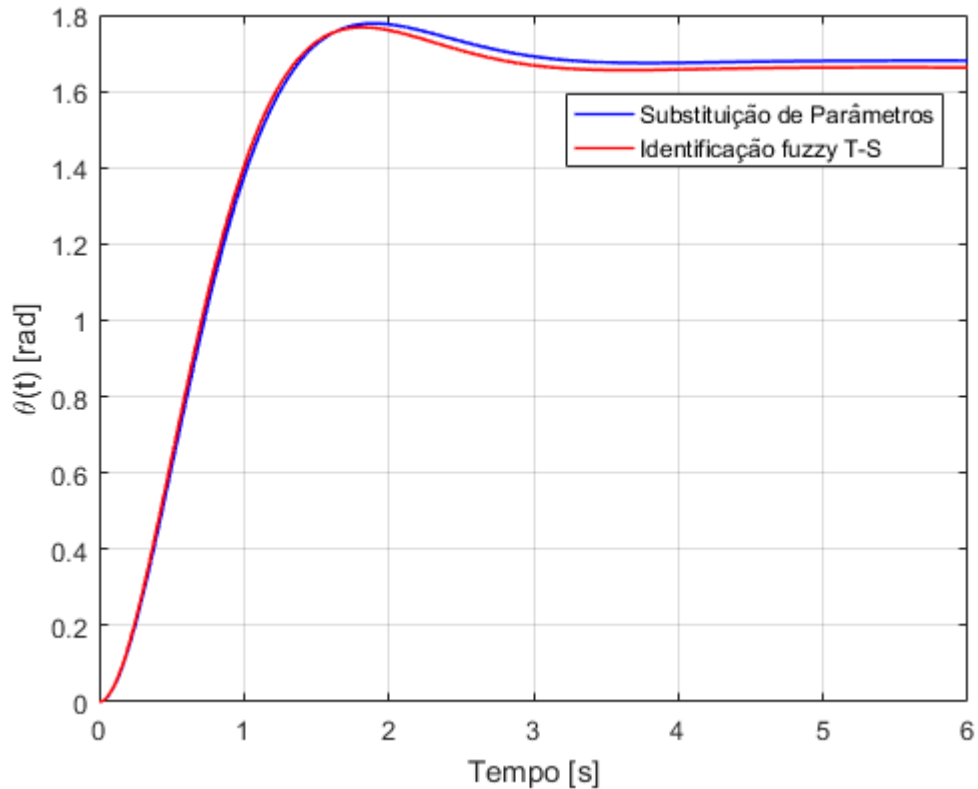
Substituindo estes valores fornecidos pelo trabalho de Veiga (2016) e considerando a linearização (58), as matrizes A e B assumem das equações (56) e (57), assumem as respectivas formas:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8,4 \end{bmatrix} \quad (60)$$

As matrizes de estado A e de entrada B encontradas por meio da identificação do sistema em modelos *fuzzy* T-S e pela substituição dos valores dos parâmetros fornecidos foram simuladas no software MatLab. Considerando o tempo de simulação de $t = 6 \text{ s}$ e a entrada em degrau, as respostas do sistema Aeropêndulo para ambos os casos é dada a seguir:

Figura 12 – Saídas $\theta(t)$ do sistema por meio da substituição de parâmetros e pela identificação *fuzzy* T-S.



Fonte: Própria autora.

Ao analisar as saídas do sistema Aeropêndulo para o caso da substituição dos valores dos parâmetros das matrizes de estado A e de entrada B e o caso da identificação em modelos *fuzzy* T-S por meio da estimativa dos parâmetros no software MatLab/Simulink, é possível observar que ambos os casos apresentam saídas bastante semelhantes, comprovando que um sistema pode ser representado de maneiras diferente e apresentar um comportamento semelhante para uma determinada entrada.

4 PROJETO DE CONTROLADORES PARA O AEROPÊNDULO

Neste capítulo serão abordados os conceitos e os recursos necessários para projetar os controladores para o sistema do Aeropêndulo. O projeto de controladores será feito através de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), com base na teoria de Lyapunov dada no tópico 2.3, sendo solucionadas com o software MatLab através da *toolbox* Yalmip e dos *solvers* LMILab e SeDuMi. Inicialmente, a *toolbox* e os *solvers* serão explicados brevemente, em seguida será explicada a metodologia utilizada para o projeto de controle do sistema do Aeropêndulo, representado por modelagem matemática em espaço de estados, por meio de LMIs.

4.1 TOOLBOX YALMIP E SOLVERS LMILAB E SEDUMI

O Yalmip é uma *toolbox* do MatLab que permite a representação de problemas envolvendo programação matemática de forma mais natural no software. Este pacote pode ser usado em diversas situações, como em problemas de programação linear, programação inteira e mista, problemas de programação semi-definida e em desigualdades matriciais bilineares. Uma das grandes vantagens desse pacote é que ele representa suporte para diversos *solvers*, por exemplo, o Yalmip pode resolver LMIs com o LMILab ou com o SeDuMi.

O LMILab é o *solver* de LMIs padrão do MatLab, que resolve apenas Desigualdades Matriciais Lineares, diferentemente do SeDuMi. O LMILab vem com o pacote *Robust Control Toolbox* do MatLab e possui um algoritmo baseado no método de pontos interiores, tendo sua complexidade dada por K^3L , sendo K o número de variáveis escalares e L o número de linhas usadas nas LMIs (SILVA, E.; BUZACHERO, 2011).

O SeDuMi é um *solver* para problemas de programação semi-definida e pode ser utilizado para solucionar LMIs. O SeDuMi usa uma técnica de otimização sobre cones homogêneos duais, e a sua complexidade é dada por $K^2L^{2,5} + L^{3,5}$, sendo K o número de variáveis escalares e L o número de linhas usadas nas LMIs (SILVA, E.; BUZACHERO, 2011).

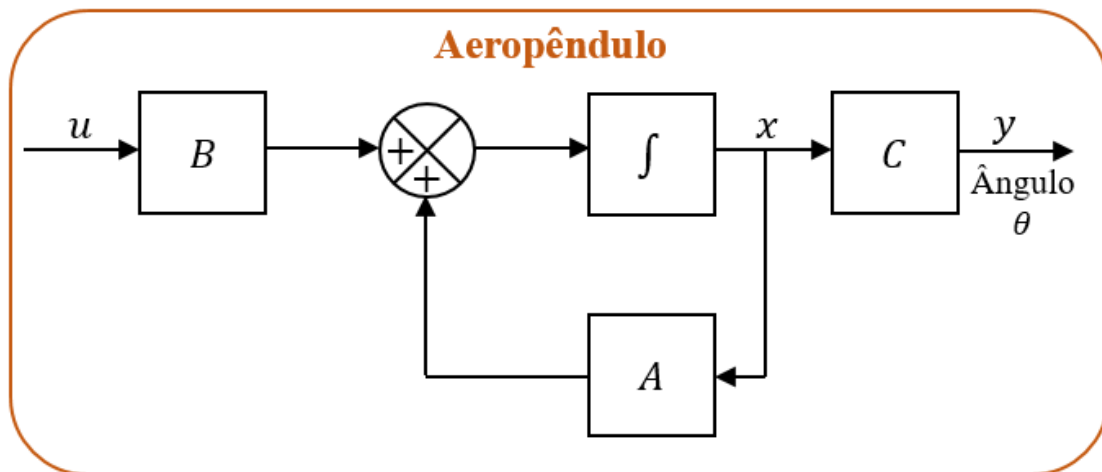
Atualmente, os dois *solvers* mais usados na literatura especializada são o LMILab e o SeDuMi, sendo que o Yalmip funciona mais rápido com o SeDuMi. Porém, a depender do problema, um *solver* será mais rápido que o outro. Atualmente, é comum encontrar, na literatura especializada, trabalhos em que o autor compara as soluções obtidas por esses dois *solvers* (SILVA, E.; BUZACHERO, 2011).

4.2 CONTROLADOR DO AEROPÊNDULO UTILIZANDO LMIS

Existem diversas maneiras de se realizar um projeto de controle moderno, sendo algumas formas mais simplificadas e outras mais complexas, dependendo do sistema em análise e da abordagem escolhida. Neste trabalho, optou-se pela utilização de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) que são frequentemente usadas na teoria de controle moderno com técnicas de projeto para sistemas em espaço de estados.

Considerando o diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo mostrado na Figura 1 e as equações de estado e saída dadas em (3) e (4), o sistema Aeropêndulo pode ser representado pelo seguinte diagrama de blocos:

Figura 13 – Diagrama de blocos que representa o sistema Aeropêndulo.

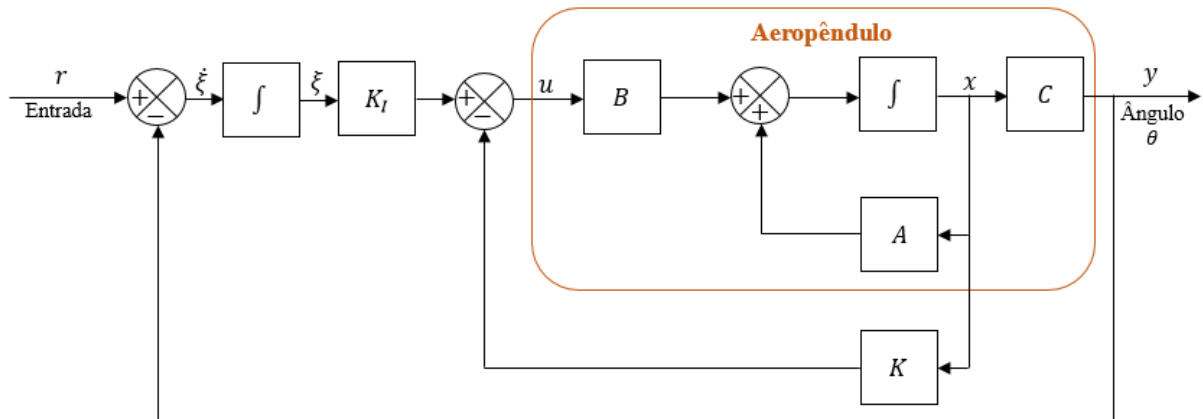


Fonte: Própria autora.

Em Ogata (2011) são exibidos diversos tipos de projetos de sistemas de controle no espaço de estados, dentre eles pode-se citar o projeto de servossistemas usando a abordagem por alocação de polos, projeto de sistemas reguladores com observadores, projeto de sistemas de controle com observadores e sistemas reguladores quadráticos ótimos.

No estudo aqui desenvolvido, optou-se por utilizar o projeto de servossistemas do tipo 1. Se a planta não tiver integrador, ou seja, for uma planta do tipo 0, o princípio básico do projeto de um servossistema do tipo 1 será inserir um integrador no ramo direto entre o comparador de erro e a planta (OGATA, 2011). A figura a seguir mostra o diagrama de blocos do controlador de servossistemas do tipo 1 utilizado neste projeto.

Figura 14 – Diagrama de blocos do controlador de servossistemas do tipo 1 para o Aeropêndulo.



Fonte: Própria autora.

A partir do diagrama de blocos, são obtidas as seguintes equações (OGATA, 2011):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (61)$$

$$y = Cx \quad (62)$$

$$u = -Kx + K_I \xi \quad (63)$$

$$\xi = r - y = r - Cx \quad (64)$$

Sendo os parâmetros:

- x : vetor de estado da planta (vetor n);
- u : sinal de controle (escalar);
- y : sinal de saída (escalar);
- ξ : sinal do integrador (variável de estado do sistema, escalar);
- r : sinal de entrada de referência (função degrau, escalar);
- A : matriz constante $n \times n$;
- B : matriz constante $n \times 1$;
- C : matriz constante $1 \times n$;

Supondo que a planta dada pela equação (61) seja de estado completamente controlável.

A função de transferência deste sistema pode ser dada por (OGATA, 2011):

$$Gp(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (65)$$

Deve-se supor que $Gp(s)$ não possua zeros na origem, a fim de evitar a possibilidade de que o integrador inserido seja cancelado por um zero na origem. Além disso, deve-se supor que a entrada de referência (função degrau) seja aplicada em $t = 0$. Então, para $t > 0$, as dinâmicas do sistema Aeropêndulo podem ser descritas pela seguinte modelagem matemática em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (66)$$

Para um sistema assintoticamente estável, $x(\infty)$, $\xi(\infty)$ e $u(\infty)$ tendem a valores constantes. Então, no regime permanente, tem-se $y(\infty) = r$ e, consequentemente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (67)$$

Sabendo que $r(t)$ é uma entrada em degrau, $r(\infty) = r(t) = r$ (constante) para $t > 0$. Assim, subtraindo a equação (67) da equação (66), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (68)$$

Os parâmetros subtraídos podem ser definidos por:

$$x_e(t) = x(t) - x(\infty) \quad (69)$$

$$\xi_e(t) = \xi(t) - \xi(\infty) \quad (70)$$

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty) \quad (71)$$

$$u_e(t) = -Kx_e(t) + K_I\xi_e(t) \quad (72)$$

Substituindo pela definição da subtração dos parâmetros, fornecida anteriormente, a equação (68) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (73)$$

O vetor de erro $e(t)$ de ordem $(n + 1)$ é definido por:

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = (n + 1) - \text{vetor} \quad (74)$$

Então, a equação (73) resulta em:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (75)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

E a equação (72) resulta em:

$$u_e = -\hat{K}e \quad (78)$$

$$\hat{K} = [K \ : \ -K_I] \quad (79)$$

A equação de estado de erro é dada por:

$$\dot{e} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})e \quad (80)$$

É importante ressaltar que o ganho de realimentação \hat{K} pode ser projetado por meio de diversas teorias de controle, sendo que a escolha da teoria e metodologia utilizada depende do projetista e do projeto em si.

Como anunciado anteriormente, neste trabalho, a teoria de controle escolhida é relativa à de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), tendo a estabilidade afirmada pelo método direto de Lyapunov, descrito no tópico 2.3.

Para encontrar o ganho de realimentação e o ganho do integrador adicionado ao sistema, utiliza-se as condições conforme os teoremas apresentados a seguir. Sendo que o Teorema 2 define condições para a estabilidade do sistema com taxa de decaimento $\gamma > 0$ e o Teorema 3 define condições que restringem a norma dos ganhos de realimentação e do integrador (YAMANAKA *et al.*, 2022b).

Teorema 2: (BOYD *et al.*, 1994) Considere o sistema descrito pela equação (80). Caso exista um escalar $\gamma > 0$, uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$XA^T - M^T B^T + XA + 2\gamma X < 0 \quad (81)$$

Então, a lei de controle dada na equação (63), sendo $\hat{K} = MX^{-1}$, torna o sistema da equação (80) estável e com taxa de decaimento maior ou igual a γ .

Teorema 3: (ŠILJAK; STIPANOVIC, 2000) Assumindo que as condições dadas do Teorema 2 sejam satisfeitas, a restrição $KK^T < \eta^2 \mu I_m$, sendo η e μ constantes positivas, e I_m a matriz identidade de ordem m , é atendida caso as LMIs

$$\begin{bmatrix} \mu I_n & M^T \\ M & I_m \end{bmatrix} > 0 \text{ e } \begin{bmatrix} \eta I_n & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} > 0, \quad (82)$$

sejam satisfeitas, sendo I_n a matriz de ordem n , em conjunto com as LMIs em (81).

Utilizando as matrizes de estado A e de entrada B , definidas no tópico 3.4, referente a identificação do sistema Aeropêndulo, e o projeto de controladores de servossistemas apresentado anteriormente, assim como os teoremas descritos, é possível obter os ganhos que são responsáveis por controlar o sistema em realimentação.

4.3 RESULTADOS OBTIDOS

Para o projeto de controladores deste trabalho, foram consideradas as matrizes de estado A e de entrada B , encontradas pela substituição dos valores dos parâmetros, dadas pelas equações (59) e (60). Além disso, foi considerado $C = [1 \ 0]$. Assim, as matrizes do sistema Aeropêndulo aumentadas para o controlador de servossistemas do tipo 1 ficam na forma:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

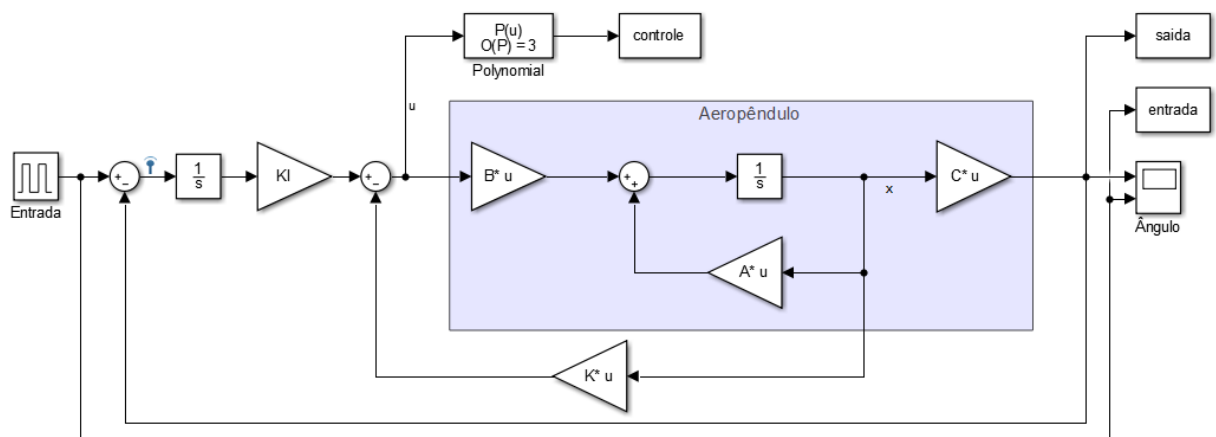
$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8,4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Utilizando o software MatLab, com auxílio da *toolbox* Yalmip e dos *solvers* LMILab e SeDuMi, foram encontrados, por testes e simulações, os ganhos para o controlador de servossistemas do tipo 1 por meio de LMIs. Para a simulação, foi considerado $n = 3$, $m = 1$, $\eta = 1800$ e $\gamma = 2.8$. Os valores dos ganhos obtidos são dados a seguir:

$$\hat{K} = [K \ : \ -K_I] = [6,0126 \ 0,6429 \ : \ -13,2752] \quad (85)$$

Para a realização da simulação no software MatLab/Simulink, foi montado o circuito da Figura (15), tomando como base o diagrama de blocos da Figura (14).

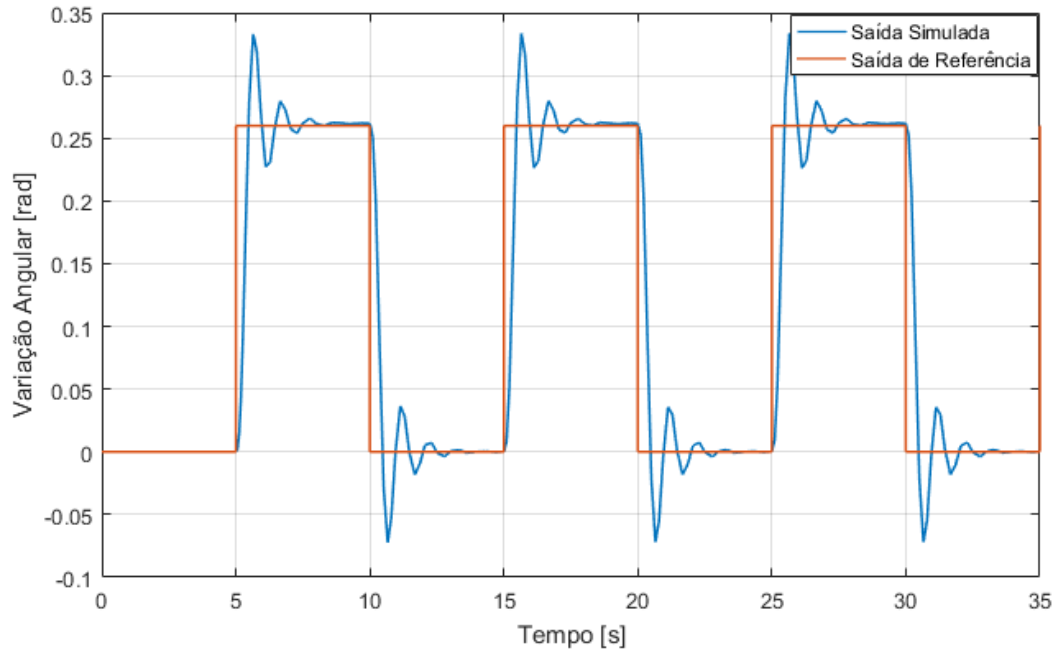
Figura 15 – Circuito do controlador do Aeropêndulo montado no Simulink.



Fonte: Própria autora.

Simulando este circuito do controlador de servossistemas do tipo 1 para o Aeropêndulo, considerando uma entrada degrau, obtém-se a seguinte resposta do sistema.

Figura 16 – Resposta do Aeropêndulo com controlador de servossistemas via LMIs.

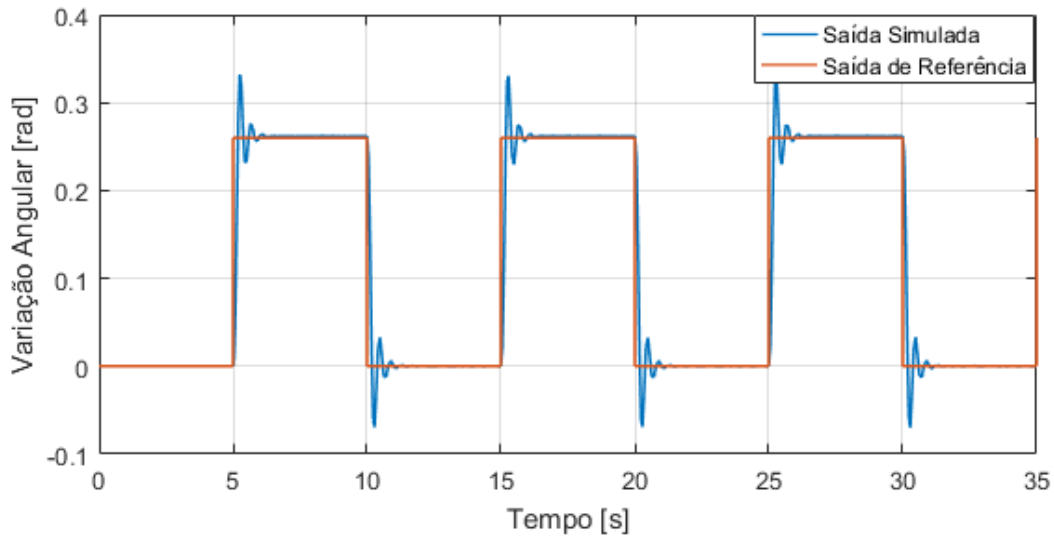


Fonte: Própria autora.

O gráfico da resposta do sistema Aeropêndulo com o controlador de servossistemas do tipo 1 por LMIs mostra que a variação angular de $\theta(t)$ seguiu como o esperado, ao se comparar com a referência, para uma entrada degrau. Foi observado que os ganhos obtidos por meio da simulação das LMIs no software MatLab, utilizando a *toolbox* Yalmip e os *solvers* LMILab e SeDuMi, influenciam diretamente na curva da resposta do sistema, sendo que a depender dos valores destes ganhos, o sistema varia o *overshoot*, que é o máximo sobressinal da resposta, e o tempo de estabilização.

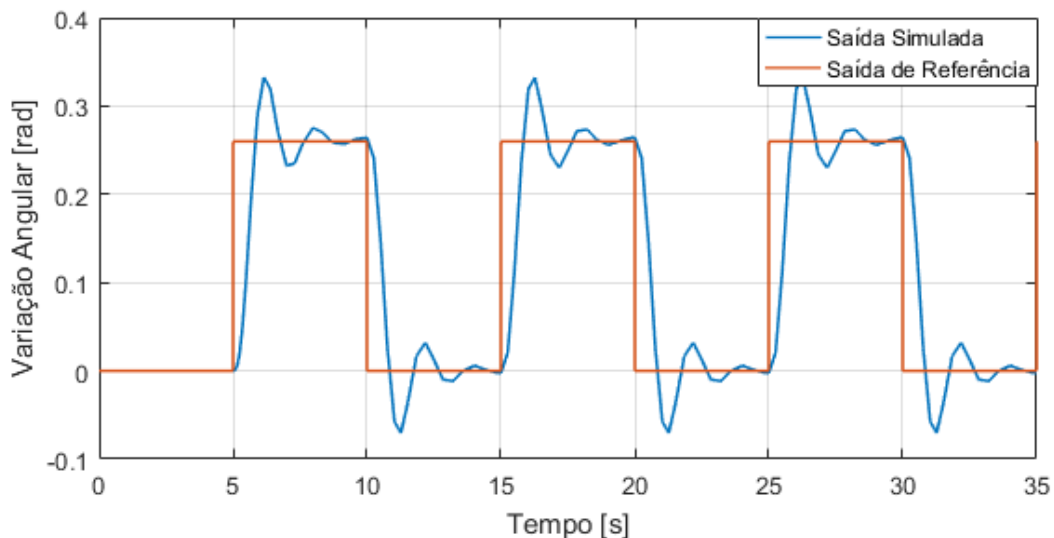
Além disso, foi constatado que a variação de γ influencia no tempo da resposta em regime transitório e nos próprios ganhos, de forma que valores de γ elevados geram uma resposta do sistema mais rápida e um ganho maior, enquanto que valores baixos de γ geram uma resposta mais devagar, com ganhos mais baixos. Para exemplificar esta observação, o sistema foi simulado para um valor de γ elevado, sendo $\gamma = 6,8$, o que resultou em ganhos tão grandes que impossibilitam a implementação do controlador na prática, e para um valor baixo, sendo $\gamma = 1,8$. As repostas do sistema para ambos valores de γ são dadas, respectivamente, pelas Figuras (17) e (18).

Figura 17 – Resposta do Aeropêndulo com controlador de servossistemas, sendo $\gamma = 6.8$.



Fonte: Própria autora.

Figura 18 – Resposta do Aeropêndulo com controlador de servossistemas, sendo $\gamma = 1.8$.



Fonte: Própria autora.

Neste projeto de controladores buscou-se por valores de ganhos ideais, dados na equação (85), ou seja, que gerem uma resposta rápida o suficiente e que não sejam tão elevados a ponto de serem prejudiciais ao sistema Aeropêndulo, para o caso da implementação em bancada. Contudo, devido aos ganhos obtidos, o projeto deste trabalho resultou em um *overshoot* um pouco mais elevado que o desejado. Ainda assim, o controlador de servossistemas via LMIs apresentou ser eficiente para o Aeropêndulo.

5 CONTROLE CHAVEADO POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Este capítulo aborda um estudo teórico sobre projetos de controladores chaveados utilizando LMIs por meio de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno. O objetivo deste capítulo é apresentar uma perspectiva diferente para solucionar LMIs, através de modelos *fuzzy* T-S, incluindo a teoria de chaveamento de controle moderno. Assim, poderá servir como base de estudos para trabalhos futuros relacionados com projeto de controladores para o sistema do Aeropêndulo.

5.1 SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

A representação de sistemas não lineares incertos discretos no tempo por meio de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) é uma ferramenta importante para a realização de projetos de controladores, que inclusive facilita o uso de LMIs (BOYD *et al.*, 1994), pois possibilita representar este tipo de sistema como uma combinação de modelos locais lineares, ponderados por funções de pertinência (TAKAGI; SUGENO, 1985).

Os modelos *fuzzy* T-S consistem em regras do tipo *fuzzy* Se-Então, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema. As regras Se-Então combinam os modelos lineares locais para a obtenção de uma representação do sistema não linear (SANTOS, 2020).

Os parâmetros das funções de pertinência dependem do conhecimento do projetista sobre o comportamento do sistema e podem ser obtidos através de um processo de identificação. Dessa maneira, nem sempre é trivial determinar as funções e os parâmetros que melhor se ajustam ao sistema (TANIGUCHI *et al.*, 2001), de modo que em alguns casos são necessárias técnicas de otimização para determina-los (MACHADO, 1998).

Considerando um sistema não linear descrito pela equação (86) (SANTOS, 2020):

$$x(k + 1) = f(z(k))x(k) + g(z(k))u(k) \quad (86)$$

Sendo as funções não lineares $f(.) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $g(.) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, o vetor de estado $x(k) = [x_1(k) \dots x_{n_x}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_x}$, o vetor de entrada $u(k) = [u_1(k) \dots u_{n_u}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$, um

vetor composto pelo vetor de estado $z(k) = [z_1(k) \dots z_{n_x}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_z}$, e um vetor cujos os elementos $v_\varsigma, \varsigma \in \mathbb{K}_{n_v}$, são parâmetros limitados invariantes no tempo $v = [v_1 \dots v_{n_v}]^T \in \mathbb{R}^{n_v}$.

Este sistema pode ser reescrito na forma do modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno, sendo representado da seguinte forma:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) = A_{z(k)} x(k) + B_{z(k)} u(k) \quad (87)$$

Sendo os elementos representados por $h_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, do vetor dado a seguir por $h(z(k)) = [h_1(z(k)) h_2(z(k)) \dots h_r(z(k))]^T$, tais que:

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(k)) = 1, \quad h_i(z(k)) \geq 0, \quad i \in \mathbb{K}_r \quad (88)$$

5.2 LEI DE CONTROLE CHAVEADO

O princípio da lei de controle chaveado é buscar o melhor ganho de realimentação, entre uma possibilidade de ganhos pré calculados K_j , $j \in \mathbb{K}_s$, de modo a minimizar a derivada temporal da função de Lyapunov. Assim, a lei de chaveamento retorna o valor do índice a ser usado na seleção do ganho do controlador (BERTHOLIM, 2022).

Uma das vantagens de se utilizar a lei de chaveamento é o fato de não necessitar das funções de pertinência para compor a lei de controle, uma vez que o sistema pode depender de parâmetros incertos (BERTHOLIM, 2022).

A lei de controle chaveada é dada a seguir (SANTOS, 2020):

$$u(k) = u_\sigma(k) = -F_{\sigma(k)} G^{-1} x(k), \quad \sigma = \sigma(k) = \arg * \min_{l \in \mathbb{K}_r} \{x^T(k) G^{-T} Q_l G^{-1} x(k)\} \quad (89)$$

Sendo que $\arg * \min_{l \in \mathbb{K}_r} \{x^T(k) G^{-T} Q_l G^{-1} x(k)\}$ denota o menor índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$, tal que $x^T(k) G^{-T} Q_l G^{-1} x(k) = \min_{l \in \mathbb{K}_r} \{x^T(k) G^{-T} Q_l G^{-1} x(k)\}$.

A lei de controle chaveado, dada na equação (54), seleciona um ganho do controlador de realimentação do vetor de estados $K_{\sigma(k)} = F_{\sigma(k)} G^{-1}$, que pertence ao conjunto de ganhos

$\{F_l G^{-1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, l \in \mathbb{K}_r\}$. Para a escolha do ganho do controlador, a lei de chaveamento σ utiliza matrizes simétricas auxiliares $Q_l, l \in \mathbb{K}_r$, que são calculadas usando critério LMI.

5.3 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO UTILIZANDO LMIS E MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO PARA O PROBLEMA DA ESTABILIDADE LOCAL

Para o projeto de controle chaveado deste trabalho, toma-se como base as relações de equivalência, apresentada em Oliveira; Bernussou; Geromel (1999), que considera uma matriz de Lyapunov P . Assim como a estabilidade segundo método direto de Lyapunov, apresentada no tópico 2.3.

Teorema 4: (SANTOS, 2020) As seguintes condições são equivalentes:

- (i) Existe uma matriz simétrica $P > 0$, tal que:

$$A^T P A - P < 0 \quad (90)$$

- (ii) Existe uma matriz simétrica P e uma matriz G tais que:

$$\begin{bmatrix} P & (GA)^T \\ GA & G + G^T - P \end{bmatrix} > 0 \quad (91)$$

Demonstração: (SANTOS, 2020) Note que a LMI dada em (90) é equivalente à $P - (A^T P)P^{-1}(PA) > 0$. Aplicando o complemento de Schur nesta expressão, observe que a LMI dada em (91) é verificada para $P = G$. Portanto, (i) implica em (ii). Por outro lado, de (91), segue que $P > 0$. Então ao multiplicar $\xi = [I - A^T]$ à esquerda e ξ^T à direita da equação (91), obtém-se (90), o que estabelece que (ii) implica em (i).

A condição (ii) aparece como uma expansão direta da condição (i). Introduzindo uma nova matriz adicional G , obtém-se uma LMI na qual a matriz de Lyapunov P não está envolvida em nenhum produto com a matriz dinâmica A . Esta característica permite escrever uma nova condição de estabilidade robusta que, embora suficiente, é considerada menos conservadora devido à presença do grau extra de liberdade proporcionado pela introdução da

matriz G . Observe que esta matriz extra não é nem mesmo restrita a ser simétrica (OLIVEIRA; BERNUSSOU; GEROMEL, 1999).

Uma possível forma de incluir a matriz G nas condições de projeto de controle do sistema *fuzzy* T-S, apresentado na equação (87), e na lei de controle chaveado, apresentada na equação (89), é considerar a função de Lyapunov não quadrática, dada a seguir:

$$V(x(k)) = x^T(k)G^{-T} \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(k))P_i \right) G^{-1}x(k) = x^T(k)G^{-T}P_{z(k)}G^{-1}x(k) \quad (92)$$

Ao considerar a função de Lyapunov não quadrática, a matriz G deixa de ser apenas uma matriz de folga e passa a integrar o projeto de controle chaveado (SANTOS, 2020).

Diante das condições para a estabilidade local, o seguinte lema proposto será utilizado para a formulação do projeto de controle chaveado discreto para o problema de estabilização local do sistema *fuzzy* T-S (SANTOS, 2020).

Lema: (SANTOS, 2020) Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$, tais que:

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_iG - B_iF_l)^T \\ A_iG - B_iF_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad (93)$$

Então, considerando a lei de controle chaveado apresentada em (89), sendo os ganhos do controlador dados por F_lG^{-1} , $l \in \mathbb{K}_r$, a seguinte condição também é satisfeita para todo $x(k) \neq 0$:

$$\begin{aligned} x^T(k) \left\{ (A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1})^T (G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1})(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}) \right\} x(k) \\ < x^T(k) \left\{ G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1} \right\} x(k) \end{aligned} \quad (94)$$

Demonstração: (SANTOS, 2020) Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que a LMI da equação (93) seja satisfeita para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$.

Multiplicando $h_i(z(k))$ e $h_j(z(k+1))$ a LMI da equação (58) e somando i e j de 1 até r , considerando a equação (88), obtém-se para todo $l \in \mathbb{K}_r$:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k)) h_j(z(k+1)) \begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_i G - B_i F_l)^T \\ A_i G - B_i F_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad (95)$$

A partir da equação (95), substituindo l por $\sigma(k)$, pode-se ter:

$$\begin{bmatrix} Z_{z(k)} + Q_{\sigma(k)} & (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)})^T \\ A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)} & G + G^T - P_{z(k+1)} \end{bmatrix} > 0 \quad (96)$$

Da equação (93), note que $G + G^T - P_j > 0$ e, conseqüentemente, $G + G^T > 0$, o que garante a existência de G^{-1} . De fato, suponha que G é não invertível, então existe $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, com $x \neq 0$, tal que $Gx = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} x^T (G + G^T) x &= x^T (G) x + x^T (G^T) x \\ &= x^T (Gx) + (Gx)^T x \\ &= x^T (0) + (0)^T x \\ &= 0, \text{ sendo } x \neq 0 \end{aligned} \quad (97)$$

Da equação (97) segue que $G + G^T$ não é positiva definida, o que seria um absurdo. Tal absurdo veio da suposição de que o núcleo de G é diferente do espaço unitário nulo dado por $Nul(G) \neq 0$. Portanto, $Nul(G) = \{0\}$ e, conseqüentemente, G é invertível.

Pré e pós multiplicando a equação (61) por $T := \left[I - \left(G^{-1} (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)}) \right)^T \right]$ e T^T , respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} & Z_{z(k)} + Q_{\sigma(k)} - (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)})^T G^{-T} (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)}) \\ & - (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)})^T \times G^{-1} (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)}) \\ & + (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)})^T G^{-T} (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)}) \\ & + (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)})^T G^{-1} (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)}) \\ & - (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)})^T G^{-T} P_{z(k+1)} G^{-1} (A_{z(k)} G - B_{z(k)} F_{\sigma(k)}) > 0 \end{aligned} \quad (98)$$

Desta forma, tem-se:

$$(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)})^T (G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1})(A_{z(k)}G - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}) - Z_{z(k)} - Q_{\sigma(k)} < 0 \quad (99)$$

Multiplicando G^{-T} à esquerda e G^{-1} à direita de (99), obtém-se:

$$\begin{aligned} (A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1})^T (G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1})(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}) \\ < G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1} \end{aligned} \quad (100)$$

Para $x \neq 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} x^T(k) \left\{ (A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1})^T (G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1})(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}) \right\} x(k) \\ < x^T(k) \{ G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1} \} x(k) \end{aligned} \quad (101)$$

Da lei de controle chaveado e lembrando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual a qualquer combinação convexa desses números, tem-se:

$$\begin{aligned} x^T(k)G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1}x(k) &= \arg * \min_{l \in \mathbb{K}_r} \{ x^T(k)G^{-T}Q_lG^{-1}x(k) \} \\ &\leq \sum_{j=1}^r h_j(z(k)) \{ x^T(k)G^{-T}Q_jG^{-1}x(k) \} = x^T(k)G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1}x(k) \end{aligned} \quad (102)$$

Logo, para $x(k) \neq 0$, de (101) e (102), segue:

$$\begin{aligned} x^T(k) \left\{ (A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1})^T (G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1})(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}) \right\} x(k) \\ \leq x^T(k) \{ G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{\sigma(k)}G^{-1} \} x(k) \\ \leq x^T(k) \{ G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1} \} x(k) \end{aligned} \quad (103)$$

Este lema irá facilitar a definição do teorema a seguir que é abordado em Santos (2020), fazendo com que a lei de controle chaveada torne o sistema assintoticamente estável, considerando uma candidata a função de Lyapunov não quadrática.

Teorema 5: (SANTOS, 2020) Considere que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$, tais que:

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_i G - B_i F_l)^T \\ A_i G - B_i F_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad (104)$$

$$Z_i + Q_i - P_i \leq 0 \quad (105)$$

Então a lei de controle chaveado, dada em (89), com os ganhos do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, fazem o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema *fuzzy* T-S (87), localmente assintoticamente estável.

Demonstração: (SANTOS, 2020) Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que as equações (104) e (105) são satisfeitas para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$.

Lembrando que as funções de pertinência são positivas $h_i(z(k)) \geq 0$, e sua somatória é igual a unidade $\sum_{i=1}^r h_i(z(k)) = 1$. Multiplicando (105) por $h_i(z(k))$ e somando i de 1 até r , obtém-se a seguinte inequação:

$$Z_{z(k)} + Q_{z(k)} - P_{z(k)} \leq 0 \quad (106)$$

De (70), pode-se notar que $G + G^T - P_j > 0$, para todo $j \in \mathbb{K}_r$. Como $P_j > 0$, para todo $j \in \mathbb{K}_r$ a existência de G^{-1} é assegurada. Multiplicando G^{-T} à esquerda e G^{-1} à direita de (106), para $x(k) \neq 0$, obtém-se:

$$x^T(k) \{ G^{-T} Z_{z(k)} G^{-1} + G^{-T} Q_{z(k)} G^{-1} - G^{-T} P_{z(k)} G^{-1} \} x(k) \leq 0 \quad (107)$$

De acordo com o Lema e a lei de controle chaveada, (104) garante que (94) é satisfeita. Logo, para $x(k) \neq 0$, de (94) e (107), segue:

$$\begin{aligned}
x^T(k) \left\{ (A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1})^T (G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1})(A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}) \right\} x(k) \\
\leq x^T(k) \{ G^{-T}Z_{z(k)}G^{-1} + G^{-T}Q_{z(k)}G^{-1} \} x(k) \\
\leq x^T(k) G^{-T}P_{z(k)}G^{-1} x(k)
\end{aligned} \tag{108}$$

Que resulta em:

$$\begin{aligned}
x^T(k) \left\{ (A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1})^T (G^{-T}P_{z(k+1)}G^{-1}) \times (A_{z(k)} - B_{z(k)}F_{\sigma(k)}G^{-1}) - \right. \\
\left. G^{-T}P_{z(k)}G^{-1} \right\} x(k) < 0
\end{aligned} \tag{109}$$

Então, a inequação (109) implica que $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$, para $x(k) \neq 0$. Portanto, a lei de controle chaveado torna o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$, do sistema não linear incerto, localmente assintoticamente estável (SANTOS, 2020).

6 CONCLUSÃO

Este trabalho de graduação abordou o projeto de controle automático para o sistema Aeropêndulo, ou Viga-Hélice, presente no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS) da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Este projeto de controladores foi desenvolvido por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e o sistema Aeropêndulo foi representado na modelagem matemática em espaço de estados. A escolha de utilizar esta abordagem no trabalho se deve ao fato das LMIs se apresentarem como uma ótima alternativa da teoria de controle moderno para projetos em sistemas representados na modelagem matemática em espaço de estados.

No Capítulo 1, foi apresentada a introdução do trabalho, além dos objetivos e da organização de texto. No geral, os objetivos principais deste trabalho foram conduzir um estudo teórico sobre controle moderno, fazer uma análise completa do Aeropêndulo e seu funcionamento, identificar o sistema Aeropêndulo e obter um modelo de simulação pelo software MatLab/Simulink, desenvolver o projeto de controladores baseado em LMIs, e apresentar teoricamente um projeto de controle chaveado por meio de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, que poderá auxiliar projetos futuros.

No Capítulo 2, foi apresentado os conceitos fundamentais da teoria de controle moderno para o desenvolvimento deste trabalho. Desta forma, foram abordadas a teoria e a definição matemática acerca dos temas: modelagem matemática em espaços de estados, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e estabilidade segundo método direto de Lyapunov.

O Capítulo 3 mostrou a descrição do funcionamento do sistema Aeropêndulo instalado no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), assim como o equacionamento, a modelagem matemática em espaço de estados e a identificação do sistema. Este capítulo foi de extrema importância para o desenvolvimento do projeto de controladores, abordado no capítulo seguinte, pelo fato de apresentar a função de transferência e, respectivamente, a modelagem matemática em espaço de estados do sistema, contendo as matrizes de estado e de entrada utilizadas no projeto de controladores.

Foram abordadas duas representações diferentes em espaço de estados que descrevem o funcionamento do sistema. Uma dessas representações foi utilizada para a identificação do Aeropêndulo em modelos fuzzy T-S, por meio da estimativa dos parâmetros no software MatLab/Simulink, sendo este procedimento aquele proposto no trabalho de Bertholim (2022).

Em contrapartida, a outra representação teve os parâmetros substituídos pelos valores fornecidos no trabalho inicial de Veiga (2016).

O objetivo de apresentar ambas as representações em espaço de estados e, conseqüentemente, as matrizes de estado e de entrada obtidas, foi realizar um estudo comparativo entre os dois modelos. Deste modo, ao gerar o gráfico das saídas $\theta(t)$ do sistema para as duas representações, foram obtidas curvas semelhantes. Logo, pode-se concluir e comprovar que um sistema pode ser representado por modelos diferentes e apresentar um comportamento similar para uma determinada entrada.

No Capítulo 4, foi desenvolvido o projeto de controladores para o Aeropêndulo, utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Para solucionar numericamente as LMIs no software MatLab/Simulink foi utilizada a *toolbox* Yalmip e os *solvers* LMILab e SeDuMi. O projeto de controladores foi baseado Ogata (2011), sendo controladores de servossistemas do tipo 1, quando a planta não possui integrador e este deve ser inserido ao sistema, entre o comparador e a planta.

Os ganhos de controle foram adquiridos pelo MatLab e o projeto de controladores foi desenvolvido e simulado no Simulink. Cabe ressaltar que o processo de simulação é essencial para identificar qualquer problema antes de implementar o controlador no Aeropêndulo em bancada, evitando possíveis danos ao equipamento real.

Ao realizar a simulação do projeto de controladores de servossistemas do tipo 1 por LMIs, utilizando os ganhos de controle obtidos, foi observado que o sistema controlado apresentou uma resposta adequada e eficiente. Além disso, por meio de testes de simulações, foi perceptível que a variação dos parâmetros e dos ganhos influenciam diretamente no comportamento da resposta do sistema, principalmente, no tempo de resposta em regime transitório e no *overshoot* gerado.

No Capítulo 5, foi abordado um estudo teórico sobre projetos de controladores chaveados utilizando LMIs por meio de modelos *fuzzy* T-S. A meta deste capítulo foi apresentar uma perspectiva diferenciada para a solução de LMIs no desenvolvimento do projeto de controle. Dessa forma, poderá servir como referências de trabalhos futuros relacionados com projeto de controladores chaveados para o sistema do Aeropêndulo.

A partir disso, conclui-se que o presente trabalho de graduação cumpriu com os objetivos estabelecidos, abordando um estudo de controle moderno e o projeto de controladores, baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), para o sistema Aeropêndulo, representado na modelagem matemática em espaço de estados. Além de apresentar resultados satisfatórios para a metodologia utilizada.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Propõe-se algumas sugestões para futuros estudos e trabalhos relacionados ao tema:

- Realizar a identificação do modelo linearizado em torno de um ponto de operação através das ferramentas *System Identification* ou *ident* do software MatLab;
- Utilizar outras técnicas para identificar o sistema;
- Fazer uma síntese comparativa com outros modelos matemáticos pertinentes ao Aeropêndulo;
- Coletar novos valores para os parâmetros do sistema, como a velocidade;
- Realizar o projeto de controladores através de outra teoria de controle, se baseando, por exemplo, no Capítulo 10 de Ogata (2011), que apresenta vários projetos de sistemas de controle no espaço de estados;
- Implementar o projeto de controle chaveado utilizando LMIs e modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno para o problema de estabilidade local, apresentado no Capítulo 5 deste trabalho;
- Aplicar, em bancada, o projeto de controladores no Aeropêndulo do LPC, analisando e comparando os resultados das simulações com os resultados obtidos no experimento prático em laboratório.

REFERÊNCIAS

- AGUIERRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas, Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. 3ª ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007.
- BERTHOLIM, I. O. **Identificação e Projeto de Controle para um Sistema Viga-Hélice Considerando Modelagem Fuzzy Takagi-Sugeno, Chaveamento e Restrições Via LMIs**. 2022. 62 f. Trabalho de Graduação (Bacharelado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2022.
- BOCCA, L. F. **Projeto de Controladores Chaveados Robustos Considerando Custo Garantido com Realimentação Estática de Saída**. 2021. 67 f. Trabalho de Graduação (Bacharelado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2021.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Vol. 15. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos (LTC), 2001.
- GONÇALVES, C. H. B. **Sintonia Ótima de Controladores PID Utilizando Técnicas de Modelagem Caixa-Cinza: Aplicação em um Sistema Viga-Hélice**. 2019. 47 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2019.
- JOB, M. M.; JOSE, P.S. H. **Modeling and control of mechatronic aeropendulum**. IEEE. International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS), 2015.
- KALMAN, R. E.; BERTRAM, J. E. **Control System Analysis and Design Via the “Second Method” of Lyapunov” I Continuous-Time Systems, II Discrete-Time Systems**. New York: Journal of Basic Engineering, 1959.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. 3ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- LASSALE, J. P. **The Stability and Control of Discrete Processes**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.
- MACHADO, E. R. M. D. **Identificação Rápida de Sistemas Dinâmicos Utilizando Redes Neurais de Hopfield e Mínimos Quadrados**. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 1998.
- MACHADO, E. R. M. D. **Modelagem e Controle de Sistemas fuzzy Takagi-Sugeno**. 2003. 209 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2003.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2011.

OLIVEIRA, M.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. **A New Discrete-Time Robust Stability Condition**. Amsterdam: Systems & Control Letters, 1999.

RAMOS, I. T. M. **Projetos de Controladores Robustos Chaveados para Sistemas Não Lineares Baseados na Decomposição em Soma de Quadrados**. 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2018.

RODRIGUES, J. M. **Projeto de Controladores LQR-LMI Aplicados a Sistemas Dinâmicos**. 2021. 47 f. Trabalho de Graduação (Bacharelado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2021.

SANCHES, M. A. A. **Sistema Eletrônico para Geração e Avaliação de Movimentos em Paraplégicos**. 2013. 186 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2013.

SANTOS, G. R. **Controle Chaveado e \mathcal{H}_∞ Chaveado de Sistemas não Lineares Incertos Discretos no Tempo Descritos por Modelos Fuzzy T-S Considerando Região de Operação e Saturação dos Atuadores**. 2020. 170 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2020.

ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIC, D. M. **Robust Stabilization of Nonlinear Systems: The LMI Approach**. Mathematical Problems in Engineering. Department of Electrical Engineering, Santa Clara University. Vol. 6, 2000.

SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S. **Resolvendo LMIs com o MATLAB: Curso de Yalmip com solvers LMILab e SeDuMi**. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2011.

SILVA, H. R. M. **Identificação do Sistema Aeropêndulo e Métodos de Controle Chaveado Aplicados a Sistemas Incertos Descritos por Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno**. 2020. 69 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2020.

SILVA, S. **Projeto de Controladores Robustos para Aplicações em Estruturas Inteligentes Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares**. 2005. 145 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2005.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. **Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control Systems**. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Vol. 15, n. 1, 1985.

TANIGUCHI, T. K.; OHATAKE, H.; WANG, H. O. **Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems**. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Piscataway. Vol. 9, n. 4, 2001.

VEIGA, D. V. V. **Projeto de Controle e Implementação de um Sistema Viga-Hélice**. 2016. 79 f. Trabalho de Graduação (Bacharelado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Ilha Solteira, 2016.

VIDYASAGAR, M. **Nonlinear Systems Analysis**. 2^a ed. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.

YAMANAKA, H. F. **Construção e Controle Seguidor Via LQR e Via LMIs de um Sistema Aeropêndulo**. 2022. 27 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação) – Instituto Federal do Paraná, Campus Jacarezinho, Jacarezinho, 2022.

YAMANAKA, H. F.; BISPO, C. A. S.; BREGANON, R.; RIBEIRO, F. S. F.; ALMEIDA, J. P. L. S.; ALVES, U. N. L. T. **Construção e Controle Seguidor via LQR de um Sistema Aeropêndulo**. Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Automática. Fortaleza – CE: Sociedade Brasileira Automática - SBA, 2022a.

YAMANAKA, H. F.; BISPO, C. A. S.; RIBEIRO, F. S. F.; ALMEIDA, J. P. L. S.; BREGANON, R.; ALVES, U. N. L. T. **Controle Seguidor de Referência Via LMIs de um Sistema Aeropêndulo**. REVISTA MUNDI ENGENHARIA, TECNOLOGIA E GESTÃO, v. 7, p. 1-13, 2022b.