

Estudos sobre as defasagens de Prometeu e Pandora

THAMIRIS DE SANTANA

Estudos sobre as defasagens de Prometeu e Pandora

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Co-orientador: Prof. Dr. Décio Cardozo Mourão

Guaratinguetá

2015

S232e	Santana, Thamiris de Estudos sobre as defasagens de Prometeu e Pandora / Thamiris de Santana – Guaratinguetá, 2015. 111 f. : il. Bibliografia : f. 101-104 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2015. Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter Coorientador: Prof. Dr. Décio Cardozo Mourão 1. Satélites 2. Saturno (Planeta) 3. Planetas I. Título CDU 629.783(043)
-------	--

THAMIRIS DE SANTANA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
Orientador - UNESP/FEG


Prof. Dr. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
UNESP/FEG


Prof. Dr. ROBERTO VIEIRA MARTINS
Observatório Nacional/RJ

Fevereiro de 2015

Dados Curriculares

THAMIRIS DE SANTANA

NASCIMENTO 06.01.1991 - GUARUJÁ / SP

FILIAÇÃO Ariovaldo Antônio de Santana
Egle Varela Carlota

FORMAÇÃO

2009 - 2012 Licenciatura em Matemática
Departamento de Matemática
FEG/UNESP - Universidade Estadual Paulista, Campus de Guaratinguetá

2013 - 2015 Mestrado em Física
Departamento de Física e Química
FEG/UNESP - Universidade Estadual Paulista, Campus de Guaratinguetá

Dedico esse trabalho à minha mãe, Egle Varela Carlota.

Agradecimentos

Agradeço a todos que estiveram comigo e fizeram parte desse desafiador período da minha vida. Em especial:

Ao meu pai, que mesmo longe me incentiva na minha escolha profissional (e por que não de vida) nem tanto compreendida.

Aos meus avós, sempre presentes renovando minhas energias.

Ao meu orientador, Dr. Othon Cabo Winter, por me dar a oportunidade de ser guiada por um mestre. Obrigada por cada discussão e conversa sobre a ciência e a vida, por me ajudar a olhar o mundo como uma cientista.

Ao Rafael Sfair, companheiro de inabalável paciência e dedicação, obrigada por acreditar em mim mesmo quando eu já não o fazia, por zerar meu mau-humor de tantas maneiras. Esse trabalho seria infinitamente mais difícil de existir sem você por perto.

Ao meu co-orientador, Décio Mourão, que possibilitou a existência desse trabalho, tirando minhas dúvidas e estando sempre presente para me auxiliar.

Às amigas Hanik, Amira e Stelamarys também parte desse processo todo chamado mestrado (e minha vida).

Aos meus professores da pós-graduação, obrigada por todo conhecimento transmitido e me levar aos meus limites físicos, intelectuais e emocionais me fazendo crescer e me reconhecer como acadêmica a cada desafio ultrapassado.

Aos meus colegas de pós-graduação, obrigada pelas tardes de estudo e aulas extras e pelos momentos de descontração que deram suporte à toda tensão que enfrentamos juntos.

À Capes, pelo apoio financeiro que tornou possível a realização desse trabalho.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Capes.

We are a way for the cosmos to know itself.
(Carl Sagan)

SANTANA, T. **Estudos sobre as defasagens de Prometeu e Pandora**. 2015. 111 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

Resumo

Dados observacionais obtidos em 1995 durante a passagem da Terra pelo plano dos anéis de Saturno indicaram defasagens angulares nas posições previstas de Prometeu e Pandora. Usando dados adicionais as defasagens foram confirmadas com Prometeu cerca de -19° de sua longitude prevista e Pandora cerca de $+25^\circ$.

Uma possível relação caótica provocada pela ressonância 121:118 de movimento médio entre os dois satélites é atualmente aceita para explicar essas defasagens (Goldreich & Rappaport 2003b). Entretanto, um trabalho alternativo que analisa as evoluções temporais dos semi-eixos maiores dos satélites propõe que essas defasagens são consequência de dados iniciais não ideais que pertencem a um momento muito específico e não representam o comportamento dos satélites a maior parte do tempo (Cruz 2004).

Neste trabalho reanalisamos as defasagens de Prometeu e Pandora por meio do estudo detalhado dos dois trabalhos citados, testando analítica e numericamente seus principais resultados. Os nossos resultados indicam que as defasagens observadas são originárias da utilização de uma condição inicial do momento de anti-alinhamento dos periapses orbitais dos satélites, que uma vez relacionados pela ressonância 121:118, geram as defasagens. É proposta uma maneira de mensurar a massa do anel F a partir do modelo dinâmico desenvolvido no trabalho, que resultou em um limite superior de massa demasiadamente grande para ser considerado. Além disso, partindo de um estudo da conservação angular, mensuramos novas densidades para Prometeu e Pandora de $[0,85 - 0,99]\text{g cm}^{-3}$ e $[0,62 - 0,85]\text{g cm}^{-3}$, respectivamente.

Palavras-chave: Prometeu, Pandora, satélites, Saturno, anéis planetários.

SANTANA, T. **Studies about the lags of Prometheus and Pandora.** 2015. 111 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

Abstract

Observational data collected in 1995 during the passage of the Earth by the ring plane of Saturn indicated angular lags in the predicted positions of Prometheus and Pandora. Using additional data these lags were confirmed, with Prometheus being about -19° of their estimated longitude and Pandora about 25° . A possible chaotic relationship due to a 121:118 mean motion resonance between the two satellites is currently accepted to explain those lags (Goldreich & Rappaport 2003b).

However, an alternative work analyses the temporal evolution of the satellites semi-major axes and suggests that these lags are the result of non-ideal initial data which corresponds to a particular time and do not represent the behavior of satellites most of the time (Cruz 2004).

In this work, we reanalysed the lags of Prometheus and Pandora through a detailed study of the two aforementioned papers, testing analytically and numerically their main results. The results indicate that the observed lag originate from an initial condition corresponding to the time alignment of anti-periapses orbital of the satellites, once their are related by the 121: 118 mean motion resonance, they generate lags. It is proposed a way to measure the mass of the F-ring, which is still unknown, from the dynamic model developed in this work, resulting in an excessively large mass of the upper limit to be considered. In addition, from a study of the angular momentum conservation, we measure new densities for Prometheus and Pandora as $[0.85 - 0.99]\text{g cm}^{-3}$ and $[0.62 - 0.85]\text{g cm}^{-3}$, respectively.

Keywords: Prometheus, Pandora, satellites, Saturn, planetary rings .

Lista de Figuras

1.1	Saturno	14
1.2	Esquema do sistema de anéis de Saturno	16
1.3	Anel F entre Prometeu e Pandora	17
2.1	Resultado da integração de 1000 partículas na região de Prometeu e Pandora	23
2.2	Defasagem de Prometeu - GR03a	24
2.3	Defasagem de Pandora - GR03a	24
2.4	Larguras estimadas da ressonância 121:118	26
3.1	Defasagens angulares de Prometeu e Pandora. Dados 1.	30
3.2	Defasagens angulares de Prometeu e Pandora. Dados 2.	32
3.3	Defasagens angulares de Prometeu e Pandora. Dados extra.	34
3.4	Defasagem apresentada por Pandora. GR03a, Dados 1, Dados 2 e Dados extra.	35
3.5	Defasagem apresentada por Prometeu. GR03a, Dados 1, Dados 2 e Dados extra.	35
4.1	Esquema do Problema de 3 corpos.	38
4.2	Defasagens angulares de Prometeu e Pandora. FSHEPRES.	45
4.3	Defasagens angulares de Prometeu e Pandora. Caso completo.	46
4.4	Defasagens angulares de Prometeu e Pandora. FSHEPSIM.	47
4.5	Defasagens angulares de Prometeu e Pandora. Caso simplificado.	48
4.6	Variação dos ângulos ressonantes para 121:118 durante 20 anos.	49
5.1	Esquema Cruz (2004). Semi-eixo maior Prometeu	51
5.2	Semi-eixo maior de Prometeu em função do tempo. Dados 1.	52
5.3	Semi-eixo maior de Pandora em função do tempo. Dados 1.	52
5.4	Semi-eixo maior de Prometeu em função do tempo. Dados 2.	53
5.5	Semi-eixo maior de Pandora em função do tempo. Dados 2.	54
6.1	Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora.	57
6.2	Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu.	58
6.3	Ângulos ressonantes para 121:118. Calculando defasagem utilizando um termo.	59
6.4	Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora.	60
6.5	Continuação da figura 6.4.	61

6.6	Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu.	62
6.7	Continuação da figura 6.6	63
6.8	Ângulos ressonantes para 121:118. Calculando defasagem utilizando dois termos.	65
6.9	Continuação da figura 6.8.	66
6.10	Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora.	67
6.11	Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu.	68
6.12	Ângulos ressonantes para a ressonância 121:118. Testes a cada três termos.	69
6.13	Continuação da figura 6.12	70
6.14	Continuação da figura 6.12	71
6.15	Variação dos ângulos ressonantes para a ressonância 121:118 durante 20 anos.	72
6.16	Evoluções temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora para as ressonâncias 119:116, 120:117, 122:119 e 123:120.	73
6.17	Evoluções temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu para as ressonâncias 119:116, 120:117, 122:119 e 123:120.	74
6.18	Ângulos ressonantes para 119:116. Testes termo a termo.	75
6.19	Evoluções temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora para as ressonâncias 118:116, 119:117, 120:118 e 121:119.	76
6.20	Evoluções temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu para as ressonâncias 118:116, 119:117, 120:118 e 121:119.	77
6.21	Ângulos ressonantes para 121:119. Testes termo a termo.	79
7.1	Diferença entre as variações de semi-eixo maior pela variação da massa do anel.	83
7.2	Evolução dos semi-eixos maiores de Pandora e Prometeu.	84
7.3	Evolução dos semi-eixos maiores de Pandora e Prometeu.	85
7.4	Evolução dos semi-eixos maiores de Pandora e Prometeu.	86
A.1	Convergência do coeficiente de Laplace	107
A.2	Convergência da primeira derivada do coeficiente de Laplace	107
A.3	Convergência da segunda derivada do coeficiente de Laplace	108
A.4	Convergência da terceira derivada do coeficiente de Laplace	108

Lista de Tabelas

1.1	Dados de Saturno e Coeficientes Zonais	15
1.2	Defasagem da longitude média de Prometeu	18
1.3	Defasagem da longitude média de Pandora	19
1.4	Valores de defasagem para Prometeu e Pandora	19
3.1	Dados 1 - Elementos iniciais	29
3.2	Dados 2 - Elementos iniciais	29
3.3	Dados extra - Elementos iniciais	33
4.1	Massas, excentricidades e semi-eixos maiores	44
4.2	Longitudes do Pericentro, Longitudes médias e Movimentos médios	44
7.1	Dados anel F	82
8.1	Valores de defasagens observadas - Voyager I, II e <i>HST</i>	89
8.2	Valores de defasagens calculadas a partir de dois modelos e suas razões.	90
8.3	Valores de defasagens observadas - Voyager I, II e <i>HST</i>	92
8.4	Valores de defasagens calculadas a partir de dois modelos utilizando nova razão de massa	93
8.5	Valores de defasagens calculadas a partir de dois modelos utilizando mesma razão de massa de GR03a	94
8.6	Massas, volumes e densidades para Pandora calculados por diversos autores.	95
8.7	Massas, volumes e densidades para Prometeu calculados por diversos autores.	96
8.8	Densi	96

Conteúdo

Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	12
Bibliography	12
1 Introdução	14
1.1 Saturno, Anel F, Prometeu e Pandora	14
1.1.1 Defasagens	17
Prometeu	17
Pandora	18
2 Revisão bibliográfica	21
2.1 Justificativas para a defasagem	21
3 Integrações Numéricas	27
3.1 O Mercury e a defasagem	27
3.2 Condições iniciais	28
3.3 Resultados	30
3.4 Simulação extra	33
4 Modelo Teórico	37
4.1 Problema de três corpos e Função Perturbadora	37
5 Análise dos semi-eixos maiores	50
5.1 Análise alternativa	50
6 Testando ressonâncias	55
6.1 Ressonância 121:118	55
6.2 Outras ressonâncias - $N=3$	72
6.3 Outras ressonâncias - $N=2$	75
7 Estimativa da massa do anel F	81
7.1 Introdução	81
7.2 Resultados iniciais	82

8	Análise de massas	88
8.1	Os valores observados e calculados	88
8.2	Conservação do momento angular	90
8.3	Razão de massas entre Prometeu e Pandora	92
8.4	Densidades: Massas e Volumes	94
9	Considerações Finais	98
	Apêndice	104
A	Cálculo do Coeficiente de Laplace e suas derivadas	105

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho propomos estudar a dinâmica dos satélites Prometeu e Pandora de Saturno, analisando com acurácia um comportamento anômalo identificado para os satélites em 1995, a partir de dados obtidos pelo Telescópio Espacial Hubble, a fim de esclarecer a origem desse comportamento. Iniciaremos com uma apresentação do sistema estudado, de que maneira esse comportamento anômalo foi detectado e como ele é definido.

1.1 Saturno, Anef F, Prometeu e Pandora

Saturno (Figura 1.1) é um dos quatro planetas chamados gasosos, o segundo maior do Sistema Solar com massa de aproximadamente 100 massas da Terra. Sua composição é em sua maioria de hidrogênio e hélio. Possui até o momento 62 satélites conhecidos (Giorgini et al. 1996).



Figura 1.1: Saturno visto pela sonda Cassini durante sua aproximação ao planeta. Composição de duas imagens. Fonte: NASA -PIA06077.

Algumas propriedades físicas de Saturno podem ser conferidas na Tabela (1.1).

Saturno	
R_p	60330 km
M	0.56846×10^{27} kg
J_2	0.16298×10^{-1}
J_4	-0.915×10^{-3}
J_6	0.103×10^{-3}

Tabela 1.1: Raio (R_p), massa (M) e coeficientes zonais de Saturno (J_2, J_4, J_6). Retirados e adaptados de Goldreich & Rappaport (2003a).

Assim como todos os planetas gigantes, Saturno possui um sistema de anéis planetários que além de ser o mais amplo, é bastante dinâmico, brilhante e rico em estruturas que intrigam pesquisadores desde sua descoberta até os dias atuais. Por esse motivo é também o mais estudado. Possíveis de serem observados com um telescópio de pequeno porte, os anéis A e B são separados por uma região escura chamada Divisão de Cassini. Essa região, ao contrário do que se pode imaginar, não é uma falha e contém estruturas, porém sua profundidade óptica é de apenas 10% da dos anéis A e B. Interior ao anel B encontra-se o anel D. Os anéis A, B, C, D e a Divisão de Cassini formam o que chamamos sistema principal de anéis de Saturno. No anel A está localizada a Falha de Encke, uma região de baixa densidade de partículas onde foram descobertos anéis a partir das imagens da sonda espacial Cassini (Porco et al. 2005). Interior ao anel C encontra-se o anel D. Externos ao anel A estão os anéis F, G, E e o recentemente descoberto, o anel Phoebe, respectivamente. A Figura 1.2 traz um esquema de uma visão parcial do sistema de anéis planetários de Saturno.

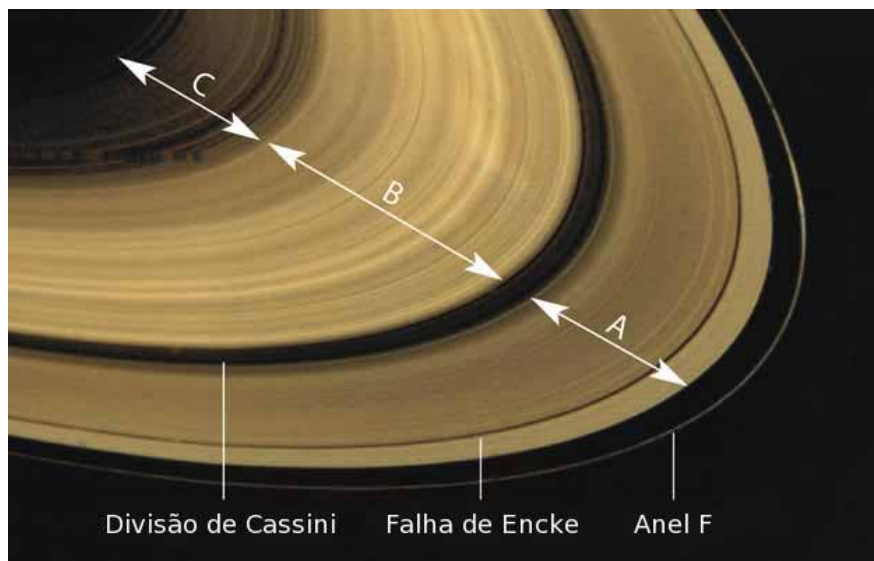


Figura 1.2: Esquema de visão parcial do sistema de anéis planetários de Saturno. Adaptado de NASA/JPL.

O anel F é certamente o mais excêntrico de todo o sistema de anéis de Saturno. Rico em estruturas, como tranças e falhas, ele é um mistério para os pesquisadores quanto às suas características. Dois satélites de Saturno acompanham esse anel, um interior a ele chamado Prometeu, e outro exterior, chamado Pandora.

Descobertos pela equipe das sondas Voyager em 1980, Prometeu e Pandora (Figura 1.3) fazem o trabalho de “pastores” do anel F, pois delineam as trajetórias das partículas, de modo a contribuir com o confinamento das partículas do anel. O termo “pastores” é escrito entre aspas no caso desses satélites pois eles não contemplam todos os critérios para essa definição apresentada em Goldreich & Tremaine (1979); eles deveriam exercer torques de mesma intensidade e sentido contrário mas não o fazem (Lissauer & Peale 1986).

Prometeu, originalmente chamado S/1980 S27, tem formato irregular com várias crateras em sua superfície, algumas chegam a medir até 20 km de diâmetro. Possui baixa densidade e é provável que seja poroso e gelado. Prometeu está a uma distância 139353,43 km de Saturno e seu período orbital é de $\sim 14,4$ horas (saturn.jpl.nasa.gov/).

Pandora, originalmente chamada S/1980 S26, é revestida por uma fina camada de gelo incluindo suas crateras, o que faz sua superfície ser mais lisa quando comparada com outros satélites de Saturno, Prometeu por exemplo. Também apresenta ranhuras e sulcos em sua superfície. Sua densidade é estimada baixa o que indica que deve se tratar de um satélite poroso. Pandora está a uma distância 141711,61 km de Saturno e seu período orbital é de $\sim 15,1$ horas (saturn.jpl.nasa.gov/).

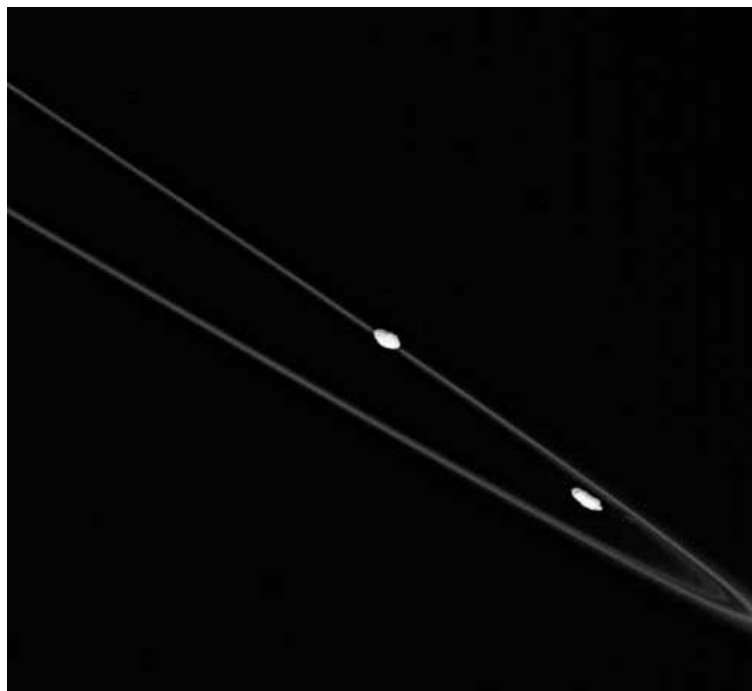


Figura 1.3: Anel F entre Pandora, acima e à esquerda, e Prometeu, à direita. Fonte: NASA-PIA07712.

A partir de imagens das sondas Voyager, Jacobson (comunicação pessoal Goldreich & Rappaport (2003a) e Evans (2001)) e Synnott et al. (1981, 1983) calcularam as órbitas de Prometeu e Pandora. Nicholson & Porco (1988) e Campbell & Anderson (1989) calcularam os movimentos médios e as taxas de precessão dos satélites. Outras imagens de Prometeu e Pandora foram obtidas pelo Telescópio Espacial Hubble (HST, do inglês *Hubble Space Telescope*) em 1995, durante a passagem pelo plano dos anéis, quando a diminuição do brilho dos anéis permitiu a obtenção de imagens dos satélites. Atualmente a principal fonte de imagens de Prometeu e Pandora é a sonda Cassini, parte da missão bem sucedida Cassini-Huygens, que desde sua chegada em Saturno em 2004 vem contribuindo ricamente com excelentes imagens do sistema. A missão que estava prevista para terminar em 2008 recebeu duas prorrogações e deve se encerrar, à princípio, em 2017. Não está confirmado o destino da sonda, mas é provável que seja direcionada a entrar na atmosfera de Saturno, destruindo-se após deixar um legado de dados que são mensurados em décadas de estudos futuros.

1.1.1 Defasagens

Prometeu

Como vimos anteriormente, as primeiras órbitas de Prometeu e Pandora foram calculadas a partir das efemérides obtidas pelas sondas Voyager 1 e 2, na década de 1980. Em 1995, a partir dos dados obtidos pelo HST, foi calculada novamente a órbita de Prometeu e foi constatado que sua longitude média estava defasada 19° em relação à propagação das efemérides das Voyager, em outras palavras, que Prometeu não estava em sua posição esperada. Observações posteriores do HST de três diferentes datas de 1995 foram utilizadas por alguns autores para calcular as eventuais posições de Prometeu. Na Tabela 1.2 são apresentadas as defasagens encontradas para cada observação, bem como um resultado obtido pela combinação de três observações (McGhee et al. 2001).

Defasagens para Prometeu ($^\circ$)				
Data	Bosh e Rivkin (1996)	Nicholson <i>et al.</i> (1996)	McGhee <i>et al.</i> (2001)	French <i>et al.</i> (2003)
Maio	-19,7		-19,13	
Agosto		-18,74	-18,80	-20,28
Novembro		-18,82	-18,83	
Todos			-18,88	

Tabela 1.2: Defasagem da longitude média de Prometeu em 3 datas de observação do HST e uma combinação delas. Retirado e adaptado de Cruz (2004).

Pandora

Para Pandora inicialmente não havia sido observada defasagem. Quando calculadas suas órbitas com as efemérides do HST, as defasagens encontradas estavam dentro do erro previsto de $\pm 3^\circ$ (French et al. 1998, McGhee et al. 2001) como mostra a Tabela 1.3, e não foram consideradas relevantes. Porém, McGhee et al. (2001) ao combinarem três avaliações de seu movimento médio afim de determinar uma única solução orbital, encontraram que esses valores desviavam cerca de $4,05^\circ$ ao ano. Os autores determinaram então três órbitas, uma para cada data de observação, e ao combiná-las encontraram uma defasagem de $-1,85^\circ$ na longitude média, o que foi considerado pelos autores consistente com o movimento médio obtido na primeira determinação da órbita para Pandora.

Pandora	
Data	Defasagem ($^{\circ}$)
Maio	0,75
Agosto	-0,20
Novembro	-1,10

Tabela 1.3: Defasagem da longitude média de Pandora em 3 datas de observação do HST. Retirado e adaptado de McGhee et al. (2001).

Evans (2001) ao reanalisar as imagens das sondas Voyager definiu dois novos conjuntos de elementos orbitais para Pandora considerando a ressonância 3:2 de co-rotação entre o satélite e Mimas. Um conjunto considerando um valor teórico fixo para a fase de libração da ressonância citada, e outro conjunto considerando um valor variável. As novas órbitas calculadas resultaram em uma correção de $-1,72^{\circ}/\text{ano}$ e $-1,32^{\circ}/\text{ano}$, respectivamente, nos movimentos médios iniciais de Pandora.

French et al. (2003) utilizaram em seu trabalho o primeiro conjunto de Evans (2001), de valor teórico fixo, e calcularam as posições de Prometeu e Pandora durante o cruzamento da Terra pelo plano dos anéis (RPX, do inglês *ring-plane crossings*) a partir das efemérides das sondas Voyager. Comparando com as imagens obtidas durante o RPX, Pandora passa a apresentar uma defasagem de 22° . Utilizando novas observações entre 1994 e 2002, os autores recalcularam as defasagens para os dois satélites, e os valores encontrados podem ser conferidos na Tabela 1.4.

Defasagens ($^{\circ}$)		
Data	Prometeu	Pandora
Novembro 1994	$-19,82 \pm 0,27$	$23,93 \pm 0,20$
Novembro 1995	$-20,40 \pm 0,08$	$23,00 \pm 0,09$
Outubro 1997	$-21,82 \pm 0,06$	$23,82 \pm 0,08$
Outubro 1998	$-22,51 \pm 0,05$	$25,11 \pm 0,19$
Novembro 1999	$-23,18 \pm 0,11$	$25,79 \pm 0,22$
Setembro 2001	$-25,39 \pm 0,13$	$27,70 \pm 0,09$
Janeiro 2002	$-25,91 \pm 0,16$	$27,51 \pm 0,12$

Tabela 1.4: Valores de defasagem para Prometeu e Pandora entre 1994 e 2002 considerando dados de Evans (2001), (French et al. 2003).

É interessante destacar que a defasagem de Prometeu foi observada a partir de imagens, já a de Pandora só passa a existir quando é utilizado o conjunto de elementos de Evans (2001) que leva em consideração o efeito de co-rotação com Mimas.

Vários pesquisadores estudaram as possíveis origens das defasagens. O trabalho mais aceito atualmente é de Goldreich & Rappaport (2003b), onde os autores apresentam uma ressonância 121:118 de longitude média entre Prometeu e Pandora como causa de caos no movimento dos satélites e consequentemente das defasagens.

Um trabalho alternativo proposto por Cruz (2004) analisa as defasagens a partir dos semi-eixos maiores orbitais dos satélites e propõe que elas são consequência de dados iniciais não ideais que pertencem a um momento muito específico, não representando o comportamento dos satélites na maior parte do tempo.

O presente trabalho tem como objetivo reanalisar as defasagens de Prometeu e Pandora por meio do estudo detalhado dos dois trabalhos citados acima, testando analítica e numericamente seus principais resultados de maneira a esclarecer algumas hipóteses levantadas sobre a dinâmica do sistema. Um segundo objetivo está em mensurar a massa do anel F, de valor ainda desconhecido, utilizando um modelo preliminar de massas pontuais para simular a influência do anel.

Uma vez realizada a revisão bibliográfica apresentada no Capítulo 2, começaremos analisando os primeiros resultados de Goldreich & Rappaport (2003a) no Capítulo 3, realizando integrações numéricas utilizando o pacote de integração Chambers (1999) para integrar as equações do movimento do sistema. No Capítulo 4, por meio de uma abordagem teórica, o estudo analítico da ressonância 121:118 é feito, baseando-nos em Goldreich & Rappaport (2003b) para a comparação de resultados. No Capítulo 5 estudaremos com acuracidade a ressonância 121:118, testando seus termos e discutiremos os resultados encontrados. O estudo de Cruz (2004) será mais detalhadamente apresentado no Capítulo 6, onde será feita uma análise comparativa da evolução dos semi-eixos maiores orbitais resultantes das simulações numéricas realizadas no presente trabalho. Em seguida, no Capítulo 7, apresentamos o processo utilizado para mensurar a massa do anel F bem como os resultados encontrados. O Capítulo 8 irá apresentar possíveis intervalos de densidades para os satélites, partindo de um estudo analítico da conservação do momento angular do sistema. Finalmente, no Capítulo 9 são colocadas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido e os tópicos para futuros estudos.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

Uma vez encontrada as defasagens para Prometeu e Pandora, diversos autores iniciaram a procura pela justificativa de tal acontecimento. Apresentamos a seguir os principais estudos e resultados para o entendimento desse evento.

2.1 Justificativas para a defasagem

Cuzzi & Burns (1988) trabalharam na hipótese da existência de um cinturão de pequenos satélites nas proximidades do anel F. A essa teoria Barbara & Esposito (2002) analisaram um modelo para explicar a formação de pequenos aglomerados que consistiriam esse cinturão e, devido à interação gravitacional, seriam responsáveis pelo deslocamento de Prometeu. Esposito (2002) trabalhou em outro modelo considerando um cinturão de satélites com raios menores de 10 km próximos a Pandora para estudar sua influência.

Showalter et al. (1999b) apresentaram duas justificativas. Quando Prometeu passa próximo ao anel F sua influência gravitacional cria aglomerados que se sobreviverem até sua próxima passagem, poderão interagir gravitacionalmente com o satélite. Devido a essa interação Prometeu recuaria ligeiramente devido à conservação de energia. A segunda justificativa propõe a existência de 100 a 1000 objetos com raios menores de 10 km (ainda não identificados) de mesma massa que o anel, que ao interagirem com Prometeu introduziriam componentes em seu movimento tornando-o aleatório.

Em Showalter et al. (1999a) os autores retomam os mecanismos discutidos no trabalho anterior (Showalter et al. 1999a) e especulam uma nova causa das defasagens associada com o momento de anti-alinhamento dos pericentros da órbita do satélite e do anel F. Nessa configuração a distância entre eles é mínima e o torque exercido pelo anel seria intensificado enquanto o movimento do satélite seria reduzido. Após a passagem pelo anti-alinhamento o valor do movimento médio do satélite voltaria ao inicial, porém sua longitude média estaria

defasada.

Poulet & Sicardy (2001) apresentaram um estudo considerando os efeitos de maré e as diversas ressonâncias existentes na região do anel F. Comentaram a respeito da ressonância de co-rotação 3:2 entre Pandora e Mimas, segundo os autores se trata de um mecanismo amortecedor para a evolução orbital de Pandora.

Como já citado anteriormente, Evans (2001) reanalisou imagens das sondas Voyager e determinou dois novos conjuntos de elementos orbitais para Pandora, levando em consideração sua ressonância de co-rotação com Mimas. O primeiro considera um valor teórico fixo da fase de libração em longitude associada a essa ressonância e o segundo considera um valor variável. French et al. (2003) adotaram em seu trabalho o valor teórico fixo de Evans (2001) e esses novos elementos orbitais foram utilizados para estabelecer as posições previstas para o satélite durante o RPX desde o encontro com as sondas Voyager em 1980 e 1981, com isso Pandora passa então a apresentar uma defasagem de 22° .

French et al. (2003) desconsideram a questão levantada por Showalter et al. (1999b,a) de que a proximidade de Prometeu com o anel F provocaria o surgimento de aglomerações, pois segundo os autores Prometeu deveria apresentar pequenos desvios aleatórios entre os anos de 1994 e 2000, mas esse não apresenta, parecem existir dois momentos distintos de mudança orbital, um que provocou a defasagem observada em 1995 e um segundo que produziu o movimento médio observado, e mantido entre 1994 e 2000. Inspirados pelos resultados de McGhee et al. (2001), French et al. (2003) passaram a analisar com maior acuidade o movimento orbital de Prometeu e Pandora e logo detectaram que, em relação as efemérides das sondas Voyager, Pandora apresentava uma componente oscilatória em sua longitude com um período de aproximadamente 585 dias. Os autores associaram esse efeito a uma proximidade da ressonância de co-rotação 3:2 com Mimas, já prevista anteriormente porém ignorada. O efeito dessa ressonância não havia sido levado em consideração na determinação das efemérides das sondas Voyager até o ano de 2001.

Uma outra análise importante feita por French et al. (2003) de que os movimentos médios dos satélites sofrem alterações aproximadamente iguais e com sinais opostos aumenta a probabilidade de uma causa comum para o comportamento dos dois satélites. Uma das possibilidades especuladas pelos autores para explicar a defasagem na longitude média de Prometeu é a existência de um satélite co-orbital ainda não identificado. Sobretudo não encontraram modelo que explicasse tal efeito. Além disso, também seria necessário um satélite co-orbital para Pandora, baseando-se na hipótese da causa comum para o comportamento de ambos os satélites.

French et al. (2003) também determinaram os períodos de anti-alinhamento dos pericentros de Prometeu e do anel F, durante os quais a interação entre os dois seria mais forte

podendo alterar o movimento de Prometeu. Porém, ao analisar os momentos de alteração brusca no movimento médio desse satélite, concluíram que não se pode creditá-la a essa interação. Os autores sugerem que para que tal troca de energia aconteça, Prometeu e Pandora deveriam estar em uma ressonância de movimento médio de primeira ordem, porém a mais próxima delas é a ressonância 39:40 que está a 17 km interior à órbita de Prometeu.

Ainda em French et al. (2003) os autores apresentam uma simulação com 1000 partículas, durante 30 anos na proximidade do anel F, Prometeu e Pandora e constataam a presença de diversas ressonâncias: ressonância interior de Lindblad 3:2 e de co-rotação de Pandora com Mimas, as ressonâncias 9:8, 10:9, 17:15, 19:17 e 21:19 de Janus-Epimetheus e ressonância de co-rotação com Thetys, que mostram a complexidade do sistema. A Figura 2.1 ilustra os resultados comentados.

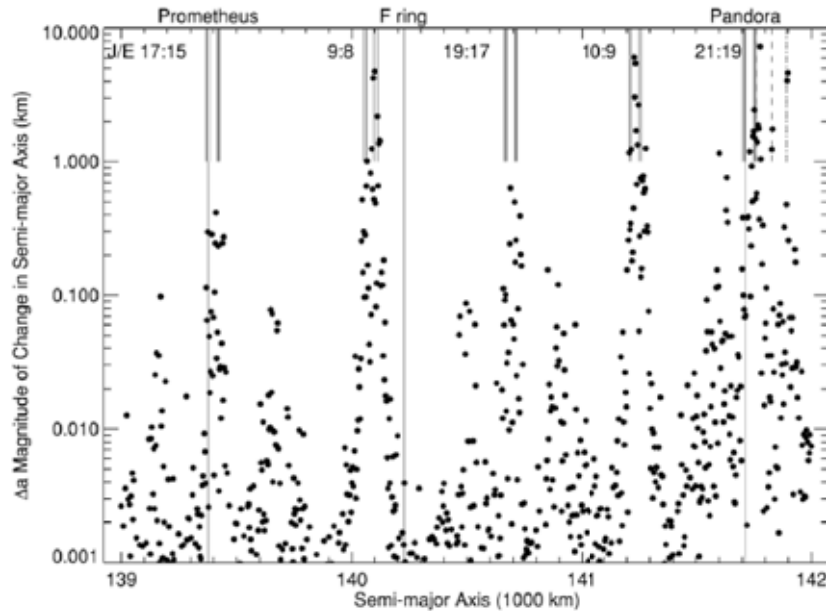


Figura 2.1: Resultado da integração de 1000 partículas na região de Prometeu e Pandora, com marcações das principais ressonâncias dessa região. Extraído e adaptado de French et al. (2003)

Goldreich & Rappaport (2003a), doravante denominado GR03a, é um dos trabalhos mais influentes sobre o sistema Prometeu - anel F - Pandora. Os autores analisaram as discrepâncias nas longitudes dos satélites baseando os estudos na hipótese desses estarem trocando energia e momento angular e que suas órbitas são caóticas. Os autores realizaram a integração numérica das órbitas de Prometeu e Pandora utilizando o algoritmo de Bulirsch & Stoer (1980) durante vinte anos. apresentam as alterações nas longitudes médias dos satélites,

como mostram as Figuras 2.2 e 2.3.

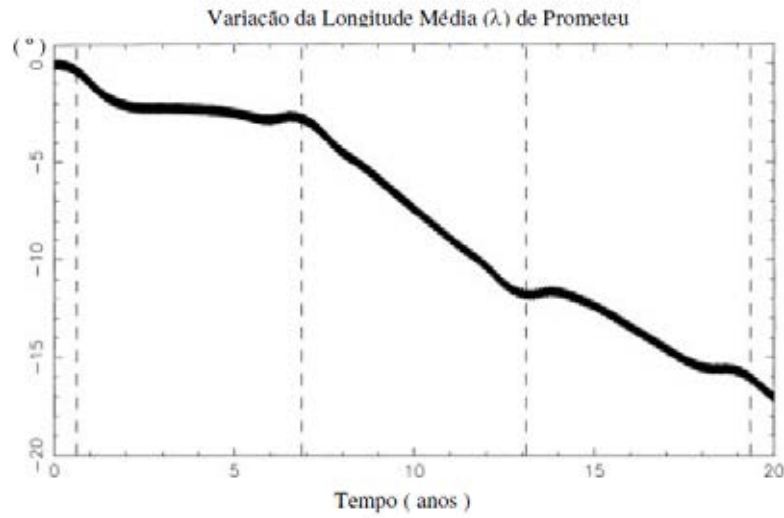


Figura 2.2: Longitude de Prometeu, a partir de integrações numéricas, em função do tempo. Uma constante baseada no movimento médio inicial é subtraída da longitude. As linhas pontilhadas indicam os instantes de antialinhamento dos periapses. Retirado de Goldreich & Rappaport (2003a).

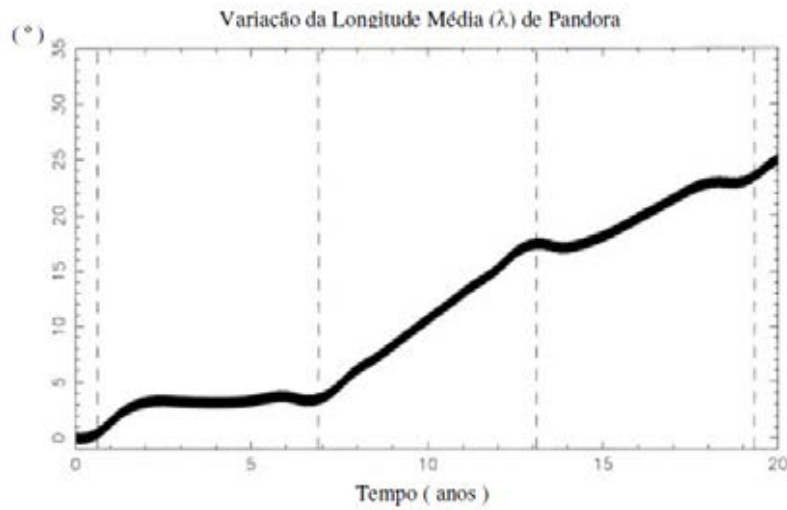


Figura 2.3: Longitude de Pandora, a partir de integrações numéricas, em função do tempo. Uma constante baseada no movimento médio inicial é subtraída da longitude. As linhas pontilhadas indicam os instantes de antialinhamento dos periapses. Retirado de Goldreich & Rappaport (2003a).

É possível observar as mudanças nas longitudes dos satélites durante os momentos de anti-alinhamento de suas órbitas, quando os satélites estão mais próximos e a interação entre eles é maior. Isso ocorre em intervalos de aproximadamente 6,2 anos.

Renner & Sicardy (2003) realizaram simulações numéricas para Prometeu e Pandora, levando em consideração os efeitos dos grandes satélites de Saturno. Eles identificaram quatro sobreposições de ressonância do tipo 121:118 de movimento médio como sendo uma possível fonte de caos do sistema, em seguida, passaram a estudar os termos de longo período do sistema.

Mais tarde em Goldreich & Rappaport (2003b), doravante denominado GR03b, os autores também propõem que o caos existente no sistema é devido à interações relacionadas com uma ressonância 121:118 de movimento médio. Essa ressonância possui quatro argumentos envolvendo as variáveis angulares e devido à precessão dos ápices dos satélites, causada pela não-esfericidade do planeta, a amplitude de libração de cada componente se sobrepõe originando o caos.

Cooper & Murray (2004) realizam um estudo sobre o movimento de Prometeu e Pandora incluindo interações com os maiores satélites de Saturno, além de Janus e Epimetheus, a fim de verificar os efeitos encontrados em Goldreich & Rappaport (2003a). Os autores encontraram defasagem diferentes quando iniciaram as simulações em datas diferentes, uma em janeiro de 1998 e outra em janeiro de 2004, mas atribuíram essa diferença à sensibilidade das condições iniciais devido ao caos no sistema. Os autores fazem uma análise sobre a contribuição de Mimas no movimento dos satélites, devido a já mencionada quase-ressonância de co-rotação 3:2 com Pandora, e encontram discrepâncias na longitude residual de Pandora, porém concluíram que Mimas não é importante para o estudo das defasagens, pois afeta somente Pandora e não altera a órbita de Prometeu.

Ainda em Cooper & Murray (2004) os autores confirmaram as características qualitativas apresentadas em Goldreich & Rappaport (2003a) sobre a correlação na variação temporal nas longitudes médias de Prometeu e Pandora. Os autores também realizaram um importante estudo sobre a sobreposição das quatro componentes da ressonância já citada 121:118 de longitude média entre Prometeu e Pandora, estimando a largura das ressonâncias em termos de excentricidade e semi-eixo maior orbital. A Figura 2.4 apresenta esse resultado, onde os quatro feixes representam cada componente da ressonância 121:118, de acordo com Goldreich & Rappaport (2003b). Nas regiões limitadas pelas sobreposição das faixas temos as zonas de caos.

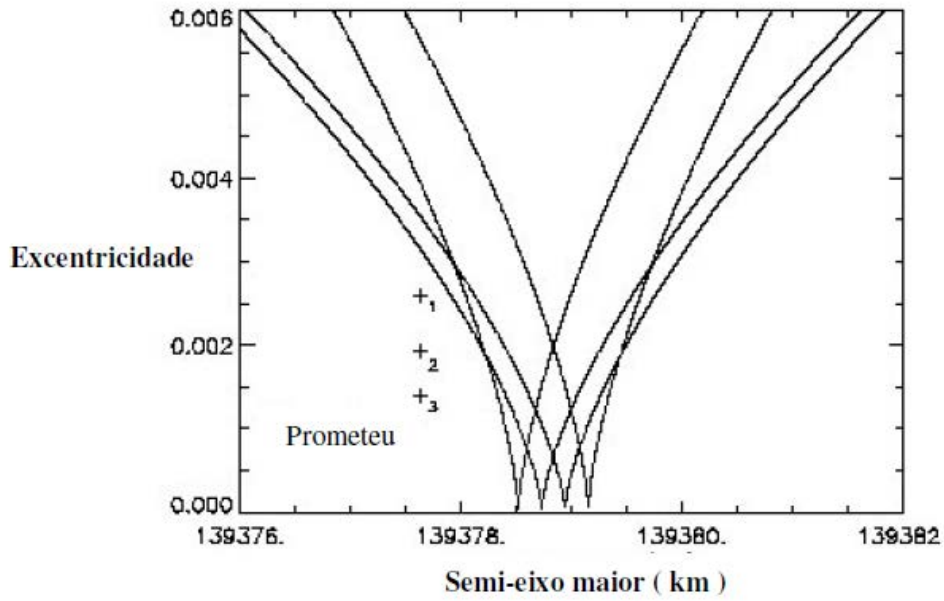


Figura 2.4: Larguras estimadas da ressonância por excentricidade 121:118. A posição aproximada de Prometeu é mostrada para três estimativas de excentricidade: (1) Evans (2001) – Voyager 2; (2) French et al. (2003); (3) Evans (2001) – Voyager 1. Retirado e adaptado de Cooper & Murray (2004).

Cruz (2004) buscou com exatidão as condições iniciais exatas utilizadas em Goldreich & Rappaport (2003a) e Goldreich & Rappaport (2003b) para encontrar a defasagem por eles apresentada. Durante o processo de tentar reproduzir os resultados desses trabalhos, Cruz (2004) constatou que os dados dos autores não reproduzem seus próprios resultados. Segundo o autor, as defasagens encontradas são um problema de variação do semi-eixo maior orbital dos satélites que, quando estão mais próximos, têm suas interações gravitacionais mais fortes, que por sua vez alteram os movimentos médios. Como citado anteriormente, a configuração em que os semi-eixos orbital dos satélites estão mais próximos, o anti-alinhamento, ocorre a cada aproximados 6,4 anos. Uma vez que as efemérides das sondas Voyager 1 e 2 são obtidas próximo à configuração de anti-alinhamento dos periapses, os elementos orbitais obtidos não representam o comportamento dos satélites na maior parte do tempo, logo as predições feitas que detectaram as defasagens foram baseadas em um instante específico.

Capítulo 3

Integrações Numéricas

Neste capítulo procuramos reproduzir os resultados apresentados em Goldreich & Rappaport (2003a) para as defasagens de Prometeu e Pandora, utilizando a ferramenta de integração numérica e método descrito pelos autores. Serão testados diferentes conjuntos de condições iniciais a fim de encontrar os que melhor reproduzem os resultados do trabalho citado. Um segundo artigo (Goldreich & Rappaport 2003b) também será utilizado para a análise.

3.1 O Mercury e a defasagem

Para as simulações numéricas realizadas neste trabalho utilizamos o pacote de integração Mercury (Chambers 1999). Escrito em Fortran 77, o pacote integra o problema de N-corpos, permitindo incluir partículas, forças externas, etc., além de modificações feitas pelo próprio usuário. Composto por três programas principais, são eles: *mercury6-2.for*, *element6.for* e *close6.for*, os arquivos *mercury.inc* e *swift.inc* que contêm parâmetros que serão alterados de acordo com o problema simulado, e os arquivos de entrada *files.in*, *big.in*, *small.in*, *param.in*, *message.in*, *element.in* e *close.in*.

O pacote Mercury realiza as integrações com os dados na forma de coordenadas cartesianas. Caso o usuário faça a entrada com elementos orbitais, dentro do Mercury a conversão para coordenadas cartesianas será feita pela terceira lei de Kepler, ou seja, não leva em conta o achatamento do corpo central. As condições iniciais que utilizamos são apresentadas nas referências em elementos orbitais geométricos, isto é, levam em consideração o achatamento. Para evitar que o Mercury faça a transformação para coordenadas cartesianas de maneira a causar incoerências nos nossos resultados, nós fazemos essa transformação utilizando uma rotina no software de manipulação algébrica Maple, baseada no trabalho de Renner & Sicardy (2006). Para os dados de saída do Mercury, que também estarão em coordenadas cartesianas, utilizamos uma rotina escrita em linguagem Fortran (comunicação pessoal Décio

Mourão) que os retorna em elementos orbitais geométricos que serão analisados.

Durante o processo surgiram dúvidas a respeito do processo utilizado pelos autores na entrada dos dados iniciais, pois os valores apresentados para os semi-eixos maiores e movimentos médios não estavam relacionados por nenhuma das duas maneiras testadas: a) pela 3ª Lei de Kepler, no caso desconsiderando os harmônicos zonais J_n ; b) utilizando a conversão de Renner e Sicardy (2006). Depois de inúmeros testes, que podem ser verificados em Santana (2012), resolveu-se que utilizaríamos os valores de semi-eixos maiores como dados de entrada e os movimentos médios seriam calculados a partir desses e então as conversões de elementos orbitais para coordenadas cartesianas seriam feitas. As coordenadas cartesianas serão os dados de entrada no Mercury (Chambers, 1999).

Nas integrações numéricas realizadas neste trabalho é considerado o achatamento de Saturno até o termo J_6 do seu potencial gravitacional. O achatamento do planeta é uma característica importante uma vez que altera consideravelmente as órbitas equatoriais do corpo, fazendo com que a longitude do pericentro precessione na direção da órbita.

As simulações apresentadas a seguir procuram reproduzir os resultados de Goldreich & Rappaport (2003a), utilizando o pacote de integração Mercury (Chambers 1999), o algoritmo Bulirsch-Stoer (Bulirsch & Stoer 1980) e levando em conta os harmônicos zonais J_2 , J_4 e J_6 de Saturno. Os dados da Tabela 1.1 foram utilizados nessa e nas próximas simulações realizadas neste trabalho.

A simulação numérica será constituída por três partes. A primeira integração numérica considera o problema de três corpos (Saturno-Prometeu-Pandora) e obtemos os valores das longitudes médias para Prometeu e Pandora, λ_{pro}^1 e λ_{pan}^1 , respectivamente, para cada instante de tempo ao longo de vinte anos.

Em seguida realizamos duas integrações considerando o problema de dois corpos (Saturno-Prometeu e Saturno-Pandora), e obtemos os valores das longitudes médias, λ_{pro}^2 e λ_{pan}^2 , em função do tempo. Como basicamente feito em GR03a, os resultados das diferenças $\lambda_{pro}^1 - \lambda_{pro}^2$ para Prometeu e $\lambda_{pan}^1 - \lambda_{pan}^2$ para Pandora, são as *defasagens*.

3.2 Condições iniciais

Definiremos então dois conjuntos de condições iniciais que serão testadas. O primeiro conjunto apresenta exatamente os mesmos dados que se encontram em GR03a e como o artigo não fornece os valores de semi-eixo maior e longitude do pericentro, tomamos como base os dados de Jacobson (comunicação pessoal apud Evans (2001)) que é a fonte indicada pelos autores, esse conjunto será denominado Dados 1 e pode ser conferido na Tabela 3.1. É importante ressaltar que consideramos que os satélites se encontram no plano equatorial de

Saturno, como em GR03a.

Dados 1		
Elemento	Prometeu	Pandora
Excentricidade ^a	$2,29 \times 10^{-3}$	$4,37 \times 10^{-3}$
Movimento Médio (rd/s) ^a	$1,1864 \times 10^{-4}$	$1,1571 \times 10^{-4}$
Longitude Média (°) ^a	189	82
Semi-eixo maior (km) ^b	139377,43	141712,61
Longitude do Pericentro (°) ^b	213	68

Tabela 3.1: Dados 1 - Elementos iniciais. Retirados de (a) GR03a e (b) Jacobson (comunicação pessoal apud Evans (2001)).

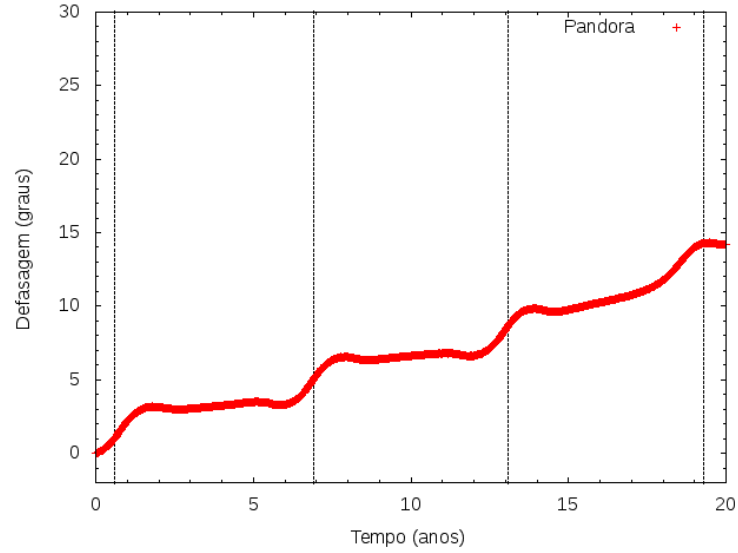
O segundo conjunto de dados, denominado Dados 2, adota os dados com a maior precisão possível, utilizando os dados de Jacobson apresentados por Evans (2001). Os valores apresentados diferem apenas por arredondamento de GR03a e são apresentados na Tabela 3.2.

Dados 2		
Elemento	Prometeu	Pandora
Excentricidade ^a	$2,29 \times 10^{-3}$	$4,37 \times 10^{-3}$
Movimento Médio (rd/s) ^b	$1,18637576 \times 10^{-4}$	$1,15706620 \times 10^{-4}$
Longitude Média (°) ^b	188,54	82,15
Semi-eixo maior (km) ^b	139377,43	141712,61
Longitude do Pericentro (°) ^b	213	68

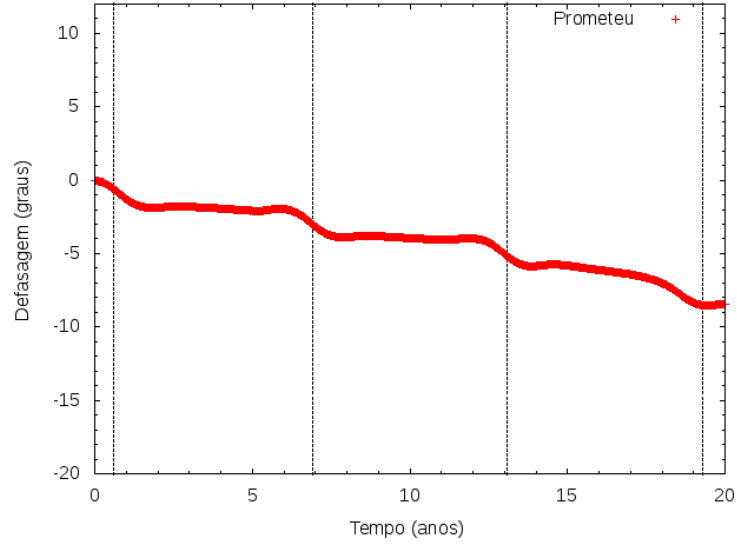
Tabela 3.2: Dados 2 - Elementos iniciais. Retirados de (a) GR03a e, (b) Jacobson (comunicação privativa apud Evans (2001)).

3.3 Resultados

Os resultados das simulações com o conjunto Dados 1 se encontram na Figura 3.1.



(a)

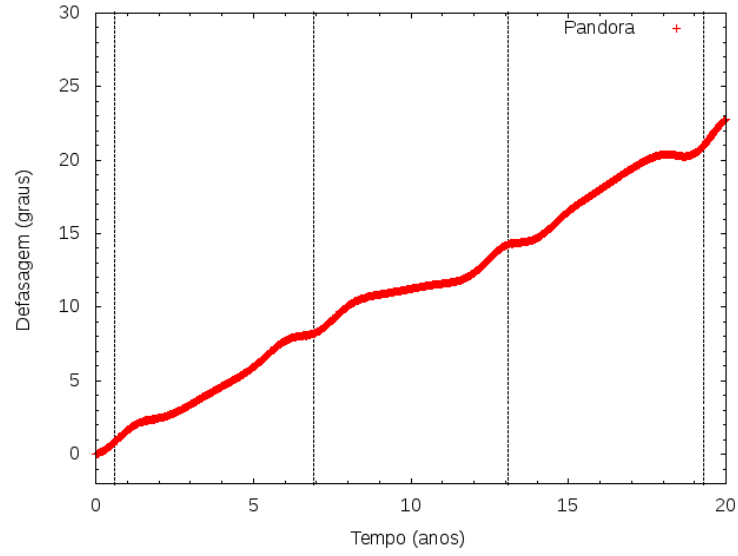


(b)

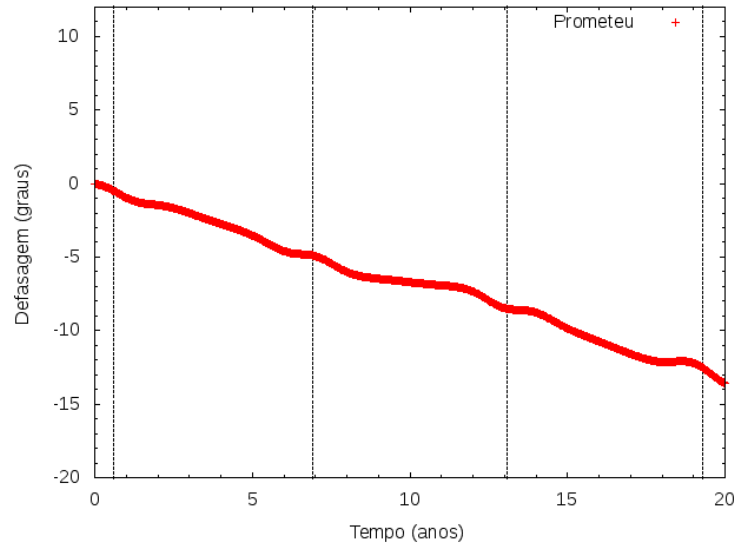
Figura 3.1: Defasagens angulares de [a] Pandora e [b] Prometeu por 20 anos considerando o conjunto Dados 1 de condições iniciais. As linhas pontilhadas representam os momentos de anti-alinhamento.

Ao analisarmos a Figura 3.1, podemos observar o comportamento “espelhado” entre as defasagens de Prometeu e Pandora, como era esperado devido à conservação de energia. Pandora possui uma variação maior em sua longitude média devido à sua menor massa, enquanto Prometeu varia um pouco menos. Nenhum dos dois satélites reproduziram as mesmas variações encontradas em GR03a, mesmo sendo calculadas a partir dos próprios dados iniciais do trabalho. As maiores semelhanças estão nos comportamentos durante os momentos de anti-alinhamento, onde as mudanças nas longitudes médias são evidentes, assim como em GR03a. Porém quantitativamente os resultados diferem claramente de GR03a: Pandora varia aproximadamente 14° e Prometeu aproximadamente 8° , enquanto em GR03a eles variam 22° e 14° , respectivamente.

Para o conjunto Dados 2 os resultados são apresentados na Figura 3.2.



(a)



(b)

Figura 3.2: Defasagens angulares de [a] Pandora e [b] Prometeu por 20 anos considerando o conjunto Dados 2 de condições iniciais. As linhas pontilhadas representam os momentos de anti-alinhamento.

É possível perceber que os resultados obtidos com o conjunto Dados 2 são as melhores aproximações dos resultados de GR03a. Os comportamentos espelhados novamente estão presentes, bem como as mudanças evidentes nos momentos de anti-alinhamento. Quantita-

tivamente os resultados são próximos aos de GR03a, sendo que Pandora varia aproximadamente 23° e Prometeu aproximadamente 13° , diferindo dos resultados de GR03a apenas 1° para cada um dos satélites.

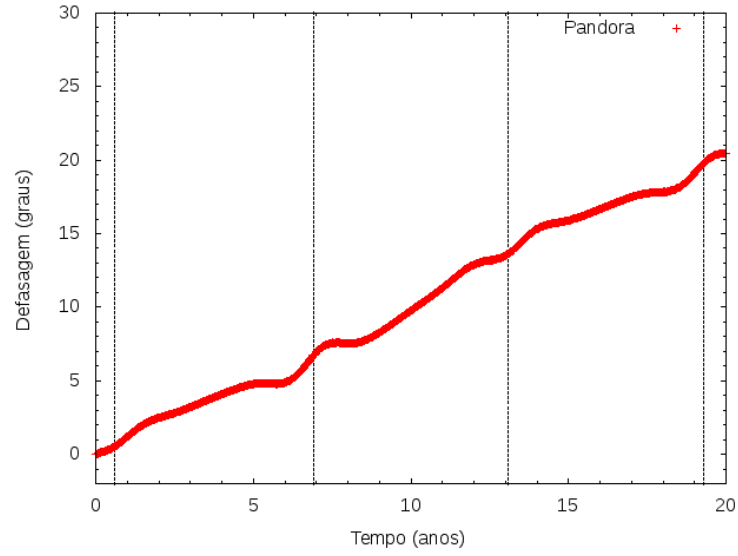
Note então que os dados apresentados em GR03a não reproduzem seus próprios resultados. Apenas se encontram resultados próximos de GR03a quando as condições iniciais são obtidos de Evans (2001).

3.4 Simulação extra

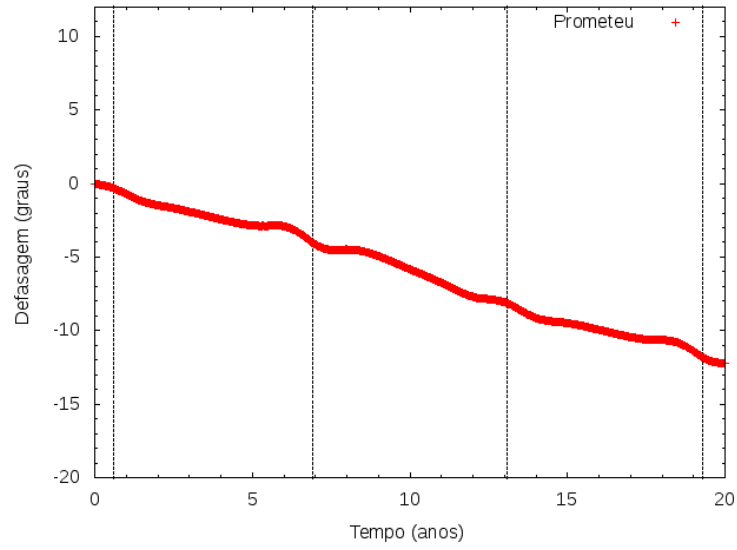
Goldreich & Rappaport (2003b) calculam novamente as defasagens para Prometeu e Pandora, reforçando sua teoria apresentada em GR03a, ao associá-la à uma ressonância de movimento médio. As condições iniciais apresentadas em GR03b possuem uma maior precisão comparados aos de GR03a. Utilizando esses novos dados, que denominamos *Dados extra* na Tabela 3.3, calculamos as defasagens de Prometeu e Pandora apresentadas na Figura 3.3.

Dados extra		
	Prometeu	Pandora
Excentricidade	$2,29 \times 10^{-3}$	$4,37 \times 10^{-3}$
Movimento Médio ($^\circ/\text{s}$)	$6,797331 \times 10^{-3}$	$6,629506 \times 10^{-3}$
Longitude Média ($^\circ$)	188,53815	82,14727
Semi-eixo maior (km) ^b	139377,43	141712,61
Longitude do Pericentro ($^\circ$) ^b	212,85385	68,22910

Tabela 3.3: Dados extra - Dados extraídos de Goldreich & Rappaport (2003b), exceto semi-eixo maior, retirado de Jacobson (comunicação pessoal, apud Evans (2001)).



(a)



(b)

Figura 3.3: Defasagens angulares de [a] Pandora e [b] Prometeu por 20 anos considerando o conjunto Dados extra de condições iniciais. As linhas pontilhadas representam os momentos de anti-alinhamento.

Os resultados obtidos com os dados extra são próximos aos de GR03b. As curvas das defasagens reproduzem qualitativamente bem os resultados procurados, apresentando diferenças quantitativas nos valores finais das defasagens de Prometeu, 2° , e de Pandora, 3° .

Para facilitar a visualização dos resultados obtidos nesse estudo, as Figuras 3.4 e 3.5 comparam os resultados das simulações apresentadas neste trabalho com os resultados de GR03a.

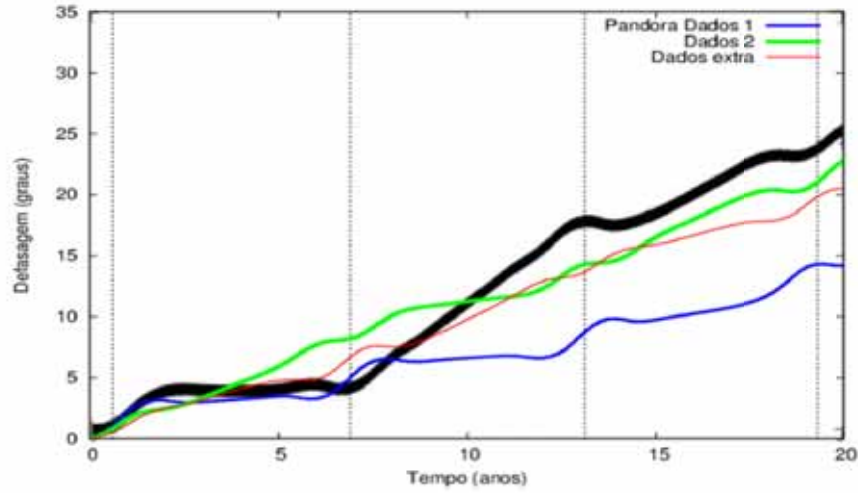


Figura 3.4: Defasagem apresentada por Pandora. GR03a, Dados 1, Dados 2 e Dados extra. As linhas tracejadas representam os momentos de anti-alinhamento dos periapses.

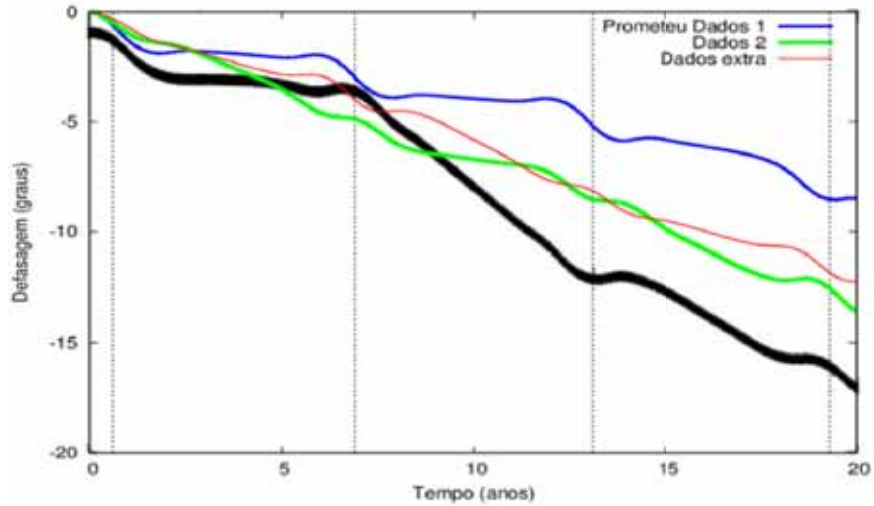


Figura 3.5: Defasagem apresentada por Prometeu. GR03a, Dados 1, Dados 2 e Dados extra. As linhas tracejadas representam os momentos de anti-alinhamento dos periapses.

Como podemos observar, nenhum dos conjuntos de condições iniciais ou indicados pelos autores em Goldreich & Rappaport (2003a,b) reproduzem seus próprios resultados.

Capítulo 4

Modelo Teórico

Nessa etapa do trabalho nos concentramos em estudar e reproduzir os resultados de Goldreich & Rappaport (2003b), que apontam a ressonância 121:118 como a origem do caos no sistema Prometeu-Pandora e, em consequência, das defasagens observadas. Assim como em GR03b, o estudo foi feito de maneira analítica utilizando o formalismo das equações de Lagrange e o desenvolvimento da função perturbadora.

4.1 Problema de três corpos e Função Perturbadora

No problema de dois corpos, solucionado primeiramente por Newton no século XVII, se estuda o comportamento de dois corpos de massas pontuais que se movimentam sob o efeito gravitacional mútuo. Esse problema possui solução analítica.

Entretanto o problema de três corpos, que descreve o comportamento de três corpos que se movimentam sob o efeito gravitacional, não possui solução analítica como foi demonstrado por Poincaré em 1887. Porém pode-se fazer determinadas restrições ao modelo a ser estudado de maneira a diminuir a complexidade do problema, permitindo com que ele seja abordado de maneira analítica.

No caso do problema de três corpos estudado nesse trabalho (Saturno, Prometeu e Pandora) pode-se descrever o movimento de cada um dos satélites pela influência devido a Saturno somada com uma perturbação provocada pelo outro satélite, uma vez que a massa do planeta é muito maior que a massa de qualquer um dos dois satélites. Por exemplo, somadas as equações que descrevem o problema de dois corpos Saturno-Prometeu adiciona-se uma perturbação devido a Pandora. De maneira similar, repetimos o processo para Pandora. Assim a perturbação relativa ao novo corpo é introduzida no sistema em forma de acelerações obtidas a partir de um gradiente de um potencial perturbador, chamado *função perturbadora*.

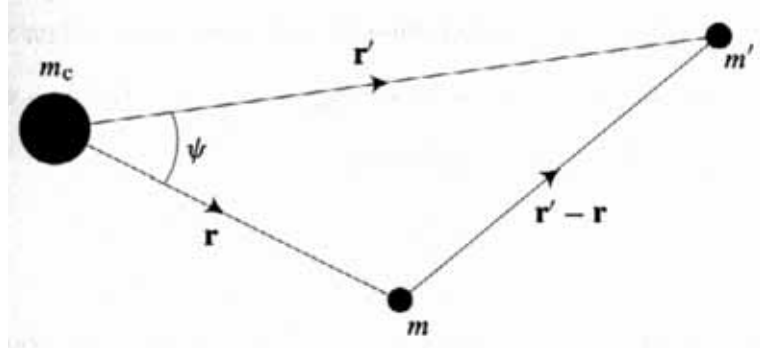


Figura 4.1: Esquema do Problema de 3 corpos, onde $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ são os vetores posição dos corpos com relação ao corpo central e m e m' suas massas. Os símbolos com linha (') são referentes ao corpo externo enquanto sem linha ao corpo interno. A massa do corpo central é denotada por m_c e ψ é o ângulo entre os vetores posição. (Extraída de Murray & Dermott (1999))

No estudo da função perturbadora podemos manipulá-la matematicamente expandindo seus termos utilizando polinômios de Legendre, isolando determinados termos apropriados e negligenciando outros de acordo com as restrições possíveis para cada estudo, organizando-a de modo a facilitar seu uso. Podemos escrever a função perturbadora para o caso plano da forma como se segue:

$$\mathcal{R} = \mu' \sum S(a, a', e, e') \cos \varphi. \quad (4.1)$$

Em que $\mu' = Gm'$, sendo G a constante gravitacional, φ é uma combinação linear de ângulos que deve ser da forma

$$\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \varpi' + j_4 \varpi, \quad (4.2)$$

onde λ é a longitude média, ϖ a longitude do pericentro e j_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) são inteiros e obedecem a relação

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0, \quad (4.3)$$

conhecida como Critério de d'Alembert. A função S é função dos elementos métricos dos corpos, a e e . A Equação (4.4) é a função perturbadora $\mathcal{R}$ para o corpo interno m devido

à perturbação do corpo externo m' . A Equação (4.5) é a função perturbadora $\mathcal{R}'$ para o corpo externo m' devido à perturbação do corpo interno m . $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ podem ser divididas nas chamadas parte direta e parte indireta: a parte direta refere-se a perturbação exercida por um satélite perturbador no satélite perturbado, nas Equações (4.4) e (4.5) o primeiro termo representa a parte direta para cada um dos satélites. A parte indireta se refere à perturbação que o corpo central através do satélite perturbador exerce no satélite perturbado, nas Equações (4.4) e (4.5) estão representados pelos segundos termos de cada uma.

$$\mathcal{R} = \frac{Gm'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - Gm' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{R}' = \frac{Gm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - Gm \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3}, \quad (4.5)$$

Além dessa divisão, seus termos podem ser classificados em três tipos: seculares, ressonantes e de curto período.

Da maneira como é organizada, a função perturbadora nos permite usar apenas o termo relevante para cada estudo ou problema.

Ainda que seja uma simplificação do problema físico real, a teoria da função perturbadora funciona muito bem no estudo de muitos problemas de dinâmica orbital. Um entendimento da função perturbadora nos leva a um entendimento da dinâmica das ressonâncias e movimentos de longo período do sistema solar.

Veremos a seguir como escrever a função perturbadora para o sistema Saturno-Prometeu-Pandora segundo Goldreich & Rappaport (2003b).

Primeiramente escrevemos a função perturbadora para Prometeu, $\mathcal{R}$, devido à ação de Pandora, da forma

$$\mathcal{R} = \frac{Gm'}{a'}(R_D + \alpha R_E), \quad (4.6)$$

e a função perturbadora de Pandora devido a ação de Prometeu

$$\mathcal{R}' = \frac{Gm'}{a'}(R_D + \alpha^{-2} R_I), \quad (4.7)$$

onde $\alpha = a/a'$.

As partes direta, indireta exterior e interior (R_D , R_E e R_I), respectivamente, são dadas por:

$$\begin{aligned}
R_D &= \frac{a'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \\
R_E &= - \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{aa'}, \\
R_I &= - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{aa'}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Faremos uso apenas do termo direto de $\mathcal{R}$ pois somente ele irá contribuir, em expansões de baixa ordem, para as ressonâncias do tipo $j = 121 : 121 - N$, onde N é um inteiro menor que 121 e define a ordem da ressonância. Sendo assim, o termo direto da expansão literal em baixa ordem da função perturbadora associada à ressonância de $N = 3$ terá a forma:

$$\begin{aligned}
R_D &= e^3 f_{82} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 3\varpi] \\
&\quad + e^2 e' f_{83} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 2\varpi - \varpi'] \\
&\quad + e e'^2 f_{84} \cos[121\lambda' - 118\lambda - \varpi - 2\varpi'] \\
&\quad + e'^3 f_{85} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 3\varpi']
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Os valores f_{82} , f_{83} , f_{84} e f_{85} são encontrados no Apêndice B de Murray & Dermott (1999) e apresentados nas Equações 4.10 - 4.13.

$$\begin{aligned}
f_{82} &= \frac{1}{48} \left\{ (-26j + 30j^2 - 8j^3) b_{1/2}^{(j)}(\alpha) \right. \\
&\quad + (-9 + 27j - 12j^2) \alpha \frac{db_{1/2}^{(j)}(\alpha)}{d\alpha} \\
&\quad + (6 - 6j) \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(j)}(\alpha)}{d\alpha^2} \\
&\quad \left. - \alpha^3 \frac{d^3 b_{1/2}^{(j)}(\alpha)}{d\alpha^3} \right\},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
f_{83} = \frac{1}{16} \left\{ & (-9 + 31j - 30j^2 + 8j^3) b_{1/2}^{(j-1)}(\alpha) \right. \\
& + (9 - 25j + 12j^2) \alpha \frac{db_{1/2}^{(j-1)}(\alpha)}{d\alpha} \\
& + (-5 + 6j) \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(j-1)}(\alpha)}{d\alpha^2} \\
& \left. + \alpha^3 \frac{d^3 b_{1/2}^{(j-1)}(\alpha)}{d\alpha^3} \right\}, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{84} = \frac{1}{16} \left\{ & (8 - 32j + 30j^2 - 8j^3) b_{1/2}^{(j-2)}(\alpha) \right. \\
& + (-8 + 23j - 12j^2) \alpha \frac{db_{1/2}^{(j-2)}(\alpha)}{d\alpha} \\
& + (4 - 6j) \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(j-2)}(\alpha)}{d\alpha^2} \\
& \left. - \alpha^3 \frac{d^3 b_{1/2}^{(j-2)}(\alpha)}{d\alpha^3} \right\}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{85} = \frac{1}{48} \left\{ & (-6 + 29j - 30j^2 + 8j^3) b_{1/2}^{(j-3)}(\alpha) \right. \\
& + (6 - 21j + 12j^2) \alpha \frac{db_{1/2}^{(j-3)}(\alpha)}{d\alpha} \\
& + (-3 + 6j) \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(j-3)}(\alpha)}{d\alpha^2} \\
& \left. + \alpha^3 \frac{d^3 b_{1/2}^{(j-3)}(\alpha)}{d\alpha^3} \right\}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Os coeficientes de Laplace (b_s^j) foram calculados a partir da Equação A.2, em uma rotina escrita em linguagem C (Comunicação pessoal Nilton Araújo) que também calcula suas derivadas, baseada em um algoritmo obtido em Süli (2004).

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = A_j \alpha^j \sum_{i=0}^{\infty} B_i \alpha^{2i}, \quad (4.14)$$

onde A_j e B_i são coeficientes dependentes dos valores de s e j . Suas fórmulas completas estão apresentadas no Apêndice A.

Com respeito as derivadas, podemos escrever

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = A_j \alpha^{j-n} \sum_{i=0}^{\infty} F_i^{(j,n)} B_i \alpha^{2i}, \quad (4.15)$$

onde F_i é um produtório e sua fórmula também pode ser verificada no Apêndice A, que contém um estudo a cerca da convergência dos coeficientes de Laplace e suas derivadas.

Uma vez escrita a função perturbadora de Prometeu devido à ação de Pandora e de Pandora devido à ação de Prometeu, temos em mãos os potenciais perturbadores em função dos elementos orbitais. Ainda se faz necessário quantificar a variação orbital resultante de cada corpo perturbado. Para isso utilizam-se as equações planetárias de Lagrange que descrevem a variação dos elementos orbitais devido a uma perturbação derivada de um potencial. As Equações 4.16-4.20 são as chamadas equações planetárias de Lagrange (Murray & Dermott 1999):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}, \quad (4.16)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}, \quad (4.17)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \quad (4.18)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \quad (4.19)$$

$$(4.20)$$

onde ϵ é a longitude média da época.

Como queremos reproduzir os resultados de GR03b, usamos uma versão restrita das equações planetárias de Lagrange para o caso plano (Equações 4.21-4.24) utilizadas pelos autores no trabalho citado. Esse conjunto simplificado de equações é adequado para órbitas de baixas excentricidades e um planeta com achatamento moderado.

$$\frac{d\lambda}{dt} = n_0, \quad (4.21)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0 a} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}, \quad (4.22)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = n_0 - \kappa, \quad (4.23)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{n_0 a^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \quad (4.24)$$

onde

$$n_0^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 - \frac{15}{8} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_4 + \frac{35}{16} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_6 - \dots \right], \quad (4.25)$$

$$\kappa^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 J_2 + \frac{45}{8} \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 J_4 - \frac{175}{16} \left(\frac{R_p}{a} \right)^6 J_6 + \dots \right]. \quad (4.26)$$

Para simular a evolução do sistema a partir das equações de Lagrange escrevemos uma rotina de integração numérica no software Maple 13. O Maple é um sistema algébrico computacional constituído de um ambiente que proporciona a computação de equações matemáticas e permite evoluí-las no tempo, dentre outros recursos matemáticos.

Dois conjuntos de equações foram testados. Assim como em GR03b, nós simulamos a evolução do sistema e calculamos as defasagens encontradas para o conjunto completo das equações, isto é, da Equação 4.21 a Equação 4.24, batizado de *caso completo*. E um segundo conjunto com somente as duas primeiras equações 4.21 e 4.22, batizado *caso simplificado*. Note então que no caso simplificado as excentricidades são constantes ($\dot{e} = 0$) e as variações das longitudes do pericentro dos satélites são constantes, de forma que podemos escrever

$$\varpi = \varpi_0 + \dot{\varpi}t, \quad (4.27)$$

onde ϖ_0 é a longitude inicial do pericentro.

Os valores utilizados para as massas, excentricidades e semi-eixos maiores dos satélites encontram-se na Tabela 4.1 enquanto os valores iniciais para as longitudes de pericentro, longitudes médias e movimentos médios encontram-se na Tabela 4.2. Os valores referentes à Saturno, juntamente com os valores de seus primeiros coeficientes gravitacionais zonais, foram utilizados de acordo com a Tabela 1.1 apresentada no Capítulo 1. Foi considerado

$G = 0.667384^{-10} m^3/kg \cdot s^2$ (Murray & Dermott 1999).

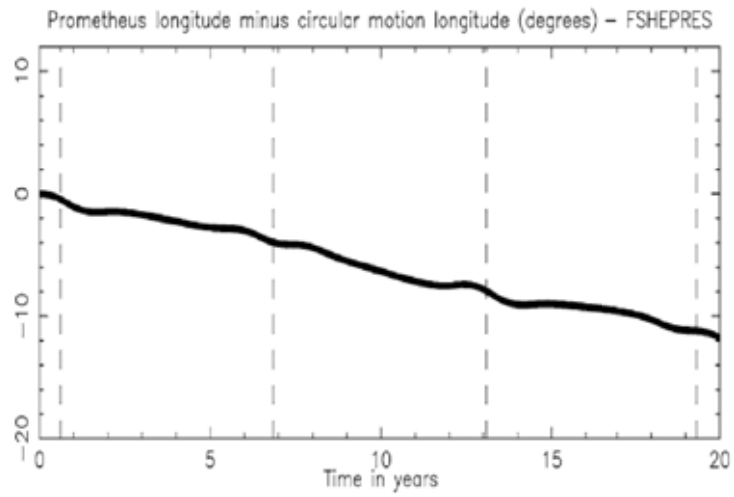
Satélite	m/M	Excentricidades	Semi-eixos maiores*
Prometeu	$5.80 \cdot 10^{-10}$	$2.29 \cdot 10^{-3}$	139377.43×10^3
Pandora	$3.43 \cdot 10^{-10}$	$4.37 \cdot 10^{-3}$	141712.61×10^3

Tabela 4.1: Massas, excentricidades e semi-eixos maiores utilizados na simulação do modelo teórico. Retirados de GR03b. Goldreich & Rappaport (2003a)*

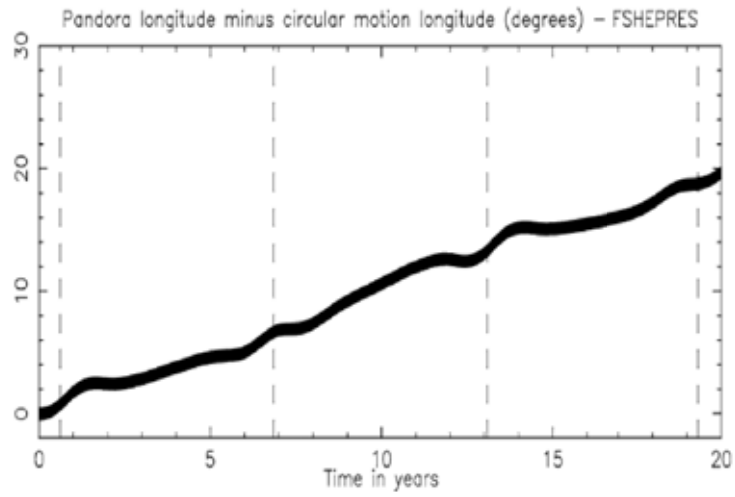
Satélite	Longitude do Pericentro ($^{\circ}$)	Longitude média ($^{\circ}$)	Movimento médio ($^{\circ} s^{-1}$)
Prometeu	212.85385	188.53815	$6.7973331 \cdot 10^{-3}$
Pandora	68.22910	82.14727	$6.629506 \cdot 10^{-3}$

Tabela 4.2: Longitudes do Pericentro, longitudes médias e movimentos médios iniciais utilizados na simulação do modelo teórico. Retirados de GR03b.

Em GR03b a simulação com o conjunto completo de equações é batizada de FSHEPRES, e as defasagens para Prometeu e Pandora encontradas pelos autores para esse conjunto são apresentadas na Figura 4.2.



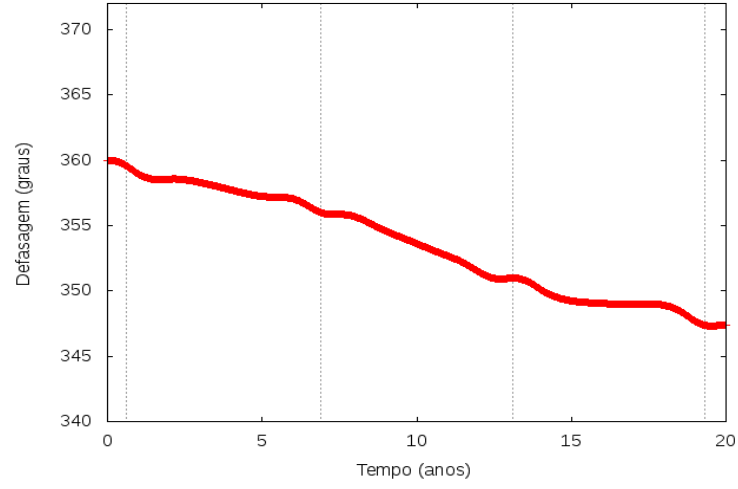
(a)



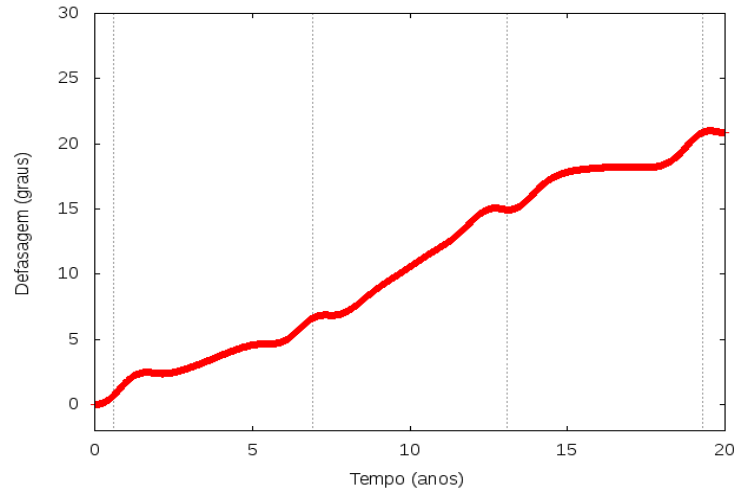
(b)

Figura 4.2: Defasagens angulares de [a] Prometeu e [b] Pandora por 20 anos. FSHEPRES. As linhas pontilhadas representam os momentos de anti-alinhamento. Retirado e adaptado de Goldreich & Rappaport (2003b).

Os resultados obtidos a partir do caso completo (equivalente ao FSHEPRES de GR03b), encontram-se na Figura 4.3.



(a)



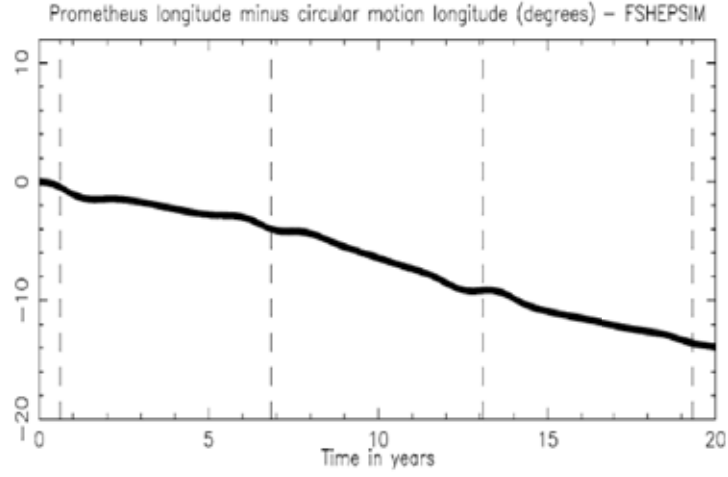
(b)

Figura 4.3: Defasagens angulares de [a] Prometeu e [b] Pandora por 20 anos para o caso completo (Equações 4.21-4.24). As linhas pontilhadas representam os momentos de anti-alinhamento.

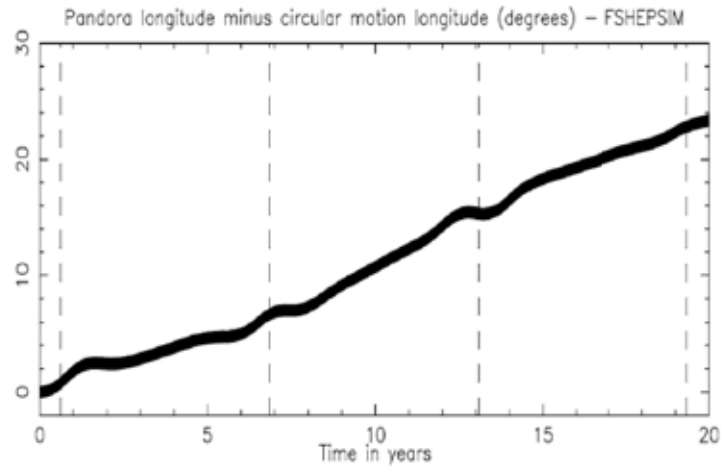
Conforme podemos observar na Figura 4.3 os gráficos obtidos no caso completo são boas reproduções dos apresentados em GR03b, diferindo em apenas 1° para Prometeu e também 1° para Pandora. Assim, testamos nossa rotina e passamos para o próximo teste, a reprodução do caso simplificado.

Em GR03b, o caso que leva em consideração apenas duas equações (Equação (4.21) e

Equação (4.22)) é batizado por FSHEPSIM e reproduz a defasagem para Prometeu e para Pandora apresentada na Figura 4.4.



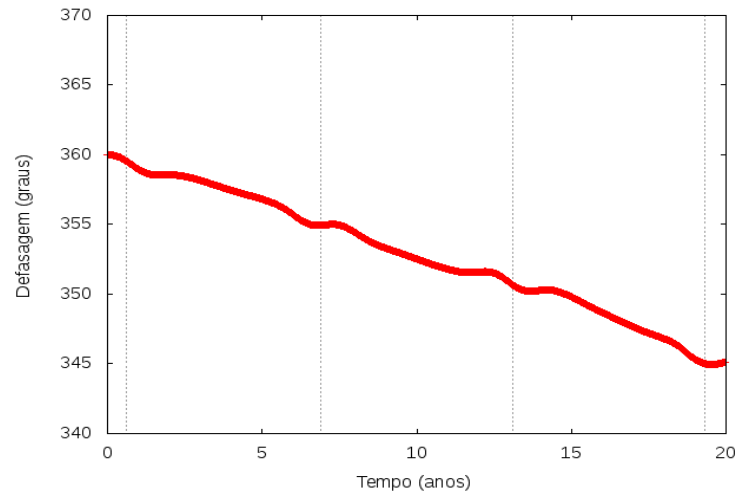
(a)



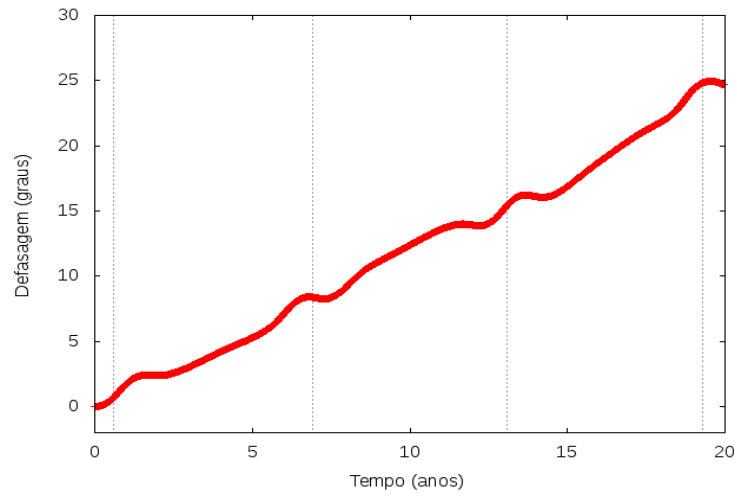
(b)

Figura 4.4: Defasagens angulares de [a] Prometeu e [b] Pandora por 20 anos. FSHEPSIM. As linhas pontilhadas representam os momentos de anti-alinhamento. (Retirado e adaptado de Goldreich & Rappaport (2003b))

Nossos resultados obtidos a partir do caso simplificado (equivalente ao FSHIPSIM) estão exibidos na Figura 4.5 para Prometeu e para Pandora.



(a) a



(b) b

Figura 4.5: Defasagens angulares de [a] Prometeu e [b] Pandora por 20 anos para o caso simplificado (Equações 4.21-4.22). As linhas pontilhadas representam os momentos de anti-alinhamento.

Os resultados novamente apresentam uma boa reprodução dos resultados de GR03b. As defasagens calculadas para Prometeu e Pandora diferem em apenas 1° cada.

Analisamos também as evoluções temporais dos ângulos ressonantes que compõem a ressonância 121:118 (Equação 4.9). O resultado se encontra na Figura 4.6.

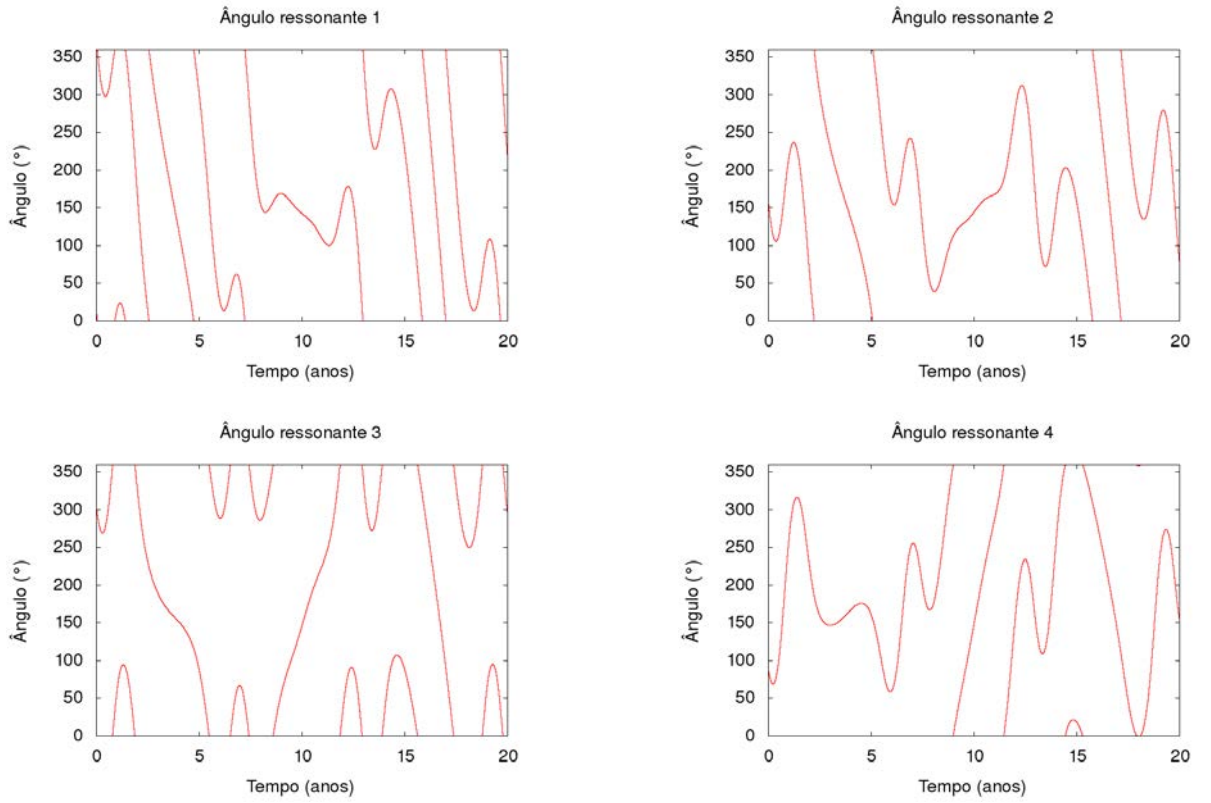


Figura 4.6: Variação dos ângulos ressonantes para 121:118 durante 20 anos.

Podemos verificar que todos os quatro ângulos da Figura (4.6) libram mais de uma vez durante o período de vinte anos, porém de maneira irregular e descontínua. Esse resultado, ainda que não apresente uma libração clara, indica que a hipótese de GR03b que relaciona a ressonância 121:118 com as defasagens observadas nas posições angulares dos satélites estaria correta. Voltaremos a essa discussão no Capítulo 6, onde testaremos outras ressonâncias da região estudada.

Capítulo 5

Análise dos semi-eixos maiores

Cruz (2004) apresenta uma proposta diferente para analisar as defasagens encontradas para Prometeu e Pandora. A partir do estudo da evolução dos semi-eixos maiores orbitais, o autor propõe que as defasagens podem ser apenas fruto de um infortúnio momento que foram obtidos os dados iniciais. Explanamos esse estudo e o testamos, a partir das simulações feitas no capítulo 3, a fim de descobrir quais características se conservam, ou não, ao serem comparadas com os resultados obtidos por Cruz (2004).

5.1 Análise alternativa

O trabalho de Cruz (2004) apresenta uma análise alternativa para as defasagens observadas. O autor levanta a hipótese de que as variações que surgem nos encontros próximos, acentuados pelo anti-alinhamento que seriam a principal causa das defasagens, enquanto o caos no movimento médio contribuiria de maneira não significativa para tal efeito.

Cruz (2004) inicia sua análise com a terceira lei de Kepler

$$\mu = n_0^2 a^3, \tag{5.1}$$

onde n_0 é o movimento médio perturbado pelo achatamento do corpo central (equação 4.26).

Essa equação nos permite perceber a relação entre o semi-eixo maior a , e o movimento médio n_0 , quando um tem seu valor aumentado o outro diminui, uma vez que μ é constante. Cruz (2004) propõe analisarmos a evolução dos semi-eixos maiores dos satélites ao invés das longitudes como outros autores (GR03a, b) haviam feito até o momento.

Cruz (2004) questiona que as condições iniciais para os dois satélites são de um momento próximo ao ponto de anti-alinhamento dos periapses. Segundo o autor, o problema está em

calcular o movimento médio (n_0) a partir de um valor de semi-eixo maior diferente do que se mantém o satélite a maior parte do tempo, de maneira que o valor de n_0 não representa o comportamento real, o que implica no cálculo incorreto da defasagem. O esquema da figura 5.1 ilustra a proposta do autor para o satélite Prometeu, indicando as variações dos semi-eixos maiores no momento de grande perturbação (GP).

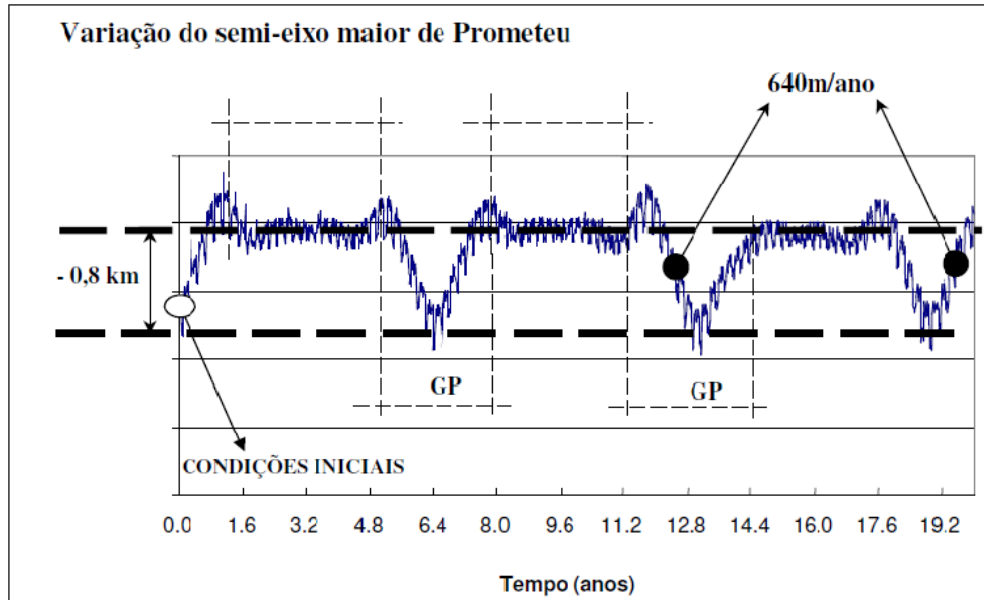


Figura 5.1: Os trechos representados por “GP” representam os períodos de grande perturbação. As setas com elipses escuras nas pontas indicam os trechos em que o semi-eixo maior varia a uma taxa de 640m/ano e a seta com elipse clara indica as condições iniciais. As linhas tracejadas horizontais grossas mostram a variação média máxima do semi-eixo maior de Prometeu. Extraído e adaptado de Cruz (2004)

Cruz (2004) calcula as defasagens com os dados iniciais de outro instante, distante do momento de anti-alinhamento. Os resultados mostram defasagens bem menores que as encontradas por GR03a, Pandora, de 20° passa a apresentar 4° e Prometeu tem valor de defasagem diminuído de 12° para 2,5°.

Para estudar a hipótese levantada por Cruz (2004), estenderemos o estudo das simulações numéricas feitas no capítulo 3 para alguns testes de semi-eixos maiores a fim de comparar com os resultados do autor.

Calculamos as variações dos semi-eixos maiores para Prometeu e Pandora utilizando o conjunto Dados 1 (tabela 3.1) e Dados 2 (tabela 3.2), utilizados no capítulo 3 para simular as defasagens por meio de integração numérica. Os resultados são apresentados nas figuras 5.2 e 5.3 para o primeiro conjunto de dados e nas figuras 5.4 e 5.5 para o segundo.

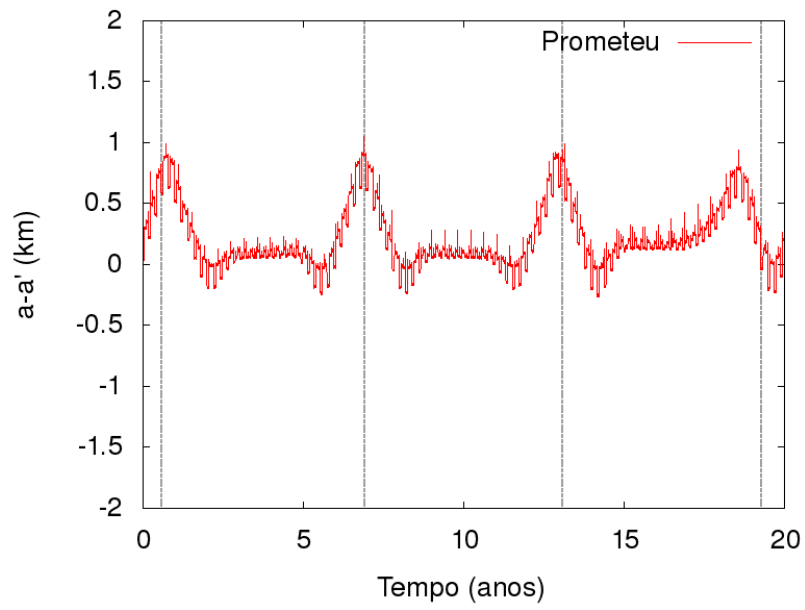


Figura 5.2: Semi-eixo maior de Prometeu em função do tempo utilizando o conjunto Dados 1. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 139377,43$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior.

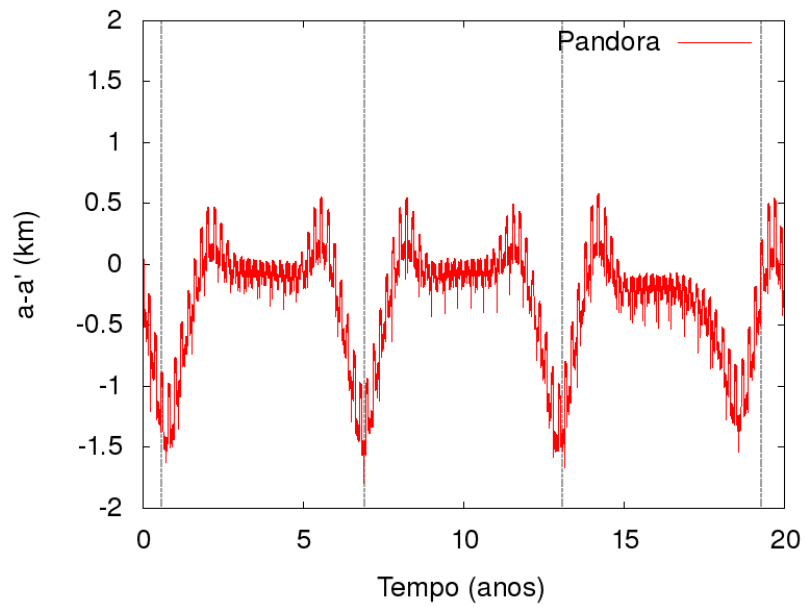


Figura 5.3: Semi-eixo maior de Pandora em função do tempo utilizando o conjunto Dados 1. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 141712,61$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior.

Podemos identificar que a época inicial das simulações é de um momento bastante particular no comportamento das órbitas de Prometeu e Pandora. Corroboramos com Cruz (2004) que para os dois satélites, as condições iniciais partem de uma época consideravelmente próxima ao ponto de anti-alinhamento, que é o momento de maior perturbação. Nesse momento, os semi-eixos maiores chegam a variar aproximadamente 1 km para Prometeu e 1.5 km para Pandora. Longe dos anti-alinhamentos, observamos que as evoluções dos semi-eixos maiores são bem comportadas e não apresentam variações significativas.

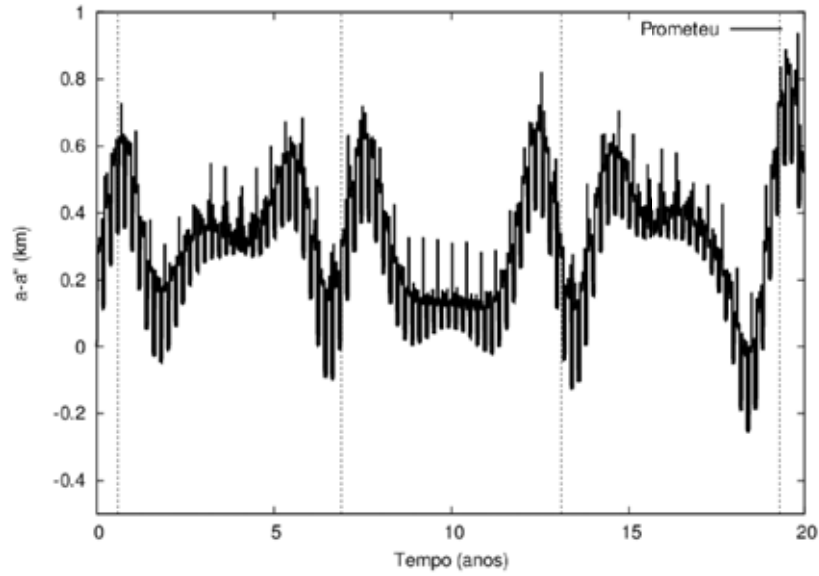


Figura 5.4: Semi-eixo maior de Prometeu em função do tempo utilizando o conjunto Dados 2. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 139377,43$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior.

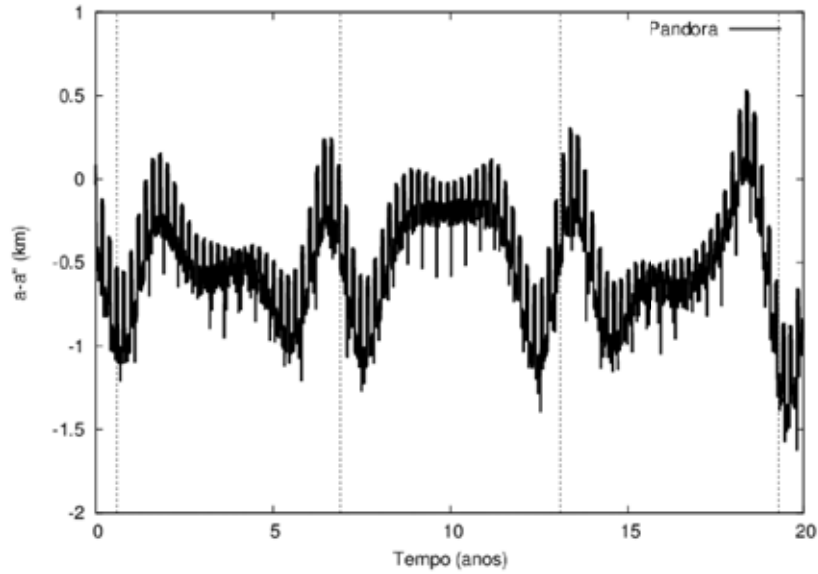


Figura 5.5: Semi-eixo maior de Pandora em função do tempo utilizando o conjunto Dados 2. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 141712,61$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior.

Para o segundo conjunto de dados a visualização dos momentos de maior perturbação e menor perturbação não se apresenta claramente. Podemos perceber que no momento inicial da simulação os semi-eixos maiores se encontram em um dos picos onde a sua variação é máxima. Dessa maneira, se as observações das Voyager tivessem sido realizadas em um período relativamente estável, distante dos anti-alinhamentos, as defasagens observadas após vinte anos seriam bem menores. Assim, nos capítulos a seguir voltaremos a analisar, paralelamente às defasagens, as evoluções temporais dos semi-eixos maiores.

Capítulo 6

Testando ressonâncias

Procurando explorar a região próxima aos semi-eixos maiores de Prometeu e Pandora, iremos estudar as possíveis ressonâncias ali localizadas. Primeiramente estudaremos a ressonância de movimento médio 121:118 com objetivo de identificar quais de seus termos são mais importantes, se esses existirem. Em seguida estudaremos outras ressonâncias de mesma ordem e algumas ressonâncias de outras ordens, procurando perceber padrões que ajudem na melhor compreensão da região estudada. Utilizamos a abordagem analítica apresentada no capítulo anterior para produzir os resultados a seguir apresentados.

6.1 Ressonância 121:118

Iniciamos nosso estudo pela ressonância 121:118. Como já citado anteriormente, essa ressonância é composta por quatro termos que se sobrepõem, e segundo alguns autores (Goldreich & Rappaport 2003a,b, French et al. 2003), originam o caos presente no sistema. Estudamos então a evolução temporal das defasagens, dos semi-eixos maiores e ângulos ressonantes para cada termo que compõe a ressonância 121:118. Em seguida, para cada par de termos e, por último, para cada trio de termos. Essas combinações acontecem diretamente na função perturbadora apresentada no capítulo 4, a R_d que antes era da forma

$$\begin{aligned} R_D = & e^3 f_{82} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 3\varpi] \\ & + e^2 e' f_{83} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 2\varpi - \varpi'] \\ & + e e'^2 f_{84} \cos[121\lambda' - 118\lambda - \varpi - 2\varpi'] \\ & + e'^3 f_{85} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 3\varpi'], \end{aligned} \tag{6.1}$$

terá a forma, por exemplo, para o teste do termo 1

$$R_D = e^3 f_{82} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 3\varpi]. \quad (6.2)$$

Assim, o termo 1 será

$$e^3 f_{82} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 3\varpi], \quad (6.3)$$

o termo 2

$$e^2 e' f_{83} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 2\varpi - \varpi'], \quad (6.4)$$

o termo 3

$$e e'^2 f_{84} \cos[121\lambda' - 118\lambda - \varpi - 2\varpi'], \quad (6.5)$$

e o termo 4 será

$$e'^3 f_{85} \cos[121\lambda' - 118\lambda - 3\varpi']. \quad (6.6)$$

Dessa maneira estudamos as defasagens e evoluções temporais dos semi-eixos maiores para as R_D compostas com apenas um dos outros três termos e de maneira similar será feito para as combinações entre dois e ainda três termos. Os resultados desses testes se encontram nas figuras 6.1 e 6.2 para Pandora e Prometeu, respectivamente.

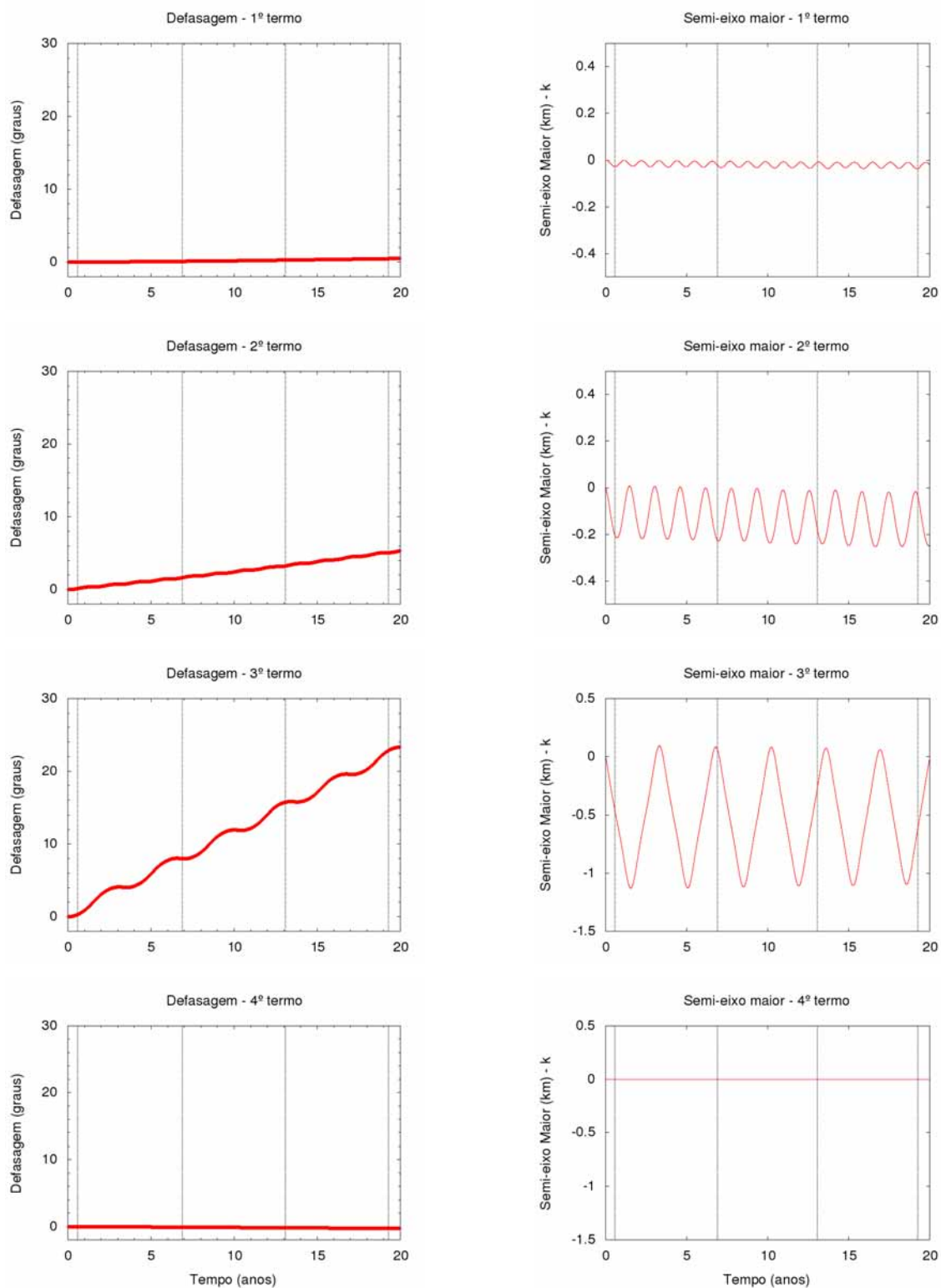


Figura 6.1: Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora, alternando termos na função perturbadora durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 141712,61$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior. As linhas pontilhadas indicam os momentos de anti-alinhamento.

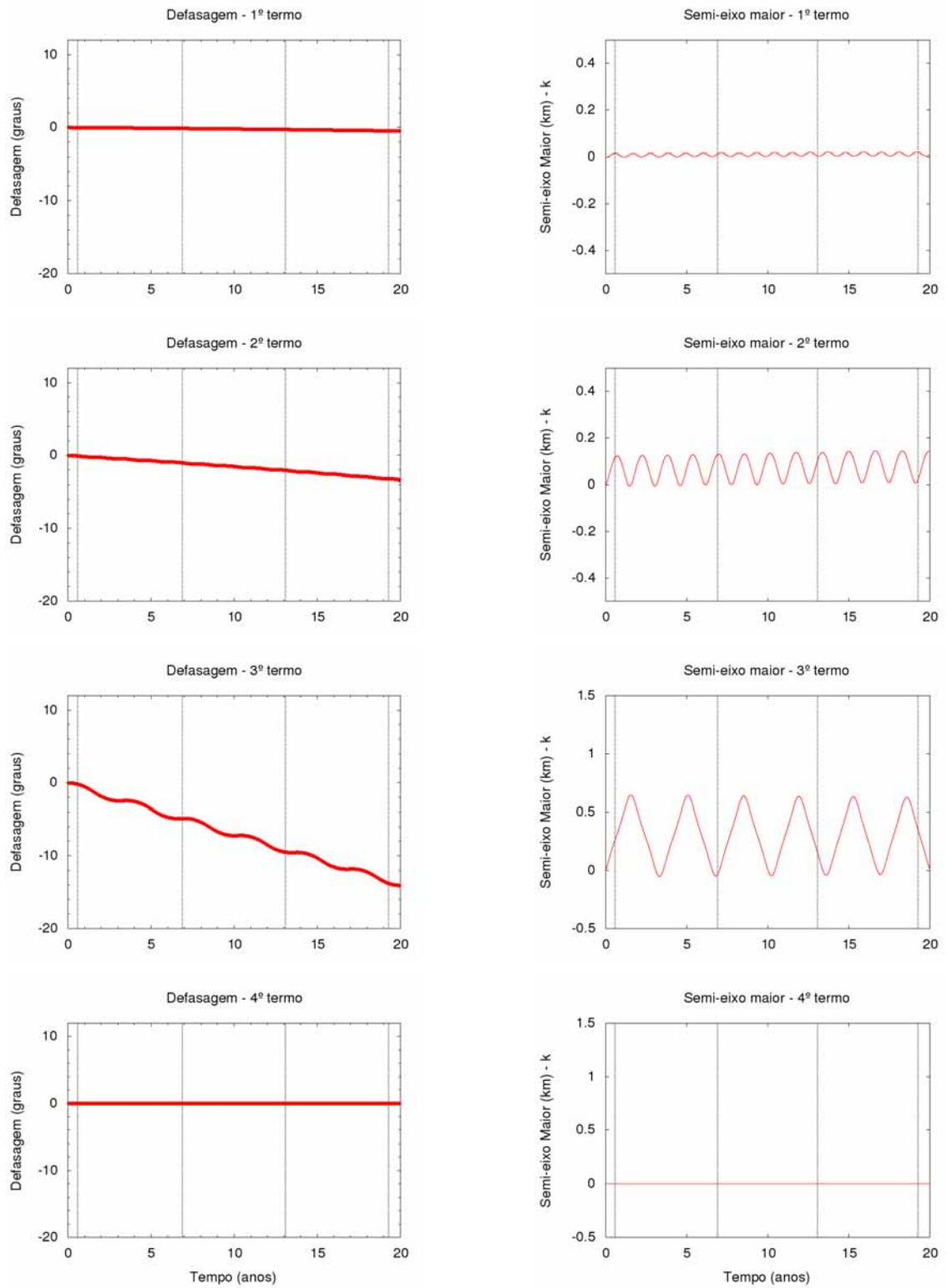


Figura 6.2: Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu, alternando termos na função perturbadora durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 139377,43$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior. As linhas pontilhadas indicam os momentos de anti-alinhamento.

Podemos observar inicialmente que a soma das contribuições dos termos da ressonância não é linear. Apenas um termo já reproduz o valor da defasagem procurada. É o que acontece com o terceiro termo, que sozinho reproduz 24° de defasagem para Pandora (Figura 6.1, linha 3) e 14° para Prometeu (Figura 6.2, linha 3). As evoluções temporais dos semi-eixos maiores e as defasagens não se mostraram sensíveis aos momentos de anti-alinhamento em nenhum dos quatro casos.

Para todas os casos, também obtivemos a variação dos ângulos ressonantes no tempo. A figura 6.3 apresenta os resultados.

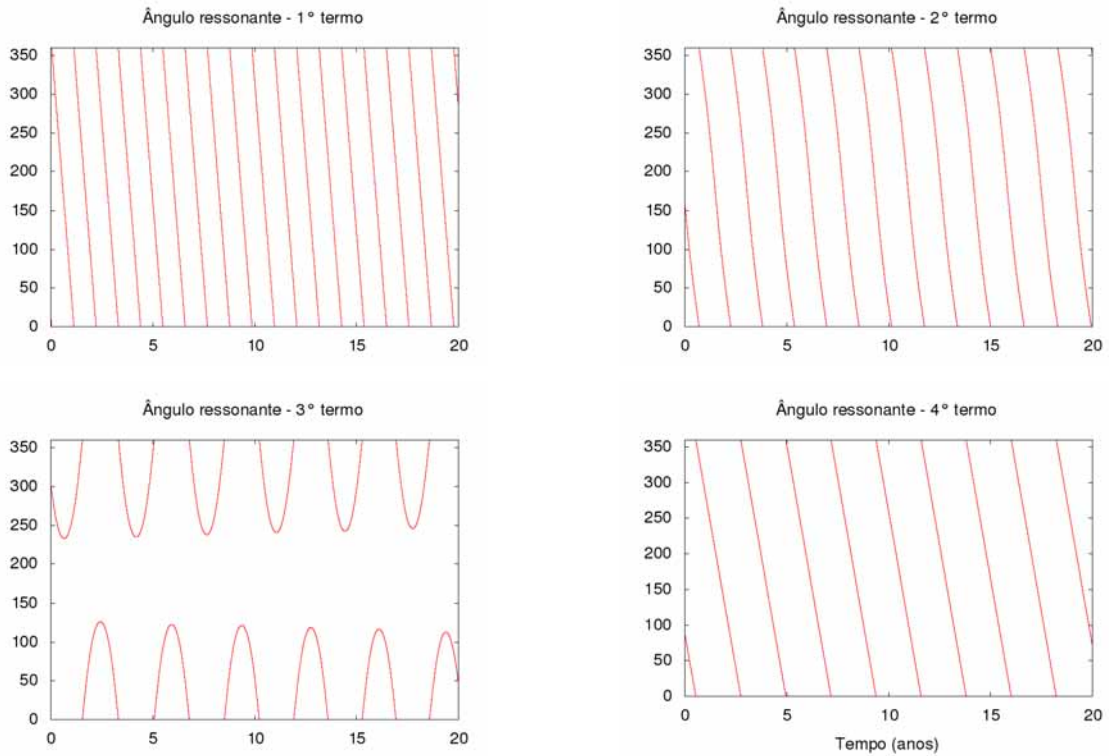


Figura 6.3: Ângulos ressonantes para 121:118. Calculando defasagem utilizando um termo da função perturbadora durante 20 anos.

A variação do ângulo ressonante do terceiro termo é interessante, pois esse reproduz o maior valor para defasagem e tem o seu ângulo librando. Nos outros três casos os ângulos circulam. O primeiro mais rapidamente, o quarto mais lentamente, e o segundo a uma velocidade mediana entre esses. A princípio tentamos relacionar a velocidade de circulação com os valores das defasagens ligadas a esses termos, porém seria necessário que o mais lento deles, o quarto termo, apresentasse o maior valor de defasagem, o que não ocorre.

Repetimos o processo anterior alternando as combinações a cada dois termos da res-

sonância 121:118. Os resultados se encontram nas Figuras 6.4 a 6.6.

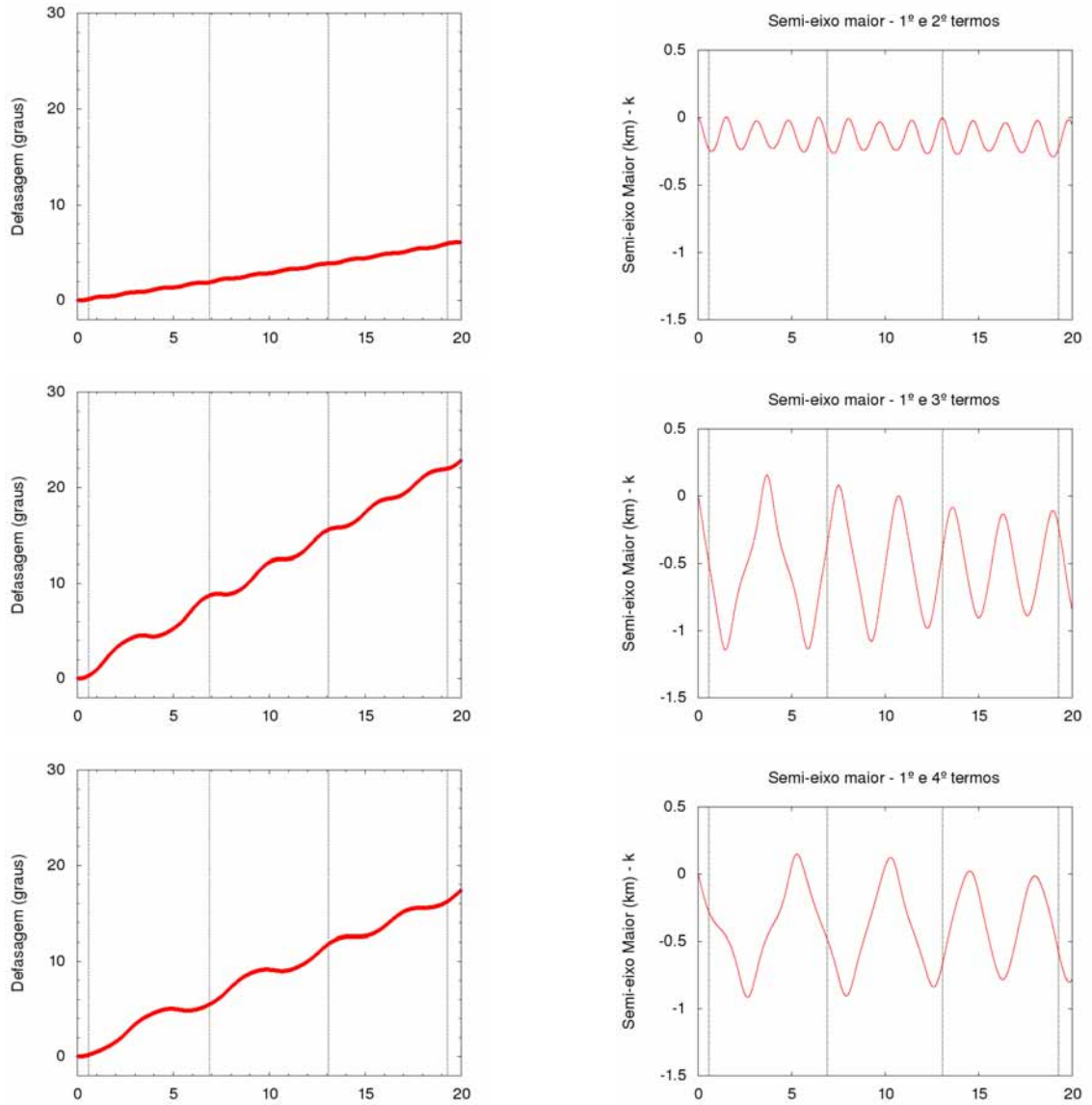


Figura 6.4: Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora, a cada dois termos da função perturbadora durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 141712,61$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior. As linhas pontilhadas indicam os momentos de anti-alinhamento.

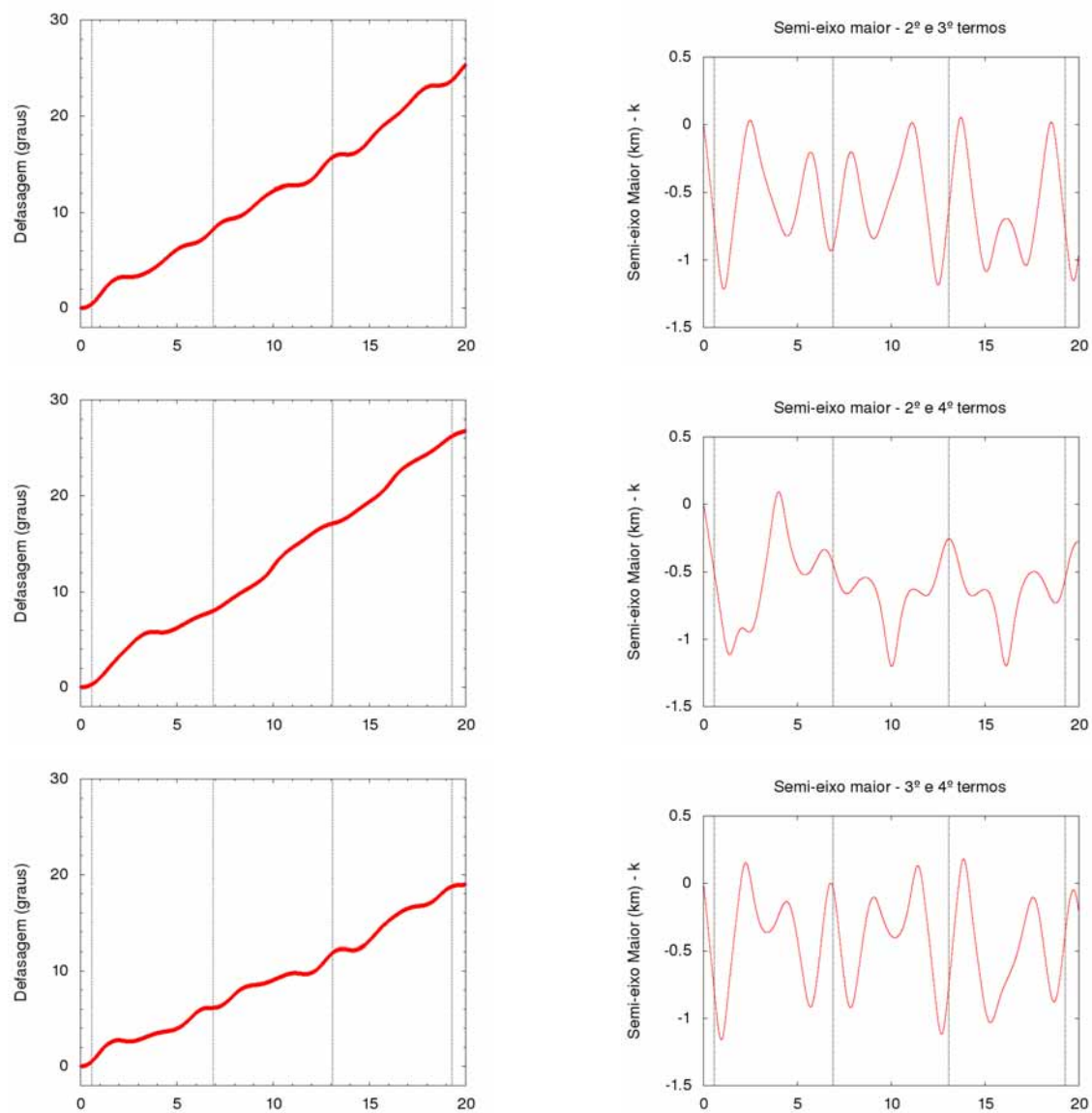


Figura 6.5: Continuação da figura 6.4.

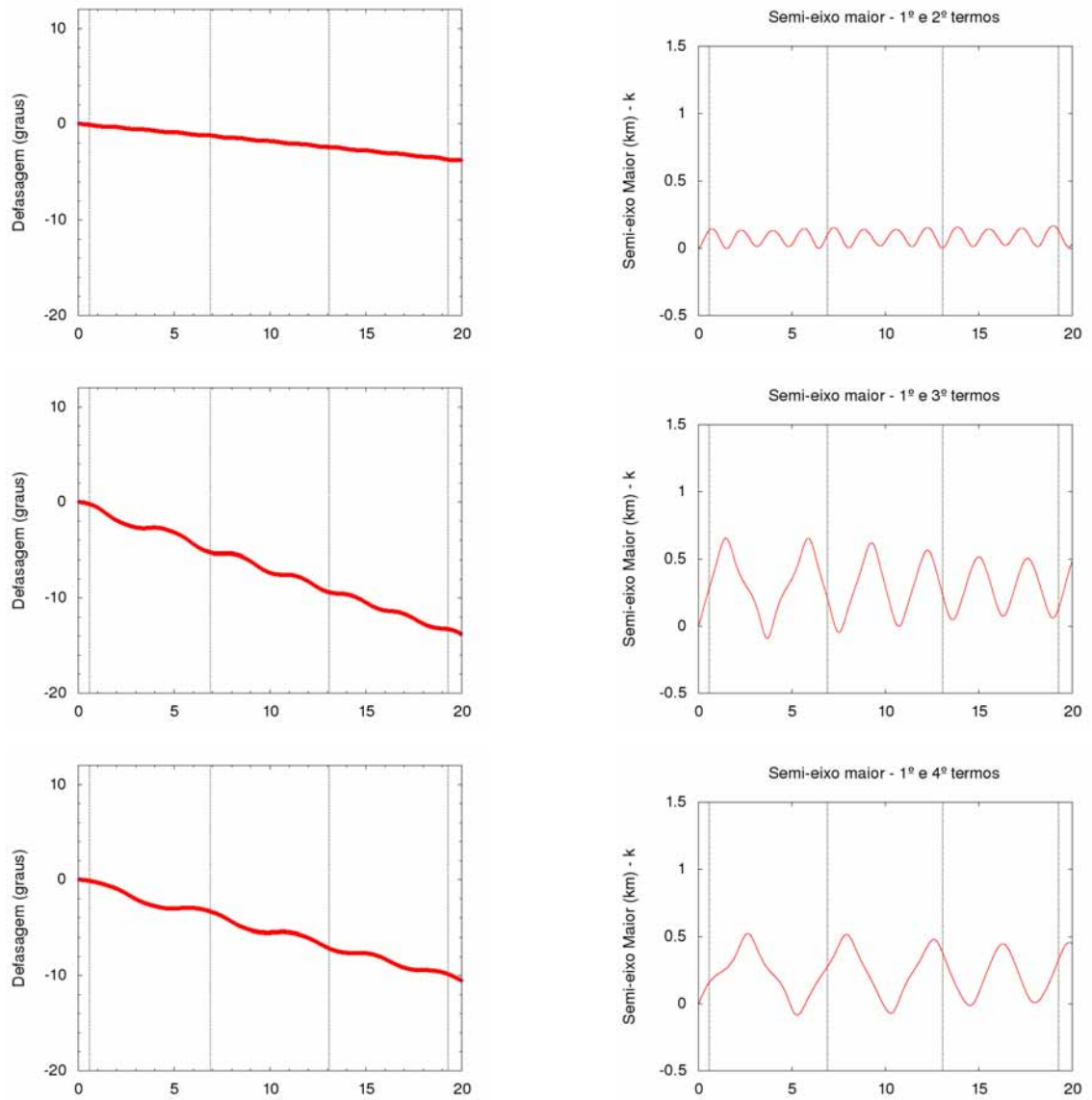


Figura 6.6: Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu, a cada dois termos da função perturbadora durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 139377,43$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior. As linhas pontilhadas indicam os momentos de anti-alinhamento.

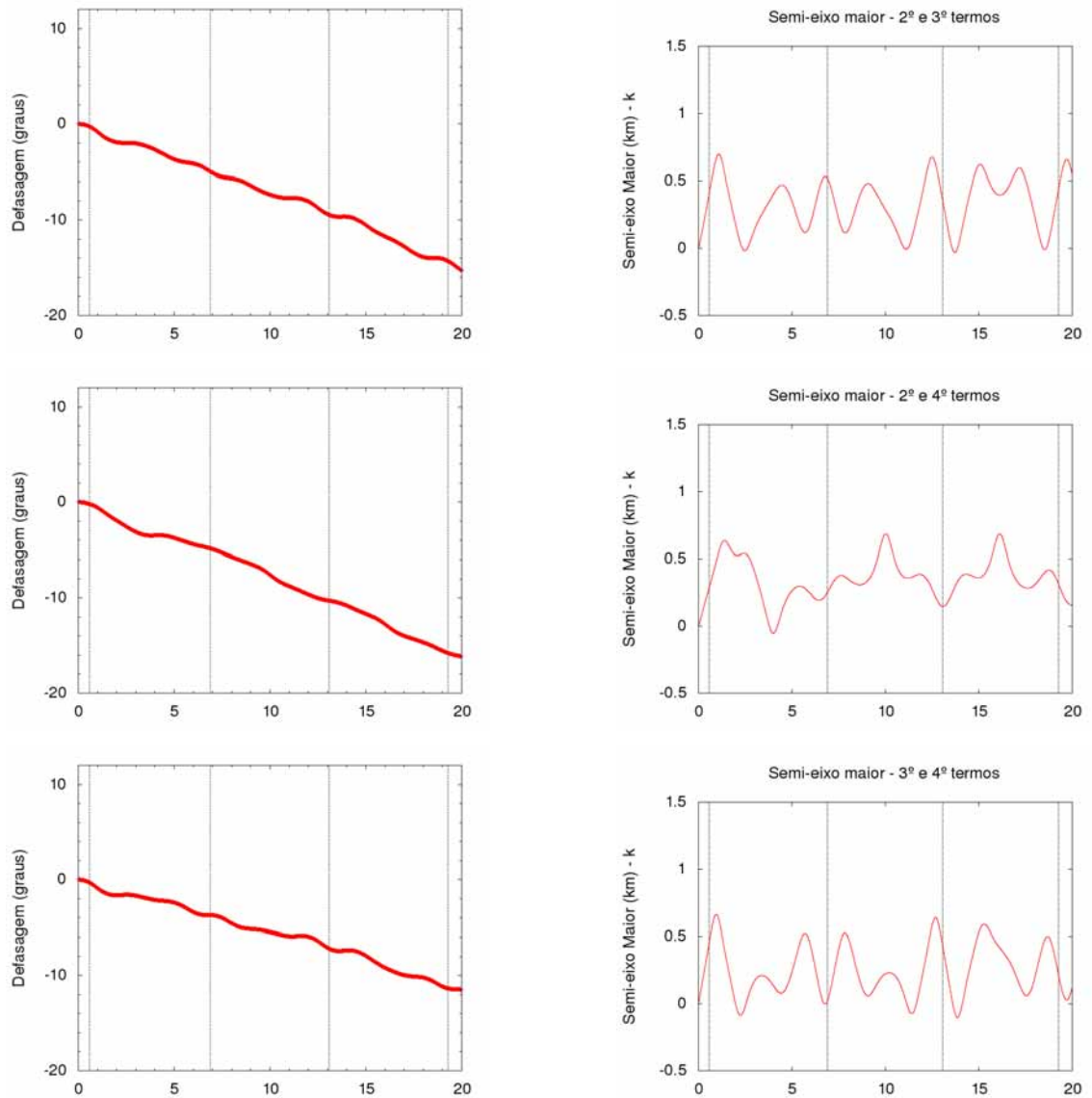


Figura 6.7: Continuação da figura 6.6.

Para os testes a cada dois termos temos padrões diferentes entre eles mesmos. Nas primeiras figuras que apresentam as combinações para Prometeu e Pandora (Figuras 6.4 e 6.6, respectivamente), as defasagens e evoluções temporais dos semi-eixos maiores não são sensíveis aos momentos de anti-alinhamento e todos apresentam valores significativos para as defasagens. Já no segundo bloco de combinações que compõem as figuras 6.5 e 6.7, tanto as defasagens quanto as evoluções temporais de semi-eixo maior se mostram sensíveis aos momentos de anti-alinhamento, e no caso que leva em consideração os terceiro e quarto termos (figuras 6.5 e 6.7, última linha) é possível observar uma suavidade entre esses momentos,

como no caso que se considera a ressonância completa (quatro termos).

Também estudamos os ângulos ressonantes para estes casos. Os resultados se encontram nas figuras 6.8 e 6.9.

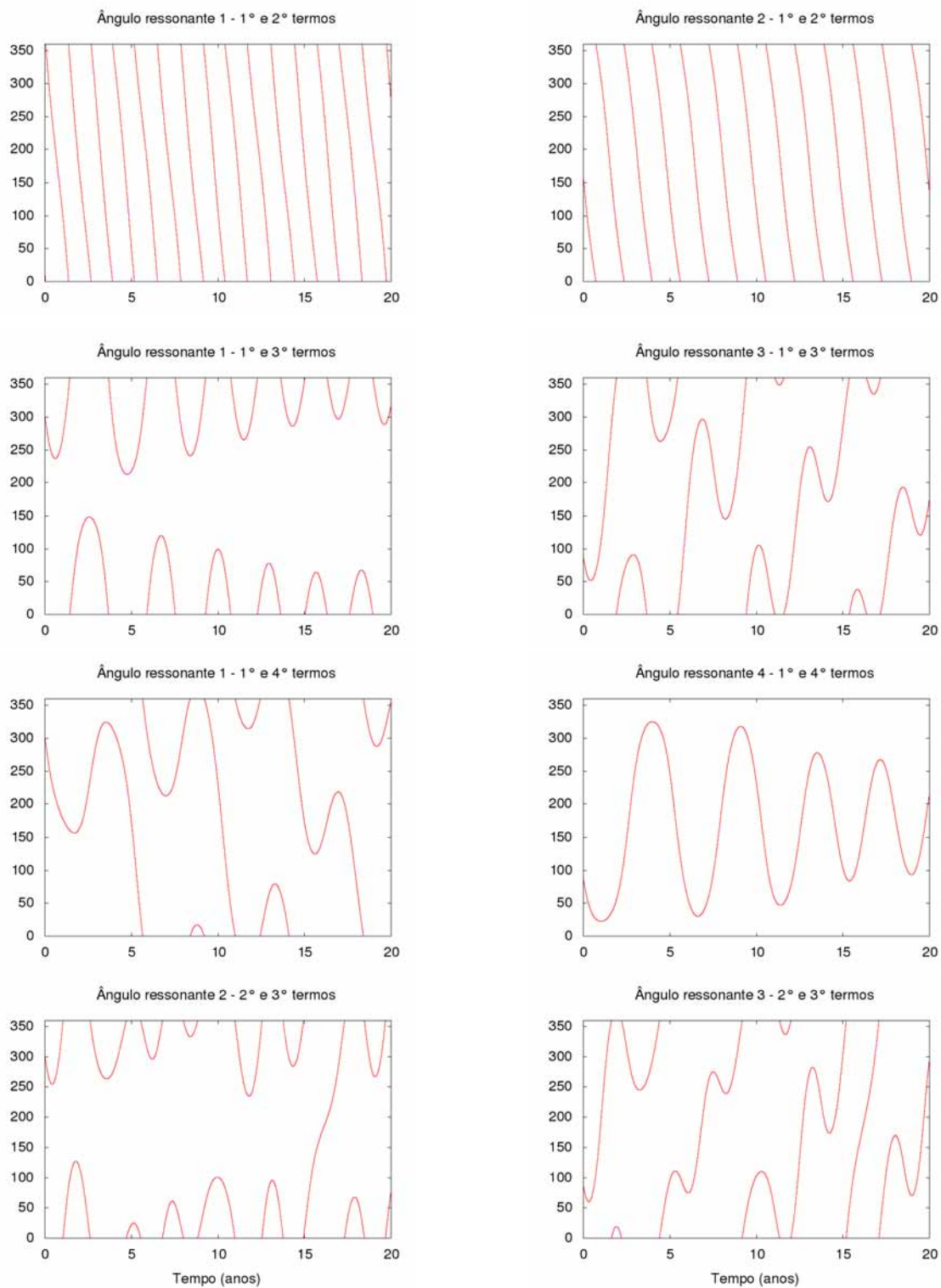


Figura 6.8: Ângulos ressonantes para 121:118. Calculando defasagem utilizando dois termos da função perturbadora durante 20 anos.

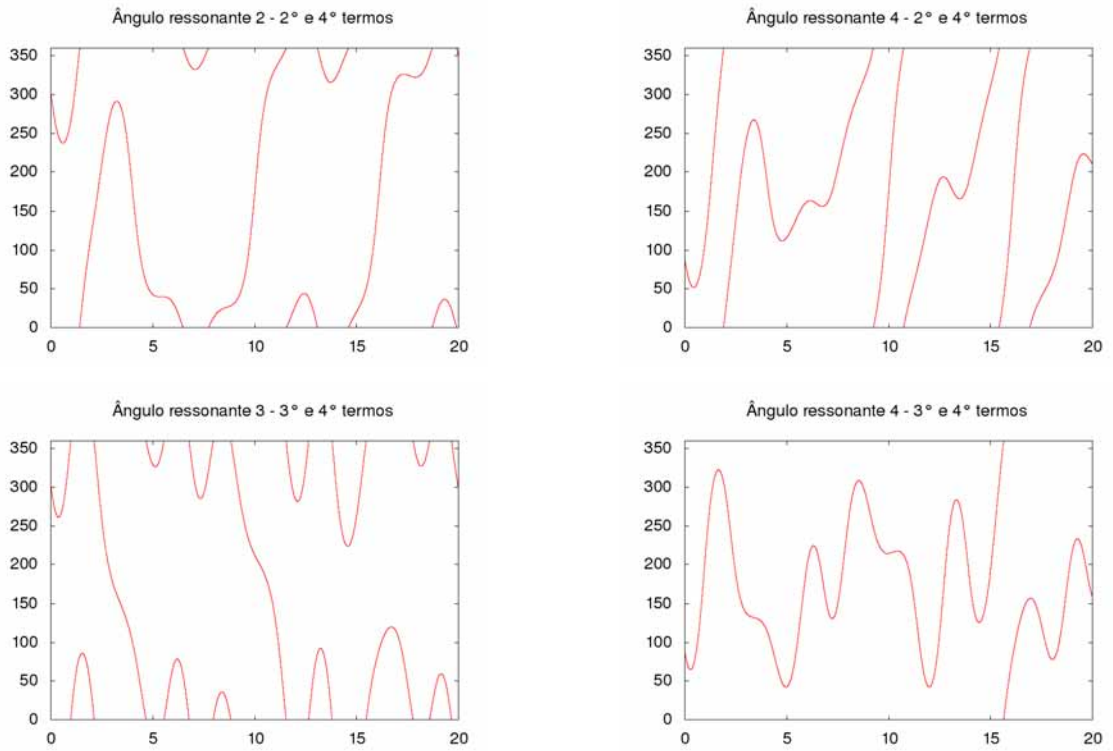


Figura 6.9: Continuação da figura 6.8.

Os resultados para as variações temporais dos ângulos ressonantes, combinando apenas dois termos da função perturbadora completa para a ressonância 121:118, apresentam a libração de quase todos os ângulos. Apenas o caso que combina os primeiro e segundo termos circulam e esta é a única combinação de dois termos que resulta em valores de defasagens menores que 10° para Pandora e 5° para Prometeu.

Por último fizemos os testes para as combinações a cada três termos. Os resultados se encontram na figura 6.10 para Pandora e figura 6.11 para Prometeu.

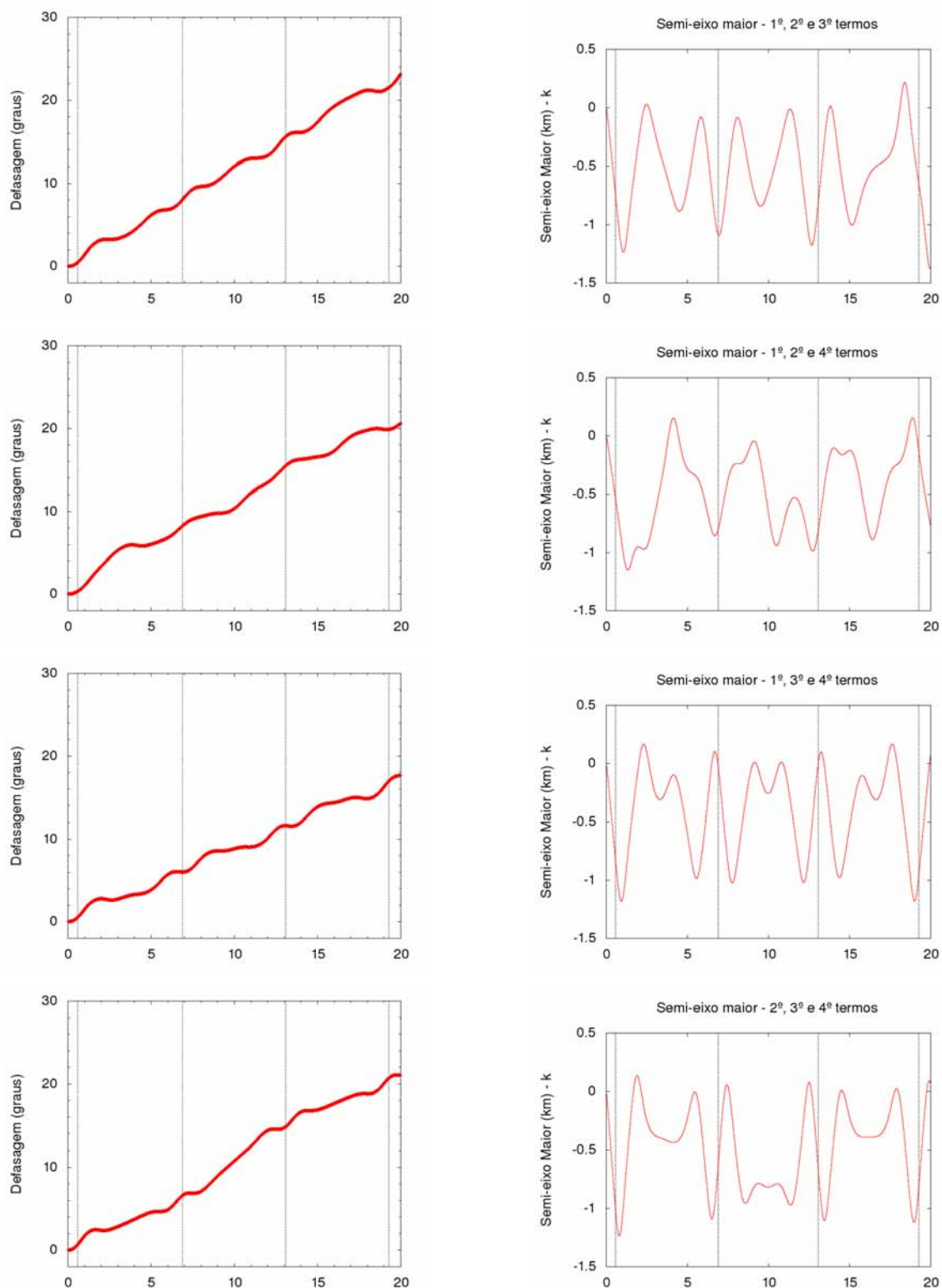


Figura 6.10: Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora, a cada três termos na função perturbadora durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 141712,61$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior. As linhas pontilhadas indicam os momentos de anti-alinhamento.

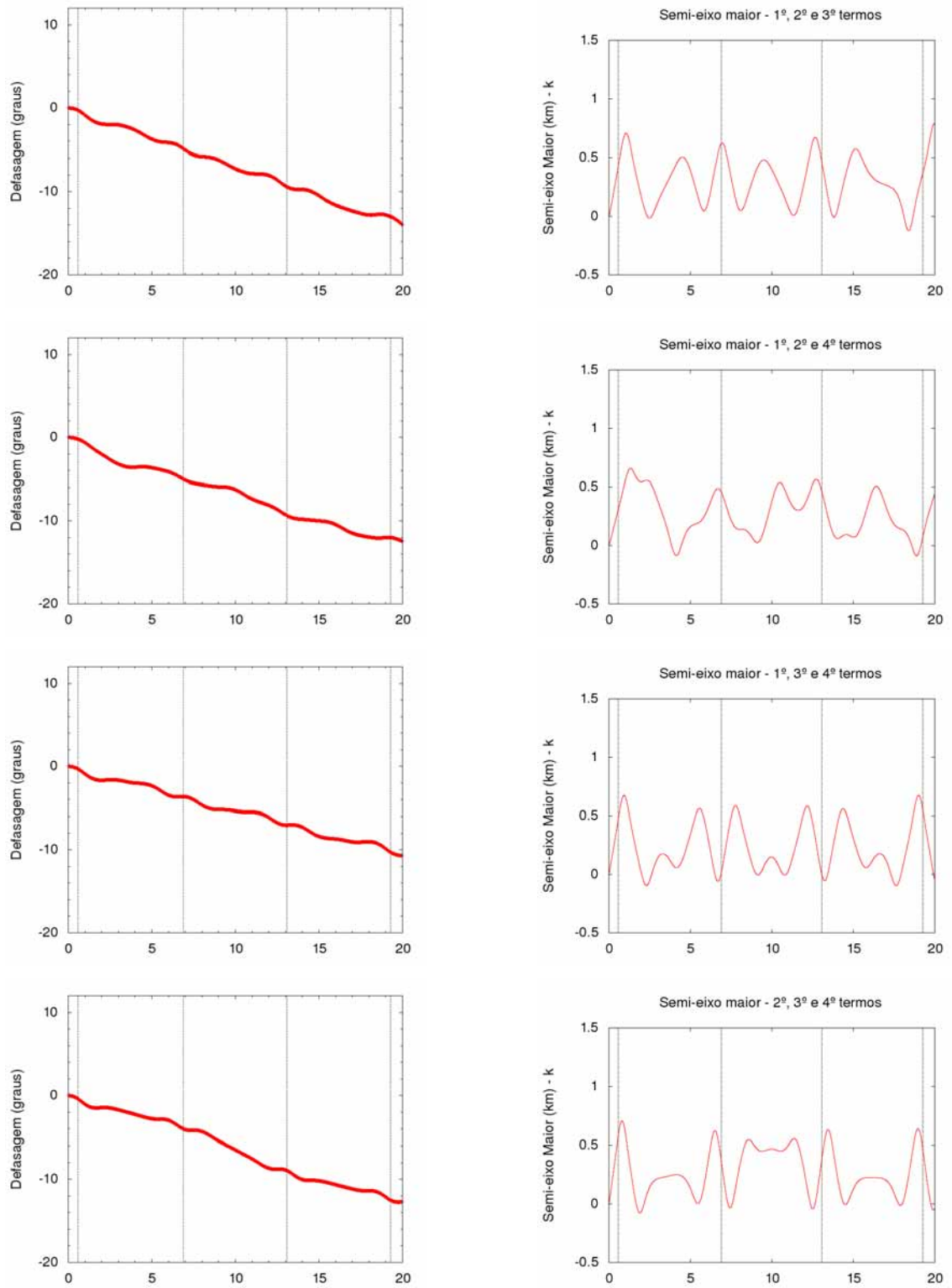


Figura 6.11: Variações temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu, a cada três termos na função perturbadora durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 139377,43$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior. As linhas pontilhadas indicam os momentos de anti-alinhamento.

É possível observar que com o aumento de termos a serem considerados, mais próximos chegamos às defasagens observadas (figura 3.2). Vejamos por exemplo o caso que contém os segundo, terceiro e quarto termos da ressonância (figuras 6.10 e 6.11). Já apresentam basicamente o mesmo resultado de quando é considerada a ressonância completa (quatro termos). Qualitativamente o comportamento é o mesmo, apresentando as ondulações nos momentos de anti-alinhamento e o comportamento aproximadamente linear entre eles. Quantitativamente a diferença entre os resultados são de, aproximadamente, $1,5^\circ$ para Prometeu e 2° para Pandora. Comportamentos mais ou menos próximos, qualitativamente ou quantitativamente, podem ser observados dentre as outras combinações.

Os ângulos ressonantes oriundos dessas simulações podem ser conferidos nas figuras 6.12.

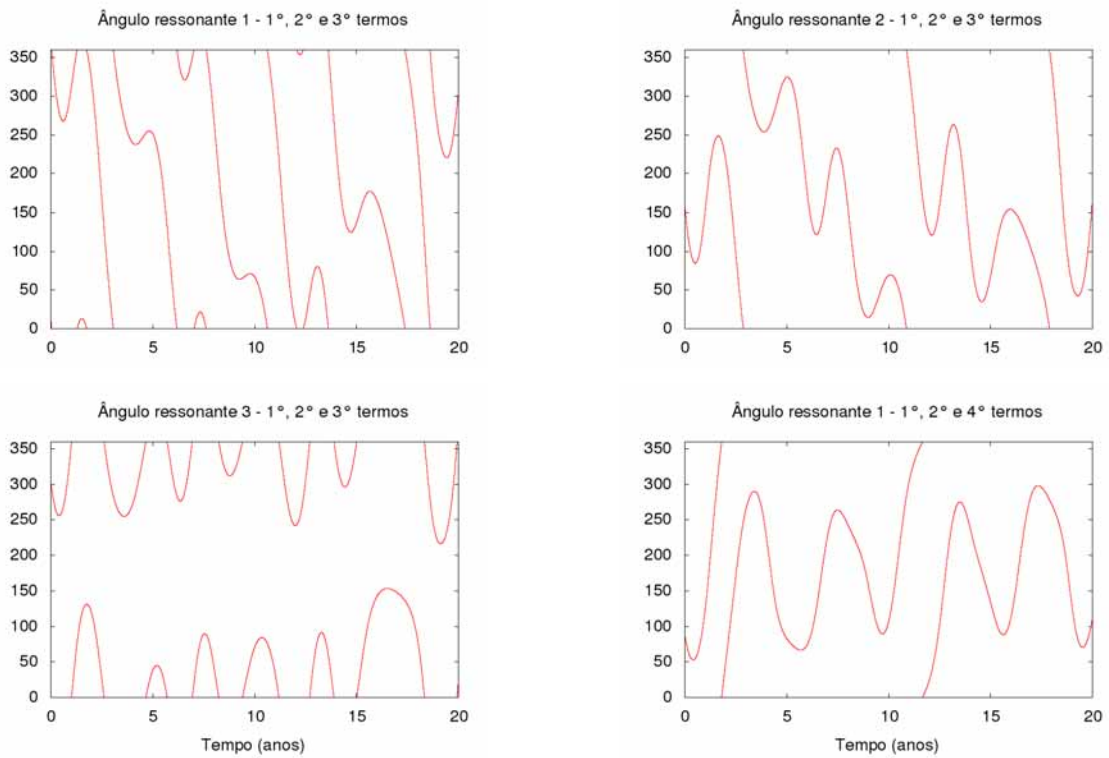


Figura 6.12: Ângulos ressonantes para a ressonância 121:118. Testes a cada três termos durante 20 anos.

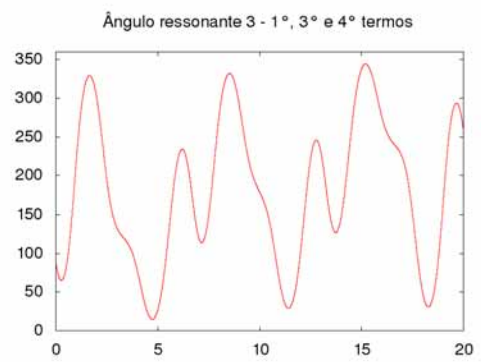
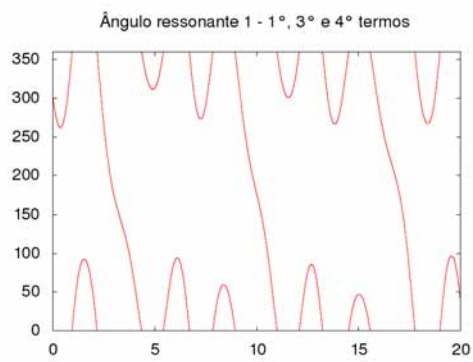
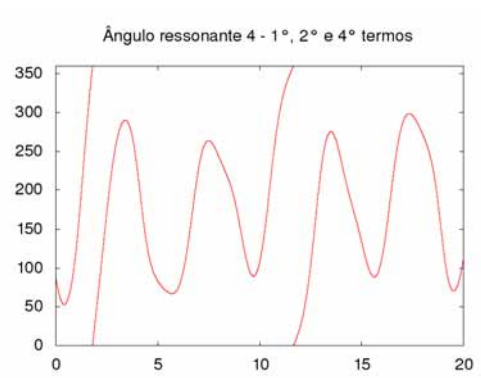
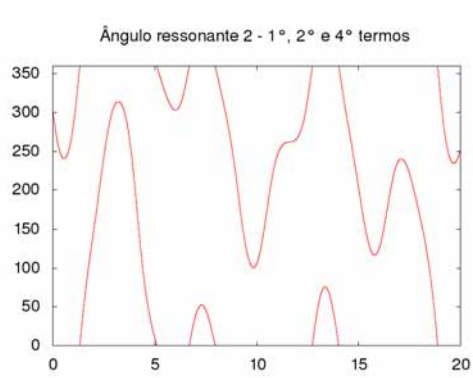


Figura 6.13: Continuação da figura 6.12.

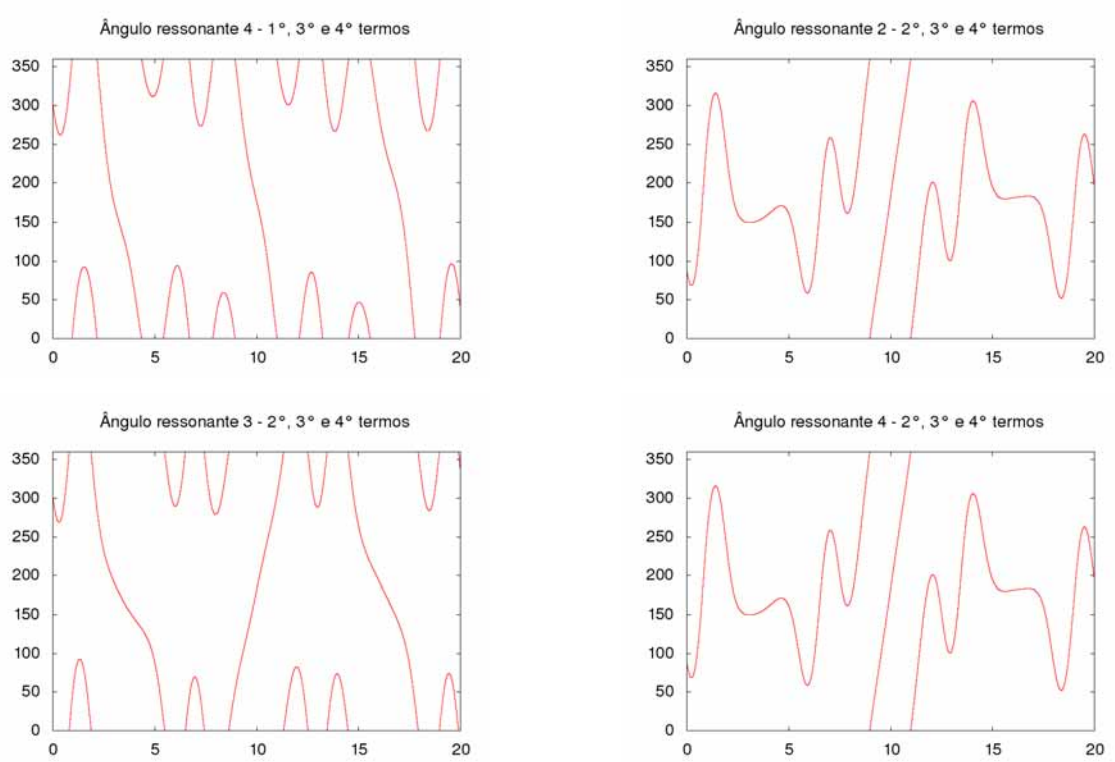


Figura 6.14: Continuação da figura 6.12.

Pode-se ver que em todas as combinações mostradas na Figura 6.12 ocorre a libração do ângulo ressonante e em alguns casos (e.g. linha 3, coluna 1) acontece a circulação. Uma vez que esses resultados são os mais próximos aos da ressonância completa, é interessante constatar que já se encontra libração nesses ângulos. Para melhor comparação, os ângulos oriundos da abordagem analítica feita no Capítulo 4, repetimos aqui (figura 6.15) os quatro ângulos ressonantes (já apresentados na Figura 4.6) que compõem a ressonância completa 121:118.

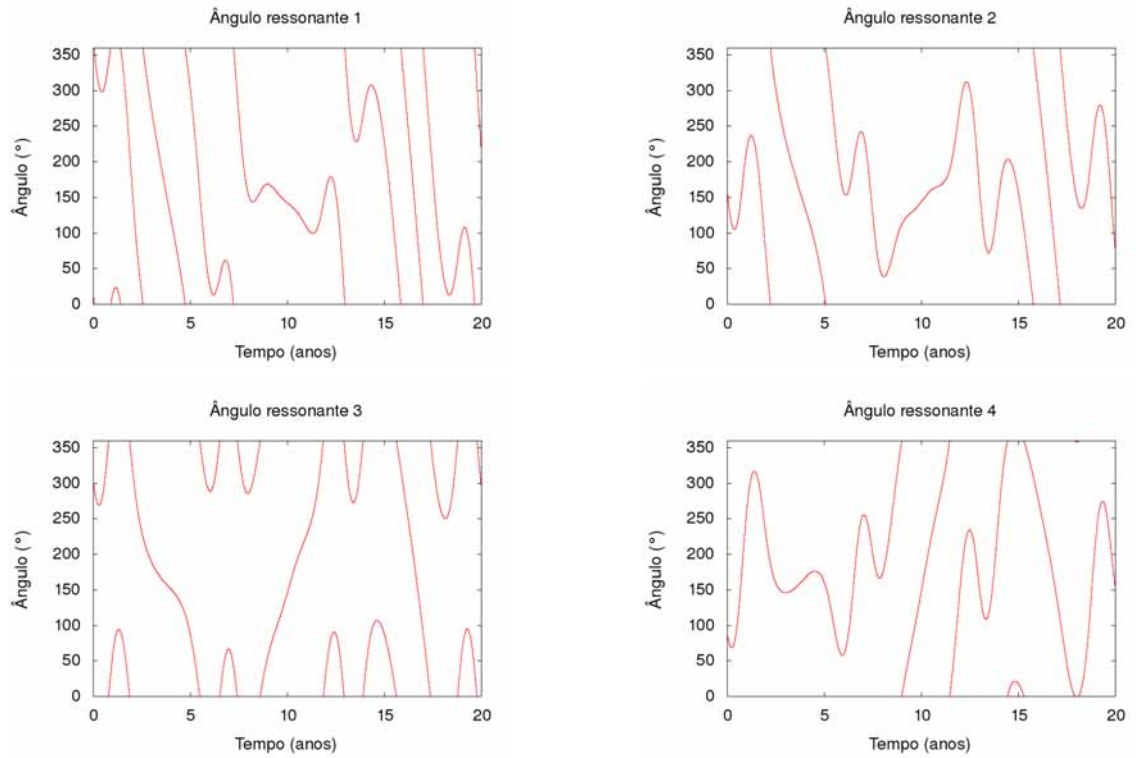


Figura 6.15: Variação dos ângulos ressonantes para a ressonância 121:118 durante 20 anos.

6.2 Outras ressonâncias - $N=3$

Continuando a explorar a região estudada com o objetivo de melhor conhecê-la e verificar se alguma outra ressonância pode ser importante para os movimentos dos satélites Prometeu e Pandora, abrangemos os testes para outras ressonâncias de ordem três, como a 121:118, e simulamos as defasagens e evoluções temporais dos semi-eixos maiores dos satélites para as ressonâncias 119:116, 120:117, 122:119 e 123:120. Os resultados se encontram nas Figuras 6.16 e 6.17 para Pandora e Prometeu, respectivamente.

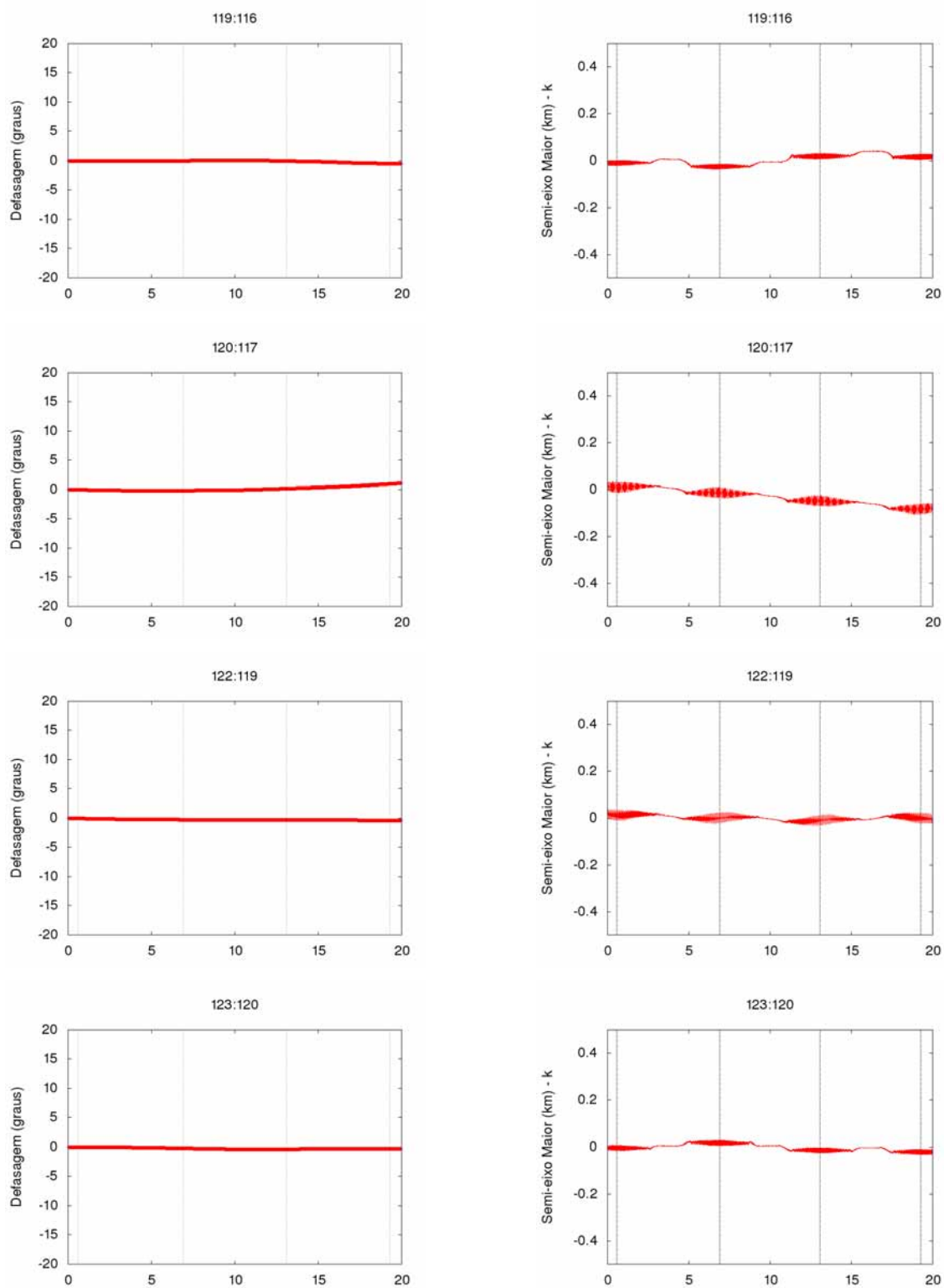


Figura 6.16: Evoluções temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora para as ressonâncias 119:116, 120:117, 122:119 e 123:120 durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 141712,61$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior.

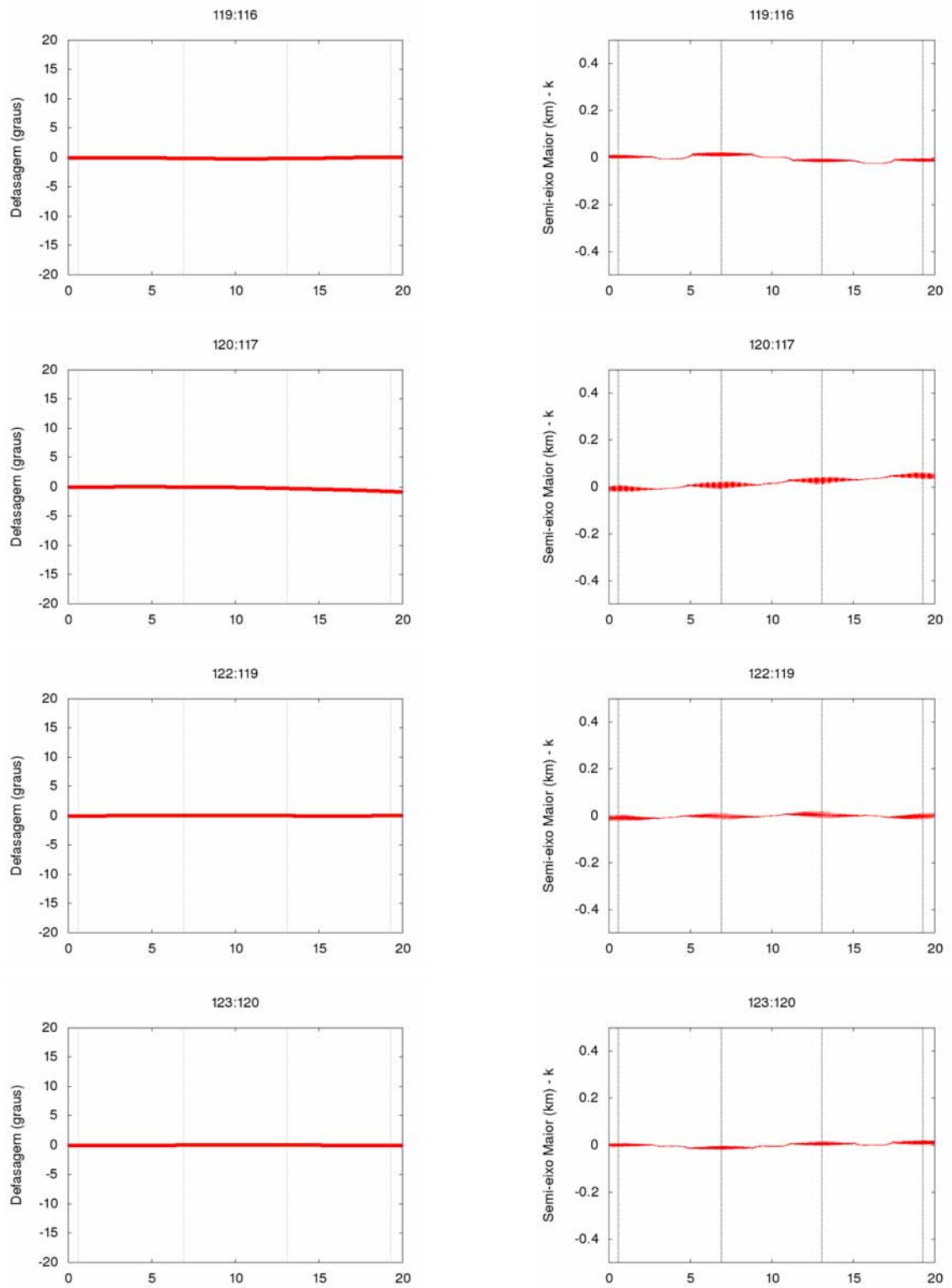


Figura 6.17: Evoluções temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu para as ressonâncias 119:116, 120:117, 122:119 e 123:120 durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 139377,43$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior.

Observamos que mesmo cobrindo um número considerável de possibilidades, as possíveis ressonâncias de ordem três, assim como a 121:118, não reproduzem as defasagens para Prometeu ou Pandora.

Obtivemos as variações dos ângulos ressonantes no tempo para as ressonâncias anteriores de ordem três. Todas as ressonâncias apresentaram resultados semelhantes para os ângulos ressonantes, um exemplo desses resultados se encontra na figura 6.18, que apresenta essas variações para a ressonância 119:116.

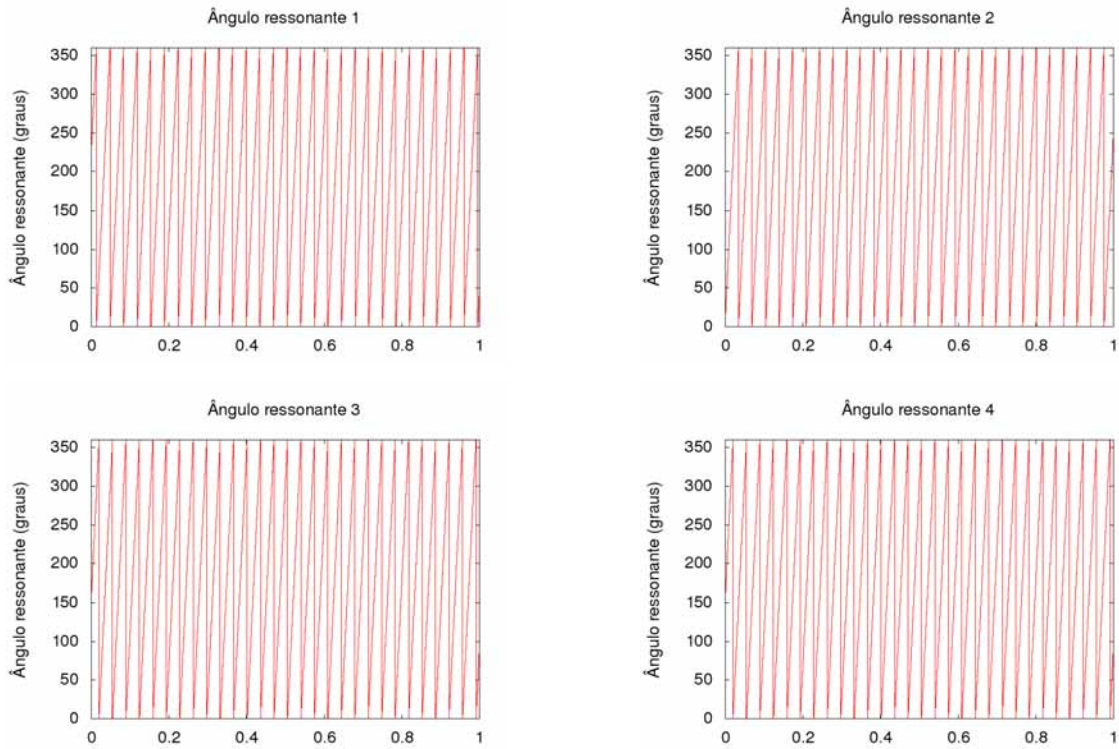


Figura 6.18: Ângulos ressonantes para 119:116. Testes termo a termo durante 1 ano.

As evoluções são apresentadas em um ano apenas para percebermos como a circulação acontece rapidamente. Isso se repete em todos os ângulos ressonantes testados.

6.3 Outras ressonâncias - $N=2$

Ainda com objetivo de testar a região do estudo para as possíveis ressonâncias, estudamos as defasagens e evoluções dos semi-eixo maiores dos satélites para as ressonâncias de ordem dois. São elas: 118:116, 119:117, 120:118, 121:119 e 122:120. Os resultados são apresentados nas figuras 6.19 e 6.20, para Pandora e Prometeu, respectivamente.

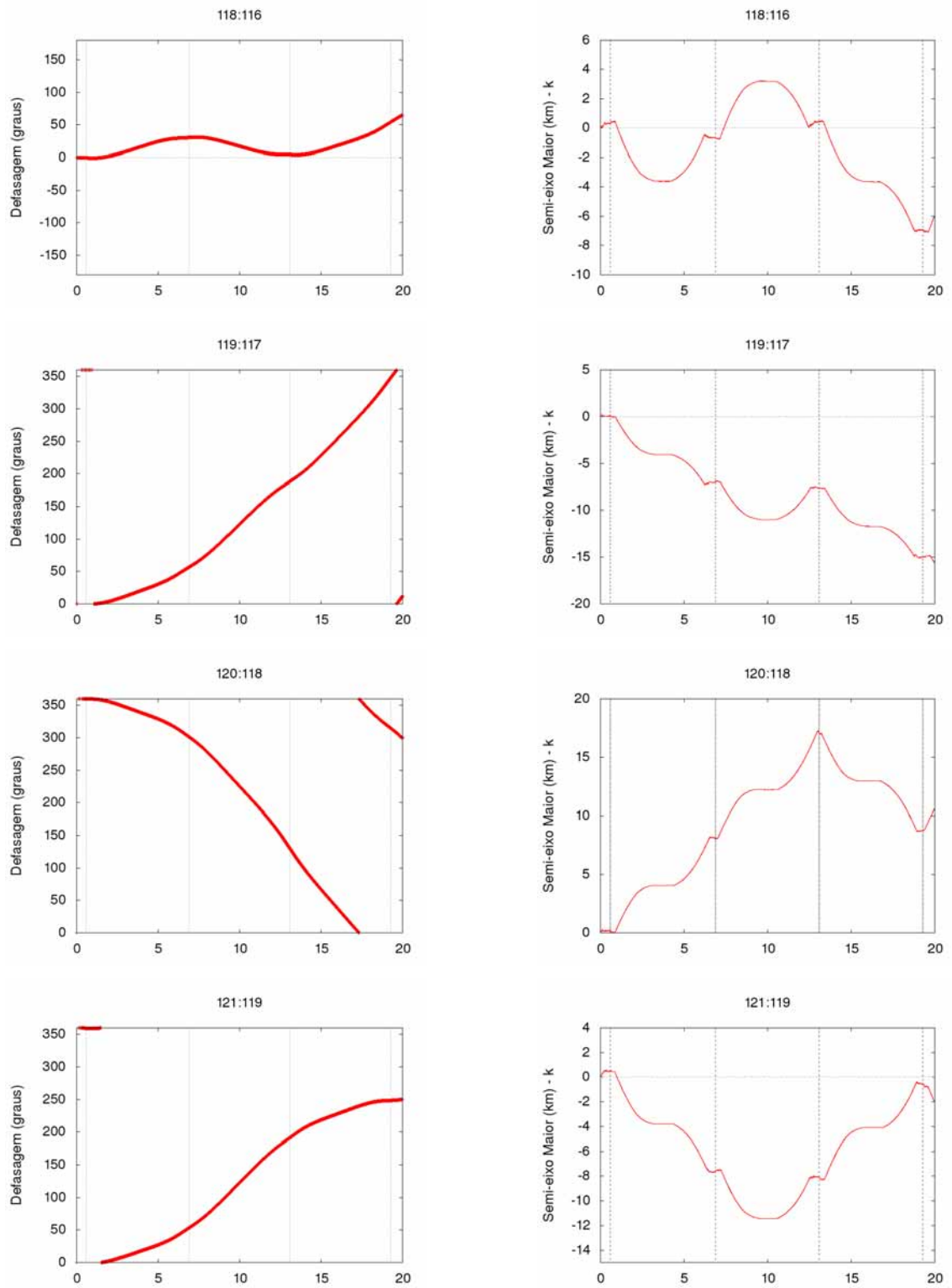


Figura 6.19: Evoluções temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Pandora para as ressonâncias 118:116, 119:117, 120:118 e 121:119 durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 141712,61$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior.

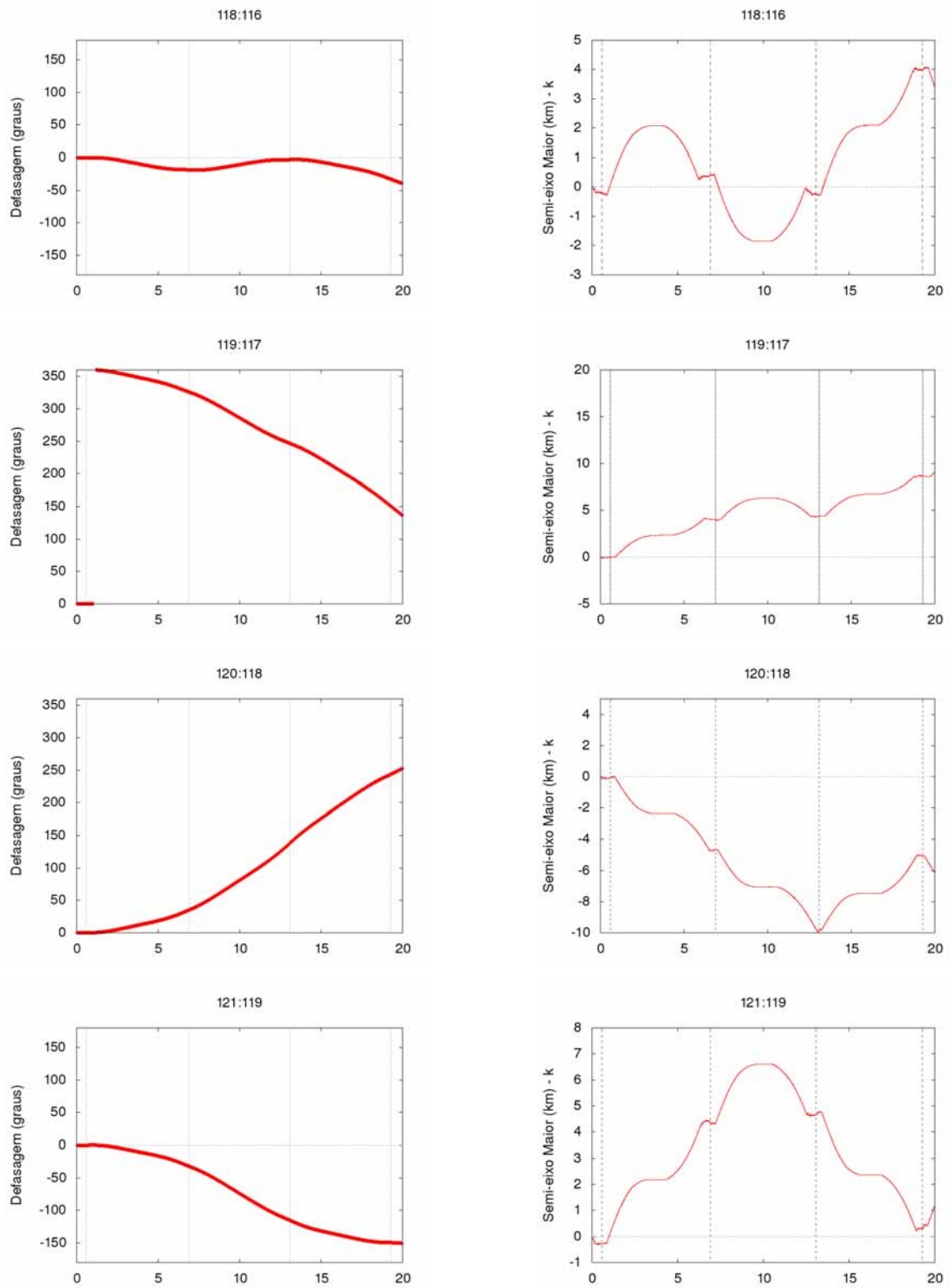


Figura 6.20: Evoluções temporais das defasagens de longitude média e semi-eixo maior de Prometeu para as ressonâncias 118:116, 119:117, 120:118 e 121:119 durante 20 anos. O valor inicial do semi-eixo maior do satélite $a' = 139377,43$ km é subtraído do valor do semi-eixo maior.

Ao analisarmos os resultados para as ressonâncias de ordem dois, nos deparamos com valores para as defasagens mais altos que as observadas. Sabe-se que a ordem de uma ressonância está fortemente ligada à sua “*intensidade*”, quanto menor a ordem, mais significativa a ressonância tende a ser para o movimento. Porém, encontrar valores para as defasagens maiores que os valores observados é um resultado inesperado. Os semi-eixos maiores variam unidades de quilômetros, e em alguns casos, como na defasagem 119:117, dezena de quilômetros. Qual seria a razão dessas defasagens não terem sido detectadas? Além disso, segundo GR03a,b, a a ressonância 121:118 deveria ser a causa da defasagem, encontrar uma outra ressonância que causa defasagem maior é um motivo para continuarmos a analisar a região dos satélites.

Sendo assim, de maneira análoga ao que fizemos anteriormente, simulamos a variação dos ângulos ressonantes no tempo para as ressonâncias anteriores de ordem dois. Uma vez que os resultados obtidos foram semelhantes, elegemos um exemplo para apresentar. Na figura 6.21, apresentamos essas variações para a ressonância 121:119 escrita pela seguinte função perturbadora, composta apenas pelo termo direto:

$$\begin{aligned}
R_D = & e^2 f_{45} \cos[121\lambda' - 119\lambda - 2\varpi] \\
& + e'^2 f_{53} \cos[121\lambda' - 119\lambda - 2\varpi'] \\
& + ee' f_{49} \cos[121\lambda' - 119\lambda - \varpi' - \varpi].
\end{aligned} \tag{6.7}$$

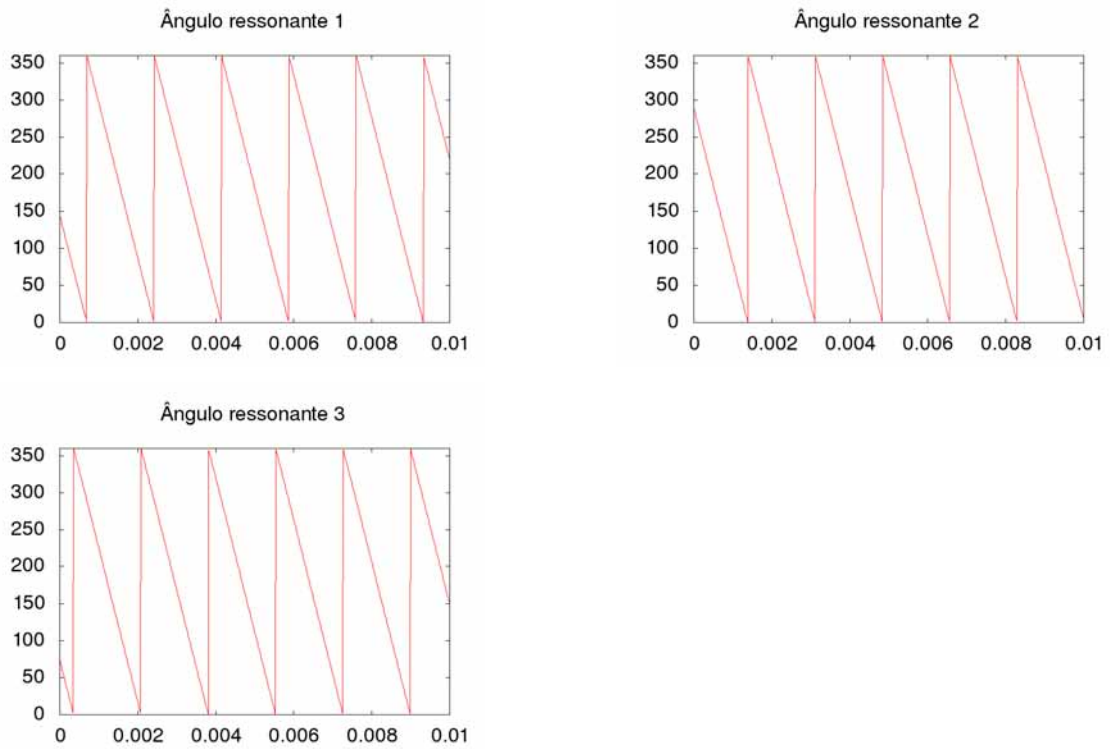


Figura 6.21: Ângulos ressonantes para 121:119. Testes termo a termo durante 0.01 ano.

As variações são apresentadas em um curto período de tempo para que seja possível perceber como a circulação acontece rapidamente. Isso se repete em todos os ângulos ressonantes testados.

Tendo em vista todos os testes realizados nesse capítulo, constatamos que apenas um dos termos da função perturbadora já produz praticamente o resultado observado de defasagem e a adição dos outros termos tende à ajustar a curva ao valor final, quando todos os termos são considerados, de maneira que a soma dos termos não resulta na soma linear de efeito sobre as defasagens dos satélites.

Ao analisarmos outras ressonâncias próximas de ordem $N=3$ nenhum efeito de defasagem foi constatado. Isso reforça a importância da ressonância 121:118, uma vez que foi a única ressonância de ordem 3 que provocou defasagem nas posições dos satélites.

Por outro lado, quando analisamos os efeitos das ressonâncias próximas de ordem $N=2$, estes são grandes. As defasagens encontradas são maiores que as observadas. Desconhecemos o motivo das defasagens provocadas por essas ressonâncias não terem sido detectadas. Uma hipótese ainda não confirmada, seria um possível mecanismo de amortecimento que essas ressonâncias exerceriam umas nas outras, de maneira a não ser possível perceber seus efeitos.

Uma outra questão está na sensibilidade dos semi-eixos maiores nos momentos de anti-

alinhamento dos periapses, segundo Cruz (2004) esta seria a origem das defasagens. Porém, em alguns resultados não encontramos indícios desse efeito.

Analisando de maneira geral os resultados deste capítulo com os resultados dos capítulos 3 e 4, percebemos que a ressonância 121:118 exerce um efeito essencial para reproduzir, a partir de modelos teóricos, os valores de defasagem observados. No capítulo 5 ao estudarmos a relação entre os semi-eixos maiores e as defasagens, constatamos que utilizar condições iniciais de um momento especial no comportamento dos satélites, o anti-alinhamento dos periapses orbitais, resulta em um valor de defasagem uma ordem maior do que seria encontrado caso partisse de outra data inicial, sendo necessário que os satélites estejam relacionados para gerarem as defasagens. Os resultados indicam que essa relação necessária para que as defasagens apareçam é a ressonância 121:118.

Capítulo 7

Estimativa da massa do anel F

Uma vez que temos um modelo representativo do sistema Saturno, Prometeu e Pandora, pensou-se em fazer uso desse para estimar a massa do anel F por meio da variação observada nos semi-eixos maiores dos satélites devido à perturbação do anel.

7.1 Introdução

Murray & Giuliatti Winter (1996) ao apresentarem uma possível explicação para a defasagem de Prometeu, a única observada até aquele momento, calcularam um limite superior para a massa do anel F. A menos que o anel tivesse uma massa duas vezes maior que o próprio satélite (o que é bastante improvável), Prometeu irá se aproximar do anel e colidirá com suas partículas, o que resultaria na defasagem. Esse mecanismo permite estimar que a massa do anel F deve ser menor que 25% da massa de Prometeu o que corresponde a uma ordem de 10^{17} kg.

Em Murray et al. (1997) é realizada uma análise das imagens do anel F oriundas das sondas Voyager, mostrando que em diversas regiões o anel se divide em quatro faixas radialmente distintas. Notou-se que, apesar da diferença de semi-eixos maiores entre as faixas, os pericentros dessas precessam de maneira uniforme. Uma possível explicação para esse fato seria a autogravitação do anel, onde uma faixa bastante massiva poderia forçar a manutenção do alinhamento das órbitas. Porém, para esse mecanismo ser eficiente a faixa deveria ter uma massa maior que 10^{-9} massas de Saturno, novamente um valor improvável uma vez que provocaria efeitos detectáveis nos satélites e nas vizinhanças do anel.

Uma vez que na literatura os valores calculados para a massa do anel F aparece como uma condição para um mecanismo estudado, além da pouca informação em torno desse valor, propomos aqui analisar como a massa do anel F pode influenciar a dinâmica resultante da interação entre Prometeu e Pandora, buscando encontrar um limite superior de massa que

não causaria uma alteração significativa nos semi-eixos maiores dos satélites e nas defasagens angulares observadas.

7.2 Resultados iniciais

Devido ao estudo das defasagens, a partir da análise apresentada no capítulo 6, nós sabemos que a ordem das amplitudes máximas de variações dos semi-eixos maiores de Prometeu e Pandora é da ordem de quilômetro. Através de simulações numéricas, consideramos diferentes cenários com valores crescentes para a massa do anel, buscando diferenças nas variações temporais dos semi-eixos maiores dos satélites dos valores observados.

Para verificar quais seriam os efeitos que um anel massivo teria sobre os satélites optamos por representá-lo como um conjunto de 360 partículas, sendo que cada uma possui $1/360$ da massa total do anel F (Murray et al. 1997). Incluiu-se então no pacote de integração numérica o efeito gravitacional correspondente a estas partículas, que foram distribuídas igualmente em longitude e com uma distância planetocêntrica equivalente ao núcleo do anel, considerando sua excentricidade.

A tabela 7.1 resume as condições iniciais utilizadas na simulação de 20 anos. Consideramos as partículas interagindo gravitacionalmente com os satélites Prometeu e Pandora, mas não interagindo entre si.

Anel F	
Massa inicial (m_0)*	5.6846×10^{17} km
Semi-eixo maior	140224 km
Excentricidade	2.54×10^{-3}

Tabela 7.1: Dados para o anel F utilizados na simulação. Retirados de Murray et al. (1997)* e Sfair et al. (2009).

Fizemos testes alterando a massa do anel para valores entre 0,1 a 10 vezes a massa inicial m_0 . A diferença máxima da amplitude da evolução dos semi-eixos maiores no caso onde a massa do anel é negligenciada, é de aproximadamente 1,91 km para Pandora e 1,08 km para Prometeu. Repetimos o cálculo para todas as novas evoluções de semi-eixo maior oriundas das adições de massa. Fazendo a diferença desses valores, encontramos os resultados apresentados na figura 7.1, onde podemos analisar os efeitos dessas alterações de massa sobre a variação dos semi-eixos maiores dos satélites.

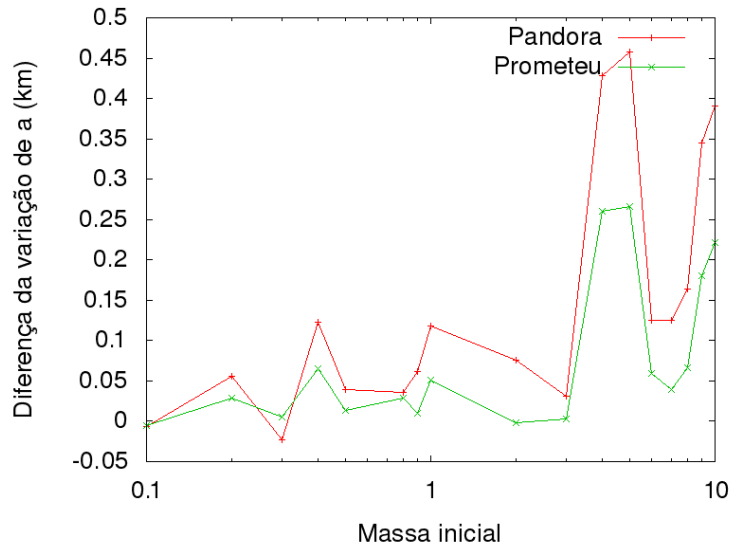


Figura 7.1: Diferença entre as variações de semi-eixo maior pela variação da massa do anel. A variação de massa inicial está em escala logarítmica.

Como citado anteriormente, as variações máximas nos semi-eixos maiores dos satélites para o caso onde não consideramos o anel são de aproximadamente 2 km para Pandora e 1 km para Prometeu. Tomando esses valores como base, iremos medir o quão adicionar massa ao anel ultrapassará esses valores de variação.

Na figura 7.1 os valores (em km) de variação nos semi-eixos maiores ultrapassaram a variação inicial quando adicionamos massa ao sistema. As variações tem máximas de 500 m para Pandora e 300 m para Prometeu, isto é, seus semi-eixos maiores passam a evoluir com uma variação máxima de 2,5 km e 1,3 km, respectivamente, quando a massa é cinco vezes m_0 . Podemos notar que para valores de massa maiores que cinco vezes a massa inicial, as variações voltam a diminuir. Esse resultado é inesperado uma vez que adicionar massa no anel o leva a aumentar sua interação com os satélites alterando assim seus semi-eixos maiores orbitais.

As figuras 7.2, 7.3 e 7.4 mostram as evoluções dos semi-eixos para alguns valores de massa testados.

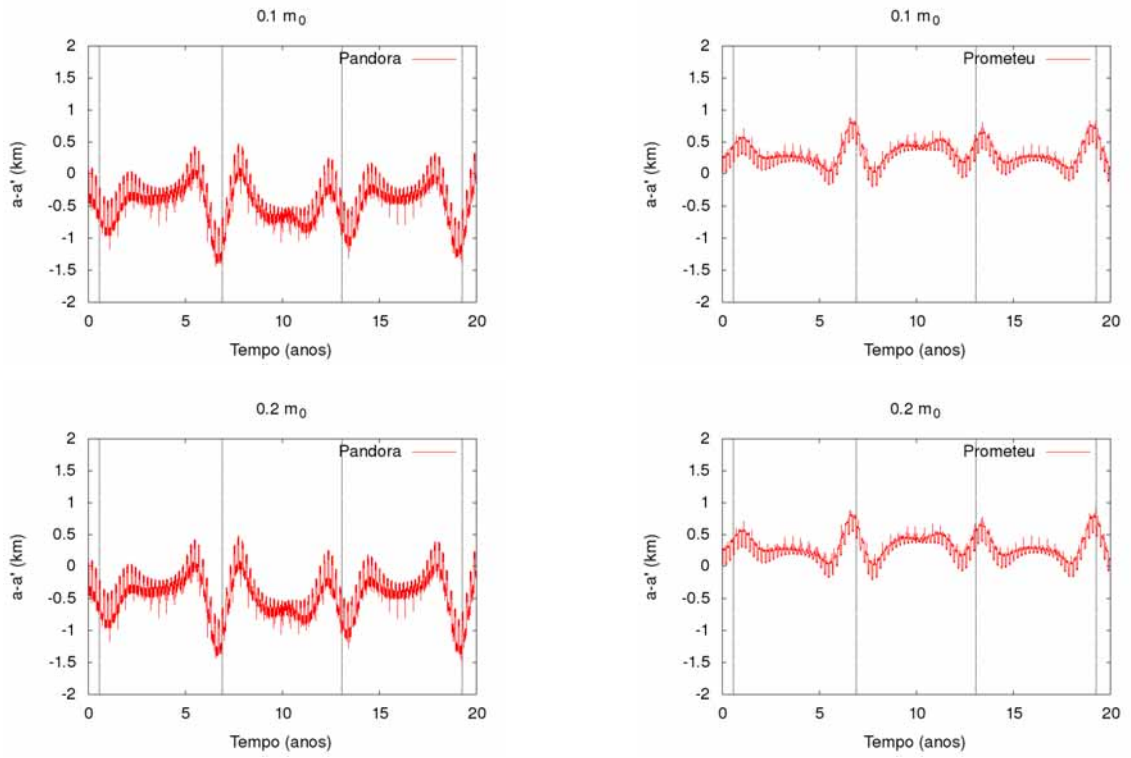


Figura 7.2: Evolução dos semi-eixos maiores de Pandora e Prometeu considerando 0.1 massas iniciais (superiores) e 0.2 massas iniciais (inferiores).

Podemos perceber a partir das figuras anteriores que não houveram mudanças qualitativas e quantitativas nas evoluções temporais dos semi-eixos maiores dos satélites quando consideradas 0.1 e 0.2 partes da massa inicial total. Esses comportamentos se repetem em média para os outros valores de massa até 0.9.

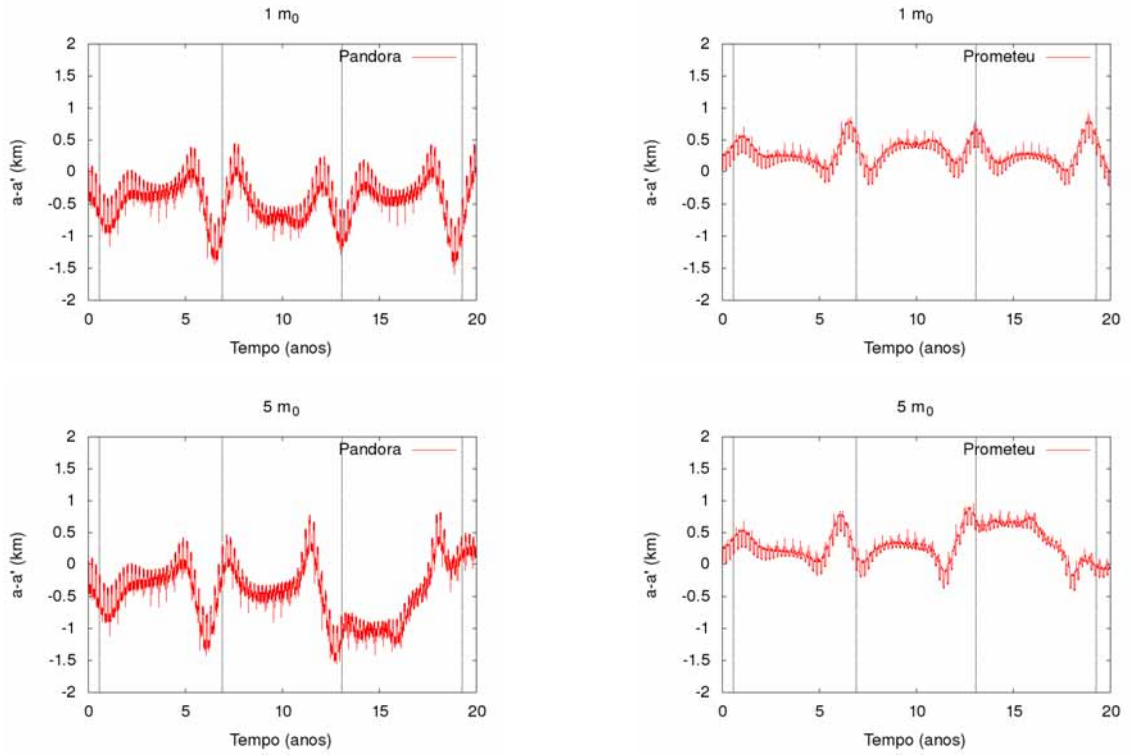


Figura 7.3: Evolução dos semi-eixos maiores de Pandora e Prometeu considerando 1 massa inicial (superiores) e 5 massas iniciais (inferiores).

Para os valores intermediários de massa (1 massa inicial e 5 massas iniciais) exemplificados na figura 7.3, percebemos comportamentos distintos. Quando consideramos uma vez a massa inicial do anel, o comportamento da evolução dos semi-eixos maiores se mantém como no caso inicial, porém, como podemos verificar com maior clareza na figura 7.1, o valor da variação aumenta em 100 m. No caso que consideramos cinco vezes a massa inicial, podemos apontar uma alteração no comportamento da evolução dos semi-eixos maiores a partir de $t \sim 13$ anos, quando a estrutura conhecida para a evolução é desfeita. É o caso de máxima variação nas amplitudes observadas, aproximadamente 450 m para Pandora e 300 m para Prometeu.

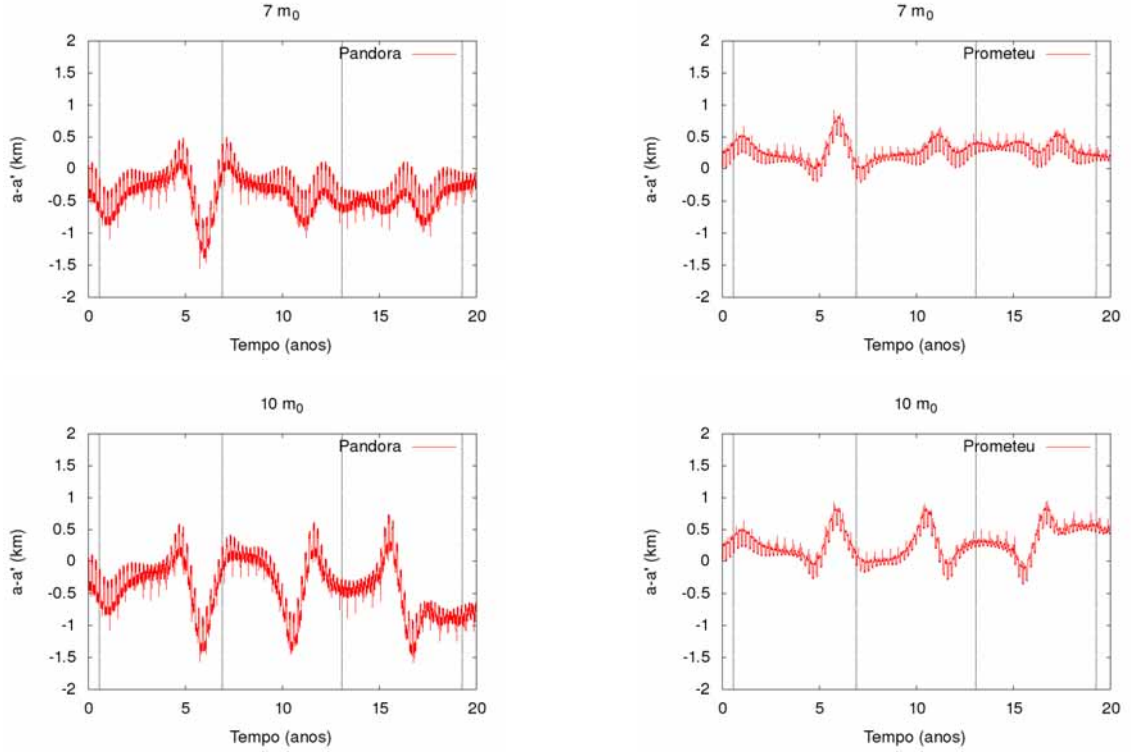


Figura 7.4: Evolução dos semi-eixos maiores de Pandora e Prometeu considerando 7 massas iniciais (superiores) e 10 massas iniciais (inferiores).

Estendendo nossa análise para o caso que consideramos sete vezes a massa inicial (figura 7.3, superiores), podemos observar a alteração provocada no comportamento dos semi-eixos maiores devido à massa adicionada. As estruturas começam a diferir mais visivelmente das iniciais a partir de aproximadamente sete anos de integração. Porém os valores das variações das amplitudes são menores do que se esperava para provocar tais discrepâncias, 100 m para Pandora e 50 m para Prometeu.

Quando consideramos a quantidade máxima testada, de dez vezes o valor da massa inicial, o resultado é diferente do esperado. Mesmo sendo o maior valor adicionado de massa, este não reproduz a maior variação no sistema. O comportamento dos semi-eixos maiores não difere significativamente dos iniciais, sendo que somente a partir de quinze anos de integração é possível perceber uma diferença razoável. Os valores de variação das amplitudes são de 400 m para Pandora e 225 m para Prometeu, como podemos confirmar na figura 7.1.

Os resultados encontrados são inesperados uma vez que o aumento da massa para o anel faria com que ocorresse um aumento linear. Porém os semi-eixos maiores voltam a ter suas variações diminuídas para valores de massa maiores que nove vezes a massa inicial (Figura 7.1).

Além disso, para obter uma alteração qualitativa mínima na evolução temporal dos semi-eixos maiores dos satélites é necessário adicionar cinco vezes a massa inicial mensurada para o anel a qual podemos tomar como limite superior para a sua massa, porém esse limite é grande o suficiente para ser desconsiderado.

Capítulo 8

Análise de massas

Comparado as defasagens observadas dos satélites e as defasagens calculadas a partir de modelos analíticos e integrações numéricas pode-se notar diferenças entre esses valores. Neste capítulo buscamos uma possível ferramenta de correção desta divergência. Partindo da conservação do momento angular do sistema, propomos que uma alteração na razão de massas dos satélites torna possível compatibilizar as diferenças encontradas.

8.1 Os valores observados e calculados

Diversas observações dos satélites Prometeu e Pandora foram feitas a partir das sondas Voyager I e II e do *HST*. Em French et al. (2003) os autores determinam elementos orbitais de Prometeu, Pandora e mais nove satélites de Saturno a partir de análise das imagens obtidas por estas sondas. Os autores computaram os valores de longitudes médias para cada data de observação e a partir deles calcularam defasagens para os satélites. A Tabela 8.1 apresenta alguns desses valores, além da razão entre eles, isto é $\Delta\lambda_{pro}/\Delta\lambda_{pan}$ denominado $\mathcal{Q}$. Algumas datas de observações apresentam apenas valor de defasagem para um dos dois satélites devido à qualidade da imagem ou a ausência de tal satélite na imagem da data. Estes dados não foram computados na tabela pois estaremos interessados na razão $\mathcal{Q}$ entre os valores de defasagem dos mesmos.

Da Tabela 8.1 temos que a defasagem média observada para Prometeu é $22,56^\circ$ e para Pandora é de $24,94^\circ$. Além disso, $\mathcal{Q}$ tem média de 0,90. Observando os valores extremos, a razão mínima $\mathcal{Q}_{min}$ é 0,83 em novembro de 1994 e a razão máxima $\mathcal{Q}_{max}$ é de 0,96 que se repete durante novembro e dezembro de 2000.

Podemos notar que ao longo das datas apresentadas os valores de $\Delta\lambda$ diferem consideravelmente uns dos outros, o que está relacionado ao caos existente no sistema. Porém os valores de $\mathcal{Q}$ resultam em valores aproximadamente iguais. Isto se deve a conservação de mo-

$\Delta\lambda$ Defasagens observadas ($^{\circ}$)			
Data	Prometeu	Pandora	$\mathcal{Q}$
Novembro 1994	-19,82 $\pm$ 0,27	23,93 $\pm$ 0,20	0,83
Maio 1995	-20,41 $\pm$ 0,08	23,98 $\pm$ 0,07	0,85
Agosto 1995	-20,18 $\pm$ 0,18	32,30 $\pm$ 0,22	0,87
Agosto 1995	-20,28 $\pm$ 0,08	23,48 $\pm$ 0,06	0,86
Novembro 1995	-20,40 $\pm$ 0,08	23,00 $\pm$ 0,09	0,89
Novembro 1995	-20,32 $\pm$ 0,16	22,85 $\pm$ 0,16	0,89
Setembro de 1996	-20,93 $\pm$ 0,12	24,53 $\pm$ 0,09	0,85
Outubro 1997	-21,82 $\pm$ 0,06	23,82 $\pm$ 0,08	0,92
Dezembro 1997	-21,92 $\pm$ 0,07	24,63 $\pm$ 0,14	0,89
Outubro 1998	-22,51 $\pm$ 0,05	25,11 $\pm$ 0,19	0,89
Outubro 1998	-22,55 $\pm$ 0,15	24,95 $\pm$ 0,07	0,90
Agosto 1999	-22,96 $\pm$ 0,15	24,98 $\pm$ 0,09	0,92
Novembro 1999	-23,19 $\pm$ 0,29	25,70 $\pm$ 0,18	0,90
Novembro 1999	-23,18 $\pm$ 0,11	25,79 $\pm$ 0,22	0,89
Agosto 2000	-23,87 $\pm$ 0,39	25,35 $\pm$ 0,16	0,94
Novembro 2000	-24,20 $\pm$ 0,10	25,08 $\pm$ 0,18	0,96
Novembro 2000	-24,19 $\pm$ 0,19	25,12 $\pm$ 0,19	0,96
Dezembro 2000	-24,19 $\pm$ 0,56	25,22 $\pm$ 0,12	0,96
Setembro 2001	-25,39 $\pm$ 0,13	27,70 $\pm$ 0,09	0,91
Novembro 2001	-25,64 $\pm$ 0,56	27,66 $\pm$ 0,12	0,93
Janeiro 2002	-25,91 $\pm$ 0,16	27,51 $\pm$ 0,12	0,94

Tabela 8.1: Valores de defasagens observadas a partir de dados da Voyager I, II e *HST*. Extraído e adaptado de French et al. (2003).

mento angular e por esse motivo que usaremos $\mathcal{Q}$ para comparações entre dados observados e calculados.

A Tabela 8.2 apresenta, para fins comparativos, uma síntese dos resultados obtidos nos Capítulos 3 e 4 deste trabalho bem como as razões de defasagem calculadas a partir deles. Os resultados oriundos de dois modelos de GR03b para as defasagens de Prometeu e Pandora também são apresentados na Tabela 8.2. Os valores retirados de GR03b tem precisão de 1° pois são oriundos da análise visual de gráficos.

$\Delta\lambda$ Defasagens calculadas ($^\circ$)			
Modelo	Prometeu	Pandora	$\mathcal{Q}$
Numérico ^a	-14	23	0,61
Numérico	-12,21	20,46	0,60
Analítico completo ^a	-12	19	0,63
Analítico completo	-12,60	20,84	0,60

Tabela 8.2: Valores de defasagens calculadas a partir de dois modelos e suas razões.

^aGoldreich & Rappaport (2003b).

Comparando $\mathcal{Q}$ dos dados observacionais (Tabela 8.1) com dos estudos analíticos e numéricos (Tabela 8.2) verifica-se uma significativa discrepância. No caso observacional o valor médio de $\mathcal{Q}$ é aproximadamente 0,90, isto é, aproximadamente 48% superior ao valor médio de $\mathcal{Q}$ para os resultados dos modelos teóricos (analíticos e numéricos) de 0,61.

Para compatibilizar os valores observados e teóricos analisaremos a hipótese que uma alteração na razão das massas dos satélites utilizadas nos modelos teóricos resulte nos valores observados de defasagem. Na próxima seção estudaremos a relação entre estas razões $\mathcal{Q}$ e as massas dos dois satélites envolvidos.

8.2 Conservação do momento angular

Sendo o momento angular total do sistema dado pela soma dos momentos angulares de Prometeu e Pandora e que deve ser constante, temos

$$L = L_{pro} + L_{pan} = \text{constante}, \quad (8.1)$$

onde L é o módulo do momento angular total, L_{pro} o módulo do momento angular de Prometeu e L_{pan} o módulo do momento angular de Pandora.

No caso de uma excentricidade muito pequena ($e \ll 0$), o semi-eixo maior é praticamente igual ao raio orbital ($r \sim a$) e a velocidade orbital pode ser dada por

$$v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \sim \sqrt{\frac{\mu}{a}}. \quad (8.2)$$

Sabendo que $L = |\vec{r} \times \vec{v}|$ e fazendo uso das aproximações anteriores, podemos reescrever a Equação 8.1 como

$$L = m_{pro}\sqrt{\mu a_{pro}} + m_{pan}\sqrt{\mu a_{pan}} = \text{constante}, \quad (8.3)$$

Tomando o diferencial de L em relação à a_{pan} e a_{pro} temos

$$\Delta a_{pro} = -\frac{m_{pan}}{m_{pro}} \sqrt{\frac{a_{pro}}{a_{pan}}} \Delta a_{pan}. \quad (8.4)$$

onde Δa_{pro} e Δa_{pan} denotam pequenas variações nos semi-eixos maiores de Prometeu e Pandora, respectivamente.

A Equação 8.4 nos dá a relação entre as variações dos semi-eixos maiores como consequência da conservação do momento angular.

No caso analisado neste trabalho, os satélites possuem semi-eixos maiores muito próximos, então a raiz quadrada da razão entre eles é praticamente igual a 1 (0,99) e portanto o quociente entre as variações dos semi-eixos maiores será sensivelmente afetada pela razão das massas.

Esse resultado já foi mostrado visualmente no efeito espelho que aparece nas figuras de defasagens dos satélites nos capítulos anteriores, quando Prometeu tem valores de defasagem crescentes, Pandora apresenta valores decrescentes e a proporcionalidade entre essas variações estão diretamente relacionadas às massas dos dois satélites, como demonstrado aqui.

As massas utilizadas para calcular as defasagens nos modelos teóricos são $5.8 \times 10^{-10} M_{\text{J}}$ (massas de Saturno) para Prometeu e $3.43 \times 10^{-10} M_{\text{J}}$ para Pandora, resultando na razão de massa igual a 0,59, que é aproximadamente o valor das razões $\mathcal{Q}$ de defasagens calculadas a partir de tais massas (Tabela 8.2).

A seguir, iremos obter uma relação entre Δa e $\Delta \lambda$. Lembrando que a longitude média é definida $\lambda = n(t - \tau)$ e que a defasagem é dada por $\Delta \lambda = \lambda_t - \lambda_0$, e assumindo que $\tau = 0$, temos

$$\Delta \lambda = t(n_t - n_{t_0}). \quad (8.5)$$

FAzendo uso da 3ª Lei de Kepler para associar o semi-eixo maior com o movimento médio, temos

$$\Delta\lambda = t \left[\sqrt{\frac{\mu}{(a + \Delta a)^3}} - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \right]. \quad (8.6)$$

Dessa maneira, as defasagens podem ser obtidas a partir dos semi-eixos maiores iniciais (a) e finais ($\Delta a + a$), onde t é o tempo de duração desse fenômeno.

Assim, $\Delta\lambda$ está associado às variações de semi-eixos maiores que por sua vez estão associados às massas (Equação 8.4). Na seção seguinte, a partir dos valores de defasagens observados, iremos procurar quais razões de massas gerariam tais resultados.

8.3 Razão de massas entre Prometeu e Pandora

Utilizando a Equação (8.6) partimos de um valor observado de defasagem para calcular qual seria a variação correspondente do semi-eixo maior de cada satélite. Uma vez conhecido esse valor para os dois satélites, substituímos na Equação 8.4, com os valores de semi-eixos maiores constantes apresentados na Tabela 3.3 e encontramos qual seria a razão de massa dos satélites que provocaria o valor de defasagem observado.

Para uma análise comparativa escolhemos as datas de observações com os valores extremos de $\mathcal{Q}$: novembro de 1994 e dezembro de 2000 (Tabela 8.3).

$\Delta\lambda$ Defasagens observadas ($^{\circ}$)			
Data	Prometeu	Pandora	$\mathcal{Q}$
Novembro 1994	-19,82 $\pm$ 0,27	23,93 $\pm$ 0,20	0,83
Dezembro 2000	-24,19 $\pm$ 0,56	25,22 $\pm$ 0,12	0,96

Tabela 8.3: Valores de defasagens observadas a partir de dados da Voyager I, II e *HST*. Extraído e adaptado de French et al. (2003).

Para novembro de 1994 temos uma razão de defasagem $\mathcal{Q}$ de 0,83 (Tabela 8.3). Utilizando os passos descritos anteriormente, calculamos a razão de massa que implicaria nesse valor de $\mathcal{Q}$. O valor encontrado foi 0,80. Dessa maneira, fixamos a massa de Prometeu de $5.8 \times 10^{-10} M_{\text{H}}$ e alteramos a massa de Pandora de $3.43 \times 10^{-10} M_{\text{H}}$ para $4.64 \times 10^{-10} M_{\text{H}}$. Assim, com a nova massa de Pandora definida, evoluímos o sistema no modelo analítico e numérico. Os resultados encontrados estão apresentados na Tabela 8.4.

De maneira similar calculamos então para o caso máximo de $\mathcal{Q}$, dezembro de 2000 quando o valor de $\mathcal{Q}$ é 0,96. Utilizando a Equação (8.4) calculamos a razão de massa entre os

satélites de 0.93. Mantendo fixa a massa de Prometeu, redefinimos a massa de Pandora para $5.39 \times 10^{-10} M_{\text{J}}$ e recalculamos as defasagens (Tabela 8.4).

$\Delta\lambda$ Defasagens ($^{\circ}$)			
Data	Prometeu	Pandora	$\mathcal{Q}$
Novembro 1994 ^a	-18, 28 $^{\circ}$	22, 34 $^{\circ}$	0, 81
Novembro 1994 ^b	-16, 77 $^{\circ}$	20, 74 $^{\circ}$	0, 81
Dezembro 2000 ^a	-17, 71 $^{\circ}$	18, 63 $^{\circ}$	0, 95
Dezembro 2000 ^b	-18, 71 $^{\circ}$	19, 99 $^{\circ}$	0, 94

Tabela 8.4: Valores de defasagens calculadas a partir de dois modelos utilizando novas razões de massa. Modelo analítico^a, Modelo numérico^b

Os valores de $\mathcal{Q}$ obtidos são aproximadamente iguais aos observados, ainda que com uma diferença de 0,02 do $\mathcal{Q}$, que provavelmente se deve às aproximações feitas nas expressões analíticas desenvolvidas no início deste capítulo. Uma outra hipótese para essa incerteza está em termos desenvolvido a Equação 8.6 utilizando a 3ª Lei de Kepler, isto é, desconsiderando os harmônicos J_n . Tendo em vista isso, recalculamos os Δa 's incluindo J_2 , J_4 e J_6 e verificamos que o efeito é da ordem de 10^{-3} no valor de Δa , sendo assim desprezível.

Quanto aos valores finais de defasagens há uma incerteza inerente nessas grandezas devido à presença de caos no sistema, que é inclusive o motivo pelo qual trabalhamos com as razões entre eles, contornando essa dificuldade de análise de resultados.

Outra observação importante é que durante o processo de redefinir as massas poderíamos fixar a massa de Pandora e alterar a de Prometeu, diminuindo-a. Porém, diminuir as massas do sistema implicaria em diminuir os valores de defasagens resultantes e uma vez que os resultados obtidos por modelos eram menores que os observados, optamos por aumentar a massa de Pandora.

Uma outra análise foi feita utilizando os modelos teóricos para calcular as defasagens dos satélites para essas mesmas datas, porém desta vez mantendo a razão de massa anterior de 0,59 utilizada em GR03a/b. Os resultados se encontram na Tabela 8.5.

$\Delta\lambda$ Defasagens ($^{\circ}$)			
Data	Prometeu	Pandora	$\mathcal{Q}$
Novembro 1994 ^a	-9,05	15,18	0,60
Novembro 1994 ^b	-8,33	13,96	0,60
Dezembro 2000 ^a	-12,61	21,15	0,60
Dezembro 2000 ^b	-11,81	19,80	0,60

Tabela 8.5: Valores de defasagens calculadas a partir de dois modelos utilizando mesma razão de massa de GR03a. Modelo analítico^a, Modelo numérico^b

Os valores obtidos para as razões de defasagem $\mathcal{Q}$ tem média de 0,60 que resulta em uma diferença de 0,2 a 0,3 dos observados. As diferenças são de uma ordem de grandeza maior que as obtidas com a nova razão de massa definida (0,02). Esses resultados reforçam que a mudança de razão de massa é a chave para a correção dos valores calculados.

8.4 Densidades: Massas e Volumes

Diversos autores derivaram volumes e massas para Prometeu e Pandora através de diferentes métodos e aproximações.

Em Thomas et al. (1983) os autores ajustam volumes para os satélites por meio de análise de imagens das Voyager I e II.

Showalter & Burns (1982), a partir de um estudo numérico envolvendo as perturbações gravitacionais de satélites no anel-F, utilizam o volume de Thomas et al. (1983) e assumem uma densidade média de $\rho = 1,2 \pm 0.2 \text{ g/cm}^3$ para calcular massas para Prometeu e Pandora.

Lissauer & Peale (1986) analisam as estruturas do anel-F utilizando um modelo dinâmico e também fazem uso dos volumes calculados por Thomas et al. (1983) para mensurar as massas dos satélites, tomando uma densidade de 1 g/cm^3 .

A partir dados obtidos pelas Voyager I e II, Thomas (1989) mensura coordenadas de contorno para as formas de Prometeu e Pandora e a partir desses dados aproxima o melhor volume elipsoidal para cada um dos satélites. Devido à uma dificuldade no ajuste do modelo para satélites pequenos, os volumes elipsoidais de Prometeu e Pandora são aproximados por um raio médio. A partir desse volume e uma relação de densidade, velocidade angular e a constante gravitacional, calculam as densidades médias para os satélites.

Rosen et al. (1991), a partir de um modelo de radio ocultação para analisar estruturas ressonantes, utilizam os volumes apresentado em Thomas (1989) para estimar novas massas para Pandora e Prometeu.

Em Nicholson et al. (1992), a partir de estudos astrometria das imagens da câmara infravermelha do Telescópio Caltech Cassegrain combinados com dados da Voyager, os autores calculam a densidade para os satélites Janus e Epimetheus. Por motivos de similariedade entre os satélites, como ordem de volume, localização, a densidade encontrada para Epimetheus será adotada por diferentes autores para calcular as massas de Prometeu e Pandora.

Stooke (1993) apresenta um complexo trabalho de derivação das formas e características das superfícies de Prometeu e Pandora. Baseado em imagens das Voyager I e II, o autor faz um estudo topográfico para os satélites partindo dos volumes obtidos por Thomas et al. (1983). Ao recalculer os volumes dos satélites, Prometeu passa a ter $3,9 \pm 1,0 \times 10^5 \text{ km}^3$, uma diferença significativa do resultado de Thomas (1989), de $5,3 \pm 10^5 \text{ km}^3$. Segundo o autor, isso se deve a uma pequena diferença no valor de um eixo intermediário oriundo da consideração de uma grande depressão e crateras na superfície do satélite. Para o volume de Pandora, não foi encontrada uma diferença significativa do volume já derivado por Thomas (1989), de $3,1 \pm 1,0 \times 10^5 \text{ km}^3$. Para estimar as massas dos satélites foi assumida a densidade de Epimetheus (Nicholson et al. 1992).

Gózdziwski & Maciejewski (1995) estudaram um modelo de ondas gravitacionais de Pandora e Prometeu e otimizaram os valores topográficos derivados em Stooke (1993) a partir de um algoritmo de cálculo do potencial por integração numérica.

Renner et al. (2005) a partir de um modelo dinâmico para o sistema Prometeu-Pandora, deriva possíveis massas para os satélites utilizando dados de observação das Voyager I e II. Os autores utilizam os volumes apresentados por Thomas (1989).

As Tabelas 8.6 e 8.7 resumem os principais resultados dos trabalhos comentados anteriormente nesta seção para cada um dos satélites.

Pandora			
Artigo	Massa ($\times 10^{20} \text{ g}$)	Volume ($\times 10^5 \text{ km}^3$)	Densidade ($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)
Thomas et al. (1983) ^a	-	3,18	-
Showalter & Burns (1982)	$3,80 \pm 2$	(a)	$1,2 \pm 0,2$
Lissauer & Peale (1986)	3,40	(a)	1,0
Thomas (1989) ^b	$2,64^{+1,54}_{-0,96}$	$3,1 \pm 0,7$	$0,85^{+0,25}_{-0,15}$
Rosen et al. (1991)	$1,31 \pm 0,66$	(b)	$0,42^{+0,28}_{-0,24}$
Stooke (1993)	$2,2 \pm 1,0$	$3,1 \pm 1,0$	0,70
Gózdziwski & Maciejewski (1995)	2,174	$3,105 \pm 0,273$	$0,7 \pm 0,1$
Renner et al. (2005)	$1,54^{+0,16}_{-0,36}$	(b)	$0,49^{+0,05}_{-0,12}$

Tabela 8.6: Massas, volumes e densidades para Pandora calculados por diversos autores

Prometeu			
Artigo	Massa (10^{20} g)	Volume (10^5 km ³)	Densidade (g cm ⁻³)
Thomas et al. (1983) ^a	-	5,50	-
Showalter & Burns (1982)	$6,69 \pm 3,3$	(a)	$1,2 \pm 0,2$
Lissauer & Peale (1986)	5,68	(a)	1,0
Thomas (1989) ^b	$4,08 \pm 0,9$	$5,3 \pm 1,0$	$0,77^{+0,02}_{-0,05}$
Rosen et al. (1991)	$1,45 \pm 0,68$	(b)	$0,27^{+0,16}_{-0,14}$
Stooke (1993)	$2,7 \pm 1,0$	$3,9 \pm 1,0$	0,70
Gózdziwski & Maciejewski (1995)	2,727	$3,892 \pm 0,324$	$0,7 \pm 0,1$
Renner et al. (2005)	$2,11^{+0,16}_{-0,37}$	(b)	$0,40^{+0,03}_{-0,07}$

Tabela 8.7: Massas, volumes e densidades para Prometeu calculados por diversos autores.

Pelo histórico apresentado selecionamos duas possibilidades para os volumes dos satélites: Thomas (1989) por ser utilizado em um número significativo de trabalhos, incluindo o mais recente (Renner et al. 2005) e Gózdziwski & Maciejewski (1995) por ser uma versão mais precisa dos volumes de Stooke (1993) que apresentou uma correção significativa no volume de Prometeu quando considerou a existência de uma depressão em sua superfície. Dessa maneira, utilizaremos esses dois modelos para analisar as massas deduzidas da conservação do momento angular na seção anterior.

A Tabela 8.8 apresenta as densidades resultantes para os satélites oriundas de cada modelo de volume, fixando a massa de Prometeu em $5,8 \times 10^{-10} M_{\text{h}}$ e alternando a massa de Pandora entre $4,64 \times 10^{-10} M_{\text{h}}$ no caso de $\mathcal{Q}_{\min}$ e $5,39 \times 10^{-10} M_{\text{h}}$ no caso $\mathcal{Q}_{\max}$.

Densidades (ρ)			
		Thomas (1989)	Gózdziwski & Maciejewski (1995)
Pandora	$\mathcal{Q}_{\min}$	0,85	0,85
	$\mathcal{Q}_{\max}$	0,99	0,99
Prometeu	$\mathcal{Q}_{\min}$	0,62	0,85
	$\mathcal{Q}_{\max}$	0,62	0,85

Tabela 8.8: Densidades calculadas a partir de novas massas e dois modelos.

Da Tabela 8.8 podemos identificar intervalos de densidades para os satélites, de $[0,85 - 0,99]$ e $[0,62 - 0,85]$ para Pandora e Prometeu, respectivamente. Esses intervalos corroboram com as densidades calculadas em Thomas (1989), Stooke (1993) e Gózdziwski & Maciejewski

(1995).

Em função da grande precisão que temos devido às medições de defasagem dos satélites, conseguimos encontrar uma relação entre as massas de Prometeu e Pandora resultante da conservação do momento angular. Essa relação nos indica que a massa de Pandora deve ser mais próxima (80% - 93%) da de Prometeu . Por exemplo, para a massa $5,9M_{\text{h}}$ de Prometeu, a massa de Pandora deveria ser maior que a adotada usualmente ($3,43M_{\text{h}}$), entre um intervalo de $[4,72 - 5,39] \times 10^{-10} M_{\text{h}}$.

Capítulo 9

Considerações Finais

Os trabalhos Goldreich & Rappaport (2003a,b) baseiam-se na premissa de que as defasagens são resultantes da caoticidade do sistema, consequente da interação entre Prometeu e Pandora associadas a uma ressonância 121:118 de seus movimentos médios. Ao estudar o trabalho de Goldreich & Rappaport (2003a) inicialmente nos deparamos com dificuldades para encontrar os dados iniciais utilizados pelos autores. Após testarmos todas as opções indicadas pelos mesmos, concluímos que seus próprios dados não reproduzem seus resultados. Em nossa análise feita para o modelo analítico apresentado em Goldreich & Rappaport (2003b), que leva em conta a ressonância 121:118 entre os satélites Prometeu e Pandora, obtivemos resultados bem próximos aos dos autores. Isso reforça a possibilidade de que essa ressonância seja de importância considerável para o sistema estudado.

Cruz (2004) considera essa ressonância citada fraca para reproduzir tal resultado e propõe que os dados iniciais utilizados em GR03a e GR03b foram calculados a partir de observações de uma época muito particular e que não representam da melhor maneira o comportamento dos satélites. Para confirmar sua teoria o autor explora os semi-eixos maiores das órbitas de Prometeu e Pandora, onde é possível identificar que a data inicial das integrações não seria um melhor momento para se obter dados iniciais.

Para o trabalho de Cruz (2004), reproduzimos as análises das evoluções dos semi-eixo maiores dos satélites e corroboramos o resultado de que os dados iniciais utilizados para extrair os elementos orbitais dos satélites são de um momento muito específico e não ideais para representar seus comportamentos.

Ao testarmos a ressonância 121:118, simulando quais seriam as defasagens quando levadas em conta apenas alguns dos quatro termos que a compõem, quando não apenas um, já encontramos valores significativos destas. Outras ressonâncias de ordem três não apresentaram valores para as defasagens e ainda ressonâncias de ordem dois apresentaram valores maiores que os observados. Novas análises se fazem necessárias para o entedimento desse resultado.

Os estudos em torno de Cruz (2004) e GR03a, b indicam que as defasagens observadas são originárias da utilização de uma condição inicial do momento de anti-alinhamento dos periapses orbitais dos satélites, que uma vez relacionados pela ressonância 121:118, geram as defasagens.

No estudo feito para mensurar a massa do anel F constatamos que ao acrescentar massa ao anel as variações das evoluções dos semi-eixos maiores dos satélites não se alteram linearmente. Um valor limite superior de cinco vezes a massa inicial do anel foi encontrado, porém trata-se de um valor alto o suficiente para não ser considerado para mensurar a massa do anel.

Mostramos nesse trabalho que podemos utilizar a grande precisão medida pelas defasagens para calcular a razão das massas dos satélites, que deve obedecer à conservação do momento angular. Devido à essa precisão, temos com segurança que a massa de Pandora deve ser maior que a usualmente adotada pela comunidade científica ($3,43M_{\text{h}}$). Segundo nossos resultados o valor está dentro do intervalo $[4.72 - 5.39] \times 10^{-10} M_{\text{h}}$.

Bibliografia

- BARBARA, J. M. & ESPOSITO, L. W. Moonlet collisions and the effects of tidally modified accretion in saturn's f ring. *Icarus*, 160:161–171, 2002.
- BULIRSCH, R. & STOER, J. *Introdution to Numerical Analysis*. Springer Verlag, New York, 1980.
- CAMPBELL, J. K. & ANDERSON, J. D. Gravity field of the saturnian system from pioneer and voyager tracking data. *AJ*, 97:1485–1495, 1989.
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304:793–799, 1999.
- COOPER, N. J. & MURRAY, C. D. Dynamical influences on the orbits of prometheus and pandora. *AJ*, 127:1204–1217, 2004.
- CRUZ, C. *Estudo da Dinâmica do Sistema Prometeu – Pandora – Anel F de Saturno*. Master's thesis, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, 2004.
- CUZZI, J. N. & BURNS, J. A. Charged particle depletion surrounding saturn's f ring - evidence for a moonlet belt? *Icarus*, 74:284–324, 1988.
- ESPOSITO, L. Drunken shepherds: Random walk models for pandora and prometheus. In A. Tzanis, editor, *EGS General Assembly Conference Abstracts*, volume 27 of *EGS General Assembly Conference Abstracts*, page 5215. 2002.
- EVANS, M. W. *The Determination of Orbits From Spacecraft Imaging*. Ph.D. thesis, Queen Mary College, University of London, 2001.
- FRENCH, R. G., HALL, K. J., MCGHEE, C. A., NICHOLSON, P. D., CUZZI, J., DONES, L., & LISSAUER, J. The peregrinations of prometheus. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting 30*, volume 30 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 1141. 1998.

- FRENCH, R. G., MCGHEE, C. A., DONES, L., & LISSAUER, J. J. Saturn's wayward shepherds: the peregrinations of prometheus and pandora. *Icarus*, 162:143–170, 2003.
- GIORGINI, J. D., YEOMANS, D. K., CHAMBERLIN, A. B., CHODAS, P. W., JACOBSON, R. A., KEESEY, M. S., LIESKE, J. H., OSTRO, S. J., STANDISH, E. M., & WIMBERLY, R. N. Bulletin of the american astronomical society. In *Bulletin of the AAA*, page 1158. 1996.
- GOLDREICH, P. & RAPPAPORT, N. Chaotic motions of prometheus and pandora. *Icarus*, 162:391–399, 2003a.
- GOLDREICH, P. & RAPPAPORT, N. Origin of chaos in the prometheus-pandora system. *Icarus*, 166:320–327, 2003b.
- GOLDREICH, P. & TREMAINE, S. Towards a theory for the uranian rings. *Nature*, 277:97–99, 1979.
- GÓZDZIEWSKI, K. & MACIEJEWSKI, A. J. On the gravitational fields of pandora and prometheus. *Earth Moon and Planets*, 69:25–50, 1995.
- LISSAUER, J. J. & PEALE, S. J. The production of 'braids' in saturn's f ring. *Icarus*, 67:358–374, 1986.
- MCGHEE, C. A., NICHOLSON, P. D., FRENCH, R. G., & HALL, K. J. Hst observations of saturnian satellites during the 1995 ring plane crossings. *Icarus*, 152:282–315, 2001.
- MURRAY, C. D. & DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- MURRAY, C. D. & GIULIATTI WINTER, S. M. Periodic collisions between the moon prometheus and saturn's f ring. *Nature*, 380:139–141, 1996.
- MURRAY, C. D., GORDON, M. K., & GIULIATTI WINTER, S. M. Unraveling the strands of saturn's f ring. *Icarus*, 129:304–316, 1997.
- NICHOLSON, P. D., HAMILTON, D. P., MATTHEWS, K., & YODER, C. F. New observations of saturn's coorbital satellites. *Icarus*, 100:464–484, 1992.
- NICHOLSON, P. D. & PORCO, C. C. A new constraint on saturn's zonal gravity harmonics from voyager observations of an eccentric ringlet. *J. Geophys. Res.*, 93:10209–10224, 1988.

- PORCO, C. C., BAKER, E., BARBARA, J., BEURLE, K., BRAHIC, A., BURNS, J. A., CHARNOZ, S., COOPER, N., DAWSON, D. D., DEL GENIO, A. D., DENK, T., DONES, L., DYUDINA, U., EVANS, M. W., GIESE, B., GRAZIER, K., HELFENSTEIN, P., INGERSOLL, A. P., JACOBSON, R. A., JOHNSON, T. V., MCEWEN, A., MURRAY, C. D., NEUKUM, G., OWEN, W. M., PERRY, J., ROATSCH, T., SPITALE, J., SQUYRES, S., THOMAS, P., TISCARENO, M., TURTLE, E., VASAVADA, A. R., VEVERKA, J., WAGNER, R., & WEST, R. Cassini imaging science: Initial results on saturn's rings and small satellites. *Science*, 307:1226–1236, 2005.
- POULET, F. & SICARDY, B. Dynamical evolution of the prometheus-pandora system. *MNRAS*, 322:343–355, 2001.
- RENNER, S. & SICARDY, B. Consequences of the chaotic motions of prometheus and pandora. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting 34*, volume 35 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 1044. 2003.
- RENNER, S. & SICARDY, B. Use of the geometric elements in numerical simulations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94:237–248, 2006.
- RENNER, S., SICARDY, B., & FRENCH, R. G. Prometheus and pandora: masses and orbital positions during the cassini tour. *Icarus*, 174:230–240, 2005.
- ROSEN, P. A., TYLER, G. L., MAROUF, E. A., & LISSAUER, J. J. Resonance structures in saturn's rings probed by radio occultation. ii - results and interpretation. *Icarus*, 93:25–44, 1991.
- SANTANA, T. Reanálise das defasagens de prometeu e pandora, 2012. Trabalho de conclusão de curso.
- SFAIR, R., WINTER, S. M. G., MOURÃO, D. C., & WINTER, O. C. Dynamical evolution of saturn's f ring dust particles. *MNRAS*, 395:2157–2161, 2009.
- SHOWALTER, M. R. & BURNS, J. A. A numerical study of saturn's f-ring. *Icarus*, 52:526–544, 1982.
- SHOWALTER, M. R., DONES, L., & LISSAUER, J. J. Interactions between prometheus and the f ring. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting 31*, volume 31 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 1228. 1999a.
- SHOWALTER, M. R., DONES, L., & LISSAUER, J. J. Revenge of the sheep: effects of saturn's f ring on the orbit of prometheus. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 31 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 1141. 1999b.

- STOOKE, P. J. The shapes and surface features of prometheus and pandora. *Earth Moon and Planets*, 62:199–221, 1993.
- SÜLI, Á. On the comparison of the different methodes to calculate the derivatives of the laplace-coefficients. *Publications of the Astronomy Department of the Eotvos Lorand University*, 14:267–275, 2004.
- SYNNOTT, S. P., PETERS, C. F., SMITH, B. A., & MORABITO, L. A. Orbits of the small satellites of saturn. *Science*, 212:191, 1981.
- SYNNOTT, S. P., TERRILE, R. J., JACOBSON, R. A., & SMITH, B. A. Orbits of saturn’s f ring and its shepherding satellites. *Icarus*, 53:156–158, 1983.
- THOMAS, P., VEVERKA, J., MORRISON, D., DAVIES, M., & JOHNSON, T. V. Phoebe - voyager 2 observations. *J. Geophys. Res.*, 88:8736–8742, 1983.
- THOMAS, P. C. The shapes of small satellites. *Icarus*, 77:248–274, 1989.

Apêndice

Apêndice A

Cálculo do Coeficiente de Laplace e suas derivadas

Como visto anteriormente neste trabalho, o cálculo dos coeficiente de Laplace bem como o de suas derivadas se fez necessário para compor os coeficientes da função perturbadora apresentada no Capítulo 3.

Inicialmente foi escrita uma rotina utilizando o software Maple 13 a partir da série hipergeométrica descrita em Murray & Dermott (1999). Testou-se a rotina para alguns exemplos disponíveis no livro e os resultados corroboraram com os do livro. Porém ao utilizá-la com os dados de Prometeu e Pandora e a ressonância 121:118 encontramos uma falha. A partir de uma série de testes constatamos que o problema era decorrente do valor $j = 121$, muito alto para as variáveis das rotinas internas do Maple, pois como pode-se verificar na Equação A.7 são calculados produtórios e fatoriais a partir desse valor. A série hipergeométrica tem a forma

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s}, \quad (\text{A.1})$$

onde $s = i + 1/2$ é um meio-inteiro (i.e., $s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$) e $\alpha = a/a'$.

Esses valores teriam feito ultrapassar os limites de armazenamento das variáveis. Em consequência disso partimos para um código em linguagem C. Um nova rotina foi testada (comunicação pessoal Nilton Araújo), baseada em Süli (2004) que contém um simples algoritmo a ser seguido para obter os coeficientes e suas derivadas e que apresentaremos resumidamente a seguir. Para o coeficiente, podemos escrever

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = A_j \alpha^j \sum_{i=0}^{\infty} B_i \alpha^{2i}, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$A_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{j!} & j > 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$B_i = \begin{cases} 1 & i = 0, \\ \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (s+k)(s+j+k)}{i! \prod_{l=1}^i (j+l)} & i > 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

E as derivadas podem ser obtidas como mostram as Equações A.5 e A.6

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = A_j \alpha^{j-n} \sum_{i=0}^{\infty} F_i^{(j,n)} B_i \alpha^{2i} \quad (\text{A.5})$$

$$F_i^{(j,l)} = \prod_{k=0}^{l-1} (l - k + 2i). \quad (\text{A.6})$$

Após alguns testes quanto à ordem da série a ser utilizada percebemos diferentes valores para os coeficientes de Laplace a medida que variávamos essa ordem. Por esse motivo realizamos testes de convergência para o coeficiente e suas derivadas até ordem 3, devido à necessidade desses valores para compor a função perturbadora do problema.

Com $\alpha = 0.98$, $j = 121$ e $s = 1/2$, o coeficiente de Laplace testado tem a forma

$$\frac{1}{2}b_{1/2}^{121}(0.98) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(121)\psi d\psi}{(1 - 2(0.98) \cos \psi + (0.98)^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.7})$$

Os resultados encontram-se nas Figuras A.1-A.4. Em escala logarítmica, plotamos a variação do coeficiente e suas derivadas em função do número de termos da série (i). Repetimos o processo para testar as derivadas de ordem um até três.

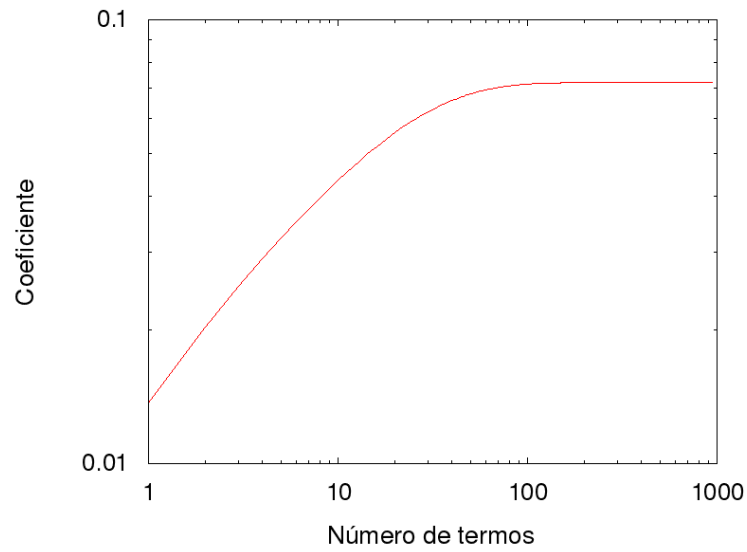


Figura A.1: Convergência do coeficiente de Laplace. Em escala logarítmica, a variação dos valores do coeficiente de Laplace por número de termos (i) da série utilizada.

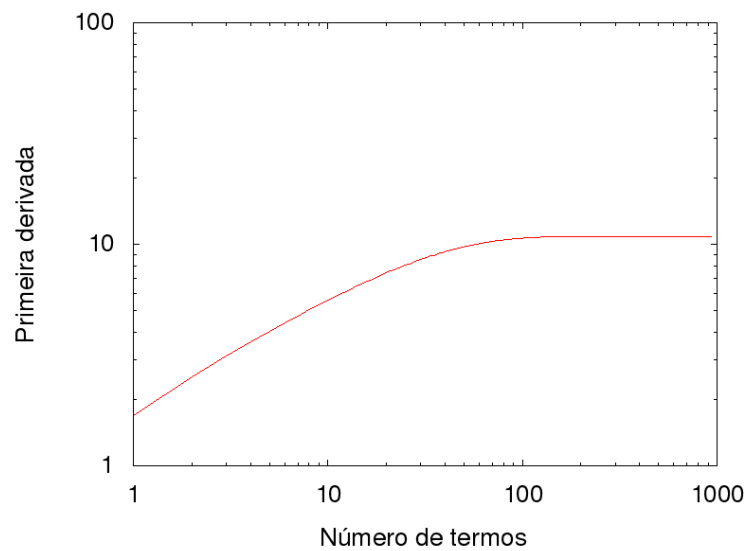


Figura A.2: Convergência da primeira derivada de Laplace. Em escala logarítmica, a variação dos valores da primeira derivada do coeficiente de Laplace por número de termos da série utilizada.

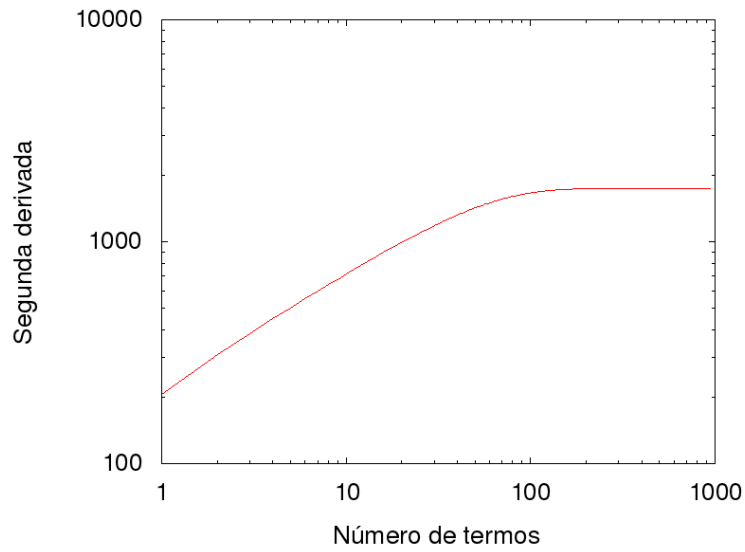


Figura A.3: Convergência da segunda derivada de Laplace. Em escala logarítmica, a variação dos valores da segunda derivada do coeficiente de Laplace por número de termos da série utilizada.

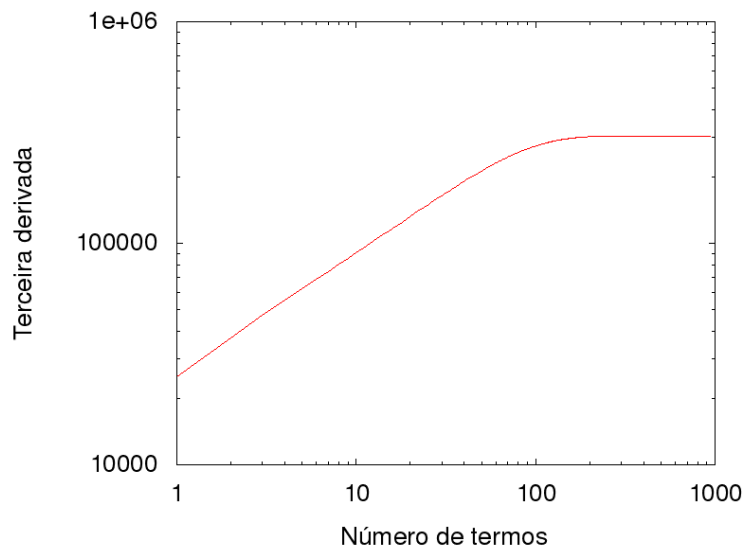


Figura A.4: Convergência da terceira derivada de Laplace. Em escala logarítmica, a variação dos valores da terceira derivada do coeficiente de Laplace por número de termos da série utilizada.

De acordo com os gráficos, constatamos que a partir de 300 interações a série já apresenta uma boa convergência, tomando uma medida extra de segurança utilizamos 500 termos e

calculamos os coeficientes de Laplace e suas derivadas até ordem 3.

Importante observar que para valores $i > 900$ o programa não retorna valores, o que pode estar relacionado ao limite da variável utilizada, como comentado anteriormente neste apêndice.