

UNESP - UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Guaratinguetá

Guaratinguetá

2011

ROGERIO KADOTA

ANÁLISE DE CILINDROS DE PAREDES GROSSAS ATRAVÉS DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Trabalho de Síntese apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Jose Elias Tomazini

Guaratinguetá

2011

K11 6a	<p data-bbox="347 566 564 600">Kadota, Rogério</p> <p data-bbox="347 607 1209 707">Análise de cilindros de paredes grossas através do método dos elementos finitos / Rogério Kadota – Guaratinguetá : [s.n], 2011. 38 f : il.</p> <p data-bbox="435 730 668 763">Bibliografia: f. 38</p> <p data-bbox="387 837 1278 904">Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2011.</p> <p data-bbox="397 927 935 960">Orientador: Prof. Dr. José Elias Tomazini</p> <p data-bbox="408 1055 1118 1088">1. Cilindros 2. Método dos elementos finitos I. Título</p> <p data-bbox="1137 1160 1321 1193">CDU 621.226</p>
-----------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

ANÁLISE DE CILINDROS DE PAREDES GROSSAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS.

ROGERIO KADOTA

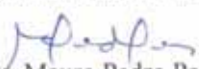
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE
DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **GRADUADO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Mauro Hugo Mathias
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Jose Elias Tomazini
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. Mauro Pedro Peres
UNESP-FEG


Prof. Dr. Mauro Hugo Mathias
UNESP-FEG

Guaratinguetá / SP
Dezembro de 2011

DADOS CURRICULARES

ROGERIO KADOTA

NASCIMENTO	01.10.1986 – SÃO PAULO / SP
FILIAÇÃO	Mario Katsushigue Kadota Rosaura Satiko Assami Kadota
2007/2011	Curso de Graduação Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, companheiro inseparável, por dar forças nos momentos difíceis.

Ao Professor Dr. José Elias Tomazini pela paciência , amizade e principalmente como orientador, o qual me incentivou para que este trabalho pudesse ser concluído.

À minha família, que apesar das dificuldades e barreiras, sempre estiveram ao meu lado apoiando e incentivando os meus estudos e metas.

À minha namorada, Ana Paula, pela compreensão, incentivo e auxílio nos momentos difíceis.

E a todos, que de alguma maneira, ajudaram-me a dar esse importante passo na minha vida.

“Nas grandes batalhas da vida, o primeiro passo para a vitória é o desejo de vencer.”

Gandhi

KADOTA, R. **Análise de cilindros de paredes grossas através do método dos elementos finitos**. 2011. 38 f. Trabalho de Graduação de Engenharia Mecânica - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.

RESUMO

Há tempos estudam-se a distribuição de tensões nos cilindros. Quando a espessura deste for menor ou igual a 10% do raio interno é possível considerar uma distribuição uniforme ao longo da espessura do tubo. Entretanto, quando a espessura for maior que 10% do raio interno é necessário considerar a teoria de cilindros de paredes grossas. Esta teoria demonstra que quando a espessura aumenta relativamente ao raio, as tensões não agem de maneira uniforme. O objetivo deste trabalho é determinar as tensões máximas em cilindros de paredes grossas comparando os resultados obtidos pela teoria da elasticidade e pelo método dos elementos finitos.

PALAVRAS-CHAVE: Cilindros. Paredes grossas. Espessura. Pressão Interna.

KADOTA, R. **Analysis of thick-walled cylinders using the finite element method.** U2011. 38 f. Undergraduate Work of Mechanical Engineering - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2011.

ABSTRACT

Have long studied the distribution of stresses in the cylinder. When this thickness is less than or equal to 10% of the inner radius is possible to consider a uniform distribution along the thickness of the tube. However, when the thickness is greater than 10% of the inner radius is necessary to consider the theory of thick-walled cylinders. This theory shows that when the thickness increases on the radius, the stresses do not act uniformly. The objective of this study is to determine the maximum stresses in thick-walled cylinders by comparing the results obtained by the theory of elasticity and the finite element method.

KEYWORDS: Cylinders. Thick Walls. Thickness. Internal Pressure.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	11
1. INTRODUÇÃO.....	12
1.1 OBJETIVOS	12
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1 CILINDROS	13
2.2 CILINDROS DE PAREDES FINAS.....	15
2.3 CILINDROS DE PAREDES GROSSAS	18
2.3.1 TENSÕES MÁXIMAS.....	21
2.4 ANSYS.....	24
3. METODOLOGIA.....	26
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	27
4.1 MEMORIAL DE CÁLCULOS.....	27
5. CONCLUSÃO.....	38
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	39

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema de coordenadas cilíndricas	13
Figura 2 - Pressão Interna e Externa.....	14
Figura 3 - Dimensões do cilindro	15
Figura 4 - Sistema de Forças	15
Figura 5 - Força resultante.....	16
Figura 6 - Cilindro submetido à pressão interna e externa.....	18
Figura 7 - Tensões tangencial e radial	19
Figura 8 - Tensões tangencial, radial e equivalente	22
Figura 9 - Tensões tangencial,radial e equivalente	24
Figura 10 - Modelagem do exemplo 1	32
Figura 11 - Malha do exemplo 1	32
Figura 12 - Resultado do exemplo 1.....	33
Figura 13 - Modelagem do exemplo 2	33
Figura 14 - Malha do exemplo 2	34
Figura 15 - Resultado do exemplo 2.....	34
Figura 16 - Modelagem do exemplo 3	35
Figura 17 - Malha do exemplo 3	35
Figura 18 - Resultado do exemplo 3.....	36

1. INTRODUÇÃO

Os recipientes submetidos à pressão são classificados como sendo de parede fina se a espessura for menor ou igual a 10% do raio interno. Neste caso as tensões são consideradas uniformes ao longo da espessura do tubo. Quando aumentada-relativamente ao raio, deve-se abandonar esta forma de distribuição uniforme de tensão e considerar segundo a teoria de tubos de paredes grossas. Neste trabalho pretende-se comparar os resultados do método dos elementos finitos aplicado a tubos de diversas espessuras e compará-los com resultados da teoria da elasticidade verificando-se, assim, os erros envolvidos nas considerações sobre tubos de paredes finas e grossas.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é determinar as tensões máximas em cilindros de paredes grossas submetidas à pressão interna e externa através do método dos elementos finitos e comparar com resultados da Teoria da Elasticidade.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 CILINDROS

Atualmente, é possível encontrar muitos equipamentos que utilizam cilindros em suas configurações. Um destes exemplos é o cilindro hidráulico.

Neste trabalho será feito uma análise das tensões que agem nos cilindros e assim projetá-los com uma maior segurança.

É possível visualizar a configuração de um cilindro pela Figura 1:

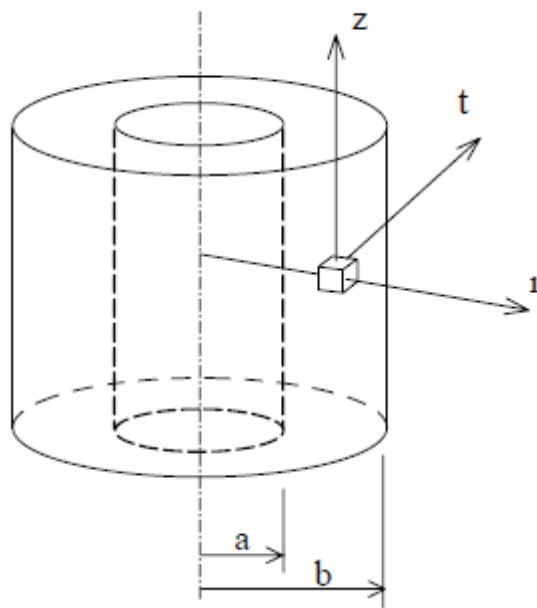


Figura 1 - Sistema de coordenadas cilíndricas

O objetivo deste trabalho é determinar as tensões máximas atuantes nos cilindros de parede grossa. Estas tensões são resultado de pressões internas e externas aplicadas no recipiente cilíndrico. A configuração das pressões está mostrada na figura 2:

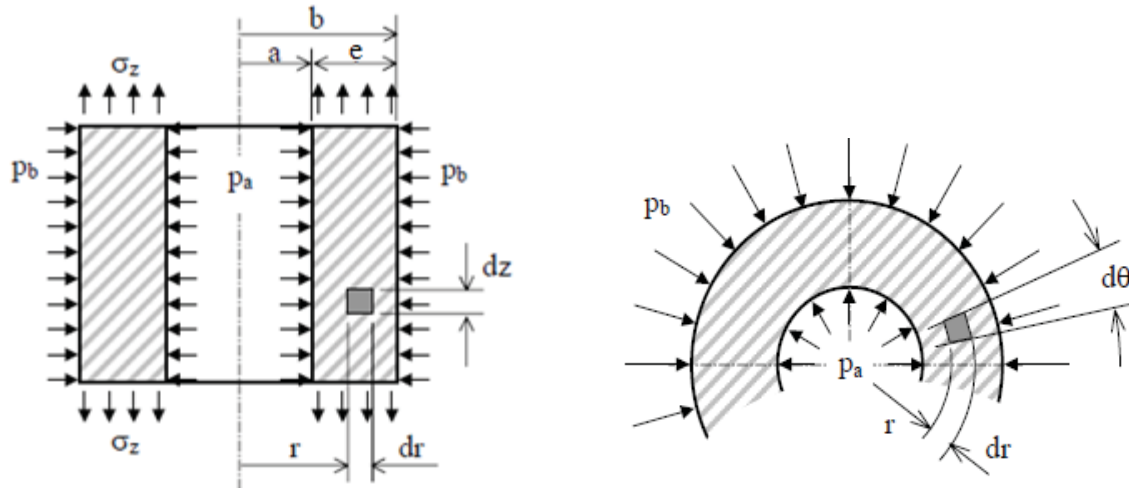


Figura 2 - Pressão Interna e Externa

De acordo com a figura 2 é possível visualizar que o estado de tensão instalado no interior destes cilindros é axissimétrico, ou seja, apresenta simetria em relação ao eixo do cilindro.

Considerando que a peça em análise possui uma secção normal constante ao longo do eixo, a variável circunferencial θ não interfere na obtenção dos valores de tensão. As tensões instaladas no interior do corpo também serão independentes da variável z , levando em consideração que as únicas forças exteriores aplicadas na direção longitudinal só agem nas extremidades do corpo cilíndrico.

Para determinar as tensões no interior do cilindro é necessário conhecer a variação das tensões ao longo da espessura da parede, portanto a variável radial r será a variável relevante do problema.

2.2 CILINDROS DE PAREDES FINAS

Segundo Singer (1971) para um recipiente ser classificado cilindro de paredes finas é necessário que a espessura deste seja menor ou igual a 10% do raio interno.

Assumindo que o cilindro possui paredes finas é possível considerar a hipótese da distribuição de tensões uniforme ao longo da espessura da parede.

Com esta hipótese será permitido obter expressões bastante simples para o cálculo das tensões aplicadas e instaladas no modelo.

Para obter estas expressões será considerado um cilindro de comprimento “L”, de diâmetro “D”, de parede com espessura fina “e” e submetido a uma pressão interna “p” como na Figura 3.

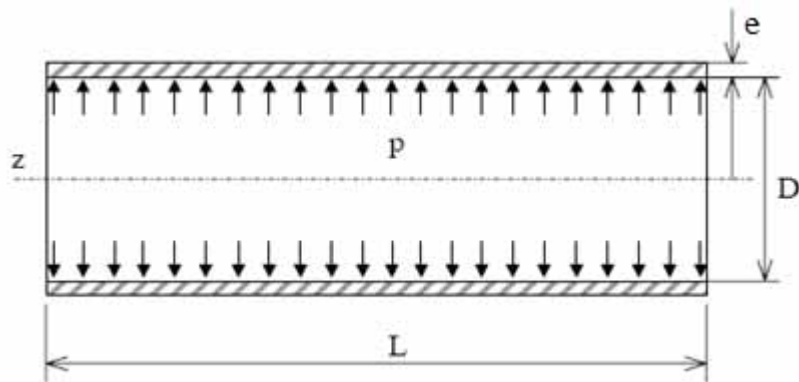


Figura 3 - Dimensões do cilindro

Cortando este cilindro utilizando um plano horizontal que contém o eixo longitudinal z e considerando as condições de equilíbrio do sistema de forças atuantes sobre esta metade inferior do cilindro é possível visualizar a Figura 4.

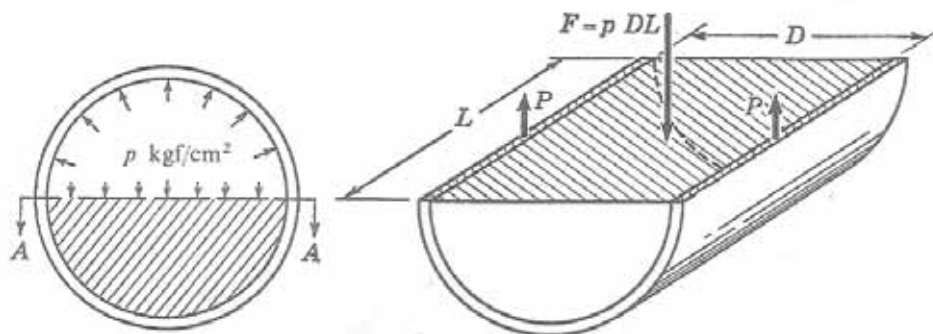


Figura 4 - Sistema de Forças

A resultante das forças de pressão atuantes na superfície interna deste cilindro cortado pelo plano horizontal é uma força vertical cujo valor é:

$$F = p \cdot D \cdot L \quad (1)$$

Na secção cortada do cilindro são exercidas tensões normais resultantes do equilíbrio das duas forças verticais ascendentes “2P” e a força resultante “F”.

Designando essas tensões normais por σ_t e levando em consideração que a secção cortada é constituída por dois retângulos iguais cujos lados são “e” e “L”, então:

$$2P = \sigma_t \cdot 2e \cdot L \quad (2)$$

Pela condição de equilíbrio estático, as expressões dos valores “F” e “2P”, (1) e (2), respectivamente, podem ser iguados resultando numa importante expressão:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot D}{2e} \quad (3)$$

Além das tensões tangenciais ou circunferenciais existentes no cilindro devido a ação de uma pressão interna, é possível existir uma tensão na direção longitudinal, pela-ação da mesma pressão sobre os topos do cilindro.

É possível visualizar a ação desta força resultante na figura 5:

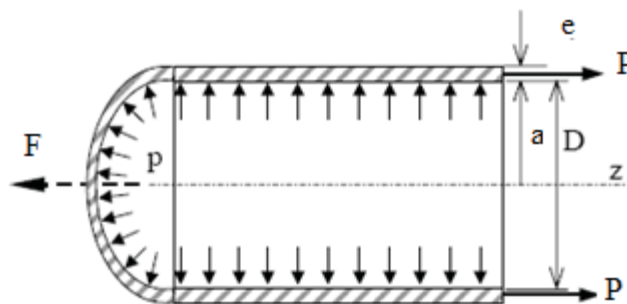


Figura 5 - Força resultante

$$F = p \cdot \pi a^2 \quad (4)$$

Devido a força resultante “P” exercida pelas tensões sobre a secção normal ao eixo do cilindro, a força resultante “F” deverá ser equilibrada. Considerando que a secção normal ao eixo z é uma secção com forma de uma coroa circular com raio interno “a” e raio externo “a + e” e as tensões atuantes nesta secção designadas por σ_z resulta:

$$P = \sigma_z \cdot [\pi(a + e)^2 - \pi a^2] \quad (5)$$

Pela condição de equilíbrio estático é possível igualar os valores definidos pelas expressões (4) e (5) e obter a seguinte expressão em função de σ_z :

$$\sigma_z = \frac{p \cdot a^2}{e(2a + e)} \quad (6)$$

Considerando que na soma “2a + e” a espessura “e” pode ser desprezada quando comparada com “2a” e levando em consideração a hipótese de paredes finas a expressão (6) pode ser simplificada por:

$$\sigma_z = \frac{p \cdot a}{2e} = \frac{p \cdot D}{4e} \quad (7)$$

2.3 CILINDROS DE PAREDES GROSSAS

Nos cilindros de paredes grossas é possível seguir um processo similar ao dos cilindros de paredes finas para determinar a força total transmitida na secção longitudinal.

Em ambos os casos, o valor médio da tensão tangencial é encontrada dividindo a força pela área na qual ela atua.

Segundo Singer (1971) o que diferencia o cilindro de paredes grossas do cilindro de paredes finas é a forma como está dimensionada a sua espessura. No cilindro de paredes grossas, a sua espessura é maior que 10% do raio interno e a distribuição da tensão tangencial não é uniforme.

Gabriel Lamé em 1833 foi responsável pelo estudo da determinação da tensão tangencial σ_{θ} e da tensão radial σ_r em um ponto qualquer em função das pressões internas e externas aplicadas e das condições geométricas.

Considerando um cilindro com as dimensões da Figura 6 e submetendo-o a pressões internas e externas distribuídas uniformemente é possível analisar isoladamente a sua tensão tangencial e radial.

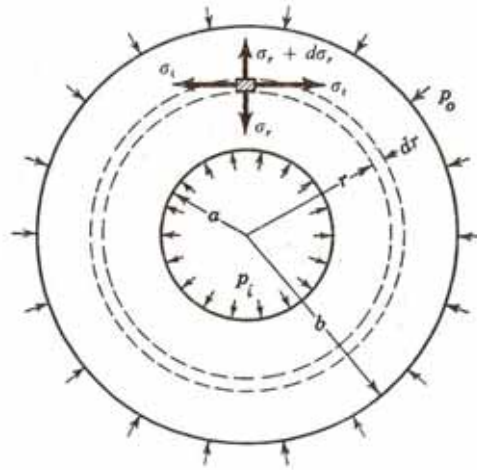


Figura 6 - Cilindro submetido à pressão interna e externa

Isolando um cilindro de espessura diferencial dr e cortando-o utilizando um plano horizontal é possível visualizar a figura 7. Nessa configuração as tensões atuantes são a tensão tangencial σ_t e a tensão radial σ_r .

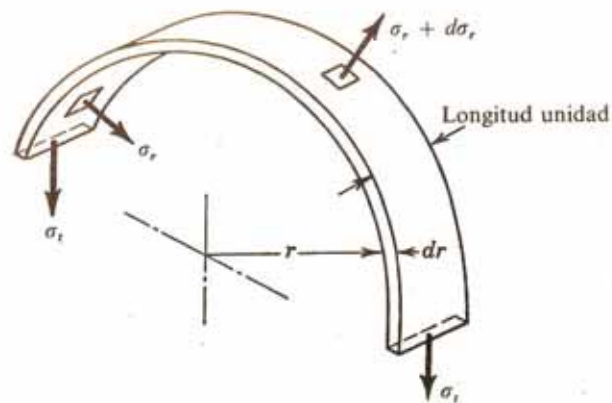


Figura 7 - Tensões tangencial e radial

Na superfície interna age uma tensão σ_r , enquanto que na superfície externa age uma tensão $\sigma_r + d\sigma_r$, devido a variação do raio.

É possível estudar este elemento como um cilindro de paredes finas, considerando que a soma total de todas as forças aplicadas deve ser igual a zero para o estado de equilíbrio.

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot 2(r + dr) - \sigma_r(2r) - 2\sigma_t dr = 0 \quad (8)$$

A equação acima pode ser escrita da seguinte maneira, levando em consideração que o produto $dr \cdot d\sigma_r$ pode ser desprezado.

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad (9)$$

Para obter outra relação entre σ_r e σ_t é necessário supor que uma secção reta, normal ao eixo do cilindro sofra uma deformação longitudinal constante em qualquer ponto da secção.

Aplicando a Lei de Hooke para o estado triaxial de tensão é possível obter a seguinte equação:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_t)] \quad (10)$$

Levando em consideração que ϵ_z , E , σ_z e μ são constantes é possível dizer que a soma $\sigma_r + \sigma_t$ será também constante em toda a secção do cilindro. Com este pressuposto esta soma assumirá um valor de $2A$ como mostrado na equação a seguir:

$$\sigma_r + \sigma_t = 2A \quad (11)$$

Substituindo a equação (11) na (9) é obtido a seguinte equação:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = 2(A - \sigma_r) \quad (12)$$

A solução geral desta equação diferencial é:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad (13)$$

Substituindo o valor de σ_r na equação (11) resulta:

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} \quad (14)$$

Para determinar os valores de A e B é necessário utilizar as seguintes condições limites, considerando que o sinal de menos representa que σ_r é uma tensão de compressão:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_i & \text{para } r = a \\ \sigma_r &= -p_o & \text{para } r = b \end{aligned} \quad (15)$$

Com estas relações é possível estabelecer o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} -p_i &= A - \frac{B}{a^2} \\ -p_o &= A - \frac{B}{b^2} \end{aligned} \quad (16)$$

A solução para os valores de A e B são:

$$A = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} \quad (17)$$

$$B = \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{b^2 - a^2}$$

Substituindo estes valores nas equações (13) e (14) é possível obter as expressões gerais de σ_r e σ_t em um ponto qualquer a distância r do centro do cilindro:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{(b^2 - a^2) r^2} \quad (18)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{(b^2 - a^2) r^2}$$

2.3.1 TENSÕES MÁXIMAS

Para encontrar as tensões máximas no cilindro de paredes grossas serão discutidos dois casos:

- Caso 1: Somente com uma pressão interna atuando no cilindro.
- Caso 2: Somente com uma pressão externa atuando no cilindro.

Caso 1

Considerando que somente a pressão interna age no cilindro e a pressão externa é nula, a expressão (18) pode ser simplificada para:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \quad (19)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

O valor máximo da tensão tangencial é mostrada pela expressão (20), levando em consideração que σ_t (tração) é maior que σ_r (compressão) e que esta tensão está agindo na superfície interna do cilindro:

$$(\sigma_t)_{r=a} = \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}\right) p_i \quad (20)$$

Neste caso, a tensão radial resultante é $-p_i$.

Segundo a teoria de tensões de cisalhamento máximas, isto é, no caso da ausência da força axial:

$$\sigma_{\text{eqv}} = \left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} \right) p_i - (-p_i) = \frac{2b^2 p_i}{b^2-a^2} \quad (21)$$

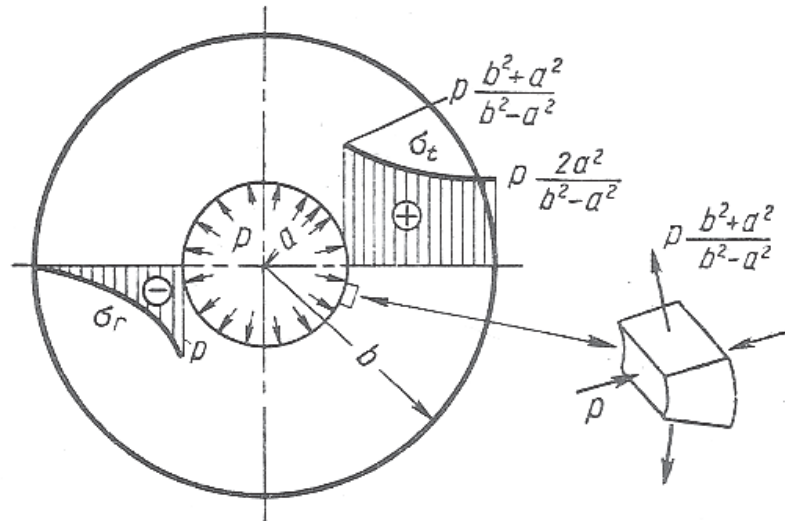


Figura 8 - Tensões tangencial, radial e equivalente

Utilizando a expressão (20) da tensão máxima dos cilindros de paredes grossas e a expressão (3) da tensão tangencial dos cilindros de paredes finas e considerando que \$b/a\$ é igual a \$K\$ é possível encontrar a seguinte relação:

$$\frac{(\sigma_t)_{\text{máx}}}{\sigma_t} = \frac{K^2+1}{K+1} \quad (22)$$

Caso 2

Considerando que somente a pressão externa age no cilindro e a pressão interna é nula, a expressão (18) pode ser simplificada para:

$$\sigma_r = -\frac{p_o b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (23)$$

$$\sigma_t = -\frac{p_o b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Neste caso, as tensões tangenciais e radiais estão assumindo valores negativos (compressão), sendo que a σ_t é maior que a σ_r . A tensão tangencial máxima está agindo na superfície interna do cilindro, onde σ_r é nula. A expressão para $(\sigma_t)_{max}$ está demonstrada abaixo:

$$(\sigma_t)_{r=a} = -\frac{2b^2 p_o}{b^2 - a^2} \quad (24)$$

Segundo a teoria de tensões tangenciais máximas, isto é, no caso da ausência da força axial:

$$\sigma_{eqv} = 0 - \left(-\frac{2b^2 p_o}{b^2 - a^2}\right) = \frac{2b^2 p_o}{b^2 - a^2} \quad (25)$$

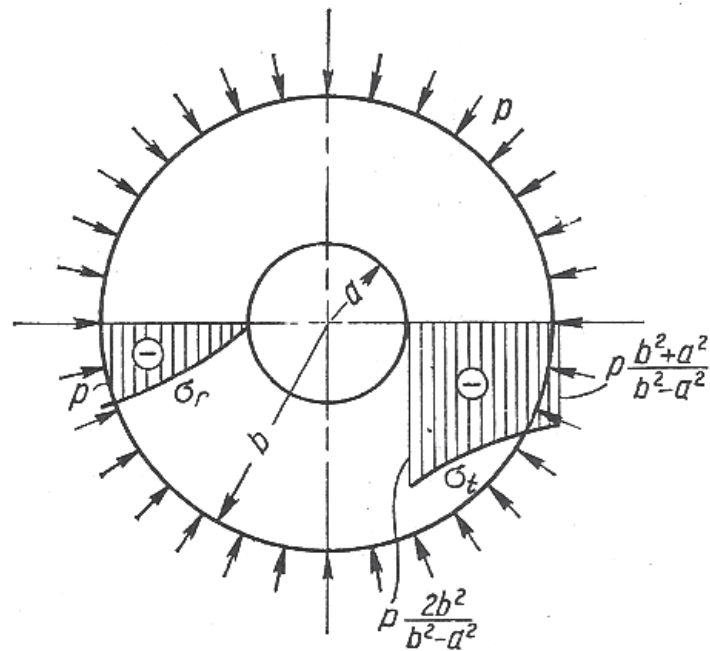


Figura 9 - Tensões tangencial,radial e equivalente

2.4 ANSYS

O Ansys é um dos vários tipos de programas que utiliza o método de elementos finitos para analisar projetos como, por exemplo: fluidos, estruturas estáticas ou dinâmicas, acústica, eletromagnética e transferência de calor.

Outros programas que utilizam a mesma ferramenta são: Algor, Abaqus, Visual Nastran etc.

Quando a geometria das peças é complexa ou se tem a interação de materiais diferentes é válida a utilização deste programa, levando em consideração que o método utilizado pelo computador é o método numérico e realiza os cálculos rapidamente.

É possível dividir em três etapas a análise por elementos finitos feita pelo Ansys¹:

- Pré-processamento

O pré-processamento é a etapa inicial do processo no qual o modelo será criado para a análise. Nesta etapa é possível definir alguns passos como: malha, tipo de elemento, propriedades geométricas e propriedades do material.

¹Eng. Domingos F. O. Azevêdo. Apostila de Treinamento em Elementos Finitos com ANSYSI

É possível também definir as condições de contorno e as cargas que serão aplicadas no modelo em análise.

- Solução

Nesta etapa do processo é possível definir o tipo de análise (estática, modal, transiente, entre outras), condições de contornos, cargas aplicadas, restrições de movimento e cálculos e resultados.

- Pós-processamento

Na última etapa do processo é possível analisar e visualizar resultados como: diagramas de tensão, deformação e deflexão, apresentação dos pontos críticos, listagem dos deslocamentos nodais, de tensões ou qualquer outro tipo de variável para análise.

3. METODOLOGIA

Esta análise das tensões em tubos de paredes grossas pode ser de grande importância para uma série de instrumentos cilíndricos como o cilindro hidráulico. Levando em consideração que as tensões do tubo variam em função do raio, uma série de cálculos serão realizados utilizando as expressões descritas na fundamentação teórica.

Serão tomados como exemplo tubos com diferentes valores de espessura, submetidos a pressão interna ou externa. As tensões máximas dos cilindros serão determinadas utilizando a Teoria da Elasticidade e posteriormente estes resultados serão analisados.

Este procedimento também será realizado utilizando o método de elementos finitos, o programa Ansys.

Os resultados obtidos pelos dois procedimentos serão comparados para fins de análise.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos a partir das expressões da Teoria da Elasticidade e do programa do método de elementos finitos, Ansys, está demonstrado a seguir. Com os valores obtidos será possível realizar uma análise e comparação.

4.1 MEMORIAL DE CÁLCULOS

Para obter os valores das tensões desejadas serão utilizadas as expressões descritas na fundamentação teórica.

Nestes exemplos o raio assumirá valores de raio interno e raio externo para determinar as tensões na superfície interna e na superfície externa do tubo.

Exemplo 1

Dados:

Raio interno = 0,08 m

Raio externo = 0,16 m

Pressão interna = $150 \cdot 10^6$ Pa

Pressão externa = 0

Considerando os valores adotados no exemplo, é possível utilizar a expressão (19), para pressão externa nula:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

Assumindo valores de raio igual ao raio interno e raio externo:

$$r = 0,08 \text{ m}$$

$$\sigma_r = \frac{0,08^2 \cdot 150}{0,16^2 - 0,08^2} \left(1 - \frac{0,16^2}{0,08^2} \right) = -150 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{0,08^2 \cdot 150}{0,16^2 - 0,08^2} \left(1 + \frac{0,16^2}{0,08^2} \right) = 250 \text{ MPa}$$

$$r = 0,16 \text{ m}$$

$$\sigma_r = \frac{0,08^2 \cdot 150}{0,16^2 - 0,08^2} \left(1 - \frac{0,16^2}{0,16^2} \right) = 0$$

$$\sigma_t = \frac{0,08^2 \cdot 150}{0,16^2 - 0,08^2} \left(1 + \frac{0,16^2}{0,16^2} \right) = 100 \text{ MPa}$$

O valor máximo da tensão tangencial pode ser obtido utilizando a expressão (20):

$$(\sigma_t)_{max} = \left(\frac{0,16^2 + 0,08^2}{0,16^2 - 0,08^2} \right) \cdot 150 = 250 \text{ MPa}$$

Para encontrar a tensão máxima de cisalhamento é necessário utilizar os valores da tensão radial e tangencial na superfície interna:

$$(\sigma_{\text{cisalhamento}})_{max} = \left(\frac{250 - (-150)}{2} \right) = 200 \text{ MPa}$$

Exemplo 2

Dados:

$$\text{Raio interno} = 0,05 \text{ m}$$

$$\text{Raio externo} = 0,12 \text{ m}$$

$$\text{Pressão interna} = 0$$

$$\text{Pressão externa} = 200 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Considerando os valores adotados no exemplo, é possível utilizar a expressão (23), para pressão interna nula:

$$\sigma_r = -\frac{p_o b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_t = -\frac{p_o b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Assumindo valores de raio igual ao raio interno e raio externo:

$$r = 0,05 \text{ m}$$

$$\sigma_r = -\frac{200 \cdot 0,12^2}{0,12^2 - 0,05^2} \left(1 - \frac{0,05^2}{0,05^2}\right) = 0$$

$$\sigma_t = -\frac{200 \cdot 0,12^2}{0,12^2 - 0,05^2} \left(1 + \frac{0,05^2}{0,05^2}\right) = -484,03 \text{ MPa}$$

$$r = 0,12 \text{ m}$$

$$\sigma_r = -\frac{200 \cdot 0,12^2}{0,12^2 - 0,05^2} \left(1 - \frac{0,05^2}{0,12^2}\right) = -200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = -\frac{200 \cdot 0,12^2}{0,12^2 - 0,05^2} \left(1 + \frac{0,05^2}{0,12^2}\right) = -284,03 \text{ MPa}$$

O valor máximo da tensão tangencial pode ser obtido utilizando a expressão (24):

$$(\sigma_t)_{max} = -\frac{2 \cdot 0,12^2 \cdot 200}{0,12^2 - 0,05^2} = -484,03 \text{ MPa}$$

Para encontrar a tensão máxima de cisalhamento é necessário utilizar os valores da tensão radial e tangencial na superfície interna:

$$(\sigma_{\text{cisalhamento}})_{max} = \left(\frac{-484,03 - 0}{2} \right) = 242,015 \text{ MPa}$$

Assim como descrito na fundamentação teórica, é possível perceber levando em consideração os exemplos acima que a tensão máxima está agindo na superfície interna dos recipientes cilíndricos.

Exemplo 3

Neste exemplo será considerado um tubo com espessura de 10% do valor do raio interno. Será calculado o valor da tensão tangencial utilizando as expressões dos cilindros de paredes grossas e as expressões dos cilindros de paredes finas para analisar e comparar a diferença dos valores obtidos.

Dados:

$$\text{Raio interno} = 0,04 \text{ m}$$

$$\text{Raio externo} = 0,044 \text{ m}$$

$$\text{Pressão interna} = 8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\text{Pressão externa} = 0$$

Considerando os valores adotados no exemplo, é possível utilizar a expressão (19) dos cilindros de paredes grossas, para pressão externa nula:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

Assumindo valor de raio igual ao raio interno:

$$r = 0,04 \text{ m}$$

$$\sigma_r = \frac{0,04^2 \cdot 8}{0,044^2 - 0,04^2} \left(1 - \frac{0,044^2}{0,04^2} \right) = -8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{0,04^2 \cdot 8}{0,044^2 - 0,04^2} \left(1 + \frac{0,044^2}{0,04^2} \right) = 84,19 \text{ MPa}$$

O valor máximo da tensão tangencial pode ser obtido utilizando a expressão (20):

$$(\sigma_t)_{max} = \left(\frac{0,044^2 + 0,04^2}{0,044^2 - 0,04^2} \right) \cdot 8 = 84,19 \text{ MPa}$$

Considerando também a hipótese da distribuição de tensões uniformes ao longo da espessura da parede é possível utilizar a expressão (3) dos cilindros de paredes finas, para obter o valor da tensão tangencial:

$$\sigma_t = \frac{8 \cdot 0,04}{(0,044 - 0,04)} = 80 \text{ MPa}$$

Para encontrar a tensão máxima de cisalhamento é necessário utilizar os valores da tensão radial e tangencial na superfície interna:

$$(\sigma_{\text{cisalhamento}})_{max} = \left(\frac{84,19 - (-8)}{2} \right) = 46,095 \text{ MPa}$$

Utilizando as mesmas dimensões e pressões aplicadas nos cilindros dos exemplos acima, foi utilizado o programa do método de elementos finitos, Ansys, para analisar as tensões atuantes e assim comparar com os valores encontrados pelas expressões da Teoria da Elasticidade.

Na Figura 10 está mostrada a modelagem do cilindro com as dimensões do exemplo 1. Na Figura 11 é possível visualizar a disposição da malha.

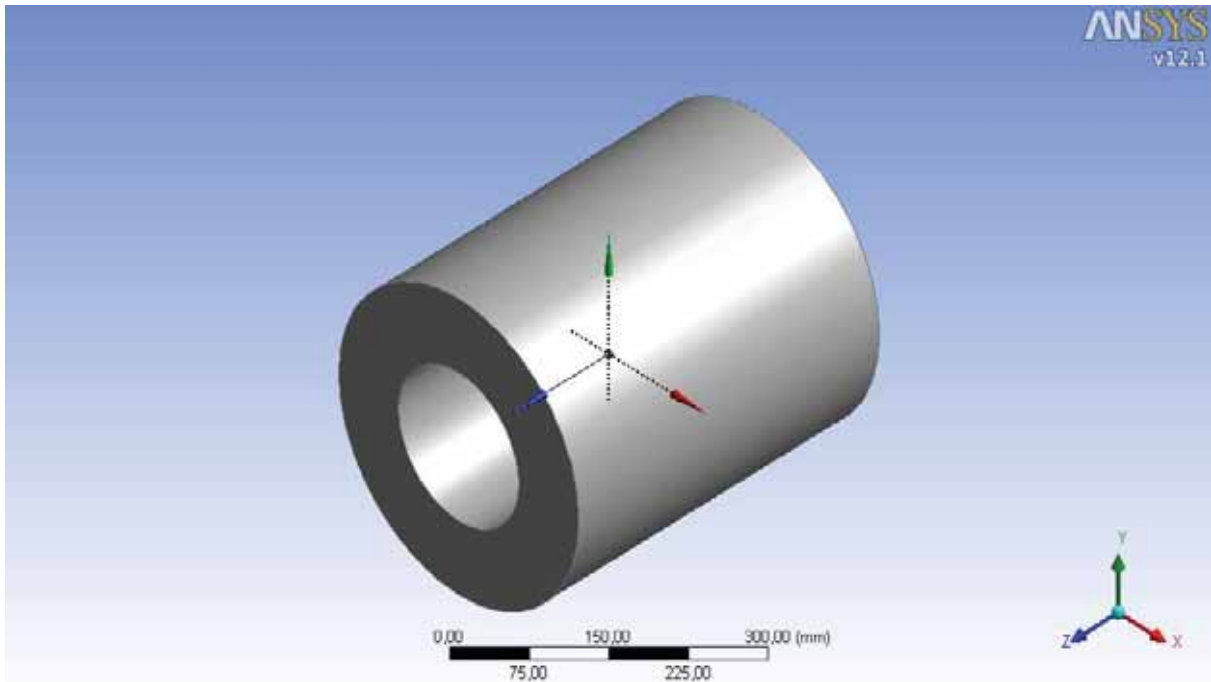


Figura 10 - Modelagem do exemplo 1

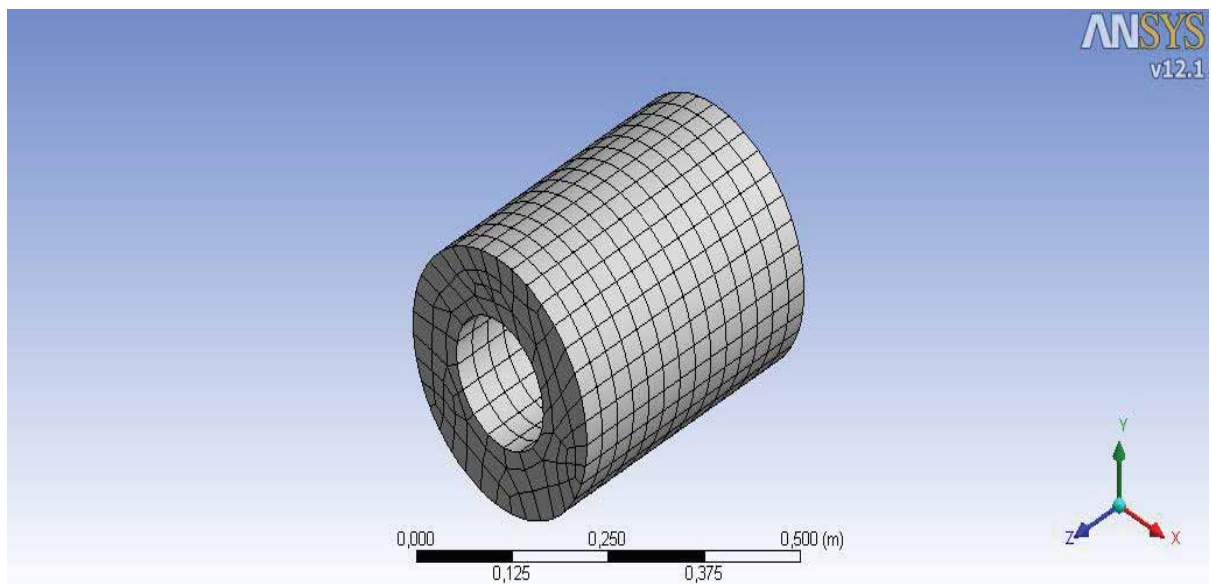


Figura 11 - Malha do exemplo 1

Após modelar o cilindro do exemplo 1 com as dimensões desejadas foi aplicada uma pressão sobre a sua superfície interna. Devido a esta pressão aplicada foi possível encontrar a tensão desejada no problema, como mostrado na Figura 12.

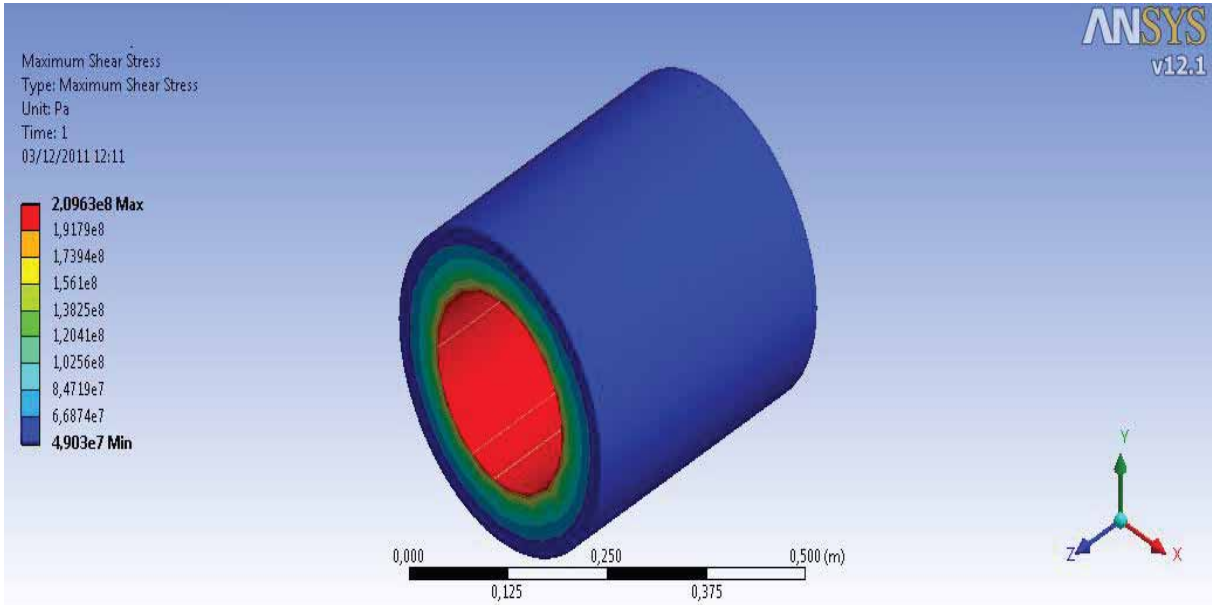


Figura 12 - Resultado do exemplo 1

O mesmo procedimento foi realizado para os outros dois exemplos. Nas figuras 13 a 18 é possível visualizar cada etapa.

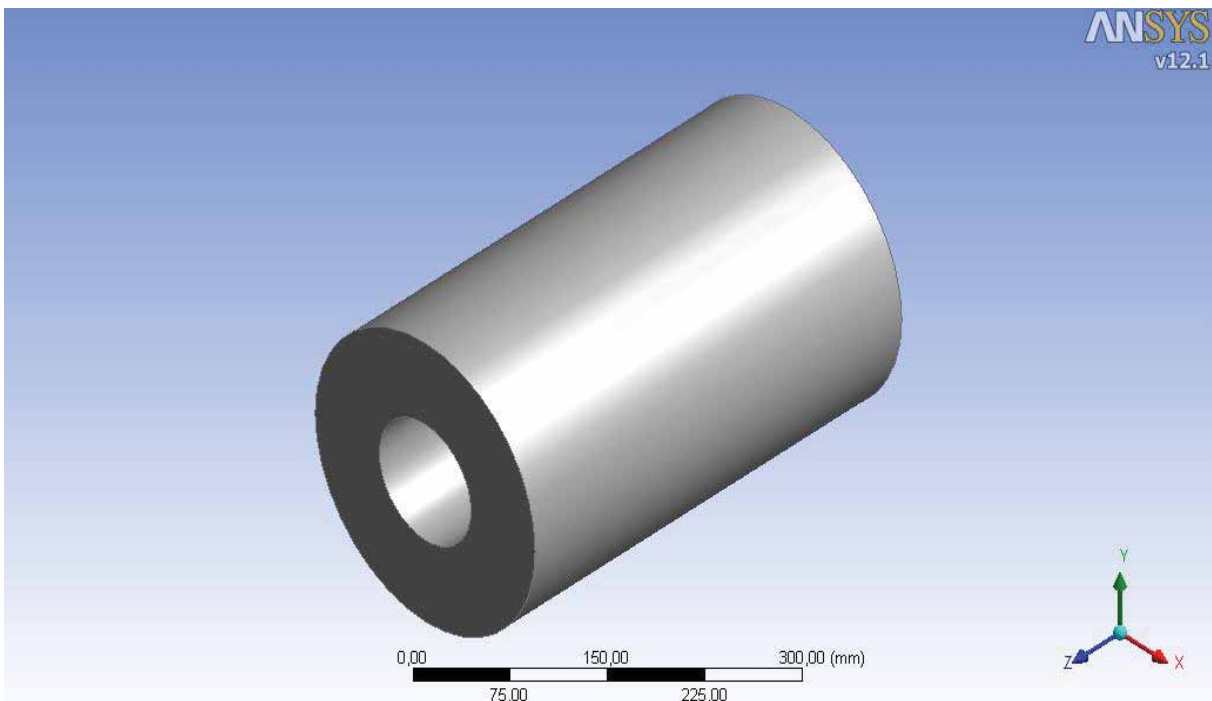


Figura 13 - Modelagem do exemplo 2

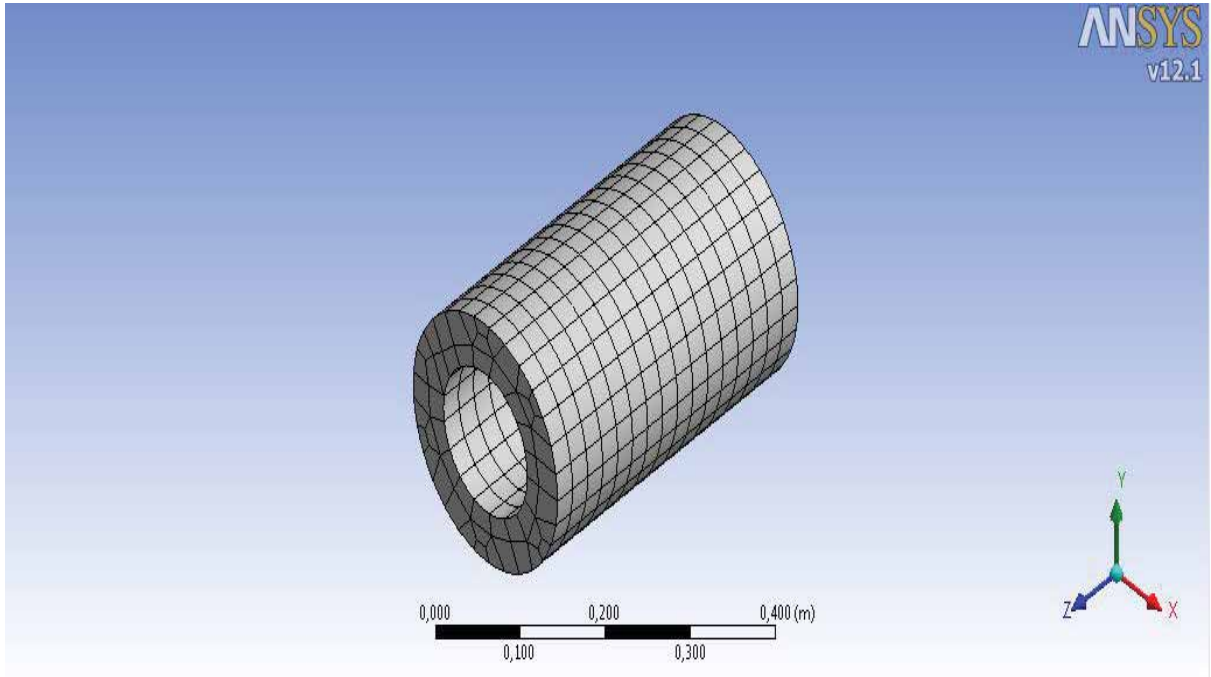


Figura 14 - Malha do exemplo 2

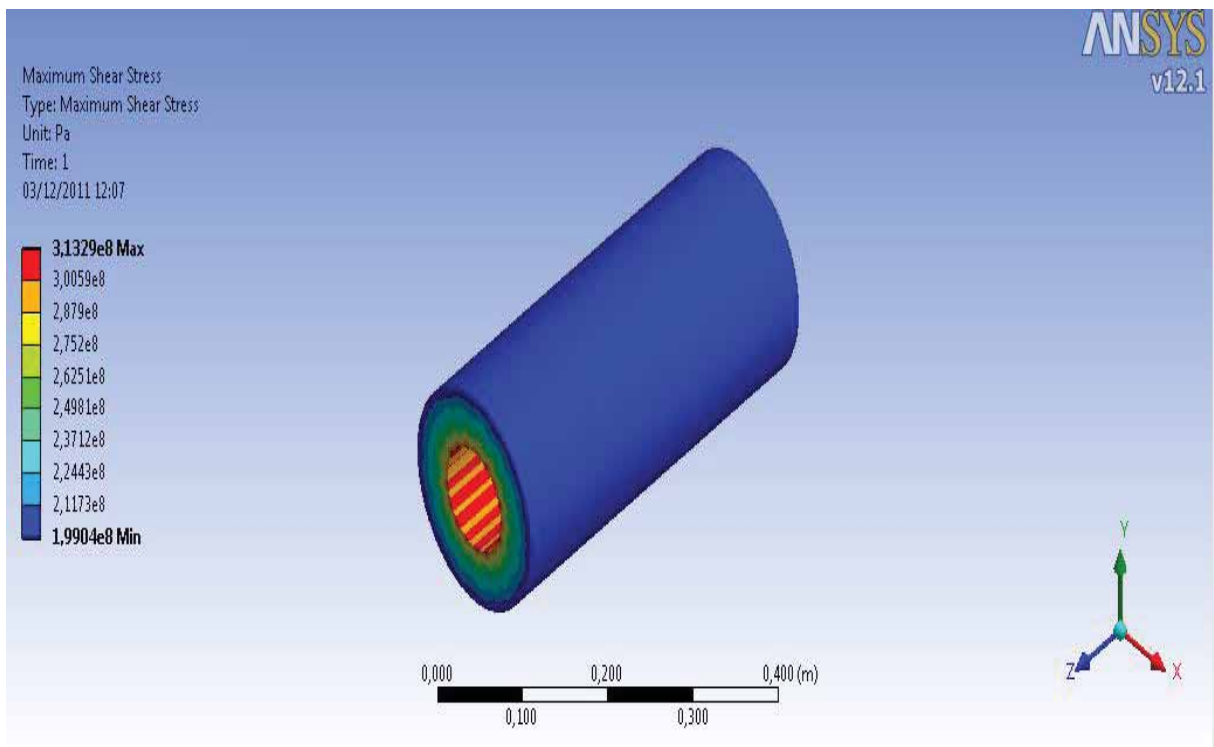


Figura 15 - Resultado do exemplo 2

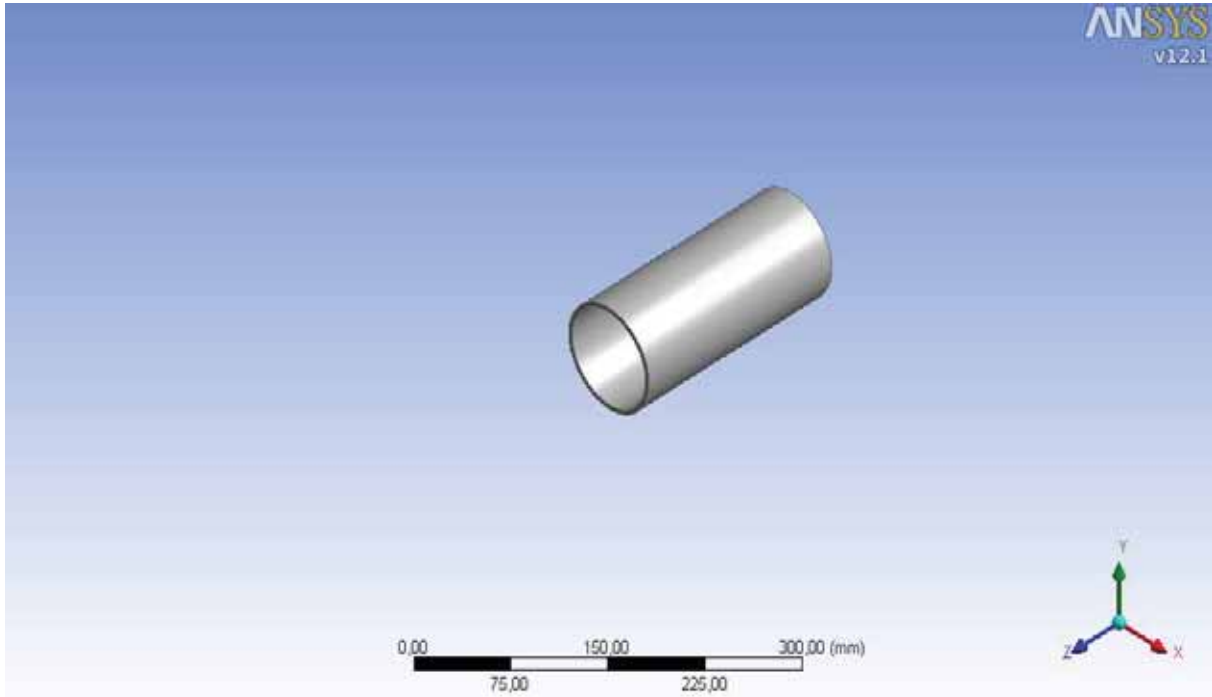


Figura 16 - Modelagem do exemplo 3

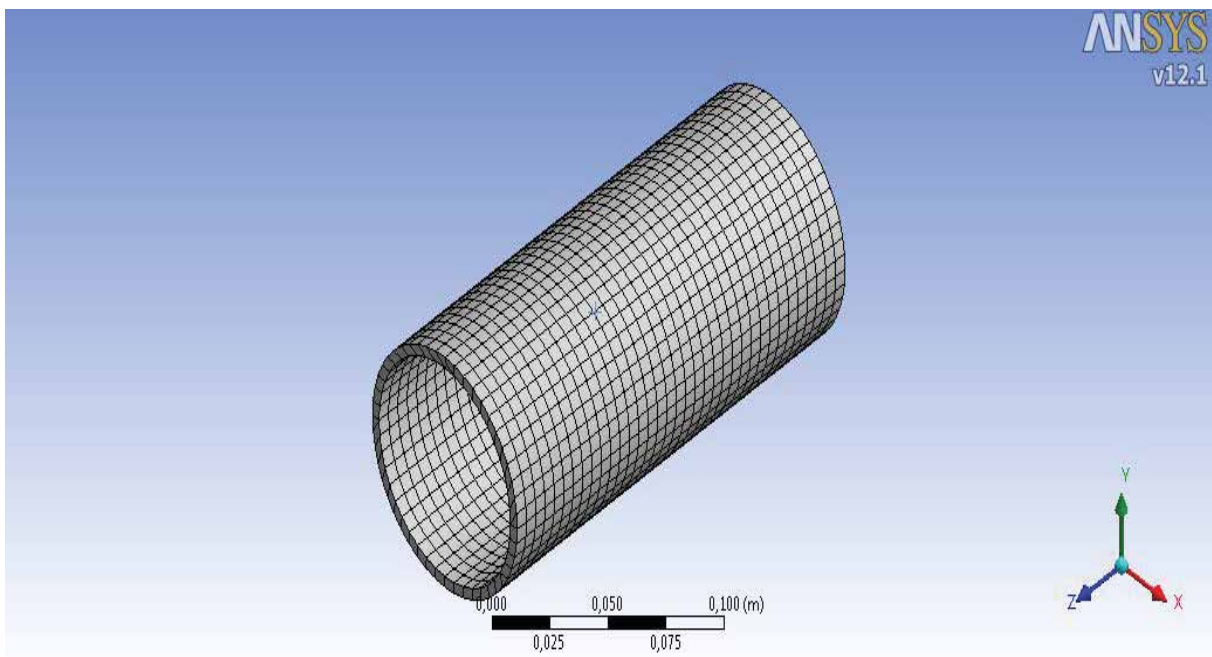


Figura 17 - Malha do exemplo 3

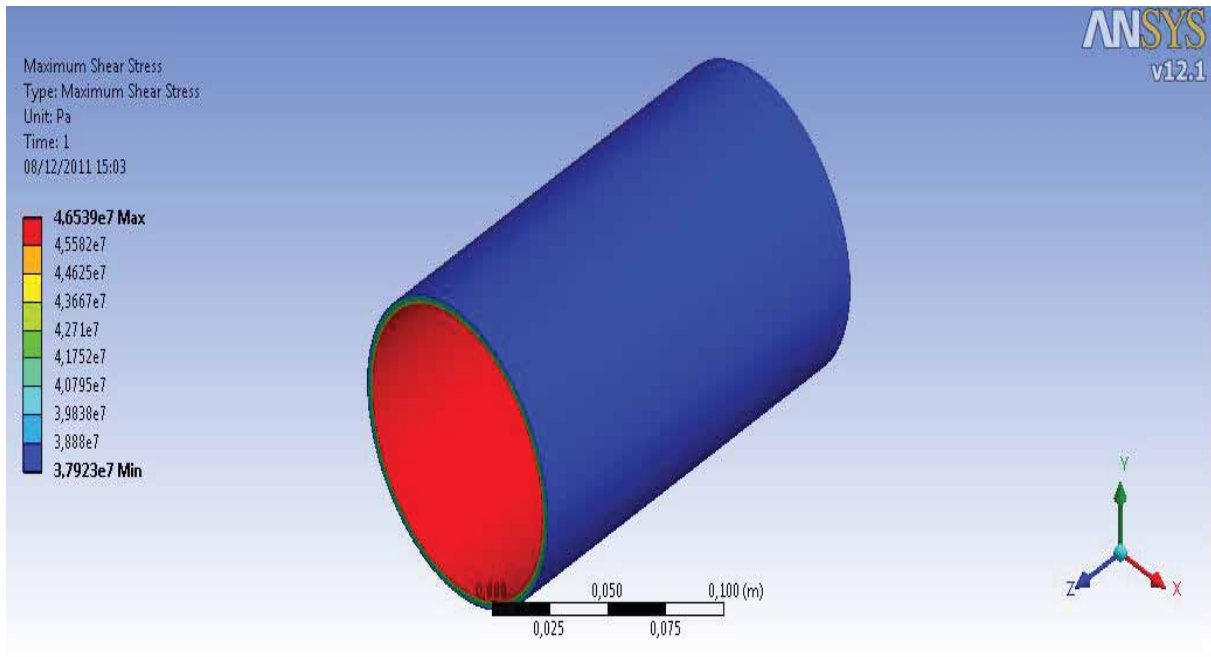


Figura 18 - Resultado do exemplo 3

Após obter os valores das tensões utilizando as expressões teóricas e pela modelagem dos mesmos cilindros no Ansys foi possível realizar uma análise e comparação dos métodos utilizados.

Assim como descrito na fundamentação teórica, a tensão máxima resultante foi obtida na superfície interna dos cilindros dos exemplos utilizados, independente das dimensões adotadas.

Através do método dos elementos finitos, foram modelados os mesmos cilindros considerados nos exemplos 1,2 e 3. Após modelar os cilindros e aplicar as pressões nas suas respectivas superfícies, foram obtidas as tensões desejadas.

Para modelar os cilindros desses exemplos foi considerado um comprimento de 400 mm com 6943 nós para o exemplo 1, 400 mm com 4658 nós para o exemplo 2 e 200 mm com 11739 para o exemplo 3.

Comparadas com as tensões obtidas pelas expressões da teoria da elasticidade, os valores encontrados pelo método dos elementos finitos foram diferentes. Esse resultado foi encontrado em decorrência da malha pouco refinada. Para encontrar valores mais próximos do teórico seria necessário um maior número de nós na malha.

No exemplo 3 foi utilizado um cilindro com uma espessura igual a 10% do raio interno para analisar a tensão resultante obtida pela teoria dos cilindros de paredes grossas e com isso compará-la com a tensão obtida pela teoria dos cilindros de paredes finas.

A tensão máxima encontrada utilizando a expressão dos cilindros de paredes grossas foi 5% maior que a tensão encontrada utilizando a expressão dos cilindros de paredes finas. Na fundamentação teórica foi demonstrada pela expressão (20) a relação dessas duas tensões em função do K. Levando em consideração que neste caso $K = 1,1$ o valor esperado para a relação destas tensões é igual 5%.

Portanto, a relação das tensões obtidas pelos cálculos realizados está coerente com a expressão da relação das tensões fornecida na fundamentação teórica. Segundo Singer (1971), esta análise justifica o procedimento aplicado no estudo dos elementos de paredes finas.

Tabela 1 – Resultados obtidos

Exemplo	Raio Interno [m]	Raio Externo [m]	Pressão Interna [MPa]	Pressão Externa [MPa]	Tensão máxima ANSYS [MPa]	Tensão máxima Teoria da Elasticidade [MPa]	Varição [%]
1	0,08	0,16	150	0	209,63	200	4,82%
2	0,05	0,12	0	200	313,29	242,015	29,45%
3	0,04	0,044	8	0	46,54	46,095	0,97%

5. CONCLUSÃO

Com os dados obtidos pelos dois procedimentos foi possível realizar uma análise mais aprofundada sobre a consideração das tensões nos cilindros.

A partir do momento que a espessura aumenta relativamente ao raio não é possível considerar uma distribuição uniforme das tensões, assim como foi demonstrado a partir dos calculos efetuados utilizando o método da teoria da elasticidade e o método dos elementos finitos.

Foi possível averiguar de forma prática que a superfície interna do cilindro será sempre a região onde a tensão será máxima e a superfície externa será sempre a região onde a tensão será mínima.

Entretanto, os valores obtidos utilizando o método dos elementos finitos atingiram valores diferentes do esperado possivelmente causado por uma malha não muito refinada.

Acredito que este trabalho demonstrou o quão necessário é levar em consideração as tensões resultantes que podem surgir em equipamentos que utilizam cilindros de paredes finas ou grossas.

Dependendo da espessura do cilindro do equipamento é necessário estudar mais a fundo as pressões internas e externas que podem atuar neste para não existir a possibilidade de falha ou desgaste.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SINGER, Ferdinand L.. **Resistencia de Materiales**. Mexico: Harla, 1971.

FÉODOSIEV, Vsevolod Ivanovich. **Resistencia dos Materiais**. Porto: Lopes da Silva, 1977.

BEER, Ferdinand Pierre. **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Mcgraw-hill, 1982.

STIOPIN, P. A.. **Resistencia de Materiales**. Moscu: Mir, 1968.

Apostila de Treinamento em Elementos Finitos com ANSYSI, do Eng. Domingos F. O. Azevêdo.