

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

SUPERSIMETRIA E MECÂNICA QUÂNTICA

Leonardo Rodrigues Moreira

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro (SP)

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

LEONARDO RODRIGUES MOREIRA

SUPERSIMETRIA E MECÂNICA QUÂNTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas
- Campus de Rio Claro, da Universidade Es-
tadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2022

M838s

Moreira, Leonardo Rodrigues

Supersimetria e mecânica quântica / Leonardo Rodrigues Moreira.

-- Rio Claro, 2022

43 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e
Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Supersimetria. 2. MSSM. 3. Mecânica quântica. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Leonardo Rodrigues Moreira

SUPERSIMETRIA E MECÂNICA QUÂNTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas
- Campus de Rio Claro, da Universidade Es-
tadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Bacharel em Física.

Comissão examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Makoto Yoshida

Rio Claro, **10 de fevereiro de 2022.**

Assinatura do aluno



Assinatura do orientador



Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, Jomar e Regiane por todo o apoio que me deram em minha jornada até aqui, tanto no âmbito educacional quanto pessoal. Sempre se esforçaram muito para me dar todo amor, apoio e compreensão e sem eles não seria possível minha presença aqui hoje. Me faltam palavras pra expressar a gratidão e amor que tenho por eles.

Agradeço aos amigos que fiz em minha trajetória na cidade de Rio Claro, Allan, Pedro, Letícia, Leonardo Ribeiro, Mayla, Carlinhos, Wan e outros não mencionados, por todo o tempo que passamos juntos. Bruno e Reinaldo agradeço pela companhia, amizade, horas jogando e apoio dado, sem eles a universidade não teria sido a mesma. Por último, agradeço a Jéssica, seu apoio e amizade foram muito importantes para mim, nos meus momentos mais difíceis ela estava lá para ajudar, e por isso e por tudo, sou grato.

Também quero agradecer aos meus amigos de Limeira, Anie, Júlia e Lauren, que são muito importantes para mim, e estiveram do meu lado nesse período complicado que foi a pandemia, me dando ânimo e energia para continuar.

Sou grato a meu orientador Luiz Antônio Barreiro, pelo apoio, compreensão, ajuda e atenção em todo o processo, esse trabalho só é possível por conta da orientação dele.

Agradeço a todos os professores que me ajudaram durante o curso, e que me inspiraram a continuar na física.

Por último agradeço a banca por se disponibilizar a participar e avaliar a minha apresentação.

Resumo

Nesse trabalho foi feito um estudo sobre a Supersimetria e o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo. O intuito foi entender mais sobre os conceitos e fundamentações que os envolvem, compreender suas propriedades, e visualizar determinadas aplicações na Física em geral. Para isso foi feita uma breve abordagem histórica da supersimetria, contando dos primeiros trabalhos envolvendo o assunto. Em seguida foi explicado conceitos fundamentais para o entendimento e elaboração da supersimetria. Foi abordada a relação do spin com o momento de dipolo magnético orbital e o experimento que levou a sua descoberta. Foi feita uma descrição dos spinors, sua relação com a Transformação de Lorentz e a origem dos férmions de Majorana. Foi então apresentado as propriedades da Lagrangiana Supersimétrica Simples para então chegar na descrição do Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo. Por último foi apresentado as ideias do Espaço de Estado Geral do SUSY e a aplicação da supersimetria em osciladores harmônicos.

Palavras-chave Supersimetria. MSSM. Mecânica Quântica.

Abstract

In this study, we gave a brief ap Supersymmetry and the Minimal Supersymmetric Standard Model. The aim was to understand more about the concepts and foundations that involve this ideas, understand their properties, and visualize certain applications in Physics in general. To start, a brief historical summary on supersymmetry was made, recounting on the first works involving the subject. After that, fundamental concepts for the understanding supersymmetry were explained. The relationship between spin and the orbital magnetic dipole moment and the experiment that led to its discovery were discussed. A description of the spinors, their relationship with the Lorentz Transformation and the origin of Majorana fermions was made. The properties of the Simple Supersymmetric Lagrangian were then presented to finally arrive at the description of the Minimal Supersymmetric Standard Model. Finally, the ideas of the SUSY General State Space and the application of supersymmetry in harmonic oscillators were presented.

Keywords Supersymmetry. MSSM. Quantum Mechanics.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
1.1	Uma breve história da Supersimetria	8
2	SPIN	9
3	SPINORS	14
3.1	Spinors e a Transformação de Lorentz	15
3.2	Montando Invariantes e vetores de 4 componentes com spinors de 2 componentes	17
3.3	Férmions de Majorana	18
3.4	Férmions de Dirac usando spinors tipo χ	20
4	LAGRANGIANA SUPERSIMETRICA SIMPLES	21
5	O MODELO PADRÃO SUPERSIMÉTRICO MÍNIMO (MSSM)	26
5.1	Introdução ao MSSM	26
5.2	O MSSM	27
6	ESPAÇO DE ESTADO GERAL DO SUSY	33
7	OSCILADOR HARMÔNICO SUPERSIMÉTRICO	37
8	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	43

1 Introdução

Simetrias tem um papel importante em reduzir o número de graus de liberdade de um sistema complexo. Por isso, alguns recursos desse tipo de sistema podem ser determinados explorando as propriedades de simetria do sistema. O Modelo Padrão que descreve a unificação das partículas fundamentais e as forças forte e eletrofraca são baseados nos princípios de simetria, e nele férmions e bósons são considerados classes diferentes de partículas ([SINGH; SONI, 2001](#)). Mas ele não é perfeito, por exemplo, o escalar de Higgs no Modelo Padrão ainda não foi descoberto. Ele também tem problemas como os termos de correção para sua massa que são infinitos, divergem. Esta divergência não física pode ser ajustada, mas ainda assim é uma complicação a se considerar.

Os físicos estão há anos tentando formular uma descrição unificada de todas as interações básicas da natureza, as interações fortes e eletrofracas ditas anteriormente e a interação gravitacional. Uma forte candidata para unificar as forças da natureza é a teoria de cordas, que tem a supersimetria (SUSY), como ingrediente fundamental. SUSY relaciona graus de liberdade bosônicos e fermiônicos e tem a virtude de domar divergências ultravioletas, ou seja, as divergências em uma integral ocorridas pela contribuição de um termo com energias ilimitadas.

A álgebra envolvida em SUSY é uma álgebra de Lie graduada que se fecha sob uma combinação de relações de comutação e anti-comutação. Álgebra Lie graduada é uma Álgebra de Lie, ou seja, uma estrutura algébrica usada para o estudo dos grupos de Lie, que possui um vetor de espaço g junto com uma operação chamada braquet de Lie, o grupo de Lie por sua vez é uma variedade diferenciável que admite uma estrutura de grupo onde as operações multiplicação e inversão são deriváveis ([BOURBAKI, 1989](#)). Foi introduzido pela primeira vez no contexto dos modelos de cordas para unificar os setores bosônico e fermiônico.

O principal objetivo desse trabalho foi o estudo de uma das extensões do Modelo Padrão, o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM). Para chegar no entendimento do MSSM, a supersimetria teve que ser estudada, de forma simplificada, trazendo uma breve abordagem histórica, seguida pela explicação de alguns conceitos fundamentais como o Spin e os Spinors, e em seguida elaborando algumas propriedades e explicações matemáticas necessárias para enfim chegar ao MSSM. Além disso foi abordado também o Espaço de Estado Geral do SUSY, e uma aplicação da supersimetria no oscilador harmônico.

1.1 Uma breve história da Supersimetria

A supersimetria quadridimensional foi descoberta de maneira separada e independente três vezes primeiro, por Golfand e Likhtman em Moscou, depois por Volkov e Akulov em Kharkov, e por último por Julius Wess e Bruno Zumino, que colaboraram no CERN em Genebra e em Karlsruhe (ZUMINO, 2005). O SUSY, é uma simetria que relaciona as propriedades do spin inteiro de bósons com as de spin semi-inteiro dos férmions. Os geradores da simetria formam a superálgebra, que é uma super extensão da álgebra de Lie da teoria quântica de campos por geradores fermiônicos, e nela ocorrem tanto as relações de comutação como as de anticomutação. O entendimento da superálgebras é relevante para o estudo de sistemas dinâmicos pois contém valores bosônicos e fermiônicos. No seu livro *Introduction to the Theory of Supermanifolds*, D.A. Leites fala que a origem do prefixo super vem do entusiasmo exagerado de físicos e que na verdade, como muitas outras palavras em física e matemática, a palavra técnica “super” nunca teve sentido do cotidiano.

Os primeiros trabalhos de supersimetria, de Golfand e Likhtman e o de Volkov e colaboradores passaram despercebidos. Apenas com os trabalhos de Wess e Zumino que surgiu um maior interesse da comunidade científica, e também geraram interesse renovado por matemáticos na teoria das superálgebras. Eventualmente, uma classificação completa da superálgebras foi formulada, análoga a classificação de Cartan das álgebras de Lie, e o prefixo super foi adotado a matemática.

Os primeiros trabalhos sobre teorias de campo supersimétricas consideraram apenas um gerador fermiônico que é um spinor de Majorana. A superálgebra correspondente é chamada de $N = 1$ SUSY. Mas houve estudo de SUSY extendido ($N > 1$). Entretanto $N = 1$ SUSY em quatro dimensões espaço-temporais ainda é a melhor escolha para uma extensão SUSY do Modelo Padrão de partículas elementares, por causa das propriedades quirais de férmions físicos.

2 Spin

Esse capítulo foi feito com base em (EISBERG; RESNICK, 1986) e (EISBERG, 1961), e na apostila montada pelo do orientador do trabalho, Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro.

No modelo de Dipolo Magnético Orbital de Bohr, há a presença de um núcleo com carga positiva sendo orbitado por elétrons, de carga negativa. O que atrai e mantém essa orbita intacta é a força de coulomb e se aplicarmos um campo magnético externo, haverá a presença da força de Lorentz nessas cargas que se movem.

Uma carga que circula em uma orbita, gera uma corrente de

$$i = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \quad (2.1)$$

com r sendo o raio da orbita do elétron, v sua velocidade e T o período orbital. Segundo a teoria eletromagnética, quando a distância da orbita r tender a infinita grande distancias da orbita do eletron, o campo magnético que é produzido é equivalente a se um dipolo magnético no centro e orientado perpendicularmente ao plano estivesse produzindo. Com a área da orbita do elétron sendo $A = \pi r^2$ temos o módulo do momento de dipolo magnético orbital do dipolo

$$\mu_l = iA = \frac{ev\pi r^2}{2\pi r} = \frac{evr}{2} = \frac{eL}{2m_e}. \quad (2.2)$$

O magneton de Bohr é dado por

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}, \quad (2.3)$$

com

$$\mu_l = g_l \frac{\mu_B}{\hbar} L \quad (2.4)$$

e

$$L = m_e r v \quad (2.5)$$

com L sendo o módulo do momento angular do elétron e $g_l = 1$ sendo o fator g orbital.

Levando em conta o segundo postulado de Bohr, e considerando o vetor $\vec{\mu}_l$ como sendo antiparalelo ao vetor $\vec{L}$, é possível escrever ($n \rightarrow m_l$)

$$\mu_{l_z} = -g_l \frac{\mu_B}{\hbar} L_z = -g_l \frac{\mu_B}{\hbar} m_l \hbar = -g_l \mu_B m_l. \quad (2.6)$$

Otto Stern e Walther Gerlach realizaram experimentos em 1922 afim de tentar explicar o que ocorre com um átomo quando ele fica sujeito a um campo magnético externo B (WEINERT, 1995). Determinamos anteriormente que o elétron em movimento gera o dipolo e também sabemos que um dipolo tende a alinhar seu eixo com o campo magnético que o envolve. Então temos que o dipolo está sob a ação de um torque τ que irá alinhar o eixo dele com o campo, com uma energia potencial U associada

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}_l \times \vec{B} \quad (2.7)$$

$$U = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{B}. \quad (2.8)$$

A força do sistema pode ser encontrada através da equação $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, portanto se $\vec{B}$ for não uniforme e estiver na direção de z , aparecerá uma força nessa mesma direção dada por

$$F_z = \mu_{l_z} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (2.9)$$

Se aplicarmos (2.6) temos um novo F_z com m_l possuindo $2l + 1$ e $l = 2$, temos

$$F_z = -g_l \mu_B m_l \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right), \quad (2.10)$$

$$m_l = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, +l - 1, +l. \quad (2.11)$$

Considerando $l = 2$, temos que a componente z do momento angular gera um número ímpar de projeção para o momento angular orbital quântico.

E para o experimento que comprovaria os resultados definidos pela teoria, Stern e Gerlach vieram com um aparato experimental como o da figura 1.

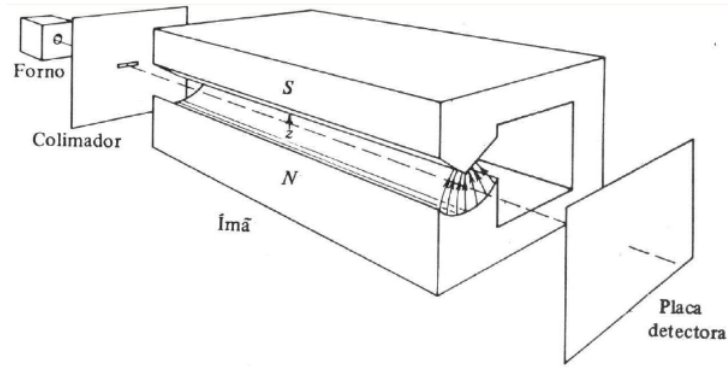


Figura 1. Esquema do aparato experimental utilizado por Stern e Gerlach.

Nesse aparato um feixe de átomos neutros de prata é colimado por um ímã e então os átomos são defletidos por um campo magnético não homogêneo para atingir a e condensar na placa detectora. Segundo a teoria, o feixe iria se espalhar por uma banda contínua, pois a componente z clássica do momento magnético vai para qualquer direção. Porém, Segundo a teoria quântica mostrada em (2.10) e (3.28) o feixe se separarem um número ímpar de componentes, surgindo um feixe central não defletido e outros feixes espalhados. O resultado do experimento obtido está representado na figura 2.

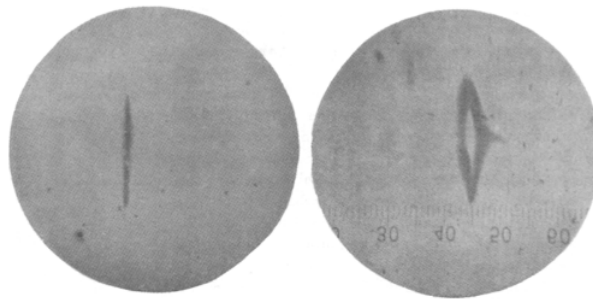


Figura 2. Foto dos resultados do experimento feito por Stern e Gerlach. Do lado esquerdo o feixe sem campo magnético e a direita com campo magnético.

Não foi observada a previsão clássica, pois há uma separação do feixe em duas componentes, porém não há nenhuma componente central também. Os resultados esperados não foram compatíveis com a teoria clássica, no entanto, quando analisados, mostrou-se que satisfaziam a teoria quântica, com a diferença de possuir feixe central. Em seguida, T.E. Phipps e J.B. Taylor reproduziram o experimento em 1927 só que dessa vez com átomos de hidrogênio e observaram o mesmo resultado de Stern e Gerlach (PHIPPS; TAYLOR, 1927).

Através dos resultados alcançados pelos experimentos de Stern e Gerlach e Phipps e Taylor, ficou implícito a presença de um momentum de dipolo magnético inerente ao

átomo. Era possível que a causa desse dipolo fosse associado ao seu núcleo, de ordem $e\hbar/2M$, onde M é a massa do núcleo, mas as medidas evidenciaram que a separação dos feixes era proporcional a $e\hbar/2e$, então era logico assumir que a discrepância está no elétron. Assumindo que esse dipolo fosse do elétron, é possível associar um momento angular a ele, que tem a componente z dada por;

$$S_z = m_s \hbar \quad (2.12)$$

Logo esse momento angular associado ao dipolo intrínseco é dado o nome de Spin, cujo nome é dado devido a associação do momento angular originar de uma rotação do elétron em torno dele mesmo, e como o elétron tem carga, ele geraria corrente e por consequência, esse dipolo. Levando em conta agora esse spin e aplicando (2.2), a componente z do dipolo magnético do spin μ_{s_z} e a força F_{z_s} sobre o elétron por conta do campo externo ficam

$$\mu_{s_z} = -g_s \mu_B m_s, \quad (2.13)$$

$$F_{z_s} = -g_s \mu_B m_s \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right). \quad (2.14)$$

No experimento o feixe se separa em dois, portanto em (2.14), m_s deve ter dois valores simetricos entre si. Sabemos que sem deflexão, é impossível haver feixe então isso prova que m_s não pode ser nulo. Como m_l tem $2l + 1$ valores de modo que

$$m_s \rightarrow 2 \text{ valores} \Rightarrow 2s + 1 = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}, \quad (2.15)$$

onde

$$m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}. \quad (2.16)$$

É possível encontrar F_z medindo o desvio do feixe inicial e assim encontrar que na precisão experimental,

$$g_s m_s = \pm 1, \quad (2.17)$$

que implica em um fator g de spin

$$g_s = 2. \quad (2.18)$$

Levando em conta o fator g de Landê g_j que vem de

$$\boldsymbol{\mu} = -g_J \frac{\mu_B}{h} \mathbf{J} \quad (2.19)$$

com o momento angular total do sistema sendo $J = L + S$. Segundo a equação quântico-relativística de Dirac, $g = 2$, isso indica que o spin é quântico-relativístico. O momento magnético anômalo

$$a = \frac{g - 2}{2} \quad (2.20)$$

tem como valor definido por medidas experimentais, $a_e = 0.00115962518073(28)$. Já através de cálculos teóricos baseado em Eletrodinâmica Quântica, que incluem correções de vértices como no diagrama de Feynman como representados na figura 3, é possível obter o valor $a_c = 0.00115962518163(76)$. Com isso é possível ver que a discrepância do valor teórico para o experimental e da ordem de 10^{-12} , ou seja, é o resultado mais preciso conhecido em toda a física.

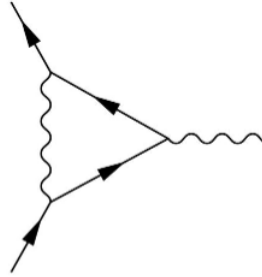


Figura 3. Diagrama de Feynman em loop.

Os mesmos cálculos também podem ser aplicados para o muon, no qual encontramos que o valor teórico mais preciso é $a_\mu = 0.00116591804(51)$ enquanto o valor experimental mais preciso é $a_\mu = 0.0011659209(6)$. A discrepância então é da ordem de 10^{-8} , entretanto acredita-se que estão faltando fatores no cálculo teórico, que poderia aumentar essa precisão, e uma possibilidade desses fatores são as superpartículas. Incluindo nos cálculos, chega-se a conclusão que o g do muon pode ser influenciado pela física além do próprio Modelo Padrão.

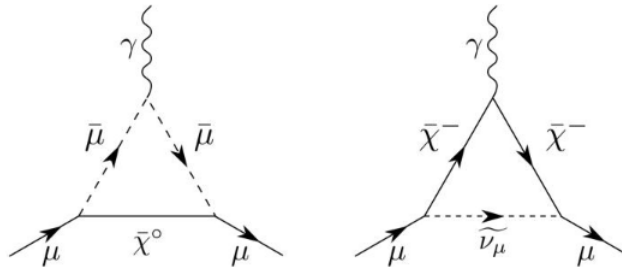


Figura 4. Correções ao Modelo Padrão de um loop para o fator g do múon.

3 Spinors

Os capítulos spinor, Lagrangiana Supersimetrica Simples e O Modelo Padrão Supersimetrico Mínimo (MSSM) foram feitos com base em ([AITCHISON, 2005](#)).

Para começar, é interessante recapitular como as simetrias são descritas na Teoria Quântica de Campos. A Lagrangiana trata de campos estabelecidos ψ , que podem ser tanto de bósons como de férmions, e são tratados como invariantes sob a transformação infinitesimal no campo

$$\delta_\epsilon \psi_r = -i\epsilon \lambda_{rs} \psi_s \quad (3.1)$$

onde o somatório dessa equação é compreendido nos índices que repetem s , λ_{rs} são coeficientes constantes como os elementos das matrizes de Pauli, e ϵ é um parâmetro infinitesimal. A supersimetria engloba elementos similares a essa equação, mas é capaz de transformar campos bosônicos em campos fermiônicos

$$\delta_\xi \phi \sim \xi \psi. \quad (3.2)$$

Nessa equação ϕ é um campo bosônico com spin 0, ψ é um campo fermiônico com spin semi-inteiro e o ϵ e o parâmetro infinitesimal. Uma coisa a se esclarecer é que o número de graus de liberdade entre os campos fermiônicos e bosônicos tem que ser o mesmo, sem sobrar nenhum. O tipo mais simples de campo bosônico é o campo escalar neutro, que possui um só componente, $\phi = \phi^\dagger$ ([AITCHISON; HEY, 2002](#)). Já no campo férmionico, não existe um campo com um só componente, pois como um spinor, possui no mínimo dois. Portanto é preciso considerar pelo menos um campo bosônico com dois graus de liberdade, para parear com o campo spinor do férmion.

Segundo as equações de Dirac, a função de onda, ou campo, do férmion possui quatro componentes associados, e não dois, porém como dito anteriormente, a supersimetria usa um campo escalar complexo de dois componentes férmionicos. O campo de Dirac em si usa campo de duas componentes então é preciso entender a natureza desses dois campos de duas componentes que juntos constituem o campo férmionico. As duas metades desse campo de Dirac de quatro componentes são afetadas pela transformação de Lorentz, e as transformações supersimétricas são consistentes com as invariâncias de Lorentz. O lado esquerdo da equação (3.1) trata do campo escalar Φ , então possui uma parte real e uma imaginária, ambas com o spin 0, portanto são invariantes perante a transformação de Lorentz. Já o lado direito apresenta o campo spinor de dois componentes Ψ que não é invariante a transformação de Lorentz, mas o parâmetro ξ também se um spinor de dois

componentes, por isso, é preciso entender como interagem para se tornarem invariantes a transformação de Lorentz. Portanto é necessário entender como é possível fazer isso para esses spinor de dois componentes.

3.1 Spinors e a Transformação de Lorentz

Assim como outros campos da física teórica, a Supersimetria também usa notação específica para facilitar e abreviar as formulas e deduções. Entretanto, diferente de outras áreas, essas notações da Supersimetria não foram padronizadas. A princípio será usada a notação de mecânica quântica relativística padrão.

Para começar a equação de Dirac é escrita

$$E\Psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi \quad (3.3)$$

com $c = \hbar = 1$ e α e β definido da maneira abaixo que implica um γ e um γ_5

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Essa é uma das representações padrões das matrizes de Dirac ([AITCHISON; HEY, 2003](#)), usada para pequenas massas ou altas energias, com $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sendo as matrizes de Pauli 2×2 e 1 a matriz identidade 2×2 .

Definindo Ψ temos que a equação de Dirac é

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi = m\chi \quad (3.6)$$

$$(E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi = m\psi \quad (3.7)$$

quando $m \rightarrow 0$, (3.6) se torna $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_0 = E\psi_0$ e o $E \rightarrow |p|$ então quando m chegar ao limite em 0

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|p|)\psi_0 = \psi_0, \quad (3.8)$$

ou seja, Ψ_0 é o autoestado do operador de helicidade $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|p|$ com autovalor $+1$, que significa que tem helicidade positiva. Para (3.7), o limite de massa 0 mostra que χ_0 tem helicidade negativa.

Para $m \neq 0$ em (3.6) e (3.7), ψ e χ , que são spinors de duas componentes, são autoestados de γ_5

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Esses dois autoestados γ_5 podem ser construídos a partir do Ψ original usando os operadores de projeção P_R e P_L que são definidos como

$$P_R = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$P_L = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$P_R \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_L \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Sendo $P_R P_L = 0$ e $P_R^2 = P_L^2 = 1$. O autovalor de γ_5 é chamado de quiralidade, com ψ tendo quiralidade $+1$ e χ tendo quiralidade -1 , com o $+$ sendo denotado como R e o $-$ sendo denotado como L, assim o spinor de duas componentes ψ pode ser escrito como ψ_R e o χ como χ_L .

Existem dois tipos de transformações de Lorentz, a de rotação e a transformação de velocidade, com transformações infinitesimais que especificam a ação em um vetor de 4 componentes

$$E \rightarrow E' = E, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{p}, \quad (3.13)$$

$$E \rightarrow E' = E - \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \boldsymbol{\eta} E, \quad (3.14)$$

onde $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ são os parametros que definem a rotação infinitesimal e $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ são os infinitesimais de velocidade. Então ψ é transformado em

$$\psi \rightarrow \psi' = (1 + i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2 - \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2)\psi \quad (3.15)$$

e χ é transformado em

$$\chi \rightarrow \chi' = (1 + i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2 + \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2)\chi. \quad (3.16)$$

As equações (3.15) e (3.16) são muito importantes pois mostram como construir os spinors rotacionados e com a velocidade alterada ψ' e χ' baseado nos originais ψ e χ , e ainda satisfazem a equação de Dirac, (3.6) e (3.7)

$$(E' - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}') \psi' = m\chi' \quad (3.17)$$

e

$$(E' + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}') \chi' = m\psi'. \quad (3.18)$$

3.2 Montando Invariantes e vetores de 4 componentes com spinors de 2 componentes

Como o spinor de Dirac de 4 componentes é possível formar um invariante de Lorentz

$$\bar{\Psi}\Psi = \Psi^\dagger \beta \Psi \quad (3.19)$$

e o vetor de 4 componentes

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \Psi^\dagger \beta(\beta, \beta\boldsymbol{\alpha})\Psi = \Psi^\dagger(1, \boldsymbol{\alpha})\Psi, \quad (3.20)$$

da maneira que Ψ e o χ foram um invariante de Lorentz

$$(\psi^\dagger \chi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \psi^\dagger \chi + \chi^\dagger \psi \quad (3.21)$$

e usando a equação

$$\psi' = V\psi, \quad \chi' = V^{\dagger-1}\chi = V^{-1\dagger}\chi. \quad (3.22)$$

É possível ver que o lado direito da (3.19) é invariante com cada parte sendo como abaixo e similar a $\chi^\dagger\psi$

$$\psi^\dagger \chi \rightarrow \psi'^\dagger \chi' = \psi^\dagger V^\dagger V^{\dagger-1} \chi = \psi^\dagger \chi. \quad (3.23)$$

Com isso (3.20) é alterada para um vetor com 4 componentes

$$\begin{aligned}
(\psi^\dagger \chi^\dagger) \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} &= (\psi^\dagger \psi + \chi^\dagger \chi, \psi^\dagger \sigma \psi - \chi^\dagger \sigma \chi) \\
&\equiv \psi^\dagger \sigma^\mu \psi + \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

com as quantidades σ^μ e $\bar{\sigma}^\mu$ sendo

$$\sigma^\mu \equiv (1, \sigma), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma) \tag{3.25}$$

E assim como um invariante de Lorentz, $\psi^\dagger \sigma^\mu \psi$ e $\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi$ se transformam separadamente num vetor de 4 componentes.

3.3 Férmions de Majorana

A equação

$$\chi_\psi \equiv 1\sigma_2\psi^* \tag{3.26}$$

se transforma em um objeto com tipo χ , que é consistente com a teoria de Dirac que junta ψ com χ_ψ num objeto de 4 componentes

$$\Psi_M^\psi = \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2\psi^* \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Essa equação obedece a transformação de Lorentz. Mas Ψ_M^ψ de (3.27) tem menos graus de liberdade que um spinor Ψ de Dirac de 4 componentes, já que foi determinando por objetos de 2 componentes como ψ . Em um spinor de Dirac Ψ que contém ψ e χ , há dois spinors de 2 componentes com 4 quantidades reais, ou seja 8 no total. Já em Ψ_M^ψ , há 4 quantidades reais contidas no spinor ψ .

Para ficar claro no âmbito físico, é preciso considerar a operação da conjugação de carga, que em um spinor de Dirac de 4 componentes fica

$$\Psi_C = C_0 \Psi^* \tag{3.28}$$

com C_0 e $\Psi_{M,C}^\psi$ sendo

$$C_0 = -i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$\Psi_{M,C}^\psi = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^* \\ -i\sigma_2\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2\psi^* \end{pmatrix} = \Psi_M^\psi. \quad (3.30)$$

Ψ_M^ψ descreve uma partícula de spin 1/2 que é par mesmo sob uma conjugação de carga, ou seja, é sua própria antipartícula, e essa partícula ganha o nome de férmion de Majorana.

Essa propriedade do conjugado de auto carga '*charge-self-conjugate*' é a razão física para a diferença no número de graus de liberdade em Ψ_M^ψ . No campo de Dirac há três módulos mas no campo de Majorana há somente dois, com partículas sendo os mesmos que antipartícula.

É possível construir

$$\Psi_M^\chi = \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

que satisfaz

$$\Psi_{M,C}^\chi = \Psi_M^\chi. \quad (3.32)$$

O termo de massa para a forma ' $\bar{\Psi}\Psi$ ' é

$$\bar{\Psi}_M^\chi \Psi_M^\chi = ((i\sigma_2\chi^*)^\dagger \chi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix} = \chi^T (-i\sigma_2) \chi + \chi^\dagger (i\sigma_2) \chi^*, \quad (3.33)$$

e para o termo Ψ_m^ψ o termo de massa é

$$\bar{\Psi}_M^\psi \Psi_M^\psi = (\psi^\dagger (-i\sigma_2\psi^*)^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2\psi^* \end{pmatrix} = \psi^\dagger (-i\sigma_2) \psi^* + \psi^T (i\sigma_2) \psi. \quad (3.34)$$

Podemos considerar o produto da invariante de Lorentz como dois fermions de Majorana, $\Psi_1 M$ e $\Psi_2 M$

$$\bar{\Psi}_{1M} \Psi_{2M} = \Psi_{1M}^\dagger \beta \Psi_{2M}, \quad (3.35)$$

mas as equações (3.28) e (3.30) nos dizem que

$$\Psi_{1M} = -i\gamma^2 \Psi_{1M}^* \quad (3.36)$$

onde

$$\Psi_{1M}^\dagger = \Psi_{1M}^T (-i, \gamma^2) \quad (3.37)$$

com $\gamma^{2\dagger} = -\gamma^2$. Portanto

$$\Psi_{1M}^\dagger \beta \Psi_{2M} = \Psi_{1M}^T (-i\gamma^2 \beta) \Psi_{2M}. \quad (3.38)$$

Então a matriz age como a métrica para formar o produto direto entre os dois Ψ_M e fica

$$-i\gamma^2 \beta = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

3.4 Férmions de Dirac usando spinors tipo χ

O modelo SUSY mais simples envolve um campo escalar complexo e um campo spinor de 2 componentes, sendo que um deles usa spinors tipo χ , também conhecido por tipo L . Para o MSSM é conveniente usar somente um tipo de spinor, no caso o spinor tipo L , mas então precisamos definir como lidar com o spinor tipo R que resta.

Considerando um campo de eletron escrito como

$$\Psi^{(e^-)} = \begin{pmatrix} \psi_R^{(e^-)} \\ \chi_L^{(e^-)} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Então escrevemos (3.40) usando o conjugado de carga do campo positron do lado esquerdo, portanto

$$\Psi^{(e)} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi_L^{(e^+)*} \\ \chi_L^{(e^-)} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Um termo de massa para um férmion de Dirac para equação (3.41)

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(e)} \Psi^{(e)} &= \Psi^{(e)\dagger} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi^{(e)} = \left(\left(i\sigma_2 \chi^{(e^+)} \right)^T \chi^{(e^-)\dagger} \right) \begin{pmatrix} \chi^{(e^-)} \\ i\sigma_2 \chi^{(e^+)*} \end{pmatrix} \\ &= \chi^{(e^+)} \cdot \chi^{(e^-)} + \chi^{(e^-)\dagger} i\sigma_2 \chi^{(e^+)*}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde o primeiro termo do lado direito usa a notação $\cdot$ para dois spinors tipo χ . Portanto a massa de Dirac foi escrita usando termos de dois spinors tipo L , um deles associado ao e^- e o outro ao e^+ .

4 Lagrangiana Supersimetrica Simples

Será analisado agora, uma das mais simples teorias da supersimetria, envolvendo somente dois campos livres sem massa, um campo complexo de spin 0 ϕ e um campo spinor de tipo L χ . A Lagrangiana desse sistema é dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \quad (4.1)$$

sendo ϕ a parte de campos quânticos bosônicos e χ a parte da Lagrangiana do campo de Dirac. Para o ϕ a equação de movimento é $\square \phi = 0$ e para o χ é $i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = 0$. Agora é preciso achar as transformações que a mudança em ϕ é proporcional a em χ e vice versa.

A Ação é a integral da densidade $\mathcal{L}$ sob o espaço de 4 dimensões e é adimensional nas unidades $\hbar = c = 1$

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} \, d^3x \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \, d^4x. \quad (4.2)$$

Nesse sistema só há uma dimensão independente, que é a de massa, ou energia, M. Comprimento possui a mesma dimensão que o tempo, pois $c = 1$, e ambos têm a dimensão de M^{-1} , pois $\hbar = 1$. Portanto, para a ação ser adimensional, $\mathcal{L}$ tem as dimensões M^4 . Com isso temos ϕ e χ podem ser lidos como

$$[\phi] = M \quad [\chi] = M^{3/2}. \quad (4.3)$$

Agora é preciso descobrir que transformações supersimétricas lincam ϕ e χ . Considerando a mudança $\phi \rightarrow \phi + \delta_\xi \phi$, primeiro onde δ é constante

$$\text{mudança em } \phi = \text{parametro } \xi \times \text{outro campo } \chi \quad (4.4)$$

Do lado esquerdo temos um campo de spin 0, invariante a transformação de Lorentz, portanto a transformação de Lorentz deve ser construída de χ e δ , e para isso é preciso assumir que δ é um spinor de tipo χ . Usando o produto invariante

$$\psi_{\chi^{(1)}}^\dagger \chi^{(2)} = \left(i \sigma_2 \chi^{(1)*} \right)^*{}^T \chi^{(2)} = \left(i \sigma_2 \chi^{(1)} \right)^T \chi^{(2)} = \chi^{(1)T} (-i \sigma_2) \chi^{(2)}, \quad (4.5)$$

temos

$$\delta_\xi \phi = \xi^T (-i \sigma_2) \chi \quad (4.6)$$

que também pode ser escrito como

$$\delta_\xi \phi = \xi^a \chi_a = \xi \cdot \chi \quad (4.7)$$

ξ é um spinor que não depende de x e não é invariante sob a transformação de Lorentz, ou seja, se transforma conforme um spinor tipo χ , proporcional a $V^{-1\dagger}$. Por mais que não dependa de x , é presumível que seus componentes anticomutem com os componentes de um spinor, o tornando um número de Grassmann. E como $[\phi] = M$ e $[\chi] = M^{3/2}$ é preciso designar as dimensões para balancear os dois lados

$$[\xi] = M^{-1/2}. \quad (4.8)$$

Portanto o $\delta_\xi \chi$ correspondente deve ser algo como

$$\delta_\xi \chi \sim \text{produto de } \xi \text{ e } \phi. \quad (4.9)$$

Do lado esquerdo de (4.9) temos uma dimensão de $M^{3/2}$ e no lado direito temos o produto de δ e ξ , ou seja, dimensões de $M^{-1/2+1} = M^{1/2}$, portanto é preciso introduzir uma dimensão de M^1 do lado direito. Na teoria sem massa, só há uma possibilidade, o operador gradiente ∂_μ , mais especificamente, o operador momentum $i\partial_\mu$. Com isso, sobra um μ do lado direito, e para sumir com ele, fazemos

$$\delta_\xi \chi = (i\sigma^\mu \partial_\mu \phi) \xi \quad (4.10)$$

onde σ^μ é dado por (3.25). As matrizes 2×2 de ∂^μ são aplicadas em ξ para gerar uma coluna de 2 componentes para equivaler ao lado esquerdo, porém ainda não sendo um spinor tipo χ igual ao lado direito. Se observarmos as equações

$$\sigma^\mu p_\mu \psi = m\chi \quad (4.11)$$

$$\bar{\sigma}^\mu p_\mu \chi = m\psi \quad (4.12)$$

vemos que a combinação de $\sigma^\mu \partial_\mu$ transforma ψ em χ , e χ em ψ , então precisamos gerar ψ de ξ e para isso usamos a equação

$$\psi_\chi \equiv i\sigma_2 \chi^*, \quad (4.13)$$

e com isso chegamos em

$$\delta_\xi \chi_a = A [\mathrm{i}\sigma^\mu (\mathrm{i}\sigma_2 \xi^*)]_a \partial_\mu \phi \quad (4.14)$$

onde A é uma constante determinada a partir da condição que $\mathcal{L}$ é invariante sob (4.6) e (4.14), e ${}_a \partial_\mu \phi$ não possui matriz.

As equações (4.6) e (4.14) geram as transformações supersimétricas de Φ e χ , porém ambas são campos complexos e é preciso explicitar quais são as transformações correspondentes para as conjugadas Hermitianas $\Phi^\dagger$ e $\chi^\dagger$. É preciso lembrar que Φ e χ são campos quânticos, já ξ não é um campo. Portanto precisamos considerar o campo quântico Φ com uma expansão

$$\phi = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} [a(k) e^{-\mathrm{i}k \cdot x} + b^\dagger(k) e^{\mathrm{i}k \cdot x}], \quad (4.15)$$

com o operador $a(k)$ destruindo uma partícula com momentum k e $b^\dagger$ criando uma antipartícula equivalente com momentum k , enquanto $\exp[\mathrm{i}k \cdot x]$ representam a função de onda padrão. O conjugado Hermitiano dessa operação fica

$$\phi^\dagger = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} [a^\dagger(k) e^{\mathrm{i}k \cdot x} + b(k) e^{-\mathrm{i}k \cdot x}] \quad (4.16)$$

Já para campo spinor como χ , a situação é diferente pois o análogo do escalar spin 0 de função de onda $\exp[\mathrm{i}k \cdot x]$ vai ser substituído por um spinor de 2 componentes. Portanto χ tem a forma de

$$\chi_1 \sim \text{operador modulo } x_0 \text{ primeiro componente do spinor de partícula livre de tipo } \chi, \quad (4.17)$$

da mesma forma que (4.16), $\chi^\dagger$ é

$$\chi_1^\dagger \sim (\text{operador modulo } x_0)^\dagger \times (\text{primeiro componente do spinor de partícula livre de tipo } \chi)^*. \quad (4.18)$$

Agora, consideremos a hermitiana conjugada de (4.6). (4.6) escrito com todos seus componentes é

$$\delta_\xi \phi = (\xi_1 \xi_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = -\xi_1 \chi_2 + \xi_2 \chi_1. \quad (4.19)$$

No caso de 2 matrizes A e B , sabemos que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ portanto analogamente temos

$$\delta_\xi \phi^\dagger = -\chi_2^\dagger \xi_1^* + \chi_1^\dagger \xi_2^*, \quad (4.20)$$

ξ não é um campo quântico então a notação de seu conjugado " $*$ " é válida, logo essa equação pode ser escrita também como

$$\begin{aligned} \delta_\xi \phi^\dagger &= \chi_1^\dagger \xi_2^* - \chi_2^\dagger \xi_1^* \\ &= (\chi_1^\dagger \chi_2^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} \\ &= \chi^\dagger (i\sigma_2) \xi^*, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde o † da última linha, pode ser entendido como no sentido matricial

$$\chi^\dagger = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}^\dagger = (\chi_1^\dagger \chi_2^\dagger). \quad (4.22)$$

Da mesma maneira é possível obter a † de (4.14), que fica

$$\delta_\xi \chi^\dagger = A \partial_\mu \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu. \quad (4.23)$$

Portanto se assumirmos um A como real e que faça $\mathcal{L}$ invariante sob (4.6), (4.14), (4.21) e (4.24), temos que

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{L} &= \partial_\mu (\delta_\xi \phi^\dagger) \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\delta_\xi \phi) + (\delta_\xi \chi^\dagger) i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial (\delta_\xi \chi) \\ &= \partial_\mu (\chi^\dagger i\sigma_2 \xi^*) \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\xi^T (-i\sigma_2) \chi) \\ &\quad + A (\partial_\mu \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu) i\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi + A \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu (i\sigma^\mu i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nessa equação há dois tipos de termos, os que envolvem o parâmetro ξ^* e os que envolvem o parâmetro ξ^T . No termo envolvendo $A\xi^*$ aparece a combinação

$$\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \sigma^\mu \partial_\mu = (\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) (\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) = \partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 = \partial_\mu \partial^\mu, \quad (4.25)$$

com ∂_μ vindo da constante ξ^* . Então combinando isso com o termo de (4.24), temos

$$\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^*} = \partial_\mu \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi - iA \chi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \sigma_2 \xi^* \phi. \quad (4.26)$$

Porém, isso representa mudança em $\mathcal{L}$ sob as transformações, então não é possível cancelar essas mudanças com os termos envolvendo ξ^T , portanto não foi encontrado a simetria ainda. Entretanto a Ação é a integrada no espaço-tempo de $\mathcal{L}$ e pode ser invariante se $\mathcal{L}$

for organizado para ser uma derivada total. Já que ξ não depende de x , é possível escrever a eq. 54 como

$$\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^*} = \partial_\mu \left(\chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi \right), \quad (4.27)$$

somente se

$$A = -1. \quad (4.28)$$

.

Então se (4.28), os termos de ξ^T se combinam para transformar

$$\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^T} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \left(\xi^T (-i\sigma_2) \chi \right) + \partial_\mu \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi, \quad (4.29)$$

com o segundo termo podendo ser escrito como

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(\phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\mu \partial_\nu \chi \\ &= \partial_\mu \left(\phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \partial^\mu \chi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

E com isso é possível combinar o segundo termo da segunda parte de (4.30) com o o primeiro termo de (4.29) para formar uma derivada total

$$\partial_\mu \left(\phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi \right), \quad (4.31)$$

para então aparecer

$$\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^T} = \partial_\mu \left(\phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi \right) + \partial_\mu \left(\phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right), \quad (4.32)$$

que também é uma derivada total. Portanto foi demonstrado que sob (4.6), (4.14), (4.21) e (4.24) e com $A = -1$, $\mathcal{L}$ se torna uma derivada total

$$\delta_\xi \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi + \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) \quad (4.33)$$

e portanto, a Ação é invariante, com isso temos o SUSY.

5 O Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM)

5.1 Introdução ao MSSM

Até agora o alcançado foi um campo escalar complexo e um campo férmionico de tipo L, que não estão interagindo entre si. É importante ressaltar que as transformações supersimétricas não agem nos graus de liberdade $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ ou $U(1)_{em}$. Vamos considerar como exemplo, o lado esquerdo do campo de lepton, como um eletron e_L , ele é um dubleto $SU(2)_L$ com parceiro de campo Ξ_{e_L}

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Na teoria SUSY, eles precisam possuir um parceiro bosônico de spin 0 que forma outro dubleto $SU(2)_L$. Esse dubleto existe no Modelo Padrão, e é chamado de dubleto de Higgs

$$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

com seu dubleto conjugado de carga

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Entretanto esses dubletos de Higgs não carregam o número de lepton, que é conservado, e não podemos ter partículas no multipletto SUSY que carregam números quânticos conservados, enquanto outros não. Então é necessário achar outras partículas para acompanhar o dubleto representado na (5.1)

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \text{ parceiro de } \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{eL} \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

onde $\tilde{\nu}$ é um parceiro escalar para o neutrino, também chamado de sneutrino, e $\tilde{e}$ é um parceiro escalar para o elétron, também chamado de seletron. Eles estão englobados em multipletos quirais $SU(2)_L$, junto a smuons e staus.

Já os quarks são tripletos do grupo de cor de calibre (colour gauge group) $SU(3)_c$, e nenhuma outra partícula do Modelo Padrão são tripletos de cor. Então é necessário

encontrar um novo parceiro escalar para os quarks também. As interações eletrofracas dos leptons e quarks são quirais, que significa que a parte L do campo, que é um dubleto, interage de forma diferente à parte R, que é um singuleto(singlet). Então é necessário encontrar parceiros escalares para o L e o R separadamente.

Para campos SUSY com spin inteiro, há um vetor supermultiplete que associa um campo vetorial sem massa, que possui dois graus de liberdade, com um férmion L, chamado de gaugino. Os grupos de números quânticos calibre para os gauginos são iguais aos para os bósons calibre. Depois da quebra de simetria de $SU(2)_L$, é preciso de 3 parceiros férmionicos para o $W^\pm, Z^0$, os $\tilde{W}^\pm, Z^0$, e o photino $\tilde{\gamma}$.

Até agora não foi possível encontrar um parceiro férmion para os dubletos de Higgs. Isso é consequência de transformar o Modelo Padrão em Supersimétrico, que faz faltar 2 dupletos de higgs. No Modelo Padrão, os dupletos, como visto em (5.3), são representados como conjugados dos dupletos da equação (5.1). Como isso não é possível no SUSY precisamos de

$$H_u \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

e

$$H_d \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Os supermultipletos chirais e gauginos daqui são o que dão o 'mínimo' para o campo Supersimétrico. A teoria completa que inclui as interações supersimétricas são chamadas se Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo. Vale destacar que nenhum desses superparceiros foi visto experimentalmente ainda.

5.2 O MSSM

Os quarks e leptons possuem como propriedade, que sua parte L, ξ , são dubletos $SU(2)_L$, enquanto sua parte R, Ψ , são singletos $SU(2)_L$. As propriedades de grupo de calibre fraca indicam que as partes L e R devem ser lidadas separadamente e não juntas como tratado no spinor de Dirac de 4 componentes, então devemos usar um super multiplete quiral como base.

O multiplete quiral contém um spinor ξ tipo L. Para as partículas tipo L, isso não causa problema, porém, para os campos de partícula tipo R como e_R^- e e_R^- não é possível encaixar de forma convencional. Mas é possível acomodar essas partículas através da convenção de tipo L para os supermultipletos quirais, que considera eles como conjugados

de carga dos campos de antipartícula de tipo L. O campo é denotado pelo nome da partícula, no caso, temos $e_R^- \equiv \psi_{e^-}$ e $e_L^+ \equiv \xi_{e^-}$. Caso considerarmos e_R^- como conjugado de carga de e_L^+ temos

$$e_R^- \equiv \psi_{e^-} = (e_L^+)^c \equiv i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T}. \quad (5.7)$$

O termo de massa de Dirac para o elétron é

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{e^-} \Psi_{e^-} &= \psi_{e^-}^\dagger \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger \psi_{e^-} = (i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T})^\dagger \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T} \\ &= \chi_{e^+}^T (-i\sigma_2) \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T} \\ &= \chi_{e^+} \cdot \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger \cdot \chi_{e^+}^\dagger. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Sendo tudo acompanhado por um termo ξ . Também é importante considerar

$$\bar{\Psi}_{e^-} \gamma_5 \Psi_{e^-} = -\chi_{e^+} \cdot \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger \cdot \chi_{e^+}^\dagger \quad (5.9)$$

Tabela 1 – Campos dos supermultipletos quirais no MSSM

Nomes		spin 0	spin 1/2	SU(3) _c , SU(2) _L , U(1) _y
squarks, quarks (× 3 famílias)	Q	$(\tilde{u}_L, d_L)$	(u_L, d_L)	3, 2, 1/3
	$\tilde{u}$	$\tilde{\bar{u}}_L (\tilde{u}_R)$	$\bar{u}_L \sim (u_R)^c$	$\bar{3}, 1, -4/3$
	$\tilde{d}$	$\tilde{\bar{d}}_L (\tilde{d}_R)$	$\bar{d}_L \sim (d_R)^c$	$\bar{3}, 1, 2/3$
sleptons, leptons (× 3 famílias)	L	$(\tilde{\nu}_{eL}, \tilde{e}_L)$	(ν_{eL}, e_L)	1, 2, -1
	$\tilde{e}$	$\tilde{\bar{e}}_L (\tilde{e}_R)$	$\bar{e}_L \sim (e_R^c)$	1, 1, 2
higgs, higgsinos	H_u	(H_u^+, H_u^0)	$(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$	1, 2, 1
	H_d	(H_d^0, H_d^-)	$(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$	1, 2, -1

Tabela 2 – Campos dos supermultipletos de calibre no MSSM

Nomes	spin 1/2	spin 1	SU(3) _c , SU(2) _L , U(1) _y
glúíno, gluons	$\tilde{g}$	g	8, 1, 0
winos, W bosons	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	$W^\pm, W^0$	1, 3, 0
bino, B boson	B	B	1, 1, 0

A tabela 1 mostra os supermultipletos quirais que aparecem no Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo, onde a barra nos campos representa que é a antipartícula, já a tabela 2 mostra os supermultipletos de calibre do Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo. Com a quebra na simetria da força eletrofraca, os campos W^0 e B se juntam e os campos físicos Z^0 e γ , enquanto os campos-s se juntam para formar um zino $\tilde{Z}^0$ degenerado com Z^0 e um photino $\tilde{\gamma}$ sem massa.

Tendo grupos de calibre, as propriedades da transformação de calibre e as partículas, ainda precisamos do superpotencial W , que para o MSSM é dado por

$$W = y_u^{ij} \bar{u}_i Q_j \cdot H_u - y_d^{ij} \bar{d}_i Q_j \cdot H_d - y_e^{ij} \bar{e}_i L_j \cdot H_d + \mu H_u \cdot H_d. \quad (5.10)$$

Os campos que aparecem nessa equação são aqueles supercampos quirais que aparecem na tabela 1. W pode ser pensado como a mesma função do campo escalar em cada supermultipeto quiral. Os termos y são as matrizes 3×3 em espaço familiar, e são iguais ao pareamento de Yukawa usado, que é a interação entre um campo escalar e um campo de Dirac (ITZYKSON; ZUBER, 1980), usado no Modelo Padrão. Quando esses pareamentos são quem atribuem massas aos quarks e leptons. Quando o campo de Higgs adquire expectativa de vácuo, esses pareamentos atribuem a massa para os quarks e leptons. Não há massa lagrangiana para os férmions, pois se houvesse, quebraria a simetria de calibre $SU(2)_L$. Já a notação $\cdot$ significa o pareamento invariante em $SU(2)_L$ de dois dubletos. Os índices de cor foram omitidos afim de simplificar a equação.

Na formulação padrão do Modelo Padrão o campo de Higgs

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

é responsável por gerar a massa para o quark 'down' usando a interação de Yukawa na forma de

$$b\bar{q}_L\phi d_R + \text{h.c.} \quad (5.12)$$

Porém quando falamos no caso estabelecido anteriormente, o produto direto $SU(2)_L$ é $q_L^\dagger\phi$, que é invariante sob $q_L \rightarrow Uq_L, \phi \rightarrow U\phi$. Então se

$$q_L^\dagger\phi = u^\dagger\phi^+ + d^\dagger\phi^0, \quad (5.13)$$

quando ϕ^0 desenvolver um vev, ou valor esperado de vácuo, (5.12) se torna

$$b\langle\phi^0\rangle\bar{d}_L d_R + \text{h.c.}, \quad (5.14)$$

que é a massa do quark down. Na versão supersimetrica de (5.10), o produto direto $SU(2)_L$ envolvendo o supercampo H_u é levado junto com o supercampo Q , que possui os números quânticos de um dubleto de quark q_L e não do dubleto do antiquark $q_L^\dagger$. Se escrevermos (5.10) em termos correspondentes aos compôs escalares, o primeiro termo se torna

$$y_u^{ij}\tilde{u}_{Li}\left(\tilde{u}_{Lj}H_u^0 - \tilde{d}_{Lj}H_u^+\right) \quad (5.15)$$

Usando algumas propriedades do modelo de Wess-Zumino, com a equação

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = W_i(\phi, \phi^\dagger) F_i - \frac{1}{2}W_{ij}(\phi, \phi^\dagger)\chi_i \cdot \chi_j + \text{conjugado de hermitiano}, \quad (5.16)$$

onde W_i e W_{ij} são funções arbitrárias dos campos bosônicos e férmionicos e é escrito como

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial\phi_i\partial\phi_j}, \quad (5.17)$$

temos que (5.15) vai gerar um termo na lagrangiana escrito como

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}y_u^{ij}\left(\chi_{u_{Li}} \cdot \chi_{u_{Lj}} + \chi_{u_{Li}} \cdot \chi_{u_{L,j}}\right)H_u^0 + \text{h.c.} \\ & = -y_u^{ij}\left(\chi_{\bar{u}_{Li}} \cdot \chi_{u_{Lj}}\right)H_u^0 + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Quando H_μ^0 desenvolve um valor de vácuo $\ni_\mu$, (5.18) se torna o termo de massa do tipo Dirac para o quark up na forma de

$$- \left(m_{uij} \chi_{\bar{u}_{Li}} \cdot \chi_{u_{Lj}} + \text{h.c.} \right) \quad (5.19)$$

com

$$m_{uij} = v_u y_u^{ij}. \quad (5.20)$$

transformando para a base que diagonaliza as matrizes de massa que leva a mistura de sabor como no Modelo Padrão. Ou seja, conseguimos a extensão supersimétrica do Modelo Padrão ao custo de aparecer um novo parâmetro, o μ .

Os férmions top, botton e tau são os mais pesados do Modelo Padrão, e como suas massas são proporcionais ao parâmetro y , é relevante levar em conta a aproximação onde os y não zero são

$$y_u^{33} = y_t; \quad y_d^{33} = y_b; \quad y_e^{33} = y_\tau, \quad (5.21)$$

então considerando os campos de isospin fraco, temos que para os campos escalares

$$W \approx y_t \left[\tilde{t}_L \left(\tilde{t}_L H_u^0 - \tilde{b}_L H_u^+ \right) \right] - y_b \left[\tilde{b}_L \left(\tilde{t}_L H_d^- - \tilde{b}_L H_d^0 \right) \right] - y_\tau \left[\tilde{\tau}_L \left(\tilde{\nu}_{\tau L} H_d^- - \tilde{\tau}_L H_d^0 \right) \right], \quad (5.22)$$

onde o sinal menos atribuído a W serve para fazer com que $y_t \tilde{t}_L \tilde{t}_L$, $y_b \tilde{b}_L \tilde{b}_L$ e $y_\tau \tilde{\tau}_L \tilde{\tau}_L$ tenham o sinal correto para gerar massa para os termos top, botton e tau quando $\langle H_u^0 \rangle \neq 0$ e $\langle H_d^0 \rangle \neq 0$.

Assim como o parâmetro de Yukawa no Modelo Padrão junta os campos de Higgs a quarks e leptons, a teoria supersimétrica tem que juntar tanto Higgsinos, squarks e quarks como também Higgsinos, sleptons e leptons, ou seja transformar duas partículas em superparceiros.

Não há termos de massa convencionais em (5.10), porém, o termo μ , que é quadrático em campo, e é o pareamento invariante em $SU(2)$ de dois dubletos de supercampo de Higgs

$$W(\text{ termo } \mu) = \mu H_u \cdot H_d = \mu (H_{u1} H_{d2} - H_{u2} H_{d1}), \quad (5.23)$$

onde 1 e 2 denotam o componente isospinor. Como campos conjugados Hermitianos violam o SUSY, os pareamentos bi lineares que envolvem eles, como $H_u^\dagger \cdot H_u$ e $H_d^\dagger \cdot H_d$ não são permitidos, sobrando somente o mostrado por (5.23). O componente F de (5.23) é dado por

$$\mu \left[\left(H_u^+ F_d^- - H_u^0 F_d^0 + H_d^0 F_u^0 - H_d^- F_u^+ \right) - \left(\tilde{H}_u^+ \cdot \tilde{H}_d^- - \tilde{H}_u^0 \cdot \tilde{H}_d^0 \right) \right]. \quad (5.24)$$

O segundo termo de (5.24) é quem contribui para os termos de massa do Higgino. Já o primeiro termo leva a um potencial escalar, que envolve o potencial de Higgs,

$$|\mu|^2 \left(|H_u^+|^2 + |H_d^-|^2 + |H_u^0|^2 + |H_d^0|^2 \right). \quad (5.25)$$

Como esses termos possuem o sinal positivo associado ao termo de massa bosônica $m^2 \phi^\dagger \phi$ e não o sinal negativo necessário para quebrar a simetria eletrofraca através do mecanismo de Higgs, então isso significa que a lagrangiana invariante perante o SUSY não acomoda a quebra da simetria eletrofraca.

Ainda assim, o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo não é uma simetria exata, pois não foi observado os parceiros s dos campos do Modelo Padrão. Mas é evidente que para surgir uma quebra de simetria eletrofraca, é preciso surgir com um termo que quebre o SUSY no potencial de Higgs.

6 Espaço de Estado Geral do SUSY

A conexão entre as funções de onda do estado ligado (bound state wave functions) e o potencial é muito importante para resolver o espectro de problemas de potencial unidimensional, já que conhecendo a função de onda do estado fundamental, se conhece também o potencial (COOPER; KHARE; SUKHATME, 1995). Escolhendo fazer a energia do estado fundamental ser zero temos, a partir da equação de Schroedinger, temos que a função de onda do estado fundamental (ψ_0) obedece a

$$H_1\psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + V_1(x)\psi_0(x) = 0, \quad (6.1)$$

onde

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}. \quad (6.2)$$

Com isso é possível reconstruir o potencial $V_1(x)$ a partir de um conhecimento de sua função de onda do estado fundamental que não tem nós (nodes) e a partir daí conseguimos fatorar o hamiltoniano usando

$$H_1 = A^\dagger A, \quad (6.3)$$

no qual

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (6.4)$$

$$A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (6.5)$$

Assim chegamos em uma Equação de Riccati, ou seja, uma equação diferencial ordinária não linear, de primeira ordem

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (6.6)$$

W é o superpotencial e é obtida satisfazendo $A\psi_0 = 0$, que gera $H_1\psi_0 = A^\dagger A\psi_0 = 0$ dando a definição abaixo

$$W(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \quad (6.7)$$

O próximo passo é definir o operador $H_2 = AA^\dagger$ revertendo a ordem de A e $A^\dagger$. Simplificando temos que H_2 é na verdade, um hamiltoniano correspondendo a um novo potencial $V_2(x)$. E o potencial V_1 e V_2 são referidos como parceiros potenciais supersimétricos.

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (6.8)$$

Os autovalores de energia, as funções de onda e as matrizes S de H_1 e H_2 estão relacionados e também é possível observar que os autovalores de energia de H_1 e H_2 são positivos semi-definidos ($E_n \geq 0$). Então para $n > 0$, a equação de Schrodinger para H_1 é

$$H_1 \psi_n^{(1)} = A^\dagger A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}, \quad (6.9)$$

com

$$H_2 (A \psi_n^{(1)}) = AA^\dagger A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} (A \psi_n^{(1)}), \quad (6.10)$$

e

$$H_1 (A^\dagger \psi_n^{(2)}) = A^\dagger AA^\dagger \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} (A^\dagger \psi_n^{(2)}). \quad (6.11)$$

Como $E(1)_0 = 0$, temos que as autofunções dos dois hamiltonianos H_1 e H_2 estão relacionadas por ($n = 0, 1, 2, \dots$) com

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= E_{n+1}^{(1)}, & E_0^{(1)} &= 0 \\ \psi_n^{(2)} &= [E_{n+1}^{(1)}]^{-1/2} A \psi_{n+1}^{(1)}. \\ \psi_{n+1}^{(1)} &= [E_n^{(2)}]^{-1/2} A^\dagger \psi_n^{(2)} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Observe que se $\psi(1)_{n+1}$ de H_1 é normalizado, então a função de onda $\psi(2)$ também está normalizado. Além disso, o operador A converte uma autofunção de H_1 em H_2 com a mesma energia, mas também destrói um nó extra em uma autofunção. Como a função de onda do estado fundamental de H_1 é aniquilada pela operadora A , este estado não tem parceiro supersimétrico. Então, conhecendo todas as autofunções de H_1 , podemos determinar as autofunções de H_2 usando o operador A , e vice-versa usando $A^\dagger$, podemos reconstruir todos as autofunções de H_1 daquelas de H_2 , exceto para o estado fundamental.

Para entender melhor a razão degeneração dos espectros de H_1 e partimos para as propriedades da álgebra SUSY. Assumindo uma matriz SUSY Hamiltoniana que é parte de um álgebra fechada que contém operadores bosônicos e fermiônicos com relações de comutação e anti-comutação e considerando os operadores

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}, \\ Q^\dagger &= \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

A relações de comutação e anticomutação descrevem a superálgebra fechada (1/1), ou seja, uma álgebra sobre um anel ou campo comutativo com uma decomposição em pares e ímpares um operador de multiplicação que respeita a graduação.

$$\begin{aligned} [H, Q] &= [H, Q^\dagger] = 0 \\ \{Q, Q^\dagger\} &= H, \quad \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

O fato de Q e $Q^\dagger$ comutar com H é responsável pela degeneração. Os operadores Q e $Q^\dagger$ podem ser interpretados como operadores que mudam os graus de liberdade bosônicos para fermiônicos e vice-versa.

Para determinar o parceiro potencial SUSY para o caso do poço de potencial infinito, considere uma partícula de massa m em um poço de potencial infinito de largura L .

$$\begin{aligned} V(x) &= 0, & 0 \leq x \leq L, \\ &= \infty, & -\infty < x < 0, x > L. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Onde a função de onda para o estado fundamental e a energia do estado fundamental é dado por

$$\psi_0^{(1)} = (2/L)^{1/2} \sin(\pi x/L), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.17)$$

Subtraindo a energia do estado temos para $H_1 = H - E_0$, então os autovalores de energia e as autofunções são dados por

$$E_n^{(1)} = \frac{n(n+2)}{2mL^2} \hbar^2 \pi^2, \quad (6.18)$$

$$\psi_n^{(1)} = (2/L)^{1/2} \sin \frac{(n+1)\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.19)$$

Usando ((6.7) obtermos o superpotencial e através disso é possível determinar o parceiro potencial supersimétrico V_2

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cot(\pi x/L), \quad (6.20)$$

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left[2 \operatorname{cosec}^2(\pi x/L) - 1 \right]. \quad (6.21)$$

As funções de onda para H_2 são obtidas aplicando o operador A em H_1 . Com isso, descobrimos que

$$\psi_0^{(2)} \propto \sin^2(\pi x/L), \quad \psi_1^{(2)} \propto \sin(\pi x/L) \sin(2\pi x/L). \quad (6.22)$$

Assim, mostramos que dois potenciais diferentes de H_1 e H_2 têm exatamente os mesmos espectros, exceto pelo fato que H_2 tem um estado ligado a menos. Por conveniência escolhemos $L = \pi$ e $\hbar = 2m = 1$.

$$e_R^- \equiv \psi_{e^-} = \left(e_L^+ \right)^c \equiv i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T} \quad (6.23)$$

7 Oscilador Harmônico Supersimétrico

A simetria de um objeto (sistema) é qualquer transformação sob o qual esse objeto (sistema) permanece invariante, ou seja, simetria é uma transformação em que hamiltoniano do sistema permanece invariante, e sua transformação é gerada por um operador denominado gerador (KULKARNI; RAMADEVI, 2003). Um sistema possui simetria se o hamiltoniano comuta com o gerador da transformação de simetria. No caso da transformação de simetria por translação temos que

$$\psi(\vec{r} + \vec{a}) = e^{i\vec{a} \cdot \vec{p}/\hbar} \psi(\vec{r}) \quad (7.1)$$

onde $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ é o operador momentum. Então para um V constante, o hamiltoniano $H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V$ vai ser invariável para a translação e o bracket comutador $[H, \vec{p}] = H\vec{p} - \vec{p}H$ vai ser zero, portanto, H e $\vec{p}$ comutam.

Considerando o $\psi(\vec{r})$ que satisfaz a equação

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (7.2)$$

onde E é o autovalor da energia, temos que o bracket comutador operando em $\psi(\vec{r})$ vai resultar em

$$H[\vec{p}\psi(\vec{r})] = \vec{p}H\psi(\vec{r}) = E[\vec{p}\psi(\vec{r})] \quad (7.3)$$

Portanto para E , existem duas autofunções $\psi(\vec{r})$ e $\vec{p}\psi(\vec{r})$ e são chamadas de autofunções degeneradas. O hamiltoniano H para um oscilador harmônico simples é

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \quad (7.4)$$

Introduzindo uma variável adimensional $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, H pode ser escrito como

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) \quad (7.5)$$

no qual $a^\dagger = -\frac{d}{dy} + y$ e $a = \frac{d}{dy} + y$. Os autoestados de energia que são soluções da equação de Schrodinger são os polinômios de Hermite

$$\psi_n(y) = \langle y | n \rangle \propto e^{-y^2/2} H_n(y) \quad (7.6)$$

onde $|n\rangle$ se refere ao número de estados, com n sendo o nível de excitação do oscilador harmônico ou o número de partículas. Os operadores a e $a^\dagger$ são chamados de operadores de aniquilação e criação porque no número de estados eles operam como a seguir

$$\begin{aligned} a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, a|0\rangle = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

portanto a diminui o estado $|n\rangle$ para $|n-1\rangle$ e $a^\dagger$ aumenta $|n\rangle$ para $|n+1\rangle$. Pelo princípio de exclusão de Pauli, dois férmions não podem existir no mesmo estado quântico, enquanto bósons podem. Isso indica que o número n de partículas em um estado quântico $|n\rangle$ pode ter qualquer valor em um oscilador bosônico, e zero ou um para um oscilador fermiônico.

Com os operadores a_b e $a_b^\dagger$ satisfazendo $[a_b, a_b^\dagger] = 1$, $[a_b, a_b] = 0$, $[a_b^\dagger, a_b^\dagger] = 0$ o Hamiltoniano para o oscilador bosônico é escrito como

$$H_b = \hbar\omega_b \left(a_b^\dagger a_b + \frac{1}{2} \right) \quad (7.8)$$

com o autovalor da energia E_{n_b} sendo obtido de

$$H_b |n_b\rangle = E_{n_b} |n_b\rangle \quad (7.9)$$

$$E_{n_b} = (n_b + 1/2) \hbar\omega_b \quad (7.10)$$

onde n_b pode assumir qualquer número inteiro positivo.

O princípio de exclusão de Pauli exige que os estados fermiônicos sejam somente $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ portanto o estado $|2\rangle$ deve ser zero. Com o a_f e $a_f^\dagger$ sendo os operadores fermiônicos de criação e aniquilação, o número de estados $|2\rangle$ será $|2\rangle \propto (a_f^\dagger)^2 |0\rangle$, que é zero somente se

$$(a_f^\dagger)^2 = \frac{1}{2} \{a_f^\dagger, a_f^\dagger\} = 0. \quad (7.11)$$

As restrições impostas pelo princípio de exclusão de Pauli resulta nas relações para os operadores a_f , $a_f^\dagger$ e Hamiltoniano fermiônico H_f resultam

$$\{a_f, a_f\} = \{a_f^\dagger, a_f^\dagger\} = 0 \text{ e } \{a_f, a_f^\dagger\} = 1, \quad (7.12)$$

$$H_f |n_f\rangle = E_{n_f} |n_f\rangle, \quad (7.13)$$

$$H_f = \hbar\omega_f \left(a_f^\dagger a_f - \frac{1}{2} \right), \quad (7.14)$$

$$E_{n_f} = (n_f - 1/2) \hbar\omega_f, \quad (7.15)$$

com $n_f = 1, 2$.

Assumindo um sistema $|n_b, n_f\rangle$ que combine o oscilador bosônico e o fermiônico e que não haja interação entre os dois osciladores, é definido o operador $Q = a_b a_f^\dagger$ e o conjugado $Q^\dagger = a_f a_b^\dagger$ que interage com o sistema da maneira

$$Q |n_b, n_f = 0\rangle = a_b a_f^\dagger |n_b, n_f = 0\rangle = \sqrt{n_b} |n_b - 1, n_f = 1\rangle, \quad (7.16)$$

$$Q^\dagger |n_b, n_f = 1\rangle = a_f a_b^\dagger |n_b, n_f = 1\rangle = \sqrt{n_b + 1} |n_b + 1, n_f = 0\rangle \quad (7.17)$$

Q muda $n_f = 0$ para $n_f = 1$, e $Q^\dagger$ faz o reverso. Portanto, o operador Q transforma um estado bosônico em um estado fermiônico. e o operador $Q^\dagger$ transforma um estado fermiônico em um estado bosônico. Essa transformação é chamada de transformação supersimétrica e $Q^\dagger$ e Q são chamados de geradores da transformação supersimétrica.

Para um sistema como esse o Hamiltoniano é $H = \omega (a_b^\dagger a_b + a_f^\dagger a_f)$ Para determinar a simetria possuída pelo sistema combinado é preciso avaliar o comutador de H e os geradores $Q^\dagger$ e Q . Então;

$$\begin{aligned} [H, Q] &= \omega [a_b^\dagger a_b + a_f^\dagger a_f, a_b a_f^\dagger] = \omega (a_b^\dagger a_b a_b a_f^\dagger + a_f^\dagger a_f a_b a_f^\dagger - a_b a_f^\dagger a_b^\dagger a_b - a_b a_f^\dagger a_f^\dagger a_f) \\ &= \omega (a_b^\dagger a_b a_b a_f^\dagger + a_b (1 - a_f a_f^\dagger) a_f^\dagger - (a_b^\dagger a_b + 1) a_b a_f^\dagger) = 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Portanto, é possível ver que o hamiltoniano H comuta com o gerador Q , porém isso depende da escolha de um ω igual para os dois osciladores. O bracket comutador zero implica que o sistema combinado é invariante sob a transformação supersimétrica, então é apropriado chamar esse sistema como oscilador supersimétrico.

A ação do comutador bracket $[H, Q]$ no estado $|n_b, n_f = 0\rangle$ vai provar que esse estado e $Q |n_b, n_f = 0\rangle \equiv |n_b - 1, n_f = 0\rangle$ são autofunções degeneradas de H . Portanto

$$\{Q, Q^\dagger\} = H, \{Q, Q\} = 0, \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0. \quad (7.19)$$

Em um hamiltoniano H_1 , descrevendo um sistema em um potencial $V_1(x)$ com os autoestados e autofunções de energia sendo $E_n^{(1)}$ e $\psi_n^{(1)}$ é possível usar a equação

de Schroedinger para escrever $V_1(x)$ usando o estado fundamental da energia $E_0^{(1)}$ e do autoestado $\psi_0^{(1)}$.

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad (7.20)$$

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0^{(1)''}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)} + E_0^{(1)}. \quad (7.21)$$

Para obter um sistema supersimétrico, é preciso combinar este sistema com outro, então fatorando H_1 temos

$$H_1 = A_1^\dagger A_1 + E_0^{(1)}, \quad (7.22)$$

$$A_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (7.23)$$

$$A_1^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (7.24)$$

onde a função $W(x)$ é chamada de superpotencial.

Isso implica que $V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) + E_0^{(1)}$. Fazendo com que A_1 e $A_1^\dagger$ sejam o operador de criação e aniquilação para o sistema H_1 , podemos impor que $A_1 \psi_0^{(1)}(x) = 0$. Portanto, a solução para $W(x)$ em termos função de onda no estado fundamental é dado abaixo. Também é possível construir o Hamiltoniano H_2 usando A_1 e $A_1^\dagger$

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\frac{d}{dx} \psi_0^{(1)}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d \ln \psi_0^{(1)}(x)}{dx}, \quad (7.25)$$

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \quad (7.26)$$

E para H_2 os autovalores e autofunções são $E_n^{(2)}$ e $\psi_n^{(2)}$. O potencial $V_2(x)$ em termos de superpotencial é descrito abaixo. A matriz Hamiltoniana que contém os dois Hamiltonianos e suas respectivas autofunções também é escrita como

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) + E_0^{(1)}, \quad (7.27)$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 - E_0^{(1)} & 0 \\ 0 & H_2 - E_0^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ \psi_n^{(2)}(x) \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

Como as matrizes as relações de supersimetria, o sistema H é descrito como um sistema supersimétrico.

Aplicando $[\mathbf{H}, \mathbf{Q}] = \mathbf{0}$ e $[\mathbf{H}, \mathbf{Q}^\dagger] = \mathbf{0}$ em $\Psi_n(x)$ temos

$$H_2 \left(A_1 \psi_n^{(1)}(x) \right) = A_1 H_1 \psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)} \left(A_1 \psi_n^{(1)}(x) \right), \quad (7.30)$$

$$H_1 \left(A_1^\dagger \psi_n^{(2)}(x) \right) = A_1^\dagger H_2 \psi_n^{(2)}(x) = E_n^{(2)} \left(A_1^\dagger \psi_n^{(2)}(x) \right). \quad (7.31)$$

Assim, quando $\psi_n^{(1)}(x)$ é autofunção de H_1 , $A_1 \psi_n^{(1)}(x)$ é autofunção de H_2 . Da mesma forma, quando $\psi_n^{(2)}(x)$ é autofunção de H_2 , então $A_1^\dagger \psi_n^{(2)}(x)$ é autofunção de H_1 . Portanto

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}; \psi_n^{(2)}(x) = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} A \psi_{n+1}^{(1)}(x), \quad (7.32)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)}(x) = \left(E_n^{(2)} - E_0^{(1)} \right)^{-1/2} A^\dagger \psi_n^{(2)}(x). \quad (7.33)$$

Portanto, H_1 e H_2 são chamados de parceiros supersimétricos Hamiltonianos, e os potenciais V_1 e V_2 são chamados de parceiro supersimétrico potenciais. O procedimento demonstrado até agora pode ser continuado para obter uma torre de Hamiltonianos ligados por relações de supersimetria.

É possível refatorar $H_2 = A_2^\dagger A_2 + E_0^{(2)}$ onde se forma novos operadores de criação e aniquilação deduzidas do estado fundamental da função de onda de H_2 como também é possível construir um Hamiltoniano H_3 de H_2 . Este processo pode ser continuado indefinidamente, porém, cada Hamiltoniano recém-construído terá um auto estado a menos de energia do que o anterior.

Assim, conhecendo todos os autovalores e autofunções da H_1 , sabemos imediatamente todos os valores de energia e autofunções da hierarquia de Hamiltonianos. Portanto, um grande número de potenciais que são insolucionáveis por métodos tradicionais pode ser resolvido por este método.

8 Conclusão

A supersimetria é uma ferramenta muito útil para a física, ela é capaz de simplificar operações que seriam muito complicadas de serem resolvidas pelos métodos tradicionais. Através desse estudo foi possível desenvolver uma maior compreensão acerca de sua história, propriedades e conclusões. Foi visto que a supersimetria não surgiu de apenas um estudo e sim em vários, por diversos autores, e que possui como virtude principal a relação que cria entre o férmion e o bóson.

Para um entendimento melhor da Supersimetria e Modelo Supersimétrico Mínimo, foi primeiro explorado alguns conceitos e termos que são necessários para sua formulação.

O primeiro deles foi o Spin, onde é abordado sua descoberta, que foi feita a partir de experimentos feitos por Stern e Gerlach sobre o momento de dipolo magnético orbital. Também houve a possibilidade de relacionar o spin ao Diagrama de Feynman.

Em seguida, foi abordado o Spinor, onde foi verificado sua relação com a transformação de Lorentz, foi montado vetores de 4 componentes a partir de vetores de 2 componentes, e compreendido o que são e da onde vem os férmions e Majorana. Utilizando conceitos do spinor e outros foi também possível construir a Lagrangiana Supersimétrica Simples.

A partir de todos esses conceitos, foi realizado a introdução do Modelo Mínimo da supersimetria, o MSSM, demonstrando o conceito dos superparceiros. Além disso, foi explorado os campos dos supermultipletos quirais e de calibre do MSSM, como os quarks e squarks ou glúinos e glúons.

Com esses fundamentos da supersimetria estabelecidos, foi explorado o Espaço de Estado Geral do SUSY, onde foi demonstrado que dois potenciais diferentes H_1 e H_2 têm os mesmos espectros, só que com H_2 possuindo um estado ligado a menos. Por último foi aplicado as propriedades da supersimetria em osciladores harmônicos, com o qual foi concluído que é possível saber todos os valores de energia e autofunções de uma hierarquia de Halmiltonianos, desde que seja conhecido todos os autovalores e autofunções do primeiro Hamiltoniano.

A teoria supersimétrica é uma teoria muito vasta e complexa e aqui ela só foi explorada de maneira inicial, há muito que não foi abordado, como a quebra de supersimetria ou a elaboração da supersimetria em outros grupos fora o $SU(2)$. Porém o que foi apresentado aqui serve de base para estudos mais aprofundados.

Referências

- AITCHISON, I. J. Supersymmetry and the mssm: An elementary introduction. *arXiv preprint hep-ph/0505105*, 2005. Citado na página 14.
- AITCHISON, I. J.; HEY, A. J. *Gauge Theories in Particle Physics: Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*. [S.l.]: CRC Press, 2002. Citado na página 14.
- AITCHISON, I. J. R.; HEY, A. J. *Gauge theories in particle physics, Volume II: QCD and the Electroweak Theory*. [S.l.]: CRC Press, 2003. Citado na página 15.
- BOURBAKI, N. *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 1-3*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1989. v. 1. Citado na página 7.
- COOPER, F.; KHARE, A.; SUKHATME, U. Supersymmetry and quantum mechanics. *Physics Reports*, Elsevier, v. 251, n. 5-6, p. 267–385, 1995. Citado na página 33.
- EISBERG, R. *Fundamentals of modern physics*. [S.l.]: Krieger Publishing Company, 1961. Citado na página 9.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. Física quântica. 6a edição. *Rio de Janeiro: Editora campus*, 1986. Citado na página 9.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. *Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: McGraw-Hill International Book Company, 1980. Citado na página 29.
- KULKARNI, A.; RAMADEVI, P. Supersymmetry. *Resonance*, Springer, v. 8, n. 2, p. 28–41, 2003. Citado na página 37.
- PHIPPS, T.; TAYLOR, J. The magnetic moment of the hydrogen atom. *Physical Review*, APS, v. 29, n. 2, p. 309, 1927. Citado na página 11.
- SINGH, S.; SONI, S. *Supersymmetry: Basics and Concepts*. [S.l.]: CRC Press, 2001. Citado na página 7.
- WEINERT, F. Wrong theory—right experiment: The significance of the stern-gerlach experiments. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 75–86, 1995. Citado na página 10.
- ZUMINO, B. Supersymmetry then and now. *arXiv preprint hep-th/0508127*, 2005. Citado na página 8.