UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HERBERT ANTONIO BIAZOTTI

TEORIAS DE SPIN-1: DECOMPOSIÇÃO EM HELICIDADES, REDUÇÃO DIMENSIONAL E IMERSÃO DE CALIBRE

Guaratinguetá
2014

HERBERT ANTONIO BIAZOTTI

TEORIAS DE SPIN-1: DECOMPOSIÇÃO EM HELICIDADES, REDUÇÃO DIMENSIONAL E IMERSÃO DE CALIBRE

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física.

Orientador
Prof. Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá
2014

Biazotti, Herbert Antonio
$B579t$
Teorias de Spin-1: Decomposição em Helicidades, Redução Dimensional e Imersão de Calibre/ Herbert Antonio Biazotti -
Guaratinguetá: [$s.n.$], 2014
$45f$: $il.$
Bibliografia: f. $44-45$
Trabalho de Graduação em Bacharelado em Física
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014
Orientador: Prof. Dr Denis Dalmazi
1. Teoria de campos (física) 2. Simetria (física) I. Título
CDU530.145

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HERBERT ANTONIO BIAZOTTI

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "**GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA**"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA

Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Orientador/UNESP-FEG

Prof. Dr. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA
UNESP-FEG

Prof. Dr. ANTONIO SOARES DE CASTRO
UNESP-FEG

2014

Aos meus pais, Antônio e Cícera
Aos meus irmãos Francisco, Aline
e Michele (Em memória)

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo amor e pelo apoio em tudo, agradeço a todos os meus amigos que ajudaram a tornar a caminhada mais fácil, agradeço ao meu orientador Denis Dalmazi, quem me passou muitos ensinamentos desde 2010. Por fim, agradeço a todos os professores da Universidade por me mostrarem o caminho da ciência.

”É claro que somos apenas primatas evoluídos, vivendo em um planeta pequeno que orbita uma estrela comum, localizada no subúrbio de uma de bilhões de galáxias. Desde o começo da civilização, as pessoas tentam entender a ordem fundamental do mundo. Deve haver algo muito especial sobre os limites do universo. E o que pode ser mais especial do que não haver limites? Não deve haver limites para o esforço humano. Somos todos diferentes, por pior que a vida possa parecer, sempre há algo que podemos fazer, em que podemos obter sucesso. Enquanto houver vida, haverá esperança.”(Filme A Teoria de Tudo - 2015, baseado no livro ”Travelling to Infinity: My Life with Stephen”de Jane Hawking)

BIAZOTTI, H. A **Teorias de Spin-1: Decomposição em Helicidades, Redução Dimensional e Imersão de Calibre**. 2014, 45f. Trabalho de Graduação (Graduação em Bacharelado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

RESUMO

Neste trabalho analisamos o conteúdo físico dos seguintes modelos: Maxwell, Proca, Auto-Dual e Maxwell-Chern-Simons. Um dos métodos usado é a Decomposição em Helicidades, na qual é possível fazer, a partir do formalismo lagrangiano, a contagem correta dos graus de liberdade sem necessidade de escolha de calibre, separando os modos propagantes dos não propagantes. Em seguida a hamiltoniana do MCS e do AD é calculada. O outro método usado é a análise de conteúdo físico através do sinal da parte imaginária dos resíduos da amplitude de dois pontos da teoria, mostrando que os modelos possuem conteúdo físico livre de fantasmas. Além desses métodos, é feita a redução dimensional do Maxwell-Chern-Simons e do Auto Dual de D=2+1 para D=1+1 dimensões. Em seguida mostramos que a redução dimensional desses modelos equivalentes leva a modelos reduzidos também equivalentes. Mais do que isto, mostramos que esses modelos reduzidos também podem ser relacionados via imersão de calibre. É como se a imersão de calibre do Auto-Dual no Maxwell-Chern-Simons fosse preservada pela redução dimensional.

Palavras chave: Imersão de Calibre, Redução Dimensional, Decomposição em Helicidades, Simetria de Calibre

BIAZOTTI, H. A **Teorias de Spin-1: Decomposição em Helicidades, Redução Dimensional e Imersão de Calibre**. 2014, 45f. Graduate Work (Graduate in BS in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

ABSTRACT

We have studied the physical content of the following models: Maxwell, Proca, Self-Dual and Maxwell-Chern-Simons. One method we have used is the decomposition in the so called helicity variables, which can be done in the Lagrangian formalism. It leads to the correct counting of degrees of freedom without choosing a gauge condition. The method separates the propagating modes from the non-propagating ones. The Hamiltonian of the MCS and the AD is calculated. The second method used here is the analysis of the sign of the imaginary part of the residues of the two-point amplitude of the theory, showing that the models analyzed are free of ghosts. We also carry the dimensional reduction of the Maxwell-Chern-Simons and Self-Dual models from D = 2+1 to D = 1 + 1 dimensions. Next, we show that the dimensional reduction of those equivalent models also leads to equivalent models in D=1+1. Even more interesting is the fact, demonstrated here, that those reduced models can also be connected via gauge embedding. So the gauge embedding of the Self-Dual model into the Maxwell-Chern-Simons theory is preserved by the dimensional reduction.

Keywords: Gauge Embedding, Dimensional Reduction, Heilicity Decompositions and Gauge Symmetry

SUMÁRIO

1 Introdução

A análise de conteúdo físico de uma teoria é muito importante na construção de novos modelos em Teoria de Campos. Um dos métodos que abordaremos neste trabalho é a Decomposição em Helicidades, proposta na década de 60 por (DESER; TRUBATCH. J; TRUBATCH, S, 1966), usado recentemente por (DE RHAM; GABADADZEC; TOLLEY, 2011; JACCARD; MAGGIORE; MITSOU, 2013). Este método permite separar os modos propagantes dos não propagantes e identificar os graus de liberdade invariantes de calibre usando a variável de Bardeen. Podemos chegar ao número corrreto de graus de liberdade numa teoria de calibre sem a necessidade de escolhermos uma condição de calibre específica. A Decomposição em Helicidades aparece como uma alternativa ao formalismo hamiltoniano, proporcionando uma contagem correta dos graus de liberdade, sem a necessidade de todo o maquinário do formalismo hamiltoniano. Em uma teoria onde os termos não-lineares são desprezados e somente a interação dos campos com fontes externas é considerada, os graus de liberdade são excitações em torno do vácuo da teoria, essas excitações são os modos propagantes (partículas). Um outro método que abordaremos é a análise de conteúdo físico via propagador (BOULWARE; DESER, 1972; HERNASKI, 2011; SCHWINGER, 1998) onde calcularemos a amplitude de dois pontos e analisaremos o sinal da parte imaginária dos resíduos: se for positivo temos uma partícula física, se for negativo temos um fantasma, se o resíduo for nulo, não há partículas na teoria. No capítulo 2 deste trabalho faremos uma introdução à simetria de calibre. Em seguida introduziremos a Decomposição em Helicidades usando o modelo de Maxwell, o modelo de Proca e os modelos Auto-Duais de spin-1. Há apenas dois modelos Auto-Duais de spin-1 em D=2+1, um deles é o Maxwell-Chern-Simons(MCS) (DESER; JACKIW; TEMPLETON, 1982), que possui simetria de calibre e descreve uma excitação massiva com helicidade definida +1 ou -1, o outro modelo é o Auto-Dual(AD) (TOWNSEND; PILCH; NIEUWENHUIZEN, 1984), que não tem simetria de calibre e também descreve uma excitação massiva com helicidade definida +1 ou -1. Essas teorias são equivalentes, como foi mostrado (DESER; JACKIW, 1984) usando a técnica da ação mestra. Após a Decomposição em Helicidades, calcularemos a hamiltoniana do MCS e do AD e mostraremos que são positivas, condição necessária para que as teorias sejam consistentes. No capítulo 3 mostraremos que os modelos Auto-Dual e Maxwell-Chern-Simons são relacionados via Imersão de Calibre. No capítulo 4 faremos a redução dimensional do MCS e do AD, ambos de D=2+1 para D=1+1. No capítulo 5 verificaremos que a redução dimensional feita no capítulo 4 leva a modelos relacionados via imersão em D=1+1. Ou seja, a técnica de imersão continua válida após a redução dimensional. A diferença é que em D=1+1, pela primeira vez na literatura até onde sabemos, é necessária uma imersão tanto de uma simetria local como de uma simetria global. Por fim, no capítulo 6 faremos a análise de conteúdo físico via propagador das teorias de Proca, Maxwell-Chern-Simons e Auto-Dual e mostraremos que essas teorias são livres de fantasmas.

2 Decomposição em Helicidades

2.1 Introdução à Simetria de Calibre

Nesta seção encontraremos a lagrangiana de uma partícula no campo eletromagnético, em seguida faremos uma introdução à simetria de calibre (FELSAGER, 1998). Seja a força de Lorentz no sistema de unidades onde $c = 1$:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{2.1}$$

Para encontrar $\vec{E}$ e $\vec{B}$ na equação acima, vamos usar duas equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \tag{2.3}$$

Usando o teorema da divergência e 2.2, $\vec{B}$ é o rotacional de um vetor:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{2.4}$$

onde $\vec{A}$ é o potencial vetor.

Para um campo escalar f temos:$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$, então de 2.4 em 2.3, podemos escrever:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi \tag{2.5}$$

onde φ é o potencial escalar. Substituindo 2.4 e 2.5 em 2.1 temos:

$$\vec{F} = q\left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right] \tag{2.6}$$

trabalhando o último termo de 2.6 temos:

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \tag{2.7}$$

onde podemos escrever:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2.8}$$

então temos:

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2.9}$$

substituindo 2.9 em 2.6 temos:

$$\vec{F} = q\left[\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A} - \varphi) - \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{dt}\right] \tag{2.10}$$

agora vamos definir o seguinte operador:

$$\vec{\nabla}_v = \hat{i}\frac{\partial}{\partial\dot{x}} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial\dot{y}} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial\dot{z}} \tag{2.11}$$

conhecendo o operador $\vec{\nabla}_v$ e sabendo que φ e $\vec{A}$ não dependem da velocidade, temos em 2.10:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}[q(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A}] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\nabla}_v(q\varphi - q\vec{v}\cdot\vec{A}\right] \tag{2.12}$$

Depois de encontrar 2.12, vamos escrever a força de Lorentz em 2.1 como:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\nabla}_v\left(\frac{m\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right) \tag{2.13}$$

Sendo $V = q\varphi - q\vec{v}\cdot\vec{A}$ e igualando 2.12 com 2.13 temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\nabla}_v V) - \vec{\nabla}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\nabla}_v T) \tag{2.14}$$

Observando que T só depende da velocidade, podemos escrever 2.14 como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{\nabla}_v(T - V)] - \vec{\nabla}(T - V) = \vec{0} \tag{2.15}$$

Em 2.15 temos as equações de Euler-Lagrange e definimos a lagrangiana como: $L = T - V$, onde encontramos que $V = q\varphi - q\vec{v}\cdot\vec{A}$ e $T = \frac{mv^2}{2}$, então a lagrangiana de uma partícula em um campo eletromagnético é:

$$L = \frac{mv^2}{2} - (q\varphi - q\vec{v}\cdot\vec{A}) \tag{2.16}$$

Não é possível escrever 2.16 em termos de $\vec{B}$ e $\vec{E}$, só é possível escrever tal lagrangiana em termos de φ e $\vec{A}$. Além disso, se adicionarmos qualquer gradiente em um $\vec{A}_0$, não alteramos o valor de $\vec{B}$ expresso em 2.4, pois o rotacional de um gradiente é nulo, ou seja:

$$\vec{A} \to \vec{A}_0 + \vec{\nabla}h \tag{2.17}$$

Entretanto, o valor de $\vec{E}$ é alterado em 2.5. Para não haver alteração, devemos fazer uma variação em φ:

$$\varphi \to \varphi_0 - \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.18}$$

As transformações 2.17 e 2.18 são chamadas de transformações de calibre e $\vec{A}$ e φ são chamados de potenciais de calibre. As equações de Maxwell não são alteradas quando usamos as transformações de calibre, e nem mesmo as equações de Newton pois a força de Lorentz 2.1 depende de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ que não são alterados, dizemos que há simetria de calibre. Sabe-se que ao adicionar um termo com derivada total no tempo na lagrangiana 2.16, $L \to L + d(qh)/dt$, as equações de movimento não são alteradas, o que prova que as transformações de calibre 2.17 e 2.18 são simetrias da ação do modelo 2.16. Com $A_0 = -\varphi$, podemos escrever as transformações de calibre 2.17 e 2.18 como $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu h$ que usaremos na próxima seção.

2.2 Decomposição do Modelo de Maxwell e as Equações de Maxwell

A Decomposição em Helicidades foi proposta no ano de 1966 (DESER; TRUBATCH. J; TRUBATCH, S, 1966) e usada recentemente por (DE RHAM; GABADADZEC; TOLLEY, 2011; JACCARD; MAGGIORE; MITSOU, 2013). O método permite analisar o conteúdo físico de uma teoria separando os modos propagantes dos não propagantes, servindo como uma alternativa aos operadores de Barnes e Rivers (BOULWARE; DESER, 1972; HERNASKI, 2011; SCHWINGER, 1998). Vamos introduzir ao método de Decomposição em Helicidades usando a densidade de lagrangiana de Maxwell em D dimensões acoplada a uma densidade de corrente J_μ:

$$L_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \tag{2.19}$$

com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3...D-1$ [1]. Usamos assinatura da métrica: $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +...)$[2] Este modelo é invariante por transformação de calibre, introduzida no capítulo anterior:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\theta \tag{2.20}$$

contanto que $\partial^\mu J_\mu = 0$, as equações de movimento são:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{2.21}$$

onde definimos $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.22}$$

a Decomposição em Helicidades do potencial A_μ é:

$$A_0 = \psi \tag{2.23}$$

$$A_i = v_i + \partial_i\lambda \tag{2.24}$$

onde v_i é um campo transverso, $\partial^i v_i = 0$, $i = 1, 2, 3...D-1$ e λ um campo escalar. Observe que na decomposição 2.23 e 2.24 não há derivadas temporais, o que garante que o conteúdo das equações de movimento e a estrutura canônica da teoria não são alterados. A ausência de derivadas temporais é uma característica fundamental da Decomposição em Helicidades. Usando 2.20, as transformações de calibre nas variáveis ψ e λ são:

[1]Em todo o trabalho usamos letras gregas para as componentes espaciais e temporal e letras latinas apenas para as componentes espaciais

[2]Essa métrica será usada em todo o trabalho

$$\psi \longrightarrow \psi - \dot{\theta} \tag{2.25}$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda - \theta \tag{2.26}$$

usando 2.25 e 2.26 definimos uma variável de Bardeen invariante de calibre, usada para organizar os campos no modelo decomposto

$$\Psi = \psi - \dot{\lambda} \tag{2.27}$$

Os D graus de liberdade de A_μ são organizados em 1 grau de liberdade de Ψ, (D-2) graus de liberdade de v_i e um grau de liberdade (puro calibre) de λ. As variáveis v_i e λ são não-locais e podem ser escritas em termos do campo A_i. Aplicando ∂_i em 2.24 temos[3]

$$\lambda = \frac{1}{\nabla^2}\partial_i A^i \tag{2.28}$$

substituindo λ em 2.24 temos:

$$v_i = A_i - \frac{1}{\nabla^2}\partial_i\partial_j A^j \tag{2.29}$$

para a corrente J_μ temos a decomposição:

$$J_0 = \rho \tag{2.30}$$

$$J_i = S_i + \partial_i S \tag{2.31}$$

S_i é transverso, $\partial^i S_i = 0$ e S é um escalar. Usando a conservação da corrente, $\partial^i J_i = \partial_0 J_0$ e 2.23, 2.24, 2.30, 2.31 e 2.27 a densidade de lagrangiana de Maxwell 2.19 decomposta em D dimensões é:

$$L_M = \frac{1}{2}[\partial_i\Psi\partial^i\Psi - \partial_\mu v_i \partial^\mu v^i] + [\rho\Psi - S_i v^i] \tag{2.32}$$

como esperado é invariante pelas transformações de calibre 2.25 e 2.26. As equações de movimento são:

$$\nabla^2\Psi = \rho \tag{2.33}$$

[3]Nesse momento é útil definir o operador laplaciano como $\nabla^2 = \partial_i\partial^i$ com $i = 1, 2, 3$. Observe que os auto valores do laplaciano são negativos, se supusermos que o laplaciano atua em campos que podem ser sempre escritos na base de ondas planas (transformada de Fourier) então ∇^2 pode aparecer no denominador. Um outro operador que logo será útil também é o D'Alembertiano definido por $\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \partial_0\partial^0 + \nabla^2$

$$\Box v^i = S^i \tag{2.34}$$

portanto temos (D-2) graus de liberdade propagantes devido ao campo v_i e uma grandeza física Ψ, versão invariante de calibre do potencial escalar, porém não-propagante, pois a equação 2.33 não tem derivadas temporais.

Agora vamos discutir o modelo de Maxwell decomposto 2.32 em D=4. Os campos elétrico (E^i) e magnético (B^i) são definidos em $D = 3 + 1$ por

$$F^{0i} = -E^i \tag{2.35}$$

$$F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k \tag{2.36}$$

em termos do potencial A_μ temos

$$E^i = -\partial_0 A^i + \partial^i A_0 \tag{2.37}$$

$$B^i = -\epsilon^{ijk} \partial_j A_k \tag{2.38}$$

Usando 2.37 e 2.38 definimos os campos E^i e B^i em D=3+1 em termos da variável de Bardeen Ψ e de v_i:

$$E^i = \partial^i \psi - \dot{v}_i - \partial^i \dot{\lambda} = \partial^i \Psi - \dot{v}_i \tag{2.39}$$

$$B^i = -\epsilon^{ijk} \partial_j v_k \tag{2.40}$$

usando estas definições dos campos elétrico e magnético temos que 2.33 e 2.34 são, respectivamente, a lei de Gauss e a lei de Ampère do eletromagnetismo e o modelo de Maxwell em D=4 descreve 2 graus de liberdade propagantes, devido ao campo transverso v_i, relacionados com as duas helicidades do fóton, daí o nome variáveis de helicidade. Já em D dimensões o modelo de Maxwell descreve (D-2) graus de liberdade propagantes.

Agora é interessante calcular a hamiltoniana do modelo de Maxwell decomposto, na ausência de fontes. Fazendo $S_i = \rho = 0$ em 2.32, temos:

$$L_M = \frac{1}{2}[\partial_i \Psi \partial^i \Psi - \partial_\mu v_i \partial^\mu v^i] \tag{2.41}$$

Este é o modelo de Maxwell em D dimensões, sem fontes. As equações de movimento são:

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{2.42}$$

$$\Box v^i = 0 \tag{2.43}$$

a equação de movimento 2.42, Lei de Gauss, é um vínculo, possui apenas uma derivada temporal, $\Psi = \psi - \dot{\lambda}$. A solução geral de 2.42 com a condição de contorno que os campos vão para zero no infinito é $\Psi = 0$, então temos no setor propagante:

$$L_M = -\frac{1}{2}\partial_\mu v_i \partial^\mu v^i \tag{2.44}$$

definindo a hamiltoniana

$$H = \Pi^i \dot{v}_i - L \tag{2.45}$$

onde o momento canônico é definido por:

$$\Pi^i = \frac{\delta L}{\delta \dot{v}_i} \tag{2.46}$$

com esta definição o momento canônico de 2.44 é $\Pi^i = \dot{v}^i$, usando 2.39 e 2.40, temos a hamiltoniana correspondente à lagrangiana 2.44:

$$H_M = \frac{1}{2}[\dot{v}_i \dot{v}^i + \partial_j v_i \partial^j v^i] = \frac{1}{2}[(E^i)^2 + (B^i)^2] \tag{2.47}$$

Enfim, introduzimos o método de decomposição em helicidades, o que nos permitiu, usando o formalismo lagrangiano, fazer a contagem correta dos graus de liberdade do modelo de Maxwell, ou seja, D-2 graus de liberdade, sem termos que fixar uma condição de calibre específica. É importante observar que em D=2 não há fótons, não existe ondas eletromagnéticas nesta dimensão. Em D=2 temos uma única dimensão espacial como um fio (reta) e assim não há "espaço"para modos transversais de propagação. A hamiltoniana do modelo de Maxwell sem fontes é positiva, mostrando que o modelo é consistente, como é bem conhecido

2.3 Decomposição do Modelo de Proca

A densidade de lagrangiana de Proca 2.66 é válida em D dimensões. Reescrevemos logo abaixo o modelo com $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3...D-1$:

$$L_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \tag{2.48}$$

Usando 2.23, 2.24 e 2.27, temos a densidade de lagrangiana de Proca decomposta, com $i, j = 1, 2, 3...D-1$:

$$L_P = \frac{1}{2}[\partial_i\Psi\partial^i\Psi - \partial_\mu v_i\partial^\mu v^i] + \frac{m^2}{2}[\psi^2 - \partial_i\lambda\partial^i\lambda - v_i v^i] \tag{2.49}$$

embora este modelo não seja invariante de calibre, podemos escrever o primeiro termo usando a variável de Bardeen devido ao fato que no limite de massa nula, recuperamos a densidade de lagrangiana de Maxwell que é invariante de calibre. Note que o termo de massa quebra a simetria pelas transformações 2.25 e 2.26. Os D graus de liberdade de A_μ são organizados em $D-2$ graus de liberdade de v_i, 1 grau de liberdade de ψ e um grau de liberdade de λ. Então o modelo de Proca é decomposto em termos de $A_\mu(\Psi, v_i, \lambda)$, onde Ψ é a variável de Bardeen. As equações de movimento de 2.49 são:

$$(\Box - m^2)v_i = 0 \tag{2.50}$$

que é a equação de Klein-Gordon para $D-2$ graus de liberdade. Para os outros campos, λ e ψ temos, respectivamente, as equações:

$$\nabla^2(\ddot{\lambda} + m^2\lambda) = \nabla^2\dot{\psi} \tag{2.51}$$

$$\nabla^2\psi - m^2\psi = \nabla^2\dot{\lambda} \tag{2.52}$$

sabendo que uma equação do tipo $\nabla^2 u = 0$ com condição de contorno de que $u(x^\mu)$ seja zero no infinito implica que $u = 0$, então podemos escrever 2.51 sem o laplaciano:

$$(\ddot{\lambda} + m^2\lambda) = \dot{\psi} \tag{2.53}$$

usando 2.52 e 2.53, encontramos a equação de Klein-Gordon:

$$(\Box - m^2)\lambda = 0 \tag{2.54}$$

A equação 2.52 não envolve mais do que uma derivada temporal e equivale a um vínculo que permite a eliminação de ψ em função de $\dot{\lambda}$:

$$\psi = \frac{\nabla^2}{\nabla^2 - m^2}\dot{\lambda} \tag{2.55}$$

Note, como foi dito na nota de rodapé 4, que os autovalores de ∇^2 são negativos, portando $\nabla^2 - m^2$ no denominador de 2.55 não é singular.

Concluímos que o modelo de Proca em D dimensões descreve $D-1$ graus de liberdade físicos independentes, devido aos campos v_i e λ. Para D=4 temos 3 graus de liberdade, esse é o número de graus de liberdade de uma partícula massiva de spin-1 (2S+1=3), onde S é o spin.

2.4 Introdução dos Modelos Maxwell-Chern-Simons e Auto-Dual

O modelo Maxwell-Chern-Simons(MCS) em $D = 2+1$ criado por (DESER; JACKIW; TEMPLETON, 1982) é:

$$L_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha \tag{2.56}$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e os índices $\mu, \nu = 0, 1, 2$. O segundo termo de 2.56 é chamado de Chern-Simons. A equação de movimento de 2.56 é:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m\epsilon^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta = 0 \tag{2.57}$$

para efeito de comparação, posteriormente com o modelo Auto-Dual, é conveniente definir o vetor:

$$F_\rho = -2\epsilon_{\rho\mu\nu}\partial^\mu A^\nu \tag{2.58}$$

usando a identidade $\epsilon^{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\mu\nu\rho} = -2\delta^\alpha_\rho$ podemos reescrever 2.57 como:

$$F^\nu + \frac{1}{m}\epsilon^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha F_\beta = 0 \tag{2.59}$$

Esse modelo 2.56, invariante sob transformação de calibre $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\theta$, descreve uma partícula massiva de spin-1 com helicidade definida pelo sinal do termo de Chern-Simons, helicidade $+1$ ou -1 dependendo do sinal de "m". Esse termo massivo não depende da métrica do espaço tempo, mesmo que estivéssemos num espaço curvo, a métrica não apareceria, dizemos que é um invariante topológico. A contribuição do termo CS para a hamiltoniana do modelo MCS é nula, pois o termo não tem conteúdo físico por si só. Devido ao termo de Chern-Simons há quebra de paridade e inversão temporal (P e T) que podem ser definidas em $D = 2+1$ como

$$P : (t, x, y) \longrightarrow (t, -x, y) \tag{2.60}$$

$$T : (t, x, y) \longrightarrow (-t, x, y) \tag{2.61}$$

essas operações (P e T) invertem o spin do modelo. Podemos interpretar o termo de Chern-Simons como um mecanismo de geração de massa para o campo A_μ, sem quebra de simetria de calibre. O mecanismo de Higgs é um outro mecanismo para a geração de massa do campo A_μ, relacionado com a quebra espontânea de simetria.

Agora vamos falar sobre o modelo Auto-Dual(AD) criado por (TOWNSEND; PILCH; NIEUWENHUIZEN, 1984) que é dado por:

$$L_{AD} = -\frac{m^2}{2} f_\mu f^\mu - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha \tag{2.62}$$

Ela é uma teoria que também descreve uma partícula massiva de spin-1 com helicidade definida, no entanto não possui simetria de calibre. A equação de movimento de 2.62 é:

$$f^\mu + \frac{1}{m} \epsilon^{\mu\beta\gamma} \partial_\beta f_\gamma = 0 \tag{2.63}$$

O primeiro termo de 2.62 é chamado de Proca e o segundo termo é o Chern-Simons que também é responsável pela violação de P e T (2.60 e 2.61). Agora é apropriado reescrever a equação de movimento 2.63 como uma equação que determina a helicidade do fóton massivo. Usando o grupo de Lorentz podemos representar o spin da seguinte forma: $(S^\nu)^{\mu\alpha} = i\epsilon^{\mu\alpha\nu}$, definindo $P_\nu = i\partial_\nu$, com isso podemos reescrever a equação 2.63, trocando m por $\pm m$ e supondo $m > 0$, como:

$$\pm m f^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\nu} \partial_\nu f_\alpha = -(S^\nu)^{\mu\alpha} P_\nu f_\alpha = -(\vec{S}.\vec{P})^{\mu\alpha} f_\alpha \tag{2.64}$$

portanto temos:

$$\left(\frac{\vec{S}.\vec{P}}{m} \right)^{\mu\alpha} f_\alpha = \mp f^\mu \tag{2.65}$$

Concluímos que as helicidades são $+1$ e -1 devido ao fator (∓ 1) na frente de f^μ.

Note que 2.59 tem a mesma forma de 2.63, portanto segue a mesma conclusão para o modelo de Maxwell-Chern-Simons (MCS). Ou seja, o MCS e o Auto-Dual são teorias duais que descrevem uma helicidade específica do fóton, $+1$ ou -1, ou seja, são teorias equivalentes. A dualidade entre esses modelos foi demonstrada por (DESER; JACKIW, 1984) usando a técnica da ação mestra. Comparando 2.63 com 2.58 vemos a equivalência (dualidade) dos modelos MCS e AD, fazendo a identificação: $f^\mu \leftrightarrow -\frac{1}{2m} F^\mu = \frac{1}{m} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu A_\alpha$, com F^μ dado em 2.58, o fator $\frac{1}{m}$ foi colocado para que f^μ e A^μ tenham a mesma dimensão. Vemos que o dual (equivalente) de f^μ na teoria MCS não é o A^μ, mas sim $\frac{1}{m} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu A_\alpha$.

O "dual"corresponde à operação $\frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha$. A equação 2.63 mostra que f^μ é igual ao seu dual, o que justifica o nome do modelo 2.62 como Auto-Dual. Uma outra técnica utilizada para estudar modelos duais é a Imersão de Calibre de Noether(ICN) proposta por (ANACLETO; ILHA; NASCIMENTO; RIBEIRO; WOTZASEK, 2001). A ICN permite encontrar um modelo com simetria de calibre a partir de outro sem simetria de calibre, de tal forma que os modelos possam ser duais (equivalentes). Entretanto essa dualidade não é garantida, podem aparecer fantasmas na teoria, como foi observado por (BAETA; BOTTA; HELAYEL-NETO, 2004). O método ICN não garante a equivalência (dualidade) entre os modelos, ao contrário do método da ação mestra, corretamente usado (DALMAZI, 2006), falaremos mais sobre o ICN no capítulo 3.

O modelo AD (TOWNSEND; PILCH; NIEUWENHUIZEN, 1984) foi obtido a partir do modelo de proca em D=2+1 dado por:

$$L_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \tag{2.66}$$

este modelo, sem simetria de calibre, descreve dois modos massivos e possui simetria de paridade. A equação de movimento é:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = 0 \tag{2.67}$$

as helicidades estão misturadas nesta equação de movimento, o que os autores de [?] fizeram para obter o AD foi separar as helicidades misturadas nesta equação 2.67, de segunda ordem em derivadas, fatorando o operador que atua em A^ν em um operador cujo autoestado tem helicidade +1 vezes outro com helicidade −1 que são, atuando em f_α, os operadores de primeira ordem:

$$\left(-\eta^{\mu\alpha} \pm \frac{1}{m}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu\right) f_\alpha = 0 \tag{2.68}$$

essas são as equações de movimento 2.63 do modelo Auto-Dual, definido em 2.62 trocando m por $\pm m$. Há uma equação para cada helicidade. Os autores (TOWNSEND; PILCH; NIEUWENHUIZEN, 1984), a partir das equações de movimento 2.68, chegaram ao modelo Auto-Dual 2.62. Esse método de fatorar a equação de movimento foi chamado pelos autores (TOWNSEND; PILCH; NIEUWENHUIZEN, 1984) de "tirar a raiz quadrada"da equação de movimento de Proca.

2.5 O Termo de Chern-Simons

Como introdução à análise de conteúdo físico dos modelos MCS e AD via decomposição em helicidades, analisaremos o conteúdo físico do termo de Chern-Simons, que está logo abaixo:

$$L_{CS} = \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha \tag{2.69}$$

usando a decomposição do campo A_μ 2.23, 2.24 e a variável de Bardeen 2.27, o modelo de Chern-Simons decomposto é:

$$L_{CS} = m\epsilon^{ij}\Psi\partial_i v_j \tag{2.70}$$

usando a variável de Bardeen 2.27 e $v_j = \epsilon_{jk}\partial^k v$, as equação de movimento são:

$$\nabla^2(\Psi - \dot{\lambda}) = 0 \tag{2.71}$$

$$\nabla^2 v = 0 \tag{2.72}$$

$$\frac{d(\nabla^2 v)}{dt} = 0 \tag{2.73}$$

as equações 2.71, 2.72 e 2.73 tem no máximo uma derivada temporal, portanto são vínculos. A equação 2.73 é redundante e segue da equação 2.72. As equações 2.71 e 2.72 implicam em:

$$\Psi = \psi - \dot{\lambda} = 0 \tag{2.74}$$

$$v = 0 \tag{2.75}$$

Logo, os únicos dois campos invariantes de calibre Ψ e v são nulos e assim o termo de Chern-Simons sozinho não possui conteúdo físico. De 2.74 e 2.75 segue que a hamiltonia do termo de CS é nula, pois após eliminação dos campos não propagantes, a lagrangiana 2.70 se torna nula identicamente juntamente de todos os momentos.

2.6 Decomposição do Modelo Maxwell-Chern-Simons

A densidade de lagrangiana 2.56 é:

$$L_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha \tag{2.76}$$

usando 2.23, 2.24 e 2.27 temos a densidade de lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons decomposta, com $i, j = 1, 2$:

$$L_{MCS} = \frac{1}{2}[\partial_i\Psi\partial^i\Psi - \partial_\mu v_i\partial^\mu v^i] + m\epsilon^{ij}\Psi\partial_i v_j \tag{2.77}$$

O campo v_i inicialmente possui dois graus de liberdade, no entanto a condição de transversalidade ($\partial^i v_i = 0$) elimina um grau de liberdade, portanto v_i tem apenas um grau de liberdade. Os três graus de liberdade de A_μ são organizados em $A_\mu = (\psi, v_i, \lambda)$, um grau de liberdade de ψ, um grau de liberdade de v_i e um grau de liberdade (puro calibre) de λ. Na densidade de lagrangiana 2.77 só aparecem 2 graus de liberdade invariantes de calibre, $A_\mu = (v_i, \Psi)$, um grau de liberdade de v_i e um grau de liberdade de Ψ. O MCS é invariante pelas transformações de calibre 2.25 e 2.26 e possui as equações de movimento

$$-\nabla^2\Psi + m\epsilon^{ij}\partial_i v_j = 0 \tag{2.78}$$

$$\Box v^j - m\epsilon^{ij}\partial_i\Psi = 0 \tag{2.79}$$

A equação 2.78 que não possui derivadas temporais é um vínculo que permite eliminar Ψ:

$$\Psi = \frac{m\epsilon^{ij}\partial_i v_j}{\nabla^2} \tag{2.80}$$

Substituindo 2.80 em 2.79 e usando a condição de transversalidade: $\partial^j v_j = 0$, encontramos a equação de Klein-Gordon[4]

$$(\Box - m^2)v^j = 0 \tag{2.81}$$

portanto o MCS descreve a propagação de um único grau de liberdade (v_j).

2.7 Decomposição do Modelo Auto-Dual

A densidade de lagrangiana 2.62 é:

$$L_{AD} = -\frac{m^2}{2}f_\mu f^\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}f_\mu\partial_\nu f_\alpha \tag{2.82}$$

usando 2.23, 2.24 com f_μ no lugar de A_μ, e 2.27 temos a densidade de lagrangiana Auto-Dual decomposta, com f_μ em vez de A_μ, onde $i, j = 1, 2$:

$$L_{AD} = \frac{m^2}{2}[\psi^2 - \partial_i\lambda\partial^i\lambda - v_i v^i] - m\epsilon^{ij}\Psi\partial_i v_j \tag{2.83}$$

Os três graus de liberdade de A_μ são organizados em um grau de liberdade de v_i, um grau de liberdade de λ e um grau de liberdade de Ψ. O Auto-Dual não é invariante de calibre. Como Ψ depende de ψ e λ, vamos usar $\Psi = \psi - \dot{\lambda}$ em L_{AD}, encontrando as equações de movimento do Auto-Dual:

[4] É útil também a identidade: $\epsilon^{ij}\epsilon^{kl} = \delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk}$

$$-m^2 v^j + m\epsilon^{ij}\partial_i\psi - m\epsilon^{ij}\partial_i\dot{\lambda} = 0 \tag{2.84}$$

$$m^2\psi - m\epsilon^{ij}\partial_i v_j = 0 \tag{2.85}$$

$$m^2\nabla^2\lambda - m\epsilon^{ij}\partial_i\dot{v}_j = 0 \tag{2.86}$$

Usando os vínculos 2.85 e 2.86 em 2.84 para eliminar ψ e λ, temos:

$$(\Box - m^2)v^j = 0 \tag{2.87}$$

portanto o AD, assim como o MCS, descreve a propagação de um grau de liberdade (v_j) massivo. Note que 2.85 e 2.86 apenas permitem eliminar ψ e λ em função de v_j, não possuem mais do que uma derivada temporal, portanto 2.84 e 2.85 são considerados vínculos.

2.8 Hamiltoniana: Maxwell-Chern-Simons/ Auto-Dual

Primeiramente completaremos um quadrado em 2.77 para separarmos os graus de liberdade não-propagantes, então temos:

$$L_{MCS} = \frac{1}{2}\Lambda_i\Lambda^i - \frac{1}{2}[\partial_\mu v_i\partial^\mu v^i + m^2 v_i v^i] \tag{2.88}$$

$$\Lambda^i = (\partial^i\Psi - m\epsilon^{ij}v_j) \tag{2.89}$$

O termo quadrático $\frac{1}{2}\Lambda_i\Lambda^i$ pode ser simplificado, como o campo transverso v_i possui apenas um grau de liberdade, ele pode ser escrito em termos de um campo escalar ϕ:

$$v^i = \epsilon^{ij}\widehat{\partial}_j\phi \tag{2.90}$$

$$\widehat{\partial}_i = \frac{\partial_i}{\sqrt{-\nabla^2}} \tag{2.91}$$

usando 2.90 e 2.91 temos:

$$\Lambda^i = \partial^i\left[\Psi + \frac{m}{\sqrt{-\nabla^2}}\phi\right] \equiv \partial^i\tilde{\Psi} \tag{2.92}$$

então temos:

$$L_{MCS} = \frac{1}{2}\partial^i\tilde{\Psi}\partial_i\tilde{\Psi} - \frac{1}{2}[\partial_\mu v_i\partial^\mu v^i + m^2 v_i v^i] \tag{2.93}$$

Note a semelhança com a lagrangiana de Maxwell 2.32 com $\rho = S_i = 0$. O efeito do termo de Chern-Simons foi dar massa ao grau de liberdade v_i, ao contrário do termo de Proca em 2.49 que gerou massa tanto para v_i como para λ como vemos em 2.50 e 2.54. A equação de movimento para ψ leva a $\nabla^2\tilde{\Psi} = 0$ que é um vínculo já que envolve no máximo uma derivada temporal, pois $\tilde{\Psi} = \psi - \dot{\lambda} - \frac{m}{\sqrt{-\nabla^2}}\phi$. Essa equação de movimento é a lei de Gauss e permite eliminar $\psi - \dot{\lambda}$ em função de ϕ via $\tilde{\Psi} = 0$, logo podemos escrever no setor propagante

$$L_{MCS} = -\frac{1}{2}[\partial_\mu v_i \partial^\mu v^i + m^2 v_i v^i] \tag{2.94}$$

então podemos calcular a densidade de hamiltoniana definida por:

$$H = \Pi^i \dot{v}_i - L \tag{2.95}$$

$$\Pi^i = \frac{\delta L}{\delta \dot{v}_i} \tag{2.96}$$

O momento canônico é $\Pi^i = \dot{v}^i$ logo, a densidade de hamiltoniada do MCS 2.94 é:

$$H_{MCS} = \frac{1}{2}[\dot{v}_i \dot{v}^i + \partial_j v_i \partial^j v^i + m^2 v_i v^i] \tag{2.97}$$

A densidade de hamiltoniana 2.97 é positiva, mostrando que a teoria é classicamente estável.
A densidade de hamiltoniana em termos do campo ϕ é:

$$H_{MCS} = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi + m^2 \phi^2] \tag{2.98}$$

agora é conveniente definir os campos elétrico e magnético. Em D=2+1 o campo elétrico é um vetor e o campo magnético é um pseudoescalar, definidos, respectivamente, por:

$$E^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \partial^i \psi - \partial^0(\partial^i \lambda + v^i) = -\epsilon^{ij}\widehat{\partial}_j \dot{\phi} - m\widehat{\partial}_i \phi \tag{2.99}$$

$$B = -\epsilon^{ij}\partial_i A_j = -\epsilon^{ij}\partial_i v_j = \sqrt{-\nabla^2}\phi \tag{2.100}$$

Usamos $\tilde{\Psi} = 0$, ou seja, $\Psi \equiv \psi - \dot{\lambda} = -\frac{m\phi}{\sqrt{-\nabla^2}}$, isso permite escrever a densidade de hamiltoniana como:

$$H_{MCS} = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi + m^2 \phi^2] = \frac{1}{2}[E_i E^i + B^2] \tag{2.101}$$

Note que H_{MCS} é positiva e é a mesma, em termos dos campos elétrico e magnético, que teríamos só para o modelo de Maxwell em D=2+1. O termo de Chern-Simons não contribui para a Energia.

Agora vamos calcular a densidade de hamiltoniana do AD. Substituindo a variável de

Bardeen ($\Psi = \psi - \dot{\lambda}$) em 2.83 e completando dois quadrados temos:

$$L_{AD} = \frac{1}{2}\Omega^2 + \frac{1}{2}\Gamma\nabla^2\Gamma - \frac{1}{2}[\partial_\mu v_i \partial^\mu v^i + m^2 v_i v^i] \tag{2.102}$$

$$\Omega = (m\psi - \epsilon^{ij}\partial_i v_j) \tag{2.103}$$

$$\Gamma = (m\lambda - \frac{1}{\nabla^2}\epsilon^{ij}\partial_i \dot{v}_j) \tag{2.104}$$

As equações de movimento para ψ e λ se tornam respectivamente:

$$\Omega = 0, \quad \nabla^2\Gamma = 0 \tag{2.105}$$

como envolvem no máximo uma derivada temporal, se tornam vínculos lagrangianos. Usando os vínculos 2.105, chegamos a mesma lagrangiana do modelo MCS:

$$L_{AD} = -\frac{1}{2}[\partial_\mu v_i \partial^\mu v^i + m^2 v_i v^i] \tag{2.106}$$

usando as definições da densidade de hamiltoniana 2.95 e do momento canônico 2.96, temos que $\Pi^i = \dot{v}^i$ e a densidade de hamiltoniana do Auto-Dual é:

$$H_{AD} = \frac{1}{2}[\dot{v}_i \dot{v}^i + \partial_j v_i \partial^j v^i + m^2 v_i v^i] \tag{2.107}$$

onde observamos que $H_{AD} = H_{MCS}$ como já esperado, uma vez que são teorias duais. A Decomposição em Helicidades, além de fornecer a contagem adequada dos graus de liberdade, nos permite eliminar os graus de liberdade não-propagantes e obter a densidade de hamiltoniana em termos de um campo transverso v_i. Essa densidade de hamiltoniana é explicitamente positiva.

3 Imersão de Calibre: Auto-Dual → Maxwell-Chern-Simons

Neste capítulo introduziremos a técnica de imersão de calibre proposta por (ANACLETO; ILHA; NASCIMENTO; RIBEIRO; WOTZASEK, 2001) e faremos a imersão do Auto-Dual obtendo o Maxwell-Chern-Simons. A técnica consiste em construir um modelo com simetria de calibre a partir de um modelo sem simetria. Seja $S^{(0)}(f_a)$ um modelo que não possui simetria de calibre, queremos que o novo modelo seja invariante por uma transformação do tipo:

$$\delta f_a = \partial_a \xi \tag{3.1}$$

Onde ξ é uma função das coordenadas e do tempo. Definimos o vetor de Euler como

$$K^a = \frac{\delta S^{(0)}}{\delta f_a} \tag{3.2}$$

Iniciamos a técnica propondo a primeira iteração com um campo auxiliar B_a:

$$S^{(1)} = S^{(0)} - \int d^3x (B_a K^a) \tag{3.3}$$

fazendo uma variação sob a transformação (3.1), temos:

$$\delta S^{(0)} = \int d^3x \; K^a \partial_a \xi \tag{3.4}$$

$$\delta S^{(1)} = \int d^3x [K^a(\partial_a \xi - \delta B_a) - B^a \delta K_a] \tag{3.5}$$

Se definirmos $\delta B_a = \partial_a \xi$ e supusermos que $\delta K_a = \theta_{ab}\partial^b \xi = \theta_{ab}\delta B^b$ com $\theta_{ab} = \theta_{ba}$ sendo uma matriz simétrica, temos:

$$\delta S^{(1)} = -\int d^3x (B^a \delta K_a) = -\int d^3x \delta \left(B^b \frac{1}{2} \theta_{ab} B^a \right) \tag{3.6}$$

que equivale a

$$\delta \left[S^{(1)} + \int d^3x B^a \frac{\theta_{ab}}{2} B^b \right] = 0 \tag{3.7}$$

portanto temos a ação invariante sob (3.1)

$$S^{(2)} = S^{(0)} - \int d^3x(B_a K^a) + \int d^3x \left(B^b \frac{1}{2}\theta_{ab} B^a \right) \tag{3.8}$$

Eliminando a dependência em B_a via equações de movimento de B_a temos o modelo final, invariante de calibre.

$$S^{(2)} = S^0 - \int d^3x \frac{1}{2} K^a (\theta^{-1})_{ab} K^b \tag{3.9}$$

Esta ação 3.9 é invariante sob:

$$\delta f_a = \partial_a \xi \tag{3.10}$$

Esta transformação implica, por hipótese, em $\delta K^a = \theta^{ab}\partial_b \xi$.
Agora vamos fazer a Imersão de Calibre a partir da ação do Auto-Dual que é:

$$S_{AD} = \int d^3x \left[-\frac{m^2}{2} f_\mu f^\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha \right] \tag{3.11}$$

Vamos definir o vetor de Euler:

$$K^\mu = \frac{\delta S_{AD}}{\delta f_\mu} = -m^2 f^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu f_\alpha \tag{3.12}$$

Iniciamos o método definindo a primeira iteração com um campo auxiliar a_μ:

$$S^{(1)} = S_{AD} - \int d^3x [a_\mu K^\mu] \tag{3.13}$$

queremos obter um modelo invariante sob a transformação:

$$\delta f_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{3.14}$$

fazendo uma variação na ação 3.13 temos:

$$\delta S^{(1)} = \int d^3x [K^\mu \delta f_\mu] - \int d^3x [\delta a_\mu K^\mu + a_\mu \delta K^\mu] \tag{3.15}$$

como

$$\delta K^\mu = -m^2 \delta f^\mu = -m^2 \partial_\mu \Lambda \tag{3.16}$$

então a variação da ação 3.15 é:

$$\delta S^{(1)} = \int d^3x [K^\mu \partial_\mu \Lambda] - \int d^3x [\delta a_\mu K^\mu - m^2 a^\mu \partial_\mu \Lambda] \tag{3.17}$$

para eliminar δS_{AD} em 3.15 definimos a variação do campo auxiliar como $\delta a_\mu = \partial_\mu \Lambda$, então temos:

$$\delta S^{(1)} = \int d^3x \delta \left(\frac{m^2}{2} a^\mu a_\mu \right) \tag{3.18}$$

a partir desta equação temos:

$$\delta \left(S^{(1)} - \int d^3x \frac{m^2}{2} a^\mu a_\mu \right) = 0 \tag{3.19}$$

Logo definimos a segunda iteração, invariante sob 3.14:

$$S^{(2)} = S^{(1)} - \int d^3x \frac{m^2}{2} a^\mu a_\mu \tag{3.20}$$

substituindo $S^{(1)}$ de 3.13, temos:

$$S^{(2)} = S_{AD} - \int d^3x \left(a_\mu K^\mu + \frac{m^2}{2} a^\mu a_\mu \right) \tag{3.21}$$

agora vamos eliminar a dependência no campo auxiliar a_μ completando o quadrado neste campo e integrando temos:

$$S^{(2)} = S_{AD} - \int d^3x \left(\frac{1}{2m^2} K_\mu K^\mu \right) \tag{3.22}$$

Substituindo o vetor de Euler K^μ, temos:

$$S^{(2)} = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha \right) \tag{3.23}$$

Note que mudamos a nomenclatura $f_\mu \longrightarrow A_\mu$. Este é o modelo de Maxwell-Chern-Simons. Portanto verificamos neste capítulo que o Auto-Dual gera via imersão de calibre o modelo Maxwell-Chern-Simons, como já foi discutido no capítulo 2 e já era conhecido na literatura, (ANACLETO; ILHA; NASCIMENTO; RIBEIRO; WOTZASEK, 2001).

4 Maxwell-Chern-Simons e Auto-Dual de D=2+1 para D=1+1

Neste capítulo mostraremos inicialmente que é possível obter o modelo de Proca em $D = 1 + 1$ a partir da redução dimensional do Auto-Dual em $D = 2 + 1$. Mostraremos também que é possível obter o modelo de Schwinger em $D = 1 + 1$ a partir da redução dimensional do Maxwell-Chern-Simons em $D = 2+1$. A redução dimensional do AD e do MCS foram obtidas originalmente por (AMARAL; NATIVIDADE, 1998). Essa redução dimensional pode ser feita, simplesmente suprimindo a dependência em uma variável, nesse caso x_2, ou seja, $A_\mu(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow A_\mu(x_0, x_1)$ onde fazemos $\partial_2 A_\mu \longrightarrow 0$. A partir do modelo MCS 2.56, fazendo a soma nos seus índices, onde $a, b = 0, 1$, temos

$$L_{MCS} = -\frac{1}{4}[F_{a2}F^{a2} + F_{2a}F^{2a} + F_{ab}F^{ab}] + \frac{m}{2}[\epsilon^{ab2}A_a\partial_b A_2 - \epsilon^{ab2}A_a\partial_2 A_b + \epsilon^{ab2}A_2\partial_a A_b] \quad (4.1)$$

escrevendo 4.1 em termos do campo fundamental A_μ:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.2)$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_{MCS} = &-\tfrac{1}{4}[(\partial_a A_2 - \partial_2 A_a)(\partial^a A^2 - \partial^2 A^a) \\ &+ (\partial_2 A_a - \partial_a A_2)(\partial^2 A^a - \partial^a A^2) + F_{ab}F^{ab}] + \tfrac{m}{2}[\epsilon^{ab2}A_a\partial_b A_2 - \epsilon^{ab2}A_a\partial_2 A_b + \epsilon^{ab2}A_2\partial_a A_b] \quad (4.3) \end{aligned}$$

Agora é feita a redução dimensional de D=2+1 para D=1+1 eliminando a dimensão extra, a dependência em x_2. Isto é, $A_\mu(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow A_\mu(x_0, x_1)$. Além disso, definimos: $A_2 = \phi$ e $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ com $A_a = A_a(x_0, x_1)$, logo a redução dimensional da densidade de lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons é:

$$L_I = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2}(\partial_a\phi\partial^a\phi) + m\phi\epsilon^{ab}F_{ab} \quad (4.4)$$

definindo $\tilde{F} = -\epsilon^{ab}F_{ab}$ temos:

$$L_I = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2}(\partial_a\phi\partial^a\phi) - m\phi\tilde{F} \quad (4.5)$$

As equações de movimento de 4.5 são:

$$\Box\phi = m\tilde{F} \quad (4.6)$$

$$\partial^a F_{ab} = m\epsilon_{bc}\partial^c\phi \tag{4.7}$$

Como $F_{ab} = \epsilon_{ab}\tilde{F}$, a equação 4.6 elimina F_{ab} em termos de ϕ, substituindo em 4.7 temos:

$$\epsilon_{ab}\partial^a[(\Box - m^2)\phi] = 0 \tag{4.8}$$

Como $\partial_x f(x,t) = \partial_t f(x,t) = 0$ com a condição de contorno que $f(x,t)$ vai a zero em $x, t \to \pm\infty$ implica que $f(x,t) = 0$, encontramos a equação de Klein-Gordon:

$$(\Box - m^2)\phi = 0 \tag{4.9}$$

Portanto a redução dimensional do Maxwell-Chern-Simons para o modelo L_I 4.5 em D=1+1 dimensões preservou a simetria de calibre e o número de graus de liberdade, pois 4.5, assim como o MCS possuem somente um grau de liberdade massivo. Completando o quadrado de 4.5 em ϕ temos:

$$L_I = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{m^2}{4}F_{ab}\frac{1}{\Box}F^{ab} \tag{4.10}$$

então temos o modelo de Schwinger:

$$L_S = -\frac{1}{4}F_{ab}\left(1 - \frac{m^2}{\Box}\right)F^{ab} \tag{4.11}$$

este modelo, obtido via redução dimensional, possui simetria de calibre, assim como o MCS e somente um grau de liberdade massivo.

Agora vamos fazer a redução dimensional do modelo Auto-Dual 2.62, começamos fazendo a soma nos seus índices, onde $a, b = 0, 1$:

$$L_{AD} = -\frac{m^2}{2}[f_a f^a + (f_2)^2] - \frac{m}{2}[2\epsilon^{ab2} f_a \partial_b f_2 - \epsilon^{ab2} f_a \partial_2 f_b] \tag{4.12}$$

A redução dimensional de D=2+1 para D=1+1 é feita do mesmo modo que o modelo anterior, desprezando a dependência em x_2. Vamos também definir: $f_2(x_0, x_1) = \phi$, então temos o seguinte modelo reduzido:

$$L_{II} = -\frac{m^2}{2}[f_a f^a + \phi^2] - m\phi\epsilon^{ab}\partial_a f_b \tag{4.13}$$

completando o quadrado em ϕ temos:

$$L_{II} = -\frac{m^2}{2}f_a f^a - \frac{(m\phi + \epsilon^{ab}\partial_a f_b)^2}{2} + \frac{\epsilon^{ab}\partial_a f_b \epsilon^{cd}\partial_c f_d}{2} \tag{4.14}$$

sendo $\epsilon^{ab}\epsilon^{cd} = -(\eta^{ac}\eta^{bd} - \eta^{cd}\eta^{bc})$ e $\partial_a f_b = \frac{\partial_a f_b - \partial_b f_a}{2} + \frac{\partial_a f_b + \partial_b f_a}{2}$
temos

$$L_{II} = -\frac{m^2}{2} f_a f^a - \frac{1}{2}\partial_a f_b(\partial^a f^b - \partial^b f^a) \tag{4.15}$$

sendo $F_{ab} = \partial_a f_b - \partial_b f_a$ temos o modelo de Proca em D=1+1:

$$L_P = -\frac{m^2}{2} f_a f^a - \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \tag{4.16}$$

Este modelo não possui simetria de calibre, assim como o Auto-Dual. Enfim, mostramos neste capítulo que é possível obter o Proca em D=1+1 a partir da redução dimensional do Auto-Dual. Também é possível obter o modelo de Schwinger em $D = 1 + 1$ a partir da redução dimensional do Maxwell-Chern-Simons. Esses resultados foram obtidos originalmente por (AMARAL; NATIVIDADE, 1998). Estes dois modelos em D=1+1 descrevem 1 grau de liberdade massivo propagante, portanto uma característica dessa redução dimensional, de teoria massiva para massiva, é a preservação dos graus de liberdade, ou seja, a teoria reduzida em D=1+1 possui o mesmo número de graus de liberdade que a teoria em D=2+1. Observa-se que a redução dimensional de um modelo com simetria de calibre leva a um modelo reduzido também com simetria, analogamente, se o modelo não possuir simetria de calibre, sua redução dimensional também não possui.

5 Imersão: Proca $\rightarrow$ Schwinger em D=1+1

Sabe-se que o modelo Auto-Dual é equivalente ao modelo de Maxwell-Chern-Simons em D=2+1, como mostramos no capítulo 3. Além disso mostramos que a imersão de calibre do modelo AD leva ao MCS. Neste momento surge uma pergunta: Será que a redução dimensional desses dois modelos AD e MCS, como foi feita no capítulo 4, leva a modelos também equivalentes e relacionados via imersão? Em outras palavras, será que a imersão do Proca linearizado em $D = 1 + 1$ leva ao Schwinger bosonizado em $D = 1 + 1$? Para fazer tal imersão é preciso linearizar o modelo de Proca, introduzindo um campo extra na teoria. Se fizermos a imersão sem linearizar, encontraremos uma teoria com fantasmas. A teoria de Proca em $D = 3 + 1$ pode ser linearizada com a introdução de um campo $B_{\mu\nu}$, já em $D = 2 + 1$ a linearização é feita com um campo b_μ, agora em $D = 1 + 1$, nosso interesse, a linearização é feita com um campo escalar ϕ, ou seja, o modelo de Maxwell de segunda ordem em derivadas pode ser reescrito em primeira ordem em derivadas como:

$$-\int d^4x \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \longleftrightarrow \int d^4x \left(\frac{1}{2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{2} B_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \quad (D = 3 + 1) \tag{5.1}$$

$$-\int d^3x \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \longleftrightarrow \int d^3x \left(\frac{1}{2} b_\mu b^\mu - \frac{1}{2} b_\mu \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \quad (D = 2 + 1) \tag{5.2}$$

$$-\int d^2x \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \longleftrightarrow \int d^2x \left(\frac{1}{2} \phi^2 - \frac{1}{2} \phi \epsilon^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \quad (D = 1 + 1) \tag{5.3}$$

Os últimos termos de 5.1 e 5.2 são invariantes respectivamente por: $\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$ e $\delta b_\mu = \partial_\mu \Phi$, enquanto que no caso de 5.3 a simetria é uma transformação global: $\delta\phi = \xi$ com ξ uma constante. Nos três casos 5.1, 5.2 e 5.3 temos a simetria de calibre $\delta f_\alpha = \partial_\alpha \Lambda$.

Abaixo reescrevemos o modelo de Proca linearizado em D=1+1 que está em 4.13:

$$S^{(0)} = \int d^2x \left[-\frac{m^2}{2} f_a f^a - \frac{m^2}{2} \phi^2 + m\phi \epsilon^{ba} \partial_b f_a \right] \tag{5.4}$$

Fazemos a imersão com uma simetria local e uma simetria global para este modelo 5.4 que não apresenta simetria de calibre, seguindo o procedimento explicado no capítulo 3. Inicialmente definimos o vetor K^a e o escalar J de Euler:

$$K^a = \frac{\delta S^{(0)}}{\delta f_a} = -m^2 f^a - m\epsilon^{ba} \partial_b \phi \tag{5.5}$$

$$J = \frac{\delta S^{(0)}}{\delta \phi} = -m^2\phi + m\epsilon^{ba}\partial_b f_a \tag{5.6}$$

introduzindo os campos auxiliares b_a e Ω e usando o vetor e o escalar de Euler, iniciamos a imersão propondo a primeira iteração:

$$S^{(1)} = S^{(0)} - \int d^2x(b_a K^a + \Omega J) \tag{5.7}$$

queremos encontrar um modelo invariante sob as transformações:

simetria local:

$$\delta f_a = \partial_a \Lambda \tag{5.8}$$

simetria global:

$$\delta \phi = \xi \tag{5.9}$$

Com ξ constante. Note que essas são simetrias do último termo de 5.4. Fazemos uma variação em 5.7 sob as transformações 5.8 e 5.9:

$$\delta S^{(1)} = \delta S(0) - \int d^2x(b_a\delta K^a + K^a\delta b_a + \Omega\delta J + J\delta\Omega) \tag{5.10}$$

onde temos:

$$\delta S^{(0)} = \int d^2x(K^a\delta f_a + J\delta\phi) = \int d^2x(K^a\partial_a\Lambda + J\xi) \tag{5.11}$$

definimos os campos auxiliares de tal forma que suas variações cancelam $\delta S^{(0)}$:

$$\delta b_a = \partial_a \Lambda \tag{5.12}$$

$$\delta \Omega = \xi \tag{5.13}$$

então temos:

$$\delta S^{(1)} = -\int d^2x(b_a\delta K^a + \Omega\delta J) \tag{5.14}$$

portanto temos:

$$\delta S^{(1)} = \int d^2x(m^2 b_a\delta b^a + m^2\Omega\delta\Omega) = \int d^2x\delta\left(\frac{m^2}{2}b_a b^a + \frac{m^2}{2}\Omega^2\right) \tag{5.15}$$

então, a partir de 5.15 temos a segunda iteração:

$$S^{(2)} = S^{(1)} - \int d^2x\left(\frac{m^2}{2}b_a b^a + \frac{m^2}{2}\Omega^2\right) \tag{5.16}$$

substituindo $S^{(1)}$ em 5.16 temos:

$$S^{(2)} = S^{(0)} - \int d^2x \left(\frac{m^2}{2} b_a b^a + b_a K^a + \frac{m^2}{2} \Omega^2 + \Omega J \right) \tag{5.17}$$

completando o quadrado em b_a e Ω para eliminar a dependência desses campos auxiliares em $S^{(2)}$ temos:

$$S^{(2)} = S^{(0)} + \int d^2x \left(\frac{1}{2m^2} K_a K^a + \frac{1}{2m^2} J^2 \right) \tag{5.18}$$

usando o vetor e o escalar de Euler 5.5 e 5.6 e substituindo $S^{(0)}$ temos:

$$S^{(2)} = \int d^2x \left(-m\phi \epsilon^{ba} \partial_b f_a - \frac{1}{2} \partial_c \phi \partial^c \phi + \frac{1}{2} \epsilon^{ba} \epsilon^{cd} \partial_b f_a \partial_c f_d \right) \tag{5.19}$$

definindo $F_{ab} = \partial_a f_b - \partial_b f_a$ temos:

$$S^{(2)} = \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} - m\phi \epsilon^{ba} \partial_b f_a + \frac{1}{2} \phi \Box \phi \right) \tag{5.20}$$

Note que $\epsilon^{ab} \partial_a f_b = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} F_{ab}$. A ação 5.20 é o modelo de Schwinger bosonizado em D=1+1 que foi obtido em 4.4 fazendo a redução dimensional do Maxwell-Chern-Simons de D=2+1 para D=1+1, basta completar quadrado em ϕ que voltamos à forma 4.11 com $F_{ab} = \partial_a f_b - \partial_b f_a$. Este modelo 5.20 é invariante sob as transformações 5.8 e 5.9 como esperado, portanto a pergunta do começo do capítulo foi respondida, a imersão do Proca linearizado leva ao modelo de Schwinger bosonizado.

6 Conteúdo Físico Via Propagador

6.1 Introdução à Análise de Conteúdo Físico

Nesta seção introduziremos a análise de conteúdo físico via propagador (BOULWARE; DESER, 1972; HERNASKI, 2011; SCHWINGER, 1998). Seja a ação de um campo vetorial em D dimensões, onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, ..., D-1$, dada por:

$$S = \frac{1}{2}\int d^D A_\mu K^{\mu\nu} A_\nu \tag{6.1}$$

Onde $K^{\mu\nu}$ é um operador diferencial. A partir do inverso desse operador definimos o propagador $\langle A_\mu(k)A_\nu(-k)\rangle$ no espaço dos momentos:

$$\langle A_\mu(-k)A_\nu(k)\rangle = -\frac{i}{2}K^{-1}_{\mu\nu}(k) \tag{6.2}$$

a partir desse propagador, definimos a amplitude de dois pontos saturada com fontes, no espaço dos momentos:

$$A(k) = J^\mu(-k)\langle A_\mu(k)A_\nu(-k)\rangle J^\nu(k) = -\frac{i}{2}(J^\mu)^*(k)K^{-1}_{\mu\nu}(k)J^\nu(k) \tag{6.3}$$

onde $K^{-1}_{\mu\nu}$ é o inverso de $K^{\mu\nu}$ no espaço dos momentos, fazendo $\partial_\mu \to ik_\mu$. A parte imaginária dos resíduos associados aos polos de amplitude de dois pontos 6.3 nos dá o conteúdo físico de 6.1. Se o sinal da parte imaginária do resíduo for positivo, há uma partícula física, se o sinal for negativo, a teoria possui fantasmas. Se o resíduo for igual a zero, não há partículas na teoria. Para encontrar $K^{-1}_{\mu\nu}$ a partir de $K^{\mu\nu}$ usamos a relação:

$$K^{-1}_{\mu\nu}K^{\nu\alpha} = \delta_\mu{}^\alpha \tag{6.4}$$

O operador $K^{\mu\nu}$ pode ser escrito em termos dos operadores:

$$\omega^{\mu\nu} = \frac{1}{\Box}\partial^\mu\partial^\nu \tag{6.5}$$

$$\theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu} \tag{6.6}$$

$$E^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\alpha \tag{6.7}$$

esses operadores satisfazem às relações:

$$\omega_{\mu\nu}\omega^{\nu\alpha} = \omega_\mu{}^\alpha \tag{6.8}$$

$$\theta_{\mu\nu}\theta^{\nu\alpha} = \theta_{\mu}{}^{\alpha} \tag{6.9}$$

$$\omega_{\mu\nu}\theta^{\nu\alpha} = \theta^{\alpha\nu}\omega_{\nu\alpha} = 0 \tag{6.10}$$

$$E^{\mu\nu}E_{\nu\alpha} = \Box\theta^{\mu}{}_{\alpha} \tag{6.11}$$

$$E^{\mu\nu}\theta_{\nu\alpha} = E^{\mu}{}_{\alpha} \tag{6.12}$$

$$E^{\mu\nu}\omega_{\nu\alpha} = \omega_{\nu\alpha}E^{\alpha\mu} = 0 \tag{6.13}$$

Podemos definir os operadores (GAITAN, 2007)

$$(P_{\pm})_{\mu\nu} = \frac{\theta_{\mu\nu} \pm \tilde{E}_{\mu\nu}}{2} \tag{6.14}$$

onde $\tilde{E}_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}/\sqrt{\Box}$. Os operadores $P_{\pm}$ e $\omega_{\mu\nu}$ satisfazem a uma relação de completeza:

$$(P_{+})_{\mu\nu} + (P_{-})_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{6.15}$$

e ainda:

$$(P_{\pm})_{\mu\nu}\omega^{\nu\alpha} = \omega^{\mu\alpha}(P_{\pm})_{\alpha\rho} = 0 \tag{6.16}$$

$$P_{\pm}^{\mu\nu}(P_{\pm})_{\nu\alpha} = (P_{\pm})^{\mu}{}_{\alpha} \tag{6.17}$$

$$(P_{\pm})^{\mu\nu}(P_{\mp})_{\nu\alpha} = 0 \tag{6.18}$$

as relações 6.8, 6.15, 6.16, 6.17 e 6.18 nos permitem mostrar que se o operador $K^{\mu\nu}$ é da forma:

$$K^{\mu\nu} = aP_{+}^{\mu\nu} + bP_{-}^{\mu\nu} + c\omega^{\mu\nu} \tag{6.19}$$

então o operador inverso $(K^{-1})_{\alpha\mu}$ é:

$$(K^{-1})_{\mu\nu} = \frac{1}{a}(P_{+})_{\mu\nu} + \frac{1}{b}(P_{-})_{\mu\nu} + \frac{1}{c}\omega_{\mu\nu} \tag{6.20}$$

Cada um dos operadores $P_{+}^{\mu\nu}$, $P_{-}^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ é um projetor. O operador $\omega_{\mu\nu}$ projeta na direção do momento (longitudinal) e os operadores $P_{\pm}^{\mu\nu}$ projetam em direções transversais. O traço de cada um deles é $\eta_{\mu\nu}P_{\pm}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = 1$. O operador $\theta_{\mu\nu}$ também é um projetor, vide 6.9, ele projeta no plano transversal à direção do momento e $\eta^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = D - 1$. Em D=3 dimensões $\theta^{\mu\nu}$ projeta em um subespaço de dimensão 2, transversal ao subespaço de $\omega_{\mu\nu}$ que projeta em um subespaço de dimensão 1, dizemos que $\theta_{\mu\nu}$ projeta no setor de spin-1 e $\omega_{\mu\nu}$ projeta no setor de spin zero. A origem dessa nomenclatura vem do caso de D=4 onde o operador $\theta_{\mu\nu}$ projeta em 3 dimensões que corresponde a 2S+1 com S=1 e $\omega_{\mu\nu}$ projeta em 1 dimensão que corresponde a $2S + 1$ com $S = 0$.

6.2 Conteúdo Físico do Modelo de Proca

A ação do modelo de Proca em D dimensões, com $\mu, \nu = 0, 1, 2, ...D - 1$ é:

$$S_P = \int d^D x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right) \tag{6.21}$$

Onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. vamos começar evidenciando o operador diferencial, escrevendo a teoria na forma $S = \frac{1}{2} \int d^D x (A_\nu K^{\nu\mu} A_\mu)$:

$$S_P = \int d^D x \frac{1}{2} A_\nu [(\Box - m^2)\theta^{\mu\nu} - m^2 \omega^{\mu\nu}] A_\mu \tag{6.22}$$

onde o operador diferencial é definido por:

$$K^{\nu\mu} = (\Box - m^2)\theta^{\mu\nu} - m^2 \omega^{\mu\nu} \tag{6.23}$$

O funcional gerador do modelo de Proca, na ausência de fontes, é definido por:

$$Z[A^\mu, 0] = \int DA_\mu e^{-\frac{i}{2} \int d^D x A_\nu K^{\nu\mu} A_\mu} \tag{6.24}$$

A teoria de Proca no espaço dos momentos, fazendo $\partial_\mu \longrightarrow iK_\mu$, é:

$$S_P = \frac{1}{2} \int d^D K A^\nu(k) [-(k^2 + m^2)\theta^{\mu\nu} - m^2 \omega^{\mu\nu}] A^\mu(-k) \tag{6.25}$$

Então podemos escrever em termos dos operadores $P_\pm^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$:

$$S_P = \frac{1}{2} \int d^D K A^\nu(k) [-(k^2 + m^2)(P_+ + P_-)^{\mu\nu} - m^2 \omega^{\mu\nu}] A^\mu(-k) \tag{6.26}$$

agora vamos encontrar a amplitude de dois pontos definida em 6.3. Primeiro vamos inverter o operador $K^{\mu\nu}$ usando 6.20:

$$(K^{-1})^{\mu\nu} = \frac{-1}{m^2 + k^2} \theta^{\mu\nu}(k) - \frac{1}{m^2} \omega^{\mu\nu}(k) \tag{6.27}$$

então calculamos a amplitude de dois pontos:

$$A(k) = \frac{-i}{2} J_\mu{}^*(k) \left(\frac{-1}{m^2 + k^2} \theta^{\mu\nu}(k) - \frac{1}{m^2} \omega^{\mu\nu}(k) \right) J_\nu(k) \tag{6.28}$$

agora vamos calcular os resíduos da amplitude de dois pontos. Por observação há um polo em $k^2 = -m^2$, o resíduo é:

$$R_m = \frac{i}{2} \lim_{k^2 \to -m^2} (k^2 + m^2) \left(\frac{1}{m^2 + k^2} \theta^{\mu\nu}(k) + \frac{1}{m^2} \omega^{\mu\nu}(k) \right) J_\nu(k) \tag{6.29}$$

portanto

$$R_m = \frac{i}{2} J^*{}_\mu(k) \theta^{\mu\nu} J_\nu(k) \tag{6.30}$$

Agora vamos analisar a fonte J_μ que pode ser decomposta em uma parte transversa ao momento J^t_μ e outra parte longitudinal:

$$J_\mu = J^t_\mu + k_\mu J \tag{6.31}$$

usando o sistema de referência da partícula

$$k^\mu = (m, 0, 0, ...) \tag{6.32}$$

temos que o resíduo R_m é:

$$R_m = \frac{i}{2} (J^t_i)^* J^t_i \tag{6.33}$$

portanto a parte imaginária do resíduo R_m da amplitude de dois pontos é maior que zero:

$$Im R_m = \frac{1}{2} |J^t_i|^2 > 0$$

Assim há uma partícula massiva propagante. No caso particular, em D=3+1, temos uma partícula massiva de spin-1 associada ao polo $k^2 = -m^2$. Note que os polos dos projetores $\theta^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$ não contribuem para a análise de conteúdo físico. Se calculássemos o resíduo em $k^2 = 0$ teríamos zero.

6.3 Conteúdo Físico do Maxwell-Chern-Simons

O modelo de Maxwell-Chern-Simons em D=2+1, com $\mu, \nu = 0, 1, 2$ é:

$$S_{MCS} = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha + \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right) \tag{6.34}$$

Sabe-se que este modelo é invariante por transformações de calibre $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \theta$, então para conseguir inverter o operador diferencial da teoria e calcular a amplitude de dois pontos foi necessário fixar um calibre adicionando um termo do tipo $\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$ na ação de

MCS acima. Toda vez que uma teoria é invariante de calibre, precisamos fixar um calibre para obter o propagador. Evidenciando o operador diferencial temos:

$$S_{MCS} = \int d^3x \frac{1}{2} A_\mu (\Box\theta^{\mu\nu} - mE^{\mu\nu} - \lambda\Box\omega^{\mu\nu}) A_\nu \tag{6.34}$$

onde definimos o operador diferencial $K^{\mu\nu}$:

$$K^{\mu\nu} = \Box\theta^{\mu\nu} - mE^{\mu\nu} - \lambda\Box\omega^{\mu\nu} \tag{6.34}$$

o funcional gerador é:

$$Z[A^\mu, 0] = \int DA_\mu e^{-\frac{i}{2}\int d^3x A_\mu K^{\mu\nu} A_\nu} \tag{6.34}$$

agora vamos escrever a ação de MCS usando os operadores $P_\pm^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$

$$S_{MCS} = \int d^3x \frac{1}{2} A_\mu [(\Box - m\sqrt{\Box})P_+^{\mu\nu} + (\Box + m\sqrt{\Box})P_-^{\mu\nu} - \lambda\Box\omega^{\mu\nu}] A_\nu \tag{6.34}$$

usando 6.20, o inverso do operador diferencial é:

$$(K^{-1})_{\mu\nu} = \frac{(\Box + m\sqrt{\Box})}{\Box(\Box - m^2)} P_+^{\mu\nu} + \frac{(\Box - m\sqrt{\Box})}{\Box(\Box - m^2)} P_-^{\mu\nu} - \frac{\omega^{\mu\nu}}{\lambda\Box} \tag{6.34}$$

no espaço do momentos, onde $\partial_\mu \to ik_\mu$, temos a amplitude de dois pontos definida em 6.3:

$$A(k) = -\frac{i}{2} J_\nu^* \left[\frac{(m\sqrt{-k^2} - k^2)}{k^2(k^2 + m^2)} P_+^{\nu\mu} - \frac{(k^2 + m\sqrt{-k^2})}{k^2(k^2 + m^2)} P_-^{\nu\mu} + \frac{\omega^{\nu\mu}}{\lambda k^2} \right] J_\mu \tag{6.34}$$

onde definimos no espaço dos momentos:

$$P_\pm^{\mu\nu} = \frac{\theta^{\mu\nu} \pm i\tilde{E}^{\mu\nu}}{2} \tag{6.34}$$

por observação há dois polos na amplitude de dois pontos 6.3:

$$k^2 = -m^2, \quad k^2 = 0 \tag{6.34}$$

Um resíduo associado aos polo da amplitude de dois pontos é:

$$R_m = -\frac{i}{2} \lim_{k^2 \to -m^2} (k^2 + m^2) J_\nu^* \left[\frac{(m\sqrt{-k^2} - k^2)}{k^2(k^2 + m^2)} P_+^{\nu\mu} - \frac{(k^2 + m\sqrt{-k^2})}{k^2(k^2 + m^2)} P_-^{\nu\mu} + \frac{\omega^{\nu\mu}}{\lambda k^2} \right] J_\mu \tag{6.34}$$

Para encontrar o sinal do resíduo, usamos o sistema de referência de repouso $k_\mu = (m, 0, 0)$, então o único termo que não é zero é o proporcional a $P_+^{\mu\nu}$, portanto temos:

$$R_m = iJ_\nu^* P_+^{\nu\mu} J_\mu = i(J_1 + iJ_2)^*(J_1 + iJ_2) \equiv iJ_+^* J_+ \tag{6.34}$$

portanto

$$R_m = i|J_+|^2 \tag{6.34}$$

Portanto a parte imaginária do resíduo é positiva:

$$ImR_m = |J_+|^2 > 0 \tag{6.34}$$

então temos uma partícula massiva de spin-1. O outro resíduo é:

$$R_0 = -\frac{i}{2}\lim_{k^2\to 0}(k^2)J_\nu^* \left[\frac{(m\sqrt{-k^2} - k^2)}{k^2(k^2+m^2)}P_+^{\nu\mu} - \frac{(k^2 + m\sqrt{-k^2})}{k^2(k^2+m^2)}P_-^{\nu\mu} + \frac{\omega^{\nu\mu}}{\lambda k^2}\right] J_\mu \tag{6.34}$$

portanto temos:

$$R_0 = -\frac{i}{2}J_\nu^* \left[\frac{\omega^{\nu\mu}}{\lambda}\right] J_\mu \tag{6.34}$$

usando $k_\mu = (k, 0, k)$ e $k^\mu J_\mu = 0$ podemos mostrar que $R_0 = 0$, portanto não há partícula associada ao polo $k^2 = 0$.

6.4 Conteúdo Físico do Auto-Dual

O modelo Auto-Dual em D=2+1, com $\mu, \nu = 0, 1, 2$ é:

$$S_{AD} = \int d^3x \left(-\frac{m^2}{2}f_\mu f^\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\nu} f_\mu \partial_\alpha f_\nu\right) \tag{6.34}$$

evidenciando o operador diferencial, temos

$$S_{AD} = \int d^3x \frac{1}{2} f_\mu \left[-m^2(\theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}) + E^{\mu\nu}\right] f_\nu \tag{6.34}$$

portanto o operador $K^{\mu\nu}$ é:

$$K^{\mu\nu} = -m^2(\theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}) + E^{\mu\nu} \tag{6.34}$$

o funcional gerador é:

$$Z[A^\mu, 0] = \int Df_\mu e^{-\frac{i}{2}\int d^3x f_\mu K^{\mu\nu} f_\nu} \tag{6.34}$$

vamos escrever o modelo o Auto-Dual usando os operadores $P_{\pm}^{\mu\nu}$ e $\omega^{\mu\nu}$:

$$S_{AD} = \int d^3x \frac{1}{2} f_\mu[(m\sqrt{\Box} - m^2)P_+^{\mu\nu} - (m\sqrt{\Box} + m^2)P_-^{\mu\nu} - m^2\omega^{\mu\nu} \tag{6.34}$$

usando 6.20 o inverso do operador $K^{\mu\nu}$ é:

$$(K^{-1})^{\mu\nu} = \frac{(m\sqrt{\Box} + m^2)}{m^2(\Box - m^2)} P_+^{\mu\nu} - \frac{(m\sqrt{\Box} - m^2)}{m^2(\Box - m^2)} P_-^{\mu\nu} - \frac{\omega^{\mu\nu}}{m^2} \tag{6.34}$$

A amplitude de dois pontos 6.3 no espaço dos momentos, usando 6.3 e fazendo $\partial_\mu \to ik_\mu$ é:

$$A(k) = -\frac{i}{2} J_\mu^* \left[-\frac{(m\sqrt{-k^2} + m^2)}{m^2(k^2 + m^2)} P_+^{\mu\nu} + \frac{(m\sqrt{-k^2} - m^2)}{m^2(k^2 + m^2)} P_-^{\mu\nu} - \frac{\omega^{\mu\nu}}{m^2} \right] J_\mu \tag{6.34}$$

Por observação há apenas um polo $k^2 = -m^2$, o resíduo associado a essse polo é:

$$R_m = -\frac{i}{2} \lim_{k^2 \to -m^2} (k^2 + m^2) J_\mu^* \left[-\frac{(m\sqrt{-k^2} + m^2)}{m^2(k^2 + m^2)} P_+^{\mu\nu} + \frac{(m\sqrt{-k^2} - m^2)}{m^2(k^2 + m^2)} P_-^{\mu\nu} - \frac{\omega^{\mu\nu}}{m^2} \right] J_\mu \tag{6.34}$$

em um sistema de referência em repouso $K_\mu = (m, 0, 0)$, temos que o resíduos é:

$$R_m = iJ_\mu^* P_+^{\mu\nu} J_\nu = i(J_1 + iJ_2)^*(J_1 + iJ_2) = iJ_+^* J_+ \tag{6.34}$$

portanto

$$R_m = i|J_+|^2 \tag{6.34}$$

então a parte imaginária do resíduos é maior que zero:

$$ImR_m = |J_+|^2 > 0 \tag{6.34}$$

Concluímos que o modelo Auto-Dual descreve uma partícula física de spin-1. Ele tem o mesmo conteúdo do MCS com a vantagem de não ter o polo irrelevante em $k^2 = 0$.

7 Conclusão

No capítulo 2 fizemos a Decomposição em Helicidades do modelo de Maxwell em D dimensões, obtendo que a teoria descreve a propagação de D-2 graus de liberdade. Minimizando a ação de Maxwell decomposta, encontramos as equações de Maxwell, Lei de Gauss e Lei de Ampère, em termos das variáveis de helicidade. A Decomposição em Helicidades permitiu a contagem adequada dos graus de liberdade, nos mostrando que os graus de liberdade espúrios desaparecem, sem a necessidade de fixarmos uma condição de calibre específica. Essa é uma grande vantagem do método de decomposição em helicidades que apresentamos aqui. Vimos no capítulo 2 que o modelo de Proca em D dimensões descreve a propagação de D-1 graus de liberdade, já o MCS e o AD descrevem a propagação de um grau de liberdade devido ao campo transverso v_i. Em seguida calculamos a hamiltoniana das teorias MCS e AD decompostas, mostramos que a hamiltoniana é positiva, portanto as teorias são consistentes. No capítulo 3 mostramos a equivalência entre o AD e o MCS e que a imersão de calibre do AD leva ao MCS. No capítulo 4 fizemos a redução dimensional do Auto-Dual, obtendo o Proca em D=1+1. Também fizemos a redução dimensional do Maxwell-Chern-Simons, obtendo o modelo de Schwinger em $D = 1 + 1$. No capítulo 5, mostramos que a redução dimensional dos modelos equivalentes MCS e AD em D=2+1, leva a modelos também equivalentes em D=1+1, ou seja, o Proca linearizado é equivalente ao Schwinger bosonizado. Mostramos que a imersão de calibre do modelo de Proca Linerizado em D=1+1 leva ao modelo de Schwinger bosonizado. Nesta Imersão de calibre do modelo de Proca linearizado encontramos um resultado interessante: em D=1+1 é necessário fazer a imersão com uma simetria global e uma simetria local para obtermos o modelo de Schwinger bosonizado (invariante de calibre) a partir do modelo de Proca linearizado. Esse é um resultado original deste trabalho. Em todos os exemplos de Imersão na literatura, trabalha-se apenas com simetrias locais e não globais. É importante dizer que tanto o modelo MCS como o AD em D=2+1, ambos de spin-1, possuem análogos de spin-2 em D=2+1. Tentamos fazer a redução dimensional de D=2+1 para D=1+1 desses modelos de spin-2, mas não obtivemos resultados consistentes com a preservação do número de graus de liberdade. Por fim no capítulo 6 analisamos o conteúdo físico dos modelo de Proca, Maxwell-Chern-Simons e Auto-Dual, mostramos que o sinal da parte imaginária dos resíduos da amplitude de dois pontos é positivo, portanto essas teorias possuem conteúdo de partícula livre de fantasmas. Enfim, quero destacar que a maior parte desta monografia é resultado do trabalho de um ano. Em um projeto anterior trabalhei na redução dimensional de D=2+1 para D=1+1 do termo K de uma teoria de spin-2 chamada "New Massive Gravity", na qual possui um termo de Chern-Simons de terceira ordem em derivadas e o termo K de quarta ordem em derivada, (BIAZOTTI; DALMAZI; GRACIA, 2014)

REFERÊNCIAS

AMARAL. R. L. P. G. , Natividade. C. P. , Relations between two-dimensional models from dimensional reduction, PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 58, 127701, 1998.

ANACLETO.M.A, Ilha.A, Nascimento.J.R.S, Ribeiro.R.F, Wotzasek.C, Dual equivalence between selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical U(1) charged matter, Phys. Lett. B504: 268-274, (2001).

BAETA.A.P.S, Botta.M.C, Helayel-Neto.J.A, On the relation between the propagators of dual theories, Europhys. Lett. 65: 760-765, (2004). hepth/0304165, (2003).

BIAZOTTI, H. A. ; DALMAZI, D. ; GRACIA, G. B. . Dimensional reduction of the massless limit of the linearized 'New Massive Gravity-. European Physical Journal C. Particles and Fields, v. 74, p. 2747, 2014.

BOULWARE.D.G, Deser.S, Can gravitation have a finite range?, Phys.Rev.D6:3368-3382, (1972).

DALMAZI, D . Generalized duality between local vector theories in D = 2+1. The Journal of High Energy Physics (Online), v. 0608, p. 040, 2006

DE RHAM. C., Gabadadze. G. and Tolley. A. J. , JHEP 1111 (2011) 093.

DESER.S, Jackiw.R, Templeton.S; Topologically Massive Gauge Theories Annals of Physics, Annals Phys.140:372-411, (1982)

DESER.S, Jackiw.R, 'Selfduality' of Topologically Massive Gauge Theories, Phys. Lett. B139: 371, (1984).

DESER. S., Trubatch. J. and Trubatch. S. , Canadian J. of Phys. 44(1966)1715

DE RHAM. D, Gabadadzec. G, and Tolley. A. J, Helicity decomposition of ghost-free massive gravity. JHEP11(2011)093

FELSAGER.B, Geometry, Particles, and Fields, Springer (January 9, 1998)

GAITAN. R, On the Coupling Problem of Higher Spin Fields in 2+1 Dimension, arXiv:0711.2498, 2007

HERNASKI.C.A Novos Cenários Efetivos para Gravitação Quântica: Torção, Dinâmica e Grávitons Massivos na Escala do LHC, Ph.D. thesis (in Portuguese), Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, cbpfindex.cbpf.br, (2011).

JACCARD. M, Maggiore. M and Mitsou. E, Phys.Rev. D87 (2013) 044017.

SCHWINGER.J, Particles, Sources, and Fields, Perseus Books Publishing, Vol.I, (1998).

TOWNSEND.P.K, Pilch.K, Nieuwenhuizen.P van, Selfduality in Odd Dimensions Phys. Lett. 136B: 38, (1984)