

**PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA**

**Introdução às Equações Diferenciais com
Retardamento Autônomas e Aplicações**

Sara Moraes de Avila

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

**RIO CLARO
2025**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Sara Moraes de Avila

Introdução às Equações Diferenciais com Retardamento Autônomas e Aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

**Rio Claro/SP
2025**

A958i Avila, Sara Moraes de
Introdução às equações diferenciais com retardamento autônomas e
aplicações / Sara Moraes de Avila. -- Rio Claro, 2025
72 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Equações Diferenciais com Retardamento. 2. Existência e
unicidade de solução. 3. Equação característica. 4. Estabilidade. I.
Título.

Impacto potencial desta pesquisa

Apresentar um texto, com uma linguagem simples e introdutória sobre as equações diferenciais com retardamento destinada aos estudantes de graduação na área de exatas.

Potential impact of this research

Present a text, using simple and introductory language, about Delay Differential Equations intended for undergraduate students in the exact sciences field.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Sara Moraes de Avila

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM RETARDAMENTO
AUTÔNOMAS E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo
Departamento de Matemática e computação - USP

Prof. Dr. Wladimir Seixas
Departamento de Matemática - UFSCar

Profa. Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo
Departamento de Matemática e computação - USP

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 17 de outubro de 2025

Dedico este trabalho ao meu pai, exemplo maior de educação e integridade, que sempre me mostrou, com gestos e palavras, o valor do conhecimento. À minha família, por todo apoio e amor, e aos professores que, ao longo da minha trajetória, reforçaram em mim a certeza de que a educação é o caminho para transformar vidas.

Agradecimentos

Registro minha gratidão aos meus pais, pelo incentivo constante; aos professores do IFSP, que abriram as portas do conhecimento e da vida acadêmica; e ao corpo docente da UNESP, cuja excelência e apoio tornaram possível esta conquista.

A educação é o grande motor do desenvolvimento pessoal. É através dela que a filha de um camponês pode se tornar médica, o filho de um mineiro pode se tornar o chefe da mina, e o filho de trabalhadores rurais pode se tornar presidente de uma grande nação.

Nelson Mandela

Resumo

Este trabalho apresenta de forma introdutória as Equações Diferenciais com Retardamento, apresenta um resultado sobre a existência e unicidade de soluções, o método do passo para resolução de certas equações e faz um estudo sobre estabilidade para certos tipos de equação com retardo. Por fim, apresentamos duas aplicações, uma envolvendo um modelo populacional e a outra com respeito ao modelo econômico de Kalecki.

Palavras-chave: Existência e unicidade de solução. equação característica. estabilidade.

Abstract

This work provides a introduction to Delay Differential Equations, presents a result on the existence and uniqueness of solutions, the step method for solving certain equations, and a study on stability for certain types of delay equations. Finally, we present two applications, one involving a population model and the other concerning Kalecki's economic model.

Keywords: Existence and uniqueness of solution. characteristic equation. stability.

Lista de Figuras

4.1	Soluções de a) em verde e b) em vermelho	37
4.2	Soluções de a)em azul e b) em vermelho para $K=2$	39
4.3	Região de Estabilidade	54
5.1	Região de Estabilidade	60
5.2	Gráfico da raiz dupla $\lambda = -1$	62
5.3	Gráfico das raízes quando $r < e^{-1}$	63
5.4	Gráfico da função $\alpha(\beta)$	64
5.5	Gráfico da função $\beta(\alpha)$	65
5.6	Raízes características de (4.3)	66

Sumário

1	Introdução	12
2	Pré-requisitos	14
3	Equações Diferenciais Ordinárias	18
3.1	Resultados Básicos	18
3.2	Método da Variação das Constantes	24
3.3	Estudo de Estabilidade de Sistemas Lineares	25
4	Equações Diferenciais com Retardamento	29
4.1	Existência e Unicidade de Solução	29
4.2	Método do Passo	33
4.3	Definição de Estabilidade	39
4.4	Sistemas Lineares Autônomos	40
4.5	Transformada de Laplace e Fórmula da Variação das Constantes	41
4.6	A Equação Característica	45
4.7	Princípio da Estabilidade Linear	50
4.8	A Equação Escalar	52
5	Aplicações	58
5.1	Modelo Populacional	58
5.2	Modelo Econômico de Kalecki (1935)	66
5.3	Considerações finais	70
	Referências	71

1 Introdução

As Equações Diferenciais com Retardamento (EDR) têm sido estudadas há pelo menos 200 anos, segundo a referência [1], porém o assunto começou a ganhar mais relevância em torno da década de 1940, na antiga União Soviética, devido a consideração de modelos significativos de sistemas de engenharia e controle, o que era muito conveniente para o momento histórico.

Nos últimos 50 anos, a teoria foi amplamente aplicada em diversas áreas da engenharia, física e biologia. Até a década de 1960, grande parte das teorias se limitava à equações lineares e à preservação de estabilidade de equilíbrio sob pequenas perturbações não lineares.

Para a transição dos resultados das Equações Diferenciais Ordinárias comuns para as com retardamento, foi necessária uma nova abordagem, pois estas eram muito complexas para serem resolvidas com os métodos de resolução conhecidos. Inicialmente, foram estudadas alternativas acerca da estabilidade dos equilíbrios, adaptando métodos como o de Lyapunov.

Diversos refinamentos na teoria foram feitos ao decorrer dos anos, durante os estudos foram necessárias ferramentas utilizadas nos estudos de outras equações, como equações diferenciais parciais hiperbólicas e outras na área de engenharia e física, porém, ainda hoje, existem aspectos que não foram explorados.

A pesquisa dessas equações, nos últimos 35 anos, foi focada principalmente no desenvolvimento da teoria qualitativa, estabilidade e investigação detalhada de fluxos relacionados a campos vetoriais, preparando o terreno para demais pesquisas na área.

Este trabalho é um estudo introdutório sobre as Equações Diferenciais com Retardo, onde o primeiro capítulo é um capítulo de pré-requisitos, contendo definições, teoremas e proposições que devem ser conhecidos para o entendimento do corpo do trabalho.

No segundo capítulo, são exploradas as EDOs, com seus resultados mais básicos, o Método da Variação dos Parâmetros e o Estudo da Estabilidade, esse estudo é importante pois as EDO's são um caso especial das EDR's. Além disso, é muito interessante comparar os resultados de EDO's e EDR's e observar o que é necessário para o estudo das equações com retardamento.

No terceiro capítulo, começamos o estudo das Equações Diferenciais com Retardo, apontando o Teorema da Existência e Unicidade de Soluções, o Método do Passo, a

Definição de Estabilidade, Sistemas Lineares Autônomo, a Fórmula da Variação dos Parâmetros, a Equação Característica e encerrando com o Princípio da Estabilidade Linear.

No último capítulo apresentamos duas aplicações das equações diferenciais com retardo. Um estudo é realizado sobre o modelo logístico com retardo, em que uma análise detalhada da equação característica é feita e no segundo modelo estudamos a estabilidade do importante e conhecido modelo econômico de Kalecki.

2 Pré-requisitos

Neste capítulo iremos listar todos os conceitos e resultados necessários ao entendimento deste trabalho: muitos fatos da Análise e Álgebra Linear serão descritos. Foram utilizadas as referências [2] e [3].

Definição 2.1. Dados $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função, dizemos que f é **derivável** em z_0 quando o seguinte limite existir,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Dizemos que f é **analítica** quando existir um subconjunto aberto $D \subset \Omega$ em que $f'(z)$ existe, para todo $z \in D$. Quando $\Omega = \mathbb{C}$ e f é derivável em $\mathbb{C}$, dizemos que f é **inteira**.

Proposição 2.2. *Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções analíticas, então $f + g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $f \cdot g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ também são analíticas.*

Demonstração. Ver referência □

Teorema 2.3. *Seja $u_n \geq 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então:*

i) *Se $L < 1$ então a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

é convergente;

ii) *Se $L > 1$ então a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

é divergente;

iii) *Se $L = 1$ então nada se pode concluir, exceto se $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow 1$ por valores superiores, e, neste caso a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

é divergente.

A seguir mostraremos uma importante desigualdade, conhecida como Desigualdade de Gronwall.

Teorema 2.4. *Seja K uma constante não negativa e sejam f e g funções contínuas não negativas em algum intervalo $[\alpha, \beta]$, satisfazendo a desigualdade:*

$$f(t) \leq K + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds$$

para $\alpha \leq t \leq \beta$. Então,

$$f(t) \leq Ke^{\int_{\alpha}^t g(s)ds}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Demonstração. Defina $U(t) = K + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds$, para $t \in [\alpha, \beta]$. Então $U(\alpha) = K + \int_{\alpha}^{\alpha} f(s)g(s)ds = K$. Como f e g são não negativas, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e do fato de $g(t) \geq 0$ que,

$$U'(t) = f(t)g(t) \leq U(t)g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds}$ tem-se

$$0 \geq U'(t).e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} - U(t)g(t).e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} = [U(t).e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds}]',$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}[U(t).e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds}] \leq 0.$$

Integrando em respeito a s a desigualdade acima de α a t , obtem-se

$$U(t).e^{-\int_{\alpha}^t g(s)ds} - U(\alpha) \leq 0 \Rightarrow U(t) \leq K.e^{\int_{\alpha}^t g(s)ds},$$

uma vez que $f(t) \leq U(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, o que conclui a prova. $\square$

Definição 2.5. Seja $S \subset \mathbb{R}$. Uma sequência de funções $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ converge pontualmente para uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ quando dado $\epsilon > 0$ e dado $x \in S$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall n > N.$$

A sequência converge uniformemente quando dado $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$ tem-se

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in S.$$

Essa diferença é importante. Para provar a convergência pontual, basta escolher um N para cada ϵ e cada x . Para provar a convergência uniforme, é preciso escolher, para cada ϵ um N que se aplica a todo x .

Definição 2.6. (Critério de Cauchy). Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência de funções seja convergente é que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe um número N_0 natural tal que $|u_p - u_q| < \epsilon$ para todos os $p, q > N_0$.

Teorema 2.7. (*Teorema de Rouché*) Seja γ uma curva fechada simples (sem autointerseções) no plano complexo. Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções analíticas no plano complexo que satisfazem a condição:

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \gamma.$$

Então, $f(z)$ e $g(z)$ possuem o mesmo número de zeros (contando suas multiplicidades) dentro da região delimitada por γ .

Definição 2.8. Um conjunto de vetores de um espaço vetorial V é linearmente independente (L.I) se nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos demais vetores, caso contrário chamamos o conjunto de vetores de linearmente dependente (L.D.)

No espaço $\mathbb{R}^n$, um conjunto de vetores dispostos em linhas em uma matriz A é linearmente independente se e somente se a equação:

$$Ax = 0$$

possui somente a solução trivial.

Definição 2.9. Um espaço vetorial normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial real (ou complexo) e $\|\cdot\|$ é uma norma em E . Um espaço normado é completo quando toda sequência de Cauchy for convergente. Quando um espaço normado é completo, denominamos de espaço de Banach.

Exemplo 2.10. O espaço das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $C([a, b], \mathbb{R})$ é Banach com a norma

$$\|f\| = \sup\{|f(t)|, t \in [a, b]\}.$$

Definição 2.11. Sejam M e N espaços métricos, dizemos que uma função $f : M \rightarrow N$ é lipschitziana se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq cd_M(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

onde d_M, d_N representa a métrica dos espaços M e N respectivamente.

Quando $(E, \|\cdot\|)$ é normado, podemos definir a métrica $d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in E$.

Definição 2.12. Sejam X e Y espaços normados, $F \subseteq Y$ e a transformação $T : F \rightarrow X$. Diz-se que T é uma contração se existe um número γ , com $0 \leq \gamma < 1$, tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq \gamma\|x - y\|$, para $\forall x, y \in F$.

Exemplo 2.13. Um exemplo simples de contração são as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = ax + b$, com $|a| < 1$.

Exemplo 2.14. A função $f(x) = \sin x$ é lipschitziana. De fato, pelo Teorema do Valor Médio para derivada,

$$|\sin x - \sin y| = |\cos \bar{x}||x - y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

onde $\bar{x}$ é um número entre x e y .

Definição 2.15. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $|\cdot|$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma usuais do $\mathbb{R}^n$, isto é, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ e $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos a norma de um operador linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{x \neq 0} |A(\frac{x}{|x|})| = \sup_{|x|=1} |Ax|$.

Definição 2.16. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma usuais do $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

e

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos a norma de um operador linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{x \neq 0} |A(\frac{x}{|x|})| = \sup_{|x|=1} |Ax|. \quad (2.1)$$

As demais propriedades são necessárias para que (2.1) seja uma norma, (i) $\|A\| \geq 0$, e $\|A\| = 0 \iff A = 0$ (ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

3 Equações Diferenciais Ordinárias

O objetivo desse capítulo é introduzir de forma breve a teoria referente às equações diferenciais ordinárias. Estes resultados são importantes para o entendimento do caso com retardamento.

As referências utilizadas para esse capítulo são [3] e [4].

3.1 Resultados Básicos

Para iniciar a discussão sobre soluções de equações diferenciais ordinárias, consideremos o seguinte sistemas linear e homogêneo:

$$y' = A(t)y, \text{ em } t \text{ e } y \quad (3.1)$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são funções contínuas de t .

Para descrevermos uma solução de (3.1) é necessário primeiramente entendermos o conceito de exponencial matricial. Para isso, seguem os próximos resultados. Inicialmente é preciso provar um teorema que garante a existência e unicidade de problemas mais gerais que $y' = A(t)y$.

Teorema 3.1. (*Existência e Unicidade de EDO's*) *Seja o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI)*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ em } x \text{ e } y \quad y(x_0) = y_0.$$

Suponha que a função $f(x, y)$ satisfaça:

- a) Contínua em uma região compacta $R \subset \mathbb{R}^2$ que contém (x_0, y_0) ;*
- b) Lipschitz contínua em y , ou seja, existe uma constante L tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

Então existe uma única função $y = \phi(x)$ definida em um intervalo, $|x - x_0| \leq \delta$, para algum $\delta > 0$, que satisfaz o problema de valor inicial dado.

Demonstração. Primeiramente vamos transformar o problema de valor inicial dado em uma equação integral. Para isto, basta aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo e reescrever o PVI da seguinte forma:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt, \quad |x - x_0| \leq \delta,$$

para algum $\delta > 0$. Se uma função $y(x)$ satisfaz essa equação integral, então ela também satisfaz o PVI e a recíproca também é verdadeira, isto é, se y é solução do PVI, então também é solução da equação integral. Portanto, basta procurarmos soluções da equação integral.

Para isto, vamos definir a seguinte sequência de funções a partir de uma aproximação inicial $y_0(x)$:

$$y_0(x) = y_0, \quad (x, y_0) \in R.$$

Para $n \geq 1$, definimos recursivamente:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt.$$

Essa sequência de funções $y_n(x)$ é chamada de sequência de aproximações de Picard.

Então, queremos mostrar que a sequência de funções $(y_n(x))$ converge uniformemente para uma função $y(x)$. Para isso, analisamos a diferença entre termos consecutivos da sequência:

$$|y_n - y_{n-1}| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))] dt \right|.$$

Usando a condição de Lipschitz, temos:

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \int_{x_0}^x L |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| dt, \quad |x - x_0| \leq \delta.$$

Como R é uma região compacta e f é uma função contínua, existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$, para todo $(x, y) \in R$. Usando isto, e a desigualdade acima repetidamente, obtemos uma série geométrica do tipo:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!} M$$

Assim, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|, \quad \text{com } |x - x_0| \leq \delta$$

é uniformemente convergente, logo a sequência $y_n(x)$ converge uniformemente para uma função $y(x)$, a qual é solução da equação integral.

Agora, vamos provar a unicidade da solução. Para isto, suponha que existam duas soluções y_1 e y_2 que satisfaçam a equação integral. Definimos:

$$d(x) = |y_1(x) - y_2(x)|, \quad |x - x_0| \leq \delta.$$

Substituindo na equação integral e aplicando a condição de Lipschitz, obtemos:

$$d(x) \leq L \int_{x_0}^x d(t) dt.$$

Pela Desigualdade de Gronwall, segue que $d(x) = 0$, ou seja, $y_1 = y_2$ para todo x . Portanto, a solução é única.

□

Teorema 3.2. *O conjunto solução de (3.1) é um espaço vetorial de dimensão n .*

Demonstração. Não é difícil mostrar que o conjunto de todas as soluções de (3.1) é um espaço vetorial, pois basta observar que é um subespaço vetorial do espaço de todas as funções $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo da reta. Mostremos que a dimensão é n . Para isto, considere a base $\{e_1, \dots, e_n\}$ canônica do $\mathbb{R}^n$ e as seguintes n condições iniciais:

$$1) \ x(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$2) \ x(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$$

$$\vdots$$

$$n) \ x(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_n$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, existe única solução para cada PVI, denotada por $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, respectivamente. Mostremos que $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ é base do conjunto solução de (3.1).

i) Mostremos que $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ é L.I. De fato, considere a combinação linear.

$$\alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n = 0_v$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \phi_1(t) + \dots + \alpha_n \phi_n(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Logo, para $t = t_0$, tem-se:

$$\alpha_1 \phi_1(t_0) + \dots + \alpha_n \phi_n(t_0) = 0$$

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ é L.I., segue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Portanto, $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ é l.i.

ii) Mostremos que $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ gera o conjunto solução de (3.1). De fato, considere $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução de (3.1), basta mostrar que ψ se escreve como combinação linear dos elementos de $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Para mostrar isso, considere então

$$\psi(t_0) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

e a Combinação Linear.

$$\phi(t) = \beta_1 \phi_1(t) + \dots + \beta_n \phi_n(t), \quad \forall t \in I.$$

Como $\phi_1, \dots, \phi_n$ são soluções de (3.1), segue que $\beta_1\phi_1 + \dots + \beta_n\phi_n$ é também solução (pois o conjunto solução é espaço vetorial). Note que

$$\begin{aligned}\phi(t_0) &= \beta_1\phi_1(t_0) + \beta_2\phi_2(t_0) + \dots + \beta_n\phi_n(t_0) \\ &= \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \dots + \beta_ne_n \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Portanto, ϕ e ψ são soluções do mesmo PVI:

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Pela unicidade da solução do PVI, conclui-se que $\phi = \psi$, ou seja,

$$\psi = \beta_1\phi_1 + \dots + \beta_n\phi_n.$$

Portanto, $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ gera o conjunto solução de (3.1).

Por i) e ii) segue que $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ é base e, portanto, a dimensão do espaço solução de (3.1) é n . $\square$

Definição 3.3. Dada uma matriz constante $A, n \times n$, definimos a exponencial de A por:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Para garantirmos que e^A está bem definida precisamos provar que a série acima é convergente. Isso é feito no próximo resultado.

Proposição 3.4. Dada uma matriz quadrada A , a série $\sum \frac{A^k}{k!}$ é convergente.

Demonstração. Consideremos as reduzidas

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k,$$

e

$$S_m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k,$$

com $n > m$ e denominemos $\|A\| = a, a \in \mathbb{R}^+$. Assim, dado $\epsilon > 0$, temos

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} A^k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} \|A\|^k = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} a^k < \epsilon,$$

para $n, m > n_0$, em que a existência de n_0 é garantida pelo fato de que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge uniformemente, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n, m > n_0, \quad \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} a^k < \epsilon.$$

Portanto, (S_n) é uma sequência de Cauchy e, pelo critério de Cauchy, é convergente. $\square$

Proposição 3.5. $(e^{At})' = Ae^{At}$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, onde a linha indica a derivada com relação a t .

Demonstração. Temos

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como a convergência é uniforme pela proposição anterior, podemos derivar a série termo a termo para obter

$$(e^{At})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k t^{k-1} A^k = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^{k-1} = Ae^{At},$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Dado o sistema linear com coeficientes constantes

$$x' = Ax,$$

onde $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é constante, se $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ são soluções linearmente independentes da equação $x' = Ax$, então toda solução $x(t)$ pode ser escrita da forma

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + \dots + c_n x_n(t).$$

já que a dimensão do espaço solução é n . Seja $X(t)$ a matriz na qual as colunas são dadas por $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Então, a expressão da combinação linear pode ser escrita na forma

$$x(t) = X(t).c,$$

onde c é um vetor constante.

Definição 3.6. A matriz $X(t)$ é chamada de matriz solução fundamental de $x' = Ax$ se suas colunas formam um conjunto linearmente independente de soluções de $x' = Ax$.

A matriz e^{At} é uma matriz fundamental de soluções.

Proposição 3.7. *Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ duas matrizes soluções fundamentais de $x' = Ax$. Então, existe uma matriz constante C tal que $Y(t) = X(t)C$.*

Demonstração. Por definição, as colunas $x^1(t), \dots, x^n(t)$ de $X(t)$ e $y^1(t), \dots, y^n(t)$ de $Y(t)$ são conjuntos soluções linearmente independentes de $x' = Ax$. Portanto, cada coluna de $Y(t)$ pode ser escrita como uma combinação linear das colunas de $X(t)$, isto é, existem constantes $c_1^j, \dots, c_n^j$ tais que

$$y^j(t) = c_1^j x^1(t) + c_2^j x^2(t) + \dots + c_n^j x^n(t), j = 1, \dots, n.$$

Seja C a matriz $(c^1, c^2, \dots, c^n)$, onde

$$c^j = \begin{pmatrix} c_1^j \\ c_2^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{pmatrix}$$

Então, as n equações são equivalentes à equação matricial $Y(t) = X(t)C$. $\square$

Teorema 3.8. *Seja $X(t)$ uma matriz solução fundamental da equação diferencial $x' = Ax$. Então,*

$$e^{At} = X(t).X^{-1}(0).$$

Em outras palavras, qualquer matriz solução fundamental é escrita como produto de $X(0)$ com e^{At} .

Demonstração. Seja $X(t)$ uma matriz solução fundamental de $x' = Ax$. Então, pela proposição 2.7 e pelo teorema 2.7, existe uma matriz constante C tal que

$$e^{At} = X(t)C.$$

Tomando $t = 0$ na igualdade acima, segue que $I = X(0)C$, o que implica que $C = X^{-1}(0)$. Consequentemente, $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$. $\square$

Teorema 3.9. *Se todos os autovalores de A têm partes reais não positivas e todos aqueles autovalores com partes reais nulas são simples, então a solução $y = 0$ de (2.1) é estável. Se (e somente se) todos os autovalores de A têm partes reais negativas, a solução zero de (2.1) é assintoticamente estável. De fato, neste caso se $\psi(t, t_0)$ denota a matriz fundamental de (2.1) que é a identidade em $t = t_0$, $\psi(t, t_0) = \exp((t - t_0)A)$ e existem constantes $K > 0, \sigma > 0$ tais que:*

$$\|\psi(t, t_0)\| \leq K \exp(-\sigma(t - t_0)) \quad (t_0 \leq t < \infty)$$

com $\sigma > 0$ no caso em que todos os autovalores de A têm partes reais negativas e $\sigma > 0$ se existem autovalores simples com parte real nula. Se um ou mais autovalores de A têm uma parte real positiva, a solução zero de (2.1) é instável.

3.2 Método da Variação das Constantes

Consideremos agora a equação diferencial Linear Não Homogênea (L.N.H.)

$$x' = Ax + g(t), \quad (3.2)$$

onde g é uma função contínua. A equação (2.1) pode ser considerada um caso particular da equação (3.2).

Para determinarmos a solução de (3.2) vamos apresentar o Método da Variação das Constantes. Primeiramente, considerando $X(t) = (x^1, \dots, x^n)$ uma matriz fundamental de solução de $x' = Ax$ e busquemos por uma solução x_p de (3.2) que seja escrita por:

$$x_p = X(t)u(t),$$

onde $u(t)$ é uma função vetorial, isto é, $u(t) = (u_1(t) \dots u_n(t))^T$. Temos

$$x'_p(t) = AX(t)u(t) + X(t)u'(t). \quad (3.3)$$

Como $x_p(t)$ é solução particular do sistema não homogêneo, temos

$$x'_p(t) = Ax_p(t) + g(t), \quad (3.4)$$

ou seja,

$$Ax(t)u(t) + X(t)u'(t) = Ax_p(t) + g(t) = Ax(t)u(t) + g(t). \quad (3.5)$$

Das duas últimas equações, vem que $X(t)u'(t) = g(t)$, ou

$$u'(t) = X^{-1}(t)g(t).$$

Integrando essa expressão de t_0 a t , obtemos:

$$u(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(s)g(s)ds,$$

onde tomamos $u(t_0) = 0$, pois procuramos uma solução particular. Logo,

$$x_p(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)g(s)ds.$$

Assim, a solução da E.D. tal que $x(t_0) = x_0$ é dada por

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)g(s)ds,$$

que é conhecida como Fórmula da Variação dos Parâmetros (ou fórmula da variação das constantes).

Teorema 3.10. *Sejam $A(t)$ e $g(t)$ contínuas em um intervalo $[a, b]$. Se $a \leq t_0 \leq b$, e se $|\eta| < \infty$, então o sistema*

$$y' = A(t)y + g(t) \quad (3.6)$$

possui uma única solução $\Phi(t)$ que satisfaz a condição inicial $\Phi(t_0) = \eta$ e existe no intervalo $a \leq t \leq b$.

Este teorema é uma consequência do Teorema de Existência e Unidade de soluções para o caso de equações diferenciais ordinárias.

Proposição 3.11. *Dados $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e A uma matriz $n \times n$ com coeficientes constantes, a solução da equação $x' = Ax$, com condição inicial $x(t_0) = x_0$, é dada por*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0, t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções para o caso de equações diferenciais ordinárias, a solução da equação $x' = Ax$ é única e como

$$x(t_0) = e^{A \cdot 0}x_0 = e^0x_0 = Idx_0 = x_0$$

e

$$x'(t) = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t).$$

Então essa solução existe para $t \in \mathbb{R}$. □

3.3 Estudo de Estabilidade de Sistemas Lineares

Uma equação diferencial autônoma tem a forma

$$x' = f(x), \tag{3.7}$$

onde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e D é um aberto de $\mathbb{R}^n$, ou seja, f não depende explicitamente do tempo.

Primeiramente, vamos introduzir o conceito de solução estável e instável.

Definição 3.12. A solução $x = \phi(t)$ de (3.7) é estável se toda solução $\psi(t)$ de (3.7) satisfaz para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que

$$|\psi_j(t) - \phi_j(t)| < \epsilon$$

se

$$|\psi_j(0) - \phi_j(0)| < \delta(\epsilon), j = 1, \dots, n$$

para toda solução $\psi(t)$ de (3.7).

Dizemos que a solução $\phi(t)$ é assintoticamente estável quando ela for estável e satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \phi(t).$$

Dizemos que a solução $\phi(t)$ é instável se não é estável.

Trataremos a questão da estabilidade de sistemas lineares autônomos da forma

$$x' = Ax, \tag{3.8}$$

onde A é uma matriz $n \times n$ de números reais. Para isso, consideremos o teorema a seguir:

Teorema 3.13. Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são autovalores distintos de A , onde λ_j tem multiplicidade n_j e $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ e se ρ é um número qualquer maior que a parte real de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, isto é,

$$\rho > \max(\operatorname{Re} \lambda_j), \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.9)$$

então existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|e^{At}| \leq K e^{\rho t} \quad (0 \leq t \leq \infty). \quad (3.10)$$

Demonstração. Já vimos que e^{At} é uma matriz solução fundamental do sistema $x' = Ax$. Além disso, toda entrada de e^{At} pode ser escrita na forma $\sum_{j=1}^k p_j(t) e^{\lambda_j t}$, onde $p_j(t)$ é um polinômio de grau menor ou igual que $(n_j - 1)$, se ρ é escolhido de modo a satisfazer a desigualdade (3.10), então $|t^k e^{\lambda_j t}| = t^k e^{(\operatorname{Re} \lambda_j)t} < e^{\rho t}$, para t suficientemente grande, e todo termo da soma $\sum_{j=1}^k p_j(t) e^{\lambda_j t}$ é no máximo igual a $M e^{\rho t}$ ($0 \leq t \leq \infty$) para alguma constante M . Dessa maneira, como há n^2 termos na matriz e^{At} , (3.10) é válida tomando-se $K = M' n^2$, onde M' é o maior valor dentre todos os valores de M , onde M' é o maior dos n^2 valores de M . $\square$

Proposição 3.14. Se todos os autovalores de A possuem parte real negativa, então toda solução $\phi(t)$ do sistema $x' = Ax$ aproxima-se de zero quando $t \rightarrow +\infty$. Mais precisamente, existem constantes $\bar{K} > 0, \rho > 0$ tais que $|\phi(t)| < \bar{K} e^{-\rho t}, 0 \leq t \leq \infty$. Também, sob as hipótese do teorema, existem constantes $K > 0, \rho > 0$ tais que $|e^{(tA)}| \leq K e^{-\rho t}, 0 \leq t \leq \infty$.

Teorema 3.15. a) Toda solução $\phi(t)$ de $x' = Ax$ é assintoticamente estável se todos os autovalores de A tem parte real negativa.

b) Toda solução $\phi(t)$ de $x' = Ax$ é instável se pelo menos um autovalor de A tem parte real positiva.

c) Suponha que todos os autovalores de A tenham parte real negativa e $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_l = i\sigma_l$ tenham parte real igual a zero. Seja $\lambda_j = i\sigma_j$ de multiplicidade k_j . Isto significa que o polinômio característico de A pode ser fatorado na forma

$$p(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} q(\lambda),$$

onde todas as raízes de $q(\lambda)$ tem parte real negativa. Então toda solução $x = \phi(t)$ de $x' = Ax$ é estável se A tem k_j autovetores linearmente independentes para cada autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$. Caso contrário, toda solução $\phi(t)$ é instável.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que toda solução $\phi(t)$ é estável se a solução $x(t) = 0$ é estável e $\phi(t)$ é instável se a solução $x(t) = 0$ é instável. Para isto, tomaremos $\psi(t)$ uma solução qualquer de $x' = Ax$. Note que $z(t) = \phi(t) - \psi(t)$ é também solução de $x' = Ax$. Consequentemente, se a solução $x(t) = 0$ é estável, dado um $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|z(t)| = |\phi(t) - \psi(t)| < \epsilon$ se $|z(0)| = |\phi(0) - \psi(0)| < \delta$. Dessa maneira, toda solução de $x' = Ax$ será estável. O caso em que $\phi(t)$ é instável é análogo. Demonstrando por cada item temos:

a) Toda solução $x = \psi(t)$ de $x' = Ax$ é da forma $\psi(t) = e^{At}\psi(0)$. Seja $\phi_{ij}(t)$ o elemento ij da matriz e^{At} e sejam $\psi_1^0, \psi_2^0, \dots, \psi_n^0$ as componentes de $\psi(0)$. Então, a i -ésima componente de $\psi(t)$ é

$$\psi_i(t) = \phi_{i1}(t)\psi_1^0 + \dots + \phi_{in}(t)\psi_n^0 = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(t)\psi_j^0.$$

Suponha que todos os autovalores de A tenham parte real negativa. Seja $-\alpha$ o maior valor de todas as partes reais de todos os autovalores de A . Assim, podemos encontrar um número K tal que $|\phi_{ij}(t)| \leq Ke^{-\alpha t}, t \geq 0$. Observe que $\phi_{ij}(t) = p_{ij}(t)e^{a_j t}$ e que $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)e^{\lambda t} = 0$, com $\text{Re}(\lambda) > \alpha_1$, para qualquer autovalor λ de A . Assim,

$$|\psi_i(t)| \leq \sum_{j=1}^n Ke^{-\alpha t} |\psi_j^0| \leq Ke^{-\alpha t} \sum_{j=1}^n \psi_j^0 = nKe^{-\alpha t} |\psi(0)|$$

para algumas constantes positivas K e α . Note que $|\psi_j^0| \leq |\psi(0)|$. Consequentemente,

$$|\psi(t)| = \max[|\psi_1(t)|, \dots, |\psi_n(t)|] \leq nKe^{-\alpha t} |\psi(0)|.$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Tomando $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{nK}$, segue que $|\psi(t)| < \epsilon$ se $|\psi(0)| < \delta(\epsilon)$ com $t \geq 0$, uma vez que

$$|\psi(t)| \leq nKe^{-\alpha t} |\psi(0)| < \frac{nK\epsilon}{nK} = \epsilon.$$

Consequentemente, a solução $x(t) = 0$ é estável.

b) Seja λ um autovalor de A com parte real positiva e seja v um autovetor de A , associado a λ . Então, $\psi(t) = ce^{\lambda t}v$ é solução da equação $x(t) = 0$ para qualquer constante c . Se λ é real, então v também é e $|\psi(t)| = |c|e^{\lambda t}|v|$. Note que $|\psi(t)|$ tende ao infinito quando t tende ao infinito, independente da escolha de $c \neq 0$, mesmo com c muito pequeno. Consequentemente, $x(t) = 0$ é instável. E, se $\lambda = \alpha + i\beta$ é complexo, então $v = v_1 + iv_2$ é o autovetor complexo associado. Neste caso,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t}(v_1 + iv_2) = \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(v_1 + iv_2) = \\ &= e^{\alpha t}[(v_1 \cos(\beta t) - v_2 \sin(\beta t)) + i(v_1 \sin(\beta t) + v_2 \cos(\beta t))] \end{aligned}$$

é solução complexa da equação $x' = Ax$. Consequentemente,

$$\text{Re}(\psi(t)) = ce^{\alpha t}(v_1 \cos(\beta t) - v_2 \sin(\beta t))$$

é solução real da equação $x' = Ax$, para qualquer constante c . Basta observar que $|\psi(t)|$ fica ilimitado quando t tende ao infinito se c, v_1 ou v_2 não forem iguais ao vetor nulo. Portanto, $x(t) = 0$ é instável.

c) Se A possui k_j autovetores linearmente independentes para cada autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$ de multiplicidade k_j , então podemos encontrar uma constante K de tal forma que $|e_{ij}^{At}| \leq K$. Então, $|\psi(t)| \leq nK|\psi(0)|$ para toda solução $x' = Ax$. De (a), segue que $x(t) = 0$ é estável. Por outro lado, se A possuir uma quantidade k_j de autovetores linearmente independentes menor que a quantidade de autovalores $\lambda_j = i\sigma_j$, então $x' = Ax$ terá soluções $\psi(t)$ da forma

$$\psi(t) = ce^{i\sigma_j t}[v + t(A - i\sigma_j I)v],$$

onde $(A - i\sigma_j I)v \neq 0$. Se $\sigma_j = 0$, então $\psi(t) = c(v + tAv)$ é real. Mais ainda, $|\psi(t)|$ é ilimitada quando t se aproxima do infinito, independente da escolha de c ($c \neq 0$). Similarmente, ambas as partes real e imaginária de $\psi(t)$ são ilimitadas para um valor pequeno arbitrário $\psi(0) \neq 0$, se $\sigma_j \neq 0$. Consequentemente, a solução de equilíbrio $x(t) = 0$ é instável.

□

Definição 3.16. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ é chamado de ponto de equilíbrio hiperbólico ou ponto crítico de $x' = f(x)$ se nenhum dos autovalores da matriz $Df(x_0)$ tem parte real zero. O sistema linear $x' = Ax$ com a matriz $A = Df(x_0)$ é chamado de linearização de $x' = f(x)$ em x_0 .

Maiores detalhes consultar a referência [4].

Teorema 3.17. *Seja $x' = F(x)$ a equação diferencial ordinária que define o sistema, onde F é de classe C^1 e x_0 é um ponto estacionário hiperbólico, ou seja, $F(x_0) = 0$ e a matriz Jacobiana $A = DF(x_0)$ tem todos os autovalores com parte real não nula. O teorema garante que: Existe uma vizinhança V de x_0 e uma vizinhança W de 0 . Existe um homeomorfismo $H : V \rightarrow W$. H conjuga o fluxo ϕ_t do sistema não linear $\dot{x} = F(x)$ com o fluxo $\psi_t = e^{At}$ do sistema linearizado $\dot{y} = Ay$, o que significa:*

$$H(\phi_t(x)) = \psi_t(H(x))$$

para todo $x \in V$ e t no intervalo em que as trajetórias permanecem em V e W .

4 Equações Diferenciais com Retardamento

Diferente de equações diferenciais ordinárias onde a condição inicial é um vetor do $\mathbb{R}^n$, as equações diferenciais com retardamento precisam de condições iniciais que são funções. Nesse tipo de equação, a solução depende do conhecimento da solução em um certo intervalo anterior á t_0 . As referências utilizadas neste capítulo são [5], [6],[7] e [8].

4.1 Existência e Unicidade de Solução

Definição 4.1. Sejam r, H com $0 \leq r < \infty$, $0 < H \leq \infty$, C_H é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-r, 0]$ no $\mathbb{R}^n$ com a norma do supremo, isto é, $\|\phi\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\phi(\theta)\|$ e limitadas por H . No caso $H = \infty$ temos $C_H = C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

Para entendermos uma equação diferencial com retardamento, é importante introduzirmos a notação x_t . Dada uma função $x : [t_0 - r, t_0 + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$ define-se $x_t : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\forall \theta \in [-r, 0], t \in [t_0, t_0 + A]$.

Definição 4.2. Seja $f(t, \phi)$ uma aplicação contínua de $[0, \infty) \times C_H$ no $\mathbb{R}^n$. A equação

$$x'(t) = f(t, x_t)$$

é chamada uma **equação diferencial com retardamento**.

Um exemplo: $x'(t) = -x(t - \pi/2)$

Uma condição inicial $\phi \in C$ pode ser adicionada à equação diferencial com retardamento num dado instante t_0 , descrita por

$$x_{t_0} = \phi.$$

A equação diferencial com a condição inicial, descritas acima, formam um **problema de valor inicial (PVI) com retardamento**.

Sejam $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_H$. Uma função x , contínua em $[t_0 - r, t_0 + A]$, com $A > 0$, diferenciável em $[t_0, t_0 + A]$ é dita **uma solução** da equação acima com função inicial $\psi \in C_H$ em t_0 , se:

1. $x_t \in C_H$, para $t_0 \leq t < t_0 + A$;
2. $x_{t_0} = \psi$, ou seja, $x_{t_0}(\theta) = \psi(\theta)$, para $\theta \in [-r, 0]$;
3. $x'(t) = f(t, x_t)$, para $t_0 \leq t < t_0 + A$.

O que garante que um PVI com retardamento possui solução? A seguir, vamos apresentar um resultado clássico da teoria de equações com retardamento que garante existência e unicidade de solução de um PVI, cuja prova pode ser encontrada na referência [6]. Antes, precisamos de um resultado auxiliar.

Teorema 4.3. *Se $x : [t_0 - r, t_0 + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua então a aplicação $t \mapsto x_t$, com $t \in [t_0, t_0 + A]$, é contínua.*

Demonstração. Mostremos a continuidade em $S_0 \in [t_0, t_0 + A]$. Assim, devemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$|S_0 - t| < \delta \Rightarrow \|x_{S_0} - x_t\| < \epsilon.$$

Note que

$$\|x_{S_0} - x_t\| = \sup |x_{S_0}(\theta) - x_t(\theta)| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} |x(S_0 + \theta) - x(t + \theta)|$$

Como x é uma função contínua em S_0 então para todo $\epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$|S_0 + \theta - (t + \theta)| = |S_0 - t| < \delta_1 \Rightarrow |x(S_0 + \theta) - x(t + \theta)| < \epsilon, \forall \theta \in [-r, 0].$$

Logo, basta tomar $\delta = \delta_1$ e segue a continuidade de $t \rightarrow x_t$ em S_0 . Como este ponto é arbitrário segue a continuidade no intervalo todo. $\square$

Proposição 4.4. *Resolver o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x_t), \quad t \in [t_0, t_0 + A] \\ x_{t_0} &= \phi \end{aligned} \tag{4.1}$$

é equivalente a resolver

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + A] \\ x(t_0 + \theta) &= \phi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Demonstração. Mostrar a existência de uma única ϕ que é solução de

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & \text{para } t \in [t_0, t_0 + A] \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), & \text{para } \theta \in [-r, 0] \end{cases} \tag{4.3}$$

é equivalente a garantir a existência de solução para a equação integral:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, & \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + A \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), & \text{para } -r \leq \theta \leq 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Primeiramente, analisemos o caso em que (3.3) implica (4.4):

Seja $x'(s) = f(s, x_s)$, para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$.

Integrando ambos os lados na variável s de t_0 a t , e lembrando que as funções f e a $t \rightarrow x_t$ são contínuas e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\int_{t_0}^t x'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, x_s)ds,$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

Logo, $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s)ds$.

Mas,

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$$

para $-r \leq \theta \leq 0$, ou seja,

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta)$$

para $-r \leq \theta \leq 0$.

Em particular, quando $\theta = 0$, temos $x_{t_0}(\theta) = x_{t_0}(0) = \phi(0)$. Logo, obtemos:

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s)ds$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$, e

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta)$$

para $-r \leq \theta \leq 0$, obtendo (3.4).

Reciprocamente, seja

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s)ds.$$

Derivando ambos os lados com relação à variável t , obtém-se:

$$x'(t) = d/dt(\phi(0)) + d/dt \int_{t_0}^t f(s, x_s)ds = 0 + f(t, x_t) = f(t, x_t).$$

Logo,

$$x'(t) = f(t, x_t)$$

para $t \in [t_0, t_0 + A]$

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$$

para $\theta \in [-r, 0]$ obtendo (3.3). □

Teorema 4.5. *(Teorema do Ponto Fixo de Banach) Sejam X um espaço métrico, $F \subseteq X$, F fechado e $T : F \rightarrow F$ uma contração. Então, existe um único $x \in F$ tal que $Tx = x$, ou seja, T possui um único ponto fixo.*

A prova pode ser encontrada em [2].

O próximo teorema nos diz que se o conjunto F for substituído por um conjunto conexo e compacto, e a contração T for substituída por uma função contínua, perdemos a unicidade do ponto fixo.

Teorema 4.6. *Seja X um espaço de Banach e $A \subseteq X$ um subconjunto convexo e compacto. Se $f : A \rightarrow A$ é contínua, então existe ponto fixo $\bar{x}$ de f , isto é, $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

O próximo teorema é um dos resultados centrais do trabalho, ele nos garante existência e unicidade de solução da equação (3.2) com condição inicial ϕ em t_0 .

Teorema 4.7. Teorema da existência e unicidade: *Seja $f(t, \psi)$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a ψ em $[0, \infty) \times C_H$. Então para quaisquer $t_0 \geq 0$, $\phi \in C_H$, existem $A > 0$ e uma função $x(t)$ definida em $[t_0 - r, t_0 + A]$ solução de $x'(t) = f(t, x_t)$ com função inicial ψ em t_0 . Ainda mais essa solução é única.*

Demonstração. Seja

$$F = \{x \in C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n) : \|x\| \leq H_1, x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), -r \leq \theta \leq 0\}$$

onde H_1 é escolhido de modo que $\|\psi\| < H_1 < H$ e $A > 0$ a ser fixado convenientemente.

$C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[t_0 - r, t_0 + A]$ no $\mathbb{R}^n$ com a norma

$$\|x\| = \sup_{t_0 - r \leq t \leq t_0 + A} |x(t)|.$$

F é um espaço métrico completo. Consideremos $T : F \rightarrow C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, definida por

$$(Tx)(t + \theta) = \psi(\theta) \quad \text{para} \quad -r \leq \theta \leq 0$$

e

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A.$$

Vamos mostrar inicialmente que T , para A conveniente, é uma aplicação de F em F . De fato,

$$|(Tx)(t)| \leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x_s)| ds \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A.$$

Fazendo a restrição $A \leq 1$ e observando que $\|x_s\| \leq H_1$ para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$, decorre que para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$

$$|f(s, x_s)| \leq |f(s, x_s) - f(s, 0)| + |f(s, 0)| \leq LH_1 + K,$$

onde $K = \sup_{t_0 \leq \sigma \leq t_0 + A} |f(\sigma, 0)|$ e $L = L(t_0 + 1, H_1)$ é a constante de Lipschitz. Então,

$$|(Tx)(t)| \leq |\psi(0)| + A[H_1L + K] \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A.$$

Por outro lado, como $\|\psi\| < H_1$, resulta que existe H_2 tal que $\|\psi\| < H_2 < H_1$. Assim, T é uma aplicação de F em F .

Escolhendo agora A não só com a indicação anterior mas também com a exigência $A < \frac{1}{L}$, vamos mostrar que T é também uma contração de F em F . Dados x, y de F , sejam:

$$(Tx)(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$$

para $-r \leq \theta \leq 0$

$$(Ty)(t_0 + \theta) = \psi(\theta)$$

para $-r \leq \theta \leq 0$ e

$$(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$

$$(Ty)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, y_s) ds$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$. Então,

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = 0 \quad \text{para} \quad t_0 - r \leq t \leq t_0$$

e

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x_s) - f(s, y_s)| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+A} L \|x_s - y_s\| ds, \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A. \end{aligned}$$

Como $\|x_s - y_s\| \leq \|x - y\|$ para $t_0 \leq s \leq t_0 + A$, vem que

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq AL \|x - y\| \quad \text{para} \quad t_0 - r \leq t \leq t_0 + A$$

e

$$\|Tx - Ty\| \leq AL \|x - y\|.$$

Logo T é uma contração porque $AL < 1$. Então, pelo teorema do Ponto Fixo de Banach existe uma e uma só função $x \in F$ tal que $Tx = x$. Em outras palavras, existe uma e uma só função $x \in F$ tal que

$$x(t_0 + \theta) = \psi(\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0$$

$$x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + A.$$

Este teorema é uma consequência imediata deste fato. □

4.2 Método do Passo

Vamos considerar a equação diferencial não linear com retardamento

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)) \tag{4.5}$$

com um único retardo $r > 0$. Suponha que $f(t, x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y)$ são contínuas em $\mathbb{R}^3$.

Seja $s \in \mathbb{R}$ e seja $\phi : [s-r, s] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Buscamos uma solução $x(t)$ de (4.5) que satisfaz

$$x(t) = \phi(t), \quad s-r \leq t \leq s \tag{4.6}$$

e satisfazendo (4.6) em $s \leq t < s + \sigma$ para algum $\sigma > 0$. Observe que devemos interpretar $x'_0(s)$ como a derivada à direita em s . A equação (4.6) pode ser resolvida pelo método do passo que descrevemos a seguir. Para $s \leq t \leq s + r$, $x(t)$ deve satisfazer o problema de valor inicial da EDR:

$$y'_0(t) = f(t, y(t), \phi(t - r)), \quad y(s) = \phi(s), \quad s \leq t \leq s + r.$$

Como $g(t, y) = f(t, y, \phi(t - r))$ e $g_y(t, y)$ são contínuas, uma solução local desta EDR é garantida por resultados clássicos da teoria de EDR. Se esta solução local $x(t)$ existe para todo o intervalo $s \leq t \leq s + r$, então nossa solução $x(t)$ está definida até agora em $[s - r, s + r]$ e podemos repetir o argumento acima para estender nossa solução ainda mais para a direita. Na verdade, para $s + r \leq t \leq s + 2r$, uma solução $x(t)$ de (3.5)-(3.6) deve satisfazer o problema de valor inicial para a EDO:

$$y'_0(t) = f(t, y(t), x(t - r)), \quad y(s + r) = x(s + r), \quad s + r \leq t \leq s + 2r.$$

Novamente, os resultados de existência clássicos para tais problemas garantem a existência de uma solução única, que chamamos de $x(t)$, definida em algum subintervalo $[s + r, \sigma) \subset [s + r, s + 2r]$, possivelmente todo o intervalo. Claro, $x(t)$, agora definido em $[s - r, \sigma)$ onde $\sigma > s + r$, é uma solução de (3.5)-(3.6). Se a solução existir em todo o intervalo $[s + r, s + 2r]$ então podemos repetir novamente o processo para estender a solução para $[s + 2r, s + 3r]$, ou algum subintervalo deste intervalo.

Vejamos agora alguns exemplos. Primeiramente, vamos encontrar um meio de determinar uma função $x : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação com retardamento $x'(t) = f(t, x(t - 1))$, para $t \geq 1$, onde f é uma função contínua, e também a condição inicial $x(t) = x_0(t)$, para $0 \leq t \leq 1$, onde x_0 é uma função dada e contínua.

Note que neste caso, o retardo r é igual a 1 e $t_0 = 1$. Para resolver isto, vamos apresentar o **Método do Passo**, o qual consiste em determinar a solução em pequenos intervalos de comprimento igual ao retardo.

Considerando a condição inicial $x(t) = x_0(t)$ definida em $[0, 1]$, sendo $x_0(t)$ uma função dada e contínua nesse intervalo, e a derivada de $x(t)$ dada por $f(t, x(t - 1))$ em $t \geq 1$, vamos determinar a solução denotada por $x_1(t)$ em $[1, 2]$, temos: $x'_1(t) = f(t, x(t - 1))$. Mas, para $1 \leq t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (t - 1) \leq 1$, assim $x_1(t - 1) = x_0(t - 1)$. Logo,

$$x'_1(t) = f(t, x_0(t - 1))$$

$$x_1(1) = x_0(1)$$

obtido quando $t = 2$.

Integrando ambos os lados da equação, muda-se a variável e integra de 0 a t e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo temos:

$$x_1(t) = x_1(1) + \int_1^t f(\zeta, x(\zeta - 1)) d\zeta.$$

Logo, pela mudança de variável, temos:

$$x_1(t) = x_0(1) + \int_0^{t-1} f(s, x_0(s - 1)) ds.$$

para $1 \leq t \leq 2$.

Para o próximo intervalo, isto é, para $2 \leq t \leq 3$, denotemos a solução por $x_2(t)$. Logo, $x'_2(t) = f(t, x_2(t-1))$. Mas para $2 \leq t \leq 3 \rightarrow 1 \leq (t-1) \leq 2$, logo $x_2(t-1) = x_1(t-1) \rightarrow x_2(2) = x_1(2)$ (obtido quando $t = 3$). Então,

$$\int_2^t x'_2(\zeta) d\zeta = \int_2^t f(\zeta, x_2(\zeta-1)) d\zeta$$

com $2 \leq \zeta \leq 3$. Logo,

$$x_2(t) = x_1(2) + \int_2^t f(\zeta, x_1(\zeta-1)) d\zeta$$

para $2 \leq \zeta \leq 3$. Por indução, conhecida a solução em $[n-1, n]$, que denotamos por x_{n-1} , determinamos a solução em $[n, n+1]$ como segue:

$$x'_n(t) = f(t, x_{n-1}(t-1))$$

$$x_n(n) = x_{n-1}(n).$$

Mas, para $n \leq t \leq n+1 \rightarrow n-1 \leq (t-1) \leq n$, logo $x_n(t-1) = x_{n-1}(t-1)$, então quando $t = n+1$ obtemos $x_n(n) = x_{n-1}(n)$. Assim,

$$\int_n^t x'_n(\zeta) d\zeta = \int_n^t f(\zeta, x_n(\zeta-1)) d\zeta.$$

Para $n \leq \zeta \leq n+1$. Portanto,

$$x_n(t) = x_{n-1}(n) + \int_n^t f(\zeta, x_n(\zeta-1)) d\zeta,$$

para $n \leq \zeta \leq n+1$. Deste modo, obtemos a função $x(t)$ como sendo:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t) \cdot \chi_{[j, j+1]}(t),$$

em que $\chi_{[j, j+1]}(t) = 1$, se $j \leq t \leq j+1$ e 0, caso contrário.

Neste processo foi imprescindível o conhecimento da solução no intervalo $[0, 1]$, não sendo suficiente conhecer o seu valor no instante $t_0 = 1$.

Façamos agora um exemplo numérico, vamos visualizar o gráfico das soluções encontradas.

Exemplo 4.8. Consideremos a equação $x'(t) = -x(t - \pi/2)$ com a condição inicial a) $x_0 = \sin t$ e b) $x_0 = \cos t$. Usando o método do passo, temos:

a) Para $t \in [0, \pi/2]$, segue que

$$x(t) = x(0) - \int_0^t x(s - \pi/2) ds = \sin(0) - \int_{-\pi/2}^{t-\pi/2} \sin(s) ds = \cos(t - \pi/2) = \sin(t).$$

Para $t \in [\pi/2, \pi]$, segue que

$$x(t) = x(\pi/2) - \int_{\pi/2}^t x(s - \pi/2) ds = \sin(\pi/2) - \int_0^{t-\pi/2} \sin(s) ds = 1 + \cos(t - \pi/2) - 1 = \sin(t).$$

Para os demais intervalos, de forma análoga obtemos $x(t) = \sin(t)$, para $t \geq 0$.

b) Para $t \in [0, \pi/2]$, segue que

$$x(t) = x(0) - \int_0^t x(s - \pi/2) ds = \cos(0) - \int_{-\pi/2}^{t-\pi/2} \cos(s) ds = 1 - \sin(t - \pi/2) + \sin(-\pi/2) = \cos(t).$$

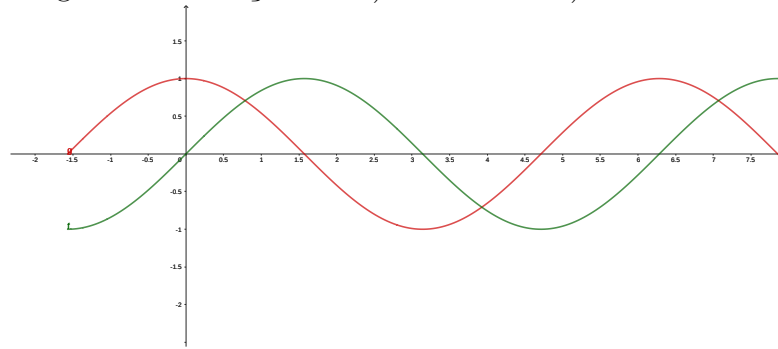
Para $t \in [\pi/2, \pi]$, segue que

$$x(t) = x(\pi/2) - \int_{\pi/2}^t x(s - \pi/2) ds = \cos(\pi/2) - \int_0^{t-\pi/2} \cos(s) ds = -\sin(t - \pi/2) = \cos(t).$$

Para os demais intervalos, de forma análoga obtemos $x(t) = \cos(t)$, para $t \geq 0$.

As soluções dos itens acima estão representadas na Figura 3.1:

Figura 4.1: Soluções de a) em verde e b) em vermelho



Fonte: Elaborada pela Autora

Observação: Pela figura observa-se que as soluções de dois PVI's distintos se interceptam em um número infinito de pontos, isto não contradiz a unicidade de soluções (diferente do caso ordinário), pois para equações com retardamento as soluções devem coincidir em algum intervalo de comprimento igual ao retardo.

Exemplo 4.9. Consideremos o modelo de Malthus com retardo $x'(t) = Kx(t-1)$. Com as seguintes condições iniciais a) $x_0 = 3t + 1$ e b) $x_0 = t^2$. Usando o método do passo, temos:

a) i) Para $t \in [0, 1]$, segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t Kx(s-1)ds = 1 + K \int_{-1}^{t-1} x(u)du = 1 + K \int_{-1}^{t-1} (3s+1)ds \\ &= 1 + K \left[3\frac{s^2}{2} + s \right]_{-1}^{t-1} = 1 + Kt \left(\frac{3t-4}{2} \right). \end{aligned}$$

ii) Para $t \in [1, 2]$, segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(1) + \int_1^t Kx(s-1)ds = 1 - \frac{K}{2} + K \int_0^{t-1} x(u)du = 1 - \frac{K}{2} + K \int_0^{t-1} \left(1 + Ks \left(\frac{3s-4}{2} \right) \right) ds \\ &= 1 - \frac{K}{2} + K \left[s + \frac{K}{2}(s^3 - 2s^2) \right]_0^{t-1} = \frac{K^2}{2}(t-1)^3 - K^2(t-1)^2 + K(t-1) - \frac{K}{2} + 1 \end{aligned}$$

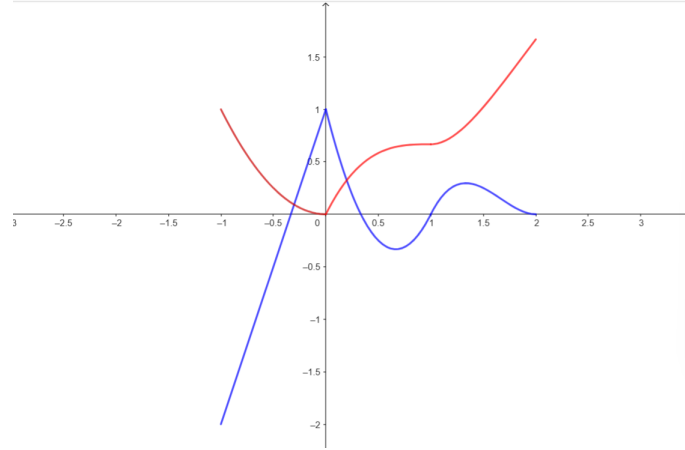
b) i) Para $t \in [0, 1]$, segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t Kx(s-1)ds = 0 + \int_{-1}^{t-1} x(u)du = K \int_{-1}^{t-1} s^2 ds \\ &= K \left[\frac{s^3}{3} \right]_{-1}^{t-1} \\ &= Kt \left(\frac{t^2 - 3t + 3}{3} \right) \end{aligned}$$

ii) Para $t \in [1, 2]$, segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= x(1) + \int_1^t Kx(s-1)ds = \frac{K}{3} + K \int_0^{t-1} x(u)du = \frac{K}{3} K \int_0^{t-1} Ks \left(\frac{s^2 - 3s + 3}{3} \right) ds \\ &= \frac{K}{3} + \frac{K^2}{3} \left[\frac{s^4}{4} - \frac{3s^3}{3} + \frac{3s^2}{2} \right]_0^{t-1} = \frac{K^2(t-1)^4}{12} - \frac{K^2(t-1)^3}{3} + \frac{K^2(t-1)^2}{2} + \frac{K}{3}. \end{aligned}$$

As soluções dos itens acima estão representadas na Figura 3.2:

Figura 4.2: Soluções de a) em azul e b) em vermelho para $K=2$ 

Fonte: Elaborada pela Autora

4.3 Definição de Estabilidade

Definição 4.10. Consideramos o sistema de equações diferenciais com retardamento não autônomo

$$x'(t) = f(t, x_t). \quad (4.7)$$

Suponha que f satisfaça a condição $f(t, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, assim $x(t) = 0$ é uma solução. A solução $x = 0$ é estável se para qualquer $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\sigma, \epsilon) > 0$ tal que $\phi \in C$ e $\|\phi\| < \delta$ implica que $\|x_t(\sigma, \phi)\| < \epsilon$, $t \geq \sigma$ onde $x(t, \sigma, \phi)$ denota a solução deste PVI. É assintoticamente estável se for estável e se existir $b(\sigma) > 0$ tal que sempre que $\phi \in C$ e $x \equiv 0$, então $x(t, \sigma, \phi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Finalmente, $x = 0$ é instável se não for estável.

A estabilidade de qualquer outra solução de (4.7) pode ser definida mudando as variáveis tal que a solução dada é a solução zero. Mais precisamente, dada uma solução $y(t)$ de (3.12) definido em $t \in \mathbb{R}$, suas propriedades de estabilidade são aquelas da solução zero de

$$z'(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t). \quad (4.8)$$

De fato, se $x(t)$ é outra solução de (3.7) e se tomarmos $z(t) = x(t) - y(t)$ então $z_t = x_t - y_t$ e z satisfaz (4.8). O caso especial em que a solução $y(t) = b$, um equilíbrio, é de interesse primário. Nesse caso, seja $b \in C$ a função constante identicamente igual a b . Então a equação (4.8), para a perturbação $z(t) = x(t) - b$, torna-se

$$z'(t) = f(t, z_t + b).$$

Observe que pela mudança de variáveis o equilíbrio $y(t) = b$ agora se torna $z'(t) = 0$.

4.4 Sistemas Lineares Autônomo

Mesmo quando se está interessado apenas em soluções de sistemas com valores reais, é útil permitir soluções de valor complexo. Portanto, nesta seção, permitimos isso modificando nosso espaço C por $C = C([-r, 0], \mathbb{C}^n)$. Uma função $L : C \rightarrow \mathbb{C}^n$ é linear se satisfaz

$$L(a\phi + b\psi) = aL(\phi) + bL(\psi), \phi, \psi \in C, a, b \in \mathbb{C}.$$

Dizemos que L é limitado se existe $K > 0$ tal que $|L(\phi)| \leq K\|\phi\|, \phi \in C$. Nosso objetivo nesta seção é considerar alguns aspectos da equação diferencial linear com retardo

$$x'(t) = L(x_t). \quad (4.9)$$

Supomos sem mais menções que L é limitado e linear.

Exemplo 4.11. Considere

$$x' = Ax(t) + Bx(t - r) \quad (4.10)$$

onde A e B são funções matriciais. Este é um caso particular de $L : C([-r, 0], \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$. Como $x_t = \phi$, portanto, $L\phi = A\phi(0) + B\phi(-r), \forall \phi \in C$. Para este L ,

$$|L(\phi)| = |A\phi(0) + B\phi(-r)| \leq |A\phi(0)| + |B\phi(-r)| \leq |A||\phi(0)| + |B||\phi(-r)|$$

Como A e B são lineares,

$$|L\phi| \leq |A| \sup_{\theta \in [-r, 0]} |\phi(\theta)| + |B| \sup_{\theta \in [-r, 0]} |\phi(\theta)|$$

Considerando que $\|\phi\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} |\phi(\theta)|$ então,

$$|L\phi| \leq |A|\|\phi\| + |B|\|\phi\| = (|A| + |B|)\|\phi\|,$$

onde $K = |A| + |B|$. Logo, L é um operador linear limitado.

No caso de mais de um retardo, temos o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^m B_j x(t - r_j), \quad (4.11)$$

onde A, B_j são matrizes e $r_j \geq 0$. A equação (4.11) é claramente um sistema autônomo, então podemos também restringir as condições iniciais para prescrever os valores de x em $[-r, 0]$:

$$x(t) = \phi(t), -r \leq t \leq 0 \quad (4.12)$$

onde $\phi \in C$.

Observação: Como L é linear e limitado, ele satisfaz uma condição global de Lipschitz

$$|L(\phi) - L(\psi)| = |L(\phi - \psi)| \leq K\|\phi - \psi\|, \forall \phi, \psi \in C, K > 0.$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, existe única solução deste PVI, dada por $x : [-r, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ definido para todo $t \geq 0$. De fato, lembremos que a $x(t, \phi)$ indica solução de

$$\begin{cases} x' = Lx_t, \\ x_0 = \phi \end{cases} \quad (4.13)$$

e $x(t, \psi)$ é solução de

$$\begin{cases} x' = Lx_t(t, \psi) \\ x_0 = \psi \end{cases} \quad (4.14)$$

Logo, se $a, b \in \mathbb{C}$, tem-se

$$y(t) = ax(t, \phi) + bx(t, \psi)$$

também é solução, pois:

$$y' = ax'(t, \phi) + bx'(t, \psi) = aLx_t(t, \phi) + bLx_t(t, \psi)$$

Como L é linear

$$= L(ax_t(t, \phi) + bx_t(t, \psi)) = Ly_t$$

O caráter linear de (3.14) implica o princípio usual de superposição: uma combinação de soluções é novamente uma solução.

Proposição 4.12. *Seja $x(t, \phi)$ a solução do PVI. Então a relação $\phi \mapsto x(t, \phi)$ é linear, isto é,*

$$x(t, a\phi + b\psi) = ax(t, \phi) + bx(t, \psi), \quad t \geq 0, \quad \phi, \psi \in C, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

4.5 Transformada de Laplace e Fórmula da Variação das Constantes

Iniciamos esta seção lembrando o conceito de Transformada de Laplace.

Definição 4.13. Seja $f(t)$ uma função definida nos reais não negativos. A transformada de Laplace de $f(t)$ é dada pela seguinte integral imprópria:

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (4.15)$$

para os valores complexos de s para os quais ela for convergente.

Seguimos a notação usual de que o F maiúsculo é a transformada de Laplace de f minúsculo.

As principais propriedades da transformada de Laplace:

a) Linearidade:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}f(t) + \beta \mathcal{L}g(t).$$

b) Transformada da derivada:

$$\mathcal{L}f'(t) = s\mathcal{L}f(t) - f(0).$$

$$\mathcal{L}f''(t) = s^2\mathcal{L}f(t) - sf(0) = f'(0).$$

c) Deslocamento no eixo s:

$$\mathcal{L}e^{at}f(t) = F(s-a).$$

d) Deslocamento no eixo t:

$$\mathcal{L}u(t-a)f(t-a) = e^{-as}F(s).$$

$$\mathcal{L}u(t-a) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

e) Teorema da convolução:

$$\mathcal{L}^{-1}(f * g)(t) = F(s)G(s),$$

onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Vamos aprofundar ao caso do problema de valor inicial não homogêneo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t), t \geq 0, x_0 = \phi \quad (4.16)$$

onde A, B são escalares, o caso de serem matrizes é tratado por analogia; e f é uma função contínua. Nosso objetivo é obter uma fórmula de variação das constantes para a equação não homogênea. Para isto, usamos da transformada de Laplace.

Onde $f : [0, \infty) \rightarrow C$ é uma função exponencialmente limitada, ou seja, $|f(t)| \leq Me^{kt}$ para algumas constantes M, k . A propriedade chave da transformada de Laplace que exploramos é que a transformação de uma convolução é o produto das transformações. Se $f, g : [0, \infty) \rightarrow C$ então sua convolução é definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

A transformada de Laplace satisfaz

$$\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s)$$

onde $F = \mathcal{L}f$ e $G = \mathcal{L}g$. Vamos exemplificar como resolver (4.16), por transformada de Laplace:

Notação: x é solução, X é $\mathcal{L}(x)$

Aplicando a transformada de Laplace em (4.16)

$$\mathcal{L}(x'(t)) = \mathcal{L}(Ax(t) + Bx(t-r) + f(t))$$

$$sX(s) - x(0) = A\mathcal{L}(x(t)) + B\mathcal{L}(x(t-r)) + \mathcal{L}(f(t))$$

$$\Rightarrow sX(s) - \phi(0) = AX(s) + B\left[\int_0^\infty e^{-st}x(t-r)dt\right] + F(s)$$

$$sX(s) - \phi(0) = AX(s) + B\left[\int_0^r e^{-st}\phi(t-r)dt + \int_r^\infty e^{-st}x(t-r)dt\right] + F(s)$$

$$\begin{aligned}
&= AX(s) + B\left[\int_0^r e^{-st}\phi(t-r)dt + \int_0^\infty e^{-s(u+r)}x(u)du\right] + F(s) \\
&= AX(s) + B\left[\int_0^r e^{-st}\phi(t-r)dt + e^{-sr} \int_0^\infty e^{-su}x(u)du\right] + F(s).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
sX(s) - \phi(0) &= AX(s) + B\left[\int_0^r e^{-st}\phi(t-r)dt + e^{-sr}X(s)\right] + F(s) \\
&= [A + e^{-sr}B]X(s) + B\Phi(s) + F(s)
\end{aligned}$$

onde $\Phi = \mathcal{L}(\phi(\cdot - r))$, onde ϕ pode ser igual a zero. Note que

$$\begin{aligned}
sX(s) &= [A + e^{-sr}B]X(s) + \phi(0) + B\Phi(s) + F(s) \\
\Rightarrow X(s)[s - A - e^{-sr}B] &= \phi(0) + B\Phi(s) + F(s) \\
X(s) &= \frac{1}{s - A - e^{-sr}B} \cdot [\phi(0) + B\Phi(s) + F(s)] \\
\Rightarrow X(s) &= K(s)[\phi(0) + B\Phi(s) + F(s)] \tag{4.17}
\end{aligned}$$

onde

$$K(s) = (s - A - e^{-sr}B)^{-1}.$$

Como queremos obter $x(t)$, a ideia é usar a propriedade de convolução já que obtemos a relação (4.17) que envolve produto de duas funções. Precisamos encontrar a transformada inversa de K , isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}(K(s)) = k(t).$$

Para fazer uso do resultado da convolução, precisamos saber a transformada inversa k de K . Em vista dos cálculos acima, vemos que k é a solução de (4.17), com $f = 0$, para as condições iniciais:

$$\begin{cases} \xi(\theta) = 1, \theta = 0 \\ 0, -r \leq \theta < 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Note que para $f = 0$, podemos considerar o PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bx(t-r) \\ x_0 = \xi \end{cases} \tag{4.19}$$

com

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 1, \theta = 0 \\ 0, -r \leq \theta < 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Mostremos que $k = \mathcal{L}^{-1}(K)$ é solução deste PVI. Aplicando a transformada nesta última equação e usando que $\xi(0) = 1$, obtemos o resultado: Como a equação

$$x' = Ax(t) + Bx(t-r)$$

possui solução $\forall t \geq 0$, pelo Teorema de Existência e Unicidade, para $t \in [0, r]$, tem-se $t-r \in [-r, 0]$. Logo, a equação se reduz

$$x' = Ax(t),$$

cujas soluções são dadas por $k(t) = e^{At}$, $t \in [0, r]$. Apesar da descontinuidade de ξ em zero, o método do passo prontamente estabelece que a solução k existe para $t \geq 0$. De fato,

$$k(t) = e^{At}, 0 \leq t < r$$

e satisfaz o problema do valor inicial:

$$x'(t) = Ax(t) + Be^{A(t-r)}, x(r) = e^{Ar}, r \leq t < 2r.$$

Não é difícil ver que k é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t \geq r$, duas vezes continuamente diferenciável para $t \geq 2r$, e assim por diante. A solução k é chamada de solução fundamental de (3.16). Usando o método do passo, para $t \in [r, 2r]$, a equação se torna

$$x'(t) = Ax(t) + Be^{A(t-r)}, x(r) = e^{Ar}.$$

Embora a ξ seja descontínua em zero, a função k , obtida por integração, é contínua $\forall t \geq 0$ e para $t \geq r$, k é de Classe C^1 . A solução k é denominada solução fundamental de (3.16) (em analogia com EDO, k é solução da equação linear homogênea associada a não homogênea).

Proposição 4.14. *Estendendo o princípio da superposição para*

$$x_0(t) = L(x_t) + f(t) \quad (4.21)$$

podemos ver que a solução de (4.21), pode ser expressa como $x(t) = x(t; \phi, f) = x(t; \phi, 0) + x(t; 0, f)$ onde $x(t; \phi, 0)$ é uma solução de $x'(t) = L(x_t)$, $x(t) = \phi(t)$ e $x(t; 0, f)$ é uma solução de (4.21) correspondente a condições iniciais nulas.

De acordo com a última proposição, podemos expressar a solução de (4.21) como

$$x(t) = x(t; \phi, f) = x(t; \phi, 0) + x(t; 0, f)$$

onde a primeira parcela é solução da homogênea com $x_0 = \phi$. Chegamos

$$X(S) = K(S)[\phi(0) + B\Phi(S) + F(S)]$$

quando a condição inicial é nula, obtemos

$$X(S) = K(S).F(S)$$

$$\mathcal{L}(X(t)) = \mathcal{L}(k(t)).\mathcal{L}(f(t)).$$

Pela propriedade de convolução

$$x(t, 0, f) = k * f(t) = \int_0^t k(t - \tau)f(\tau)d\tau.$$

De forma similar

$$x(t; \phi, 0) = k(t)\phi(0) + \int_0^t k(t - \tau)B\phi(\tau - r)d\tau.$$

A menos de notação essas fórmulas são válidas para casos matriciais para A e B e soluções vetoriais. Em vista dos nossos cálculos acima e da lei de convolução da transformada de Laplace, temos

$$x(t; 0, f) = \int_0^t k(t - \tau)f(\tau)d\tau. \quad (4.22)$$

Pode ser verificado diretamente que (4.22) concorda com $x(t; 0, f)$. Argumentos semelhantes levam a

$$x(t; \phi, 0) = k(t)\phi(0) + \int_0^t k(t-\tau)B\phi(\tau-r)d\tau. \quad (4.23)$$

Estas fórmulas são válidas com pequenas alterações no caso de (3.16) ser um sistema vetorial com matrizes A, B . Neste caso,

$$K(s) = (sI - A - e^{-sr}B)^{-1}$$

é uma função com valor de matriz, I sendo a matriz identidade e, portanto, K também é identidade. As condições iniciais também são válidas para matrizes substituindo 1 pela matriz identidade I .

A solução obtida para a matriz k é a solução fundamental da matriz neste caso.

4.6 A Equação Característica

O principal resultado desta seção diz respeito à estabilidade da solução $x = 0$ de $x'(t) = Lx_t$.

Buscamos soluções exponenciais de $x'(t) = L(x_t)$ da forma

$$x(t) = e^{\lambda t}v, v \neq 0,$$

onde λ é complexo e v é um vetor cujos componentes são complexos. É útil ter a notação $\exp_\lambda$ para a função contínua definida em $[-r, 0]$ por $\exp_\lambda(\theta) = e^{\lambda\theta}$. Usando-a, vemos que x_t é correspondente a $x(t)$ e $x_t(\theta) = e^{\lambda t}(\exp_\lambda(\theta))v$ pois

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) = e^{\lambda(t+\theta)}v = e^{\lambda t}\exp_\lambda(\theta)v.$$

Para $x(t)$ ser uma solução, devemos ter

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = L(x_t) = e^{\lambda t}L(\exp_\lambda(\theta)v)$$

ou

$$\lambda v = L(\exp_\lambda v).$$

Escrevendo $v = \sum_j v_j e_j$ onde $(e_j)_j$ é a base canônica para $\mathbb{C}^n$, então $L(\exp_\lambda v) = \sum_j v_j L(\exp_\lambda e_j)$. Defina L_λ como a matriz $n \times n$

$$L_\lambda = (L_1(\exp_\lambda e_1) | L_2(\exp_\lambda e_2) | \dots | L_n(\exp_\lambda e_n)) = (L_i(\exp_\lambda e_j)),$$

onde $L_i(\phi)$ é a componente i de $L(\phi)$. Então $L(\exp_\lambda v) = L_\lambda v$ e vemos que $x(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução diferente de zero de $x'(t) = Lx_t$ se λ for uma solução da equação característica:

$$\det(\lambda I - L_\lambda) = 0. \quad (4.24)$$

Neste caso, $v \neq 0$ deve pertencer ao núcleo de $\lambda I - L_\lambda$.

Nos referimos a uma solução $\lambda \in \mathbb{C}$ de (4.24) como uma raiz característica. Para o caso especial (3.10), a equação característica é

$$\det[\lambda I - A - e^{-\lambda r} B] = 0. \quad (4.25)$$

Se A e B são matrizes 2×2 , (4.25) pode ser expressa como $P(\lambda, e^{-r\lambda}) = 0$ onde $P(z, w)$ é um polinômio quadrático em (z, w) :

$$\lambda^2 - (tr(A))\lambda + \det(A) + e^{-2r\lambda} \det(B) + e^{-r\lambda}[C - \lambda(tr(B))] = P(z, w) \quad (4.26)$$

A justificativa dessa substituição se dá ao fato de que $x(t) = e^{\lambda t}v$ e $\exp_\lambda(\theta) = e^{\lambda\theta}$ para $\theta \in [-r, 0]$. Logo,

$$\begin{aligned} x_t(\theta) &= x(t + \theta) = e^{\lambda(t+\theta)}v \\ &= e^{\lambda t}e^{\lambda\theta}v \\ &= e^{\lambda t}\exp_\lambda(\theta)v. \end{aligned}$$

Derivando temos:

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}v$$

que é solução de $L(x_t)$, que é igual a $L(e^{\lambda t}\exp_\lambda v)$, como L é linear,

$$\begin{aligned} &= e^{\lambda t}L(\exp_\lambda v). \\ \Rightarrow \lambda e^{\lambda t}v - e^{\lambda t}L(\exp_\lambda v) &= 0 \\ [\lambda I - L(\exp_\lambda)]v &= 0 \end{aligned}$$

Queremos $v \neq 0$, portanto

$$\det(\lambda I - L_\lambda) = 0.$$

Logo, v deve pertencer ao núcleo do operador $\lambda I - L_\lambda$. Aqui, $\det(A)$ denota o determinante de A , $tr(A)$ denota seu traço e $(a^1|b^2)$ denota a matriz com a primeira coluna de A e a segunda coluna de B . Não é difícil ver que (4.26) pode ser expresso como $P(\lambda, e^{-r\lambda}) = 0$ onde $P(z, w)$ é um polinômio de grau n em (z, w) no caso geral $n \geq 2$. A primeira observação é que h , definida por $h(\lambda) = \det(\lambda I - L_\lambda)$, é uma função analítica definida para todo $\lambda \in C$, isto é, uma função inteira.

Voltando para o caso geral vamos denotar $h(\lambda) = \det(\lambda I - L_\lambda)$ e, a seguir mostraremos que h é uma função inteira.

Proposição 4.15. *A função $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(\lambda) = \det(\lambda I - L_\lambda)$ é uma função inteira.*

Demonstração. Lembrando a expressão matricial de L_λ e sabendo que soma e produto de funções analíticas são também funções analíticas, basta estudar a diferenciabilidade de cada vetor coluna de L_λ . Para isto denote

$$g(\lambda) = L(\exp_\lambda)v \in \mathbb{C}^n$$

e mostraremos que g é derivável em $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos que verificar se existe

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(\lambda + z) - g(\lambda)}{z} \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Logo,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(\lambda + z) - g(\lambda)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} [Le^{(\lambda+z)\theta}v - Le^{\lambda\theta}v]$$

Como L é linear

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(\lambda + z) - g(\lambda)}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} [Le^{(\lambda+z)\theta}v - Le^{\lambda\theta}v] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} L(e^{(\lambda+z)\theta}v - e^{\lambda\theta}v) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} L(e^{\lambda\theta} \frac{(e^{\theta z} - 1)v}{z}). \end{aligned}$$

L é linear e contínua, logo

$$= L(e^{\lambda\theta}v \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda 0}}{z} \right)) = L(e^{\lambda\theta}\lambda v) = L(\exp_{\lambda}\lambda v).$$

□

A seguir enunciaremos uma proposição necessária envolvendo propriedades de funções inteiras, cuja prova omitiremos, para a prova deste resultado consulte [9].

Proposição 4.16. *Seja $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira, então*

- i) Cada raiz característica tem ordem finita.*
- ii) Existem no máximo uma quantidade enumerável de raízes características.*
- iii) O conjunto $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das raízes características não possui ponto de acumulação finito.*

Proposição 4.17. *a) Dado $\sigma \in \mathbb{R}$, existem no máximo uma quantidade finita de raízes características satisfazendo $\operatorname{Re}(\lambda) > \sigma$.*

b) Se existem uma quantidade infinita de raízes características $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então

$$\operatorname{Re}(\lambda_n) \rightarrow -\infty,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. a) Suponha por contradição que existem infinitas raízes características (λ_j) satisfazendo $\operatorname{Re}(\lambda_j) > \sigma; \forall j \in \mathbb{N}$. Pelo item (iii) da proposição 3.17 devemos ter $|\lambda_j| \rightarrow +\infty$, quando $j \rightarrow \infty$. Como λ_j é raiz característica, temos

$$\det(\lambda_j I - L_{\lambda_j}) = 0$$

Logo,

$$C_j = I - \frac{1}{\lambda_j} L_{\lambda_j} \tag{4.27}$$

é uma matriz singular para j suficientemente grande. Fazendo $j \rightarrow \infty$ em (4.27), obtemos

$$C_j \rightarrow I,$$

pois

$$|L(\exp_{\lambda_j} v)| = |L(e^{\lambda_j \theta} v)|$$

E como vale $|L\phi| \leq K\|\phi\|$, $\phi \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned} |L(e^{\lambda_j \theta} v)| &\leq K\|e^{\lambda_j \theta} v\| \\ &\leq K\|v\| \sup\{\|e^{\lambda_j \theta}\|, \theta \in [-r, 0]\} \\ &\leq K\|v\| \sup\{e^{\sigma \theta}, \theta \in [-r, 0]\} = K\|v\| \max\{e^{\sigma \theta}, \theta \in [-r, 0]\}. \end{aligned}$$

Portanto, $L(e^{\lambda_j \theta} v)$ é limitado independente de j , por isso $\frac{1}{\lambda_j} L(e^{\lambda_j \theta} v) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$. Por outro lado, pela continuidade da função determinante tem-se $\det C_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$. Isso gera uma contradição pois $\det I = 1$.

A prova do item b) é uma consequência direta do item a). $\square$

As raízes da equação característica acontecem em pares conjugados, o que prova o próximo resultado.

Proposição 4.18. *Seja $L : C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Então λ é uma raiz característica de L_λ se, e só se, $\bar{\lambda}$ é uma raiz característica de L .*

Demonstração. Como $\overline{e^\lambda} = e^{\bar{\lambda}}$, para $\lambda \in \mathbb{C}$ e para λ uma raiz característica tem-se

$$\det(\lambda I - L_\lambda) = 0,$$

então

$$\begin{aligned} \overline{\det(\lambda I - L_\lambda)} &= \bar{0} = 0 \\ \Rightarrow \det(\bar{\lambda} I - \bar{L}_\lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \det(\bar{\lambda} I - \bar{L}_\lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \det(\bar{\lambda} I - L_{\bar{\lambda}}) &= 0, \end{aligned}$$

para justificar essa última igualdade, vamos olhar para as colunas de L_λ , isto é,

$$\overline{L(\exp_{\lambda} e_j)} = L(\overline{\exp_{\lambda} e_j}) = L(e^{\bar{\lambda} \theta} e_j) = L(e^{\bar{\lambda} \theta} e_j)$$

Portanto, $\bar{\lambda}$ é raiz característica. A recíproca segue os mesmos passos. $\square$

Com esses resultados anteriores podemos enunciar um resultado de estabilidade da solução nula do sistema $x'(t) = L(x_t)$.

Teorema 4.19. *Suponha $\operatorname{Re}(\lambda) < \mu$ para toda raiz característica λ . Então existe $K > 0$ tal que*

$$|x(t, \phi)| \leq K e^{\mu t} \|\phi\|, t \geq 0 \quad \phi \in C,$$

onde $x(t, \phi)$ é solução de $x'(t) = L(x_t)$, com condição inicial $x_0 = \phi$. Em particular, $x = 0$ é assintoticamente estável para $x'(t) = L(x_t)$, se $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ para qualquer raiz característica λ . Se existir uma raiz característica com parte real positiva a solução é instável.

A prova desse resultado pode ser encontrada na referência [7].

Exemplo 4.20. Para a equação $x'(t) = Ax(t) + Bx(t - r)$, usando a representação $x(t; 0, f) = k(t)\phi(0) + \int_0^t k(t - \tau)B\phi(\tau - r)d\tau$, basta usar

$$|k(t)| \leq Ke^{\mu t}, t \geq 0.$$

Pois se isso valer, tem-se

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |k(t)|\phi(0) + \int_0^t |k(t - \tau)||B||\phi(t - \tau)|d\tau \\ &\leq Ke^{\mu t}|\phi| + \int_0^t Ke^{\mu(t-\tau)}|B||\phi|d\tau \\ &= K|\phi|(e^{\mu t} + |B| \int_0^t e^{\mu t} \cdot e^{-\mu \tau} d\tau) \\ &= K|\phi|e^{\mu t}(1 + |B| \int_0^t e^{-\mu \tau} d\tau), \end{aligned}$$

onde $k = \mathcal{L}^{-1}(K)$.

Uma implicação importante da proposição (3.18) é que existe $\sigma \in \mathbb{R}$ e um conjunto finito de “raízes características dominantes” tendo parte real máxima igual a σ com todas as outras raízes tendo parte real estritamente menor que σ . Nas aplicações, raízes características complexas sempre vêm em pares conjugados.

Proposição 4.21. *Suponha que a transformação L leva funções reais em vetores no $\mathbb{R}^n$, isto é, $L(C([-r, 0], \mathbb{R}^n)) \subset \mathbb{R}^n$. Então λ é uma raiz característica se, e somente se, $\bar{\lambda}$ é uma raiz característica.*

Demonstração. As hipóteses implicam que $\overline{L(\phi)} = L(\bar{\phi})$, pois

$$\overline{L(u + iv)} = \overline{Lu + iLv} = Lu - iLv = L(u - iv) = L(\overline{u + iv}).$$

Como $\overline{e^\lambda} = e^{\bar{\lambda}}$ temos $\overline{L(\exp_\lambda e_j)} = L(\overline{\exp_\lambda e_j}) = L(\exp_{\bar{\lambda}} e_j)$, implicando que $\overline{L\lambda} = L_{\bar{\lambda}}$. Portanto, se λ é uma raiz, então

$$0 = \overline{\det(\lambda I - L\lambda)} = \det(\bar{\lambda} I - \overline{L\lambda}) = \det(\bar{\lambda} I - L_{\bar{\lambda}})$$

então $\bar{\lambda}$ é uma raiz. □

4.7 Princípio da Estabilidade Linear

Considere a equação diferencial funcional não linear autônoma

$$x'(t) = f(x_t). \quad (4.28)$$

Então $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ é uma solução de estado estacionário de (4.28) se, e somente se,

$$f(x_0) = 0,$$

onde $x_0 \in C$ é a função constante igual a x_0 .

Se $x(t)$ é uma solução de (4.28) e

$$x(t) = x_0 + y(t)$$

então $y(t)$ satisfaz

$$y'(t) = f(x_0 + y_t) \quad (4.29)$$

Queremos entender o comportamento das soluções de (4.28) que começam perto de x_0 e para isso, é suficiente entender o comportamento das soluções de (4.29) para soluções que começam perto de $y = 0$. Assumimos que

$$f(x_0 + \phi) = L(\phi) + g(\phi), \quad \phi \in C \quad (4.30)$$

onde $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função linear limitada e $g : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de “ordem superior” no sentido de que

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{|g(\phi)|}{\|\phi\|} = 0. \quad (4.31)$$

Isso significa que para cada $\mu > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\phi\| \leq \delta \Rightarrow |g(\phi)| \leq \mu \|\phi\|.$$

O sistema linear

$$z'(t) = L(z_t) \quad (4.32)$$

é chamado de equação linearizada (ou variacional) em torno do equilíbrio x_0 . Devemos vê-lo no espaço complexo $C = C([-r, 0], \mathbb{C}^n)$.

Omitiremos a prova do próximo e importante resultado por necessitar de outras ferramentas matemáticas que não foram abordadas neste trabalho.

Teorema 4.22. *Seja $\Delta(\lambda) = 0$ a equação característica correspondente a (4.32) e suponha que*

$$-\sigma := \max_{\delta(\lambda)=0} R(\lambda) < 0.$$

Então x_0 é um estado estacionário localmente assintoticamente estável de (4.28). Isto é, existe $b > 0$ tal que

$$\|\phi - x_0\| < b \Rightarrow \|x_t(\phi) - x_0\| \leq \|\phi - x_0\| e^{-\sigma t/2}, \quad t \geq 0.$$

Se $R(\lambda) > 0$ para alguma raiz característica, então x_0 é instável.

A prova deste resultado pode ser encontrada em [9].

Considere o caso especial de (4.28)

$$x'(t) = F(x(t), x(t-r)), \quad (4.33)$$

onde assumimos que $F : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável e $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Se $F(x_0, x_0) = 0$ para algum $x_0 \in D$, então $x(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$ é uma solução de equilíbrio. Então $f(\phi) = F(\phi(0), \phi(-r))$ se torna

$$f(x_0 + \phi) = A\phi(0) + B\phi(-r) + G(\phi(0), \phi(-r)),$$

onde $A = f_x(x_0, x_0), B = f_y(x_0, x_0)$. Segue-se que o sistema linearizado sobre $x = x_0$ para (4.33) é

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-r). \quad (4.34)$$

Exemplo 4.23. Considere o modelo de crescimento bacteriano padrão em um quimiostato com retardo para obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = D(S_0 - S(t)) - \frac{v_m S(t)}{C_h + S(t)} x(t) \\ x'(t) = \exp(-D\tau) \frac{Y v_m S(t-\tau)}{C_h + S(t-\tau)} x(t-\tau) - Dx(t) \end{cases} \quad (4.35)$$

Como ilustração do uso do Teorema (3.23), considere a seguinte versão em escala de (4.35)

$$S'(t) = 1 - S(t) - f(S(t))x(t) \quad (4.36)$$

$$x'(t) = e^{-r} f(S(t-r))x(t-r) - x(t)$$

onde $f(S) = mS/(a+S)$ e $x, S \geq 0$. Equilíbrios não negativos consistem no “estado de washout”¹ $(S, x) = (1, 0)$ e, se $f(1) > e^r$, o “estado de sobrevivência” $(S, x) = (\bar{S}, \bar{x})$, onde $f(\bar{S}) = e^r$ e $\bar{x} = (1 - \bar{S})e^{-r}$. Note que $\bar{x} > 0$. As matrizes A e B , como em (4.36), em um ponto genérico (S, x) são dadas por

$$A = \begin{pmatrix} -1 - xf'(S) & -f(S) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = e^{-r} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f'(S)x & f(S) \end{pmatrix}$$

Assim $\lambda^2 - (tr(A))\lambda + \det(A) + e^{-2r\lambda} \det(B) + e^{-r\lambda}[C - \lambda(tr(B))]$ se torna

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1 + xf'(S) - e^{-r} f(S)e^{-\lambda r}) = 0.$$

Na forma fatorada, vê-se que $\lambda = -1$ é raiz, o outro fator leva a

$$\lambda = -1 - xf'(S) + e^{-r} f(S)e^{-\lambda r}. \quad (4.37)$$

Vamos usar a e b para os coeficientes em $\lambda = A + Be^{-\lambda r}$ porque A e B estão em uso aqui como matrizes. Para o estado de washout, descobrimos que $a = -1$ e $b = e^{-r} f(1)$. Portanto, $a + b = -1 + e^{-r} f(1)$ e $b > a$. Isso implica que o estado de washout é assintoticamente estável quando $e^{-r} f(1) < 1$, mas instável se $e^{-r} f(1) > 1$, quando o estado de sobrevivência existe. Para o estado de sobrevivência, $a = -1 - \bar{x}f'(\bar{S})$ e $b = 1$, então $a + b < 0$ e $b > a$. Portanto, o estado de sobrevivência é assintoticamente estável quando existe. Veja a referência [7] para maiores detalhes.

¹O washout period é o tempo necessário para que uma substância seja completamente eliminada do organismo de um indivíduo

4.8 A Equação Escalar

Nesta seção, faremos uma análise mais completa das raízes características associadas à equação (3.10) no caso de A e B serem escalares reais. Vamos novamente considerar

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-r). \quad (4.38)$$

Substituindo $x(t) = e^{\lambda t}$ em (4.38), obtemos:

$$\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda(t-r)},$$

$$\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t} e^{-\lambda r}.$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$,

$$\lambda = A + Be^{-\lambda r}, \quad (4.39)$$

logo, $\lambda r = Ar + Bre^{-\lambda r}$. Vamos chamar $z = r\lambda$, $\alpha = Ar$ e $\beta = Br$ para obter:

$$z = \alpha + \beta e^{-z}. \quad (4.40)$$

Com $z \in \mathbb{C}$, se escrevermos $z = x + iy$ e substituindo em (4.40), temos:

$$x + yi = \alpha + \beta e^{-x}(\cos y - i \sin y).$$

Ou seja,

$$x + yi = \alpha + \beta e^{-x} \cos y - i\beta e^{-x} \sin y$$

Separando a parte real e imaginária temos:

$$\begin{cases} 0 = x - \alpha - \beta e^{-x} \cos(y) \\ 0 = y + \beta e^{-x} \sin(y). \end{cases}$$

Defina a função de variável complexa

$$F(z) = z - \alpha - \beta e^{-z}, z \in \mathbb{C}.$$

Note que $F'(z) = 1 + \beta e^{-z}$ e $F''(z) = -\beta e^{-z} \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Assim, $z = 0$ é solução de $F(z) = 0$ quando $\alpha + \beta = 0$.

Também, vemos que $z = 0$ é raiz dupla, isto é, $F(0) = 0$ e $F'(0) = 0$ quando $1 + \beta = 0$, ou seja, $b = -1$ e $\alpha = 1$.

Verifiquemos se existem outras raízes duplas, isto é, se existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\begin{cases} z - \alpha - \beta e^{-z} = 0 \\ 1 + \beta e^{-z} = 0 \end{cases}$$

Da segunda igualdade, tem-se $\beta e^{-z} = -1$ e substituindo na primeira igualdade, tem-se $z = \alpha - 1$. Substituindo agora esse valor na segunda equação, tem-se para $\beta < 0$

$$1 + \beta e^{-\alpha+1} = 0 \Rightarrow \beta = e^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow |\beta| = e^{\alpha-1} \Rightarrow \ln|\beta| = \alpha - 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \ln|\beta| + 1.$$

Não existem raízes com multiplicidade maior que 2.

Podemos olhar a função F , como função de três variáveis, $(z, \alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ou seja,

$$F(z, \alpha, \beta) = z - \alpha - \beta e^{-z}$$

A ideia é utilizar o Teorema das Funções Implícitas (T.F.I) para escrevermos a variável z como função dos parâmetros α e β . Note que:

i) $F_z(z, \alpha, \beta) = 1 + \beta e^{-z}$ é uma função inteira e, portanto, contínua.

ii) Se $F(z_0, \alpha_0, \beta_0) = 0$ e $F_z(z_0, \alpha_0, \beta_0) \neq 0$ então o T.F.I. garante que existem uma vizinhança U de z_0 e uma vizinhança V de (α_0, β_0) e uma função $g : V \rightarrow U$ tal que:

$$a) g(\alpha_0, \beta_0) = z_0$$

$$b) F(g(\alpha, \beta), \alpha, \beta) = 0, \forall (\alpha, \beta) \in V$$

$$c) (z, \alpha, \beta) \in U \times V \text{ tal que } F(z, \alpha, \beta) = 0, \text{ tem que } z = g(\alpha, \beta).$$

Portanto, podemos afirmar que para raízes simples da equação característica, isto é, $F(z_0, \alpha_0, \beta_0) = 0$, existe raiz $z = z(\alpha, \beta)$ para (α, β) próximos de (α_0, β_0) .

Verifiquemos que existe uma raiz imaginária pura, ou seja, $z = iy$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\alpha - \beta \cos y = 0 \\ y + \beta \sin y = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Que implica em

$$\begin{cases} \alpha = -\beta \cos y \\ y = -\beta \sin y \end{cases} \quad (4.42)$$

Da segunda equação de (4.42)

$$\beta = \frac{-y}{\sin y}$$

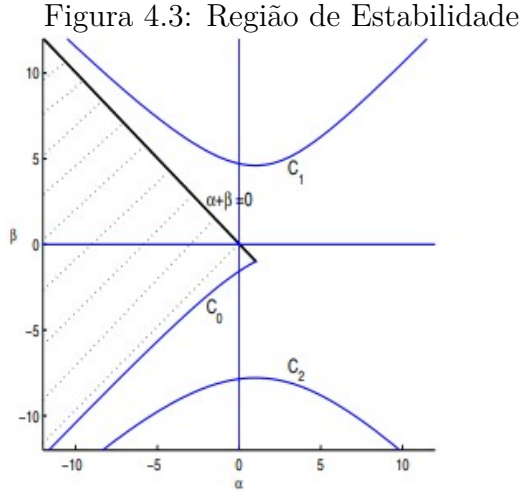
Substituindo na primeira equação

$$-\alpha + y \frac{\cos y}{\sin y} = 0$$

Como as raízes vêm em pares conjugados complexos, podemos restringir $y \geq 0$. Observe que a curva é bem definida em $y = 0$ onde $(\alpha, \beta) = (1, -1)$, que coincide com os valores de parâmetros nos quais $z = 0$ é uma raiz dupla. Denotamos por

$$C_0 := \left\{ (\alpha, \beta) = \left(y \frac{\cos(y)}{\sin(y)}, \frac{-y}{\sin(y)} \right), 0 < y < \pi \right\}$$

a curva ao longo da qual $z = \pm iy, 0 < y < \pi$ são raízes, a qual está representada na Figura 3.3.



Fonte:[7]

É simples ver que

$$\frac{d\alpha}{dy} = \cotg y - y \csc^2 y, \quad \frac{d\beta}{dy} = \csc y [1 + y \cotg y], \quad 0 < y < \pi.$$

Logo,

$$\frac{d\alpha}{dy} < 0, \quad \frac{d\beta}{dy} < 0, \quad 0 < y < \pi,$$

então ambos $\alpha(y), \beta(y)$ diminuem com o aumento de y . Começando de $(1, -1)$ quando $y = 0, (\alpha(y), \beta(y))$ encontra o eixo β em $(0, -\pi/2)$ quando $y = \pi/2$. Ele então entra no terceiro quadrante e se aproxima de $(-\infty, -\infty)$ de baixo e tangente à reta $\alpha = \beta$ como $y \rightarrow \pi$ porque $\frac{\alpha}{\beta} = -\cos(y) \rightarrow 1$ enquanto ambos $\alpha, \beta \rightarrow -\infty$ como $y \rightarrow \pi$. Também precisamos considerar as curvas

$$C_n := \left\{ (\alpha, \beta) = \left(y \frac{\cos(y)}{\sin(y)}, \frac{-y}{\sin(y)} \right), n\pi < y < (n+1)\pi \right\}, n \geq 1,$$

onde $z = \pm iy, n\pi < y < (n+1)\pi$ são raízes.

Observe que $(-1)^n \sin(y) > 0$ em $n\pi < y < (n+1)\pi$ então $(-1)^{n+1} \beta > 0$ em C_n mas α muda de sinal em $y = n\pi + \pi/2$.

Em $C_n, \frac{d\alpha}{dy} < 0$ mas $\frac{d\beta}{dy}$ muda de sinal em $(n\pi, (n+1)\pi)$ onde $\tan(y) = y$, porque $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1}{\cos(y)}, \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| > 1$ em C_n implicando que $C_1, C_3, \dots$ ficam estritamente acima do gráfico de $\beta = |\alpha|$ e $C_2, C_4, \dots$ ficam estritamente abaixo do gráfico de $\beta = -|\alpha|$.

Pode verificar-se que C_{2n+1} está estritamente acima de C_{2n-1} para $n = 1, 2, \dots$ e que $C_{2(n+1)}$ está estritamente abaixo de C_{2n} para $n = 1, 2, \dots$.

C_n nunca encontra C_0 , a reta $\alpha + \beta = 0$, nem a região aberta delimitada por essas duas curvas.

Seja

$$R(\alpha, \beta) = \{z \in C : \mathbb{R}(z) > 0, F(z, \alpha, \beta) = 0\}$$

o conjunto de “raízes instáveis” para o par de parâmetros dado (α, β) e seja

$$I = \{(\alpha, \beta) : F(iy, \alpha, \beta) = 0\}$$

para algum y real

$$= \left\{ (\alpha, \beta) : \alpha + \beta = 0 \right\} \cup \left\{ (\cup_{n \geq 0} C_n) \right\}$$

o conjunto de parâmetros onde raízes imaginárias puras ou nulas existem. Finalmente, defina

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{z \in R(\alpha, \beta)} \text{ordem da raiz } z$$

que conta as “raízes instáveis” de acordo com a multiplicidade. Esta é uma soma finita de acordo com a proposição abaixo. Mostramos que Z é contínuo, exceto possivelmente em pontos (α, β) onde $F(z, \alpha, \beta) = 0$ tem raízes imaginárias puras ou nulas; Fig 3.3.

A função de valor inteiro $Z(\alpha, \beta)$ é contínua em todos os pontos (α, β) que não pertencem ao conjunto fechado I . Consequentemente, Z é constante nas componentes conexas do complemento de I .

Demonstração. Seja $z = x + iy$ com $x = R(z) \geq 0$ em termos de α e β uma raiz qualquer. De (3.40) vemos que tal raiz deve satisfazer

$$0 \leq |x| \leq |\alpha + \beta e^{-x} \cos y| \leq |\alpha| + |\beta e^{-x} \cos y| \leq |\alpha| + |\beta|$$

e

$$0 \leq |y| = |\beta e^{-x} \sin y| \leq |\beta|$$

logo,

$$0 \leq |x| \leq |\alpha| + |\beta|, |y| \leq |\beta|.$$

Agora fixe (α_0, β_0) em I^c . Como o complemento de I é aberto, podemos encontrar uma bola fechada B_0 centrada em (α_0, β_0) tão pequena que B_0 não intercepta I . Pela estimativa acima, podemos encontrar $M > 0$ tal que qualquer raiz $z = x + iy$ com $x > 0$ correspondendo a qualquer $(\alpha, \beta) \in B_0$ satisfaz $x, |y| \leq M$. Assim, qualquer raiz desse tipo fica dentro da curva fechada simples γ , orientada no sentido anti-horário, delimitando o retângulo $R := [0, 2M] \times [-2M, 2M]$ no plano complexo.

Portanto, para $(\alpha, \beta) \in B_0$

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{z \text{ dentro de } \gamma} \text{ordem da raiz } z$$

Além disso, não há raízes de $F(z, \alpha_0, \beta_0) = 0$ em γ em si porque (α_0, β_0) não pertence a I . Ao diminuir o raio da bola fechada B_0 , se necessário, podemos assumir que para z em γ :

$$|F(z, \alpha, \beta) - F(z, \alpha_0, \beta_0)| < \min_{z \in \gamma} \left[|F(z, \alpha_0, \beta_0)|, (\alpha, \beta) \in B_0 \right]$$

Note que o mínimo é positivo porque $F(z, \alpha_0, \beta_0) \neq 0$ para $z \in \gamma$. Pelo Teorema de Rouché, segue que $Z(\alpha, \beta) = Z(\alpha_0, \beta_0)$ para todo $(\alpha, \beta) \in B_0$. Isso prova a continuidade de Z . Seja J um componente conexo do complemento de I . Então $Z : J \rightarrow (0, 1, 2, \dots)$ é uma função contínua e J é conexo, então sua imagem $Z(J)$ deve ser um subconjunto conexo dos inteiros não negativos. Então deve ser um único inteiro. $\square$

Proposição 4.24. *Todas as raízes de (3.40) têm $R(z) < 0$ para (α, β) pertencente à região aberta limitada abaixo pela curva C_0 e limitada acima pela curva $(\alpha, \beta) : \beta = -\alpha, \alpha \leq 1$ que se encontram em $(\alpha, \beta) = (1, -1)$. Veja a Figura 3.3. Pelo menos uma raiz satisfaz $R(z) > 0$ para (α, β) pertencente à região complementar aberta à direita.*

Demonstração. Vamos denotar por AS a região aberta conexa limitada por C_0 e parte da reta $\beta = -\alpha$ no plano (α, β) . A função de valor inteiro Z é contínua em AS pela (4.24). Portanto, deve ser constante porque $F(z, -1, 0) = z + 1 = 0$ se e somente se $z = -1$, sabemos que $Z(-1, 0) = 0$ então segue que $Z = 0$ em AS . Não há raízes imaginárias puras ou raízes zero em AS , portanto, mostramos que $R(z) < 0$ para cada raiz quando $(\alpha, \beta) \in AS$.

Considere a componente conexa do complemento de I limitada abaixo pela linha $\alpha + \beta = 0$ e limitada acima por C_1 . Como $F(z, \alpha, 0) = z - \alpha$ segue que $Z(\alpha, 0) = 1$ para $\alpha > 0$ e portanto $Z = 1$ em todo esse componente.

Agora mostramos que ao cruzar a fronteira de AS através de um ponto $(\alpha_0, \beta_0) = (\alpha(y_0), \beta(y_0))$ para algum $y_0 \in (0, \pi)$ de C_0 , longe de $(1, -1)$, um par de raízes conjugadas $\pm iy_0$ em (α_0, β_0) move-se para o semiplano direito $R(z) > 0$. Usamos o Teorema da Função Implícita e a fórmula para α_0, β_0 em termos de y_0 . Temos $F(iy_0, \alpha_0, \beta_0) = 0$ e

$$F_z(iy_0, \alpha_0, \beta_0) = 1 + \beta_0 e^{-iy_0} = 1 - \frac{y_0}{\sin(y_0)} e^{-iy_0} = (1 - \alpha_0) + iy_0 \neq 0.$$

e

$$F_\alpha(iy_0, \alpha_0, \beta_0) = -1,$$

então o Teorema da Função Implícita implica que a equação $F(z, \alpha, \beta_0) = 0$ (onde β é fixo) tem uma solução $z = z(\beta)$ para α próximo de α_0 satisfazendo $z(\alpha_0) = iy_0$ e

$$\frac{dz}{d\alpha}(\alpha_0) = -\frac{F_\alpha}{F_z} = \frac{1}{(1 - \alpha_0) + iy_0} = \frac{(1 - \alpha_0) - iy_0}{(1 - \alpha_0)^2 + y_0^2}$$

então pelo Teorema de Taylor

$$z(\alpha) = iy_0 + (\alpha - \alpha_0) \frac{(1 - \alpha_0) - iy_0}{(1 - \alpha_0)^2 + y_0^2} + O([\alpha - \alpha_0]^2)$$

e podemos ver que

$$R(z(\alpha)) = (\alpha - \alpha_0) \frac{(1 - \alpha_0)}{(1 - \alpha_0)^2 + y_0^2} + O([\alpha - \alpha_0]^2)$$

para α próximo a α_0 .

Como $\alpha_0 < 1$, vemos que $R(z(\alpha)) > 0$ para $\alpha > \alpha_0$.

Isso prova que há um par de raízes complexas conjugadas com parte real positiva logo abaixo, mas próximo a C_0 .

Z deve ser constante na componente conexa D do complemento de I limitado acima por C_0 e a porção da reta $\alpha + \beta = 0$ para $\alpha \geq 1$ e abaixo por C_2 .

Segue do parágrafo anterior que $Z \geq 2$ nesta região. Mostramos que $Z = 2$ nesta região. Suponha que isso seja falso e escolha qualquer ponto (α_0, β_0) em C_0 , exceto o ponto de canto $(1, -1)$. Denote por iy_0 a única raiz imaginária pura com $0 < y_0 < \pi$ tal que $F(iy_0, \alpha_0, \beta_0) = 0$. Se (α_n, β_n) é qualquer sequência em D convergindo para (α_0, β_0) então deve existir uma sequência correspondente de raízes $z_n, F(z_n, \alpha_n, \beta_n) = 0$, com $R(z_n) > 0$ e z_n distinto do par conjugado complexo construído no parágrafo anterior.

Pelos limites a priori obtidos em raízes com parte real positiva na (4.24), $\{z_n\}_n$ é uma sequência limitada e, portanto, podemos também assumir que ela converge para z_0 , necessariamente satisfazendo $\mathbb{R}(z_0) \geq 0$ e $F(z_0, \alpha_0, \beta_0) = 0$. $z_0 \neq iy_0$ porque nesse caso z_n concordaria com o par conjugado complexo construído no parágrafo anterior.

Então $R(z_0) > 0$ e o teorema da função implícita implica que há uma família suave de raízes $z = z(\alpha, \beta)$ para (α, β) perto de (α_0, β_0) satisfazendo $z(\alpha_0, \beta_0) = z_0$. Mas isso contradiz que $Z = 0$ em AS . Argumentos semelhantes aos do parágrafo anterior mostram que $Z = 2n+2$ entre C_{2n} e C_{2n+2} e $Z = 2n+3$ entre C_{2n+1} e C_{2n+3} para $n = 0, 1, 2, \dots$. $\square$

Proposição 4.25. *As seguintes afirmações valem para $h(\lambda) \equiv \lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$:*

- a) *Se $0 < \beta < \pi/2$, então existe $\delta > 0$ tal que $R(\lambda) \leq -\delta$ para todas as raízes.*
- b) *Se $\beta = \pi/2$, então $\lambda = \pm i\pi/2$ são raízes de ordem um.*
- c) *Se $\beta > \pi/2$, existem raízes $\lambda = x \pm iy$ com $x > 0$ e $y \in (\pi/2, \pi)$.*

Quando $\alpha = 0$ a região de estabilidade para β é dada por $-\pi/2 < \beta < 0$ que corresponde ao segmento no eixo β na região de estabilidade Figura 3.3. Agora, vamos retornar ao nosso problema original de determinar a estabilidade do estado estacionário $x = 0$ da equação escalar (3.38) que depende da equação característica (3.39). Assumimos que $A + B \neq 0$, caso contrário, $\lambda = 0$ é uma raiz.

Teorema 4.26. *O seguinte vale para (3.38): (a) Se $A + B > 0$, então $x = 0$ é instável.*

(b) Se $A + B < 0$ e $B \geq A$, então $x = 0$ é assintoticamente estável.

(c) Se $A + B < 0$ e $B < A$, então existe $r' > 0$ tal que $x = 0$ é assintoticamente estável para $0 < r < r'$ e instável para $r > r'$.

No caso (c), existe um par de raízes puramente imaginárias em

$$r = r' = (B^2 - A^2)^{-1/2} \cos^{-1}(-A/B)$$

Demonstração. Considere (a) e a região AS da proposição 3.25. Então $(\alpha, \beta) = r(A, B)$ nunca encontra AS ou seu limite, então há uma raiz $\lambda = r^{-1}z$ com parte real positiva para todo $r > 0$.

Considere (b). Neste caso, $(\alpha, \beta) = r(A, B)$ está inteiramente dentro de AS para todo $r > 0$, então todas as suas raízes $\lambda = r^{-1}z$ satisfazem $\mathbb{R}(\lambda) < 0$.

No caso (c), o raio $(\alpha, \beta) = r(A, B)$, $r > 0$, pertence a AS para $r > 0$ pequeno, mas encontra C_0 em exatamente um valor de $r := r'$ e deixa AS para $r > r'$. O fato de que ele encontra C_0 exatamente uma vez decorre de um cálculo simples

$$0 < \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\frac{\sin(y)}{y} - \cos(y)}{1 - \cos(y)\frac{\sin(y)}{y}} < 1, \quad 0 < y < \pi$$

onde usamos o fato de que $\sin(y)/y$ diminui estritamente de um para zero em $(0, \pi)$. As afirmações de estabilidade seguem do Teorema 3.20. $\square$

5 Aplicações

Neste capítulo faremos duas aplicações, que são exemplos de modelos descritos por equações diferenciais com retardamento: modelo logístico e um modelo econômico. Como vimos no capítulo anterior estudar a equação característica é uma tarefa difícil. Aqui iremos apresentar uma análise de estabilidade desses modelos. As referências utilizadas foram [10] e [5].

5.1 Modelo Populacional

Como exemplo, consideremos a equação logística, a qual é um problema com retardo e não linear:

$$x'(t) = rx(t)(1 - x(t - 1)). \quad (5.1)$$

Essa equação modela a dinâmica de uma população onde $x(t)$ indica o número de indivíduos no instante t com taxa de crescimento $r > 0$ e capacidade de suporte normalizada, onde a competição tem efeito com um retardo de uma unidade de tempo. Esse modelo representa um avanço em relação a modelos anteriores como o de Verhulst, que também cunhou o termo "logístico", ou o modelo exponencial simples de Malthus, ambos EDOs.

Podemos observar que a equação (5.1) possui o equilíbrio trivial $\bar{x}_0 = 0$ e o equilíbrio positivo $\bar{x}_1 = 1$, independentemente do parâmetro r . A equação variacional linear em torno de um equilíbrio $\bar{x}$ é:

$$x'(t) = r(1 - \bar{x})x(t) - r\bar{x}x(t - 1). \quad (5.2)$$

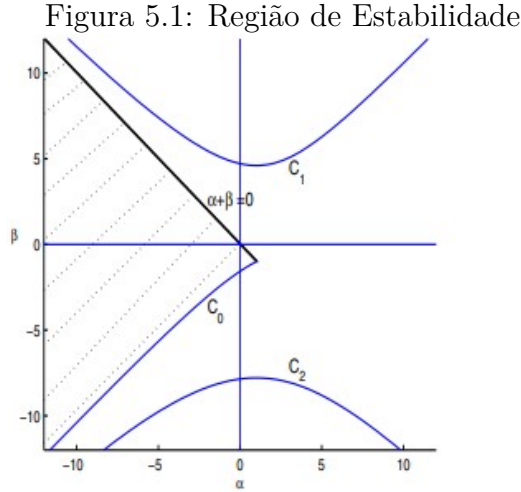
A técnica de linearização é a mesma usada para o caso ordinário, ou seja, busca-se uma solução da forma $\bar{x} + x(t)$, com $x(t)$ sendo uma perturbação suficientemente pequena para que os termos $o(x(t))$ sejam desprezados. Como consequência da equação (5.2), é fácil observar que $\bar{x} = 0$ é sempre instável, já que (5.2) se reduz a:

$$x(t) = rx(t),$$

cuja solução é $x(t) = ce^{rt}$, $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, para $\bar{x}_1 = 1$, obtemos:

$$x(t) = -rx(t - 1), \quad (5.3)$$

uma equação linear com retardo e, em particular, um caso especial da equação de Hayes.



Fonte: [7]

Observação 5.1. Como consequência, notamos que, diferentemente das EDOs escalares (não lineares), que podem apresentar apenas comportamento exponencial (ou constante), as equações com retardo escalares (não lineares) podem ter soluções periódicas devido à presença de pares complexos conjugados de raízes características (do sistema linearizado). A dinâmica, portanto, é mais rica e, de fato, também pode ocorrer movimento caótico.

A equação característica associada à (5.3) é:

$$\lambda + re^{-\lambda} = 0.$$

Chamando $\lambda = \alpha + \beta i$, substituindo na equação acima e separando parte real e imaginária, temos:

$$\begin{cases} \alpha = -re^{-\alpha} \cos(\beta) \\ \beta = re^{-\alpha} \sin(\beta) \end{cases} \quad (5.4)$$

Se $\beta = 0$, a equação característica é dada por:

$$\lambda = -re^{-\lambda}. \quad (5.5)$$

Nesse caso buscamos por soluções reais. Para fazer isso vamos estudar uma parte dela dada pela seguinte função:

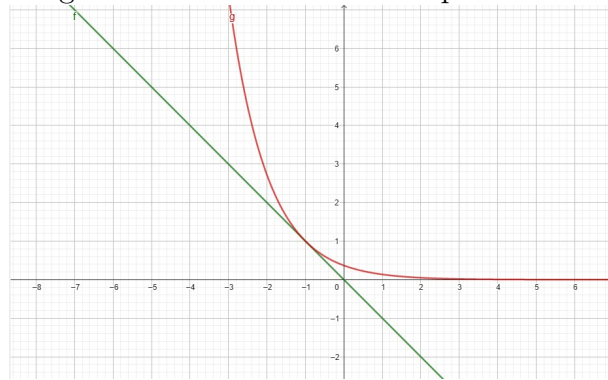
$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= -\lambda e^{\lambda} \\ \rho'(\lambda) &= -e^{\lambda} - \lambda e^{\lambda} \\ \rho'(\lambda) = 0 &\Rightarrow -e^{\lambda}(1 + \lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = -1 \end{aligned}$$

$\rho(-1) = e^{-1}$ é o valor máximo de ρ .

Para (5.5) ter solução real

$$r \leq e^{-1}.$$

Graficamente:

Figura 5.2: Gráfico da raiz dupla $\lambda = -1$ 

Fonte: Elaborada pela autora

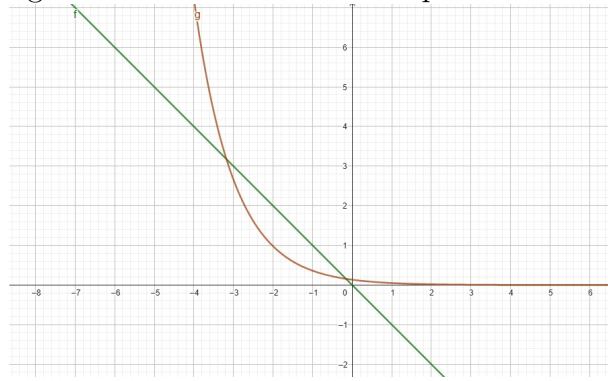
Portanto, existe uma raiz $\lambda = -1$ que é raiz dupla (pois é solução de $r = e^{-1}$)
 Agora, se $r < e^{-1}$

$$\lambda_1 < -1$$

e

$$\lambda_2 \in (-1, 0)$$

Graficamente:

Figura 5.3: Gráfico das raízes quando $r < e^{-1}$ 

Fonte: Elaborada pela autora

Logo, a busca por raízes reais ($\beta = 0$) é fácil: elas são dadas, se existirem, pelas soluções de $-\alpha = re^{-\alpha}$. Portanto, não há raízes reais para $r > 1/e$, há uma raiz real dupla $\lambda = -1$ para $r = 1/e$, e há duas raízes reais distintas $\lambda_1 < 1$ e $\lambda_2 \in (-1, 0)$ para $r < 1/e$. Também é imediato verificar que $\lambda_1 \rightarrow -\infty$ e $\lambda_2 \rightarrow 0^-$ à medida que $r \rightarrow 0^+$. Conclui-se que raízes reais, quando existem, não causam instabilidade: o equilíbrio não trivial $\bar{x} = \bar{x}_1$ pode perder estabilidade apenas em favor de uma solução periódica estável. Isso está de acordo com o que foi observado anteriormente na Fig. 4.1.

Suponhamos agora $\beta \neq 0$

$$\lambda + re^{-\lambda} = 0$$

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

Substituindo temos:

$$\alpha + i\beta + re^{-\alpha}(\cos(\beta) - i\sin(\beta)) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + re^{-\alpha} \cos(\beta) = 0 \\ \beta - re^{-\alpha} \sin(\beta) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

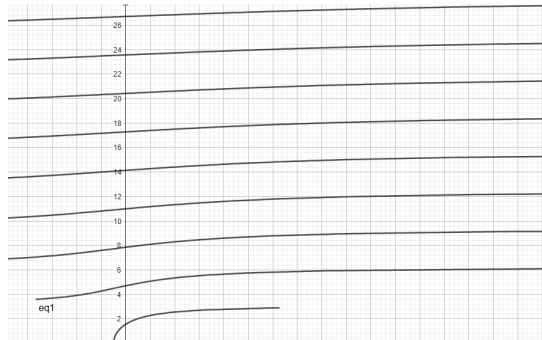
Busquemos por raiz imaginária pura $\lambda = \beta i$, a equação característica (4.6) se torna

$$\begin{cases} -r \cos(\beta) = 0 \\ r \sin(\beta) = \beta \end{cases} \quad (5.7)$$

Da primeira equação obtemos $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k = 0, 1, \dots$. Assim, para o primeiro $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ da segunda equação de (4.6) tem-se $r = \frac{\pi}{2}$ (ou $r^* = \frac{\pi}{2}$).

Para verificação, deve-se buscar pares complexos conjugados. Sem perda de generalidade (já que r é real), suponhamos $\beta > 0$. Tomando a razão membro a membro das duas equações em (4.6), encontra-se que $\lambda = \alpha + i\beta$ é uma raiz característica se, e somente se, o ponto (β, α) pertence ao gráfico da função

$$\alpha(\beta) = -\frac{\beta}{\tan(\beta)}, \beta \neq k\pi, k = 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

Figura 5.4: Gráfico da função $\alpha(\beta)$ 

Fonte: Elaborada pela autora

no plano (α, β) .

Por outro lado, ao elevar ao quadrado e somar membro a membro as mesmas duas equações tem-se $\alpha^2 + \beta^2 = r^2 e^{-2\alpha}$. Conclui-se de forma similar que $\lambda = \alpha + i\beta$ é uma raiz característica se, e somente se, o ponto (α, β) pertence ao gráfico da função

$$\beta(\alpha) = \sqrt{r^2 e^{-2\alpha} - \alpha^2}, |\alpha| < r e^{-\alpha}, \quad (5.9)$$

Figura 5.5: Gráfico da função $\beta(\alpha)$ 

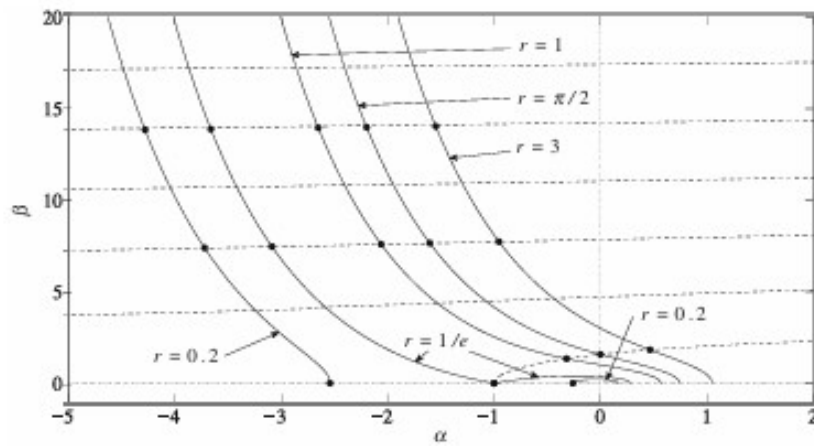
Fonte: Elaborada pela autora

no plano (α, β) .

Note que se $\beta \in (\pi, 2\pi)$ então $\sin \beta < 0$ e pela segunda equação de (4.4), obtém-se (como $r > 0, e^{-\alpha} > 0$ $\beta < 0$, o que é uma contradição. De forma análoga, excluimos os intervalos da forma $(k\pi, (k+1)\pi)$ para k ímpar, e consideramos apenas os intervalos da forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, para $k = 2, 4, 6, \dots$

Observe a figura para garantir a existência de raízes, em cada intervalo considerado.

Figura 5.6: Raízes características de (4.3)



Fonte: [7]

Agora, a função (4.5) não é globalmente invertível, mas cada ramo entre $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, é. Portanto, pode-se transferi-la para o mesmo plano (α, β) da (5.9) e buscar as raízes características como as interseções entre os dois gráficos.

Esses gráficos são mostrados na Fig. 4.6 para vários valores de r : linhas tracejadas para Fig.4.4 e linhas contínuas para Fig.4.6. Como (4.5) é independente de r , um aumento deste provoca um deslocamento para a direita do gráfico de (5.9), assim como de suas interseções com o gráfico de (4.5).

Nota-se pela figura que conforme r varia (no sentido crescente) há troca de sinal de $\alpha = \text{Re}(\lambda)$, portanto, existe perda de estabilidade. Neste sentido, para os leitores interessados é possível mostrar a existência de bifurcação de Hopf, a partir de r^* , o que garante a existência de solução periódica de (4.4), veja [7].

5.2 Modelo Econômico de Kalecki (1935)

O modelo trata de um sistema econômico fechado sem tendência (portanto, estamos em curto prazo). Indicando com B a renda real total dos capitalistas, temos a relação:

$$B = C + A, \quad (5.10)$$

onde C é o consumo dos capitalistas, enquanto A — se negligenciarmos a poupança dos trabalhadores e as rendas de capital — coincide com a acumulação bruta de capital. O consumo dos capitalistas pode ser relacionado ao lucro real bruto (renda dos capitalistas) por meio da função linear:

$$C = C_I + \lambda B, \quad (5.11)$$

em que C_I é uma constante positiva e λ também é uma constante positiva, mas menor que 1. A partir de (4.10) e (4.11), obtemos:

$$B = \frac{C_I + A}{1 - \lambda}. \quad (5.12)$$

Embora o modelo de Kalecki seja anterior ao de Keynes, aqui já encontramos o que Keynes tornaria famoso: a função consumo e o multiplicador.

No que diz respeito ao investimento, Kalecki assume que existe um atraso médio de gestação do investimento igual a uma constante positiva θ . O período de gestação do investimento é o intervalo de tempo entre a decisão de investir e a entrega dos bens de capital prontos. Mais precisamente, em cada investimento podem ser distinguidas três etapas:

1) Pedidos de investimento, isto é, todas as encomendas de bens de capital, tanto para reposição quanto para adições líquidas ao estoque de capital, chamados I ;

2) Produção de bens de capital, isto é, a acumulação bruta de capital, chamada A ;

3) Entregas dos bens de capital acabados, chamadas L .

Dada a suposição acima, podemos escrever:

$$L(t) = I(t - \theta).^1 \quad (5.13)$$

$$K'(t) = L(t) - U \quad (5.14)$$

$$A(t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t I(\zeta) d\zeta \quad (5.15)$$

$$I = m(C_1 + A) - nK, \quad (5.16)$$

tal que $C_1 > 0$ Derivando (5.16), tem-se

$$I'(t) = mA'(t) - nK'(t) \quad (5.17)$$

Derivando (4.15), tem-se pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$A'(t) = \frac{I(t) - I(t - \theta)}{\theta} \quad (5.18)$$

De (4.13) e (4.14), tem-se

$$K' = I(t - \theta) - U \quad (5.19)$$

¹Isso equivale à suposição de que todos os salários são consumidos, um caso extremo — feito para simplificar a análise — da suposição plausível de que a propensão ao consumo dos trabalhadores é maior do que a dos capitalistas.

Substituindo em (4.17) de (4.18) e (4.19), tem-se

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{m}{\theta} [I(t(-I(t-\theta)) - nI(t-\theta) + nU \\ \Rightarrow I'(t) &= \frac{m}{\theta} [I(t) - I(t-\theta)] - n(I(t-\theta) - U) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Denotando por $J(t) = I(t) - U$ com U uma constante, segue que $J'(t) = I'(t)$. Logo,

$$J'(t) = \frac{m}{\theta} [J(t) - J(t-\theta)] - nJ(t-\theta),$$

isto é,

$$\theta J'(t) - mJ(t) + (m + n\theta)J(t-\theta) = 0 \quad (5.21)$$

Buscando por solução do tipo exponencial, $J = e^{\lambda t}$, tem-se:

$$\theta \lambda e^{\lambda t} - m e^{\lambda t} + (m + n\theta) e^{\lambda(t-\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow \theta \lambda - m + (m + n\theta) e^{-\lambda \theta} = 0 \quad (5.22)$$

que é a equação característica de (4.21). Tomando $s = \theta \lambda$, ficamos com

$$\begin{aligned} s - m + (m + n\theta) e^{-s} &= 0 \\ s &= m - (m + n\theta) e^{-s} \end{aligned} \quad (5.23)$$

A equação (5.23) é similar à equação (3.40), com $\alpha = m$ e $\beta = -(m + n\theta)$ e aplicando à análise feita na seção (3.8) obtemos:

- i) Se $m - \ln(m + n\theta) < 1$, não existe raiz real
- ii) Se $m - \ln(m + n\theta) = 1$ existe solução ($S = 0$) raiz dupla.
- iii) Se $m - \ln(m + n\theta) > 1$, tem-se duas raízes reais distintas.

Supondo raízes complexas $s = \alpha + \beta i$, tem-se

$$\alpha + i\beta = m - (m + n\theta) (\cos \beta - i \sin \beta) e^{\alpha}$$

Separando parte real e imaginária, tem-se
$$\begin{cases} \alpha = m - (m + n\theta) \cos \beta e^{-\alpha} \\ \beta = (m + n\theta) e^{-\alpha} \sin \beta \end{cases}$$

Logo, da segunda equação

$$e^{\alpha} = \ln(m + n\theta) \frac{\sin \beta}{\beta}$$

O que implica

$$\alpha = \ln(m + n\theta) + \ln\left(\frac{\text{sen } \beta}{\beta}\right)$$

Substituindo agora na primeira equação

$$\ln(m + n\theta) + \ln\left(\frac{\text{sen } \beta}{\beta}\right) = m - \frac{\beta}{\text{tg } \beta}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\text{sen } \beta}{\beta}\right) = -\ln(m + n\theta) + m - \frac{\beta}{\text{tg } \beta}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\text{sen } \beta}{\beta}\right) + \frac{\beta}{\text{tg } \beta} = m - \ln(m + n\theta) \quad (5.24)$$

Chamando $f(\beta) = \ln\left(\frac{\text{sen } \beta}{\beta}\right) + \frac{\beta}{\text{tg } \beta}$ então queremos β tal que $f(\beta) = C$,

onde

$$C = m - \ln(m + n\theta)$$

Se $C < 1$, nós temos uma intersecção se $\beta \in (0, \pi)$.

Se $C > 1$, não há intersecção no primeiro intervalo, isto é, para $0 < \beta < \pi$.

Se $C = 1$ então $\beta = 0$, o qual é descartada (raiz real).

Para o primeiro caso, $C < 1$, a intersecção corresponde um único β e portanto, uma solução $s = \alpha + i\beta$ da equação característica. Lembrando que $s = \theta\lambda$, então, tem-se a solução da forma $e^{\frac{s}{\theta}t} = e^{(\frac{\alpha}{\theta} + i\frac{\beta}{\theta})t}$

$$= e^{\frac{\alpha}{\theta}t} \left(\cos \frac{\beta t}{\theta} + i \text{sen } \frac{\beta t}{\theta} \right)$$

com $0 < \beta < \pi$.

O período da função do parênteses é dado por $\frac{2\pi}{\frac{\beta}{\theta}} = \frac{2\pi\theta}{\beta} > \frac{2\pi\theta}{\pi} = 2\theta$, ou seja, se tivermos um ciclo, seu período é maior que 2θ .

A análise de estabilidade: Voltando agora na equação (4.22) tem-se

$$J'(t) = \frac{m}{\theta} S(t) + \left[-\left(\frac{m + n\theta}{\theta} \right) \right] J(t - \theta)$$

Assim, tratando $A = \frac{m}{\theta}$ e $B = -\left(\frac{m + n\theta}{\theta} \right)$, e aplicando o Teorema 3.27, tem-se que $A + B = \frac{m}{\theta} - \left(\frac{m + n\theta}{\theta} \right) = \frac{-n}{\theta} < 0$ e sendo $B < 0$ e $A > 0$, tem-se $B < 0 < A$, então existe um $\theta' > 0$ tal que a solução $J = 0$ é assintoticamente estável para $0 < \theta < \theta'$ e instável para $\theta > \theta'$.

5.3 Considerações finais

Com este trabalho, em particular observando as aplicações abordadas neste capítulo, percebemos que alguns problemas reais são melhores descritos por equações diferenciais com retardamento, especialmente se tratando de fenômenos em que o princípio da causalidade não é imediato, isto é, existe um tempo significativo entre causa e efeito.

Ao modelar um problema usando este tipo de equação é de suma importância saber se este admite solução e se é única, assim como estudar a estabilidade da solução, especialmente as soluções de equilíbrio do problema. Portanto, a leitura dos capítulos iniciais é essencial para um bom entendimento da análise feita nas aplicações. Espera-se que o texto teórico seja de fácil e agradável leitura. Finalmente, o próximo assunto a ser estudado, a quem deseja continuar, é referente à Bifurcação de Hopf, tema este que pode ser encontrado nas referências citadas.

Referências

- [1] FORDE, J. E. *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology*. [S.l.]: University of Michigan, 2005.
- [2] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1978.
- [3] NEVES, A. F. *Forma de Jordan e Equações Diferenciais Lineares*. [S.l.: s.n.], —.
- [4] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1996.
- [5] SMITH, H. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. [S.l.]: Springer, 2011.
- [6] ONUCHIC, N. *Equações Diferenciais com Retardamento*. [S.l.]: —, 1971.
- [7] HALE, J.; LUBEL, S. M. V. *Introduction to Functional Differential Equations*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1993.
- [8] ARINO, O. *Delay Differential Equations and Applications*. [S.l.]: NATO Public Diplomacy Division, 2002.
- [9] CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1978.
- [10] GANDOLFO, G. *Economic Dynamics: Methods and Models*. [S.l.]: ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS, 1985.