

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO  
Faculdade de Filosofia e Ciências  
Programa de Pós-Graduação em Educação  
UNESP - Câmpus de Marília.

**O DESENVOLVIMENTO DA IDEIA DE PROPORCIONALIDADE NOS ANOS  
INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOBRE O PROJETO EMAI**

**CLÁUDIA ELAINE CATENA**

**MARÍLIA - SP**

**2023**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO  
Faculdade de Filosofia e Ciências  
Programa de Pós-Graduação em Educação  
UNESP - Câmpus de Marília.

**CLÁUDIA ELAINE CATENA**

**O DESENVOLVIMENTO DA IDEIA DE PROPORCIONALIDADE NOS ANOS  
INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOBRE O PROJETO EMAI**

Dissertação apresentada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências – Câmpus de Marília, Linha de Pesquisa 03– “Teoria e Práticas Pedagógicas” como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Educação, sob orientação do Prof. Dr. José Carlos Miguel.

**MARÍLIA – SP**

**2023**

C359d

Catena, Cláudia Elaine

O desenvolvimento da ideia de proporcionalidade nos anos  
iniciais do ensino fundamental: um estudo sobre o projeto EMAI  
/ Cláudia Elaine Catena. -- Marília, 2023  
93 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista  
(Unesp), Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília  
Orientador: José Carlos Miguel

1. Educação. 2. Educação Matemática. 3. Ensino  
Fundamental. 4. Proporcionalidade. 5. Projeto EMAI. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da  
Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** O desenvolvimento da ideia de proporcionalidade nos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sobre o projeto EMAI

**AUTORA:** CLAUDIA ELAINE CATENA

**ORIENTADOR:** JOSÉ CARLOS MIGUEL

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Educação, pela Comissão Examinadora:

Prof(a). Dr(a). JOSÉ CARLOS MIGUEL (Participação Virtual)  
Departamento de Didática / Unesp, Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília

Prof(a). Dr(a). GUSTAVO CUNHA DE ARAÚJO (Participação Virtual)  
Programa de Pós-Graduação Profissional em Educação / Universidade Federal do Tocantins

Prof(a). Dr(a). FRANCISCO JOSÉ BRABO BEZERRA (Participação Virtual)  
Centro de Matemática, Computação e Cognição / Universidade Federal do ABC

Marília, 01 de março de 2023



Prof(a). Dr(a). Henrique Tahan Novaes  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação

À minha mãe Sara que sempre foi minha inspiração.  
Ao meu companheiro de vida Sérgio que compartilha  
sonhos comigo.

Às minhas filhas Ticiane e Mariana que são o sol da  
minha vida.

Dedico também ao meu irmão Marco Antônio (*In  
memoriam*) que em um estúpido acidente  
automobilístico, nos deixou em outubro de 2016 de  
forma prematura.

## AGRADECIMENTOS

Muitos foram os que contribuíram para que esse trabalho fosse realizado, agradeço então:

A Deus, pela saúde e coragem necessária para buscar alcançar meus objetivos, a Ele ofereço meu presente e porvir.

Ao Professor Doutor José Carlos Miguel por ter me proporcionado a chance preciosa de cursar o mestrado, pela paciência, disponibilidade, sabedoria, atenção, carinho, compreensão, ajuda, enfim, pela orientação primorosa que confiou à minha pessoa.

À Professora Doutora Stela Miller por tamanha generosidade em partilhar seus conhecimentos.

À Professora Doutora Graziela Zambão Abdian, que muito acrescentou em minha trajetória no mestrado. Sua disciplina intitulada *Perspectivas Teórico-Metodológicas em Análise*, me fez enxergar por lentes, antes desconhecidas.

Aos meus amigos do GP-FORME que me ajudaram a compreender melhor a teoria.

Às queridas Monalisa Renata Gazoli, Denise Rocha Pereira, Karina de Fátima Gomes, Paula Rúbia Peloso Duarte, mulheres de luta, à frente de seu tempo, que me influenciaram e me motivaram durante essa jornada e a quem eu tenho a honra de chamar de amigas.

Em especial, agradeço às amigas Camila Aparecida da Silva, que me acolheu quando viu meu nome na lista de aprovados e me encontrou na rede social para me dar boas-vindas e Fernanda Mussato Vasconcelos que se tornou minha confidente nessa trajetória, ambas me escutaram nos momentos de angústia, mostrando que tudo isso faz parte do processo de desenvolvimento do pesquisador e da pesquisa e que juntas vibramos com as conquistas, umas das outras.

À minha mãe Sara Catena, que sempre foi meu exemplo de mulher forte, determinada, independente, estudiosa, enfim, minha inspiração.

Ao meu esposo Sérgio por ter me apoiado em todos os momentos, entendendo que para além do meu crescimento profissional, é para meu crescimento pessoal, sem você este percurso teria sido muito mais difícil, muito obrigada!

Às minhas filhas Ticiane e Mariana, por tamanho incentivo e encorajamento, vocês têm participação direta nisso!

Aos meus sogros Gilberto e Luiza por tanto cuidado e carinho, desde o café sempre fresquinho até as refeições carinhosas, que além de alimentarem meu corpo, nutrem minha alma de afeto.

À minha sobrinha Antônia, por ser extensão da vida e nos olhos de quem vejo por mim tanta admiração.

Ao meu irmão Marco Antônio (*In memoriam*), cuja frase do personagem que ele mais admirava em vida, tornou-se meu lema após sua morte, “ninguém baterá tão forte quanto a vida, porém não se trata do quão forte você pode bater, mas sim do quão forte você é capaz de apanhar e continuar seguindo em frente”.

Minha gratidão a todos vocês!

*“Quem ajuíza o que faço é minha prática. Mas minha prática iluminada teoricamente”.*

*(Paulo Freire, Professora sim, tia não, 1993).*

CATENA, Cláudia Elaine. **O desenvolvimento da ideia de proporcionalidade nos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sobre o projeto EMAI-SP**. 2023. 93f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Filosofia e Ciências, Marília-SP, 2023.

## **RESUMO**

O objetivo deste trabalho é investigar se e como o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade é proposto no material didático do Projeto EMAI (Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental), material didático adotado por toda rede pública estadual paulista, dada sua importância para a formação dos estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental e as várias aplicações deste conteúdo na realidade cotidiana, através de pesquisa documental e bibliográfica. O embasamento teórico se situou no contexto da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, além de interfaces com a Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e colaboradores. Os resultados indicam que o material destinado ao aluno se limita ao campo do conhecimento empírico uma vez que a abordagem inicial desse material sobre o conceito de proporcionalidade se resume à apresentação de atividades. Já no material destinado aos professores são apresentadas algumas sugestões de encaminhamento das atividades propostas, que podem favorecer o desenvolvimento do conceito proporcionalidade, se forem organizadas de maneira que levem os alunos a atribuir sentido aquilo que estão aprendendo.

**Palavras-chave:** Educação. Educação matemática. Ensino Fundamental. Proporcionalidade. Projeto EMAI.

## **ABSTRACT**

This research aims to investigate whether the development of the idea of proportionality is proposed in the didactic material of the EMAI Project (Mathematics Education in the Initial Years of Elementary School), didactic material adopted by all public schools in São Paulo, and how, given its importance for the training of students in the early years of Elementary School and the various applications of this content in everyday reality. The theoretical basis was given through the Theory of Conceptual Fields of Gérard Vergnaud, as well as interfaces with the Historical-Cultural Theory of Vygotsky and collaborators. The partial results indicate that the material destined for the student is limited to the field of empirical knowledge, since the initial approach of this material on the concept of proportionality is limited to the presentation of activities. In the material destined for teachers, some suggestions for forwarding the proposed activities are presented, which can favor the development of the proportionality concept, if they are organized in a way that leads students to attribute meaning to what they are learning.

Keywords: Education. Mathematics education. Elementary School. Proportionality. EMAI Project.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ilustração 1- THA EMAI 1º ano, 2014, vol. 2, material do professor.                                      | 43 |
| Ilustração 2- Expectativas de aprendizagem que se pretende alcançar                                      | 48 |
| Ilustração 3- Introdução à ideia de proporcionalidade EMAI 1º ano, 2014, vol. 2, material do aluno.      | 52 |
| Ilustração 4- Situações-problema EMAI 1º ano, 2014, vol. 2, material do aluno.                           | 54 |
| Ilustração 5- Quadro relacionando carrinhos e crianças EMAI 1º ano, 2014, vol. 2, material do professor. | 56 |
| Ilustração 6- Aviõezinhos EMAI 2º ano, 2014, vol. 2, material do aluno.                                  | 58 |
| Ilustração 7- Transformações no campo aditivo. Arquivo da pesquisadora.                                  | 59 |
| Ilustração 8- Tábua de Pitágoras EMAI 3º ano, 2014, vol 1.                                               | 63 |
| Ilustração 9- Relação parte-todo EMAI 4º ano, vol. 2, material do aluno.                                 | 68 |
| Ilustração 10- Malha quadriculada EMAI 5º ano, vol. 2, material do aluno.                                | 70 |
| Ilustração 11- Variação do nível de água em função do tempo. Elaboração da autora.                       | 77 |
| Ilustração 12- Variação de velocidade em função do tempo para cumprir um trajeto. Elaboração da autora.  | 82 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|          |                                                                                |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|
| ATPC     | Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo                                          |
| AVA      | Ambiente Virtual de Aprendizagens                                              |
| BNCC     | Base Nacional Comum Curricular                                                 |
| CAPES    | Portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível                   |
| CEFAI    | Superior Centro do Ensino Fundamental dos Anos Iniciais                        |
| CEFAF    | Centro do Ensino Fundamental Anos Finais                                       |
| CP       | Currículo Paulista                                                             |
| EFAPE    | Escola de Formação e Aperfeiçoamento dos Professores do Estado de<br>São Paulo |
| EMAI     | Projeto Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino<br>Fundamental         |
| GRM      | Grupo de Referência de Matemática                                              |
| MEC      | Ministério da Educação e Cultura                                               |
| PC       | Professor Coordenador                                                          |
| PCNP     | Professor Coordenador do Núcleo Pedagógico                                     |
| PCN      | Parâmetros Curriculares Nacionais                                              |
| PNAIC    | Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa                               |
| SARESP   | Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar de São Paulo                        |
| SEDUC-SP | Secretaria de Educação do Estado de São Paulo                                  |
| THA      | Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem                                        |
| UE       | Unidade Escolar                                                                |

## SUMÁRIO

|                                                    |           |
|----------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO .....</b>                          | <b>13</b> |
| <b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>               | <b>19</b> |
| <b>3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>         | <b>35</b> |
| <b>4 A PROPORCIONALIDADE NO PROJETO EMAI .....</b> | <b>41</b> |
| <b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>                | <b>87</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>                           | <b>90</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Revisitando memórias da minha infância, inicio esses escritos apresentando minha trajetória de formação. Lembro-me de ter fora da escola facilidade em lidar com números, contas, troco, porém no âmbito da educação escolar sempre tive muita dificuldade com a Matemática, parecia até tratar-se de “matemáticas” diferentes. Sempre me questioneei sobre como fazer para lidar com essa situação, se era apenas uma impressão ou se outras pessoas também passavam por isso.

Em 1994 concluí o curso de Habilitação Específica de Segundo Grau para o Magistério. Confesso que na época minha escolha foi por conta da dificuldade que tinha em Matemática. Segui com a mesma linha de raciocínio para ingresso no curso superior, pois queria fugir da área de exatas. Cheguei a cursar dois semestres do curso de Letras e quatro semestres do curso de Direito, porém não concluí nenhum dos dois cursos.

Ingressei por concurso público em 2001, como Professora Adjunta de Educação Infantil junto à rede municipal de São Paulo. Na época a Secretaria Municipal de Educação tinha como um de seus objetivos capacitar os professores em exercício, foi então que cursei e concluí em 2005 o Curso Normal Superior. No ano de 2007 com anseio de voltar para o interior do estado, exonerei o cargo da prefeitura e ingressei por concurso público junto à rede estadual de São Paulo como Professora Titular de Educação Básica I, onde permaneço até os dias de hoje.

Uma das minhas maiores preocupações sempre foi como proporcionar o ensino de Matemática de maneira prazerosa e de forma que os alunos realmente aprendessem. Tive a sorte de em cursos de extensão, formação continuada, e mesmo no ambiente de trabalho, encontrar pessoas que me mostraram uma outra Matemática, a usada dentro e fora da escola, porém agora, apaixonante, encantadora.

As inquietações sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática sempre me acompanharam, porém agora elas se transformaram em objeto de aprofundamento de estudo, norteador desse trabalho.

Nesse contexto, o que fomentou a realização dessa pesquisa foi o interesse em analisar e discutir como um dos mais relevantes conteúdo do currículo de Matemática da Educação Básica, o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade, dada sua importância para a formação dos estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental e às várias aplicações deste conteúdo na realidade cotidiana, era

proposto no Projeto EMAI (Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental), material didático adotado por toda rede pública estadual paulista.

No ano de 2012, participamos enquanto professores da rede pública estadual, através de grupos de estudos, usando o espaço destinado às aulas de trabalho pedagógico coletivo (ATPC) e atuando no formato de grupos colaborativos, organizados pelo Professor Coordenador do Ensino Fundamental dos Anos Iniciais, ou seja, fizemos parte, mesmo que de maneira indireta, da elaboração desse material.

A proposta é que ele sirva de base para estudos, reflexões e discussões a serem feitos com seus colegas de escola e com a coordenação pedagógica, em grupos colaborativos nos quais sejam analisadas e avaliadas diferentes propostas de atividades sugeridas (SÃO PAULO, 2013, p. 7).

A ATPC era organizada pelo Professor Coordenador (PC) dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e os professores participavam conduzindo as atividades. Essa forma de organização em grupos colaborativos estimulava os professores participantes a trocarem experiências, fortalecer as relações profissionais interpessoais e compartilhar boas práticas. O PC por sua vez, tinha apoio dos Professores Coordenadores de Núcleos Pedagógicos (PCNP) das Diretorias de Ensino. Por sua vez, os PCNP participavam de reuniões mensais organizadas em polos, por uma dupla de PCNP que integravam o chamado Grupo de Referência de Matemática (GRM), sendo um deles um especialista em anos iniciais e o outro, um especialista em Matemática, que compartilhavam seus saberes sobre conteúdos matemáticos e sobre abordagens didáticas e metodológicas.

Os PCNP do GRM participavam de reuniões mensais, com a assessora do projeto e com a equipe pedagógica do Centro do Ensino Fundamental dos Anos Iniciais (CEFAI) e do Centro do Ensino Fundamental Anos Finais (CEFAF). Nas reuniões do GRM eram discutidas as ações do projeto, planejadas as reuniões dos polos e das escolas, e também, eram elaboradas e discutidas as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) para cada ano da escolaridade.

Enquanto professores, tínhamos como pauta o estudo baseado nas THA e participávamos efetivamente para aplicação em sala de aula e depois avaliávamos o processo de ensino- aprendizagem. Segundo Pires:

O propósito de trabalhar com a ideia de THA inspira-se nas investigações conduzidas por Simon (1995), que defende a ideia de que a consideração do objetivo da aprendizagem, as atividades de aprendizagem e pensamento e conhecimento dos estudantes são elementos importantes na construção de uma trajetória hipotética de

aprendizagem – parte chave do que ele denomina Ciclo de Ensino de Matemática, expresso como um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, pensamento, tomada de atitudes. (PIRES, 2014, p. 3)

As reuniões de ATPC acontecem semanalmente e em uma dessas reuniões, foram apontadas dificuldades relacionadas à resolução de problemas por parte dos alunos, em especial no campo multiplicativo. Levantou-se então, alguns questionamentos: “todas as crianças aprendem matemática?”; “é proposto para os alunos uma diversidade de situações-problema?”; “o que os professores pretendem ao propor determinadas situações-problema?”; “quando envolve multiplicação, por que as dificuldades são maiores?”; “como se desenvolve o conhecimento matemático?”; e “a ideia de proporcionalidade?”.

A Resolução de Problemas é uma atividade central no ensino e na aprendizagem de Matemática porque favorece não apenas que os estudantes articulem e refinem seu pensamento, mas também que percebam diferentes perspectivas para enfrentar uma dada situação (SÃO PAULO, 2019, p. 313).

Vários apontamentos podem ser feitos quanto ao fato dos alunos apresentarem baixo rendimento com relação às atividades propostas em Matemática. Seria a escola, a forma como os conteúdos são trabalhados, ou o material didático utilizado como norteador desse trabalho?

Diante desses apontamentos e em decorrência de certa curiosidade, pesquisando sobre o tema de maneira preliminar, despertou a atenção ao ler o que afirma Terezinha Nunes, chefe do Departamento de Psicologia da Universidade de Oxford, segundo a qual a proporcionalidade é a principal falha no ensino da matemática hoje (FALZETTA, 2003).

Havendo uma falha no ensino, há influências diretas na defasagem da aprendizagem e essa constatação gera um desconforto.

Conforme enfatiza Toledo e Toledo:

[...] A proporcionalidade constitui um dos temas de maior importância no ensino da Matemática, pois é a partir dela que se formam as noções de razão, proporção, número racional, medida, regra de três, porcentagem, probabilidades, semelhança de figuras, escalas, entre outras (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 137).

Durante tais pesquisas assistemáticas, surge uma inquietação, com ATPC organizado para estudo, com quase uma década de material didático EMAI adotado por toda rede, com uma jornada ampliada específica para estudo desse material, com cursos de capacitação para professores, oferecidos pelo ambiente virtual de aprendizagem (AVA), na Escola de Formação e Aperfeiçoamento dos Professores do Estado de São Paulo (EFAPE), por que há uma situação deficitária na área da matemática e em especial com relação à ideia de proporcionalidade?

Tal inquietação leva à localização de textos acadêmicos (especialmente teses e dissertações) no Portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com o objetivo de conhecer o que já foi elaborado sobre o tema até o momento.

Ao inserir o termo “Educação Matemática”, resultam quantidades inviáveis para análise. Ao inserir o termo “Conceito de Proporcionalidade”, aparece uma lista com trinta e três resultados, porém nenhum deles trata deste conceito nos anos iniciais do Ensino Fundamental e por fim, ao inserir a palavra-chave “EMAI”, aparece uma lista com doze resultados. Finalmente, ao refinar a busca e inserir o termo “Projeto EMAI”, aparece uma lista com três resultados.

O primeiro trabalho encontrado foi uma dissertação de mestrado em Educação para a Ciência, defendida no ano de 2014, na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, campus de Bauru, cujo título é “O programa ler e escrever e o ensino de matemática nos anos iniciais da rede pública de São Paulo” de autoria de Regina Célia dos Santos Nunes Barros.

Essa dissertação teve por objetivo investigar possíveis relações existentes entre as demandas do Projeto EMAI com saberes e necessidades formativas de professores que atuam no contexto do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do estado de São Paulo (SARESP) e a autora aponta que os professores estão abertos ao diálogo, reconhecem a necessidade de uma formação continuada mais próxima de sua prática com intuito de ampliar seus conhecimentos sobre Matemática e sobre indicadores de alfabetização matemática.

O segundo trabalho encontrado foi uma dissertação de mestrado profissional em Educação, defendida no ano de 2015, na Universidade Federal de São Carlos, cujo título é “Desenvolvimento curricular de matemática nos anos iniciais na perspectiva do professor e do professor coordenador: um estudo do projeto EMAI de São Paulo” de autoria de Emerson de Souza Silva.

Essa dissertação teve por objetivo compreender o processo de desenvolvimento curricular nos anos iniciais a partir da perspectiva dos professores e do coordenador. O autor indicou que os professores observam aspectos positivos e negativos com relação ao projeto EMAI e evidenciam a necessidade de ampliar a formação, buscando a compreensão dos conteúdos matemáticos e das formas de ensinar e aprender.

O terceiro trabalho encontrado foi uma dissertação de mestrado em Educação para a Ciência, defendida no ano de 2016, na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Bauru), cujo título é “O projeto EMAI: uma análise sobre seus pressupostos políticos, filosóficos e pedagógicos e a questão da autonomia” de autoria de Augusta Teresa Barbosa Severino.

Essa dissertação objetivou investigar se o projeto EMAI tem em seu texto um suporte teórico e filosófico que propicie a autonomia do professor tão necessária para uma reflexão crítica sobre sua própria prática pedagógica. A autora observou que o projeto EMAI apresenta uma autonomia relativa para o trabalho do professor.

Tais leituras preliminares nos dão indícios de que há uma lacuna considerável com relação a escritos sobre proporcionalidade nos anos iniciais do ensino fundamental, pois, nos possibilita afirmar que não há pesquisas sobre a verificação, de como o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade é proposta no Projeto EMAI, ou se não é proposta neste material.

Considerando de fundamental relevância compreender se o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade está abordado nesse material e de que maneira, formulou-se os seguintes problemas de investigação: *O desenvolvimento da ideia de proporcionalidade é proposto no Projeto EMAI? Se é, de que maneira?*

Nesse sentido, considerou-se que analisar e discutir tais aspectos pode contribuir para ampliação das reflexões sobre o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade, de que maneira está sendo realizada essa proposta para os alunos e minimizar as implicações no ensino-aprendizagem desse conceito nos anos iniciais do ensino fundamental.

O objetivo geral constituiu-se em investigar se o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade é proposto no material didático do Projeto EMAI, composto pelo exemplar do aluno e do professor, e se é, de que maneira. Esse objetivo geral se desmembra em dois objetivos específicos:

1. Analisar o material didático do Projeto EMAI; e

2. Verificar se e como o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade é proposto no Projeto EMAI.

Para a realização desse estudo, optou-se pela pesquisa bibliográfica, que possibilitou um levantamento sobre o conceito de proporcionalidade, além de buscar situar essa discussão no âmbito dos aportes da Teoria Histórico-Cultural. De igual modo, a análise documental permitiu verificar como se constitui o movimento de reorganização curricular no estado de São Paulo e os encaminhamentos postos em prática para a formulação do Currículo Paulista. Em ambos os casos, a busca de compreensão e explicação dos nexos conceituais envolvidos na noção de proporcionalidade constituiu a ideia central da pesquisa.

Assim, a elaboração dessa dissertação é composta por cinco seções. Após essa seção introdutória, as demais seções foram organizadas da seguinte forma:

A seção 2 traz aspectos teóricos que embasam esse estudo.

Na próxima etapa, consolidada na seção 3, é apresentada a metodologia de pesquisa.

Uma análise do material é realizada na seção 4.

A seção 5 é reservada aos resultados obtidos e considerações finais.

E por fim, porém, não menos importante, os elementos pós-textuais: referências e apêndices.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente estudo investigou se o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade é proposto no material didático EMAI e de que maneira. Sendo assim, partiu-se das situações-problema consideradas como relevantes para a formação desse conceito, de forma direta ou indireta.

No contexto filosófico, sobre resoluções de problemas, Saviani considera que a

[...] essência do problema é a necessidade. [...] Assim, uma questão, em si, não caracteriza o problema, nem mesmo aquela cuja resposta é desconhecida; mas uma questão cuja resposta se desconhece e se necessita conhecer, eis aí um problema. Algo que eu não sei não é problema; mas quando eu ignoro alguma coisa que eu preciso saber, eis-me, então, diante de um problema. Da mesma forma, um obstáculo que é necessário transpor, situações que nos configuram como verdadeiramente problemáticas (p.14). Em suma: problema, apesar do desgaste determinado pelo uso excessivo do termo, possui um sentido profundamente vital e altamente dramático para a existência humana, pois indica uma situação de impasse. Trata-se de uma necessidade que se impõe objetivamente e é assumida subjetivamente (SAVIANI, 2000, p.16).

Saviani considera ainda, que a necessidade somente poderá existir se for sentida pelo indivíduo como tal.

Segundo MENEGUELLI (2018), a resolução de problemas ganhou destaque no âmbito mundial, especialmente por meio das pesquisas e materiais voltados ao ensino da Matemática, sendo atualmente considerada como uma metodologia utilizada não apenas para fixação de conteúdo, mas, principalmente, como uma importante ferramenta que auxilia na construção do conhecimento matemático e que permite ao estudante desempenhar um papel ativo e significativo em sua aprendizagem.

A autora considera relevante salientar que, ao referir-se à metodologia resolução de problemas, é necessário deixar explícito qual o real sentido da palavra problema nesse contexto, para não haver confusões acerca de quando a atividade se trata de resolução de problemas ou de exercícios dentro do ensino da Matemática, já que esta distinção é bastante sutil:

[...] um problema é uma importante ferramenta para apresentação, exploração, execução de debates e investigações de um conteúdo matemático e os exercícios podem contribuir quando se deseja consolidar e averiguar aspectos envolvendo cálculos matemáticos. Contudo, é importante não haver a predominância de aulas planejadas

em torno da aplicação de exercícios, desprezando o caráter investigativo e estimulante que as aulas de Matemática podem desempenhar a partir da metodologia de resolução de problemas. (MENEGUELLI, 2018, p. 216)

Para fundamentar essa pesquisa, buscou-se a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud como suporte teórico.

De acordo com Fioreze (2010), a Teoria dos Campos Conceituais é uma fonte teórica de bastante valor, haja vista sua contribuição às pesquisas que versam sobre a didática e à compreensão dos processos de desenvolvimento dos Conceitos Matemáticos voltados às Estruturas Multiplicativas e à Proporcionalidade.

Vergnaud afirma:

[...] O saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer de situações para dominar. [...] Por problema é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução. (VERGNAUD, 1990, p. 52, apud MIGUEL, 2018, p. 38).

Para se aprender o conceito de proporcionalidade, há a necessidade de se trabalharem diversos problemas práticos e teóricos. Para Vergnaud (1983), um conceito comporta várias propriedades, cuja pertinência varia de acordo com as situações a serem tratadas. Essas propriedades poderão ser compreendidas de forma imediata ou não pelos estudantes, ou, então, futuramente no decurso da aprendizagem. O campo conceitual das estruturas multiplicativas é o conjunto das situações cuja resolução implica uma ou várias multiplicações e divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações: proporção simples e múltipla, função linear e não linear, quociente e produto de dimensões, combinação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor, semelhança, dentre outros.

Por meio do exposto, é possível depreender que, há que se considerar, diante de uma situação-problema as relações estabelecidas, um vasto repertório de atividades, a elaboração de conceitos e os procedimentos pessoais utilizados, para sua resolução.

Ainda de acordo com Fioreze (2010), Vergnaud (1983), ao propor estudar um campo conceitual ao invés de um conceito, está considerando que em uma situação problema dada, o conceito não aparece isolado. A complexidade do cenário

educacional advém do fato de que muitos conceitos em matemática traçam seus sentidos utilizando uma variedade de situações e a cada situação temos vários conceitos a serem analisados.

Ao tratar das representações semióticas, nota-se proximidade com a teoria histórico-cultural e confluências com a aprendizagem desenvolvimental.

Assim, Gérard Vergnaud pode ser considerado um neopiagetiano que busca compreender os processos de conceitualização, situando e estudando as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual. Como tal, o autor busca avançar no sentido de abordar a especificidade do domínio das habilidades cognitivas, bem como atuar no sentido de favorecer aumentos evolutivos da capacidade mental. Considerando a psicologia como elemento central, o autor admite também que haja outros aportes teóricos, epistemológicos e técnicos que contribuem para sanar o problema, podendo-se pensar no papel das relações sociais, das interações e do dialogismo inerente ao problema da efetiva aprendizagem.

A Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud e a Teoria Desenvolvimental de Vasili V. Davíдов apresentam alguns pontos convergentes na compreensão do desenvolvimento do pensamento matemático em crianças. Ambas as teorias consideram o desenvolvimento do pensamento matemático como um processo contínuo, que se inicia desde a infância e se estende ao longo da vida. Tanto Vergnaud quanto Davíдов destacam a importância da interação social na formação das estruturas mentais matemáticas, especialmente durante a infância. As duas teorias consideram a prática concreta como fundamental para o desenvolvimento da compreensão, pois permite assim, a concretização das representações matemáticas.

Tanto Vergnaud, quanto Davíдов afirmam que a construção dos conceitos matemáticos é um processo ativo, no qual o indivíduo constrói significados a partir de suas próprias vivências e interações. As teorias de Vergnaud e de Davíдов concordam na importância da interação social e da prática concreta na formação das estruturas mentais, e na construção ativa dos conceitos matemáticos.

No segundo semestre de 2021, participei enquanto aluna do curso de mestrado da disciplina Educação Desenvolvimental e Atividade de Estudo, através de encontros virtuais semanais, organizados pela Professora Doutora Stela Miller, tendo como pauta o estudo de livros e artigos sobre a Educação Desenvolvimental e Atividade de

Estudo, segundo seus idealizadores. Durante as aulas, e por participar do Grupo de Pesquisa sobre Formação do Educador - Metodologias e Práticas de Ensino na Formação do Educador (GP FORME) do mesmo programa, resolvi então, aproveitar todo o conteúdo aqui assimilado e utilizar os estudos e discussões realizados no GP FORME, para fundamentar esse trabalho.

Com base nos princípios da Teoria Histórico-Cultural, a finalidade da educação é o desenvolvimento integral do sujeito em várias perspectivas, cultural, social, ética, estética, política, entre outras. A aprendizagem desenvolvimental tem como pressuposto o desenvolvimento humano, uma forma específica de desenvolvimento, de natureza psíquica e subjetiva, pois o que nos torna humanos precisa ser adquirido, como nos esclarece o autor:

[...] a aprendizagem não é, em si mesma, desenvolvimento, mas uma correta organização da aprendizagem da criança conduz ao desenvolvimento mental, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento, e esta ativação não poderia produzir-se sem a aprendizagem. Por isso, a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolvam na criança essas características humanas não-naturais, mas formadas historicamente. (VIGOTSKI, 2017, p. 115).

O autor nos traz ainda a teoria da Zona de Desenvolvimento Potencial (ZDP), que parte do princípio segundo o qual há dois níveis de desenvolvimento na criança, a zona de desenvolvimento efetivo e a zona de desenvolvimento potencial. A zona de desenvolvimento efetivo diz respeito a tudo aquilo que a criança é capaz de desenvolver intelectualmente sozinha e a zona de desenvolvimento potencial é aquela na qual a criança não é capaz de desenvolver intelectualmente sozinha, mas com o auxílio de um parceiro mais experiente. O autor menciona que

O que a criança pode fazer hoje com o auxílio dos adultos, poderá fazer amanhã por si só. A área de desenvolvimento potencial permite-nos, pois, determinar os futuros passos da criança e a dinâmica do seu desenvolvimento e examinar não só o que o desenvolvimento já produziu, mas também o que produzirá no processo de maturação. (VIGOTSKI, 2017, p. 113).

Nessa perspectiva, o professor é alguém que cria condições, organiza e orienta os alunos e a atividade é tida como categoria central, principal, pois é por meio das atividades que nosso cérebro se modifica, criando novas estruturas, ou seja, as neoformações, porém não se trata de qualquer atividade,

[...] a atividade principal é então a atividade cujo desenvolvimento governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança, em um certo estágio de seu desenvolvimento. (LEONTIEV, 2017, p. 65)

A aprendizagem se dá num processo interno, particular, de autotransformação. Por isso a importância da escola, que comumente trabalha com base na experiência, na realidade cotidiana vivida, ou seja, no pensamento empírico, impondo-se a necessidade de avançar para desenvolver o pensamento teórico, que é a capacidade humana de representar pelo plano mental e de maneira subjetiva a realidade objetiva a partir de reflexão, análise, síntese e generalização subjetiva. Davidov (2020), ao discutir os condicionantes de natureza psicológica envolvidos no processo de aprendizagem dos estudantes é enfático ao afirmar que os conteúdos e as regularidades envolvidas no processo de apropriação de ideias científicas dependem das formas concretas de atividade dentro das quais ela se constitui. Assim,

A relação teórica com a realidade e com os modos de orientação correspondentes à essa relação, constituem a necessidade específica e o motivo da Atividade de Estudo da criança. Os modos inter-relacionados da consciência teórica (científica, artística, moral e jurídica) atuam como conteúdo dessa atividade. O domínio dos modos generalizados de ação, desde o ponto de vista do conteúdo (teórico) da solução de centenas de tarefas práticas concretas, é a característica substancial da tarefa propriamente de estudo. Formular para o aluno, uma tarefa de estudo significa colocá-lo em uma situação que requer uma orientação para um modo generalizado de ação, desde o ponto de vista do conteúdo de sua solução em todas as variantes particulares e concretas possíveis das condições. (DAVIDOV, 2020, p. 170).

Por certo, a preocupação do autor é com o processo de produção de sentidos de aprendizagem e de negociação de significados de ciência, haja vista, inexoravelmente, que no caso da Matemática o sujeito cognoscente deve criar um sistema de ações organizadas em pensamento e nele inserir os objetos, ou seja, é um complexo de intrínsecas relações entre sujeito e objeto.

Nesse sentido, a aprendizagem que desenvolve o pensamento teórico só acontece na Atividade de Estudo. Davidov (2020) afirma que o mesmo opera mediante conceitos científicos:

Como conteúdo do pensamento teórico serve o ser, mediatizado, refletido e essencial. Tal pensamento constitui uma idealização do aspecto fundamental da atividade prática-objetiva, a saber, da reprodução nela das formas gerais das coisas, de sua medida e de

suas leis. Essa reprodução tem lugar na atividade produtiva num singular experimento sensório-objetivo. Depois, esse experimento vai adquirindo cada vez mais um caráter cognitivo, permitindo com o tempo que o homem passe a experimentos mentais [...] Essas singularidades do experimento psíquico constituem a base do pensamento teórico, que opera mediante conceitos científicos. (DAVIDOV, 2020, p. 98).

Vygotsky (1995), explica que a formação dos conceitos não se dá por meio mecânico, como uma simples sobreposição de fotos retiradas da realidade. Há uma elaboração por parte do sujeito na constituição do pensamento natural, que ocorre no exato instante em que ele atribui sentido para aquele momento todo de vivência.

Neste momento as crianças estão construindo seus conhecimentos, na maioria das vezes na mútua interação que estabelecem entre seus pares, seja com professores e professoras ou com crianças que tem uma percepção mais aguçada, elas tentam conservar conceitos que possibilitem seu desenvolvimento no decorrer do estudo dessa disciplina.

Como afirma Davidov (1988), há que se desenvolver um trabalho educativo voltado à constituição pelo sujeito de capacidades e habilidades historicamente formadas e imprescindíveis à ação cotidiana. Não basta ensinar ao sujeito a função social de determinado objeto, é necessário que ele desenvolva, ou reproduza, as habilidades humanas que são inerentes a esse determinado objeto, a fim de usá-lo adequadamente.

Ainda de acordo com Davidov (1988), é por meio da atividade prática, sempre social, do contato imediato com os objetos da cultura, contato esse mediado pelas relações sociais com pessoas mais experientes, que as características e as propriedades destes objetos passam a ser interiorizadas, apropriadas pelo sujeito, constituindo uma representação mental dos objetos, de acordo com as necessidades do homem social.

Entendemos que, o desenvolvimento humano está vinculado à atividade dos indivíduos concretos incluídos no sistema de relações da sociedade. Não se pode considerar a atividade desvinculada das relações sociais, pois desta maneira ela não existe. Toda atividade psíquica, então, é um reflexo da atividade prática, transportando para a atividade subjetiva toda a atividade com objetos realizada no mundo cultural, objetivo. Claro que este transporte não ocorre de modo mecânico, mas implica a participação ativa do sujeito, processo denominado pela teoria

histórico-cultural como objetivação, sempre determinado pelas relações sociais em que o sujeito se encontra envolvido.

A partir dos seis anos a criança é capaz de realizar abstrações. A abstração é a capacidade de representar no plano mental um objeto em sua ausência, sendo assim, nessa idade já é possível desenvolver conceitos, conforme explicita o autor:

O caminho da assimilação do conhecimento tem duas características. Em primeiro lugar, o pensamento do aluno se move do geral ao particular (os alunos buscam a “célula” primária do material didático e, em seguida, usa-a como guia, para deduzir as relações particulares da disciplina). Em segundo lugar, a assimilação está orientada para que os alunos revelem as condições de origem dos conceitos por eles assimilados. Os alunos determinam, primeiramente, a relação geral inicial em uma determinada área e, em seguida, constroem sobre sua base a generalização substancial e, devido a isso, reconhecem o conteúdo da “célula” da disciplina estudada. No final esse processo se transforma em meio para deduzir as relações particulares, quer dizer, em conceitos. (DAVIDOV, 2020, p. 216).

Nesse processo de desenvolvimento o autor destaca ainda:

No processo da prática sistemática da Atividade de Estudo pelos alunos, juntamente com a assimilação do conhecimento, desenvolvem-se a consciência e o pensamento teórico. Na idade escolar inicial, a Atividade de Estudo é a principal, entre outras atividades realizadas pela criança. Durante a formação da Atividade de Estudo, nas séries iniciais do ensino fundamental, os alunos desenvolvem uma importante neoestrutura psicológica: as bases da consciência e do pensamento teórico, bem como as ações mentais a elas associadas (reflexão, análise e planejamento). (DAVIDOV, 2020, p. 217).

Para Libâneo (2004), é fundamental entender que o conhecimento supõe o desenvolvimento do pensamento e que desenvolver o pensamento supõe metodologia e procedimentos sistemáticos do pensar, por isso a importância das mediações cognitivas. Para o autor:

O suporte teórico de partida é o princípio vygotskiano de que a aprendizagem é uma articulação de processos externos e internos, visando a internalização de signos culturais pelo indivíduo, o que gera uma qualidade autorreguladora às ações e ao comportamento dos indivíduos. Esta formulação realça a atividade sócio-histórica e coletiva dos indivíduos na formação das funções mentais superiores, portanto o caráter de mediação cultural do processo de conhecimento e, ao mesmo tempo, a atividade individual de aprendizagem pela qual o indivíduo se apropria da experiência sociocultural como ser ativo. Todavia, considerando-se que os saberes e instrumentos cognitivos se constituem nas relações intersubjetivas, sua apropriação implica a interação com os outros já portadores desses saberes e instrumentos.

Em razão disso é que a educação e o ensino se constituem formas universais e necessárias do desenvolvimento mental, em cujo processo se ligam os fatores socioculturais e as condições internas dos indivíduos. (LIBÂNEO, 2004, p. 6).

Nesse sentido, vale ressaltar que o aluno é capaz de produzir conceitos quando o professor fornece os elementos essenciais para que ele resolva determinadas situações-problema, sendo de fundamental importância uma fala colaborativa e dialógica, além de indagar de forma que faça o aluno refletir. Vale dizer também, que o aluno será um sujeito pensante se o professor também pensar teoricamente.

A escola deve proporcionar a aprendizagem em que o foco seja o desenvolvimento do pensamento teórico e a aprendizagem que desenvolve o pensamento teórico acontece na Atividade de Estudo.

A Atividade de Estudo dos alunos das séries iniciais do nível fundamental é construída de acordo com o método de exposição do conhecimento científico (ascensão do abstrato para o concreto). O pensamento dos alunos durante a Atividade de Estudo, tem algo em comum com o pensamento característico dos cientistas, os quais expõem os resultados de suas investigações por intermédio das abstrações, generalizações e conceitos teóricos que funcionam no processo do abstrato para o concreto. (DAVIDOV, 2020, p. 214).

Pode-se citar ainda, a importância dessa nova posição social que a criança assume ao chegar à escola de anos iniciais, em que sai do período pré-escolar e necessita de fontes mais amplas de conhecimento, pois à medida que aumentam seus interesses cognitivos, esses “atuam como premissas psicológicas para que surja a necessidade de assimilar o conhecimento teórico” (DAVIDOV, 2020, p. 218). Davidov nos coloca a necessidade da Atividade de Estudo para induzir os alunos a assimilar o conhecimento teórico,

No início da vida escolar, a criança ainda não experimenta a necessidade do conhecimento teórico como base psicológica da Atividade de Estudo. Ela surge no processo de assimilação real do conhecimento teórico elementar, durante a resolução de problemas, com auxílio do professor, das ações de estudo mais simples, dirigidas à solução das correspondentes tarefas de estudos. Segundo Vigotski (1982, p. 243) “o desenvolvimento da base psicológica da aprendizagem [...] não precede o início dessa, mas se realiza em uma ininterrupta relação interna com ela, no curso de seu desenvolvimento progressivo”. (DAVIDOV, 2020, p. 218).

Sabe-se que esse desenvolvimento acontece de maneira processual, destaca-se a importância de iniciarmos esse trabalho já no primeiro ano do ensino fundamental, pois a princípio os alunos precisarão de uma orientação maior para no

decorrer do processo ir se apropriando até chegar ao ponto de realizar os estudos autonomamente.

Para ilustrar, utilizou-se de um exemplo citado por Roberto Valdés Puentes (2021) em um encontro de seu grupo de estudos. Ao trabalhar com o conteúdo “rio”, a escola traz dezenas deles, informando seu nome, cidades por onde passam, seus afluentes, capacidade de água em determinada seção, se desembocam ou não no mar, entre outros aspectos, porém não traz, por exemplo, três elementos principais para estabelecer o conceito de rio, água, nascente e curso, através de uma situação problematizadora, entendendo a essência de rio, dessa forma a criança reproduzirá o conceito já existente e o assimilará.

Os psicólogos e filósofos da teoria marxista explicam que o conhecimento se expressa duas vezes, primeiro como processo de produção do conhecimento e depois como relato desse processo. O movimento de produção do conhecimento vai do concreto ao abstrato pensado e o movimento do relato de produção do conhecimento vai do abstrato ao concreto pensado.

O método de exposição dos conceitos científicos, como resultado da investigação, diferencia-se do próprio método de pesquisa científica. De acordo com Marx (MARX; ENGELS, 1960), o método de exposição deve distinguir-se formalmente do método de pesquisa. Esta deve conhecer o material estudado de maneira detalhada e profunda, analisar as diversas formas de seu desenvolvimento e encontrar as conexões internas. Somente depois desse trabalho é possível apresentar seu verdadeiro movimento. Quando isso for bem-sucedido, podemos afirmar que temos uma construção *a priori*. A apresentação dos conhecimentos científicos é feita pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto, no qual se utilizam as abstrações e generalizações substanciais e os conceitos teóricos.

A pesquisa se inicia com o exame da diversidade sensorial concreta dos tipos particulares do movimento do objeto e, em seguida, passa para a demonstração da base interna universal. Portanto, a apresentação dos resultados da pesquisa (tendo os resultados o mesmo conteúdo objetivo) começa a desprender dessa base universal, já encontrada, para a reprodução mental dos seus casos particulares; porém, ao mesmo tempo, preserva a sua conexão interna (o concreto). (DAVIDOV, 2020, p. 213-214).

Davidov (2020), afirma, que o processo de aprendizagem se dá na escola de acordo com o segundo momento, ou seja, o aluno repete o que o cientista realizou para produzir esse conceito, só que no sentido contrário, do geral para o particular, do abstrato para o concreto, partindo dos elementos essenciais para sua definição.

O pensamento dos alunos das séries iniciais do nível fundamental, embora tenha algumas características comuns, não é idêntico ao pensamento dos cientistas, artistas e outros. Os alunos não criam

conceitos, valores e normas de moralidade social, mas os assimilam no processo da Atividade de Estudo. Porém, nesse processo de execução os alunos realizam ações mentais adequadas àquelas por meio das quais esses produtos da cultura espiritual foram desenvolvidos no percurso histórico.

Na Atividade de Estudo, os alunos reproduzem o processo real pelo qual os homens criaram os conceitos, as imagens, os valores e as normas sociais. Portanto a aprendizagem das disciplinas deve ser estruturada de maneira que, como escreveu Ilenkov (1964), “de forma concisa e resumida, reproduza o processo histórico real de produção e desenvolvimento dos [...] conhecimentos”. (DAVIDOV, 2020, p. 214-215).

Durante a pesquisa, buscou-se compreender o movimento do pensamento, visando o desenvolvimento do pensamento teórico sobre o conceito de proporcionalidade e analisou-se também como esse tema está presente nos documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Paulista (CP).

Os PCN além de trazer um histórico de análise da trajetória das reformas no ensino de Matemática, aborda o papel da Matemática no Ensino Fundamental, trata da importância da transdisciplinaridade, aponta as principais características do conhecimento matemático, traz a importância da Matemática na construção da cidadania, entre outros e já na seção Caracterização da Área da Matemática em suas considerações preliminares destaca aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem.

No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados. A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 2000, p. 19).

Embora nos PCN a Lógica não se constitua como bloco de conteúdo a ser abordado de forma sistemática no Ensino Fundamental, o documento afirma que

alguns de seus princípios podem ser tratados de forma integrada aos demais conteúdos, desde as séries iniciais. Abordando ainda, a proporcionalidade como ideia ou procedimento matemático, como sendo fonte natural e potente de articulação e, dessa maneira, presta-se a uma abordagem dos conteúdos em que diversas relações podem ser estabelecidas e exemplifica:

A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Ele está ligado à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor?). Para raciocinar com proporções é preciso abordar os problemas de vários pontos de vista e também identificar situações em que o que está em jogo é a não-proporcionalidade. (BRASIL, 2000, p.38).

De acordo com Passos (2018), com a reformulação do Ensino Fundamental e o ingresso de crianças à partir dos seis anos de idade no primeiro ano escolar, e com a divulgação pública dos resultados de avaliações em larga escala, principalmente pela Prova Brasil, o governo federal sentiu a necessidade de definir o que se espera da escola nos anos iniciais. Assim o Ministério da Educação e Cultura (MEC), organizou ações para melhoria da aprendizagem dos alunos e da qualidade do ensino, principalmente nas escolas públicas.

Em 2012, como explica Rolkouski (2018, p. 119), foi elaborado pelo MEC, em parceria com pesquisadores e profissionais da Educação Básica, o documento Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental, tendo como respaldo o “artigo 210 da Constituição Federal de 1988, que determina como dever do Estado, fixar conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar a formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais”. Esse documento, além de apresentar o conceito de aprendizagem como direito humano, apresentou componentes curriculares, relacionando-os aos direitos de aprendizagem, e ainda apresentou a estrutura do que seria considerado para garantir esses direitos. Um grupo de trabalho, composto por professores da Educação Básica de várias regiões do país, pesquisadores de diversas instituições públicas brasileiras de Ensino Superior, foi responsável por sua elaboração, “um processo longo e democrático de discussão com conselhos, comunidade acadêmica e escolar”. (Rolkouski, 2018, p.120 apud PASSOS, 2018, p. 123).

Com o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), programa lançado pelo MEC, a alfabetização foi compreendida na perspectiva do letramento, tratando-se de uma educação matemática que valoriza o saber dos estudantes, os ajudando a compreender os modos como a sociedade organiza suas experiências com o auxílio da Matemática, promovendo compreensão e leitura de mundo.

Dentre as ações articuladas pelo PNAIC destaca-se a formação continuada de professores. O ano de 2014 foi marcado por um projeto nacional de formação de professores que ensinam Matemática no Ciclo de Alfabetização. Não temos notícias de outro programa de políticas públicas que tenha promovido formação nessa extensão. Houve envolvimento das universidades com as escolas públicas, promovendo formação na modalidade de multiplicadores, ou seja, equipes dos municípios participavam dos encontros com os formadores do PNAIC e, de volta às suas cidades, organizavam a formação local. [...] Acrescente-se o fato de que muita pesquisa foi desenvolvida e muito conhecimento foi produzido a partir desse programa, o que pode ser conferido pelo número representativo de trabalhos em eventos ou artigos em periódicos da área de Educação ou Educação Matemática. (PASSOS, 2018, p.124).

Com a nova constituição do Ministério da Educação, após o impeachment da presidente Dilma Rousseff, o país assistiu a uma descontinuidade de um projeto nacional que vinha apresentando bons resultados. Na época, o documento que estava sendo elaborado para a base curricular comum, prevista no Plano Nacional de Educação, era composto de uma equipe de especialistas multidisciplinar e com representantes da sociedade brasileira. A nova equipe do referido Ministério, já no Governo de Michel Temer, foi composta por especialistas convidados e por representantes de grupos empresariais, como a Fundação Lemann, que trataram de elaborar a terceira versão do documento e enviar ao Conselho Nacional de Educação no início de 2017.

Com a homologação da BNCC em dezembro de 2017 há uma mudança na área da Matemática com relação aos campos abordados, que passam a ser cinco, a saber: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Embora haja um comprometimento com o letramento matemático, o reduz a um processo para o desenvolvimento de competências. Definição de letramento matemático no documento:

[...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando

conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2017, p.268).

A BNCC reconhece a proporcionalidade como parte do conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre si e sua importância para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Embora de maneira mais sucinta que nos PCN, como podemos observar neste exemplo:

A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade; etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2017, p. 268).

Com a homologação da BNCC, estados e municípios tiveram que reelaborar seus currículos e em 2019 acontece a homologação do Currículo Paulista (CP) pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP), em 2020 inicia-se sua implementação.

Conforme proposto pela BNCC, o CP de Matemática, agrupa as habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. As unidades temáticas reúnem um conjunto de ideias fundamentais, como Equivalência, Ordem, Aproximação, Variação, Interdependência, Representação e Proporcionalidade.

Ao tratar da proporcionalidade, o CP reitera “que contempla o raciocínio analógico, comparações quando se trata de frações, razões e proporções, semelhança de figuras, grandezas diretamente proporcionais, entre outros”. Trazendo ainda, o objetivo com a realização do trabalho envolvendo proporcionalidade e exemplifica:

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o objetivo da proporcionalidade está em desenvolver o pensamento algébrico, o que significa: observar um fato ou relação, identificar um padrão, algo que se repete, generalizar esse padrão e fazer deduções a partir dessa generalização, sem o uso de letras, com ênfase na maneira de pensar. Assim, nos problemas de proporcionalidade, é preciso entender a situação e identificar que a relação entre as grandezas envolvidas é de um tipo especial. Uma vez identificado que se trata de uma relação proporcional direta, é preciso usar esse conhecimento e fazer alguma generalização, usando a relação identificada. Por exemplo, se  $x$  dobra, então  $y$  dobra ou, se  $x$  cai pela metade,  $y$  cai pela metade, ainda que usando, nesse argumento, as grandezas  $x$  e  $y$  presentes no problema

que está sendo resolvido pelos estudantes. (SÃO PAULO, 2019, p. 319-320).

Como já citado anteriormente, por conta da BNCC, estados e municípios reelaboram seus currículos e o estado de São Paulo em 2020 inicia sua implementação de maneira concomitante com a eclosão da pandemia da COVID-19. Os materiais do EMAI, passam por reformulação e apesar de alguns esforços, perdem sua essência, desde sua forma impressa, que deixa de ser um livro exclusivo para o trabalho com Matemática e passa a ser acoplado ao material Aprender Sempre, destinado ao trabalho com Língua Portuguesa e Matemática, até seu conteúdo, que aparece de maneira mais enxuta que a versão anterior. Em sua versão preliminar de 2020, justifica:

Em 2012, foram construídas as primeiras versões dessas trajetórias com a participação direta de PCNP, PC e professores. Elas foram revistas e compuseram o material que foi apresentado ao professor em 2013. A partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC – dezembro de 2017) e do Currículo Paulista, homologado em agosto de 2019, o material passa por uma nova revisão para atender tais documentos e apoiar a continuidade do Projeto a partir de 2020. (SÃO PAULO, 2020, p. 4).

Os conteúdos são uma organização sociopolítica, sendo que diferentes visões de mundo impõem diferentes visões curriculares, há sempre que se pensar sobre a politicidade intrínseca nesses projetos educacionais, haja vista que, a Educação tornou-se uma política de governo, quando deveria ser uma política de Estado. Em meio a tantos acontecimentos e mudanças, diante de políticas que se preocupam mais com os resultados do que com os processos educativos, a consequência não é nossa desconhecida, sabemos que, mudam-se as propostas, projetos, currículos, mas a teoria é pouco conhecida e o fazer pedagógico na maioria das vezes, é como se fosse mais do mesmo, pouco ou quase nada se investe na formação continuada dos professores e é sabido que a formação inicial, ainda, tem um desempenho abaixo das expectativas, deixando a desejar.

No segundo semestre de 2020, começam a chegar nas escolas as versões online, para impressão local, dos materiais didáticos do Aprender Sempre, que serviriam de apoio para as transmissões realizadas pelo Centro de Mídias de São Paulo (CMSP), uma plataforma composta por dois canais digitais abertos e por um aplicativo. Em sua apresentação, o documento traz

Estas sequências didáticas foram elaboradas com o intuito de oferecer um suporte adicional aos estudantes, auxiliando-os no processo de recuperação e aprofundamento de aprendizagens essenciais para seu percurso educacional. Com o intuito de favorecer a aprendizagem de todos os estudantes, não deixando ninguém para trás, serão oferecidas, além das sequências de atividades, avaliações diagnósticas e formativas para acompanhar a evolução da aprendizagem dos estudantes e direcionar o ensino às suas necessidades; e formações, com foco no uso do resultado das avaliações, em metodologias que favorecem a recuperação e aprofundamento da aprendizagem, e no desenvolvimento das atividades presentes neste material. (SÃO PAULO, 2020, p. 2).

Somente em 2022, chega nas escolas do primeiro segmento do ensino fundamental para o primeiro semestre, o material didático Currículo em Ação impresso.

Quanto à proposta de Matemática para o ciclo de alfabetização, uma das professoras especialistas que acompanharam a elaboração do material, Luciana Tenuta, explica:

A proposta de trabalho com a Matemática está alinhada ao Currículo Paulista e contempla as cinco Unidades Temáticas – Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística – integradas às outras áreas de conhecimento. A concepção de ensino de Matemática leva em conta a resolução de problemas como eixo condutor das atividades visando ao letramento matemático. O material foi cuidadosamente elaborado envolvendo o contexto regional, de modo que os(as) estudantes se identifiquem com as situações de aprendizagem propostas e possam desenvolver o pensamento matemático por meio da resolução de problemas ligados ao seu cotidiano. Ao longo de todo o processo, os(as) estudantes discutem e validam ideias e estratégias de resolução para as atividades propostas, refletem sobre as possíveis soluções, fazem registros, num ambiente de aprendizagem que valoriza e estimula a participação ativa dos(as) estudantes e busca, assim, desenvolver habilidades e competências. (SÃO PAULO, 2021, p. 4).

O Currículo em Ação, traz em seus cadernos (tanto do professor quanto do aluno) várias sequências didáticas propostas pela revista Nova Escola, provocando um esvaziamento do Projeto EMAI e acarretando numa ruptura de currículo em rede, retrocedendo para uma proposta de currículo linear.

[...] Os “Planos de Aulas Nova Escola” são um exemplo claro que tolhe a autonomia docente. Segundo divulgação no portal que abriga tais planos, a Associação Nova Escola, criada com o apoio de sua mantenedora, Fundação Lemann e Google.org, montou um “time de professores de Matemática” para criar materiais *online* e gratuitos, para a sala de aula, alinhados à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da Educação Infantil e do Ensino Fundamental. Os planos de aula apresentam o conteúdo, o roteiro, o controle de tempo para cada

ação do professor, e indicam questões a serem feitas aos alunos e como o professor pode avaliar o desempenho deles. (PASSOS, 2018, p. 126).

Há que se pontuar ainda, que antes de cada sequência, nessa reformulação, é descrita as habilidades a serem contempladas em cada uma das sequências e ou atividades.

Na próxima seção são abordados os procedimentos metodológicos adotados para desenvolvimento da pesquisa.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O desenvolvimento deste trabalho foi realizado em aproximadamente 24 meses, cujas atividades foram: cumprimento de créditos em disciplinas do Programa de Pós-Graduação em Educação; pesquisa documental e bibliográfica; leitura das fontes documentais; leitura da bibliografia especializada; redação do texto para exame geral de qualificação; e redação da versão final da dissertação do mestrado.

A demarcação cronológica da pesquisa foi definida entre 2012 (ano de início das primeiras iniciativas oficiais, em âmbito estadual, em relação à elaboração do material didático) e 2022 (período previsto para o encerramento da pesquisa documental e bibliográfica).

Foi realizada a análise de todos os livros que compõem o Projeto EMAI, que são organizados em dois volumes para cada ano de escolaridade, sendo um volume para cada semestre, tanto o material do aluno, como o do professor, totalizando dez volumes. No livro destinado aos alunos, são apresentadas as atividades a serem realizadas e no livro destinado aos professores, são apresentadas além das atividades que constam no livro do aluno, o passo a passo de como propor a sua realização.

Após escolha do tema, que de acordo com Asti Vera (1976), “é uma dificuldade, ainda sem solução, que é mister determinar com precisão, para intentar, em seguida, seu exame, avaliação crítica e solução”. Foi realizada a delimitação do mesmo, que de acordo com Salvador (1980), “é o conteúdo que se focaliza, em torno do qual gira toda a discussão ou indagação”.

Diante das questões norteadoras da pesquisa: *como se desenvolve o conhecimento matemático? Como se desenvolve a ideia de proporcionalidade? Com relação às dificuldades e ao baixo rendimento em Matemática por parte dos alunos, onde está a falha: na escola, na forma como os conteúdos são trabalhados, ou no material didático utilizado como norteador desse trabalho?* Levou-se em consideração a prática docente da pesquisadora bem como sua *expertise* em educação, em concomitância com suas inquietações enquanto professora atuante nos anos iniciais da Educação Básica por aproximadamente quinze anos.

Sendo a pesquisa o elo entre teoria e prática, parte-se para a prática, e portanto, se fará pesquisa, fundamentando-se em uma teoria que, naturalmente, inclui princípios metodológicos que contemplam uma prática. Mas um princípio básico das teorias de conhecimento nos diz que as teorias são resultado das práticas. Portanto, a prática resultante da pesquisa modificará ou aprimorará a teoria de partida. E,

assim modificada ou aprimorada essa teoria criará necessidade e dará condições de mais pesquisa, com mais detalhes e profundidade, o que influenciará a teoria e a prática. Nenhuma teoria é final, assim como nenhuma prática é definitiva, e não há teoria e prática desvinculadas. A aceitação desses pressupostos conduz à dinâmica que caracteriza a geração e a organização do conhecimento: ... teoria → prática → teoria → prática → teoria... (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 74-75).

Com o propósito de tentar responder a esses questionamentos, esboçou-se uma interface entre a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e a Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e colaboradores.

A questão norteadora, o material didático do Projeto EMAI apresenta de forma estruturada, didática, de maneira a auxiliar no desenvolvimento da ideia de proporcionalidade, conteúdos referentes ao tema? Questão esta que auxiliou no desenvolvimento do objetivo geral desta pesquisa de mestrado: analisar se a construção da ideia de proporcionalidade é contemplada no material didático do Projeto EMAI e em caso positivo, de que maneira. Para contribuir no cumprimento desse objetivo geral, desmembrou-se em dois objetivos específicos: analisar o material didático do Projeto EMAI; e verificar, se e de que maneira o tema proporcionalidade nele é proposto.

Foram utilizados textos publicados em forma de artigos, teses acadêmicas, leis, decretos, o próprio material didático EMAI, programas e similares, que auxiliaram a responder a questão norteadora dessa pesquisa.

Para a realização desse trabalho, optou-se pela pesquisa documental e bibliográfica, por meio da hipótese explicativa de fontes documentais sobre a construção da ideia de proporcionalidade no material didático do Projeto EMAI do qual resultará um instrumento de pesquisa contendo referências de textos escritos sobre o tema.

De acordo com Cervo e Bervian (1976), qualquer tipo de pesquisa em qualquer área do conhecimento, supõe e exige pesquisa bibliográfica prévia, quer para o levantamento da situação em questão, quer para a fundamentação teórica ou ainda para justificar os limites e contribuições da própria pesquisa.

A opção por essa metodologia decorre do fato de considerá-la adequada à análise de textos legais e acadêmico-científicos tomados na pesquisa como documentos históricos compreendidos não como meras sobras do passado, mas como

[...] produto da sociedade que o fabricou segundo as relações de força que aí detinham o poder. Só a análise do documento enquanto monumento permite à memória coletiva recuperá-lo e ao historiador usá-lo cientificamente, isto é, com pleno conhecimento de causa. [...] O documento não é inóculo. É, antes de mais nada, o resultado de uma montagem, consciente ou inconsciente, da história, da época, da sociedade que o produziram, mas também das épocas sucessivas durante as quais continuou a viver, talvez esquecido, durante as quais continuou a ser manipulado, ainda que pelo silêncio. O documento é uma coisa que fica, que dura, e o testemunho, o ensinamento (para evocar a etimologia) que ele traz devem ser em primeiro lugar analisados, desmistificando-lhes o seu significado aparente. O documento é monumento. Resulta do esforço das sociedades históricas para impor ao futuro — voluntária ou involuntariamente — determinada imagem de si próprias. No limite, não existe um documento-verdade. Todo documento é mentira. Cabe ao historiador não fazer o papel de ingênuo (LE GOFF, 2003, p. 535-538).

Conforme exposto na introdução desse trabalho, participamos através de grupos colaborativos, da construção desse material e o utilizamos em sala de aula desde suas versões preliminares, salientando-se ainda, que durante os últimos dez anos a pesquisadora atua na mesma escola estadual.

Durante esse período, tínhamos um governo federal progressista, que investia em planos de alfabetização e oferecia cursos de capacitação para os professores em parceria com universidades públicas estaduais, para melhor desenvolvimento do trabalho docente, a exemplo. As três esferas, poder público federal, universidade pública e escola pública, cumpriam, ou ao menos estavam buscando cumprir a sua função social. Com o novo governo federal, há uma ruptura desse processo, de acordo com Passos,

Romper com a proposta de formação continuada do professor alfabetizador iniciada em 2013, que considerava a cultura escolar e os contextos de sua prática, substituindo-a por prescrições que engessam seu trabalho, exercida por setores empresariais e não pelos espaços formativos das instituições que formam professores, coloca na berlinda o futuro do ensino da Matemática nos primeiros anos de escolarização. (PASSOS, 2018, p. 131).

É possível afirmar que, durante a implementação do material havia um currículo em rede, onde propostas para esta implementação eram discutidas, analisadas e reanalisadas, além da formação continuada e da capacitação em serviço para trabalhar com o material, ou seja, os professores tinham mais vez e voz. Embora claro, sem ingenuidade, é sabido que os currículos, propostas, trabalho com temas

geradores, projetos, complexos temáticos, entre outros, são instituídos numa linha vertical, de cima: governo estadual, secretaria de educação; para baixo: escola, professores.

As constantes mudanças curriculares que chegam à escola, sem avaliar o impacto de propostas anteriores, sem considerar a avaliação que o professor faz de seu trabalho, tendem ao fracasso. Por outro lado, as avaliações externas recaem em críticas ao trabalho docente e conduz os professores à práticas de “preparação” para responder à questões de provas. Tais ações interrompem a autonomia que foi sendo construída com os processos formativos que valorizava o protagonismo docente, desconsideram os saberes acumulados por eles. Sem dúvida, o sucesso da aprendizagem escolar depende essencialmente da clareza que o professor tem do que deve ou não ser ensinado em suas aulas, mas depende também do repertório de saberes que permitem que ele compreenda as entrelinhas que estão por trás de recomendações curriculares. (PASSOS, 2018, p. 132)

Contudo, ainda que de maneira inicial, havia diálogo, numa tentativa de construir inovações na organização curricular, pois de acordo com D’Ambrósio (2012), “currículo é a estratégia para a ação educativa” e nos mostra ainda os “seus três componentes: objetivos, conteúdos e métodos”.

Nesse sentido, Freire (1996) afirma que os professores precisam de formação permanente para o desenvolvimento de uma prática curricular libertadora, isso implica compreender o ser humano como ser inconcluso, numa perspectiva de ser mais. Formação permanente então, não se destina só aos educandos em momentos de sua escolarização, mas a todo o ser humano em qualquer etapa de sua existência, estando aliada à compreensão de que ela incide sobre a realidade concreta, sobre a realidade prática. Acrescentando ainda:

A prática docente crítica, implicante no pensar certo, envolve o movimento dinâmico, dialético, entre o fazer e o pensar sobre o fazer. O saber que a prática docente espontânea ou quase espontânea, “desarmada”, indiscutivelmente produz é um saber ingênuo, um saber de experiência feito, a que falta a rigorosidade metódica que caracteriza a curiosidade epistemológica do sujeito. [...] O que se precisa é possibilitar, que, voltando sobre si mesma, através da reflexão sobre a prática, a curiosidade ingênua, percebendo-se como tal, se vá tornando crítica. (FREIRE, 1996, p. 38-39).

Com relação ao ensino e a aprendizagem, cabe ao professor o papel essencial de reconhecer o material didático como um instrumento de trabalho, e busque estudar

o material a ser utilizado, a teoria que o sustenta, e assim passar a ser um coautor da proposta, e não apenas mero executor.

Davidov (1988) considera de suma importância o papel do professor, pois é sob sua direção que as crianças, ao iniciarem o estudo de qualquer matéria curricular, analisam o conteúdo e identificam a relação geral (principal) e suas manifestações em relações particulares. Ao registrarem a relação geral constroem uma abstração teórica. E, ao detectarem a vinculação regular da relação principal com suas manifestações particulares, realizam a generalização teórica do assunto estudado.

Para analisar e discutir as atividades que tratam da ideia de proporcionalidade no material do Projeto EMAI, faremos a apresentação da organização do material, dos objetivos, da base teórica que o sustenta, identificaremos se algumas das atividades propostas, que foram selecionadas, estão apresentadas de forma clara para alcançar esses objetivos, bem como verificar se promovem o desenvolvimento do conceito.

O material do Projeto EMAI apresenta as atividades organizadas e divididas em blocos de conteúdos, para todos os anos de escolaridade, a saber, Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Realizou-se a abordagem de algumas atividades, contemplando ao menos uma atividade proposta para cada ano de escolaridade, buscando observar pelo menos uma atividade de cada eixo temático ou bloco de conteúdos, que tratam da ideia de proporcionalidade no material do Projeto EMAI para analisar, discutir e verificar se promovem o desenvolvimento do conceito, porque há uma diferença entre apresentar a ideia e promover o desenvolvimento.

O desenvolvimento acontece por meio da assimilação (apropriação) do indivíduo da experiência histórico-social. Não se pode concordar com a contraposição entre assimilação e desenvolvimento, isto é, quando o desenvolvimento é compreendido como um processo independente da assimilação; também quando é tratada como algo autônomo que acontece em paralelo com o desenvolvimento ou; mesmo entendida “no lugar” do desenvolvimento. Por outro lado, a assimilação nem sempre leva ao desenvolvimento. (DAVIDOV; MÁRKOVA, 2020, p. 194)

Os autores apontam ainda, que em um sistema de organização da aprendizagem de forma tradicional, a experiência socialmente elaborada é transferida aos alunos, separando o ensino como sendo o que o professor faz e a aprendizagem funcional, aquilo que o aluno faz, defendendo que:

De acordo com o Vigotski, a aprendizagem desenvolvimental só pode ser considerada eficaz quando é orientada para o desenvolvimento

futuro. As alterações qualitativas no desenvolvimento da criança, que se formarem no decorrer da aprendizagem desenvolvimental em determinados estágios evolutivos, L. S. Vigotski chama de novas formações. Assim se a assimilação é a reprodução pela criança da experiência socialmente desenvolvida, a aprendizagem desenvolvimental é a forma de organização dessa assimilação adotada nessas condições históricas concretas em uma determinada sociedade. Então o desenvolvimento é caracterizado principalmente por mudanças qualitativas no nível e na forma dos modos de ação, os tipos de atividades etc., de que se apropria o indivíduo. (DAVIDOV; MÁRKOVA, 2020, p. 195).

Na próxima sessão é realizada a abordagem de algumas atividades que tratam da ideia de proporcionalidade no material EMAI.

#### 4 A PROPORCIONALIDADE NO PROJETO EMAI

Conforme indicado nas seções anteriores, a noção de proporcionalidade constitui ideia fundamental não apenas para a consolidação do raciocínio lógico face às implicações para a formulação do próprio pensamento matemático, mas principalmente para desenvolvimento do pensamento teórico, em sentido amplo, por envolver considerável gama de relações conceituais no processo de apropriação do conhecimento científico, de forma geral.

Assim, nesta seção analisaremos o material relativo a algumas atividades envolvendo o conceito de proporcionalidade no projeto EMAI, buscando estabelecer relações com o referencial teórico construído, principalmente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento teórico, base para a consolidação de encaminhamentos necessários ao processo que poderia ser denominado de educação desenvolvimental.

Conforme nossa convicção teórica, educação desenvolvimental envolve pensar ensino e aprendizagem como ações dialeticamente articuladas, ou seja, processos que se complementam dialeticamente de tal modo que uma ação melhora a compreensão que da outra se tem, exigindo novas posturas de educadores e educandos frente às necessidades de produção de sentidos de aprendizagem e de negociação de significados matemáticos.

A ideia de proporcionalidade é de ampla aplicação não apenas em outras temáticas do campo matemático, como no amplo espectro dos números racionais ou de semelhança de figuras geométricas, mas também em outras áreas de conhecimento como Ciências, Física, Química, Geografia, Economia, Matemática Financeira, Estatística, etc.

Nesse modo de pensar, a primeira consequência do debate sobre a noção de proporcionalidade é que ela não deve ser tratada de forma isolada no currículo, como algo estanque, mas articuladamente a outras instâncias do conhecimento.

Essa discussão está bem situada no contexto das tentativas de renovação dos programas de ensino de Matemática postas em prática a partir de meados da década de 1.980, marco histórico do processo de redemocratização da sociedade brasileira. No contexto dos Parâmetros Curriculares Nacionais, por exemplo, estabeleceu-se que:

A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. [...] A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 2000, p. 19-20).

Por isso, a aprendizagem da proporcionalidade deve favorecer a inter-relação entre as ideias matemáticas de forma tal que o aluno possa, ao aprender Matemática, reconhecer a sua utilidade na vida cotidiana e, progressivamente, na constituição do processo de desenvolvimento de outras ideias científicas.

Registre-se, então, que a abordagem de temas, os quais, por sua própria natureza, deveriam ser tratados de forma vinculada à noção de proporcionalidade, têm sido trabalhados de forma isolada uns dos outros, dificultando sua apropriação e síntese por parte dos alunos.

De fato, a apropriação dos conceitos matemáticos exige a formulação de situações didáticas envolvendo diferentes representações dos objetos de estudo sob a forma de articulações entre signos, conceitos, propriedades, estruturas e relações, ou seja, conhecer diferentes formas de representação do mesmo ente matemático pode facilitar a aprendizagem conforme depreendemos da formulação teórica de Duval (2007).

Assim, é importante considerar em nossa análise que os materiais do Projeto EMAI estão organizados em dois volumes por ano de escolaridade, sendo que o volume 1 corresponde ao trabalho a ser desenvolvido no primeiro semestre e o volume 2 corresponde ao trabalho a ser desenvolvido no segundo semestre de cada ano escolar, contendo um livro para realização das atividades pelos alunos, onde são apresentadas as atividades organizadas em blocos de conteúdos ou eixos temáticos e estas dispostas em sequências didáticas que contemplam ao menos uma atividade de cada eixo e um livro organizado para os professores, que além de incluir as atividades da mesma maneira que é apresentada aos alunos, só que em tamanho reduzido, traz orientações com a finalidade de auxiliar na proposta de realização das

atividades matemáticas apresentadas aos alunos e traz ainda, reflexões sobre hipóteses de aprendizagem das crianças, embasada na teoria que sustenta a organização das sequências didáticas de acordo com cada Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Conforme consta no capítulo introdutório do volume do professor de cada ano, sua organização se dá da seguinte maneira:

[...] está organizado em Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) que incluem um plano de ensino organizado a partir da definição de objetivos para a aprendizagem (expectativas) e das hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos. (SÃO PAULO, 2014, p. 7).

A ideia de THA mencionada na citação anterior baseia-se em investigações desenvolvidas por Simon (1995), citadas por Pires (2014):

Usaremos o termo trajetória hipotética de aprendizagem tanto para fazer referência ao prognóstico do professor, como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética porque caracteriza a propensão a uma expectativa. O conhecimento individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora frequentemente em caminhos similares. O conhecimento do indivíduo tem alguma regularidade [...], que em sala de aula adquire com atividades matemáticas frequentes em métodos prognósticos, e que muitos dos alunos em uma mesma sala de aula podem se beneficiar das mesmas tarefas matemáticas. (PIRES *apud* SIMON, 2014, p. 3).

O material em análise, EMAI, traz ainda uma ilustração de como isso se dá, conforme a configuração do próprio mentor da THA:

**Ilustração 1- THA**



**FONTE:** EMAI 1º ano, 2014, vol. 2, material do professor, p. 7

Nesse modo de pensar, os objetivos de aprendizagem, as próprias atividades de aprendizagem e pensamento, além do conhecimento anterior dos estudantes, são elementos fundantes na construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), compreendida como um conjunto de articulações cíclicas dos fatores relacionados ao conhecimento do professor, ao próprio pensamento e à tomada de atitudes, aspectos essenciais do processo de produção de sentidos de aprendizagem e de negociação de significados matemáticos como definidos pelos autores mencionados, bem como no contexto de nossa compreensão sobre a educação desenvolvimental:

As ações de estudo, controle e avaliação, têm um papel importante no processo de assimilação do conteúdo pelos alunos. O controle consiste em determinar a correspondência de outras ações de estudo com as condições e exigências da tarefa de estudo e permite ao aluno, ao mudar a composição operacional das ações, colocar ao descoberto sua relação com uma ou outras peculiaridades dos dados da tarefa por resolver e do resultado obtido. Dessa forma, o controle garante a requerida plenitude na composição operacional das ações e a forma correta de sua execução (DAVIDOV, 2020, p. 223-224).

Essas formulações teóricas exigem situar o professorado no contexto de alguns invariantes, os quais não podem ser por eles ignorados, sob pena de comprometimento de todo o movimento didático-pedagógico que se pretende instalado. Primeiramente, o processo exige ações de estudo envolvendo contextualização, ou seja, conduzir os educandos à percepção dos fatos matemáticos em suas relações com a realidade, impondo paulatinamente o reconhecimento de sua formulação como constructo humano. Uma segunda condição é a inserção dos alunos em um processo de formação de conceitos pautado pela perspectiva de problematização, ou seja, o reconhecimento do problema como matriz geradora do conhecimento novo. Outrossim, os conhecimentos matemáticos decorrem de um processo de historicização, ou seja, eles precisam reconhecer a evolução histórica das ideias matemáticas. Por fim, mas não por último, há de se consolidar uma trajetória de enredamento dos temas da Matemática entre si e desta ciência com a demais áreas do conhecimento, em abordagem transdisciplinar.

Na análise dos materiais didático-pedagógicos das tentativas recentes de reorganização curricular e renovação dos programas de ensino de Matemática nota-se a preocupação com a integração de saberes, a requerer uma mudança conceitual quanto ao conhecimento, compreendendo-o como o histórico, dinâmico e não neutro:

Na prática educativa, os professores desconsideram o princípio holográfico e o princípio da transdisciplinaridade, separando a parte do todo, dando um tratamento mecânico ao conhecimento. Os professores dedicam-se a explicações exaustivas em definições, conceitos, fórmulas, e fazem uso da linguagem voltada para a racionalidade tecnocientífica. A fragmentação traz como consequência a ideia de neutralidade e objetividade do conhecimento. Com esse viés, o conhecimento referido em sala de aula perde sentido existencial ao não trabalhar a relação com o todo e com o sujeito do processo cognitivo (SANTOS, 2008, p. 76).

Essa discussão se faz presente no debate sobre a apropriação de conhecimento há muito tempo, mas evoluiu muito pouco, em que pese os esforços postos em prática, a serem certamente reconhecidos. No entanto, esse é um critério fundamental e absolutamente necessário na análise de qualquer programa de ensino, posto que se relaciona a uma mudança atitudinal atrelada a uma mudança epistemológica. Transformar um dado conceito, concepção ou representação docente demanda resiliência em função de que essa mudança de concepção exige, por vezes, mudanças de outras concepções correlacionadas.

Percebe-se que o volume do professor sugere ainda, o tempo de desenvolvimento de cada trajetória, recomendando que cada sequência de atividades seja realizada em uma semana, podendo esse período ser ampliado de acordo com a necessidade dos alunos e adequação desse tempo por parte do professor, indicando também que algumas atividades trarão temas já visitados em THA anteriores, mostrando a importância da retomada de conteúdo.

No material destinado ao professor, há no início de cada THA um texto denominado “Reflexões sobre hipóteses de aprendizagem das crianças” que apresenta a trajetória que será trabalhada, bem como sua fundamentação. Peguemos como exemplo o livro destinado ao professor do primeiro ano, onde a primeira THA a ser trabalhada é sobre números.

Algumas pesquisas recentes, como as de Délia Lerner e Patrícia Sadovsky (1996), mostram que os alunos têm conhecimentos prévios sobre as funções dos números em seu cotidiano, seja em seu aspecto cardinal, ordinal, de medida ou de codificação. Fayol (1985), entre outros pesquisadores, considera que o uso dos números, de algumas relações entre eles construídas pelas crianças e, ainda, alguns tipos de cálculo, parecem não ser determinados pela existência prévia da conservação de quantidades por parte da criança. Autores, como Gelman e Meck (19893), consideram que a apropriação do número está ligada ao cálculo e não à noção de conservação de quantidades. Essas pesquisas embasam as propostas de atividades da Unidade 1. (SÃO PAULO, 2014, p. 9).

As proposições apresentadas, embora relevantes, se colocam no âmbito do pensamento empírico. Por assim considerar, “Davydov diz que um dos conceitos fundamentais de toda a matemática escolar é o de número real” (DAVYDOV, 1982; DAVYDOV, 1988 a e b; DAVÍDOV, 1988; apud ROSA, 2012) e elege esse campo numérico como instância de relações conceituais a sustentar um conjunto de ideias matemáticas a dar sentido a praticamente toda a atividade intelectual voltada à abordagem quantitativa da realidade. Desse modo, o autor questiona a conduta didática segundo a qual a aprendizagem se dá do mais simples para o mais complexo, das quantidades discretas para as contínuas.

A saber, os números reais incluem os números inteiros, os números decimais, os números fracionários e os números irracionais, já os números naturais são aqueles usados para contar, não incluindo os demais, ou seja, são subclasse dos números reais. Grandezas discretas são aquelas que podem ser contadas, não podem ter valores intermediários entre dois valores consecutivos e são representadas por números naturais. Elas diferem das grandezas contínuas, que podem ter valores intermediários mais próximos entre si entre dois valores consecutivos e são representadas por números reais. Exemplos de grandezas discretas incluem o número de pessoas em uma sala, o número de itens em uma lista etc. Exemplos de grandezas contínuas incluem a altura de uma pessoa, o tempo que se leva para chegar ao trabalho, a quantidade de líquido em um copo etc. Ambas são representadas respectivamente por variáveis discretas e variáveis contínuas em estatística e modelagem matemática.

Em verdade, o conhecimento evolui do que é geral e amplo para o que é específico ou particular. Por isso, poderíamos iniciar do mais complexo para o mais simples. Na especificidade do ensino do conceito de número, no primeiro ano escolar, Davydov, 1982, propõe que se inicie com a ideia de número real, a partir do estudo de grandezas discretas e contínuas, na inter-relação de suas significações aritméticas, algébricas e geométricas. Portanto, difere do que se faz atualmente na educação matemática brasileira, em que o ponto de partida é o número natural nos limites da aritmética, a partir de contagens discretas (ROSA, 2012; DAMÁZIO, ROSA E EUZEBIO, 2012). A expressão das relações entre grandezas, uma tomada como unidade de medida da outra, que se traduz no modelo algébrico,  $G$  como grandeza a

ser medida, U a unidade de medida e X o resultado da comparação entre G e U). Ainda de acordo com Rosa:

Davydov também concluiu que a preocupação do ensino primário consistia em conservar a relação com os conhecimentos cotidianos que a criança recebeu antes de entrar na escola. Em cada etapa do ensino se propõe aos estudantes apenas aquilo que são capazes de assimilar na idade dada. O ensino utiliza unicamente as possibilidades já formadas e presentes na criança. “Naturalmente, assim se pode justificar a limitação e a pobreza do ensino primário, apelando a características evolutivas da criança de sete anos” (DAVÍDOV, 1987, p. 147). Ou seja, subestima-se tanto a “natureza histórica concreta das possibilidades da criança como as ideias sobre o verdadeiro papel que a educação desempenha no desenvolvimento” (idem). O ensino assim organizado é trágico para o desenvolvimento mental por: enfatizar apenas a base sensorial, reduzir os conceitos ao seu fundamento empírico e, conseqüentemente, desenvolver exclusivamente o pensamento empírico (DAVÍDOV, 1987). (ROSA, 2012, p. 24-25).

De acordo com esse modo de pensar, deve-se reconhecer que tradicionalmente o ensino da proporcionalidade tem se constituído em um conjunto de regras e procedimentos transmitidos via memorização e repetição, resultando em aprendizagem mecânica ou sérias dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos.

Desenvolver a noção de proporcionalidade implica em criar estratégias que possibilitem ao aluno atribuir sentidos à aprendizagem e construir significados em um arcabouço complexo de situações matemáticas de modo a estabelecer relações, justificando, analisando, discutindo e criando estratégias voltadas à resolução dos problemas.

Nesse sentido, o encaminhamento metodológico deve ser desenvolvido de modo a evidenciar a atividade de estudo do aluno posto que valoriza a participação ativa no processo de apropriação do conhecimento, em ação mediada pela interação com o docente e com os colegas de turma.

No início de cada unidade do material em análise, organizado para os professores, são apresentadas as expectativas de aprendizagem que se pretende alcançar. No caso específico da unidade 1 do material do 1º ano é apresentado um quadro que contém três eixos do ensino da Matemática e as respectivas expectativas de aprendizagem de acordo com a primeira THA, porque no primeiro ano de

escolaridade, de acordo com esse material, o eixo, ou bloco de conteúdos Espaço e Forma é apresentado para os alunos a partir da segunda THA, conforme segue:

**Ilustração 2-** Expectativas de aprendizagem que se pretende alcançar

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Números e Operações      | 1- Identificar escritas numéricas relativas a números familiares e frequentes.<br>2- Reconhecer a utilização de números no seu contexto doméstico formulando hipóteses sobre sua leitura e escrita.<br>3- Utilizar estratégias de contagem com apoio de objetos.                                  |
| Grandezas e Medidas      | 1- Identificar dias da semana, explorando o calendário.<br>2- Identificar dias do mês, explorando o calendário.                                                                                                                                                                                   |
| Tratamento da Informação | 1- Preencher fichas de identificação pessoal com dados como idade, altura, número de irmãos, peso etc.<br>2- Ler dados apresentados em tabelas simples com números de telefones de pessoas.<br>3- Ler tabelas simples com números familiares da vida da criança.<br>4- Preencher tabelas simples. |

**FONTE:** EMAI 1º ano, 2014, vol. 1, material do professor, p. 10.

Em seguida, ainda no material destinado ao professor, é apresentado o plano de atividades, que traz expectativas específicas e é organizado em sequências, sendo que, cada sequência é composta por cinco atividades, sendo ao menos uma de cada um dos blocos de conteúdos abordados. Todas as atividades são compostas por três seções que orientam o professor na condução da aula e em como propor a realização das atividades aos alunos.

Na seção 1 “Conversa Inicial”, há sempre uma indicação de como o professor deve iniciar o diálogo com as crianças, tentando fazer com que elas falem sobre o que já conhecem do assunto tratado. Trata-se de um processo de suma importância para o levantamento das hipóteses iniciais dos alunos, bem como o exercício da escuta ativa por parte do professor, levando o aluno a colocar em jogo seus conhecimentos

prévios, permitindo que aconteça a produção de sentidos e negociação de significados matemáticos.

Na seção 2, “Problematização”, há um encaminhamento contendo perguntas problematizadoras que o professor deve fazer aos alunos para que esses pensem sobre o conteúdo que será abordado e apresentem respostas a partir de suas próprias vivências cotidianas. Há ainda a orientação para que o professor não antecipe informações sobre descobertas que os alunos são capazes de fazer sozinhos, isso é muito importante pois estimula as crianças a realizar desafios possíveis.

Na seção 3 “Observação/Intervenção”, há orientações para que o professor observe a realização da atividade e realize intervenções de modo a garantir a realização da atividade proposta, levando os alunos a discutir o processo de resolução utilizado, incentivando-os a refletirem sobre situações cotidianas em que utilizariam aqueles conteúdo. Aqui é possível observar a importância dada a função social das atividades propostas.

As três seções aparecem em todas as atividades dos dois livros do projeto EMAI, destinados ao professor, seções estas que deverão ser observadas para propor as atividades que serão trabalhadas durante o ano letivo e servem para orientar e determinar a condução das aulas.

O professor assume, portanto, o papel de executor do que lhe é determinado, pois com uma possível formação deficitária não conseguirá se desvencilhar do material didático como seu único suporte, que, por ser imposto, tornar-se-á confiável, como: meta, atividade e fonte de estudo. (SEVERINO, 2019, p. 310).

O material do professor apresenta ainda, um tópico denominado “Procedimentos importantes para o professor”, que destaca como o professor deve proceder para estudar este material e planejar adequadamente suas aulas.

Analise as propostas de atividades sugeridas nas sequências e planeje seu desenvolvimento na rotina semanal; analise as propostas do livro didático escolhido e de outros materiais que você utiliza para consulta. Prepare e selecione as atividades que complementem seu trabalho com os alunos; faça algumas atividades coletivamente, outras em duplas ou em grupos de quatro crianças, mas não deixe de trabalhar atividades individuais em que você possa observar atentamente cada criança; elabore lições simples e interessantes para casa. (SÃO PAULO, 2014, p.10).

O estudo coletivo desse material durante o HTPC acontece semanalmente em duas horas/aulas com a participação do PC e de pares, essa jornada remunerada é aderida na atribuição de aulas inicial, anual e é facultativa ao professor. Essa ampliação de jornada para estudo específico do Projeto EMAI, vigorou na escola em que atuo até o ano de 2022, porém a partir de 2016 seu formato inicial sofreu muitas alterações, perdendo sua característica de formação, estudo e troca de experiências, passando infelizmente para o formato de cumprimento de horário e informes relativos ao cotidiano escolar.

A descontinuidade da política educacional, articulada com problemas relativos à adequação da jornada de trabalho dos professores, tem dificultado sobremaneira a consecução das metas e objetivos delineados para a organização do trabalho na escola pública, em especial, as tentativas de renovação dos programas de ensino. Se houve esforços no sentido de melhorar essa situação, o fato é que os professores têm pouco tempo da sua atuação destinado à reflexão sobre o trabalho que desenvolvem.

Esse ponto carece de mudança de mentalidade, reconhecendo a relevância do papel docente no que diz respeito à elaboração de atividades pedagógicas e ao uso de material didático diversificado em sala de aula. Sob o nosso ponto de vista, nada substitui o trabalho do bom professor, nem mesmo o melhor material didático. Se, por um lado, devemos reconhecer a relevância da discussão sobre a elaboração e desenvolvimento das atividades previstas nos fascículos EMAI, por outro lado, o professor é o responsável pela determinação do momento da intervenção didática e da razão para usar determinado material didático ou bibliográfico. Mas ele precisa de apoio técnico-pedagógico.

Se esse corolário não se efetiva configura-se a negação da tese do trabalho coletivo na escola e a restrição à autonomia docente. Qualquer material deve ser utilizado de forma cuidadosa e refletida; no entanto, o mais importante não é o material em si, mas a experiência significativa que deve proporcionar aos docentes e aos estudantes. Embora invariante fundamental para a consecução da relação entre ensino e aprendizagem, a utilização de determinado material didático não garante a apropriação dos conceitos matemáticos, concebida na perspectiva desenvolvimental como uma síntese situada no planos das interações, destacando-se o papel decisivo a ser desenvolvido pelos professores no planejamento relativo ao uso dos recursos didáticos na aula.

Seguindo a apresentação e análise do material em estudo, no primeiro ano do EF a primeira atividade do Projeto EMAI que trata especificamente da ideia de proporcionalidade, aparece no volume dois, ou seja, será apresentada ao aluno no segundo semestre letivo. A atividade faz parte do bloco de conteúdos Números e Operações e a expectativa de aprendizagem que se pretende alcançar é analisar, interpretar e resolver situações-problema com diferentes significados do campo multiplicativo por meio de estratégias pessoais. É proposto ao professor, no volume próprio para ele, na seção “Conversa inicial”, seja indagado aos alunos quem já brincou de desafio, e informe que será necessário resolver um desafio para descobrir a idade da família de Enrico. Em seguida, na seção “Problematização” é sugerido que se organize a turma em duplas e garanta para que cada dupla tenha uma cópia da situação proposta e proponha o desafio de identificar as respectivas idades dos membros da família de Enrico com as dicas oferecidas na própria atividade. É sugerido ainda, que o professor indique para as crianças que, conforme forem descobrindo as idades de cada membro da família, registrem abaixo de cada desenho. Por último, a orientação é que se problematize a situação indagando: “Quem descobre o que aconteceu com a idade de Enrico, comparada com a de seu pai?”, introduzindo a noção de dobro. Na seção “Observação/Intervenção” a instrução aparece como segue:

Circule pela sala para observar os possíveis procedimentos que utilizaram para resolver esta situação. Fique atenta, se os alunos identificaram como “o mais velho” ou o “mais novo” relacionando com os números maiores ou menores e se ainda utilizam algum apoio para verificar suas ideias (quadro numérico por exemplo). Peça a eles para justificarem suas respostas e oportunize a interação, para que todos reconheçam as possíveis maneiras de raciocinar. Deve surgir nessa socialização a ideia de “dobro”, observe se os alunos transpõem esses saberes iniciados em atividades anteriores. Ainda existe a possibilidade de você convidá-los a pensarem mais sobre essa situação em outro momento dando continuidade na atividade, com vistas a ampliar a ideia de “triplo” e o reconhecimento da contagem ascendente e descendente. (SÃO PAULO, 2013, p. 89).

### Ilustração 3- Introdução à ideia de proporcionalidade

**SEQUÊNCIA 30**  
**DESAFIOS**

**ATIVIDADE 30.1**

ESTA É A FAMÍLIA DOS IRMÃOS ENRICO E SOFIA. OS AVÓS MATERNOS DAS CRIANÇAS MORAM COM ELES.




ARTE: IMCSP

**1** DESCUBRA A IDADE DE CADA UMA DESSAS PESSOAS DA FAMÍLIA, LENDO AS INFORMAÇÕES A SEGUIR:

- ENRICO É 3 ANOS MAIS VELHO QUE SOFIA, QUE TEM 9 ANOS.
- A MÃE É 6 ANOS MAIS NOVA QUE SEU MARIDO, QUE TEM 36 ANOS.
- VOVÔ TEM O DOBRO DA IDADE DA MÃE.
- VOVÔ É 10 ANOS MAIS VELHO DO QUE A VOVÓ.

**A.** REGISTRE-AS NOS QUADRINHOS.

| SOFIA | ENRICO | MAMÃE | PAPAI | VOVÔ | VOVÓ |
|-------|--------|-------|-------|------|------|
|       |        |       |       |      |      |

**B.** O QUE VOCÊ OBSERVA AO COMPARAR A IDADE DA MAMÃE COM A DA VOVÓ?

---

**C.** O QUE VOCÊ OBSERVA AO COMPARAR A IDADE DE ENRICO COM A DE SEU PAI?

---

**FONTE:** EMAI 1º ano, 2014, vol. 2, material do aluno, p. 78.

Sabe-se que as crianças não desenvolvem a ideia de proporcionalidade apenas pelos procedimentos das quatro operações básicas, adição, subtração, multiplicação ou divisão, mas sim por utilizar de diferentes representações semióticas que sustentam esse conceito, conforme nos aponta o autor:

Mais ainda, é o desenvolvimento dessas representações semióticas que permitirão aos alunos compreenderem, ao final do ensino fundamental, que em uma relação proporcional “o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”, a chamada Propriedade Fundamental das Proporções, em geral, apresentada aos alunos como coisa pronta, de forma abrupta e desconexa, destituída de significado efetivo para eles, como por vezes essas ideias matemáticas aparecem nos textos didáticos. Não é apenas pela verbalização de uma ideia matemática que se forma um conceito, mas pelas relações que se pode estabelecer entre os dados que a constitui. É pela exploração e reconhecimento de regularidades desde os anos iniciais do ensino fundamental, valendo-se dos raciocínios aditivo e multiplicativo nas relações entre grandezas, nas sequências numéricas e padrões geométricos, entre outras situações matemáticas, que o professor poderá conduzir os estudantes à familiarização com ideias que sustentarão a formação do conceito de proporcionalidade. (MIGUEL, 2020, p. 510).

Faz-se necessário observar que esta é a primeira atividade sobre proporcionalidade proposta para registro pelos alunos, pois o texto fala em transposição de saberes iniciados em atividades anteriores, o que ratifica a citação anterior. Outra observação plausível é a de que não há menção sobre a possibilidade de não surgir durante a socialização a ideia de “dobro”, é necessário que o professor tenha clareza que essa ideia não surge espontaneamente, nem tampouco apenas com a realização de determinados exercícios, é necessário um leque de estímulos, familiarização com a noção de dobro, levantamento de hipóteses por parte dos alunos, auxílio do professor na validação ou não dessas hipóteses, porém é imprescindível que se diga às crianças o que é dobro.

Na conduta didático-pedagógica que se pretende desenvolvida no projeto EMAI, o docente, na condição de organizador das atividades, não é apenas aquele que expõe todo o conteúdo programático aos alunos, mas um mediador que fornece informações necessárias para a reflexão individual e coletiva dos estudantes sobre as situações matemáticas. Isso implica considerar o conhecimento anterior das crianças.

Na análise do material do projeto EMAI percebe-se a preocupação quanto à necessidade de exploração de atividades envolvendo a ideia matemática de proporcionalidade, bem como de conduzir os alunos ao desenvolvimento do hábito de observação e reflexão para o levantamento de informações antes de resolver um problema. Tal postura é relevante uma vez que raciocínio proporcional é uma capacidade mental necessária para os alunos compreenderem os contextos, as aplicações matemáticas e sejam capazes de relacioná-los na resolução de problemas.

Trata-se de criar situações apropriadas para maior envolvimento dos alunos na construção de significados para si, trabalhando com imagens, esquemas e representações de modo a mobilizar, articuladamente, as dimensões sociais, mentais e emocionais conforme sugere a atividade anteriormente registrada.

Em outra sequência de atividades para o mesmo ano de escolaridade é proposta a seguinte atividade:

#### Ilustração 4- Situações-problema

##### ATIVIDADE 31.2

SEU PEDRO TEM DUAS FILHAS: ALINE E BETE. ELAS FORAM JUNTAS COM OS COLEGAS DE SUA ESCOLA A UM PARQUE DE DIVERSÕES. ANDARAM JUNTAS NO CARRINHO BATE-BATE QUE CABEM DUAS CRIANÇAS.

RESPONDA:

|                                                                                                                      |                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>A. SE HOUVER 13 CARRINHOS BATE-BATE FUNCIONANDO, QUANTAS CRIANÇAS VÃO BRINCAR AO MESMO TEMPO NA PISTA?</b></p> | <p><b>B. E SE HOUVER 14 CARRINHOS BATE-BATE FUNCIONANDO, QUANTAS CRIANÇAS VÃO BRINCAR AO MESMO TEMPO NA PISTA?</b></p> |
|                                                                                                                      |                                                                                                                        |
| <p><b>C. QUANTOS CARRINHOS SÃO NECESSÁRIOS PARA QUE 20 CRIANÇAS ANDEM JUNTAS NA PISTA?</b></p>                       | <p><b>D. QUANTOS CARRINHOS SÃO NECESSÁRIOS PARA QUE 30 CRIANÇAS ANDEM JUNTAS NA PISTA?</b></p>                         |
|                                                                                                                      |                                                                                                                        |

**FONTE:** EMAI 1º ano, 2014, vol. 2, material do aluno, p. 84.

No volume destinado aos professores, é sugerido que durante a “Conversa inicial”, seja informado que os alunos irão explorar alguns brinquedos de um parque de diversões e que seja feito alguns questionamentos, como: “se em um carrinho cabem duas crianças, quantas caberão em dois carrinhos e em três? E se tivermos

*dez carrinhos, quantas crianças caberão?* Esses questionamentos são ricos em significados e o professor levará os alunos a se familiarizarem com as regularidades presentes nesse tipo de atividade.

De acordo com Moretti (2015), as ideias relacionadas à multiplicação são adição de parcelas iguais, proporcionalidade, elementos apresentados em disposição retangular e raciocínio combinatório.

Embora os problemas abordando tais ideias resultem na operação de multiplicação, as ações mentais envolvidas em cada uma delas são bastante distintas. O reconhecimento do uso dessa operação em diferentes contextos não é uma “transferência natural”; daí decorre que a dificuldade de a criança localizar com qual operação resolverá um problema. (MORETTI, 2015, p.89-90).

Ainda de acordo com Moretti (2015), a criança ao lidar com situações-problema que a coloquem diante da necessidade do conceito (que podem aparecer inseridos em jogos, problemas, histórias) e que envolvam diferentes ideias relacionadas a uma mesma operação, a criança tem a possibilidade de reconhecer contextos de uso das operações e, ao mesmo tempo, compreender o sentido dos algoritmos tradicionalmente ensinados na educação básica.

[...] É importante que os professores busquem compreender quais são as estratégias de cálculo utilizadas pelas crianças, argumentando com a classe de modo a validá-las ou fazer que o grupo perceba suas limitações coletivamente. As diferentes resoluções apresentadas pelas crianças podem ser desencadeadoras da aprendizagem de cálculo mental, quando são utilizadas estratégias de decomposição de números e operações numéricas de modo a facilitar as operações propostas. Várias são as estratégias de cálculo mental. (MORETTI, 2015, p. 81).

De fato, como já discutido neste estudo, uma das possibilidades de transformação das formas de encaminhamento metodológico no ensino de Matemática é a perspectiva metodológica da resolução de problemas. Porém, trabalhar com resolução de problemas exige dos estudantes certa capacidade de calcular, de modo que a abordagem da aprendizagem de situações matemáticas envolvendo conceitos de proporcionalidade a partir de resolução de problemas pode ser favorecida significativamente se estão postos no ambiente de ensino e de aprendizagem encaminhamentos no sentido de desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e de estabelecimento e articulação de relações conceituais entre ideias matemáticas e destas com constructos de outras áreas de conhecimento.

É ainda sugerido, na seção “Observação/Intervenção”, que o professor desenhe na lousa uma tabela como a que segue:

**Ilustração 5-** Quadro relacionando carrinhos e crianças

| Quantidade de carrinhos | Quantidade de crianças |
|-------------------------|------------------------|
| 1                       | 2                      |
| 2                       | 4                      |
| 3                       |                        |
| 4                       |                        |
| 5                       |                        |
| 6                       |                        |
| 7                       |                        |
| 8                       |                        |
| 9                       |                        |
| 10                      |                        |

**FONTE:** EMAI 1º ano, 2014, vol. 2, material do professor, p. 94.

E complete coletiva e oralmente, fazendo perguntas relacionando as duas colunas, de forma a sistematizar a atividade anterior, para que dessa forma o professor possa verificar se as crianças observaram que os números na coluna da direita aumentam de dois em dois, enquanto, os coluna da esquerda aumentam de um em um, se observam ainda que como dez carrinhos são o dobro de cinco, se vinte é o dobro de dez etc. A intervenção aqui proposta é muito rica, pois é necessário chamar à atenção dos alunos para essas observações, levando-os a perceberem as regularidades presentes.

Relacionar quantidades proporcionalmente significa estabelecer uma correspondência entre duas ou mais quantidades, de forma que a razão entre elas seja constante. Em outras palavras, quando duas quantidades estão relacionadas proporcionalmente, a mudança na primeira quantidade, resulta em uma mudança proporcional na segunda quantidade, como no exemplo do quadro utilizado, se em um

carrinho cabem duas crianças, em dois carrinhos caberão quatro e assim sucessivamente.

No entanto, a proporcionalidade direta não é a única constituída na relação com os fatos cotidianos. Situações envolvendo a proporcionalidade inversa relacionam uma gama significativa de dados da realidade e podem ser exploradas nos anos iniciais recorrendo apenas às estruturas do campo multiplicativo conforme simularemos no decorrer desta investigação.

Na análise das situações didáticas exploradas no EMAI, obviamente, cumpre destacar a autonomia docente a ser valorizada no sentido de promover outras ações para além das contidas no seu conjunto, com o propósito de atender demandas e especificidades do alunado. O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e da estrutura cognitiva dos alunos envolve respostas às situações por eles vivenciadas, interesse, motivos e necessidades de aprendizagem, ou seja, nenhuma orientação curricular pode ser tomada como definitiva, acabada ou como uma camisa de força.

Com base em Vergnaud (1983), consideramos que o campo conceitual das estruturas multiplicativas é amplo e envolve um conjunto de conceitos e teoremas voltados à análise de situações matemáticas relativas a proporção simples e composta, função linear, quociente e produto entre grandezas, fração, razão, múltiplos e divisores, além de ser importante o reconhecimento das relações entre campo multiplicativo e campo aditivo.

Avançando na descrição e análise do conteúdo do projeto EMAI, destaque-se que na sexta THA, na sequência de atividades de número 23 proposta para o segundo ano, trazida no segundo volume, aparece já nas expectativas de aprendizagens, como um dos tópicos: *analisar, interpretar, resolver e formular situações-problema, compreendendo um dos significados da multiplicação, a proporcionalidade*. Na atividade 23.3, no volume do professor, é sugerido que se faça na “Conversa inicial”, a retomada da ideia de proporcionalidade perguntando: “– Em um carrinho do parque de diversões brincam 2 crianças. Quantas crianças brincarão em 3 carrinhos? – E em 5 carrinhos? Ao comentar os resultados, garanta as ideias de que se em um carrinho brincam 2 crianças, em 3 carrinhos brincarão 3 vezes mais. Pergunte também o que significa a escrita  $2 \times 7$ . Hoje, vamos imaginar que as crianças continuam no parque de diversões e agora vão brincar nos aviõezinhos e que em cada aviõezinho cabem 3

crianças. Pergunte: – Se em um aviõezinho cabem 3 crianças, quantas crianças cabem em 2 aviõezinhos? – E em 3 aviõezinhos?” Segue a atividade proposta:

**Ilustração 6-** Aviõezinhos



### ATIVIDADE 23.3

AS AVENTURAS NO PARQUE DE DIVERSÕES NÃO PARAM. DEPOIS DE ANDAREM NOS CARRINHOS BATE-BATE, AS CRIANÇAS FORAM ANDAR NOS AVIÕEZINHOS. DESCOBRIRAM QUE EM CADA AVIÃOZINHO PODEM IR 3 CRIANÇAS.



ARTE: MESP.

**1** SABENDO QUE ELAS RESOLVERAM SE ACOMODAR DE 3 EM 3, COMPLETE O QUADRO:

| QUANTIDADE DE AVIÕEZINHOS | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| QUANTIDADE DE CRIANÇAS    | 3 |   |   |   |   |   |   |

RESPONDA ÀS QUESTÕES:

**A.** SE HOUVER 8 AVIÕEZINHOS, QUANTAS CRIANÇAS PODERÃO BRINCAR?

---



---



---



---

**B.** SE HOUVER 10 AVIÕEZINHOS, QUANTAS CRIANÇAS PODERÃO BRINCAR?

---

**FONTE:** EMAI 2º ano, 2014, vol. 2, material do aluno, p. 55.

Na seção “Observação/intervenção”, é reforçada a intenção da atividade proposta, como sendo uma atividade do campo multiplicativo envolvendo o significado de proporcionalidade, frisando a importância das crianças serem novamente

questionadas com perguntas como as sugeridas na conversa inicial para que estabeleçam a relação entre a quantidade de aviõezinhos e a quantidade de crianças. Traz ainda, possíveis respostas que podem ser dadas pelas crianças, como por exemplo, soluções por meio de desenhos, adição de parcelas iguais ( $3+3+3\dots$ ).

Sabe-se que, se isso acontecer, as crianças realizam uma atividade ainda no campo aditivo. Mas podem se valer apenas de recursos imitativo-repetitivos, típicos da aprendizagem por associação de modelos, pela mera aplicação do princípio aditivo segundo o qual para 1 aviõezinho forma-se um agrupamento com 3 crianças. Se essa percepção é fundamental no início do trabalho pedagógico com a noção de proporcionalidade, ela representa, no entanto, apenas uma das relações semióticas envolvidas na situação-problema.

Por isso, parece-nos interessante, ainda, com base nas duas questões ao final da atividade, a proposição de complementar tabelas com dados expressos fora de ordem de contagem sequencial, tal como segue:

**Ilustração 7:** Transformações no campo aditivo

|                    |   |    |   |    |   |   |    |    |    |
|--------------------|---|----|---|----|---|---|----|----|----|
| <b>Aviõezinhos</b> | 2 |    | 6 |    | 1 | 4 |    | 10 | 11 |
| <b>Crianças</b>    | 8 | 12 |   | 20 |   |   | 32 |    | 44 |

**FONTE:** Arquivo da pesquisadora

Enquanto no campo aditivo, as crianças podem fazer projeções do tipo “2 aviõezinhos para 8 crianças, então 1 aviõezinho para 4 crianças”; ou, “ $2 + 2 + 2 = 6$ , então  $8 + 8 + 8 = 24$ ”; ou ainda, “se 11 aviõezinhos estão para 44 crianças, 10 aviõezinhos (1 a menos) está para 40 crianças (4 a menos)”.

Se essas transformações do campo aditivo não surgem espontaneamente, elas precisam ser estimuladas nos alunos pelo parceiro mais experiente, por vezes um colega perspicaz, mas, via de regra, o professor, no sentido estrito da perspectiva vigotskiana.

À medida que os alunos são imersos no campo multiplicativo, as transformações passam a ser outras: “ $2 \times 4 = 8$ , então  $6 \times 4 = 24$  ou “ $44 : 11 = 4$ , porque  $8 : 2 = 4$ ”, ou seja, há uma relação constante de 1 para 4.

As ilustrações 5, 6 e 7 trazem a ideia de função, utilizando-se de quantidades discretas. Por que isso é importante? Porque as crianças precisam desenvolver várias representações semióticas de uma situação matemática para se apropriarem de conceitos nos termos de DUVAL (2007), com aporte, também, em Vygotsky (1989; 1995), sendo que os espaços em branco do Quadro 1 podem ser mantidos como tais ou substituídos por um sinal de interrogação, uma letra ou uma figura geométrica qualquer. A rigor, um conceito matemático é uma ferramenta de comunicação, um instrumento para desenvolvimento da linguagem.

As representações semióticas são diferentes formas de representar conceitos matemáticos, incluem símbolos, gráficos, tabelas, desenhos, modelos etc. e cada uma delas apresenta uma visão diferente e complementar do mesmo conceito. Ao trabalhar com várias representações semióticas, as crianças podem identificar relações, ver padrões e fazer generalizações que ampliam sua compreensão.

O conhecimento matemático é componente indissociável dos processos de leitura e de escrita, ou seja, é componente de alfabetização.

Nesse aspecto, especificamente, é preciso concordar com a formulação teórica da BNCC:

No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (BRASIL, 2017, p. 236).

Por isso, a importância de se trabalhar com a representação do pensamento algébrico desde os anos iniciais do ensino fundamental, porque permite que as crianças comecem a compreender conceitos matemáticos mais complexos de maneira mais clara e precisa, ajudando-as a resolverem situações-problema de modo mais eficiente e a entender relações matemáticas complexas. É necessário que o professor ofereça atividades que envolvam a manipulação de símbolos e fórmulas para representar conceitos matemáticos. É preciso que as crianças sejam estimuladas

a refletir sobre as relações matemáticas e a fazer generalizações a partir de exemplos e padrões.

Essa ideia de representação do pensamento algébrico presente na BNCC desde os anos iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 2017) causa apreensão em alguns professores desse nível de ensino. Não deveria. Primeiramente, porque sem álgebra não se faz Matemática; a rigor, não se faz ciência. Depois, porquanto a escola deve lidar com conceitos e representações científicos nos termos de Davidov (1988). Mais ainda:

A Matemática é composta de um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades (BRASIL, 2000, p. 29).

Vê-se que embora situadas claramente no contexto das teorias cognitivistas, as diretrizes curriculares mais recentes apontam para aspectos fundamentais da relevância da presença da Matemática no currículo do ensino fundamental, seja pelos aportes de natureza prático-utilitária, seja pelo papel que presta ao desenvolvimento intelectual e ao pensamento autônomo.

Portanto, é sugerido que na discussão sobre a pertinência de estratégias, a turma seja desafiada a usar as que sejam mais econômicas, percebendo que se tenho, por exemplo, o dobro de aviõezinhos, terei o dobro de crianças, se houver 8 vezes mais aviõezinhos, também haverá 8 vezes mais crianças brincando.

Esse tipo de atividade possibilita às crianças o desenvolvimento progressivo da ideia de proporcionalidade. Mas não pode se restringir a isso, exigindo a construção de sistemas de ações coordenadas em pensamento, uma ação fundamental para o desenvolvimento do pensamento teórico.

De fato, o conceito de proporcionalidade é decisivo para o desenvolvimento cognitivo por constituir instrumental necessário à resolução de problemas em diversos contextos e com perspectivas abrangentes de representação semiótica como indicado no referencial teórico desse estudo.

A resolução de problemas envolvendo a noção de proporcionalidade envolve mais que a mera reprodução de algoritmos ou processos imitativo-repetitivos. O

pensamento proporcional exige basicamente a capacidade de estabelecimento de relações, com implicações pedagógicas expressivas para a compreensão de todo o desenvolvimento da ciência matemática e de outras ciências, principalmente aquelas relações entre duas grandezas ou variáveis de definição da constituição de um dado fenômeno da realidade.

Todas as funções matemáticas definidas na relação entre duas variáveis exigem a compreensão do raciocínio proporcional. Tal compreensão traz consequências para a organização dos programas de ensino de Matemática no sentido de que a ordem lógica mais adequada para o ensino dessa ciência não é a do conhecimento matemático em seu estágio formal definitivo, mas aquela que revela a Matemática enquanto ciência em desenvolvimento, em construção.

O material é organizado com THA subsequentes no primeiro e segundo ano de escolaridade, a partir do terceiro ano as THA são organizadas anualmente, ou seja, no terceiro, quarto e quintos anos aparecerá a primeira THA, porém fica subentendido tratar-se de uma nova trajetória de acordo com o ano.

Na sequência de atividades 11.4 do volume 1 para o terceiro ano, a proposta é preencher a Tábua de Pitágoras, multiplicando o número escrito na linha pelo número escrito na coluna, trata-se da terceira THA e as expectativas de aprendizagem são, *analisar, interpretar e resolver compreendendo alguns dos significados da multiplicação e da divisão e construir fatos fundamentais da multiplicação*. Segue abaixo.

### Ilustração 8- Tábua de Pitágoras

#### ATIVIDADE 11.4

Os resultados de multiplicações podem ser organizados em uma tabela, conhecida como Tábua de Pitágoras, em homenagem a um matemático que viveu na Grécia, por volta de 500 anos antes da Era Cristã. Vamos preencher esta tábua?

Primeiro, preencha a linha e a coluna amarelas. Depois, as linhas e colunas alaranjadas.

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Após preenchimento, responda às questões:

A. O que acontece quando multiplicamos um número por 1?

---

B. Como podemos calcular o resultado da multiplicação de um número por 2?

---

C. E por 4?

---

D. E por 8?

---

**FONTE:** EMAI, 2014, vol. 1, material do aluno, p. 68

A seção “Conversa inicial” sugere comentar com a classe que preencherão uma tabela muito interessante, conhecida como “Tábua de Pitágoras”, em homenagem a um matemático que viveu na Grécia, por volta de quinhentos anos antes da Era Cristã. Sugere também, combinar que para preencher a tabela devem sempre multiplicar o número escrito na linha pelo número escrito na coluna. Na seção “Problematização”, aconselha-se que o professor faça alguns questionamentos, como por exemplo, *quando multiplica por 1, o que acontece com o resultado? Como calcularam as*

*multiplicações por 2, por 4 e por 8?* Essas questões levarão as crianças a perceberem as regularidades e a conjecturar que, todo número multiplicado por 1 é igual a ele mesmo, quando percebem resultados iguais de dois fatos fundamentais distintos ( $2 \times 3$  e  $3 \times 2$ ), podem conjecturar a propriedade comutativa da multiplicação, onde a ordem dos fatores não altera o produto, dentre tantas outras possibilidades.

Vergnaud (1983), em suas teorizações sobre os Campos Conceituais, faz uma interessante análise das relações multiplicativas, evidenciando diversos tipos de situações e várias classes de problemas. O autor destaca a importância de distinguir tais classes e analisá-las cuidadosamente, ajudando a criança a reconhecer as diferentes estruturas de problemas e encontrar os procedimentos apropriados para sua solução, para assim construírem significados.

O trabalho com o preenchimento da Tábua de Pitágoras pode contribuir para o encaminhamento da ideia da progressão geométrica, tema ser explorado do Ensino Médio. Essa tabela de dupla entrada na qual são registrados os resultados da multiplicação dos números que ocupam a linha e a coluna principais (destacados em azul), proporciona a exploração de variadas situações-problema, de maneira que, ao invés do aluno decorar a tabuada, há a possibilidade de através de propostas como essa, levá-lo a compreender o significado dessas escritas multiplicativas, descobrindo regularidades numa sequência de resultados, e a partir de então, saber de memória tais resultados. De acordo com Moretti:

A Tabela Pitagórica (ou Tábua de Pitágoras) é uma tabela que abordava multiplicação e adição, representando os números de 1 a 10 na primeira coluna e na primeira linha. Cada posição da tabela é preenchida com o produto entre os números correspondentes à linha e à coluna. Se bem explorada, a Tabela Pitagórica pode ser um excelente recurso didático para o reconhecimento de relações de proporcionalidade nas multiplicações, a propriedade comutativa da multiplicação, diferentes composições numéricas etc. (MORETTI, 2015, p. 88).

No material do EMAI para o professor, não é mencionado, mas, é importante que atividades desse tipo, sejam realizadas em várias etapas, e acompanhadas de outras estratégias didáticas, proporcionando a descoberta de regularidades, estimulando o cálculo mental com relação a dobro, triplo, e o que é mais importante, possibilitar momentos de discussão dos resultados encontrados pelas crianças, pois de acordo com Nascimento:

[...] Vygotski (1991b) desenvolve sua compreensão da palavra como sendo a base do comportamento social, visto como experiência social. O autor assinala que “en el amplio sentido de la palabra es en el lenguaje donde se halla precisamente la fuente del comportamiento social y de la conciencia” (p. 57). Para ele, o mecanismo do comportamento social e o da consciência seria o mesmo, sendo a linguagem por um lado reflexo de contato social e, por outro, um sistema de reflexos da consciência (aparato de reflexos de outros sistemas). O autor considera que por essa condição passaria também a questão do conhecimento da psique alheia e do conhecimento de si mesmo (autoconsciência), dados com a ajuda da linguagem, afirmando que a linguagem é a base da experiência social. (NASCIMENTO, 2014, p. 50-51)

Nesse sentido, existe concordância com o que afirma Vigotski (2003), “é muito mais importante ensinar a criança a pensar que comunicar a ela determinados conhecimentos”.

Na quinta THA do quarto ano, é proposto no volume 2 atividades envolvendo os números racionais e as expectativas de aprendizagem que se pretende alcançar são, *resolver situações-problema simples que envolvam alguns dos significados dos números racionais: quociente e parte-todo; ler números racionais de uso frequente na representação fracionária*, já na “Conversa inicial” é sugerido ao professor providenciar dois círculos de papel do mesmo tamanho para cada dupla, orientando que trabalharão com dobraduras e farão análise de algumas questões, será indagado por exemplo, como representar numericamente cada uma das metades após dobrarem o círculo ao meio, e após dobrarem novamente o mesmo círculo ao meio, obtendo quatro partes iguais, qual número poderá representar essas partes, e assim por diante.

De acordo com Miguel (2020), à medida que se introduz o trabalho com a noção de frações, pode-se explorar a ideia de equivalência, uma das ideias fundamentais a ser construída pelas crianças na aprendizagem de números racionais, “em relações do tipo  $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = \dots$  ou que 1 está para 2 assim como 8 está para 16, ou que 5 está para 10 assim como 19 está para 38”.

Frações equivalentes são aquelas que embora tenham representações numéricas diferentes, representam a mesma parte de um inteiro. O autor pontua ainda que, “uma situação matemática de proporcionalidade direta há uma constante **k** de

proporcionalidade, a qual, no caso é igual a  $1/2$ ". Chamar à atenção para a classe de equivalência das frações permite observar regularidades.

Além disso, o trabalho com equivalência pode ser explorado pela utilização de materiais manipulativos diversificados, e não somente com figuras circulares, exemplo clássico dos livros didáticos que é um modelo bem mais complexo de dividir com exatidão do que o retângulo por exemplo, pode-se explorar também figuras quadradas, retangulares, triangulares, hexagonais etc. Propor às crianças que realizem a repartição de uma figura ou um conjunto de objetos em partes iguais, por exemplo, e não somente oferecer atividades em que os objetos e ou figuras já estejam divididos, onde o que caberá à criança seja só realizar contagens ou colorir partes dessa figura já pronta. Deve-se propor ainda, reflexões com base no significado de quociente.

De acordo com Meneguelli (2018), a resolução de problemas pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, aproximando esses conceitos da realidade dos estudantes, quando utilizada de forma adequada. Permitindo também que o estudante participe da resolução e construção dos conceitos matemáticos, auxiliando desta forma em uma aprendizagem significativa.

A resolução de problemas é um dos pontos mais críticos para a aprendizagem, o(a) professor(a) não pode nunca dar a resposta pronta, é necessário levar em consideração também o nível de dificuldade e a familiaridade com a situação proposta, estimulando a troca de ideias entre as crianças e conduzindo-as à reflexão. Sobre esse aspecto ressalta-se que

Durante a resolução do problema, ao ser questionado, é importante que o professor indique o caminho por meio de perguntas secundárias, sem fornecer respostas prontas, levando os estudantes a construir suas próprias estratégias e, também, avaliá-las conforme progride na resolução. Chama-se a atenção quanto ao nível de dificuldade do problema que será levado para a sala de aula, este deve ser adequado ao nível escolar dos estudantes, para que a averiguação seja coerente, não se tornando um problema trivial e nem mesmo um problema impossível. (MENEGUELLI, 2018, p. 2019).

Há que se ampliar esses conhecimentos, propondo também registros da representação decimal e representação fracionária de um número racional, Duval (2007), destaca que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação".

É interessante observar que, cada registro apresenta suas limitações representativas específicas e, dessa maneira, surge a necessidade de se utilizar outros sistemas de expressão e representação, além da linguagem natural e das imagens, como o sistema de escrita para os números, a escrita algébrica, figuras geométricas, diagramas, esquemas etc.

Davidov (1982), afirma que a escola, historicamente, não se preocupou em desenvolver o pensamento dos seus estudantes, no que diz respeito à resolução de problemas; ao contrário, voltou-se para a classificação dos problemas. A escola deve assumir o papel de intervir no processo de formação humana e das funções psicológicas superiores, de modo a repercutir na constituição das qualidades humanas com intencionalidade, planejamento e intervenção para promover o desenvolvimento psíquico dos alunos.

Ao realizar a experiência com os círculos, os alunos terão a possibilidade de refletir sobre as situações que envolvem a relação parte-todo. Na seção de “Observação/Intervenção”, chama-se a atenção para que o professor quando pede aos alunos que desenhem um círculo dividindo-o na metade e pintando uma delas, garanta a exploração da metade não pintada, e não apenas da parte pintada, pois mesmo a parte que não está pintada, é representada pelo mesmo número,  $\frac{1}{2}$ . Segue a atividade:

Ilustração 9- Relação parte-todo

ATIVIDADE 18.4

Assim como Mariana, Antônio e Pedro, você já deve ter repartido muitas coisas com as pessoas com quem convive. Mariana contou que em sua casa comeram uma pizza e fez o seguinte comentário:



Nossa pizza foi dividida em 6 partes iguais.

Cada parte é  $\frac{1}{6}$  (um sexto) da pizza e já comemos  $\frac{2}{6}$  (dois sextos).

Estão sobrando  $\frac{4}{6}$  (quatro sextos) dessa pizza.

Você concorda com o comentário de Mariana? Por quê?

Antônio relatou que sua família adora pizzas e que comeram duas no dia anterior. Observe como foi feita a divisão e preencha o quadro:

|                                                                                          | Número de partes em que foi dividida a pizza | Escrita numérica que representa cada pedaço |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------|
| A.<br>  |                                              |                                             |
| B.<br> |                                              |                                             |

Se os discos de pizza consumidos pela família de Mariana e de Antônio forem de mesmo tamanho, em que caso o pedaço de pizza é maior?

Nesse caso, o que é maior:  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$  ou  $\frac{1}{8}$ ?

FONTE: EMAI 4º ano, 2014, vol. 2, material do aluno, p. 12.

É interessante, no momento de responder as questões da última parte, recorrer novamente aos círculos de papel, para que os alunos realizem essas comparações, analisando as figuras. Além disso, faz-se necessário também, a representação através de desenhos, esquemas, diagramas, de forma que leve o aluno a pensar, promovendo de fato a reflexão e levando ao entendimento, esquemas de pensamento em ação. A forma de abordagem e as intervenções precisam ser pontuais para que se desenvolva estruturas conceituais.

Com relação à atividade prática, Rosa traz as seguintes contribuições:

O mais importante na aproximação do abstrato ao concreto é a prática, a atividade prática. Por mais abstratos que se pareçam os conceitos,

existe, segundo Ilienkov (2006), um critério que os fazem acessíveis ao homem e lhes dá caráter de realidade viva imediata: o critério do fazer prático. O movimento do abstrato ao concreto, de acordo com Ilienkov (2006), ocorre para o mundo sensorial, porém reversível, permite a formação de uma melhor visão e compreensão do mundo, se comparado ao pensamento desenvolvido quando inicia o caminho somente do concreto sensorial ao abstrato. O concreto obtido como resultado de todo o processo da cognição volta-se à realidade viva imediata dos objetos investigados, como uma bússola que permite orientar-se, firmemente, pelo mundo sensorial. (ROSA, 2012, p. 223).

A proporcionalidade na relação parte-todo se refere à correspondência entre a magnitude de uma parte e a magnitude do todo. Quando as partes de um todo são proporcionais, a mudança na magnitude de uma parte resulta em uma mudança na magnitude do todo na mesma proporção. Isso significa que a relação entre a parte e o todo é constante, independentemente do tamanho do todo. Esta relação é importante em muitos campos, não só na matemática, mas também na engenharia, na física e em muitos outros.

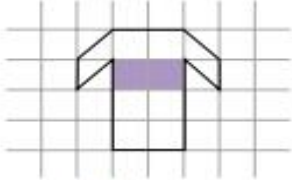
Na sétima THA, no volume 2 destinado ao quinto ano, a expectativa de aprendizagem referente ao bloco de conteúdo ou eixo temático Espaço e Forma é *ampliar e reduzir figuras planas pelo uso de malhas*. A atividade proposta para ampliar e reduzir figuras utilizando a malha quadriculada, traz na “Conversa inicial” a sugestão para iniciar a conversa questionando sobre as preferências de cada um ao realizarem um desenho, fazendo perguntas como, *Quem aqui gosta de desenhar? Que tipo de desenhos vocês gostam de fazer? Quais procedimentos vocês usam para copiar um desenho?* Na seção “Problematização” pede-se para mostrar que Rodrigo desenhou, em malha quadriculada, a camisa do seu time do coração, “São Miguel” e que vão analisar esse desenho. Pede-se que comente que cada parte da figura é representada por quantidades de quadradinhos e que desafie os alunos a desenharem a mesma camisa na malha quadriculada usando o dobro da medida dos lados dos quadradinhos da malha original, como segue:

### Ilustração 10- Malha quadriculada

**SEQUÊNCIA 29**

**ATIVIDADE 29.1**

Rodrigo adora futebol. Ele desenhou a camisa do seu time do coração, o "São Miguel".



Desenhe a camisa na malha quadriculada, mas use como medida o dobro da medida de cada lado dos quadradinhos da malha do desenho de Rodrigo.



O que mudou nesse novo desenho?

---



---

**76** EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL - EMAI

**FONTE:** EMAI 5º ano, 2014, vol. 2, material do aluno, p. 76.

Ainda na seção “Problematização” é sugerido que se discuta: *Que procedimentos vocês usaram para reproduzir o desenho da camisa? O que mudou nesse novo desenho?* Na seção “Observação/Intervenção” é sugerido que o professor observe os procedimentos utilizados pelos alunos para a realização da atividade, se fazem a contagem de quadradinhos, se usam a régua etc.

Atividades com malhas quadriculadas proporcionam que as crianças percebam, nesse caso em específico, que a figura foi ampliada e não perdeu sua forma, ou seja, aumentou proporcionalmente, ou ainda podemos dizer que, manteve as proporções da figura original.

Cabe destacar que essas são algumas atividades propostas no Projeto EMAI que tratam da proporcionalidade, percebe-se um movimento de progressão espiralada, onde os conteúdos são revisitados e são trabalhados com diferentes níveis de complexidade.

O currículo em espiral envolve um processo de ensino que consiste na apresentação de conceitos básicos que são ensinados em um primeiro momento e depois revistos em diferentes níveis de profundidade, complexidade e formas de representação. Nessa concepção de currículo, o ensino não se caracterizaria por sua abrangência, mas por sua profundidade colocando em evidência o maior número de particularidades possíveis. Assim, neste modelo de currículo inicia-se com uma descrição intuitiva de uma área do conhecimento, circulando de volta para representar essa área de modo mais formal, como um espiral. Esse processo se dará quantas vezes forem necessárias, até que o aluno tenha dominado o assunto ou matéria. Nas palavras do autor:

[...] Se se considera crucial a compreensão de número, medida ou probabilidade na busca da ciência, então a ilustração nesses assuntos deverá ser iniciada tão cedo e da maneira intelectualmente mais honesta possível e consistentemente com as formas de pensar da criança, deixando que os tópicos sejam desenvolvidos várias vezes em graus posteriores. Assim, se a maioria das crianças deve ter uma unidade de biologia pelo fim do ginásio, deverão elas abordar a matéria a frio sem nada haverem estudado antes? Não será possível, com um mínimo de trabalho formal e de laboratório se necessário, introduzi-las mais cedo a algumas das principais ideias biológicas, dentro de um espírito talvez menos exato e mais intuitivo? (BRUNER, 1975, p. 49-50).

É necessário apontar ainda que, para que um projeto elaborado dessa maneira, para que de fato os alunos sejam estimulados a aprofundar seus conhecimentos e desenvolver a ideia de proporcionalidade, o trabalho do professor faz toda a diferença, como traz a matriz curricular:

Esse processo apoia-se no conhecimento do professor (matemático, didático e curricular), ampliado e compartilhado com outros colegas em discussões e estudos de propostas apresentadas em materiais curriculares. Ele planeja o que fará em sala de aula e desenvolve suas tarefas, em um processo interativo, em que é fundamental a observação atenta das atitudes e do processo de aprendizagem de cada criança, para que intervenções pertinentes sejam feitas. Completa esse ciclo, a avaliação do conhecimento dos alunos que o professor deve realizar de forma contínua para tomar decisões sobre o planejamento das próximas sequências. (SÃO PAULO, 2014, p.12).

Verifica-se que as orientações didáticas contidas no material do EMAI no volume destinado ao professor podem favorecer o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade nas crianças, pois, elas abordam o conceito de proporcionalidade, através da resolução de problemas.

Para Davídov (1982), a tarefa do pensamento teórico consiste em elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceito e com ele reproduzir abrangendo todas as dimensões do sistema de conexões internas que geram o concreto dado, descobrindo sua essência.

A aprendizagem se dá num processo interno, particular, de autotransformação. Por isso a importância da escola, que comumente trabalha com base na experiência, na realidade cotidiana vivida, ou seja, no pensamento empírico, avançar para desenvolver o pensamento teórico, que é a capacidade humana de representar pelo plano mental e de maneira subjetiva a realidade objetiva a partir de reflexão, análise, síntese e generalização subjetiva. Além disso, a aprendizagem que desenvolve o pensamento teórico só acontece na Atividade de Estudo, Davídov afirma que o mesmo opera mediante conceitos científicos:

Como conteúdo do pensamento teórico serve o ser, mediatizado, refletido e essencial. Tal pensamento constitui uma idealização do aspecto fundamental da atividade prática-objetiva, a saber, da reprodução nela das formas gerais das coisas, de sua medida e de suas leis. Essa reprodução tem lugar na atividade produtiva num singular experimento sensório-objetivo. Depois, esse experimento vai adquirindo cada vez mais um caráter cognitivo, permitindo com o tempo que o homem passe a experimentos mentais[...] Essas singularidades do experimento psíquico constituem a base do pensamento teórico, que opera mediante conceitos científicos. (DAVIDOV, 2020, p. 98).

Saviani ao tratar do papel da escola básica, parte do princípio que:

[...] a escola é uma instituição cujo papel consiste na socialização do saber sistematizado. [...] não se trata, pois, de qualquer tipo de saber. Portanto, a escola diz respeito ao conhecimento elaborado e não ao conhecimento espontâneo; ao saber sistematizado e não ao saber fragmentado; à cultura erudita e não à cultura popular. (SAVIANI, 2021, p.14).

A propósito, posicionamento similar ao de Davidov, quando diz que a cultura popular, o conhecimento espontâneo e o saber fragmentado promovem o desenvolvimento do pensamento empírico em detrimento do pensamento teórico-abstrato.

As teorias desses dois pensadores da área da educação têm algumas similaridades, ambas as teorias têm enfoque no ensino-aprendizagem e na necessidade de uma abordagem ativa por parte dos estudantes, defendem que o

conhecimento prévio dos estudantes deve ser considerado e valorizado na construção do conhecimento escolar e apresentam concordância na importância da reflexão crítica e da busca pelo entendimento profundo dos conceitos.

Similaridade que provavelmente se esgote nesses aspectos, porque Saviani (2014), ao abordar o papel da escola enquanto socializador do saber sistematizado, volta sua atenção para o currículo, sua organização sistemática, a disposição do tempo, os agentes e instrumentos necessários, bem como a viabilização do processo de ensino-aprendizagem. Embora assuma, com relação à escola, que o que sobressai é o aspecto relativo ao saber elaborado, a ciência, que este saber precisa ser ensinado por não ser obtido de maneira espontânea, que se faz necessário adquirir uma disposição permanente, *habitus*, não aprofunda como isso se dá. Para Davídov (1988), não bastam os hábitos culturais gerais de leitura, escrita e cálculo, a escola precisa ir além disso, enquanto instância principal para difusão cultural e para o advento do processo de apropriação da aprendizagem, há que se organizar a atividade de estudo voltadas à assimilação do conhecimento teórico por parte dos estudantes.

Ainda para Davídov (2020), “no processo da prática sistemática da Atividade de Estudo pelos alunos, juntamente com a assimilação do conhecimento, desenvolvem-se a consciência e o pensamento teórico. Nesse sentido, há que se entender a distinção entre a utilização de conceitos em situações cotidianas de práticas sociais e a apropriação de conceitos científicos, pois a segunda, não se dá de maneira espontânea. De acordo com Moura,

As visões culturalistas podem levar à falsa ideia de que as crianças estão impregnadas pela visão dos números no seu meio e que já tem o motivo necessário para buscar compreendê-los. Não, isto não corresponde à verdade. Apropriar-se de um conceito, como é para todo o processo de apropriação de significado, deve ser resultado de uma atividade do sujeito, motivado, que se apropria das significações a partir de suas potencialidades e de um motivo pessoal. (MOURA, 2013, p. 134).

Cabe então à escola organizar situações de ensino que coloquem as crianças diante de situações cuja resolução necessite do conceito que se deseja ensinar e, ao mesmo tempo, de forma mediada pelos professores, possibilitem a superação da superficialidade do contexto e a exploração de características essenciais dos conceitos, em direção à abstração.

De acordo com a teoria aqui defendida, a escola pode organizar atividades práticas e problematizá-las para que as crianças possam aplicar os conceitos aprendidos em situações reais. As atividades devem ser desafiadoras, mas ao mesmo tempo acessíveis para as crianças, permitindo-lhes experimentar, testar hipóteses e chegar à solução por conta própria, fornecendo feedback e orientação para ajudar as crianças a refletir sobre seu processo de aprendizagem.

O desenvolvimento do pensamento matemático é também, resultado da aquisição de conceitos proporcionais ao longo da infância e da adolescência, para a Teoria Desenvolvimental as atividades que envolvem proporcionalidade são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático de crianças e jovens, desde simples comparações até a resolução de problemas envolvendo equações proporcionais que podem e devem ser utilizadas para auxiliar na formação desse conceito de maneira lúdica e eficiente.

O trabalho com proporcionalidade pode ser realizado desde muito cedo, com a utilização de blocos lógicos por exemplo, formando proporções simples, mostrando que um bloco está para duas crianças, assim como dois blocos estão para quatro crianças e assim sucessivamente, cabendo ao professor intervir, chamando a atenção e mostrando que conforme aumentam os blocos, aumentam as crianças proporcionalmente. É possível propor atividades utilizando gráficos de barras, por exemplo, para comparar grandezas, situações-problema envolvendo a construção de relações proporcionais em situações reais, como organização de filas de meninos e meninas. Há ainda, a possibilidade de analisar gráficos e tabelas para determinar relações proporcionais.

Em situações cotidianas é possível incentivar os estudantes a buscar relações proporcionais buscando comparar tamanhos, quantidades e preços, incentivá-los a compararem suas próprias soluções na resolução de situações-problemas e explicarem o raciocínio utilizado. A construção de gráficos de colunas ou de barras, para visualizar relações proporcionais, além da utilização de modelos como régua, balanças, blocos lógicos, ou ainda recursos mais simples, como folha de papel por exemplo, auxiliarão os estudantes a compreender as relações proporcionais. Proporcionar oportunidades para que os estudantes discutam em grupo e expliquem as estratégias utilizadas para resolução de situações-problemas, auxiliará na construção de conceitos coletivos.

Algumas atividades que abordam o conceito de proporcionalidade e auxiliam em sua apreensão incluem trabalhar em grupo para comparar quantidades e identificar proporções usando balanças. Desenhar figuras de maneira proporcional, trabalhando com razões e medidas. Jogos que envolvam a resolução de situações-problemas de proporção, como por exemplo, descobrir a razão entre dois números. Situações-problemas envolvendo porcentagem, desconto, aumento, juros, ampliar e reduzir figuras geométricas, situações-problemas com medidas de comprimento, área, volume e etc. Outra possibilidade é realizar um trabalho utilizando receitas culinárias, preparando receitas de forma proporcional, ajustando ingredientes de acordo com o número de pessoas a serem servidas.

Essas atividades auxiliam no desenvolvimento do conceito de proporcionalidade, além de tornar o trabalho com esse tema mais interessante e significativo para os estudantes, promoverá reflexão crítica sobre o conceito. É importante que o professor esteja atento para as novas descobertas dos estudantes e ao mesmo tempo, incentive a curiosidade e o questionamento, oferecendo estímulos para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Guardada as proporções, o Projeto EMAI apresenta atividades que abordam a proporcionalidade, visando estimular a criatividade dos alunos, porém como já apontado anteriormente, uma das suas principais características, que era aprimorar a formação continuada de professores, a fim de que eles pudessem oferecer aos alunos uma educação matemática de qualidade, se perdeu. Há que se realizar um trabalho de maneira sistematizada para a apropriação do conceito por parte dos alunos, o material por si só não é capaz de proporcionar isso, cabe ao professor organizar atividades de maneira a fomentar o desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes.

Para além das atividades apresentadas, podemos sugerir também jogos que envolvam comparação de quantidades e proporções, estimulando o raciocínio lógico dos alunos, realização de atividades práticas que permitam aos alunos manipular quantidades e criar hipóteses com relação ao conceito de modo concreto, desenvolver atividades que possibilitem aos alunos aplicarem o conceito de proporção na resolução de problemas reais e significativos. Fomentar o trabalho em grupo, pois essa estratégia permite aos estudantes a troca de ideias e a ampliação de sua compreensão sobre o assunto. O importante é que o trabalho seja sistematizado, de

forma que os conceitos sejam trabalhados ou apresentados de forma progressiva e que os alunos tenham o tempo necessário para assimilar e aprofundar o conhecimento adquirido.

Ao analisarmos o material do Projeto EMAI e compararmos as teorias que embasam esta análise, podemos afirmar que a Teoria Desenvolvidora avança em relação à Teoria dos Campos Conceituais em alguns aspectos. Davídov (2020), enfatiza a importância da história da matemática e da evolução dos conceitos matemáticos na formação das estruturas mentais, enquanto Vergnaud (1990), se concentra mais na construção individual dos conceitos. Davídov (2020), destaca a importância das concepções prévias na formação das novas representações matemáticas, enquanto Vergnaud (1990), enfatiza a construção ativa dos conceitos a partir de uma perspectiva mais individual. Davídov (2020), destaca a importância da aprendizagem significativa, na qual o aluno relaciona os conceitos matemáticos com seu conhecimento anterior, enquanto Vergnaud (1990), se concentra mais na construção dos conceitos matemáticos.

Para a Teoria Desenvolvidora de Davídov (2020), o desenvolvimento do pensamento teórico em matemática em escolares, ocorre a partir da construção gradual das estruturas mentais matemáticas. O autor destaca ainda a importância da aprendizagem significativa, na qual o aluno relaciona os conceitos matemáticos com o seu conhecimento anterior, e da história da matemática e a evolução dos conceitos matemáticos. As concepções prévias dos alunos também desempenham um papel importante na formação das novas representações matemáticas. É por meio da integração dessas concepções prévias com as novas informações, que os alunos serão capazes de desenvolver seu pensamento teórico.

Nesse sentido, a abordagem proposta para a temática da proporcionalidade no projeto EMAI pode avançar no desenvolvimento conceitual para estabelecimento da ideia de proporcionalidade, explorando outras situações matemáticas voltadas ao favorecimento e sustentação do trabalho a ser posto em prática tanto no segundo segmento do ensino fundamental, quanto no ensino médio, articuladamente às outras áreas do conhecimento, sempre que possível.

A premissa citada tem consequências para a organização do trabalho pedagógico. À medida que as crianças aprendem, elas se desenvolvem. Por isso, o papel do docente é criar situações que possam favorecer o processo, instigando os

estudantes à curiosidade, ao gosto pelos desafios e pela descoberta. Para tanto, não basta apresentar um conceito pronto e explorar procedimentos imitativo-repetitivos.

Com esse olhar sobre a dialeticidade da relação entre ensino e aprendizagem, no curso do desenvolvimento do trabalho com a noção de proporcionalidade, é possível pensar outras situações didáticas com vistas à ampliação das relações envolvidas nessa ideia matemática tão relevante para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Meu papel como professor, ao ensinar o conteúdo  $a$  ou  $b$ , não é apenas o de me esforçar para, com clareza máxima, descrever a substantividade do conteúdo para que o aluno o fixe. Meu papel fundamental, ao falar com clareza sobre o objeto, é incitar o aluno a fim de que ele, com os materiais que ofereço, produza a compreensão do objeto em lugar de recebê-la, na íntegra, de mim. Ele precisa se apropriar da inteligência do conteúdo para que a verdadeira relação de comunicação entre mim, como professor, e ele, como aluno se estabeleça. (FREIRE, 1996, p. 118).

Consideremos, por exemplo, a seguinte situação-problema:

“Um reservatório, com entrada de água em velocidade constante, tem instalado um aferidor de nível, o qual a cada intervalo de 5 minutos marca a altura ou nível do líquido”.

Observe a tabela envolvendo a situação descrita e, com base nos dados, responda aos questionamentos a seguir:

**Ilustração 11:** Variação do nível de água em função do tempo

| <b>TEMPO (min)</b> | <b>ALTURA (cm)</b> |
|--------------------|--------------------|
| 10                 | 12                 |
| 15                 | 18                 |
| 20                 | 24                 |
| 25                 | 30                 |

**Fonte:** Elaborada pela autora.

- Quantos minutos são necessários para o nível da água atingir 48 cm?
- Para o nível da água atingir 60 cm, qual será o tempo necessário?
- Quando o nível da água marcar um metro, quantos minutos terão transcorridos?

- Transcorridos 45 minutos, qual será o nível da água em cm?
- Você é capaz de dizer qual o tempo necessário para o nível da água atingir 27 cm?

É possível que as crianças tentem resolver as questões ampliando a tabela sequencialmente, ou seja, para cada bloco de 5 minutos acrescentariam 6 centímetros no nível de água correspondente. Elas estariam recorrendo às transformações do campo aditivo ou, eventualmente, do campo multiplicativo, nos termos de Vergnaud (1990), explorando a relação matemática “a cada 5 minutos o nível da água sobe 6 cm”, ou seja, na razão  $5/6$  ou 5 para 6.

Na descrição das situações didáticas exploradas no material analisado percebemos a preocupação em explorar a ideia de proporcionalidade articulada ao movimento didático necessário para a apropriação das ideias matemáticas envolvidas nas operações matemáticas elementares. Essas ações são fundamentais, de fato, para as crianças desse nível de ensino, sendo que percebemos a presença da ideia de proporcionalidade em várias atividades do material do projeto EMAI.

No entanto, essa última situação matemática apresentada permite, e exige, explorar uma variedade significativa de ideias envolvendo a proporcionalidade, aprofundando as relações entre os conceitos e ampliando o alcance das formulações relativas ao cálculo escrito e ao cálculo mental. Permite, também, ao professor, a posteriori, conexões curriculares importantes com algumas implicações da sustentabilidade na qual se inclui o problema do uso racional da água e das fontes de recursos naturais, em abordagem ampliada, de natureza transdisciplinar.

Por isso, no curso das interações do docente com as crianças e delas entre si, após esse trabalho inicial previsto no material do EMAI é preciso explorar outros questionamentos de grande alcance didático-pedagógico para continuidade do estudo, em especial, se pensarmos a realidade do ensino em tempo integral:

- Quando o tempo dobra, o que acontece com a altura?
- Quando a altura ou nível da água é reduzida à terça parte, o que acontece com o tempo transcorrido?
- Se multiplicarmos o tempo por 10, o que deverá acontecer com o nível de água?
- Se reduzirmos o tempo à quinta parte, o que ocorrerá com o altura da água?

Por que essa conduta didática é importante? Não é apenas para que as crianças aprendam mais Matemática, mas para que sejam curiosas, tenham prazer nas descobertas científicas, estabeleçam relações entre as ideias matemáticas e se sintam capazes de aprender. Insistimos, aprendendo, elas se desenvolvem e se interessam mais pela escola:

[...] não se pode afirmar que as crianças que entram entrando (sic) no período da adolescência têm maior sensibilidade para o estudo. Em primeiro lugar, não é excepcional que em algumas crianças tais interesses surjam de forma espontânea. Em segundo lugar, que nesse período da adolescência apareça uma nova atitude em relação ao estudo, que provoca o desejo de assimilar conhecimentos mais profundos. Dessa forma, a ausência de interesse para aprender não pode ser atribuída às características típicas da faixa etária dos alunos observados. Na maioria dos casos, esse desinteresse está relacionado com as deficiências na organização e nos conteúdos do trabalho educativo no começo das séries finais do nível fundamental, sobretudo, no quinto ano (ELKONIN, 2020, p. 144).

Dialogando com o autor, é possível pensar que na educação brasileira a situação não muda muito; aliás elas são absolutamente idênticas ao quadro por ele relatado. Por isso, é necessária a reflexão sobre as situações antecedentes, em especial, as operações lógicas que sustentam a formação do conceito de proporcionalidade.

Primeiramente, a ideia de proporcionalidade envolve, em caráter preliminar, as operações lógicas de comparação, correspondência, compensação, inclusão hierárquica e equivalência. Tais operações lógicas não são ensinadas por via direta, mas isso não significa que nada resta a fazer por parte dos professores. É função deles criar situações matemáticas envolvendo essas ideias, valendo-se de recursos didáticos variados como desenhos, esquemas, jogos, atividades lúdicas e materiais concretos, o que pode ser explorado adequadamente desde a educação infantil. É fato que um conceito matemático é sempre uma abstração, uma ação interiorizada em pensamento, ou seja, não se retira conceito matemático desses materiais, mas eles podem favorecer a mediação pedagógica, ampliando os limites de alcance dos signos, em geral, representados apenas pela fala professoral e pela simbologia escrita.

Em segundo lugar, é preciso ampliar a simbologia valendo-se de representações em gráficos de barras ou de colunas, por exemplo. Na situação matemática citada, relacionando nível de água e o tempo necessário para alcançá-lo, se após a construção do gráfico colocarmos uma régua sobre os seus vértices, desde que todos do mesmo lado das colunas, veremos que esses pontos definem um segmento de reta em função da sua variação linear.

No primeiro segmento do ensino fundamental esses gráficos podem ser construídos sobre uma placa de isopor, usando fichas de cartolina ou papel cartão, recortadas previamente no mesmo tamanho e fixadas com grampos/percevejos. À medida que as crianças passem a dominar essa construção, o traçado do gráfico pode ser feito a lápis sobre papel quadriculado. Isso amplia o universo das representações semióticas.

No segundo segmento do ensino fundamental e no ensino médio deverão ser aprofundados esses conceitos com a construção de gráficos cartesianos representando as funções linear e afim. E novas descobertas pelos alunos serão possíveis: quando a reta passa pela origem do sistema cartesiano temos uma função linear e as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, mas quando o gráfico define um segmento de reta que não passa pela origem, as grandezas não são proporcionais, configurando-se uma função afim.

Por certo, nos anos iniciais do ensino fundamental a centralidade das ações não deve ser na nomenclatura especializada desses conceitos, mas nas ideias e relações exploradas. Sob a nossa óptica, a escola precisa se ocupar da inclusão de todos os estudantes, inclusive daqueles que demonstram facilidade para lidar com ideias matemáticas e tem o seu desenvolvimento prejudicado pelas limitações do trabalho pedagógico posto em prática, em geral, apresentando os conceitos básicos supostamente para todos os alunos.

Nessa linha de raciocínio, um dos mais graves problemas pedagógicos relativos ao ensino da Matemática é certa tendência do aparato escolar, em praticamente todos os níveis de ensino, de tentar ministrar o mesmo conteúdo a todos os alunos, ao mesmo tempo e utilizando os mesmos recursos pedagógicos e situações didáticas. Por vezes, desconsidera-se o processo de desenvolvimento intelectual das crianças. Quando isso ocorre, para avançar no desenvolvimento dos programas de ensino, bastam a repetição e imitação de procedimentos algorítmicos.

O problema tem raízes profundas na crença na possibilidade de transmissão de conhecimento por via direta, um viés teórico decorrente da interpretação e reprodução equivocadas do modo positivista de pensar a ciência, e, em particular, em determinadas situações, adotando procedimentos voltados ao desenvolvimento precoce da linguagem simbólica decorrente do modelo formal euclidiano, assumido equivocadamente como metodologia de ensino. Na realidade, ambos os movimentos, com influências notáveis no desenvolvimento do ensino de Matemática, pretendiam apenas organizar a Matemática como ciência, ou seja, esses movimentos, vinculados, a rigor, ao mesmo modo de pensar, tinham como base a metodologia da ciência.

Resulta desse equívoco conceitual uma abordagem descontextualizada do conteúdo matemático, mediante uma sequência de atividades linearizada e fragmentada:

O pensamento teórico, por sua vez, vai além da aparência dessa sequência de procedimentos particulares, e adentra a essência dos sistemas conceituais por meio de respostas às seguintes perguntas: Qual a gênese? Qual o percurso de desenvolvimento até atingir seu estágio atual? Por quê? Para quê? A serviço de quem esse conhecimento pode ser colocado? Responder tais perguntas, por meio da organização do ensino, requer a compreensão da síntese histórica dos conceitos, como eles se articulam e conformam os sistemas conceituais em nível contemporâneo de desenvolvimento. Tal síntese, no âmbito de todos os conceitos matemáticos abordados desde a Educação Básica, parte da relação entre grandezas discretas e contínuas por meio da articulação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas (ROSA; MARCELO, 2022, p. 3).

Nesse modo de pensar, é fundamental propiciar aos alunos, desde o início da escolarização, atividades inerentes ao processo real desenvolvido pela humanidade para a elaboração e apropriação de conceitos matemáticos, reconstruindo a trajetória histórica e efetiva de generalização e desenvolvimento de conhecimentos.

Com base em Davidov (2020) é possível inferir que, de forma geral, as ações tradicionais no ensino de Matemática são definidas em contexto de formação de conhecimento empírico. Sem descartar o fato de que a aprendizagem de algo sempre influencia, de algum modo, o processo de desenvolvimento intelectual, consideramos que o método para apropriação do conhecimento científico é de outra ordem.

Contrariamente à forma como se pode treinar habilidades e competências baseadas no conhecimento empírico, o desenvolvimento do conhecimento científico

exige como ponto de partida um processo de contextualização e historicização no qual os estudantes devem aprender sobre os aspectos genéticos do objeto do conhecimento, isto é, compreender os motivos e necessidades de desenvolvimento de dado conceito matemático, um movimento explícito de natureza histórico-lógica.

Uma perspectiva de educação desenvolvimental põe em evidência as relações de gênese do objeto de conhecimento em estudo e sua transformação histórica, destacando os princípios gerais desse objeto.

No curso do desenvolvimento, as situações de ensino e de aprendizagem devem conduzir os educandos ao reconhecimento da ciência como método próprio, geral e adequado com vistas à análise e busca de soluções para os problemas, formalizando, por fim, o pensar teórico exigido para desenvolver os processos mentais a conduzir a formação de conceitos.

Consideremos a seguinte situação matemática: “Nas aulas de Educação Física, o professor registra em uma tabela a velocidade necessária a cada aluno para alcançar a linha de chegada de determinado percurso no menor tempo possível”.

Suponha que um estudante tenha percorrido cada trajeto em velocidade constante e que o seu desempenho tenha resultado na elaboração da tabela a seguir.

**Ilustração 12:** Variação da velocidade em função do tempo para cumprir um trajeto

| Velocidade (m/s) | Tempo (s) |
|------------------|-----------|
| 1                | 120       |
| 2                | 60        |
| 3                | 40        |
| 4                | 30        |
| 5                | 24        |
| 10               | 12        |
| 15               | 8         |

**Fonte:** elaboração da autora

Situações matemáticas dessa natureza raramente aparecem nas atividades envolvendo a noção de proporcionalidade nos anos iniciais do ensino fundamental, provavelmente pelo entendimento de que as crianças não têm maturidade cognitiva

para a sua abordagem. No entanto, uma abordagem desse tipo de variação, comum em diversos fenômenos da natureza, pode ser fundamentada inicialmente apenas com operações situadas no campo multiplicativo, explorando não apenas a multiplicação (ou a divisão) com base na repetição descontextualizada:

- O que ocorre com a grandeza tempo quando dobramos a grandeza velocidade para cumprir o trajeto?
- Quando reduzimos a grandeza tempo à terça parte, o que acontece com a grandeza velocidade necessária para cumprir o percurso anterior?
- Se quadruplicamos a velocidade, o que ocorre com o tempo necessário para cumprir o percurso?
- Se reduzimos o tempo à décima parte, o que deverá ocorrer com a velocidade para cumprir o mesmo percurso?
- Se a velocidade do estudante for constante e igual a 6 m/s, qual será o tempo gasto para cumprir o percurso?
- Se o tempo para cumprir o percurso for igual a 15 s, qual deverá ser a velocidade constante a ser empregada para cumpri-lo?
- O que ocorre com os produtos obtidos ao multiplicarmos a grandeza velocidade pela grandeza tempo em cada linha da tabela?

Pela exploração das operações matemáticas de multiplicação e divisão, bem como pela reflexão acerca das relações matemáticas envolvendo o fenômeno relatado, os estudantes serão conduzidos a compreender que se em dada relação matemática duplicarmos uma grandeza, a outra se reduzirá à metade; se triplicarmos uma grandeza, a outra se reduzirá à terça parte; se multiplicarmos uma grandeza por 10, a outra se reduzirá à décima parte; e assim por diante, essas grandezas são denominadas inversamente proporcionais. Mas insistimos, a ênfase não deve ser na nomenclatura, mas nas relações conceituais, as quais envolvem apenas ações no campo multiplicativo. A nomenclatura e o aprofundamento dessas ideias deve ser feito no segundo segmento do ensino fundamental e no ensino médio.

A ausência de alguns dados na sequência da tabela tem o propósito de exploração de situações diversificadas, não meramente repetitivas e de instigar os estudantes à reflexão. Por exemplo, se o aluno tentar descobrir qual o tempo necessário para cumprir o trajeto com a velocidade constante de 7 m/s ele perceberá

que o resultado não é exato, fato a ser explorado, a posteriori, na configuração do conjunto dos números racionais em suas representações fracionária ou decimal. Importante destacar, também a possibilidade de explorar outras representações ou medidas para as grandezas tempo e velocidade, por exemplo, em fenômenos envolvendo horas e velocidade empregada para cumprir determinado trajeto.

Por outro lado, a busca da descoberta de um elemento desconhecido em uma relação matemática, ideia que envolve todos os questionamentos apontados, é um princípio elementar para o desenvolvimento das estruturas algébricas, o que causa preocupação e certo desconforto em boa parte dos professores dos anos iniciais do ensino fundamental quando mencionado na Base Nacional Comum Curricular, a BNCC, ou em qualquer outra tentativa de reorganização dos programas de ensino. Não deveria, posto que a mobilização das estruturas algébricas não depende necessariamente de representação com variáveis representadas sob a forma de letras ou incógnitas.

Sob o nosso ponto de vista, o problema é de outra natureza e tem várias implicações político-pedagógicas: garantia de formação inicial e continuada adequada para compreensão desse problema didático-pedagógico; condições de trabalho a permitir aos docentes a reflexão sobre a própria atuação; ressignificação da cultura desenvolvida acerca da organização dos currículos e programas de ensino; mas, principalmente, uma mudança nas concepções acerca de educação, de matemática e de sociedade.

Ademais, as práticas pedagógicas precisam ser objeto de discussão, para além de tantas outras mudanças, há que se modificar também, crenças e saberes dos professores e professoras, nesse sentido concordamos com as autoras,

[...] mesmo com as condições mais adversas de trabalho e de lacunas na formação, muitas professoras que atuam nas séries iniciais revelam comprometimento com a aprendizagem de seus alunos e sempre estão abertas a novas aprendizagens. Há muitas profissionais que não temem a “zona de risco”. A muitas delas faltam oportunidades de vivenciar projetos de formação que contribuam para novas aprendizagens. (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009, p. 38)

Por esses e outros motivos, a necessidade dos professores se colocarem na posição de conceptores de currículo, chamando para si a responsabilidade de criar e desenvolver programas educativos, pois,

É preciso gritar alto que, ao lado de sua atuação no sindicato, a formação científica das professoras iluminada por sua clareza política, sua capacidade, seu gosto de saber mais, sua curiosidade sempre desperta são dos melhores instrumentos políticos na defesa de seus interesses e seus direitos. Entre eles, por exemplo, o de recusar o papel de puras seguidoras dóceis dos *pacotes* que *sabichões* e *sabichonas* produzem em seus gabinetes numa demonstração inequívoca, primeiro de seu autoritarismo; segundo, como alongamento do autoritarismo, de sua absoluta descrença na possibilidade que têm as professoras de saber e de criar. (FREIRE, 1993, p.15-16).

Na continuidade da discussão sobre a proporcionalidade inversa, no curso do ensino fundamental, os alunos poderão ser instigados a compreender que a relação entre as grandezas velocidade e tempo anteriormente abordadas poderiam ser expressas, genericamente, pela sentença matemática  $v \cdot t = 120$ , ou que  $v = 120 : t$  ou que  $t = 120 : v$ . Ou ainda, representando os quocientes indicados sob a forma fracionária. Quando isso ocorrer, eles terão desenvolvido o pensamento teórico ao menos no se refere à compreensão da relação de interdependência entre duas grandezas.

Analogamente ao discorrido com relação às grandezas diretamente proporcionais, consideramos importante a ampliação do alcance da simbologia valendo-se de representações em gráficos de barras ou de colunas, por exemplo. No caso das grandezas inversamente proporcionais explorado, relacionando a variação da velocidade em função do tempo necessário para cumprir o trajeto, a construção do gráfico revelará uma curva tendendo a tangenciar tanto o eixo das ordenadas quanto o eixo das abscissas, sem jamais ultrapassá-los, no entanto, na possibilidade de representação máxima ou mínima, para as grandezas envolvidas.

Tais propostas de encaminhamento aparecem de forma explícita ou implícita em todas as tentativas de reorganização curricular e renovação de programas de ensino levadas a termo após o processo de redemocratização da sociedade brasileira. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais essa postura didática relativamente à proporcionalidade é expressa taxativamente:

A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo

real. Ele está ligado à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor?). Para raciocinar com proporções é preciso abordar os problemas de vários pontos de vista e também identificar situações em que o que está em jogo é a não-proporcionalidade. (BRASIL, 2000, p. 54).

É fato, também, que a discussão sobre a noção de proporcionalidade está presente nos fascículos EMAI, objeto de estudo dessa investigação e, de certo modo, nas reformas curriculares das quatro últimas décadas. No entanto, as dificuldades de implementação prática dessas ideias no sistema escolar tem raízes profundas na desigualdade educacional e na obsolescência das políticas públicas, a influenciar sobremaneira a formação dos estudantes na educação básica, mas também a formação inicial e continuada de educadores:

A natureza do conhecimento matemático deve estar intrínseca ao trabalho do professor de modo que ele possibilite ao estudante o prazer de aprender Matemática, o que significa construí-la, produzi-la, aplicando-a na resolução de problemas inteligentes ou desafiadores. O estudante deve ter a oportunidade de dialogar, formular perguntas, elaborar hipóteses, exercitar conjecturas, realizar experimentações e procurar comprovações para encontrar a solução. Isso deve ocorrer em um ambiente de comunicação de ideias e de negociação e produção de significados que vão sendo construídos nas interações espontâneas que o ambiente permite conforme Passos e Nacarato (2018).

Por fim, é importante destacar que o desenvolvimento do pensamento teórico não é um processo linear, mas sim uma construção contínua e dinâmica que ocorre ao longo da vida escolar. O professor tem o papel de proporcionar oportunidades para que os alunos possam desenvolver seu pensamento teórico de forma ativa, significativa e contextualizada.

A próxima seção é dedicada aos resultados obtidos e às considerações finais.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo investigou se o desenvolvimento da ideia de proporcionalidade é proposto no material didático EMAI e de que maneira, porém vale ressaltar que não foi tomado nessa pesquisa como objeto de análise de forma isolada, entendendo que, trata-se de um material didático oficial da proposta curricular estadual e todas as políticas nele presentes, entendendo ainda, que o conhecimento não é neutro e por isso deve ser constantemente questionado e ampliado.

Ao analisar o material EMAI destinado aos alunos, se o professor somente o utilizar, para introduzir a ideia de proporcionalidade, o conhecimento a ser apropriado ficará sem significado, limitando-se ao campo do conhecimento empírico, uma vez que, a abordagem inicial no caderno do aluno sobre o conceito de proporcionalidade, se resume à apresentação de atividades.

Com relação ao material destinado ao professor, são apresentadas algumas sugestões de encaminhamento das atividades propostas, que podem favorecer o desenvolvimento do conceito proporcionalidade, se forem organizadas de maneira que levem os alunos a atribuir sentido aquilo que estão aprendendo.

Contudo, faz-se necessário ainda, que os professores busquem outras situações potencialmente desencadeadoras que favoreçam a aprendizagem, bem como o desenvolvimento do pensamento teórico, a exemplo disso, pode-se citar jogos, histórias virtuais e situações emergentes do cotidiano etc. Muitas vezes acreditamos que as crianças já realizam essas conexões com as situações reais, mas isso precisa ser construído sistematicamente. Portanto a compreensão do significado de número ultrapassa os muros da escola, e quando uma criança escreve um número não significa que ela realmente tem domínio, ou consegue aplicá-lo em diferentes situações do cotidiano.

O material didático é uma ferramenta importante para o trabalho do professor, fornecendo recursos, podendo ser usado para complementar a aula, servindo de apoio na organização dos conteúdos. No entanto, é importante lembrar que o material didático não deve ser o único recurso e muito menos engessar o trabalho a ser realizado em sala de aula, é imprescindível que o professor considere as

necessidades individuais de cada aluno, oferecendo atividades diferenciadas e diversificadas que atendam a essas necessidades.

Com relação ao ensino e a aprendizagem, cabe ao professor conhecer e estudar o material didático a ser utilizado, bem como a teoria que o sustenta, sendo seletivo e atento, inclusive com a forma de organização e disposição das atividades, não sendo apenas mero executor desse material. Nesse sentido entendemos que o professor sozinho não dará conta de compreender todas as particularidades que envolvem o conceito de proporcionalidade, e necessitará de uma formação continuada que favoreça a construção e a reflexão sobre este tema. Só assim poderá atuar de forma efetiva na elaboração de seus planos de aula, propiciando atividades diferenciadas e que realmente favoreçam a aprendizagem.

Como já vimos, a aprendizagem se dá num processo interno, particular, de autotransformação, por isso a importância de avançarmos para desenvolver o pensamento teórico, que é a capacidade humana de representar pelo plano mental e de maneira subjetiva a realidade objetiva a partir de reflexão, análise, síntese e generalização subjetiva.

Atuar na zona de desenvolvimento proximal dos estudantes exige do professor, no caso da busca de apropriação da noção de proporcionalidade, uma compreensão ampla dos conceitos envolvidos com vistas à formulação de hábitos de problematizar, projetar, refletir e tirar conclusões. Sem essa capacidade de intervenção docente, o que resta é repetir situações do campo aditivo ou do campo multiplicativo de forma mecânica e repetitiva. O principal resultado que a didática centrada na associação de modelos produziu, no caso do processo de ensino e de aprendizagem matemática, foi a frustração e a aversão de contingente significativo de estudantes por essa área do conhecimento. Pior ainda, é constatar que esses estudantes revelam, por vezes, capacidade de raciocínio lógico e articulado em outras áreas do conhecimento.

À guisa de conclusão, é importante destacar ainda que o movimento que se nota na formulação das atividades voltadas ao desenvolvimento da ideia de proporcionalidade no projeto EMAI traz consequências para a organização dos currículos e programas de ensino de Matemática apontando para a necessidade de se avançar da concepção internalista, ou seja, do arranjo curricular pensado sob a óptica do modo como o matemático concebe a sua ciência, para uma concepção externalista na qual, sem desconsiderar o desenvolvimento da Matemática como

conhecimento organizado, contemple também as suas relações com a realidade e com outras áreas do conhecimento, em perspectiva transdisciplinar, um movimento a englobar as vivências, os motivos e as necessidades de aprender Matemática.

Por fim, há que se apontar ainda, que durante a realização desse trabalho a proposta curricular sofreu alterações e foi implementado em meio a pandemia da COVID-19 um novo currículo para o estado de São Paulo, o Currículo em Ação, que trouxe em seus cadernos (do professor e do aluno) várias sequências didáticas propostas pela revista Nova Escola, provocando um esvaziamento do EMAI e acarretando numa ruptura de currículo em rede, retrocedendo para uma proposta de currículo linear.

Com a eclosão da pandemia e a implementação do novo currículo, a SEDUC produziu o material Aprender Sempre, que serviria de apoio à aprendizagem dos estudantes como proposta de recuperação das habilidades essenciais, durante o período de atividades não presenciais em ambiente escolar. Em 2023, com o início do ano letivo e nova mudança de governo, esse material deixa de ser oferecido, e até o momento, não há menções sobre habilidades essenciais, ficando subentendido que ou todas as necessidades e ou dificuldades foram sanadas, ou essas habilidades não eram tão essenciais assim.

Outros estudos futuros poderão ser realizados a partir do material do EMAI. Sugerimos as análises de outros conteúdos matemáticos presentes no projeto; a aplicação destes conteúdos e a sua validação ou não enquanto proposta; uma discussão entre os professores que utilizam esse material e as suas possibilidades/deficiências. Entre outros.

## REFERÊNCIAS

ASTI VERA, Armando. **Metodologia da pesquisa científica**. Porto Alegre: Globo, 1976.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Rio de Janeiro, DP & A, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC, 2017.

CERVO, Amado Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino. **Metodologia científica**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

D'Ambrósio, Ubiratan. **Educação Matemática da Teoria à Prática**. Campinas, SP: Papirus, 2012.

DAVIDOV, Vasily Vasilovich. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental**. Moscou, Editorial Progreso, 1988.

DAVIDOV, Vasily Vasilovich. Os problemas psicológicos do processo de aprendizagem dos estudantes. In: PUENTES, Roberto Valdés; CARDOSO, Cecília Garcia Coelho; AMORIM, Paula Alves Prudente. **Teoria da Atividade de Estudo: contribuições de D. B. E., V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I**. Curitiba: Editora CRV, 2020. Coedição: Uberlândia: EDUFU, 2020, p. 169-171.

DAVIDOV, Vasily Vasilovich. Conteúdo e estrutura da Atividade de Estudo. In: PUENTES, Roberto Valdés; CARDOSO, Cecília Garcia Coelho; AMORIM, Paula Alves Prudente. **Teoria da Atividade de Estudo: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I**. Curitiba: Editora CRV, 2020. Coedição: Uberlândia: EDUFU, 2020, p. 213-231.

DAVIDOV, Vasily Vasilovich. O conceito de Atividade de Estudo dos estudantes. In: PUENTES, Roberto Valdés; CARDOSO, Cecília Garcia Coelho; AMORIM, Paula Alves Prudente. **Teoria da Atividade de Estudo: contribuições de Daniil Borisovitch Elkonin, Vasily Vasilovich Davidov e Vladimir Vladimirovski Repkin – Livro I**. Curitiba: Editora CRV, 2020. Coedição: Uberlândia: EDUFU, 2020, p. 189-211.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, Papirus, 2007.

FALZETTA, Ricardo. É hora de ensinar proporção. Entrevistada: Terezinha Nunes. **Revista Nova Escola**, São Paulo, n. 161, abr. 2003.

FIGUEIRE, Leandra Anversa. Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da Teoria dos Campos Conceituais. 2010. 243 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Centro Interdisciplinar de

Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/19011/000731685.pdf?sequence=1>. Acesso em: 03 set. 2020.

ELKONIN, Daniil Borisovich. Atividade de Estudo: importância na vida do estudante. In: PUENTES, Roberto Valdés; CARDOSO, Cecília Garcia Coelho; AMORIM, Paula Alves Prudente. **Teoria da Atividade de Estudo: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I**. Curitiba: Editora CRV, 2020. Coedição: Uberlândia: EDUFU, 2020, p. 145-147.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia** Saberes Necessários à Prática Educativa. São Paulo, Paz e Terra, 1996.

FREIRE, Paulo. **Professora sim, tia não: cartas a quem ousa ensinar**. São Paulo: Editora Olho d'água, 1993.

LE GOFF, Jacques. **História e memória**. Tradução de Bernardo Leitão et. al. 5. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2003.

MENEGHELLI, Juliana; CARDOZO, Dionei; POSSAMAI, Janaína POFFO; SILVA, Viviane Clotilde da. Metodologia de resolução de problemas: concepções e estratégias de ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, v. 11, n. 3, p. 211-231, set/dez 2018.

MIGUEL, José Carlos. FORMAÇÃO DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE NA PERSPECTIVA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL. **Práxis Educacional**, [S. l.], v. 16, n. 41, p. 502-524, 2020. DOI: 10.22481/praxisedu.v16i41.6491. Disponível em: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/praxis/article/view/6491>. Acesso em: 19 maio. 2022.

MORETTI, Vanessa Dias; SOUZA, Neusa Maria Marques de. Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental; Princípios e práticas pedagógicas. 1. Ed.- São Paulo: 2015.

MOURA, Manoel Oriosvaldo. A dimensão da alfabetização na educação matemática infantil. In: KISHIMOTO, Tizuko Morchida; OLIVEIRA-FORMISINHO, Julia (Orgs.). **Em busca da Pedagogia da Infância: pertencer e participar**. Porto Alegre: penso, 2013.

NASCIMENTO, Ruben de Oliveira. Um estudo da mediação na teoria de Lev Vigotski e suas implicações para a educação. 2014. 416 f. Tese (Doutorado em Ciências Humanas) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014. DOI <https://doi.org/10.14393/ufu.te.2014.99>.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglioni. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Tecendo fios do ensinar e do aprender. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglioni; NACARATO, Adair Mendes. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, v. 32, p. 119-135, 2018.

PIRES, Célia Maria Carolino. Avaliação diagnóstica e seu uso no âmbito do projeto Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 1-26, 2014.

PUENTES, Roberto Valdés. Teoria da Atividade de Estudo: estado da arte das pesquisas russas e ucranianas (1958-2018). In: PUENTES, Roberto Valdés; CARDOSO, Cecília Garcia Coelho; AMORIM, Paula Alves Prudente. **Teoria da Atividade de Estudo: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I**. Curitiba: Editora CRV, 2020. Coedição: Uberlândia: EDUFU, 2020, p. 80-135.

ROSA, Josélia Euzébio da. "Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas." Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012. Tese de Doutorado.

SANTOS, Akiko. Complexidade e transdisciplinaridade em educação: cinco princípios para resgatar o elo perdido. **Revista Brasileira de Educação**, v. 13, n. 37, jan./abr. 2008. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/5qbJPVmkqkbqNMj8hGTXVBN/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 31 jan. 2023.

SALVADOR, Ângelo Domingos. **Métodos e técnicas de pesquisa bibliográfica: elaboração de trabalho científico**. 8 ed. Porto Alegre: Sulina, 1980.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **EMAI: educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental; organização dos trabalhos em sala de aula, material do professor – primeiro ano**. Centro de Ensino Fundamental dos Anos Iniciais. São Paulo: SE, 2013.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. Coordenação Geral Maria Inês Fini; Coordenação de área Paulo Miceli. São Paulo: SE, 2011.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Currículo Paulista. Disponível em <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista>. Acesso em 25/06/2022.

SAVIANI, Demerval. **Educação: do senso comum à consciência filosófica**. 13. ed.- Campinas, SP: Editora Autores Associados, 2020.

SAVIANI, Demerval. **Pedagogia Histórico-Crítica: primeiras aproximações**. 12. ed. Campinas, SP: Editora Autores Associados, 2021.

SEVERINO, Augusta Teresa Barbosa; MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel. O projeto EMAI: uma Análise de sua Estrutura Organizacional e seus Pressupostos

Metodológicos. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 12, n. 3, p. 304-314, 2019.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática da matemática**: como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures, *In*: LESH, Richard A.; LANDAU, Marsha (ed.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983, p. 127-174.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. Recherches en didactiques de mathématiques. **Pensée Sauvage**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo, Martins Fontes, 1995.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo, Martins Fontes, 1989.

VYGOTSKY, L. S. Psicologia Pedagógica. Edição Comentada por Guilherme Blanck. Porto Alegre, Artes Médicas, 2003.