



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Matheus Henrique de Figueiredo Rafael

Polinômios q -Ortogonais

São José do Rio Preto
2018

Matheus Henrique de Figueiredo Rafael

Polinômios q -Ortogonais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

São José do Rio Preto
2018

Rafael, Matheus Henrique de Figueiredo.
Polinômios q-Ortogonais / Matheus Henrique de Figueiredo
Rafael. -- São José do Rio Preto, 2018
45 f. : il.

Orientador: Alagacone Sri Ranga
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Funções especiais.
4. Polinômios ortogonais. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio
de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas. II. Título.

CDU – 517.66

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Matheus Henrique de Figueiredo Rafael

Polinômios q -Ortogonais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
Orientador

Profa. Dr. Cleonice Fátima Bracciali
Departamento de Matemática Aplicada - UNESP

Prof. Dr. Heron Martins Félix
Departamento Matemática Aplicada - UFTM

São José do Rio Preto
24 de maio de 2018

À minha família dedico,

Agradecimentos

Aos meus pais, Carlos e Sandra, avó, Nair, pelo esforço constante para promover uma boa estrutura emocional e educacional durante toda minha vida, com certeza eles são a minha referência e a base de tudo que consegui construir. À minha namorada Maria Laura, por estar sempre a meu lado durante todo esse caminho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Alagacone Sri Ranga, a paciência e as observações valiosas na elaboração desta dissertação. À professora Cleonice Fátima Bracciali pelo incentivo, apoio e paciência durante o curso e na elaboração desta dissertação .

Ao professor Heron Martins Félix por aceitar compor a banca examinadora.

Ao pessoal do grupo de polinômios ortogonais, Junior, Alessandra, Gustavo, Luana, Yen, Mariana, e aos amigos Paulo, Gino, pelo companheirismo e bons momentos. Em especial, queria agradecer a Paula, pela amizade, convivência e paciência durante toda a minha vida acadêmica.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

*A mais bela experiência que podemos ter é o mistério. É a emoção fundamental que
está no berço da verdadeira arte e da verdadeira ciência.*

Albert Einstein

RESUMO

O objetivo desta dissertação é estudar os chamados polinômios q -ortogonais. Com esse objetivo, analisamos algumas das igualdades envolvendo q -fatoriais, séries q -hipergeométricas e suas aplicações em certos polinômios q -ortogonais. Os resultados estão associados a quatro casos particulares de polinômios q -ortogonais, q -Hermite, q -Ultra-esféricos, Al-Salam-Chihara e Askey-Wilson, os quais são bastante explorados.

Palavras-chave: Análise. Polinômios Ortogonais. Polinômios q -Ortogonais.

ABSTRACT

The objective of this dissertation is to consider a study of the so- called q -orthogonal polynomials. With this objective we look at some of the equalities involving q -factorials, q -hypergeometric series and their applications towards certain q -orthogonal polynomials. Results are associated with four particular cases of q -orthogonal polynomials, namely: the q -Hermite, q -Ultraespherical, Al-Salam-Chihara and the Askey-Wilson, which thouroughly explored.

Keywords: Analysis. Orthogonal Polynomials. q -Orthogonal Polynomials.

Sumário

1	Introdução	8
2	Conceitos Preliminares	10
2.1	Sequência de Polinômios Ortogonais	10
2.1.1	Algumas Propriedades	10
2.1.2	Relação de Recorrência de Três Termos	12
2.2	Polinômios Ortogonais Clássicos	14
2.2.1	Função Gama	14
2.2.2	Função Geradora	15
2.2.3	Polinômios de Jacobi	15
2.2.4	Polinômios de Laguerre	16
2.2.5	Polinômios de Hermite	17
2.3	q-Identities	18
2.4	O Método Bootstrap	21
3	Polinômios q-Ortogonais	22
3.1	Polinômios q-Hermite	22
3.2	Polinômios q-Ultra-esféricos	27
3.3	Polinômios de Al-Salam-Chihara	30
3.4	Polinômios de Askey-Wilson	35
	Considerações Finais	43
	Referências	45

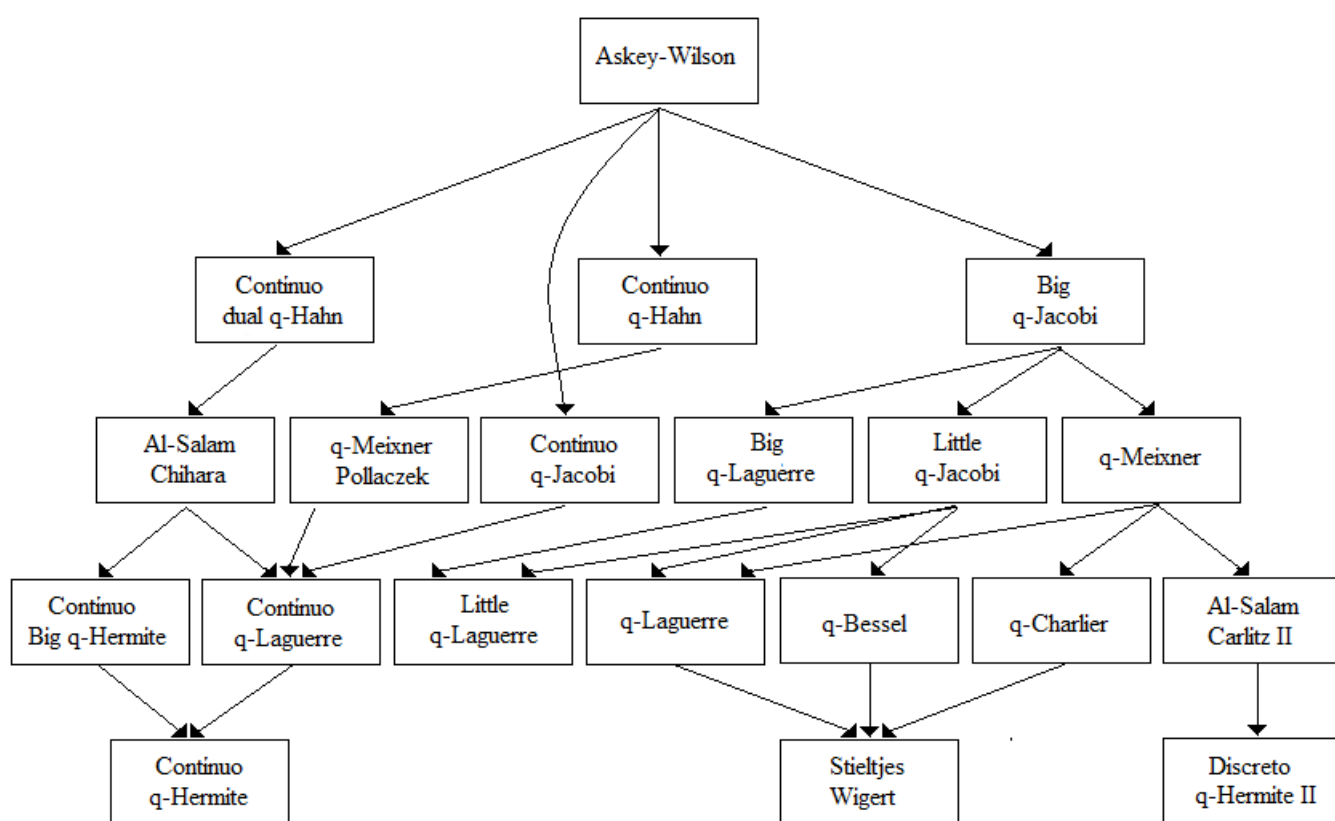
1 Introdução

A teoria de polinômios ortogonais clássicos tem uma rica história. Esses polinômios são ferramentas importantes no tratamento de muitos problemas da matemática pura e ciências aplicadas e despertaram o interesse de vários célebres matemáticos, tais como Euler, Gauss, Chebyshev, Stieltjes, Ramanujam e Abel, que deixaram muitas contribuições para a teoria. Em [2] e [7] pode-se encontrar muitas informações sobre tais polinômios.

Nesta dissertação, no entanto, vamos concentrar os estudos em polinômios q -ortogonais. Eles aparecem em vários ramos das ciências, como, grupos quânticos e álgebras, óptica quântica, frações contínuas e funções elípticas. Os polinômios q -ortogonais foram intensamente estudados nas obras de G. E. Andrews e R. Askey, o que gerou o quadro conhecido como Askey-scheme, o qual relaciona os polinômios q -ortogonais entre si e aos chamados polinômios ortogonais clássicos, conforme representado no quadro a seguir. Em [5] é possível ver mais detalhadamente essa relação, exemplificando como a partir dos polinômios de Askey-Wilson, podemos encontrar outros polinômios q -ortogonais.

Para realizar o estudo nos foi necessário conhecer um pouco sobre q -fatoriais deslocados, como por exemplo algumas transformações e igualdades e também utilizamos alguns teoremas sobre as q -séries hipergeométricas, o que poderá ser visto no Capítulo 2.

No Capítulo 3, foram estudados os polinômios q -Hermite, q -análogos aos polinômios de Hermite, e algumas de suas propriedades, como função geradora, ortogonalidade. Também estudamos os polinômios q -Ultra-esféricos, que são uma generalização dos polinômios q -Hermite, além de serem q -análogos aos polinômios Ultra-esféricos, que também são conhecidos como polinômios de Gegenbauer. Por fim, estudamos os polinômios de Al-Salam-Chihara, que são q -análogos aos de Laguerre e os polinômios de Askey-Wilson, em ambos casos foram provados suas relações de recorrência, ortogonalidade e funções geradoras.



2 Conceitos Preliminares

Neste capítulo enunciaremos alguns teoremas e definições que servirão de base para alguns dos resultados neste trabalho e que podem ser encontrados em [2] e [7].

2.1 Sequência de Polinômios Ortogonais

Definição 2.1.1. O suporte de uma função não decrescente $\phi(x)$ é o conjunto dos seus pontos de aumento, ou seja

$$\text{supp}(\phi) = \{x : \phi(x+y) - \phi(x-y) > 0, \forall y > 0\}. \quad (2.1)$$

Definição 2.1.2. Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $\phi(x)$ uma função real, limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a, b) . Supondo que os momentos definidos por

$$\mu_r = \int_a^b x^r d\phi(x), \quad (2.2)$$

existam para $r = 0, 1, 2, \dots$, e também que a função $\phi(x)$ seja uma medida positiva em (a, b) . Quando $d\phi(x) = w(x)dx$, onde $w(x)$ é uma função contínua, não-negativa e não-identicamente nula em (a, b) , chamamos $w(x)$ de função peso.

Definição 2.1.3. Uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a, b) é uma sequência de polinômios $P_0(x), P_1(x), \dots$, com cada polinômio $P_n(x)$ de grau exatamente n , que satisfaz

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (2.3)$$

Podemos escrever (2.3) como

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{n,m}\rho_n,$$

onde $\delta_{n,m}$ é o delta de Kronecker, ou seja, $\delta_{n,m} = 1$, se $n = m$ e $\delta_{n,m} = 0$ se $n \neq m$.

2.1.1 Algumas Propriedades

As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido em (2.3).

b) $\langle p, P_n \rangle = 0$ para todo $p(x)$ de grau menor que n e $\langle p, P_n \rangle \neq 0$ para todo polinômio $p(x)$ de grau exatamente n .

c) $\langle x^m, P_n \rangle = 0$ para $m < n$ e $\langle x^m, P_n \rangle \neq 0$ para $m = n$.

De fato, seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido em (2.3).

Se $p(x)$ é um polinômio de grau m , então existem constantes $C_{k,m}$ tais que

$$p(x) = \sum_{k=0}^m C_{k,m} P_k(x), \quad C_{m,m} \neq 0.$$

Pela linearidade do produto interno, obtemos

$$\langle p, P_n \rangle = \sum_{k=0}^m C_{k,m} \langle P_k, P_n \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ C_{n,m} \rho_n, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Portanto, temos $a) \Rightarrow b)$.

$b) \Rightarrow c)$ é imediato, ao considerarmos $p(x) = x^m$.

Agora vamos verificar $c) \Rightarrow a)$. Considerando $m < n$, seja

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} x^k, \quad a_{m,m} \neq 0,$$

então, por (c),

$$\langle P_m, P_n \rangle = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle = 0.$$

Agora, se $m = n$,

$$\langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \langle x^k, P_n \rangle = a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle \neq 0,$$

de modo que $c) \Rightarrow a)$.

Teorema 2.1.1. Seja $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$. Então,

$$Q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \dots,$$

onde c_j é uma constante que depende apenas de j .

Demonstração: Seja $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Como $P_0(x), P_1(x), \dots, P_j(x)$ formam uma base para o espaço vetorial de polinômios de grau $\leq j$, podemos escrever $Q_j(x)$ como

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^j c_i P_i(x), \quad c_j \neq 0.$$

Mas, $\langle Q_j, p \rangle = 0$, $\forall p(x)$ de grau $\leq j-1$. Logo,

$$\langle Q_j, P_0 \rangle = \langle Q_j, P_1 \rangle = \cdots = \langle Q_j, P_{j-1} \rangle = 0.$$

Assim, para $k = 0, \dots, j-1$

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle.$$

Como $\langle P_k, P_k \rangle > 0$ então $c_k = 0$ para $k = 0, 1, \dots, j-1$, assim,

$$Q_j(x) = c_j P_j(x).$$

Para obtermos o valor de c_j , basta fazermos

$$\langle Q_j, P_j \rangle = \sum_{i=0}^j c_i \langle P_i, P_j \rangle = c_j \langle P_j, P_j \rangle \Rightarrow c_j = \frac{\langle Q_j, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}.$$

□

2.1.2 Relação de Recorrência de Três Termos

Teorema 2.1.2. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à função peso $w(x)$. Então, os polinômios $P_n(x)$ satisfazem a seguinte relação de recorrência de três termos,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.4)$$

com condições iniciais $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, onde α_{n+1} , β_n , $\gamma_n \in \mathbb{R}$, para $n \geq 1$, e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \quad (2.5)$$

com $\gamma_{n+1} \neq 0$, $\alpha_{n+1} \neq 0$ e $a_{n,n}$ o coeficiente de maior grau de $P_n(x)$.

Demonstração: Seja $P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0}$. Como $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrever

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x), \quad (2.6)$$

pois $P_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n+1$ formam uma base para $\mathbb{P}_{n+1}$.

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os lados da igualdade e isolando b_{n+1} , temos

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Da relação de ortogonalidade (2.3), obtemos

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_j(x)w(x)dx = 0,$$

para $j \leq n-2$, e assim

$$0 = \langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle,$$

para $j \leq n-2$. Logo, $b_j = 0$ se $j \leq n-2$ e, de (2.6),

$$xP_n(x) = b_{n+1}P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x),$$

que pode ser reescrito como

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x),$$

de onde

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \text{ e } \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Como

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}, \quad \text{temos } \gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}.$$

De

$$P_{n+1} = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

obtemos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle.$$

Isolando β_{n+1} , obtemos

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Do mesmo modo para α_{n+1}

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle.$$

Logo,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Pelo fato de

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x),$$

obtemos

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n}P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n}P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n}P_{n-2}(x),$$

porém,

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_{n-1}(x)w(x)dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle,$$

o que nos leva a

$$\langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle.$$

Assim,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Desse modo, dadas as condições iniciais, podemos construir a sequência de polinômios ortogonais utilizando a relação de recorrência de três termos (2.4).

2.2 Polinômios Ortogonais Clássicos

Segundo Chihara [2], os polinômios de Laguerre, Jacobi e de Hermite são chamados de *polinômios ortogonais clássicos*. Para defini-los, necessitamos da chamada função Gama. Aqui também definiremos função geradora.

2.2.1 Função Gama

Buscando uma solução para estender o domínio da função fatorial, Euler descobriu a função Gama (veja [1] e [6]). Para encontrar a generalização do fatorial de Euler, vamos tomar $x \in \mathbb{C}$ e n um número natural. Considerando

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), \quad \text{se } n > 0$$

com $(a)_0 = 1$, a fórmula acima é conhecida por *fatorial deslocado fatorial generalizado* ou, ainda, *símbolo de Pochhammer*, onde a é um número complexo. Assim, pode-se escrever

$$x! = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n},$$

pois

$$\frac{(x+n)!}{(x+1)_n} = \frac{(1)(2)\cdots(x-1)(x)(x+1)\cdots(x+n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Mas

$$(x+n)! = (1)(2)\cdots(n-1)(n)(n+1)\cdots(n+x) = n!(n+1)_x$$

e, assim,

$$x! = \frac{n!(n+1)_x}{(x+1)_n} = \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \frac{(n+1)_x}{n^x}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1$, podemos concluir que

$$x! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n}. \quad (2.7)$$

Observe que, se x é um número complexo, mas diferente de um inteiro negativo, então o limite (2.7) existe e foi denotado por

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n},$$

para todo número complexo $x \neq -1, -2, -3, \dots$.

Se x é inteiro positivo, então $\Gamma(x+1) = x!$ e $\Gamma(1) = 1$.

Desta forma, define-se a função Gama como

Definição 2.2.1. Para todos números complexos $x \neq 0, -1, -2, \dots$, a função gama $\Gamma(x)$ é definida por

$$\Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!k^{x-1}}{(x)_k}.$$

Propriedade 2.2.1. A função gama também pode ser dada como a integral de Euler de segunda espécie

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (2.8)$$

para $x \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re}(x) > 0$.

Propriedade 2.1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Aplicando a equação (2.8) para $\Gamma(x+1)$, temos

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(x+1)-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt.$$

Integrando por partes, com $u = t^x$ e $dv = e^{-t} dt$, obtemos

$$\Gamma(x+1) = -t^x e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty x e^{-t} t^{(x-1)} dt = x \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt = x\Gamma(x).$$

2.2.2 Função Geradora

Uma função geradora para uma sequência de funções $\{g_n\}$ é uma série da forma

$$G(t, x) = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n g_n(x) t^n, \quad (2.9)$$

onde $\{\lambda_n\}$ é uma sequência adequada de multiplicadores.

2.2.3 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, cuja notação é $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, com $\alpha, \beta > -1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Estes polinômios podem ser dados por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}],$$

expressão conhecida como fórmula de Rodrigues, ou ainda obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.10)$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$,

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 3)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)},$$

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}.$$

A relação de ortogonalidade para os polinômios de Jacobi é

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto definido em (2.3).

Uma função geradora para os polinômios de Jacobi é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) t^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-t+R)^\alpha (1+t+R)^\beta R}, \quad (2.11)$$

onde $R = \sqrt{1-2xt+t^2}$.

Polinômios Ultra-esféricos

Os polinômios de Gegenbauer ou polinômios Ultra-esféricos são um caso especial dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2} > -1$. São ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$.

Podemos escrever os polinômios de Gegenbauer, $G_n^{(\lambda)}(x)$, como

$$\begin{aligned} G_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x), \quad \alpha = \lambda - \frac{1}{2}, \\ G_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x). \end{aligned}$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gegenbauer é da forma

$$(n+1)G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)xG_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)G_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

onde $G_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $G_0^{(\lambda)}(x) = 1$, eles possuem a seguinte função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\lambda)}(x) t^n = (1-2xt+t^2)^{-\lambda}.$$

2.2.4 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^\alpha(x)$, são ortogonais no intervalo $(0, \infty)$, com relação a função peso $w(x) = x^{-\alpha}e^{-x}$, $\alpha > -1$, e podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}].$$

Eles podem ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$L_{n+1}^\alpha(x) = (x - (2n + \alpha + 1))L_n^\alpha(x) - n(n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \quad n \geq 1.$$

onde as condições iniciais são $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = x - \alpha - 1$.

Usando a definição de produto interno (2.3) para os polinômios $L_n^{(\alpha)}$ e $L_m^{(\alpha)}$, obtemos

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^{(\alpha)} e^{-x} dx = (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}) L_m^{(\alpha)}(x) dx.$$

então, se $y_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$, temos

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}) = y_n^{(n)},$$

de modo que,

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)(-1)^n y_n^{(n)} dx.$$

Integrando n vezes por partes a expressão anterior, obtemos

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty [L_m^{(\alpha)}(x)]^{(n)} y_n dx.$$

Como $[L_m^{(\alpha)}]^{(n)} = 0$ para $n > m$, $[L_n^{(\alpha)}]^{(n)} = n!$ e $\int_0^\infty x^{\alpha+n}e^{-x}dx = \Gamma(n + \alpha + 1)$, conclui-se, que para os polinômios de Laguerre, vale a relação de ortogonalidade

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n!\Gamma(n + \alpha + 1), & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Finalmente, os polinômios de Laguerre possuem a seguinte função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n = (1-t)^{-\alpha-1}e^{-xt/(1-t)}.$$

2.2.5 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite, denotados por $H_n(x)$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$, e podem ser obtidos pela fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx^n} [e^{-x^2}]. \quad (2.12)$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Hermite, que pode ser obtida através das equações (2.4), (2.5) e (2.12), é dada por

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$.

Usando a definição de produto interno (2.3) e $\phi(x) = e^{-x^2}$, obtemos

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\phi^{(n)}(x)dx.$$

Integrando n vezes por partes, temos

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x)\phi(x)dx.$$

Como $[H_m]^{(n)} = 0$ para $n > m$, $[H_n]^{(n)} = 2^n n!$ e $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, conclui-se que, para os polinômios de Hermite, vale a relação de ortogonalidade

$$\langle H_n, H_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Por fim, os polinômios de Hermite possuem a seguinte função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} = e^{(2xt-t^2)}.$$

Para mais informações sobre a teoria de polinômios ortogonais clássicos veja Chihara [2] e Szegő [7].

2.3 q-Identities

Nesta seção definiremos q-fatoriais deslocados e as q-séries hipergeométricas. Além disso, citaremos algumas identidades e teoremas envolvendo ambos.

Seja a um número complexo e $0 < q < 1$. Os q-fatoriais deslocados são definidos por

$$(a; q)_0 := 1,$$

$$(a; q)_n := (1-a)(1-aq)(1-aq^2) \dots (1-aq^{n-1}) = \prod_{k=1}^n (1-aq^{k-1}), \quad (2.13)$$

para $n = 1, 2, \dots$, ou ∞ , e os múltiplos q-fatoriais deslocados por

$$(a_1, a_2, \dots, a_k; q)_n := (a_1; q)_n (a_2; q)_n (a_3; q)_n \dots (a_k; q)_n = \prod_{j=1}^k (a_j; q)_n,$$

Da definição (2.13), pode-se ver que

$$(a; q)_n (aq^n; q)_{\infty} = (a; q)_{\infty}, \quad (2.14)$$

pois,

$$(a; q)_n = (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})$$

e

$$(aq^n; q)_{\infty} = (1-aq^n)(1-aq^{n+1}) \dots$$

Portanto,

$$(a; q)_n (aq^n; q) = (a; q)_{\infty}.$$

Para n índices negativo, temos a definição

$$(a; q)_{-n} = \frac{1}{(1-aq^{-1})(1-aq^{-2}) \dots (1-aq^{-n})}$$

para $n = 0, 1, \dots$.

Além disso,

$$(a; q)_{-n} = (aq^{-n}; q)_n = \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a; q)_n}. \quad (2.15)$$

q-Série Hipergeométrica

Uma q-série hipergeométrica é definida por

$$\begin{aligned} {}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q, z \right) &= {}_r\phi_s(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_s; q, z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_n}{(q, b_1, b_2, \dots, b_s; q)_n} (-q^{(n-1)/2})^{n(s+1-r)} z^n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como $(q^{-k}; q)_n = 0$, se $n = k + 1, k + 2, \dots$, a fim de evitar singularidades ou indeterminações, sempre assumiremos que nenhum dos parâmetros $b_1, b_2, \dots, b_s$ em (2.16) tem a forma q^{-k} . Agora, se um dos parâmetros do numerador de (2.16) possui a forma q^{-k} , a série é finita.

O raio de convergência da série (2.16) é 1, 0 ou ∞ , se $r = s + 1$, $r > s + 1$ ou $r < s + 1$, respectivamente. Este fato pode ser mostrado usando o teste da razão.

Uma série do tipo (2.16) é dita balanceada se

$$r = s + 1 \quad \text{e} \quad qa_1 a_2 \dots a_{s+1} = b_1 b_2 \dots b_s.$$

q-Série Hipergeométrica bilateral

Uma q-série hipergeométrica bilateral é definida por

$$\begin{aligned} {}_r\psi_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q, z \right) &= {}_r\psi_s(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_s; q, z) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_n}{(q, b_1, b_2, \dots, b_s; q)_n} (-1)^{(s-r)n} q^{(s-r)\binom{n}{2}} z^n. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Em (2.17) assumimos que nenhum dos parâmetros $b_1, b_2, \dots, b_s$ tenha a forma q^{-k} . Ao aplicarmos (2.15) em (2.17) para os termos com n negativo, obtemos

$$\begin{aligned} {}_r\psi_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q, z \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, b_2, \dots, b_s; q)_n} (-1)^{(s-r)n} q^{(s-r)\binom{n}{2}} z^n + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q/b_1, q/b_2, \dots, q/b_s; q)_n}{(q/a_1, q/a_2, \dots, q/a_r; q)_n} \left(\frac{b_1 b_2 \dots b_r}{a_1 a_2 \dots a_r z} \right)^n. \end{aligned}$$

q-Integral

A chamada q-integral é definida por

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t, \quad (2.18)$$

onde

$$\int_0^a f(t) d_q t = a(1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n) q^n. \quad (2.19)$$

para $0 < q < 1$.

Se f é contínua em $(0, a)$, então vemos que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_0^a f(t) d_q t = \int_0^a f(t) dt, \quad (2.20)$$

observe que em (2.20) o limite resulta na integral de Riemann.

Apresentamos agora algumas identidades úteis e teoremas envolvendo q -fatoriais deslocados e séries q -hipergeométricas que utilizaremos. As demonstrações podem ser encontradas em [3] e [4].

$$(aq^{-n}; q)_n = (q/a; q)_n (-a)^{-n} q^{-n(n+1)/2}, \quad (2.21)$$

$$(a; q)_{n-k} = \frac{(a; q)_n}{(q^{1-n}/a; q)_k} (-a)^{-k} q^{\frac{1}{2}k(k+1)-nk}, \quad (2.22)$$

$$\frac{(a; q)_{n-k}}{(b; q)_{n-k}} = \frac{(a; q)_n (q^{1-n}/b; q)_k}{(b; q)_n (q^{1-n}/a; q)_k} \left(\frac{b}{a}\right)^k, \quad (2.23)$$

e

$$(a; q)_m = (aq^m; q)_n = (a; q)_{m+n} \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.24)$$

Teorema 2.3.1. (*q*-Pfaff-Saalschütz) A soma de uma sequência balanceada ${}_3\phi_2$ finita é dada por

$${}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, a, b \\ c, d \end{matrix} \middle| q, q \right) = \frac{(d/a, d/b; q)_n}{(d, d/ab; q)_n}, \quad (2.25)$$

com $cd = abq^{1-n}$.

Teorema 2.3.2. A soma de Chu-Vandermonde q -análoga é dada por

$${}_2\phi_1(q^{-n}, a; c; q, q) = \frac{(c/a; q)_n}{(c; q)_n} a^n. \quad (2.26)$$

Teorema 2.3.3. O teorema de Gauss q -análogo á funções hipergeométricas

$${}_2\phi_1(a, b; c; q, c/ab) = \frac{(c/a, c/b; q)_\infty}{(c, c/ab; q)_\infty}, \quad |c/ab| < 1. \quad (2.27)$$

Teorema 2.3.4. Se $|z| < 1$ ou $a = q^{-n}$, então

$${}_1\phi_0(a; -; q, z) = \frac{(az; q)_\infty}{(z; q)_\infty}. \quad (2.28)$$

Teorema 2.3.5. (*Euler*) As seguintes igualdades valem

$$e_q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_\infty} = \frac{1}{(z; q)_\infty}, \quad |z| < 1, \quad (2.29)$$

e

$$E_q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_\infty} q^{n(n-1)/2} = (-z; q)_\infty.$$

Teorema 2.3.6. (*Ramanujan*) Para $|b/a| < |z| < 1$, vale

$${}_1\psi_1(a; b; q, z) = \frac{(b/a, q, q/az, az; q)_\infty}{(b, b/az, q/a, z; q)_\infty}. \quad (2.30)$$

Teorema 2.3.7. A identidade do produto triplo de Jacobi é expressa por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2/2} z^n = (q, q^{\frac{1}{2}}z, q^{\frac{1}{2}}/z; q)_{\infty}. \quad (2.31)$$

Teorema 2.3.8. Fórmula de Pfaff-Kummer q-análoga, dada como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A, C/B; q)_n}{(q, C, Az; q)_n} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-Bz)^n = \frac{(z; q)_{\infty}}{(Az; q)_{\infty}} {}_2\phi_1(A; B; C; q, z). \quad (2.32)$$

Lema 2.3.1. Vale a transformação

$$\int_a^b \frac{(qt/a, qt/b, ct; q)_{\infty}}{(dt, et, ft; q)_{\infty}} d_q t = b(1-q) \frac{(q, bq/a, a/b, c/d, c/e, c/f; q)_{\infty}}{(ad, ae, af, bd, be, bf; q)_{\infty}}, \quad (2.33)$$

onde $c = abdef$.

2.4 O Método Bootstrap

Um procedimento que usaremos para algumas das provas é o chamado método “bootstrap”, que consiste em obter novas funções ortogonais a partir das que já possuímos. Assumimos que conhecemos uma função geradora para uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}$ satisfazendo (2.3).

Seja a função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)t^n}{c_n} = G(x, t), \quad (2.34)$$

onde $\{c_n\}$ é uma sequência adequada de coeficientes não-nulos. Então, da relação de ortogonalidade (2.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, t_1)G(x, t_2)d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta_n(t_1 t_2)^n}{c_n^2}, \quad (2.35)$$

De fato,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, t_1)G(x, t_2)d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t_1^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t_2^n}{c_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta_n(t_1 t_2)^n}{c_n^2}.$$

Agora, sabendo o valor da integral de $G(x, t_1)G(x, t_2)d\mu(x)$, a ideia do método é usar

$$G(x, t_1)G(x, t_2)d\mu(x) \quad (2.36)$$

como nova medida e, assim, procurar um sistema de funções (preferencialmente polinomial) ortogonais com respeito a essa medida. Se um sistema, como descrito, é encontrado, podemos repetir o processo, ou seja, encontramos uma nova função geradora, como em (2.34) e o seu valor. Mas, note que o processo não pode ser feito indefinidamente, pois em certo momento as funções envolvidas podem se tornar complicadas para reiniciar o processo.

3 Polinômios q-Ortogonais

Neste capítulo, vamos definir os seguintes polinômios q-ortogonais, q-Hermite, q-Ultra-esféricos, Al-Salam-Chihara e Askey-Wilson. Além disso, definiremos algumas de suas propriedades, como relação de recorrência, ortogonalidade e função geradora.

3.1 Polinômios q-Hermite

Os polinômios q-Hermite (q-análogos aos polinômios de Hermite) $\{H_n(x|q)\}$ são polinômios gerados pela relação

$$2xH_n(x|q) = H_{n+1}(x|q) + (1 - q^n)H_{n-1}(x|q), \quad (3.1)$$

com as condições iniciais

$$H_0(x|q) = 1 \quad \text{e} \quad H_1(x|q) = 2x.$$

Primeiramente, encontremos uma função geradora para os polinômios $H_n(x|q)$. Consideremos

$$H(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x|q)t^n}{(q; q)_n}. \quad (3.2)$$

Agora, multiplicando (3.1) por $t^n/(q; q)_n$ e somando para $n = 1, 2, \dots$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2xH_n(x|q)t^n}{(q; q)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x|q)t^n}{(q; q)_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^n)H_{n-1}(x|q)t^n}{(q; q)_n}. \quad (3.3)$$

Reescrevendo os somatórios acima, usando (3.2) e levando em conta as condições iniciais, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2xH_n(x|q)t^n}{(q; q)_n} &= 2xH(x, t) - 2x \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x|q)t^n}{(q; q)_n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H_n t^n (1 - q^n)}{(q; q)_n t} = \frac{H(x; t) - H(x; qt)}{t} - 2x, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^n)H_{n-1}(x|q)t^n}{(q; q)_n} &= tH(x; t), \end{aligned}$$

e substituindo em (3.3), temos

$$H(x, t) - H(x, qt) = 2xtH(x, t) - t^2H(x, t),$$

de modo que,

$$H(x, t) = \frac{H(x, qt)}{1 - 2xt + t^2}. \quad (3.4)$$

Considerando $x = \cos(\theta)$, temos

$$1 - 2xt + t^2 = 1 - t(2\cos(\theta)) + t^2 = 1 - t(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + t^2 = (1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta}).$$

Logo, podemos reescrever (3.4) como

$$H(x, t) = \frac{H(x, qt)}{(1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta})}, \quad x = \cos(\theta).$$

Agora, iterando (3.4), ou seja, substituindo t por qt , e depois qt por qt^2 (e assim sucessivamente), obtemos

$$\begin{aligned} H(\cos(\theta), t) &= \frac{H(\cos(\theta), qt)}{(1 - te^{i\theta})(1 - tqe^{i\theta})(1 - tqe^{-i\theta})(1 - te^{-i\theta})} \\ &= \frac{H(\cos(\theta), q^2t)}{(1 - te^{i\theta})(1 - tqe^{i\theta})(1 - tq^2e^{i\theta})(1 - tqe^{-i\theta})(1 - te^{-i\theta})(1 - tq^2e^{-i\theta})} \\ &\vdots \\ &= \frac{H(\cos(\theta), q^n t)}{(te^{i\theta}, te^{-i\theta}; q)_\infty}, \end{aligned}$$

observe agora que, para $n \rightarrow \infty$, $H(x, q^n t) \rightarrow H(x, 0)$, uma vez que, $|q| < 1$, o que nos permite concluir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H(\cos(\theta)|q)t^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(te^{i\theta}, te^{-i\theta}; q)_\infty}. \quad (3.5)$$

note que, de (3.2), $H(x, 0) = 1$. Assim, provamos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. Os Polinômios q -Hermite possuem a função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H(\cos(\theta)|q)t^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(te^{i\theta}, te^{-i\theta}; q)_\infty}, \quad x = \cos(\theta).$$

De posse da função geradora, iremos fornecer uma forma explícita para $H_n(x|q)$. Expandindo o lado direito de (3.5): note que por (2.29),

$$\frac{1}{(te^{i\theta}; q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{in\theta}}{(q; q)_n}$$

e

$$\frac{1}{(te^{-i\theta}; q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{-in\theta}}{(q; q)_n}.$$

Fazendo o produto dos dois somatórios e usando a fórmula de Cauchy para produtos de séries obtemos

$$\frac{1}{(te^{i\theta}, te^{-i\theta}; q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^n e^{i(n-2k)\theta}}{(q; q)_n (q; q)_{n-k}}$$

e comparando novamente com (3.5), obtemos

$$H_n(\cos(\theta)|q) = \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n e^{i(n-2k)\theta}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}.$$

Como $H_n(x|q)$ é um polinômio real, podemos escrevê-lo explicitamente como

$$\begin{aligned} H_n(\cos(\theta)|q) &= \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n \cos((n-2k)\theta)}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n \cos(|n-2k|\theta)}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Provemos agora o seguinte teorema sobre a relação de ortogonalidade que os polinômios q -Hermite satisfazem:

Teorema 3.1.2. Os polinômios q -Hermite satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 H_m(x|q) H_n(x|q) w(x|q) dx = \frac{2\pi (q; q)_n}{(q; q)_\infty} \delta_{m,n}, \quad (3.7)$$

onde

$$w(x|q) = \frac{(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

A prova deste teorema utiliza o lema a seguir

Lema 3.1.1. Vale a igualdade

$$\int_0^\pi e^{2ij\theta} (e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty d\theta = \frac{\pi (-1)^j (1+q^j) q^{j(j-1)/2}}{(q; q)_\infty}. \quad (3.8)$$

Demonstração: Denotando por I_j o lado esquerdo de (??), observe que

$$I_j = \int_0^\pi e^{2ij\theta} (e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty d\theta = \int_0^\pi e^{2ij\theta} (1 - e^{2i\theta}) (qe^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty d\theta,$$

multiplicando e dividindo por $(q; q)_\infty$, podemos então utilizar (2.31), com o parâmetro $z = q^{\frac{1}{2}} e^{2i\theta}$, assim,

$$\begin{aligned} I_j &= \int_0^\pi e^{2ij\theta} \frac{(1 - e^{2i\theta}) (q, qe^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} d\theta \\ &= \int_0^\pi e^{2ij\theta} \frac{(1 - e^{2i\theta})}{(q; q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} e^{2in\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(n+1)/2}}{2(q; q)_\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{i\theta}) e^{i(j+n)\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observe que a integral em (3.9) só difere de zero para dois valores, $n = -j$ e $n = -j - 1$, que pode ser visto nas integrais

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j+n)\theta} d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j+n+1)\theta} d\theta, \quad (3.10)$$

uma vez que, a primeira, para $n = -j$ vale 2π , enquanto a segunda, para $n = -j - 1$ vale 2π . □

Demonstração do Teorema 3.1.2

Como a função $w(x|q)$ é uma função par em x , ao compararmos polinômios, se a diferença entre seus graus for ímpar, já temos o desejado, pois, estaremos calculando a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $m \leq n$ e que a diferença $n - m$ seja par. Portanto, é suficiente analisar a seguinte integral

$$\int_0^{\pi} e^{i(n-2j)\theta} H_n(\cos \theta|q)(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_{\infty} d\theta. \quad (3.11)$$

Para provarmos o teorema, substituímos (3.6) na integral (3.11), obtendo

$$\sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \int_0^{\pi} e^{2i(n-j-k)\theta} (e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_{\infty} d\theta,$$

usando o resultado (3.8),

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \int_0^{\pi} e^{2i(n-j-k)\theta} (e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_{\infty} d\theta \\ &= \frac{\pi}{(q; q)_{\infty}} \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} (-1)^{j+k+n} (1 + q^{n-j-k}) q^{\frac{(n-j-k)(n-j-k-1)}{2}} \\ &= \frac{\pi}{(q; q)_{\infty}} (-1)^{n+j} q^{(n-j)(n-j-1)/2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} (-1)^k q^{k(k+1)/2+k(j-n)} \right. \\ & \quad \left. + q^{n-j} \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} (-1)^k q^{k(k+1)/2+k(j-n-1)} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considere um dos termos da soma anterior, no caso

$$\sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} (-1)^k q^{k(k+1)/2+k(j-n)},$$

note que, ao aplicarmos (2.22) com o parâmetro q , obtemos

$$\sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} (-1)^k q^{k(k+1)/2+k(j-n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} q^{k(j+1)}.$$

Analogamente,

$$q^{n-j} \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} (-1)^k q^{k(k+1)/2+k(j-n-1)} = q^{n-j} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} q^{kj},$$

voltando em (3.12), temos

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi e^{i(n-2j)\theta} H_n(\cos \theta|q)(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty d\theta \\ &= \frac{\pi}{(q; q)_\infty} (-1)^{n+j} q^{(n-j)(n-j-1)/2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} q^{k(j+1)} + q^{n-j} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} q^{kj} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Observe que, os somatórios entre parênteses podem ser representados por q -séries hipergeométricas, logo

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi e^{i(n-2j)\theta} H_n(\cos \theta|q)(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty d\theta \\ &= \frac{\pi}{(q; q)_\infty} (-1)^{n+j} q^{(n-j)(n-j-1)/2} \left({}_1\phi_0(q^{-n}; -; q, q^{j+1}) + q^{n-j} {}_1\phi_0(q^{-n}; -; q, q^j) \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como

$${}_1\phi_0(q^{-n}; -; q, z) = (q^{-n}z; q)_n,$$

temos

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi e^{i(n-2j)\theta} H_n(\cos \theta|q)(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty d\theta \\ &= \frac{\pi}{(q; q)_\infty} (-1)^{n+j} q^{(n-j)(n-j-1)/2} \left((q^{-n+j+1}; q)_n + q^{n-j} (q^{-n+j}; q)_n \right). \end{aligned}$$

Para $0 < j < n$, o lado direito da igualdade anterior se anula. Observe que, $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$, logo basta calcular $j = 0$, pois $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Quando $j = 0$,

$$\frac{\pi}{(q; q)_\infty} q^{n(n-1)/2} (-1)^n q^n (q^{-n}; q)_n,$$

ainda de (2.22), com $a = 1$,

$$\frac{\pi}{(q; q)_\infty} q^{n(n-1)/2} (-1)^n q^n (q^{-n}; q)_n = \frac{\pi(q; q)_n}{(q; q)_\infty}.$$

Logo, estabelecemos a ortogonalidade para $m < n$. Para $m = n$, utilizaremos (3.6), assim,

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi H_m(\cos \theta|q) H_n(\cos \theta|q)(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \cos(n\theta) H_n(\cos \theta|q)(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty d\theta = 2 \frac{\pi(q; q)_n}{(q; q)_\infty}. \end{aligned}$$

□

3.2 Polinômios q -Ultra-esféricos

Os polinômios q -Ultra-esféricos são uma família de polinômios que dependem de um parâmetro e que generaliza os polinômios q -Hermite. Eles são definidos por

$$C_n(\cos \theta; \beta|q) = \sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} e^{i(n-2k)\theta}. \quad (3.15)$$

Pode-se observar que

$$C_n(x; 0|q) = \frac{H_n(x|q)}{(q; q)_n}$$

e

$$C_n(-x; \beta|q) = (-1)^n C_n(x; \beta|q). \quad (3.16)$$

Teorema 3.2.1. Os polinômios $C_n(x; \beta|q)$ satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 C_m(x; \beta|q) C_n(x; \beta|q) w(x|\beta) dx = \frac{2\pi(\beta, q\beta; q)_\infty (1-\beta)(\beta^2; q)_n}{(q, \beta^2; q)_\infty (1-\beta q^n)(q; q)_n} \delta_{n,m}, \quad (3.17)$$

para $|\beta| < 1$, com

$$w(\cos \theta|\beta) = \frac{(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(\beta e^{2i\theta}, \beta e^{-2i\theta}; q)_\infty} \frac{1}{(\sin \theta)},$$

e $x = \cos(\theta)$.

Demonstração: Primeiramente, vamos assumir que $\beta \neq q^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, pois o resultado pode ser estendido analiticamente para $|\beta| < 1$. Como a função peso é par, se a diferença entre os polinômios que são usados no cálculo da ortogonalidade for ímpar, segue de (3.16), a ortogonalidade, pois estaremos integrando funções ímpares em intervalos simétricos. Logo, é suficiente avaliar polinômios de mesma paridade, ou seja, vamos considerar apenas casos que ambos sejam pares ou ambos ímpares. Assim, é suficiente calcular a seguinte integral

$$I_{m,n} := \int_0^\pi \frac{e^{i(n-2m)\theta} C_n(\cos \theta; \beta|q) (e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(\beta e^{2i\theta}, \beta e^{-2i\theta}; q)_\infty} d\theta, \quad (3.18)$$

para $0 \leq m \leq n$. Veja que essa condição nos garante o afirmado anteriormente, ou seja, se n for ímpar, $n - 2m$ também será, o mesmo ocorrendo para n par.

Usando a definição (3.15), lembrando que

$$(e^{-2i\theta}; q)_\infty = (1 - e^{-2i\theta})(qe^{-2i\theta}; q)_\infty,$$

ao aplicarmos a igualdade acima (3.18), temos

$$I_{m,n} = \sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \int_0^\pi \frac{(e^{2i\theta}, qe^{-2i\theta}; q)_\infty}{(\beta e^{2i\theta}, \beta e^{-2i\theta}; q)_\infty} e^{(2n-2m-2k)i\theta} (1 - e^{-2i\theta}) d\theta.$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da equação acima por

$$\frac{(\beta, \beta q; q)_\infty (q, \beta^2; q)_\infty}{(q, \beta^2; q)_\infty (\beta, \beta q; q)_\infty},$$

podemos reescrever $I_{m,n}$ como

$$\sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} (\beta, \beta q; q)_{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(q, \beta^2, e^{2i\theta}, qe^{-2i\theta}; q)_{\infty}}{(q, \beta^2, \beta e^{2i\theta}, \beta e^{2i\theta}; q)_{\infty}} e^{(2n-2m-2k)i\theta} (1 - e^{-2i\theta}) d\theta.$$

Agora, observando que o integrando satisfaz (2.30), com os valores, $a = 1/\beta$, $b = \beta$ e $z = \beta e^{2i\theta}$, obtemos

$$I_{m,n} = \sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \frac{(\beta, \beta q; q)_{\infty}}{(q, \beta^2; q)_{\infty}} \int_0^{\pi} {}_1\psi_1(1/\beta; \beta; q, \beta e^{2i\theta}) e^{(2n-2m-2k)i\theta} (1 - e^{-2i\theta}) d\theta.$$

Reescrevendo

$${}_1\psi_1(a; b; q, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a; q)_n}{(b; q)_n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q/b; q)_n}{(q/a; q)_n} \left(\frac{b}{az} \right)^n$$

e substituindo na integral, temos

$$I_{m,n} = \sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \frac{(\beta, \beta q; q)_{\infty}}{(q, \beta^2; q)_{\infty}} \times \left[\int_0^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1/\beta; q)_j}{(\beta; q)_j} \beta^j e^{2ij\theta} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q/\beta; q)_j}{(\beta q; q)_j} \beta^j e^{-2ij\theta} \right) e^{2i(n-m-k)\theta} - e^{2i(n-m-k-1)\theta} d\theta \right],$$

transformando o segundo termo do somatório, de modo que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q/\beta; q)_j}{(\beta q; q)_j} \beta^j e^{-2ij\theta} = \sum_{-\infty}^0 \frac{(1/\beta; q)_j}{(\beta; q)_j} \beta^j e^{2ij\theta}.$$

Logo,

$$I_{m,n} = \sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \frac{(\beta, \beta q; q)_{\infty}}{(q, \beta^2; q)_{\infty}} \int_0^{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(1/\beta; q)_j}{(\beta; q)_j} \beta^j e^{2ij\theta} [e^{2i(n-m-k)\theta} - e^{2i(n-m-k-1)\theta}] d\theta.$$

Note que, a diferença entre as integrais anteriores difere de zero apenas para $j = m + k - n$ e $j = m + k - n + 1$, pois no cálculo

$$\int_0^{\pi} e^{2i(n-m-k+j)\theta} d\theta - \int_0^{\pi} e^{2i(n-m-k-1+j)\theta} d\theta \quad (3.19)$$

a primeira vale π para $j = m + k - n$, enquanto a segunda, vale π mas apenas para $j = m + k - n + 1$. Observe que, para valores diferentes dos citados, a diferença entre as integrais é zero. Desse modo,

$$I_{m,n} = \pi \sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \frac{(\beta, \beta q; q)_{\infty}}{(q, \beta^2; q)_{\infty}} \left[\frac{(1/\beta; q)_{m+k-n}}{(\beta; q)_{m+k-n}} \beta^{m+k-n} - \frac{(1/\beta; q)_{m+k-n+1}}{(\beta; q)_{m+k-n+1}} \right].$$

Vamos analisar o que ocorre com a primeira parcela do somatório, sendo análogo para a segunda parte: consideremos

$$\sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \frac{(\beta, \beta q; q)_\infty}{(q, \beta^2; q)_\infty} \frac{(1/\beta; q)_{m+k-n}}{(\beta; q)_{m+k-n}} \beta^{m+k-n}, \quad (3.20)$$

de posse de (2.24), com os parâmetros $a = 1/\beta$ e $a = \beta$, obtemos

$$(1/\beta; q)_{m-n} ((1/\beta)q^m; q)_k = (1/\beta; q)_{m+k-n}$$

e

$$(\beta; q)_{m-n} (\beta q^m; q)_k = (\beta; q)_{m+k-n}.$$

Substituindo ambos na primeira parcela (3.20), temos

$$\beta^{m-n} \frac{(1/\beta; q)_{m-n}}{(\beta; q)_{m-n}} \frac{(\beta, \beta q; q)_\infty}{(q, \beta^2; q)_\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \frac{(1/\beta q^{m-n}; q)_k}{(\beta q^{m-n}; q)_k} \beta^k \right]. \quad (3.21)$$

Agora, usando (2.23) com os parâmetros $a = \beta$ e $b = q$, temos

$$\frac{(\beta; q)_{n-k}}{(q; q)_{n-k}} = \frac{(\beta; q)_n (q^{-n}; q)_k}{(q; q)_n (q^{1-n}/\beta; q)_k} \left(\frac{q}{\beta} \right)^k \quad (3.22)$$

assim, substituindo (3.22) em (3.21), concluímos

$$\beta^{m-n} \frac{(1/\beta; q)_{m-n}}{(\beta; q)_{m-n}} \frac{(\beta, \beta q; q)_\infty}{(q, \beta^2; q)_\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(\beta; q)_k (\beta; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_n} \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q^{1-n}/\beta; q)_k} \frac{((1/\beta)q^{m-n}; q)_k}{(\beta q^{m-n}; q)_k} q^k \right].$$

que, reescrito adequadamente e segundo (2.16), se torna

$$\beta^{m-n} \frac{(1/\beta; q)_{m-n}}{(\beta; q)_{m-n}} \frac{(\beta; q)_n}{(q; q)_n} \frac{(\beta, \beta q; q)_\infty}{(q, \beta^2; q)_\infty} {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, \beta, q^{m-n} \\ q^{1-n}/\beta, q^{m-n}\beta \end{matrix} \middle| q, q \right).$$

Fazendo, de forma análoga, para a segunda parcela do somatório, obtemos

$$\beta^{m-n+1} \frac{(1/\beta; q)_{m-n+1}}{(\beta; q)_{m-n+1}} \frac{(\beta; q)_n}{(q; q)_n} \frac{(\beta, \beta q; q)_\infty}{(q, \beta^2; q)_\infty} {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, \beta, q^{m-n+1} \\ q^{1-n}/\beta, q^{m-n+1}\beta \end{matrix} \middle| q, q \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \pi \frac{(\beta; q)_n}{(q; q)_n} \frac{(\beta, \beta q; q)_\infty}{(q, \beta^2; q)_\infty} \times \\ &\quad \left[\beta^{m-n} \frac{(1/\beta; q)_{m-n}}{(\beta; q)_{m-n}} {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, \beta, q^{m-n} \\ q^{1-n}/\beta, q^{m-n}\beta \end{matrix} \middle| q, q \right) \right. \\ &\quad \left. - \beta^{m-n+1} \frac{(1/\beta; q)_{m-n+1}}{(\beta; q)_{m-n+1}} {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, \beta, q^{m-n+1} \\ q^{1-n}/\beta, q^{m-n+1}\beta \end{matrix} \middle| q, q \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Agora, utilizando (2.25) em (3.23), teremos

$$I_{m,n} = \pi \frac{(\beta; q)_n}{(q; q)_n} \frac{(\beta, \beta q; q)_\infty}{(q, \beta^2; q)_\infty} \times$$

$$\left[\beta^{m-n} \frac{(1/\beta; q)_{m-n}}{(\beta; q)_{m-n}} \frac{(q^{m-n}, \beta^2; q)_n}{(q^{m-n}\beta, \beta; q)_n} - \beta^{m-n+1} \frac{(1/\beta; q)_{m-n+1}}{(\beta; q)_{m-n+1}} \frac{(q^{m-n+1}, \beta^2; q)_n}{(q^{m-n+1}\beta, \beta; q)_n} \right]. \quad (3.24)$$

Como o fator $(q^{m-n}; q)_n$ é zero para $m \leq n$, o primeiro termo do colchetes acima é zero, enquanto o segundo termo, $(q^{m-n+1}; q)_n$, é zero para $m < n$. Logo, nos resta calcular $m = n$ em (3.24). chamando de $I_{n,n}^*$ o valor da integral quando $m = n$, obtemos

$$I_{n,n}^* = \pi \frac{(\beta, q\beta; q)_\infty (\beta^2; q)_n}{(q, \beta^2; q)_\infty (q\beta; q)_n}.$$

Fazendo

$$I_{n,n} = \int_0^\pi C_n(\cos \theta; \beta|q) C_n(\cos \theta; \beta|q) \frac{(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(\beta e^{2i\theta}, \beta e^{2i\theta}; q)_\infty} d\theta$$

ao utilizarmos (3.15), resta

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \int_0^\pi (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \frac{(\beta; q)_n}{(q; q)_n} C_n(\cos \theta; \beta|q) \frac{(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(\beta e^{2i\theta}, \beta e^{2i\theta}; q)_\infty} d\theta \\ &= \frac{(\beta; q)_n}{(q; q)_n} (2I_{n,n}^*) \\ &= 2\pi \frac{(\beta; q)_n}{(q; q)_n} \frac{(\beta, q\beta; q)_\infty (\beta^2; q)_n}{(q, \beta^2; q)_\infty (q\beta; q)_n} \\ &= \frac{2\pi (\beta, q\beta; q)_\infty (1-\beta) (\beta^2; q)_n}{(q, \beta^2; q)_\infty (1-\beta q^n) (q; q)_n}. \end{aligned}$$

□

3.3 Polinômios de Al-Salam-Chihara

Nesta seção, exibiremos a relação de ortogonalidade dos polinômios de Al-Salam-Chihara, partindo de um caso especial de ortogonalidade dos polinômios q-Hermite. Além disso, apresentaremos a sua relação de recorrência e função geradora.

Primeiramente, procuramos polinômios $\{p_n(x; t_1, t_2|q)\}$ ortogonais com relação à função peso

$$w_1(x, t_1; t_2|q) := \frac{(e^{2i\theta} e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}, t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x = \cos(\theta).$$

que é positiva para t_1 e $t_2 \in (-1, 1)$. O valor da sua integral no intervalo $(-1, 1)$ é

$$\int_0^\pi \frac{(e^{2i\theta} e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}, t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_\infty} = \frac{2\pi}{(q, t_1 t_2; q)_\infty}, \quad |t_1| < 1, |t_2| < 1. \quad (3.25)$$

Suponha que os polinômios que queremos encontrar são dados por

$$\{p_n(x; t_1, t_2|q)\} = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_k}{(q; q)_k} a_{n,k}. \quad (3.26)$$

onde $a_{n,k}$ depende de t_1, t_2 e q .

Vamos calcular $a_{n,k}$ a partir do fato de $p_n(x; t_1, t_2|q)$ e $(t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_j$ serem ortogonais para $j = 0, 1, \dots, n-1$. Logo é suficiente calcular a seguinte integral

$$\begin{aligned} I_{n,j} &:= \int_{-1}^1 (t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_j p_n(x; t_1, t_2|q) w_1(x; t_1, t_2|q) w_1(x; t_1, t_2|q) dx \\ &= \int_{-1}^1 (t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_j \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1e^{i\theta}, t_1e^{-i\theta}; q)_k}{(q; q)_k} \frac{(e^{2i\theta}e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(t_1e^{i\theta}, t_1e^{-i\theta}, t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} a_{n,k} dx. \end{aligned}$$

Logo, para $x = \cos(\theta)$, $dx = -\sin(\theta)d\theta$ e

$$\begin{aligned} I_{n,j} &= \int_0^\pi (t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_j \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1e^{i\theta}, t_1e^{-i\theta}; q)_k}{(q; q)_k} \frac{(e^{2i\theta}e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(t_1e^{i\theta}, t_1e^{-i\theta}, t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_\infty} a_{n,k} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} a_{n,k} \int_0^\pi \frac{(t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_j (t_1e^{i\theta}, t_1e^{-i\theta}; q)_k (e^{2i\theta}e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(t_1e^{i\theta}, t_1e^{-i\theta}, t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_\infty} d\theta. \end{aligned}$$

Agora usando (2.14) repetidamente, com $a = t_1e^{i\theta}$, $a = t_1e^{-i\theta}$, $a = t_2e^{i\theta}$, $a = t_2e^{-i\theta}$, e substituindo acima temos

$$I_{n,j} = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} a_{n,k} \int_0^\pi \frac{(e^{2i\theta}e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(t_1q^ke^{i\theta}, t_1q^ke^{-i\theta}, t_2q^je^{i\theta}, t_2q^je^{-i\theta}; q)_\infty} d\theta.$$

Então, por (3.25),

$$I_{n,j} = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} \frac{2\pi}{(q, t_1t_2q^{q+j}; q)_\infty} a_{n,k} = \frac{2\pi}{(q; q)_\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k a_{n,k}}{(q; q)_k (t_1t_2q^{q+j}; q)_\infty}.$$

Agora, tomando $a = t_1t_2q^j$ em (2.14) e substituindo na igualdade anterior, obtemos

$$I_{n,j} = \frac{2\pi}{(qt_1t_2q^j; q)_\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1t_2; q)_k a_{n,k}}{(q; q)_k}.$$

Vamos escolher $a_{n,k}$ de forma a anularmos o somatório para $0 \leq j < n$. Assim escolhendo

$$a_{n,k} = \frac{q^k}{(t_1t_2; q)_k}, \quad (3.27)$$

temos

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_j p_n(x; t_1, t_2|q) w_1(x; t_1, t_2|q) dx \\ &= \frac{2\pi}{(qt_1t_2q^j; q)_\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1t_2; q)_k}{(q; q)_k} \frac{q^k}{(t_1t_2; q)_k} \\ &= \frac{2\pi}{(qt_1t_2q^j; q)_\infty} {}_2\phi_1(q^{-n}, t_1t_2q^j; t_1t_2; q, q). \end{aligned}$$

Assim, utilizando (2.26),

$$\int_{-1}^1 (t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta}; q)_j p_n(x; t_1, t_2|q) w_1(x; t_1, t_2|q) dx = \frac{2\pi(q^{-j}; q)_n (t_1t_2q^j)^n}{(q, t_1t_2q^j; q)_\infty (t_1t_2; q)_n}.$$

Veja que o termo $(q^{-j}; q)_n$ se anula para todo $0 \leq j < n$, logo nos resta apenas o caso para $j = n$. Então,

$$\int_{-1}^1 (t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_j p_n(x; t_1, t_2 | q) w_1(x; t_1, t_2 | q) dx = \frac{2\pi (q^{-n}; q)_n (t_1 t_2 q^n)^n}{(q, t_1 t_2 q^n; q)_\infty (t_1 t_2; q)_n}.$$

Agora, como já calculamos o valor da integral, e vimos que ela se anula para $0 \leq j < n$, basta encontrarmos o termo de maior grau de p_n para concluirmos o valor da norma. Analizemos (3.26) para tal. Observe que, por definição,

$$\begin{aligned} (te^{i\theta}, te^{-i\theta}; q)_n &= \prod_{k=1}^n (1 - te^{i\theta} q^{k-1})(1 - te^{-i\theta} q^{k-1}) \\ &= \prod_{k=1}^n (1 - tq^{k-1}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + t^2 q^{2k-2}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (1 - 2tq^k x + t^2 q^{2k}), \quad x = \cos(\theta). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Logo, o coeficiente do termo de maior grau de (3.28) é

$$(-2t)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (3.29)$$

Vemos que o coeficiente do termo de maior grau de p_n , por (3.26) e (3.29), é

$$\frac{q^n (-2t_1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(t_1 t_2; q)_n (q; q)_n}, \quad (3.30)$$

tomando (2.21) com $a = 1$, e substituindo em (3.30), o termo de maior grau de p_n é

$$\frac{(2t_1)^n}{(t_1 t_2; q)_n}. \quad (3.31)$$

Portanto, usando (3.29) e (3.31), concluímos que a norma é dada por

$$\int_{-1}^1 p_m(x; t_1, t_2 | q) p_n(x; t_1, t_2 | q) w_1(x; t_1, t_2 | q) dx = \frac{2\pi (t_1)^{2n} (q; q)_n}{(q, t_1 t_2; q)_\infty (t_1 t_2; q)_n} \delta_{n,m}. \quad (3.32)$$

□

Os polinômios de Al-Salam-Chihara possuem a forma explícita

$$p_n(x; t_1, t_2 | q) = {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta} \\ t_1 t_2, 0 \end{matrix} \middle| q, q \right). \quad (3.33)$$

De fato, basta considerar a forma

$$p_n(x; t_1, t_2 | q) = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_k}{(q; q)_k} a_{n,k}. \quad (3.34)$$

tomando $a_{n,k}$ de (3.27), obtemos

$$\begin{aligned} p_n(x; t_1, t_2 | q) &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_k}{(q, t_1 t_2; q)_k} q^k \\ &= {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta} \\ t_1 t_2, 0 \end{matrix} \middle| q, q \right). \end{aligned}$$

□

Agora, vamos deduzir sua relação de recorrência e uma função geradora para os polinômios de Al-Salam-Chihara. Como os polinômios de Al-Salam-Chihara são ortogonais, por (2.4) eles possuem uma relação de recorrência da forma

$$2xp_n(x; t_1, t_2|q) = A_np_{n+1}(x; t_1, t_2|q) + B_np_n(x; t_1, t_2|q) + C_np_{n-1}(x; t_1, t_2|q). \quad (3.35)$$

Encontremos A_n , B_n e C_n . Veja que, para A_n , basta encontrarmos o termo de maior grau de ambos os lados de (3.35). Anteriormente, em (3.31), obtivemos

$$a_{n,n} = \frac{(2t_1)^n}{(t_1t_2; q)_n},$$

e assim

$$A_n = \frac{2(2t_1)^n}{(t_1t_2; q)_n} \frac{(t_1t_2; q)_{n+1}}{(2t_1)^{n+1}} \frac{(1 - t_1t_2q^n)}{t_1}.$$

Para B_n e C_n vamos fazer escolhas de certos valores para t_1 e t_2 . Fazendo separadamente em (3.35), $t_1, t_2 = e^{i\theta}$, temos

$$\begin{aligned} p_n((t_1 + 1/t_1); t_1, t_2|q) &= {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, e^{2i\theta}, 1 \\ e^{i\theta}t_2, 0 \end{matrix} \middle| q, q \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, e^{2i\theta}, 1; q)_k}{(q; t_2e^{i\theta}; q)_k} \\ &= \frac{(q^{-n}, e^{2i\theta}, 1; q)_0}{(q; t_2e^{i\theta}; q)_0} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

e

$$\begin{aligned} p_n((t_2 + 1/t_2); t_1, t_2|q) &= {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, t_1e^{i\theta}, t_1e^{-i\theta} \\ e^{i\theta}t_1, 0 \end{matrix} \middle| q, q \right) \\ &= {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, t_1/t_2 \\ 0 \end{matrix} \middle| q, q \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

usando (2.26) em (3.37), obtemos

$$p_n((t_2 + 1/t_2); t_1, t_2|q) = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^n.$$

Então, aplicando (3.36) em (3.35), reescrevemos a relação de recorrência como

$$\begin{aligned} 2xp_n((t_1 + 1/t_1); t_1, t_2|q) &= A_np_{n+1}((t_1 + 1/t_1); t_1, t_2|q) \\ &\quad + B_np_n((t_1 + 1/t_1); t_1, t_2|q) + C_np_{n-1}((t_1 + 1/t_1); t_1, t_2|q). \end{aligned}$$

Portanto, substituindo os valores de $p_n((t_1 + 1/t_1); t_1, t_2|q)$ e $x = t_1 + 1/t_1$, obtemos

$$2(t_1 + 1/t_1) = \frac{(1 - t_1t_2q^n)}{t_1} + B_n + C_n. \quad (3.38)$$

Analogamente para (3.37) em (3.35)

$$B_n + C_n \frac{t_2}{t_1} = t_2 + t_1 q^n. \quad (3.39)$$

Resolvendo as equações (3.38) e (3.39) simultaneamente, chegamos a

$$B_n = (t_1 + t_2)q^n \text{ e } C_n = t_1(1 - q^n). \quad (3.40)$$

Portanto, os polinômios de Al-Salam-Chihara satisfazem a relação de recorrência

$$(2x - (t_1 + t_2)q^n) t_1 p_n(x; t_1, t_2 | q) = (1 - t_1 t_2 q^n) p_{n+1}(x; t_1, t_2 | q) + t_1^2 (1 - q^n) p_{n-1}(x; t_1, t_2 | q).$$

com as condições iniciais $p_0(x; t_1, t_2 | q) = 1$ e $p_1(x; t_1, t_2 | q) = t_1(2x - t_1 - t_2)$. □

Buscamos agora a função geradora dos polinômios de Al-Salam-Chihara. Considerando sua forma explícita (3.33), vamos alterar o somatório em k para um somatório em $n - k$. Logo,

$$p_n(x; t_1, t_2 | q) = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_{n-k}}{(q, t_1 t_2; q)_{n-k}} q^{n-k},$$

façamos então as seguintes substituições, primeiramente com (2.23) e os parâmetros $a = t_1 e^{i\theta}$ e $b = t_1 t_2$

$$\frac{(t_1 e^{i\theta}; q)_{n-k}}{(t_1 t_2; q)_{n-k}} = \frac{(t_1 e^{i\theta}; q)_n (q^{1-n}/t_1 t_2; q)_k}{(t_1 t_2; q)_n (q^{1-n}/t_1 e^{i\theta}; q)_k} \left(\frac{t_1 t_2}{t_1 e^{i\theta}} \right)^k,$$

depois, ainda usando (2.23), porém com os parâmetros $a = t_1 e^{-i\theta}$ e $b = q$

$$\frac{(t_1 e^{-i\theta}; q)_{n-k}}{(q; q)_{n-k}} = \frac{(t_1 e^{-i\theta}; q)_n (q^{-n}; q)_k}{(q; q)_n (q^{1-n}/t_1 e^{-i\theta}; q)_k} \left(\frac{q}{t_1 e^{-i\theta}} \right)^k,$$

e, por fim, em (2.22) com $a = q^{-n}$

$$(q^{-n}; q)_{n-k} = \frac{(q^{-n}; q)_n}{(q^{1-n}/q^{-n}; q)_k} (-q^{-n})^{-k} q^{\frac{1}{2}k(k+1)-nk},$$

obtendo então

$$p_n(x; t_1, t_2 | q) = \frac{(q^{-n}; q)_n (t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_n}{(q, t_1 t_2; q)_n} \times \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, q^{1-n}/t_1 t_2; q)_k}{(q^{1-n} e^{i\theta}/t_1, q^{1-n} e^{-i\theta}/t_1; q)_k} \left(\frac{-t_2}{t_1} \right)^k q^n q^{\frac{k(k+1)}{2}}, \quad x = \cos(\theta). \quad (3.41)$$

Por fim, usando (2.21) com $a = 1$ em (3.41), obtemos

$$p_n(\cos(\theta); t_1, t_2 | q) = \frac{(t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_n}{(t_1 t_2; q)_n} (-1)^n q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \times \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, q^{1-n}/t_1 t_2; q)_k}{(q^{1-n} e^{i\theta}/t_1, q^{1-n} e^{-i\theta}/t_1; q)_k} \left(\frac{-t_2}{t_1} \right)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}}. \quad (3.42)$$

Agora, aplicando (2.32) com $A = q^{-n}$, $B = t_2 e^{i\theta}$, $C = q^{1-n} e^{i\theta}/t_1$ e $z = q e^{-i\theta}/t_1$, teremos

$$p_n(\cos(\theta); t_1, t_2 | q) = \frac{(t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_n}{(t_1 t_2; q)_n} (-1)^n q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \times \\ \frac{(q e^{i\theta}/t_1; q)_\infty}{(q^{1-n} e^{i\theta}/t_1)_\infty} {}_2\phi_1(q^{-n}; t_2 e^{i\theta}; q^{1-n} e^{i\theta}/t_1; q, q e^{-i\theta}/t_1),$$

Daí, fazendo $a = q e^{-i\theta}/t_1$ em (2.21) e $a = q^{1-n} e^{-i\theta}/t_1$ em (2.14) e substituindo em (3.3), concluímos que

$$p_n(\cos(\theta); t_1, t_2 | q) = \frac{(t_1 e^{-i\theta}; q)_n}{(t_1 t_2; q)_n} t_1^n e^{in\theta} {}_2\phi_1\left(\frac{q^{-n}, t_2 e^{i\theta}}{q^{1-n} e^{i\theta}/t_1} \middle| q, q e^{-i\theta}/t_1\right).$$

Dando continuidade, tomando $a = t_1 e^{-i\theta}$ e $b = q$ em (2.23) e aplicando na igualdade acima, obtemos

$$p_n(\cos(\theta); t_1, t_2 | q) = \frac{t_1^n}{(t_1 t_2; q)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(t_1 e^{-i\theta}; q)_n e^{-ki\theta}}{(q; q)_n} \frac{(t_2 e^{i\theta}; q)_{n-k} e^{i(n-k)\theta}}{(q; q)_{n-k}}. \quad (3.43)$$

Por fim, encontraremos a função geradora dos polinômios de Al-Salam-Chihara, suponha que ela possua a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_1 t_2; q)_n}{(q; q)_n} p_n(\cos(\theta); t_1, t_2 | q) \frac{t^n}{t_1^n}. \quad (3.44)$$

Com $p_n(\cos(\theta); t_1, t_2 | q)$ dado em (3.43), temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_1 t_2; q)_n}{(q; q)_n} p_n(\cos(\theta); t_1, t_2 | q) \frac{t^n}{t_1^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(t_1 e^{-i\theta}; q)_n e^{-ki\theta}}{(q; q)_k} t^k \frac{(t_2 e^{i\theta}; q)_{n-k} e^{i(n-k)\theta}}{(q; q)_{n-k}} t^{n-k}$$

que através da fórmula do produto de Cauchy para séries, pode ser reescrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_1 e^{-i\theta}; q)_n}{(q; q)_n} (t e^{i\theta})^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_2 e^{i\theta}; q)_n}{(q; q)_n} (t e^{-i\theta})^n \\ = {}_1\phi_0(t_1 e^{i\theta}, -; q, t e^{i\theta}) {}_1\phi_0(t_2 e^{i\theta}, -; q, t e^{-i\theta}).$$

Usando (2.28) acima, obtemos função geradora, que é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_1 t_2; q)_n}{(q; q)_n} p_n(\cos(\theta); t_1, t_2 | q) \frac{t^n}{t_1^n} = \frac{(t t_2, t t_1; q)_\infty}{(t e^{-i\theta}, t e^{i\theta}; q)_\infty}. \quad (3.45)$$

□

3.4 Polinômios de Askey-Wilson

Nesta seção apresentaremos uma função geradora, a relação de ortogonalidade e a relação de recorrência que os polinômios de Askey-Wilson satisfazem.

Para encontrarmos os polinômios de Askey-Wilson, precisaremos de sua função peso, no intervalo $(-1, 1)$, que é

$$w(x; a, b, c, d) = \frac{h(x; 1, -1, q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}})}{h(x; a, b, c, d)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

onde

$$h(x; a_1, a_2, \dots, a_m) = h(x; a_1)h(x; a_2) \dots h(x; a_m),$$

$$h(x; a) = (ae^{i\theta}, ae^{-i\theta}; q)_\infty, \quad x = \cos(\theta)$$

e

$$\max(|a|, |b|, |c|, |d|, |q|) < 1.$$

Logo, é necessário mostrar o valor da integral da função peso no intervalo $(-1, 1)$, que é a seguinte integral

$$\int_{-1}^1 \frac{h(x; 1, -1, q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}})}{h(x; a, b, c, d)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi(abcd; q)_\infty}{(q, ab, ac, ad, bc, bd, cd; q)_\infty}. \quad (3.46)$$

De fato, denotemos a integral (3.46) por $I(a, b, c, d)$. Como $x = \cos(\theta)$ é uma função par de θ , fazendo a transformação $x = \cos(\theta)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} I(a, b, c, d) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(\cos(\theta); 1, -1, q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}})}{h(\cos(\theta); a, b, c, d)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(x; 1), h(x; -1), h(x; q^{\frac{1}{2}}), h(x; -q^{\frac{1}{2}})}{h(x; a, b)h(x; c, d)} d\theta. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Assumimos que a, b, c e d e seus produtos dois a dois e quocientes dois a dois não são da forma q^{-j} , $j = 0, 1, 2, \dots$.

Agora vamos analisar o valor das frações no integrando (3.47). Vemos que, usando (2.33) com $c = 1$, $e = e^{i\theta}$, $d = 1/ab$ e $f = e^{-i\theta}$, vem

$$\frac{h(x; 1)}{h(x; a, b)} = \frac{(a^{-1}, b^{-1}; q)_\infty}{b(1-q)(q, a/b, bq/a, ab; q)_\infty} \int_a^b \frac{(qu/a, qu/b, u; q)_\infty}{(u/ab; q)_\infty} \frac{d_q u}{h(x; u)}. \quad (3.48)$$

Também de (2.33) com $a = c$, $b = d$, $c = -1$, $d = -1/cd$, $e = e^{i\theta}$, $f = e^{-i\theta}$, obtemos

$$\frac{h(x; -1)}{h(x; c, d)} = \frac{-(c^{-1}, -d^{-1}; q)_\infty}{d(1-q)(q, c/d, dq/c, cd; q)_\infty} \int_c^d \frac{(qv/c, qv/d, -v; q)_\infty}{(-v/cd; q)_\infty} \frac{d_q v}{h(x; v)}, \quad (3.49)$$

e, novamente por (2.33), com $a = uq^{\frac{-1}{2}}$, $b = vq^{\frac{-1}{2}}$, $c = -q$, $d = \frac{-q}{uv}$, $e = q^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}$ e $f = q^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}$, temos

$$\frac{h(x; -q^{\frac{1}{2}})}{h(x; u, v)} = \frac{q^{\frac{1}{2}}(-q^{\frac{1}{2}}u^{-1}, -q^{\frac{1}{2}}v^{-1}; q)_\infty}{v(1-q)(q, u/v, vq/u, uv; q)_\infty} \int_{uq^{\frac{-1}{2}}}^{uv^{\frac{-1}{2}}} \frac{(tq^{\frac{3}{2}}/u, tq^{\frac{3}{2}}/v, -qt; q)_\infty}{(-qt/uv; q)_\infty} \frac{d_q t}{h(x; tq^{\frac{1}{2}})}. \quad (3.50)$$

Por fim, mostremos que vale

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(x; q^{\frac{1}{2}})}{h(x; tq^{\frac{1}{2}})} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(q^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}, q^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}; q)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}, q^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}; q)_\infty} d\theta$$

de (2.28) e usando a definição de função q-hipergeométrica:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(x; q^{\frac{1}{2}})}{h(x; tq^{\frac{1}{2}})} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} {}_1\phi_0(t^{-1}; -; q, tqe^{i\theta}) {}_1\phi_0(t^{-1}; -; q, tqe^{-i\theta}) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(t^{-1}; q)_k (t^{-1}; q)_l}{(q; q)_k (q; q)_l} \left(tq^{\frac{1}{2}}\right)^{k+l} e^{i(k-l)\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(t^{-1}; q)_k (t^{-1}; q)_l}{(q; q)_k (q; q)_l} \left(tq^{\frac{1}{2}}\right)^{k+l} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)\theta} d\theta \quad (3.51) \\
 &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^{-1}, t^{-1}; q)_k}{(q, q; q)_k} (qt^2)^k \\
 &= {}_2\phi_1(1/t, 1/t, q; q, qt^2),
 \end{aligned}$$

Agora, usando (2.27) anteriormente

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(x; q^{\frac{1}{2}})}{h(x; tq^{\frac{1}{2}})} d\theta = \pi \frac{(qt, qt; q)_{\infty}}{(q, qt^2; q)_{\infty}}.$$

Como

$$(qt^2; q)_{\infty} = (qt^2, qt^2; q^2)_{\infty} = (tq^{\frac{1}{2}}, -tq^{\frac{1}{2}}, qt, -qt; q)_{\infty}, \quad (3.52)$$

então,

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(x; q^{\frac{1}{2}})}{h(x; tq^{\frac{1}{2}})} d\theta = \pi \frac{(qt; q)_{\infty}}{(q, tq^{\frac{1}{2}}, -tq^{\frac{1}{2}}, -qt; q)_{\infty}}. \quad (3.53)$$

Logo, substituindo (3.48) e (3.49) em (3.47), obtemos

$$\begin{aligned}
 I(a, b, c, d) &= \\
 &\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{(a^{-1}, b^{-1}; q)_{\infty}}{b(1-q)(q, a/b, bq/a, ab; q)_{\infty}} \int_a^b \frac{(qu/a, qu/b, u; q)_{\infty}}{(u/ab; q)_{\infty}} \frac{d_q u}{h(x; u)} \times \right. \\
 &\quad \left. \frac{-(c^{-1}, -d^{-1}; q)_{\infty}}{d(1-q)(q, c/d, dq/c, cd; q)_{\infty}} \int_c^d \frac{(qv/c, qv/d, -v; q)_{\infty}}{(-v/cd; q)_{\infty}} \frac{d_q v}{h(x; v)} h(x; \sqrt{q}) h(x; -\sqrt{q}) \right] d\theta,
 \end{aligned}$$

que pode ser reorganizado como

$$\begin{aligned}
 I(a, b, c, d) &= \frac{1}{2} \frac{(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}; q)_{\infty}}{bd(1-q)^2(q; q)^2(a/b, bq/a, ab, c/d, dq/c, cd; q)_{\infty}} \times \\
 &\int_a^b \int_c^d \frac{(qu/a, qu/b, u; q)_{\infty}}{(u/ab; q)_{\infty}} \frac{(qv/c, qv/d, -v; q)_{\infty}}{(-v/cd; q)_{\infty}} \frac{d_q v d_q u}{h(x; \sqrt{q})} h(x; -\sqrt{q}) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(x; -\sqrt{q})}{h(x; u) h(x; v)} d\theta,
 \end{aligned}$$

que, por sua vez, substituindo em (3.50) se torna

$$\begin{aligned}
 I(a, b, c, d) &= \frac{(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}; q)_{\infty}}{bd(1-q)^3(q; q)^3(a/b, bq/a, ab, c/d, dq/c, cd; q)_{\infty}} \times \\
 &\int_a^b \int_c^d \frac{(qu/a, qu/b, u; q)_{\infty}}{(u/ab; q)_{\infty}} \frac{(qv/c, qv/d, -v; q)_{\infty}}{(-v/cd; q)_{\infty}} \frac{d_q v d_q u}{h(x; \sqrt{q})} \times \\
 &\frac{q^{\frac{1}{2}}(-q^{\frac{1}{2}}u^{-1}, -q^{\frac{1}{2}}v^{-1}; q)_{\infty}}{v(u/v, vq/u, uv; q)_{\infty}} \int_{uq^{-\frac{1}{2}}}^{uv^{-\frac{1}{2}}} \frac{(tq^{\frac{3}{2}}/u, tq^{\frac{3}{2}}/v, -qt; q)_{\infty}}{(-qt/uv; q)_{\infty}} d_q t \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(x; \sqrt{q}) d\theta}{h(x; tq^{\frac{1}{2}})}.
 \end{aligned}$$

Agora, usando (3.53), temos

$$I(a, b, c, d) = \frac{\pi q^{\frac{1}{2}}(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}; q)_{\infty}}{bd(1-q)^3(q; q)^4(a/b, bq/a, ab, c/d, dq/c, cd; q)_{\infty}} \times \\ \int_a^b d_q u \frac{(qu/a, qu/b, u; q)_{\infty}}{(u/ab; q)_{\infty}} \int_c^d d_q v \frac{(qv/c, qv/d, -v, -q^{\frac{1}{2}u^{-1}}, -q^{\frac{1}{2}v^{-1}}; q)_{\infty}}{v(-v/cd, u/v, vq/u, uv; q)_{\infty}} \times \\ \int_{uq^{-\frac{1}{2}}}^{uv^{-\frac{1}{2}}} d_q t \frac{(tq^{\frac{3}{2}}/u, tq^{\frac{3}{2}}/v, qt; q)_{\infty}}{(tq^{\frac{1}{2}}, -tq^{\frac{1}{2}}, -qt/uv; q)_{\infty}}.$$

Veja que, por (2.33),

$$\frac{vq^{\frac{1}{2}}}{(q; q)_{\infty}(1-q)} \int_{uq^{-\frac{1}{2}}}^{uv^{-\frac{1}{2}}} d_q t \frac{(tq^{\frac{3}{2}}/u, tq^{\frac{3}{2}}/v, qt; q)_{\infty}}{(tq^{\frac{1}{2}}, -tq^{\frac{1}{2}}, -qt/uv; q)_{\infty}} = \frac{(\frac{vq}{u}, \frac{u}{v}, -uv, q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}; q)_{\infty}}{(\frac{-q^{\frac{1}{2}}}{v}, u, -u, \frac{-q^{\frac{1}{2}}}{u}, v, -v; q)_{\infty}},$$

que, substituindo na última expressão para $I(a, b, c, d)$, se torna

$$I(a, b, c, d) = \frac{\pi(a^{-1}, b^{-1}, q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}, c^{-1}, d^{-1}; q)_{\infty}}{bd(1-q)^2(q; q)^3(a/b, bq/a, ab, c/d, dq/c, cd; q)_{\infty}} \times \\ \int_a^b d_q u \frac{(qu/a, qu/b, u; q)_{\infty}}{(u/ab; q)_{\infty}} \int_c^d d_q v \frac{(qv/c, qv/d, -uv; q)_{\infty}}{(-v/cd, uv, v; q)_{\infty}}.$$

Ainda, observe que, de (2.33),

$$\frac{1}{d(1-q)(q; q)_{\infty}} \int_c^d d_q v \frac{(qv/c, qv/d, -uv; q)_{\infty}}{(-v/cd, uv, v; q)_{\infty}} = \frac{(dq/c, c/d, -u, -1, cdu)_{\infty}}{(c, cu, -1/d, d, du, -1/c)_{\infty}}.$$

Então,

$$I(a, b, c, d) = \frac{\pi(a^{-1}, b^{-1}, q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}, -1; q)_{\infty}}{b(1-q)(q; q)^2(a/b, bq/a, ab, c, d, cd; q)_{\infty}} \times \\ \int_a^b d_q u \frac{(qu/a, qu/b, cdu; q)_{\infty}}{(cu, du, u/ab; q)_{\infty}}.$$

Finalmente, também de (2.33)

$$\frac{1}{b(1-q)(q; q)_{\infty}} \int_a^b d_q u \frac{(qu/a, qu/b, cdu; q)_{\infty}}{(cu, du, u/ab; q)_{\infty}} = \frac{((bq/a, a/b, c, d, abcd; q)_{\infty}}{(ad, ac, 1/b, bd, bc, 1/a; q)_{\infty}}.$$

Ou seja:

$$I(a, b, c, d) = \frac{\pi(q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}, -1; q)_{\infty}}{(q, ab, ac, ad, bc, bd, cd)_{\infty}}.$$

Como $(q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}, -1; q)_{\infty} = 2(q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}, -q; q)_{\infty}$, fazendo $t = 1$ em (3.52), obtemos o desejado,

$$I(a, b, c, d) = \frac{2\pi(abcd; q)_{\infty}}{(q, ab, ac, ad, bc, bd, cd; q)_{\infty}}. \quad (3.54)$$

□

Para facilitar a notação, a partir de agora, substituímos os parâmetros a, b, c, d por t_1, t_2, t_3, t_4 respectivamente.

Vamos encontrar sua forma explícita e estabelecer sua relação de recorrência e de ortogonalidade. Assim como procedemos para os polinômios de Al-Salam-Chihara, vamos utilizar $\{(t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_k\}$ e $\{(t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_k\}$. Denotaremos (t_1, t_2, t_3, t_4) por $\mathbf{t}$ para reduzir a notação.

Consideremos que $p_n(x; t_1, t_2, t_3, t_4 | q)$ seja da forma

$$\{p_n(x; t_1, t_2, t_3, t_4 | q)\} = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_k}{(q; q)_k} a_{n,k}, \quad (3.55)$$

onde vamos escolher os valores de $a_{n,k}$ para obter a ortogonalidade. Observe que $a_{n,k}$ dependerá dos parâmetros t_1, t_2, t_3, t_4 e q . Daí, calculamos a ortogonalidade de p_n , partindo de

$$I_{n,j} = \int_0^\pi (t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_j p_n(\cos\theta; \mathbf{t} | q) w(\cos(\theta); \mathbf{t} | q) d\theta, \quad 0 \leq j < n. \quad (3.56)$$

Substituindo p_n por sua definição em (3.56), temos

$$I_{n,j} = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k a_{n,k}}{(q; q)_k} \int_0^\pi (t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_j (t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_k \frac{(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{\prod_{j=1}^4 (t_j e^{i\theta}, t_j e^{-i\theta}; q)_\infty} d\theta.$$

Usando (2.14) com $a = t_1 e^{i\theta}$, $a = t_1 e^{-i\theta}$, $a = t_2 e^{i\theta}$ e $a = t_2 e^{-i\theta}$ e substituindo acima,

$$\begin{aligned} I_{n,j} &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k a_{n,k}}{(q; q)_k} \int_0^\pi \frac{(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(t_1 q^k e^{i\theta}, t_1 q^k e^{-i\theta}, t_2 q^j e^{i\theta}, t_2 q^j e^{-i\theta}, t_3 e^{i\theta}, t_3 e^{-i\theta}, t_4 e^{i\theta}, t_4 e^{-i\theta})_\infty} d\theta, \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k a_{n,k}}{(q; q)_k} \int_0^\pi w(\cos\theta; t_1 q^k, t_2 q^j, t_3, t_4 | q) d\theta \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k a_{n,k}}{(q; q)_k} \frac{2\pi}{(q; q)_\infty} \frac{(q^{j+k}, t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty}{(q^{j+k} t_1 t_2, q^k t_1 t_3, q^k t_1 t_4, q^j t_2 t_3, q^j t_2 t_4, q^j t_2 t_4, t_3 t_4)_\infty} d\theta. \end{aligned}$$

novamente, com (2.14), dessa vez com $a = q^j t_1 t_2 t_3 t_4$, $a = q^j t_1 t_2$, $a = t_1 t_3$, $a = t_1 t_4$, $a = t_2 t_4$ e $a = t_2 t_3$, obtemos

$$\begin{aligned} I_{n,j} &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k a_{n,k}}{(q; q)_k} \frac{(q^j t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4; q)_k}{(q^j t_1 t_2 t_3 t_4; q)_k} \times \\ &\quad 2\pi \frac{(q^j t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty}{(q, q^j t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^j t_2 t_3, q^j t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Logo, para concluirmos a ortogonalidade, vamos escolher os valores de $a_{n,k}$ como

$$a_{n,k} = q^k \frac{(t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1}; q)_k}{(t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4; q)_k} a_{n,0}. \quad (3.58)$$

Inserindo esta expressão de $a_{n,k}$ em (3.57), vemos

$$\begin{aligned}
 I_{n,j} &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} 2\pi \frac{(q^j t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^j t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^j t_2 t_3, q^j t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \times \\
 &\quad \frac{(q^j t_1 t_2; q)_k}{(t_1 t_2; q)_k} \frac{(t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1}; q)_k}{(q^j t_1 t_2 t_3 t_4; q)_k} q^k \\
 &= 2\pi \frac{(q^j t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^j t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^j t_2 t_3, q^j t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \times \\
 &\quad {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^j t_1 t_2, t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1} \\ t_1 t_2 t_3 t_4 q^j, t_1 t_2 \end{matrix} \middle| q, q \right)
 \end{aligned}$$

e, usando (2.25) noa última fórmula, temos

$$\begin{aligned}
 I_{n,j} &= 2\pi \frac{(q^j t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^j t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^j t_2 t_3, q^j t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \times \\
 &\quad \frac{(q^{-j}, q^{1-n}/t_3 t_4; q)_n}{(t_1 t_2, q^{1-j-n}/t_1 t_2 t_3 t_4)_n}.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 I_{n,j} &= \int_0^\pi (t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_j p_n(\cos\theta; \mathbf{t}|q) w(\cos(\theta); \mathbf{t}|q) d\theta \\
 &= 2\pi \frac{(q^j t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^j t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^j t_2 t_3, q^j t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \frac{(q^{-j}, q^{1-n}/t_3 t_4; q)_n}{(t_1 t_2, q^{1-j-n}/t_1 t_2 t_3 t_4)_n}.
 \end{aligned}$$

Como o lado direito acima se anula para $0 \leq j < n$ pois, $(q^{-j}; q)_n$ é zero para todo $j < n$, como vemos de $(q^{-j}; q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - q^{k-1-j})$. Para $j = n$ temos

$$\begin{aligned}
 I_{n,n} &= \int_0^\pi (t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_n p_n(\cos\theta; \mathbf{t}|q) w(\cos(\theta); \mathbf{t}|q) d\theta \\
 &= 2\pi \frac{(q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^n t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^n t_2 t_3, q^n t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \frac{(q^{-n}, q^{1-n}/t_3 t_4; q)_n}{(t_1 t_2, q^{1-2n}/t_1 t_2 t_3 t_4)_n}.
 \end{aligned}$$

Agora usamos (2.23) com o índice $k = n$, os parâmetros $a = q^{-n} t_1 t_2 t_3 t_4$ e $b = t_3 t_4$ e (2.21) com $a = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\pi (t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_j p_n(\cos\theta; \mathbf{t}|q) w(\cos(\theta); \mathbf{t}|q) d\theta = \\
 &2\pi \frac{(q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^n t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^n t_2 t_3, q^n t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \frac{(q, t_3 t_4; q)_n}{(t_1 t_2, q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_n} (-t_1 t_2)^n q^{n(n-1)/2}.
 \end{aligned}$$

Como

$$(t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_n = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^n (t_2 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_n + \text{termos de ordem menor},$$

então

$$\begin{aligned}
 I_{n,n} &= \int_0^\pi (t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_n p_n(\cos\theta; \mathbf{t}|q) w(\cos(\theta); \mathbf{t}|q) d\theta \\
 &= 2\pi \frac{(q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^n t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^n t_2 t_3, q^n t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \frac{(q, t_3 t_4; q)_n}{(t_1 t_2, q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_n} (-t_1^2)^n q^{n(n-1)/2}.
 \end{aligned}$$

De (3.28) vemos que o coeficiente do termo de maior grau para $(t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta}; q)_n$ é dado por (3.29):

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \int_0^\pi (-1)^n (2t_1)^n q^{n(n-1)/2} x^n p_n(\cos\theta; \mathbf{t}|q) w(\cos(\theta); \mathbf{t}|q) d\theta \\ &= 2\pi \frac{(q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^n t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^n t_2 t_3, q^n t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \frac{(q, t_3 t_4; q)_n}{(t_1 t_2, q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_n} (-t_1^2)^n q^{n(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Agora, calculando o termo de maior grau de p_n , usando (3.55) e (3.58), temos

$$a_{n,n} = \frac{(-1)^n (2t_1)^n q^{n(n+1)/2} (q^{-n}, t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1}; q)_n}{(q, t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4; q)_n} a_{n,0}, \quad (3.60)$$

que, multiplicando na integral anterior, torna-se

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \int_{-1}^1 p_n(x; \mathbf{t}|q) p_n(x; \mathbf{t}|q) w(x; \mathbf{t}|q) dx \\ &= 2\pi \frac{(q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}}{(q; q^n t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^n t_2 t_3, q^n t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \times \\ &\quad \frac{(q, t_3 t_4; q)_n}{(t_1 t_2, q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_n} (-t_1^2)^n q^{n(n-1)/2} \frac{(-1)^n (2t_1)^n q^{n(n+1)/2} (q^{-n}, t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1}; q)_n}{(-1)^n (2t_1)^n q^{n(n-1)/2} (q, t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4; q)_n} a_{n,0} \\ &= 2\pi \frac{(q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_\infty a_{n,0}^2}{(q, q^n t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, q^n t_2 t_3, q^n t_2 t_4, t_3 t_4; q)_\infty} \times \\ &\quad \frac{(q, t_3 t_4; q)_n}{(t_1 t_2, q^n t_1 t_2 t_3 t_4; q)_n} (-t_1^2)^n \frac{q^{n(n+1)/2} (q^{-n}, t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1}; q)_n}{(q, t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4; q)_n}. \end{aligned}$$

Assim, com a escolha de

$$a_{n,0} := t_1^{-n} (t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4; q)_n, \quad (3.61)$$

estabelecemos o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1. Os polinômios de Askey-Wilson satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 p_m(x; \mathbf{t}|q) p_n(x; \mathbf{t}|q) w(x; \mathbf{t}|q) dx = \frac{2\pi (t_1 t_2 t_3 t_4 q^{2n}; q)_\infty (t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1}; q)_n}{(q^{n+1}; q)_\infty \prod_{1 \leq j < k \leq 4} (t_j t_k q^n)_\infty} \delta_{m,n}, \quad (3.62)$$

para $\max\{|t_1|, |t_2|, |t_3|, |t_4|\} < 1$.

Veja que, assim como procedemos para os polinômios de Al-Salam-Chihara em (3.33), de posse da forma explícita e da escolha de $a_{n,n}$ e $a_{n,0}$, podemos expressar os polinômios de Askey-Wilson na forma

$$p_n(x; \mathbf{t}|q) = t_1^{-n} (t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4; q)_n {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1}, t_1 e^{i\theta}, t_1 e^{-i\theta} \\ t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4 \end{matrix} \middle| q, q \right). \quad (3.63)$$

Observe que, a função peso e o lado direito de (3.62) são funções simétricas para t_1, t_2, t_3, t_4 , mais ainda, ambas são positivas para $\max\{|t_1|, |t_2|, |t_3|, |t_4|\} < 1$. Com isso e com

o fato de que os polinômios de Askey-Wilson serem únicos e ortogonais com respeito a uma medida positiva, vemos que os polinômios de Askey-Wilson são simétricos nos quatro parâmetros t_1, t_2, t_3, t_4 . Logo,

$$\begin{aligned} & t_1^{-n}(t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4; q)_n {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, t_1t_2t_3t_4q^{n-1}, t_1e^{i\theta}, t_1e^{-i\theta} \\ t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4 \end{matrix} \middle| q, q \right) \\ &= t_2^{-n}(t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4; q)_n {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, t_1t_2t_3t_4q^{n-1}, t_2e^{i\theta}, t_2e^{-i\theta} \\ t_1t_2, t_2t_3, t_2t_4 \end{matrix} \middle| q, q \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Vamos estabelecer agora a função geradora para os polinômios de Askey-Wilson:

Teorema 3.4.2. Os polinômios de Askey-Wilson possuem a seguinte função geradora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x; \mathbf{t}|q)}{(q, t_1t_2, t_3t_4; q)_n} = {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} t_1e^{i\theta}, t_2e^{i\theta} \\ t_1t_2 \end{matrix} \middle| q, te^{-i\theta} \right) {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} t_3e^{-i\theta}, t_4e^{-i\theta} \\ t_3t_4 \end{matrix} \middle| q, te^{i\theta} \right).$$

Demonstração: Aplicaremos a seguinte transformação, conhecida como *transformação de Sears*. As propriedades dessa transformação podem ser encontradas em [4].

$$\begin{aligned} & {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, a, b, c \\ d, e, f \end{matrix} \middle| q, q \right) \\ &= \left(\frac{bc}{d} \right)^n \frac{(de/bc, df/bc; q)_n}{(e, f; q)_n} {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, a, d/b, d/c \\ d, de/bc, df/bc \end{matrix} \middle| q, q \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde $abc = defq^{n-1}$.

Fazendo os parâmetros $a = t_1e^{i\theta}$, $b = t_1e^{-i\theta}$, $c = t_1t_2t_3t_4q^{n-1}$, $d = t_1t_2$, $e = t_1t_3$, $f = t_1t_4$, obtemos

$$\begin{aligned} p_n(x; \mathbf{t}|q) &= (t_1t_2, q^{1-n}e^{i\theta}/t_3, q^{1-n}e^{i\theta}/t_4; q)_n (t_3t_4q^{n-1}e^{-i\theta})^n \times \\ & {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, t_1e^{i\theta}, t_2e^{i\theta}, q^{1-n}t_3t_4 \\ t_1t_2, q^{1-n}e^{i\theta}/t_3, q^{1-n}e^{i\theta}/t_4 \end{matrix} \middle| q, q \right) \end{aligned}$$

Agora, usando (2.21) com $a = q/t_3e^{-i\theta}$ e $a = q/t_4e^{-i\theta}$, escrevemos

$$(q^{1-n}e^{i\theta}/t_3, q^{1-n}e^{i\theta}/t_4; q)_n = e^{2in\theta} q^{-n(n-1)} (t_3t_4)^{-n} (t_3e^{-i\theta}, t_4e^{-i\theta}; q)_n$$

Ainda usando (2.23) com $a = t_4e^{-i\theta}$ e $b = t_3t_4$, obtemos

$$\frac{(q^{-n}, q^{1-n}/t_3t_4; q)_k}{(q^{1-n}e^{i\theta}/t_3, q^{1-n}e^{i\theta}/t_4; q)_k} = \frac{(q, t_3t_4; q)_n}{(q, t_3t_4; q)_{n-k}} \frac{(t_3e^{-i\theta}, t_4e^{-i\theta}; q)_{n-k}}{(t_3e^{-i\theta}, t_4e^{-i\theta}; q)_n} (qe^{2i\theta})^{-k},$$

utilizando ambas substituições feitas acima obtemos

$$\frac{p_n(x, \mathbf{t}|q)}{(q, t_1t_2, t_3t_4; q)_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(t_1e^{i\theta}, t_2e^{i\theta}; q)_k}{(q, t_1t_2; q)_k} e^{-ik\theta} \frac{(t_3e^{-i\theta}, t_4e^{-i\theta}; q)_k}{(q, t_1t_2; q)_k} e^{-i(n-k)\theta}.$$

Somando em ambos os lados os termos de $n = 0, 1, 2, \dots$, e multiplicando por t^n , temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x, \mathbf{t}|q)}{(q, t_1t_2, t_3t_4; q)_n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(t_1e^{i\theta}, t_2e^{i\theta}; q)_k}{(q, t_1t_2; q)_k} e^{-ik\theta} t^k \frac{(t_3e^{-i\theta}, t_4e^{-i\theta}; q)_k}{(q, t_1t_2; q)_k} e^{-i(n-k)\theta} t^{n-k}.$$

Finalmente, utilizando o produto de Cauchy para séries,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x, \mathbf{t}|q)}{(q, t_1 t_2, t_3 t_4; q)_n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_1 e^{i\theta}, t_2 e^{-i\theta}; q)_k}{(q, t_1 t_2; q)_k} e^{-ik\theta} t^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_3 e^{-i\theta}, t_4 e^{-i\theta}; q)_k}{(q, t_1 t_2; q)_k} e^{in\theta} t^k$$

assim, concluímos o desejado. $\square$

Por fim, como os polinômios de Askey-Wilson são ortogonais, de (2.4), eles satisfazem uma relação de recorrência da forma

$$2xp_n(x; \mathbf{t}|q) = A_n p_{n+1}(x; \mathbf{t}|q) + B_n p_n(x; \mathbf{t}|q) + C_n p_{n-1}(x; \mathbf{t}|q). \quad (3.66)$$

Veja que o coeficiente do termo de maior grau de p_n , de (3.60) e (3.61) é

$$2^n (t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1})_n,$$

desse modo, para encontrar A_n , basta igualar x^{n+1} de ambos os lados de (3.66), donde obtemos

$$A_n = \frac{1 - t_1 t_2 t_3 t_4 q^{n-1}}{(1 - t_1 t_2 t_3 t_4 q^{2n-1})(1 - t_1 t_2 t_3 t_4 q^{2n-1})}.$$

Agora, para encontrar B_n e C_n , vamos escolher valores especiais para x . Tomemos $t_1, t_2 = e^{-i\theta}$ em (3.63) e, usando também (3.64), vem

$$p_n((t_1 + 1/t_1)/2; \mathbf{t}|q) = (t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4; q)_n t_1^{-n}$$

e

$$p_n((t_2 + 1/t_2)/2; \mathbf{t}|q) = (t_1 t_2, t_2 t_3, t_2 t_4; q)_n t_2^{-n}.$$

Como já obtemos A_n , basta nos substituir $x = t_1 + 1/t_1$ e $x = t_2 + 1/t_2$ em (3.66) e então resolver o sistema para B_n e C_n . O resultado é

$$C_n = \frac{(1 - q^n) \prod_{1 \leq j < k \leq 4} (1 - t_j t_k q^{n-1})}{(1 - t_1 t_2 t_3 t_4 q^{2n-1})(1 - t_1 t_2 t_3 t_4 q^{2n})},$$

$$B_n = t_1 + t_1^{-1} - A_n t_1^{-1} \prod_{j=2}^4 (1 - t_1 t_j q^n) - \frac{t_1 C_n}{\prod_{2 \leq k \leq 4} (1 - t_1 t_k q^{n-1})}.$$

$\square$

Considerações Finais

O estudo feito nessa dissertação foi dividido em 2 capítulos, porém faremos considerações finais apenas quanto ao último deles, que trata dos polinômios q -ortogonais. O conhecimento adquirido com estudo desses q -polinômios ortogonais pode servir de base para um estudo de polinômios q -ortogonais em variável complexa, como por exemplo os q -Hermite em variável complexa, além de que, usando as mesmas técnicas aplicadas para a construção dos polinômios de Al-Salam-Chihara e Askey-Wilson, pode-se construir os chamados polinômios de Pastro. Veja [4].

Referências

- [1] Andrews G., Askey R., Roy R., *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] Chihara, T.S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [3] Gasper, G., Rahman, M., *Basic Hypergeometric Series*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition 2004.
- [4] Ismail, M. E. H., *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [5] Koekoek, R., Lesky, P.A., Swarttouw, R. F., *Hypergeometric Orthogonal Polynomial and Their q -Analogues*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [6] Lebedev N.N., *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications Inc, 1972
- [7] Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ., New York, vol. 23, 1959.