

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

CARACTERIZAÇÃO DO TRANSIENTE CAÓTICO EM CRISE DE FRONTEIRA NO
MODELO DE FERMI-ULAM

Murilo Ferriolli Marques

Prof.Dr. Edson Denis Leonel (orientador)

Rio Claro (SP)

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Murilo Ferriolli Marques

CARACTERIZAÇÃO DO TRANSIENTE CAÓTICO EM CRISE DE
FRONTEIRA NO MODELO DE FERMI-ULAM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas -
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para
obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2016

517.39 Marques, Murilo Ferriolli
M357c Caracterização do transiente caótico em crise de fronteira
no modelo de Fermi-ulam / Murilo Ferriolli Marques. - Rio
Claro, 2016
42 f. : il., figs., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e
Ciências Exatas

Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Dinâmica não
linear. 3. Atrator. 4. Variedade. 5. Expoente crítico. I. Título.

Murilo Ferrioli Marques

**CARACTERIZAÇÃO DO TRANSIENTE CAÓTICO EM CRISE DE
FRONTEIRA NO MODELO DE FERMI-ULAM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas -
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para
obtenção do grau de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Edson Denis Leonel

Luiz Antonio Barreiro

Ricardo Paupitz Barbosa do Santos

Rio Claro, 04 de Novembro de 2016.

Assinatura do aluno

assinatura do orientador

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a minha família Luiz Antonio Marques, Valeria Cristina Ferriolli Marques, Gabriel Ferriolli Marques e Luiza Ferriolli Marques por todo o carinho, amor e ajuda durante esses 5 anos de luta para realizar meus sonhos. Eles são o principal motivo por ter chegado onde cheguei.

Agradeço também ao Prof. Dr Edson Denis Leonel por abrir as portas para meu futuro e acreditar em mim, por toda sua ajuda e paciência nesses últimos anos. Uma das pessoas mais competentes e gentis que tive o enorme prazer de conhecer.

Aos meus amigos que entraram no ano de 2012 junto a mim, e ao demais que conheci ao longo dos anos. Em especial meu grande amigo Henrique Reatto Porcel pelas varias noites de estudo e a Anderson Ricardo por sempre estar a disposição para me auxiliar nesse trabalho.

Por fim, agradeço também a CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Eventos de crise de fronteira são produzidos pelo cruzamento das variedades estáveis com instáveis oriundas de um mesmo ponto de sela. Tais eventos ocorrem devido à variação de um parâmetro de controle até um determinado valor crítico. Antes do evento de crise, tem-se a coexistência de pontos fixos assintoticamente estáveis e de atratores caóticos. Após o parâmetro atingir um valor crítico tal que o atrator caótico colide com a fronteira de sua bacia de atração, o atrator e sua bacia de atração são destruídos. Porém, nota-se que, por um curto intervalo de tempo, as características do atrator no espaço de fases se mantêm inalteradas após o mesmo ter sido destruído. Tal fenômeno é chamado de transiente caótico, e seu comprimento é diretamente proporcional a distância medida do parâmetro crítico β_c até um certo parâmetro β . O Transiente é descrito através de uma equação empírica, da qual τ é proporcional a μ^δ , onde μ é o espaçamento dos parâmetros $\mu = \beta - \beta_c$; e δ é um expoente crítico. É importante mencionar que se $\mu = 0$ o transiente é infinito, o que significa que o fenômeno não ocorre. Se caso $\mu > 0$, o transiente é mensurável. Com isso, pretende-se entender as leis de escala que regem o evento de crise de fronteira no modelo de Fermi-Ulam.

ABSTRACT

Boundary crisis are produced by the crossing of stable and unstable manifolds born at the same saddle fixed point. Such events happen due to the variation of a control parameter until it reaches a critical value. Before a boundary crisis both attracting fixed point and chaotic attractor coexist. As soon as the control parameter crosses a critical value, the chaotic attractor collides with its basin boundary causing the destruction of both. However, it is possible to observe, for a certain interval of time, unaltered characteristics of the chaotic attractor in the phase space. Such phenomenon is called as chaotic transient and its length is proportional to the distance measured from the critical parameter β_c until a certain parameter β . The transient is described by an empirical equation of the type $\tau \propto \mu^\delta$, where μ is defined as $\mu = \beta - \beta_c$ and δ is a critical exponent. If $\mu = 0$, the transient is infinite, hence a boundary crisis has not happened while for $\mu > 0$ the transient is finite and measurable. We intend to measure such transient for a boundary crisis in the Fermi-Ulam model.

Listas de Ilustrações

Figura 1	10
Figura 2	10
Figura 3	11
Figura 4	13
Figura 5	14
Figura 6	15
Figura 7	15
Figura 8	16
Figura 9	16
Figura 10	18
Figura 11	20
Figura 12	32
Figura 13	33
Figura 14	34
Figura 15	35
Figura 16	36
Figura 17	37
Figura 18	38
Figura 19	39

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
1.1 INTRODUÇÃO AO CAOS	8
1.2 EVENTOS DE CRISE DE FRONTEIRA	12
2 O MODELO	18
3 CÁLCULOS ANALÍTICOS	20
3.1 DEDUÇÃO DAS EQUACÕES DO MAPEAMENTO.....	20
3.2 EXPRESSÕES DAS MATRIZES JACOBIANAS	23
3.3 DETERMINAÇÕES DOS PONTOS FIXOS	26
3.4 AUTOVALORES E AUTOVETORES	29
4 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	32
4.1 CONSTRUÇÃO DOS ATRADORES.....	32
4.2 CONSTRUÇÃO DAS VARIEDADES E CARACTERIZAÇÃO DA CRISE	33
4.3 VALOR DO EXPOENTE CRÍTICO	35
4.4 FAMÍLIA DE PARÂMETROS PARA OCORRER A CRISE	377
4.5 UNIVERSALIDADE DO EXPOENTE CRÍTICO	38
5 CONCLUSÕES FINAIS.....	40
BIBLIOGRAFIA.....	41

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO AO CAOS

Uma das maiores dádivas da raça humana é, sem dúvidas, sua curiosidade, principal motivo de todo conhecimento acumulado durante milênios de estudo. Em particular, o ser humano sempre se sentiu intrigado em obter informações sobre eventos futuros. A ideia de poder prever o futuro logo chamou a atenção de líderes políticos e militares, com o intuito de descobrir futuros ataques inimigos, datas de suas mortes, etc. Nesse caso, a ponte para obter tais informações eram oráculos, feiticeiros, entre outras vocações que utilizaram conhecimentos místicos para preverem certos acontecimentos futuros, que na maioria das vezes eram falhos. Mesmo assim, tais métodos persistiram por milênios.

Até o século XV d.C a Europa vivia em total abandono científico, artístico e filosófico. Somente após do período feudal, com o renascimento científico, a física e a matemática começaram a ganhar forças, e com diversos avanços algo realmente surpreendente e poderoso foi descoberto. Com a criação da mecânica clássica por **Isaac Newton** (1643-1727) os cientistas da época puderam prever fenômenos físicos com enorme precisão, como por exemplo, quando e onde um cometa irá passar. Esse poder de previsão tornou possível saber desde o tempo que uma pedra levará para cair de um penhasco até mesmo mandar um foguete para fora da órbita do planeta. Apenas era necessário o conhecimento das condições iniciais e as forças que regem o sistema.

Esta foi a primeira vez em que o conhecimento científico se sobrepôs aos conhecimentos místicos, vencendo-o no seu próprio jogo, a previsão de eventos futuros. Incrível o que a curiosidade e um pouco de imaginação podem fazer.

Com o passar do tempo, a capacidade de realizar previsões de sistemas dinâmicos mais complexos foram ganhando forma, e a humanidade aos poucos começou a compreender as leis que moldam a natureza. Entretanto, haviam alguns sistemas que eram impossíveis de serem previstos com exatidão. Devido a isso, os resultados eram dados como errados, pois para os cientistas da época, qualquer sistema físico poderia ser previsto, e por muito tempo sistemas com esse grau de

dificuldade foram deixados de lado. Somente após o desenvolvimento de computadores potentes, houve o retorno aos estudos desses sistemas dinâmicos.

O motivo por tal dificuldade da previsão desses sistemas se dá pela enorme sensibilidade das condições iniciais escolhidas. Ao se escolher duas condições iniciais muito próximas e dar início à dinâmica, as trajetórias no início são qualitativamente as mesmas, porém, a medida que a dinâmica evolui, as trajetórias vão se tornando cada vez mais distintas uma da outra. Para ilustrar isso de forma clara, tem-se a dinâmica descrita pelas equações diferenciais abaixo (1), que nos mostram as trajetórias descritas pelas equações de **Edward Lorenz** (1917-2008), que descrevem os rolos de convecção que ocorrem na atmosfera. São elas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - z), \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z. \end{cases} \quad (1)$$

Com isso, ao graficar a dinâmica no eixo x em função do tempo para uma certa condição inicial, obtemos a imagem ilustrada pela Figura 1. Logo em seqüência, escolhemos uma outra condição inicial muito próxima da primeira, e comparamos ambas as trajetórias (a curva em preto representa a trajetória para a primeira condição inicial e a curva em vermelho representa a trajetória para a segunda condição inicial) como é mostrado na Figura 2.

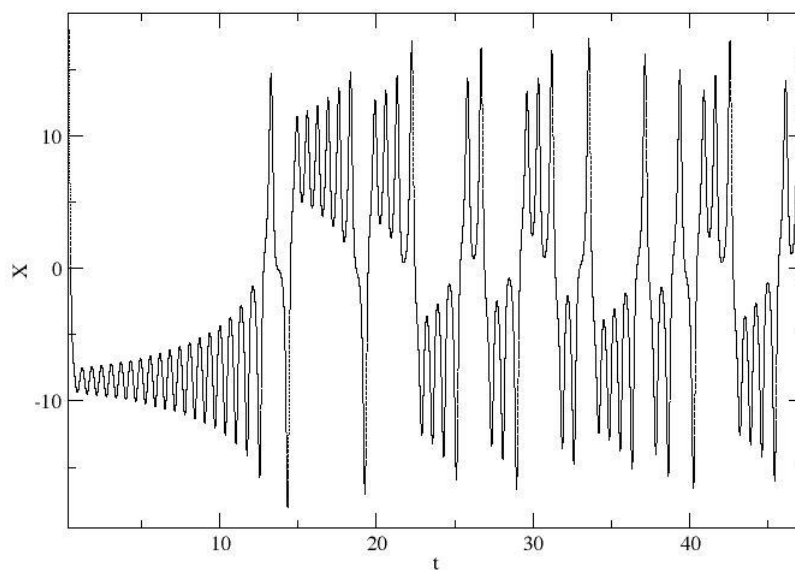


Figura 1. Evolução da dinâmica ao longo do eixo x em função do tempo t. Os valores numéricos utilizados para os parâmetros foram $\rho = 28$, $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, e para as condições iniciais utilizadas foram $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

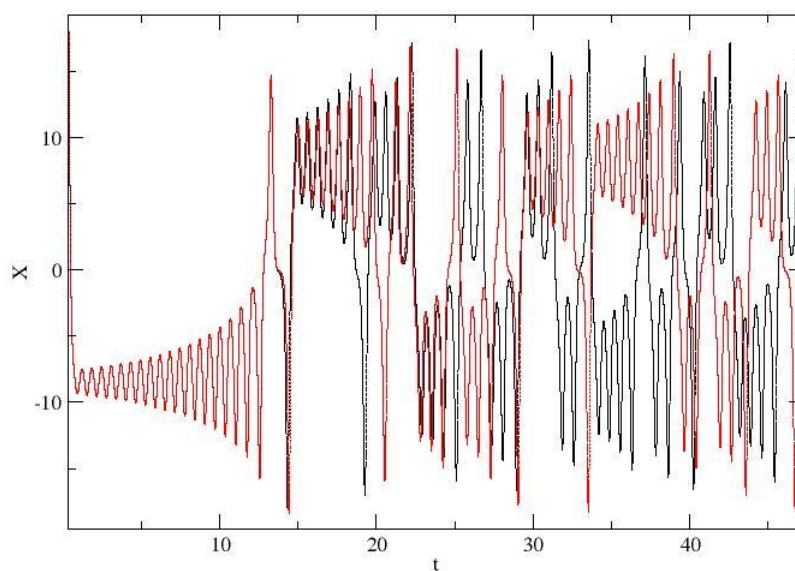


Figura 2. Comparação da evolução da dinâmica ao longo do eixo x em função do tempo t. Os valores numéricos utilizados para os parâmetros foram $\rho = 28$, $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$. Para as condições iniciais da curva em preto foram utilizadas $(x; y; z) = (1; 1; 1)$. Para as condições iniciais da curva em vermelho foram utilizadas $(x; y; z) = (1; 1,01; 1)$.

Note que no começo da dinâmica as curvas aparentemente se sobrepõem, e a medida que o tempo passa ambas as curvas se tornam distintas, apenas com uma condição inicial ligeiramente diferente.

Existe um dito popular para caracterizar fenômenos sensíveis as condições iniciais, denominado “efeito borboleta”. Ele traz a ideia de que um bater de asas de uma borboleta em Tóquio pode provocar uma tempestade em São Francisco. No caso, se considerarmos a evolução da dinâmica da atmosfera sem o bater de asas da borboleta (primeira condição inicial) não ocorreria a tempestade do outro lado do mundo. Porém, considerando agora o bater de asas da borboleta (ligeira modificação nas condições iniciais) a medida que a dinâmica evolui com as novas condições iniciais, se torna cada vez mais distinta da primeira, podendo provocar uma tempestade do outro lado do mundo [1].

Esse dito teve origem devido ao atrator estranho de **Lorenz**. Ao graficar o espaço de fases Z vs X do conjunto de equações (1) obtemos a Figura 3, da qual se parece com uma borboleta.

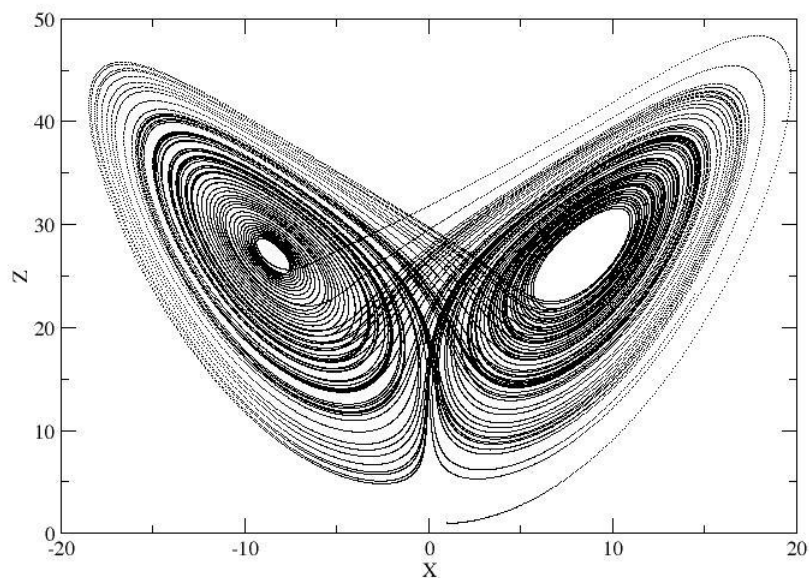


Figura 3. Ilustração do atrator estranho de Lorenz. Os valores numéricos dos parâmetros de controle utilizados foram $\rho = 28$, $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$, e para as condições iniciais utilizadas foram $(x; y; z) = (1; 1,01; 1)$.

Trazendo isso para a vida de uma forma filosófica, a todo momento precisamos tomar pequenas decisões que aparentemente são insignificantes, como a simples escolha de uma vocação por exemplo.

A medida que a vida passa (dinâmica evolui) vemos que ao escolher a vocação A, a trajetória que a vida tomou no início é bem similar, mas ao passar do tempo se torna completamente distinta da trajetória que poderia ter sido tomada ao escolher a vocação B (ligeira mudança as condições iniciais). É exatamente essa sensibilidade às condições iniciais que tornam tão difícil a previsão precisa de dinâmicas caóticas, como por exemplo, a previsão do tempo, bolsas de valores, população de espécies e até mesmo nossas próprias vidas [1].

1.2 EVENTOS DE CRISE DE FRONTEIRA

Para compreender melhor o evento de crise de fronteira precisamos rever alguns conceitos básicos utilizados no trabalho.

Um espaço de fases ou espaço físico de um sistema é definido como um conjunto de possíveis estados do sistema, muito utilizado pelo formalismo lagrangiano e hamiltoniano [2]. Além disso, como curiosidade, para a física estatística se usam distribuições de probabilidade definidas sobre o espaço de fases. Dado um conjunto de probabilidades pode-se construir uma estrutura do espaço de Hilbert que é a base para a compreensão da mecânica quântica [14].

No caso de um oscilador harmônico amortecido dado pela equação (2), podemos ilustrar seu espaço de fases mostrado pela Figura 4, onde cada ponto representa sua posição e sua velocidade.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (2)$$

onde β é o coeficiente de dissipação e ω a frequência de oscilação.

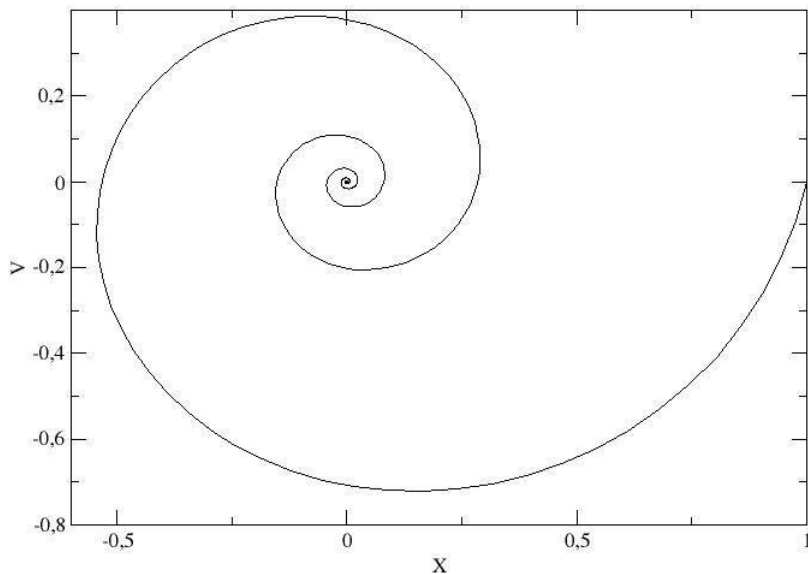


Figura 4. Ilustração do espaço de fases de uma órbita de um Oscilador Harmônico Amortecido. Os valores numéricos dos parâmetros utilizados foram $\beta = 0,5$, $\omega = 1$ e as condições iniciais utilizadas foram $x = 1$ e $v = 0$.

Devido a esse presença do coeficiente de dissipação, o sistema perde energia a medida que o tempo passa, até atingir o estado estacionário. O ponto em que a dinâmica converge para tempos suficientemente longos é denominado de atrator, sendo apenas possível de existir em um espaço de fases se houver alguma forma de dissipação no sistema, e o conjunto de condições iniciais que convergem para esse atrator é denominado de bacia de atração [3]. O atrator ilustrado na Figura 4 possui dimensão zero (um ponto), entretanto, um atrator pode possuir diversas formas.

Utilizando agora outra equação diferencial (equação (3)) para um oscilador harmônico amortecido e forçado (oscilador de Van Der Pol) podemos visualizar uma outra forma de atrator ilustrado na Figura 5.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

onde μ é o coeficiente de dissipação.

Definindo $y = \frac{dx}{dt}$ obtemos o conjunto de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \mu(1 - x^2)y - x, \\ \frac{dx}{dt} = y. \end{cases} \quad (3)$$

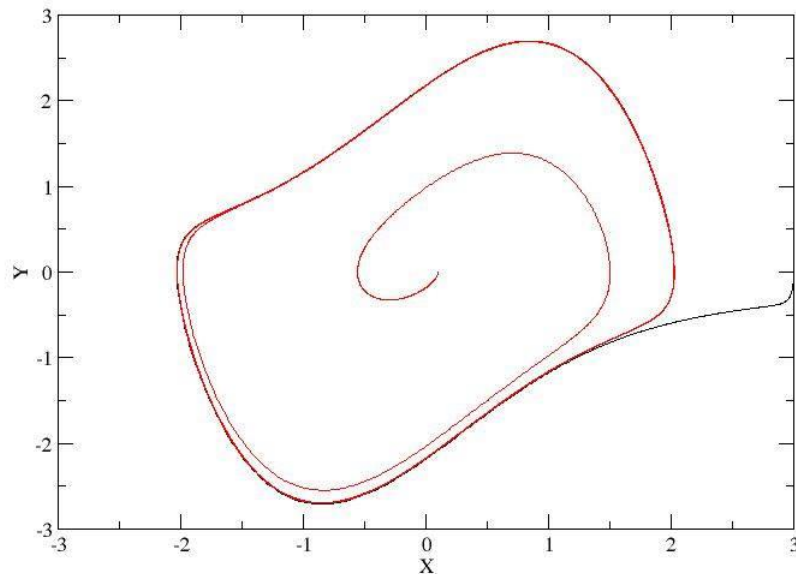


Figura 5. Ilustração do Oscilador de Van Der Pol. Para essa figura foi escolhido $\mu = 1$ e as condições iniciais utilizadas foram $x = 0,01$ e $y = 0$ para a curva em vermelho e $x = 3$ e $y = 0$ para a curva em preto.

Como se trata de um oscilador amortecido e forçado, ao escolher uma condição inicial com valores baixos (curva em vermelho) o sistema fornecerá energia até que a taxa de perda de energia seja igual a taxa de ganho. O mesmo vale para uma condição inicial elevada (curva em preto), o sistema perderá energia até que a taxa de perda de energia seja igual a taxa de ganho. Nesse caso o atrator é definido pela igualdade dessas duas taxas, denominado de ciclo limite.

É muito importante dizer que, nesse caso, a geometria do atrator depende do parâmetro de controle μ . Se $\mu = 0$ temos a equação do oscilador harmônico simples e o espaço de fases do sistema se torna apenas um círculo representado pela Figura 6. À medida que μ cresce, a forma do atrator é modificada, Figuras 7, 8 e 9, o que nos mostra que o formato do atrator depende do valor do parâmetro de controle [3].

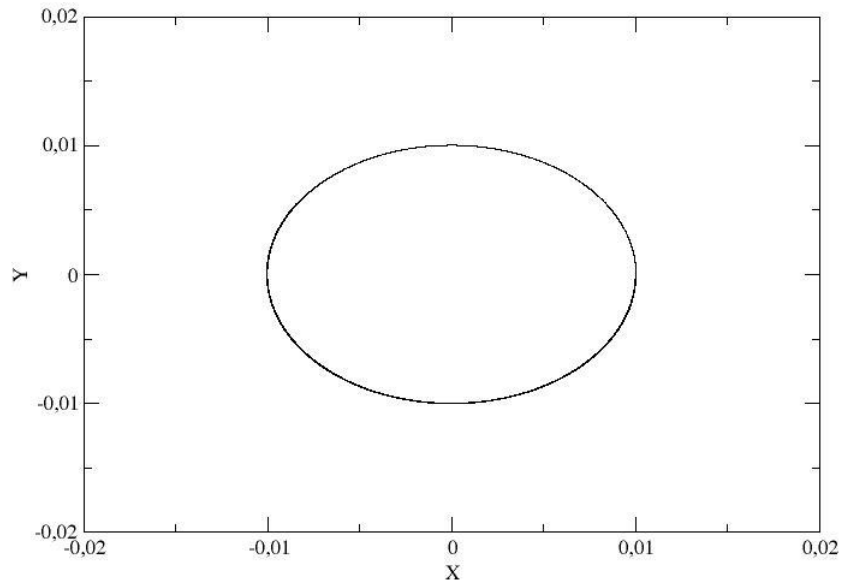


Figura 6. Ilustração do Oscilador de Van Der Pol. Para essa figura foi escolhido $\mu = 0$ e as condições iniciais utilizadas foram $x = 0,01$ e $y = 0$.

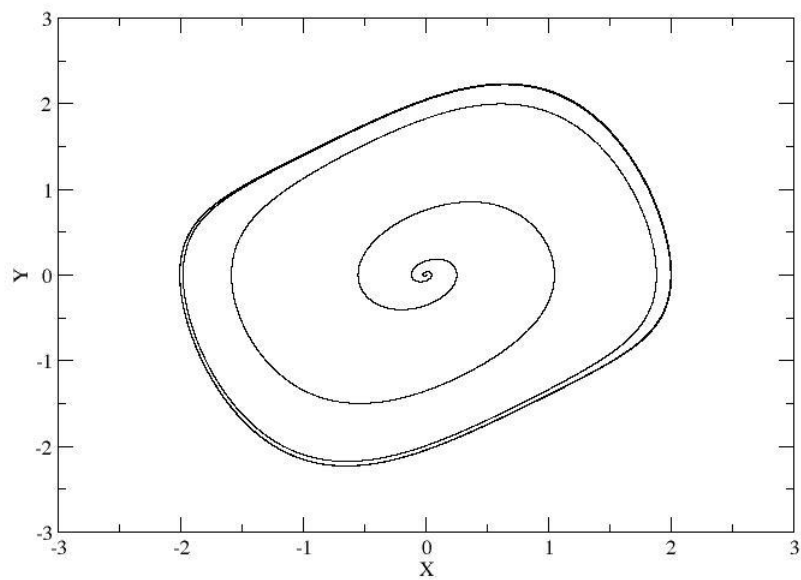


Figura 7. Ilustração do Oscilador de Van Der Pol. Para essa figura foi escolhido $\mu = \frac{1}{2}$ e as condições iniciais utilizadas foram $x = 0,01$ e $y = 0$.

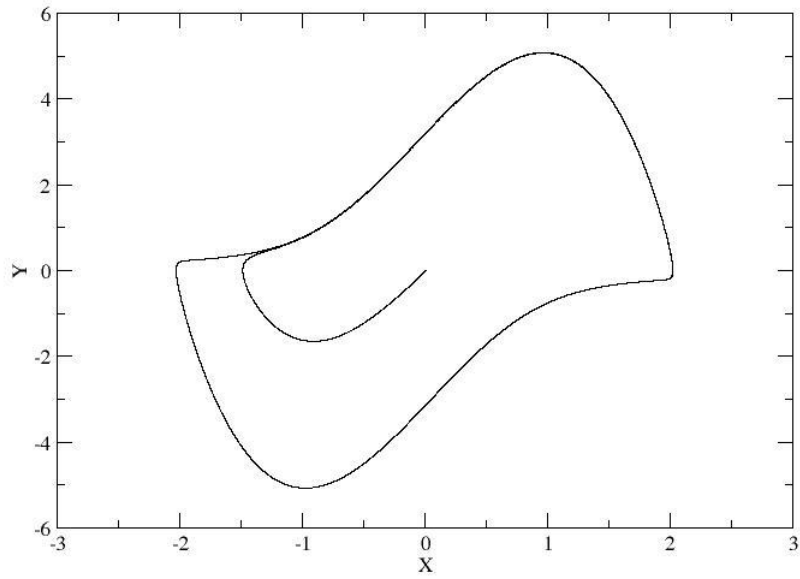


Figura 8. Ilustração do Oscilador de Van Der Pol. Para essa figura foi escolhido $\mu = 3$ e as condições iniciais utilizadas foram $x = 0,01$ e $y = 0$.

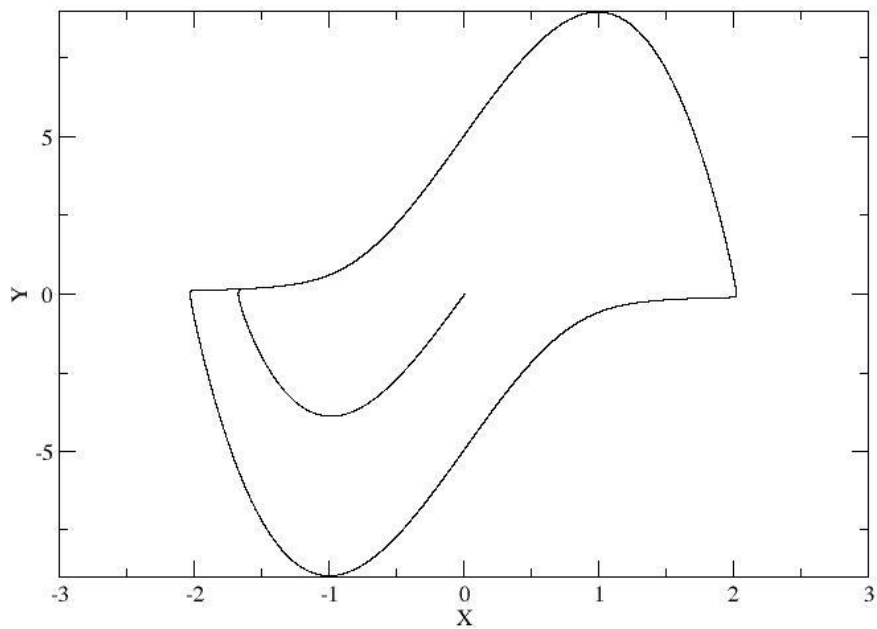


Figura 9. Ilustração do Oscilador de Van Der Pol. Para essa figura foi escolhido $\mu = 6$ e as condições iniciais utilizadas foram $x = 0,01$ e $y = 0$.

No caso de evento de crise, ao se variar um parâmetro de controle até um determinado valor crítico β_c , temos a destruição do atrator do sistema e sua bacia de atração.

Mencionados aqui dois tipos de eventos de crises, embora existam outros na literatura.

- Crise de Fronteira: Ocorre quando a órbita instável colide com a fronteira da bacia de atração.
- Crise Interna: Ocorre quando a órbita instável colide com o interior da bacia de atração.

Há também um fenômeno chamado de subducção, que é quando ocorre um evento de crise e apenas o atrator é destruído, enquanto a bacia de atração é transformada em um atrator [5].

Se a bacia de atração for caótica ao ocorrer o fenômeno de subducção, ela é transformada em um atrator não caótico, enquanto uma bacia não caótica é transformada em um atrator caótico [4-6].

Esse intervalo de tempo em que temos o falso atrator é denominado de transiente caótico, dado empiricamente por uma lei de potência,

$$\tau \propto \mu^\delta, \quad (4)$$

onde $\mu = \beta - \beta_c$ e δ é denominado de expoente crítico.

O objetivo desse trabalho é caracterizar a crise de fronteira e determinar numericamente o valor do expoente crítico do modelo de Fermi Ulam.

2 O MODELO

O modelo estudado nesse trabalho é um acelerador de partículas unidimensional (**Fermi-Ulam Model, FUM**), ilustrado na Figura 10, que consiste de uma partícula clássica se movendo entre duas barreiras sólidas separadas por um comprimento l . Entretanto, apenas uma dessas barreiras é fixa, a outra barreira se move de forma senoidal com uma amplitude ε' , onde a região de $x = -\varepsilon'$ até $x = \varepsilon'$ é chamada de zona de colisão [7].

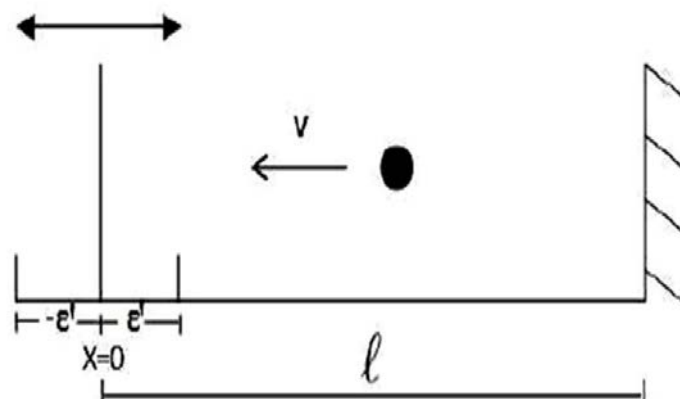


Figura 10. Ilustração do FUM.

Dado início a dinâmica, a partícula colide com a barreira fixa, refletindo para o sentido oposto com o mesmo módulo de sua velocidade (caso conservativo) se direcionando a barreira móvel, que por sua vez refletirá a partícula novamente para a barreira fixa. Porém, ao colidir com a barreira móvel o momento linear da partícula aumentará, conseqüentemente aumentando sua velocidade.

O processo se repete novamente, a partícula é refletida pela barreira fixa e logo depois refletida pela barreira móvel, aumentando novamente sua velocidade, até que a partícula se aproxime cada vez mais da velocidade da luz.

Para ocorrer um evento de crise de fronteira nesse modelo, é necessário que haja um atrator, e para isso, é necessário algum tipo de dissipação. Nesse trabalho, a forma de dissipação escolhida para criar atratores foi determinar os coeficientes de restituição de ambas as barreiras diferentes de 1. Também é importante ressaltar

que ambos os coeficientes precisam ser diferentes de 0, caso contrario, quando a partícula colide com a barreira, sua velocidade se tornará 0, dando fim a dinâmica.

Para esse estudo, denominaremos o coeficiente de restituição da barreira móvel como β , lembrando que $0 < \beta < 1$, e para barreira fixa denominaremos o coeficiente de restituição como α , lembrando que $0 < \alpha < 1$.

No FUM podemos ter dois tipos de colisões da partícula com a barreira, as colisões múltiplas e a colisão simples. Para o caso de colisões múltiplas a partícula está localizada dentro da zona de colisão, podendo sofrer mais de uma colisão com a parede móvel. Por exemplo, se a partícula sofrer uma colisão quando a barreira móvel estiver indo de $x = \varepsilon'$ até $x = 0$, a partícula perderá um pouco da velocidade mas seu sentido continuará o mesmo. Logo após essa colisão ocorrer, a barreira terminará seu percurso e retornará para uma segunda colisão com a partícula (podendo ainda realizar uma terceira ou quarta colisão) rebatendo a partícula em direção a barreira fixa.

As colisões múltiplas são mais raras, porém com a combinação certa da velocidade da partícula e a fase da barreira elas podem ocorrer.

Para o caso de colisões simples a partícula simplesmente colide apenas uma vez com a barreira móvel e se direciona para a barreira fixa.

3 CÁLCULOS ANALÍTICOS

3.1 DEDUÇÃO DAS EQUACÕES DO MAPEAMENTO

Iniciamos os cálculos analíticos obtendo o mapeamento do nosso modelo, começando com o caso das colisões múltiplas.

Para isso, devemos levar em consideração que uma das barreiras do sistema está em movimento acelerado, tornando-a um referencial não inercial. Considere então os dois referenciais mostrados pela Figura 11.

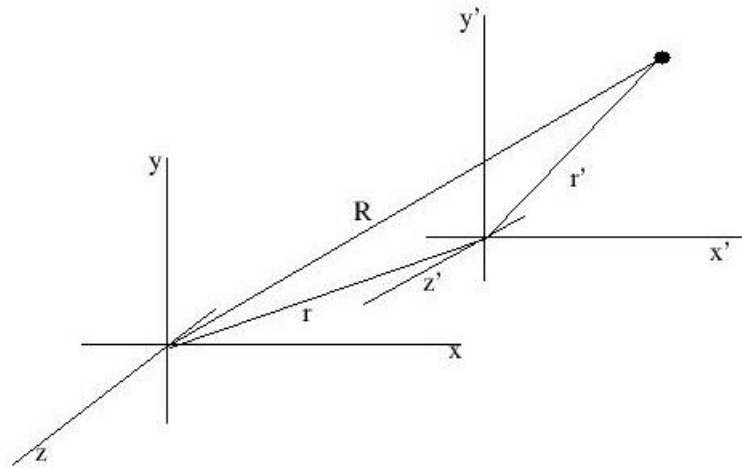


Figura 11. Ilustração da posição de uma partícula medida por dois referenciais sendo um deles inercial (esquerda) e o outro não inercial (direita).

As equações da posição da partícula é dada por,

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(t) + \vec{r}'(t),$$

onde $\vec{R}(t)$ é a posição da partícula em relação ao referencial inercial, $\vec{r}'(t)$ é a posição da partícula medido pelo referencial não inercial e $\vec{r}(t)$ fornece a posição do referencial inercial em relação ao referencial não inercial.

Então, escrevemos as equações de movimento da barreira $X_w(t)$ e da partícula $X_p(t)$,

$$X_w(t) = \varepsilon' \cos((t_n + t_c) \omega),$$

$$X_p(t) = \varepsilon' \cos(t_n \omega) + v_n t_c.$$

No instante da colisão, tanto a partícula, quanto a barreira precisam estar no mesmo lugar no espaço. Chamaremos $t_c = t - t_0$ e igualamos as equações acima, encontrando a seguinte expressão que fornece t_c no instante de tempo t_n .

$$X_w(t) = X_p(t),$$

$$\varepsilon' \cos((t_n + t_c) \omega) = \varepsilon' \cos(t_n \omega) + v_n t_c,$$

$$G(t_c) = \varepsilon' \cos((t_n + t_c) \omega) - \varepsilon' \cos(t_n \omega) - v_n t_c = 0.$$

Para obter as equações das velocidades faremos,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt},$$

$$v_n = v_w + v_{pn},$$

$$v_{pn} = v_n - v_w.$$

Pela lei da reflexão podemos dizer que a velocidade da partícula no instante $n + 1$ será o inverso do modulo de sua velocidade, corrigida pelo coeficiente de restituição, ou seja,

$$v_{pn+1} = -\beta v_{pn},$$

$$v_{n+1} - v_w = -\beta(v_n - v_w).$$

Isolando v_w e substituindo os termos chegamos a equação de recorrência da velocidade da partícula, tendo também a relação de recorrência do intervalo de tempo n até $n + 1$,

$$v_{n+1} = -\beta v_n - (1 + \beta) \omega \varepsilon' \text{sen}((t_n + t_c) \omega),$$

$$t_{n+1} = t_n + t_c.$$

A dedução das equações do mapeamento para colisões simples segue o mesmo raciocínio. Porém é preciso considerar agora o tempo de voo da partícula para a direita e para a esquerda, pelo fato da barreira continuar se movendo enquanto a partícula, após o choque, se direciona para a barreira fixa. Então, o tempo de voo para a direita e para a esquerda, respectivamente, será,

$$t_d = \frac{l - \varepsilon' \cos(t_n \omega)}{v_n},$$

$$t_e = \frac{l - \varepsilon'}{\alpha v_n}.$$

Podemos escrever agora a posição da barreira e da partícula em função do tempo, que serão respectivamente,

$$X_w(t) = \varepsilon' \cos((t_n + t_d + t_e + t_c) \omega),$$

$$X_p(t) = \varepsilon' - \alpha v_n t_c.$$

Igualando as posições da barreira e da partícula chegamos em,

$$X_w(t) = X_p(t),$$

$$\varepsilon' \cos((t_n + t_d + t_e + t_c) \omega) = \varepsilon' - \alpha v_n t_c,$$

$$F(t_c) = \varepsilon' \cos((t_n + t_d + t_e + t_c) \omega) - \varepsilon' + \alpha v_n t_c = 0.$$

Para o cálculo da equação de recorrência da velocidade da partícula o procedimento é o mesmo realizado anteriormente, lembrando que agora para a lei de reflexão o coeficiente α da barreira fixa é levado em consideração, pois a partícula chocará com a barreira fixa.

Com as devidas operações realizadas chegamos ao mapeamento,

$$v_{n+1} = \alpha \beta v_n - (1 + \beta) \omega \varepsilon' \text{sen}((t_n + t_d + t_e + t_c) \omega),$$

$$t_{n+1} = t_n + t_d + t_e + t_c,$$

Para facilitar as operações a seguir, deixaremos todos os mapeamentos na forma adimensional, assim reduziremos o número de parâmetros significativamente.

Chamando:

$$\Phi_n = \omega t_n,$$

$$\Phi_c = \omega t_c,$$

$$\Phi_d = \omega t_d,$$

$$\Phi_e = \omega t_e,$$

$$V_n = \frac{v_n}{l\omega},$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{l}.$$

Podemos agora definir nosso mapeamento de uma forma adimensional, ficando com,

Colisões múltiplas:

$$\begin{cases} V_{n+1} = -\beta V_n - (1 + \beta)\varepsilon \text{sen}(\Phi_{n+1}), \\ \Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_c, \\ G(\Phi_c) = \varepsilon \cos(\Phi_n + \Phi_c) - \varepsilon \cos(\Phi_n) - V_n \Phi_c = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Colisões simples:

$$\begin{cases} V_{n+1} = \alpha\beta V_n - (1 + \beta)\varepsilon \text{sen}(\Phi_{n+1}), \\ \Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_d + \Phi_e + \Phi_c, \\ F(\Phi_c) = \varepsilon \cos(\Phi_n + \Phi_d + \Phi_e + \Phi_c) - \varepsilon + \alpha V_n \Phi_c = 0. \end{cases} \quad (6)$$

3.2 EXPRESSÕES DAS MATRIZES JACOBIANAS

Nessa sessão, determinaremos a expressão do determinante da matriz jacobiana de ambas as colisões, começando com o caso de colisões múltiplas, logo,

$$\det(J) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n} \\ \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\det(J) = \left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n}\right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right) - \left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n}\right).$$

Derivando $\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n}\right)$ e $\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right)$ teremos, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n}\right) = -\beta - (1 + \beta)\varepsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n}\right),$$

$$\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right) = -(1 + \beta)\varepsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right),$$

$$\begin{aligned} \det(J) &= \left(-\beta - (1 + \beta)\varepsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n}\right)\right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right) + \\ &\quad + (1 + \beta)\varepsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n}\right), \\ \det(J) &= -\beta \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right). \end{aligned}$$

Realizando a derivada $\left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right)$ chegamos a uma expressão simples do jacobiano:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right) &= \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \Phi_n}\right) + \left(\frac{\partial \Phi_c}{\partial \Phi_n}\right), \\ \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right) &= 1 + \frac{\varepsilon \operatorname{sen}(\Phi_n + \Phi_c) - \varepsilon \operatorname{sen}(\Phi_n)}{\varepsilon \operatorname{sen}(\Phi_n + \Phi_c) + V_n}. \end{aligned}$$

Definindo $1 = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}(\Phi_n + \Phi_c) + V_n}{\varepsilon \operatorname{sen}(\Phi_n + \Phi_c) + V_n}$ e substituindo na equação chegamos a seguinte expressão,

$$\det(J) = \beta^2 \left(\frac{V_n + \varepsilon \operatorname{sen}(\Phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon \operatorname{sen}(\Phi_{n+1})}\right). \quad (8)$$

Vale dizer que, para um sistema conservativo, o determinante da matriz jacobiana aplicado ao ponto fixo precisa ser igual a 1. Nesse caso, se aplicarmos $V_{n+1} = V_n = V$ e $\Phi_{n+1} = \Phi_n = \Phi$ (caso estacionário) então $\det(J) = \beta^2$. E no caso de $\beta = 1$ (quando não há perda de energia quando a partícula colide com a barreira) temos que $\det(J) = 1$. O teorema de Liouville, diz que se o determinante da matriz Jacobiana de um sistema é igual a ± 1 , o sistema é dito conservativo, e a área do espaço de fases é conservativa [8] [10] [11].

O próximo passo será realizar os cálculos do determinante para o caso de colisões simples. Então novamente seguimos com a expressão do determinante da matriz jacobiana,

$$\det(J) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n} \\ \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \end{bmatrix},$$

$$\det(J) = \left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} \right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right) - \left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right).$$

Derivando $\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} \right)$ e $\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right)$ teremos, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} \right) = \alpha\beta - (1 + \beta)\epsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right),$$

$$\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right) = -(1 + \beta)\epsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right).$$

Assim, substituindo as derivadas parciais, obtemos a seguinte expressão:

$$\det(J) = \left(\alpha\beta - (1 + \beta)\epsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right) \right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right) +$$

$$+ (1 + \beta)\epsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right),$$

$$\det(J) = \alpha\beta \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right).$$

Realizando a derivada $\left(\frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial\Phi_n}\right)$ chegamos a uma expressão simples do jacobiano:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial\Phi_n}\right) &= \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\Phi_n}\right) + \left(\frac{\partial\Phi_c}{\partial\Phi_n}\right) + \left(\frac{\partial\Phi_e}{\partial\Phi_n}\right) + \left(\frac{\partial\Phi_d}{\partial\Phi_n}\right), \\ \left(\frac{\partial\Phi_{n+1}}{\partial\Phi_n}\right) &= \alpha\beta \left(\frac{V_n + \varepsilon\text{sen}(\Phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon\text{sen}(\Phi_{n+1})}\right),\end{aligned}$$

$$\det(J) = \alpha^2\beta^2 \left(\frac{V_n + \varepsilon\text{sen}(\Phi_n)}{V_{n+1} + \varepsilon\text{sen}(\Phi_{n+1})}\right). \quad (9)$$

Novamente, encontrando o determinante da matriz jacobiana e aplicando nos pontos fixos temos que $\det(J) = \alpha^2\beta^2$, e se $\alpha = \beta = 1$ recuperamos o caso conservativo, onde não há perda de energia quando a partícula se choca tanto com a barreira móvel quanto com a barreira fixa [8] [10] [11].

3.3 DETERMINAÇÕES DOS PONTOS FIXOS

Para determinar os pontos fixos do sistema teremos que satisfazer as seguintes condições, $V_{n+1} = V_n = V$ (caso estacionário), o mesmo para $\Phi_{n+1} = \Phi_n = \Phi + 2m\pi$. Nota-se que para o caso das colisões múltiplas não há como determinar um ponto fixo para Φ :

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1} &= \Phi_n + \Phi_c, \\ \Phi &= \Phi + \Phi_c.\end{aligned}$$

No caso, para colisões simples temos:

$$V = \alpha\beta V + (1 + \beta)\varepsilon\text{sen}(\Phi),$$

$$V = \frac{(1 + \beta)\varepsilon\text{sen}(\Phi)}{(\alpha\beta - 1)}. \quad (10)$$

Determinado o ponto fixo de V o próximo passo será determinar o ponto fixo de Φ :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi + \Phi_c + \Phi_e + \Phi_d = 2m\pi, \\ \Phi_c + \Phi_e + \Phi_d &= 2m\pi,\end{aligned}$$

sendo $m = 1, 2, 3, \dots$

Encontrando Φ_c :

$$\begin{aligned}F(\Phi_c) &= \varepsilon \cos(\Phi) - \varepsilon + \alpha V \Phi_c = 0, \\ \Phi_c &= \frac{\varepsilon - \varepsilon \cos(\Phi)}{\alpha V}.\end{aligned}$$

Encontrando Φ_e :

$$\Phi_e = \frac{1 - \varepsilon}{\alpha V}.$$

Encontrando d :

$$\Phi_d = \frac{1 - \varepsilon \cos(\Phi)}{V}.$$

Substituído as expressões acima chegamos em:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon \cos(\Phi)}{\alpha V} + \frac{1 - \varepsilon}{\alpha V} + \frac{1 - \varepsilon \cos(\Phi)}{V} = 2m\pi,$$

$$\frac{2m\pi\varepsilon\alpha(1 + \beta)}{(\alpha\beta - 1)(\alpha + 1)} \text{sen}(\Phi) = 1 - \varepsilon \cos(\Phi).$$

Chamando $\gamma = \frac{2m\pi\varepsilon\alpha(1 + \beta)}{(\alpha\beta - 1)(\alpha + 1)}$, elevando os dois lados da expressão ao quadrado e fazendo $\text{sen}^2(\Phi) = 1 - \cos^2(\Phi)$ teremos:

$$-(\gamma^2 + \varepsilon^2)\cos^2(\Phi) + 2\varepsilon \cos(\Phi) + \gamma - 1 = 0,$$

$$\Phi = \pm \arccos \left(\frac{\varepsilon \pm \gamma \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 - 1}}{\gamma + \varepsilon} \right).$$

Como o cosseno é uma função par, podemos adotar tanto o sinal + quanto o -. Por conveniência escreveremos a solução do seguinte modo:

$$\Phi = -\arccos \left(\frac{\varepsilon \pm \gamma \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 - 1}}{\gamma + \varepsilon} \right). \quad (11)$$

Note que existe o sinal \pm interno ao arco cosseno para o resultado de Φ . Isso nos diz que existem dois pontos fixos.

O primeiro deles, dado pelo sinal + é um ponto fixo *sink*, enquanto para o sinal - é um ponto de sela. Tendo finalmente os pontos fixos da dinâmica, escrevemos:

$$P_{Sink} = \left(\frac{(1 + \beta)\varepsilon \sin(\Phi)}{(\alpha\beta - 1)}, -\arccos \left(\frac{\varepsilon + \gamma \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 - 1}}{\gamma + \varepsilon} \right) \right),$$

$$P_{Sela} = \left(\frac{(1 + \beta)\varepsilon \sin(\Phi)}{(\alpha\beta - 1)}, -\arccos \left(\frac{\varepsilon - \gamma \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 - 1}}{\gamma + \varepsilon} \right) \right).$$

Um ponto fixo de sela possui dois autovetores, sendo que ao colocar uma condição inicial próxima a um deles vemos uma trajetória que se afasta do ponto de sela, enquanto ao escolher uma condição inicial próximo ao outro autovetor temos a convergência para o ponto fixo.

As órbitas geradas pelos autovalores são denominadas de variedades. Aquelas que convergem para o ponto fixo são denominadas variedades estáveis, enquanto as que se afastam do ponto fixo são denominada variedades instáveis.

3.4 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Nesta sessão encontraremos os autovalores do sistema aplicados ao ponto de sela e em seguida seus autovetores [12].

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (12)$$

onde I é a matriz identidade e λ são os autovalores. Assim sendo, o cálculo dos autovalores será definido pela expressão,

$$\det(J - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n} \\ \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Desenvolvendo o determinante da matriz, efetuando as derivadas parciais e aplicando o ponto fixo V chegamos em,

$$\left(\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} \right) - \lambda \right) \left(\left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right) - \lambda \right) - \left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left(\alpha\beta - (1 + \beta)\varepsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right) - \lambda \right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} - \lambda \right) - \\ & - \left(-(1 + \beta)\varepsilon \cos(\Phi_{n+1}) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \right) \right) \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Encontrando as derivadas de Φ_c , $\left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right)$ e aplicando nos pontos fixos, temos:

$$\Phi = -\arccos \left(\frac{\varepsilon - \gamma \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 - 1}}{\gamma + \varepsilon} \right) = -\arccos(\Psi),$$

$$\mathbf{F}(\Phi_c) = \varepsilon \cos(\Phi) - \varepsilon + \alpha V \Phi_c = 0,$$

$$\Phi_c = \varepsilon(\Psi + 1) \frac{(\alpha\beta - 1)}{(1 + \beta)\varepsilon \text{sen}(\Phi)},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} \right) = \frac{(\varepsilon - 1) + \alpha(\varepsilon\Psi + 1)\varepsilon(1 - \Psi)}{\alpha V^2(V + \text{sen}(\Phi))} = P.$$

Substituindo os valores encontrados acima podemos escrever uma função do segundo grau e determinar suas raízes,

$$\lambda^2 - (\alpha\beta - QP - 1)\lambda - \alpha\beta,$$

onde $Q = (1 + \beta)\varepsilon \cos(\Phi)$.

Chamando $\Omega = \alpha\beta - QP - 1$ a equação acima se reduz,

$$\lambda^2 - \Omega\lambda - \alpha\beta = 0.$$

As duas soluções para λ nos dará os dois autovalores, sendo eles,

$$\lambda_1 = \frac{\Omega + \sqrt{\Omega^2 + 4\alpha\beta}}{2}, \quad (13)$$

$$\lambda_2 = \frac{\Omega - \sqrt{\Omega^2 + 4\alpha\beta}}{2}. \quad (14)$$

Por fim, determinamos os autovetores correspondentes aos autovalores encontrados acima. Para isso temos [11],

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n} \\ \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

onde $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ corresponde ao autovetor e i indica o autovalor ($i = 1$ e 2). Realizando a multiplicação das matrizes chegamos a um sistema,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n}\right)X_1 + \left(\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right)X_2 &= \lambda_i X_1, \\ \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial V_n}\right)X_1 + \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \Phi_n}\right)X_2 &= \lambda_i X_2.\end{aligned}$$

Substituindo as expressões das derivadas no ponto fixo e isolando X_2 , encontramos,

$$X_2 = \frac{PX_1}{(\lambda_i - 1)}.$$

Assim, usando $X_1 = 1$ temos que,

$$\vec{v}_1 = \left[1, \frac{P}{(\lambda_1 - 1)}\right], \quad (16)$$

$$\vec{v}_2 = \left[1, \frac{P}{(\lambda_2 - 1)}\right]. \quad (17)$$

Lembrando que, o ponto fixo relacionado aos autovalores e autovetores encontrados acima é um ponto de sela, ou seja, o primeiro autovetor é responsável por construir as variedades estáveis da dinâmica, enquanto o segundo autovetor é responsável pelas variedades instáveis.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 CONSTRUÇÃO DOS ATRADORES

Iniciaremos a discussão dos resultados numéricos com a obtenção dos atratores do sistema. Como mostrado nas equações (5) e (6) para obter os valores de ϕ_{n+1} é necessário encontrar o valor de ϕ_c , solução de equações não lineares $G(\phi_c)$ e $F(\phi_c)$ respectivamente. Ao graficar ambas as funções, notamos que podem existir mais de uma solução matemática devido a contribuição linear de V_n junto com a contribuição oscilante do termo no cosseno, onde apenas a primeira solução teria interpretação física, as demais seriam soluções matemáticas.

Nesse caso foi utilizado o método da bisseção [13] e para encontrar a primeira solução (solução física), variamos ϕ_c de $(0, 2\pi]$ no caso de $G(\phi_c)$ e de $[0, 2\pi)$ no caso de $F(\phi_c)$.

A Figura 12 mostra o atrator caótico antes de ocorrer a crise e a Figura 13 o atrator caótico e o ponto fixo *sink* depois de ocorrer a crise.

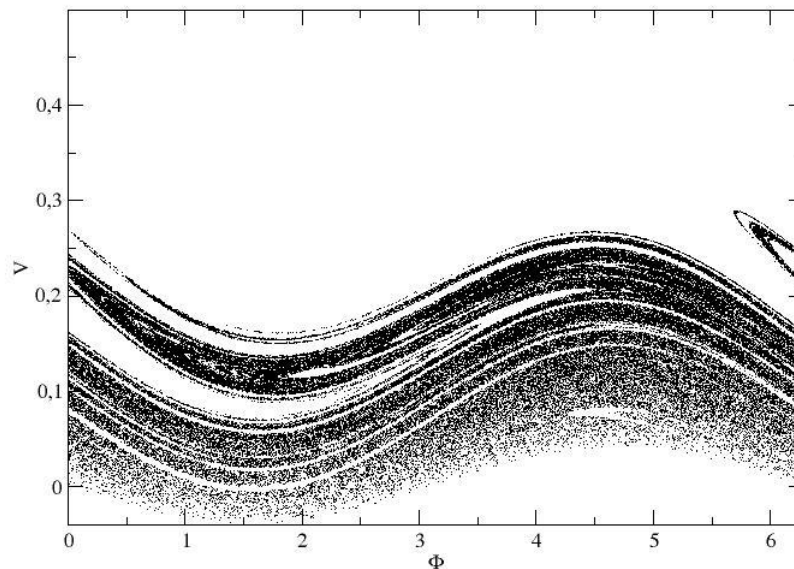


Figura 12. Ilustração do atrator caótico com $\varepsilon = 0,04$, $\alpha = 1,00$, $\beta = 0,93$ e $m = 1$.

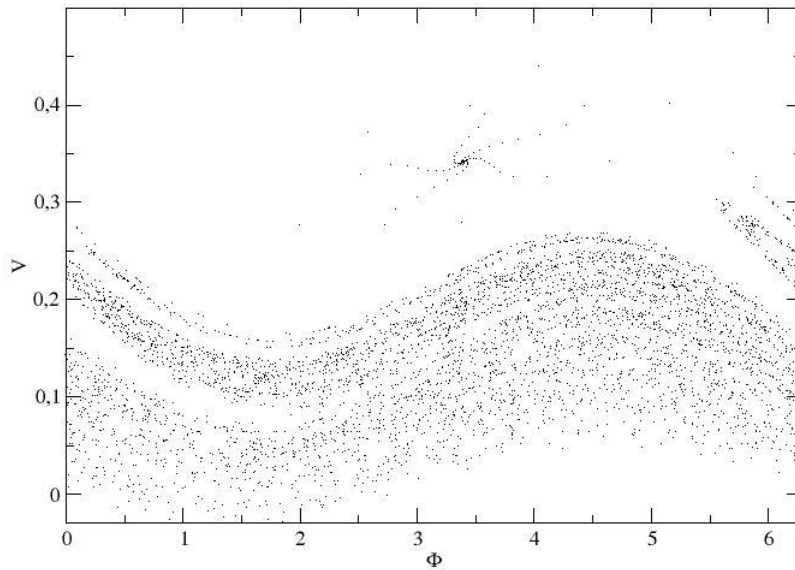


Figura 13. Ilustração do transiente caótico com $\varepsilon = 0,04$, $\alpha = 1,00$, $\beta = 0,9375$ e $m = 1$.

Veja que, mesmo após ter ocorrido o evento de crise de fronteira e o atrator do sistema ter sido completamente destruído, ainda vemos suas características no espaço de fases durante um curto intervalo de tempo (transiente caótico). Após ocorrer esse transiente há então a convergência para o ponto fixo sink

4.2 CONSTRUÇÃO DAS VARIEDADES E CARACTERIZAÇÃO DA CRISE

Nessa seção, precisamos caracterizar a crise de fronteira no sistema. Sendo assim, utilizaremos os autovetores encontrados anteriormente para o ponto de sela. Entretanto, ao colocar uma condição próxima ao autovetor que faz a convergência para o ponto fixo, não será possível obter as curvas antes dessa condição, apenas a curva da convergência para o ponto fixo.

Nesse caso, a estratégia foi obter as equações inversas do mapa $V_{n-1} = f(V_n, \Phi_n)$ e $\Phi_{n-1} = g(V_n, \Phi_n)$ descritas pelo conjunto de equações (18). Assim, ao colocar a condição nesse mesmo autovetor construiremos o mapa inverso (de onde a condição veio até o ponto fixo). É importante ressaltar que, para as colisões múltiplas do sistema não temos pontos fixos, apenas nas colisões simples. Assim, para a construção das variedades (e somente para elas) utilizaremos apenas o mapeamento das colisões simples. Então a construção das variedades estáveis e

instáveis antes da crise é ilustrada pela Figura 14 e as variedades estáveis e instáveis após a crise é ilustrada pela Figura 15.

$$\begin{cases} V_{n-1} = \frac{V_n + (1 + \beta)\varepsilon\cos(\Phi_n)}{\alpha\beta}, \\ \Phi_c = \frac{\varepsilon - \varepsilon\cos(\Phi_n)}{\alpha V_{n-1}}, \\ \Phi_{n-1} + \frac{1 - \varepsilon\cos(\Phi_{n-1})}{V_{n-1}} + \frac{1 - \varepsilon}{\alpha V_{n-1}} + \Phi_c - \Phi_n = 0. \end{cases} \quad (18)$$

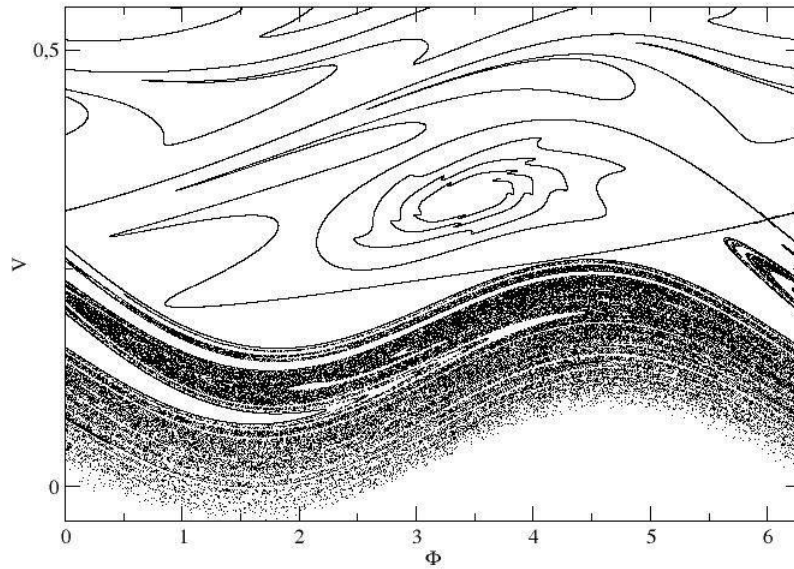


Figura 14. Construção das variedades estáveis e instáveis depois do evento de crise . Os parâmetros utilizados foram $\varepsilon = 0,04$, $\alpha = 1,00$, $\beta = 0,93$ e $m = 1$.

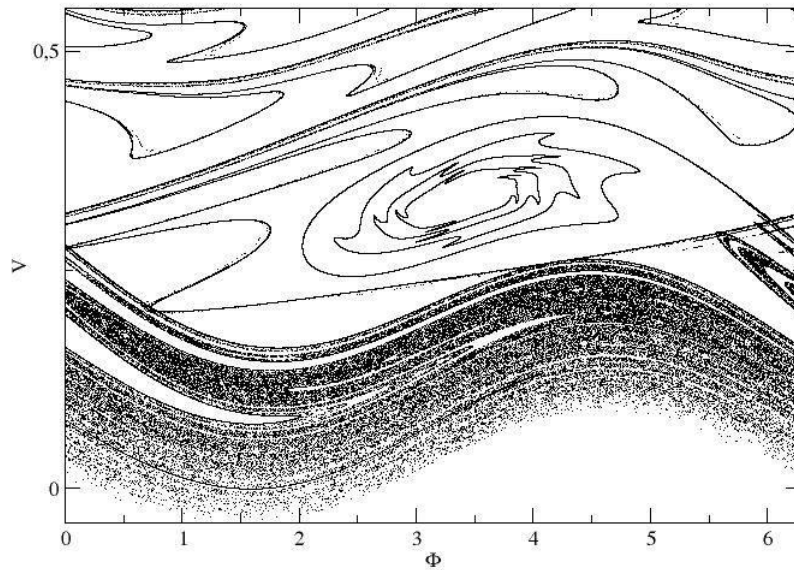


Figura 15. Construção das variedades estáveis e instáveis depois do evento de crise. Os parâmetros utilizados foram $\varepsilon = 0,04$, $\alpha = 1,00$, $\beta = 0,9375$ e $m = 1$.

4.3 VALOR DO EXPOENTE CRÍTICO

Para medir o valor do expoente crítico será necessário a construção de outro código numérico. Desta vez, definimos um conjunto de condições iniciais com $\beta = \beta_c = 0,93624$ (onde ocorre a crise), salvamos o conjunto de condições iniciais e aumentamos o valor de β , para que $\mu > 0$. Em seguida, com a dinâmica em andamento os valores da velocidade V_n e da fase Φ_n irão convergir para o ponto fixo *sink*. É então calculada a distância dada pela equação 19,

$$Distância = \sqrt{(v_n - v_s)^2 + (\Phi_n - \Phi_s)^2}, \quad (19)$$

onde v_s e Φ_s são as coordenadas do ponto fixo *sink*.

Se a distancia converge para um valor menor do que 10^{-2} então houve a convergência para o ponto fixo. É feito uma media do tempo da convergência para o ponto fixo *sink*, e também anotado a diferença dos parâmetros de controle $\beta - \beta_c = \mu$.

Aplicando o logaritmo na equação (4) chegamos a expressão desejada para encontrar o expoente crítico,

$$\tau \propto \mu^\delta,$$

$$\log(\tau) \propto \delta \log(\mu). \quad (20)$$

Sendo assim, a Figura 16 ilustra o gráfico log-log das medias do transiente em função da diferença dos parâmetros de controle $\beta - \beta_c$.

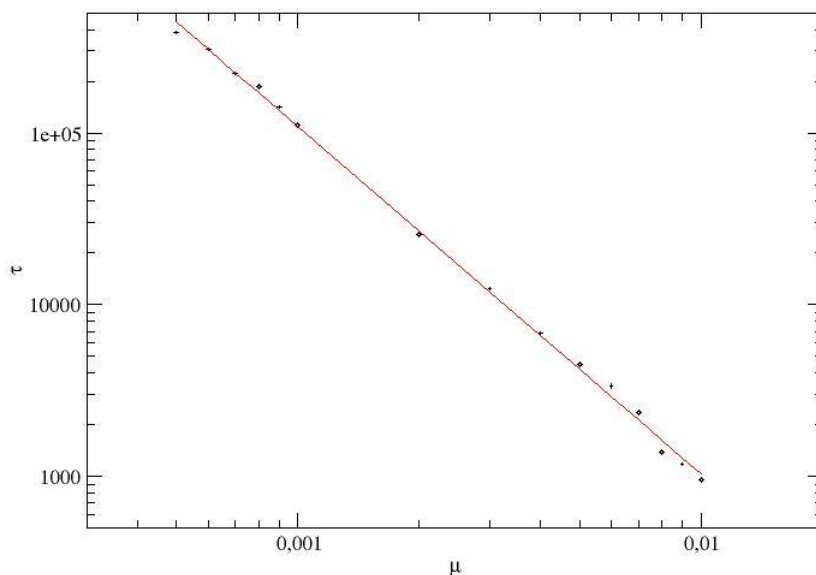


Figura 16. Ilustração do gráfico $\log(\tau)$ vs $\log(\mu)$, fornecendo o expoente crítico δ . Os valores dos parâmetros utilizados foram $\varepsilon = 0,04$, $\alpha = 1,00$ e $m = 1$.

O valor do coeficiente angular do gráfico mostrado pela Figura 16 nos fornece o expoente crítico $\delta = -2,02(3)$.

Ainda não é conhecido na literatura o valor de δ , o que torna um problema em aberto para a física. Porém, acredita-se que o valor de δ seja muito próximo de -2.

4.4 FAMÍLIA DE PARÂMETROS PARA OCORRER A CRISE

Como visto anteriormente, para ocorrer um fenômeno de crise é necessário que haja um atrator no sistema, e para haver um atrator é necessário que haja algum tipo de dissipação. Foram determinados dois pares de parâmetros de controle ($\alpha = 1$ e $\beta = 0,93624$) próximos do caso conservativo, no intuito de tanto não dar fim a dinâmica (α e β pequenos), quanto para não permitir que a velocidade da partícula atinja valores próximos a velocidade da luz (α e β muito próximos de 1). Entretanto, não são apenas esses dois pares de parâmetros que produzem o evento de crise de fronteira. Ao graficar os diversos valores de α e β no momento em que ocorre a crise de fronteira (Figura 17) encontramos uma relação linear, onde,

$$\alpha(\beta) = k\beta + b. \quad (20)$$

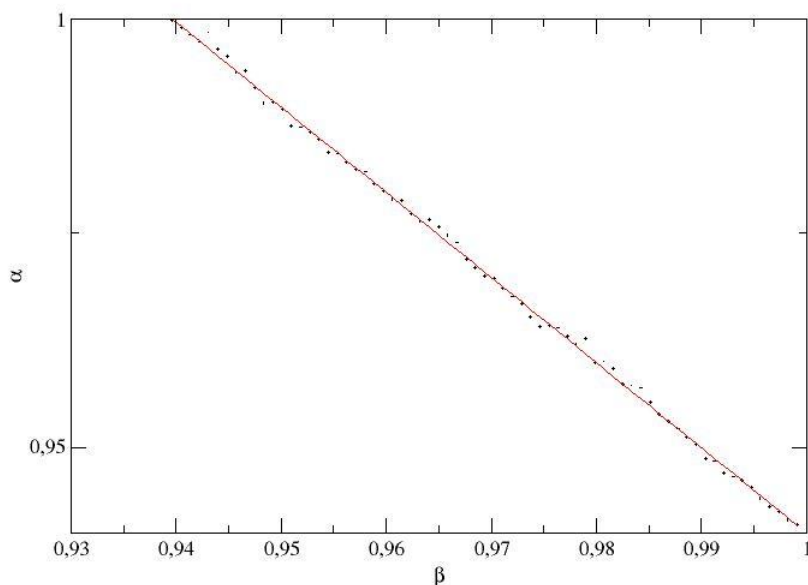


Figura 13. Ilustração dos diversos valores numéricos possíveis de α e β para ocorrer a crise de fronteira com $\varepsilon = 0,04$ e $m = 1$.

O gráfico da Figura 17 nos fornece o coeficiente angular $k = -0,993(1)$ e o coeficiente linear $b = 1,933(3)$ para o valor fixo de $\varepsilon = 0.04$ e $m = 1$. Isso significa que qual quer valor de α e β que satisfaça a equação 20 nos fornece um par de parâmetros críticos para ocorrer a crise de fronteira para o modelo de Fermi Ulam.

$$\begin{cases} k = -0,993(1) \\ b = 1,933(3) \end{cases}$$

Caso haja a necessidade de se determinar a equação $\alpha(\beta)$ para valores diferentes de ε e m os valores coeficientes angular e linear serão diferentes. Para $\varepsilon = 0.033$ e $m = 1$ os valores encontrados para os coeficientes foram $k = -0,990(4)$ e $b = 1,949(1)$.

4.5 UNIVERSALIDADE DO EXPOENTE CRÍTICO

No intuito de compreender o expoente crítico, alteraremos os valores do conjunto de parâmetros de controle do sistema e mediremos o valor do expoente crítico novamente ilustrado pela Figura 18.

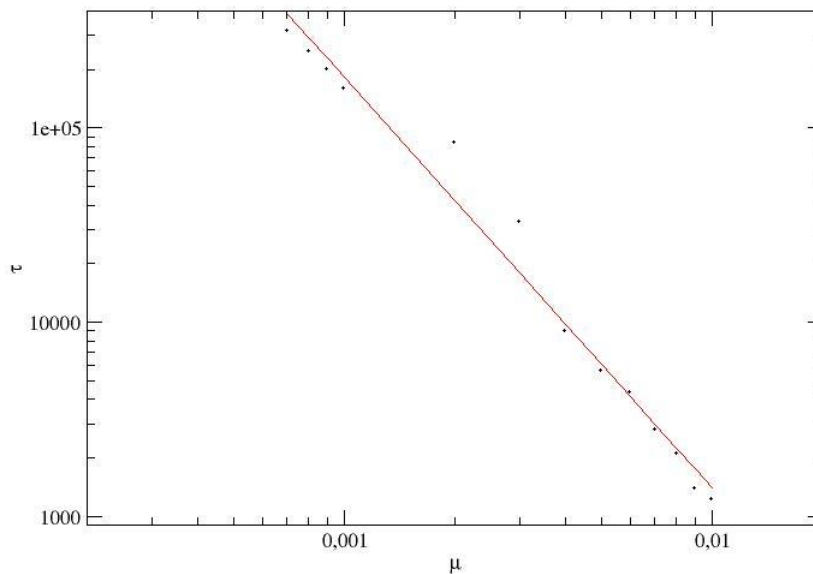


Figura 18. Ilustração do gráfico $\log(\tau)$ vs $\log(\mu)$, fornecendo o expoente crítico δ . Os valores dos parâmetros utilizados foram $\varepsilon = 0,033$, $\alpha = 1,00$ e $m = 1$.

Utilizando do método dos mínimos quadrados [13] encontramos o valor do expoente crítico de $\delta = -2,12(2)$.

Realizando o processo para outros diversos conjuntos de parâmetros de controle obtemos o gráfico da Figura 19. Temos então o valor de $\delta = -1,92(5)$

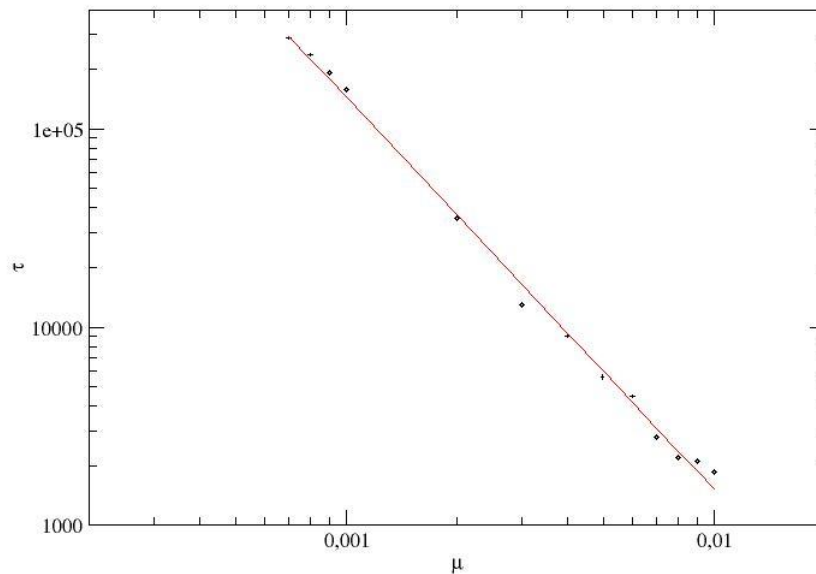


Figura 19. Ilustração do gráfico $\log(\tau)$ vs $\log(\mu)$, fornecendo o expoente crítico δ . Os valores dos parâmetros utilizados foram $\varepsilon = 0,02$, $\alpha = 1,00$ e $m = 2$.

Nota-se que o expoente crítico se mantém com um valor muito próximo de -2 , como mostra a Tabela 1 para diversos valores de m, α, β e ε . O valor de $\delta = -2$ nos fornece a informação que existe uma universalidade para o valor de δ no sistema.

Tabela 1. Valores de δ para diversos valores do conjunto de parâmetros de controle do sistema.

m	α	β	ε	δ
1	1	0,93624	0,04	-2,02
1	1	0,96375	0,033	-2,12
2	1	0,90232	0,02	-1,92

5 CONCLUSÕES FINAIS

Neste trabalho de conclusão de curso, teve-se como objetivo a caracterização da crise de fronteira no modelo de Fermi Ulam e a determinação de seu expoente crítico.

Determinamos de forma analítica as equações do mapeamento discreto, tanto para colisões simples quanto para as colisões múltiplas, os pontos fixos do sistema (ponto fixo *sink* e ponto de sela), as matrizes jacobiana para ambos os tipos de colisões, os autovalores e autovetores do sistema aplicados no ponto de sela. Com isso, teve-se o início da construção dos resultados computacionais, a construção dos atratores antes e depois de ocorrer a crise de fronteira, a construção das variedades juntamente com a caracterização da crise, e por fim a medição do transiente caótico variando o parâmetro de controle β , determinando assim o valor do expoente crítico $\delta = -2,02(3)$.

Além disso, foram determinados todos os valores de α e β possíveis para ocorrer a crise de fronteira dado por uma equação linear, mantendo os valores fixos de $\varepsilon = 0.04$ e $m = 1$. Em seguida, alterando os valores dos parâmetros de controle e novamente determinamos o valor do expoente crítico, identificando uma universalidade do expoente $\delta = -2$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GLEIK, James. **Caos - A criação de uma nova ciência**. 1ª Edição. Rio de Janeiro. Editora Campus, 1990.
- [2] GOLDSTEIN, Hebart; POOPLE, Charles; SAFKO, John. **Classical Mechanics**. 3º Edição. Boston . Editora Addison Wesley.
- [3] CARMEN P, Cintra. **Caos - Uma introdução**. 1ª Edição. São Paulo. Editora Edgard BlucherLTDA. 1994.
- [4] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Phys. Rev.Lett.48 (1982),1507
- [5] C Grebogi, E. Ott. J. A. Yorke, Physica D7 (1983). 181
- [6] E D Leonel, Egydio de Carvalho R 2007 Phys. Lett. A 364 475
- [7] FERMI E, Phis.Rev.75 (6) (1949) 1169-1175
- [8] LEONEL, Edson Denis. **Fundamentos da física estatística**. 1ª Edição. São Paulo . Editora Bloucher. 2015.
- [9] SALINAS, Silvio. **Introdução a física estatística**. 2ª Edição. São Paulo. Editora Edusp. 2008.
- [10] FRANCISCO, Caio Henrique. Leis de escala para o mapa padrão dissipativo. 2015. 39 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.
- [11] G. J. SUSSMAN, J. WISDOM. Structure and Interpretation of Classical Mechanics. Vol 1. MIT Press; 2nd Revised edition edition.2015.
- [12] BOLDRINI, Luis José. **Álgebra Linear**. 3ª Edição. São Paulo: Harbra. 1986.
- [13] RUGGIERO. Marcia A Gomes. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª Edição, São Paulo, Editora PEARSON. 1996
- [14] GRIFFITHS, David J. **Mecânica Quântica**. 2ª Edição. São Paulo. Editora PEARSON.2011

