

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE CIÊNCIAS - CAMPUS BAURU

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E METEOROLOGIA

BACHARELADO EM FÍSICA DE MATERIAIS

JOÃO VICTOR SHIGUETSUGO KAWANAMI LIMA

**APLICAÇÃO DE APRENDIZADO DE MÁQUINA CLÁSSICO E
QUÂNTICO NO ESTUDO DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS
E DINÂMICAS NÃO-MARKOVIANAS**

BAURU

2025

JOÃO VICTOR SHIGUETSUGO KAWANAMI LIMA

**APLICAÇÃO DE APRENDIZADO DE MÁQUINA CLÁSSICO E
QUÂNTICO NO ESTUDO DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS
E DINÂMICAS NÃO-MARKOVIANAS**

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso
Bacharelado em Física de Materiais da Univer-
sidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, Faculdade de Ciências, Campus Bauru.
Orientador: Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini

BAURU
2025

L732a

Lima, João Victor Shiguetsugo Kawanami

Aplicação de Aprendizado de Máquina Clássico e Quântico no Estudo de
Sistemas Quânticos Abertos e Dinâmicas Não-Markovianas / João Victor
Shiguetsugo Kawanami Lima. -- Bauru, 2025

40 p.

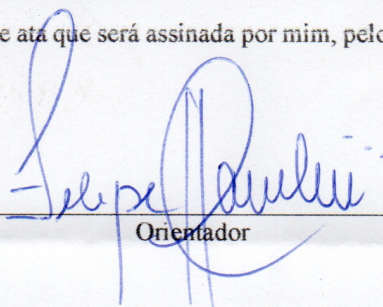
Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) - Universidade
Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, Bauru

Orientador: Felipe Fernandes Fanchini

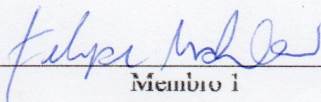
1. Informação Quântica. 2. Aprendizado de Máquina. 3. Aprendizado de
Máquina Quântico. 4. Não-Markovianidade. 5. Sistemas Quânticos Abertos. I.
Título.

ATA DE DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

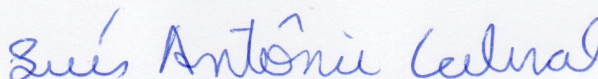
Aos 12 dias do mês de dezembro de 2025, às 9h00, em sessão pública em formato presencial, na presença da Banca Examinadora presidida pelo(a) **Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini** e composta pelos examinadores Felipe Rodrigues Perche Mahlow e Luis Antonio Cabral, o(a) aluno(a) **João Victor Shiguetsugo Kawanami Lima** apresentou o trabalho de conclusão de curso intitulado: "**Aplicação de Aprendizado de Máquina Clássico e Quântico no Estudo de Sistemas Quânticos Abertos e Dinâmicas Não-Markovianas**", como requisito curricular indispensável para a integralização do curso de Física – Bacharelado em Física de Materiais. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.



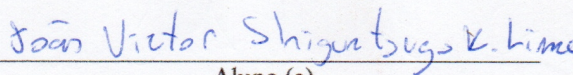
Orientador



Membro 1



Membro 2



Aluno (a)

Dedico este trabalho aos meus familiares e aos meus amigos. Espero que, no futuro, tudo isso tenha valido a pena.

Agradecimentos

Os meus agradecimentos vão à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” por proporcionar um ensino de qualidade. Ademais, quero agradecer aos meus familiares, em especial aos meus pais e à minha irmã, João Massao, Elisângela Fátima e Marya Victoria, que sempre me apoiaram desde o início da graduação, pois sem eles não seria possível concluir este curso em uma cidade tão distante.

Se consegui concluir essa grande etapa da minha vida, isso somente foi possível graças à minha companheira Anne Beatriz, que esteve comigo durante todo esse percurso. Sem ela, eu nem teria entrado nesta graduação. Gostaria de deixar também os meus agradecimentos aos meus amigos de curso pelas boas risadas e por toda a diversão que me proporcionaram ao longo da graduação. Em especial, gostaria de agradecer à minha grande amiga Mabel, que foi uma parceira em diversos trabalhos de grupo, tolerando os meus gostos e a minha personalidade. Passamos várias horas quebrando a cabeça para chegar às resoluções, em muitos grupos de laboratório e também em vários momentos pessoais.

Agradeço ainda aos meus amigos Samuel, Carlos Eduardo S., Lucas M. e Gustavo, que me ajudaram nesta caminhada de estudos; foram inúmeras noites mal dormidas dedicadas a aprender e persistir. Não posso esquecer de Carlos G., Lucas B., Catini, Gustavo Z. e Carlos Eduardo M., que foram de grande ajuda em vários momentos da graduação. Tenho certeza de que, se não fosse por eles, eu não estaria concluindo o curso com a mentalidade que possuo hoje, e posso afirmar que hoje são mais do que amigos: considero-os pessoas muito importantes para a minha vida.

Por fim, gostaria de agradecer profundamente ao meu professor, orientador e amigo Felipe Fernandes Fanchini, que ao longo de toda a minha graduação teve a paciência de me ajudar e ensinar, bem como por todos os ensinamentos e conselhos. Sem ele, a minha trajetória no mundo acadêmico seria muito diferente. Agradeço também ao meu grande amigo Felipe Peleteiro, que foi um verdadeiro parceiro durante o projeto de pesquisa realizado na graduação e também no exterior, e ao professor e amigo Felipe Rodrigues Perche Mahlow, pelos conselhos. Agradeço ainda à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) por financiar, durante dois anos, o meu projeto de iniciação científica, bem como por me proporcionar a experiência de realizar uma pesquisa no exterior por meio da bolsa BEPE, onde pude ter o prazer de conhecer o pesquisador e amigo Ariel Norambuena, que foi de grande ajuda para a minha trajetória.

A todos, o meu mais sincero obrigado. Espero ter sido, para vocês, tão importante quanto vocês foram para mim.

“O tempo passou tão rápido. Sinto vontade de reclamar com Einstein. Se o tempo é devagar ou rápido depende de sua percepção. A teoria da relatividade é muito romântica, mas muito triste.”

Makise Kurisu, *Steins;Gate*.

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, investigaremos a não-Markovianidade em sistemas quânticos abertos, com foco em um sistema de dois níveis, sujeito a ruído controlado. O objetivo é explorar e quantificar os possíveis efeitos de memória desses processos por meio de técnicas de aprendizado de máquina. Inicialmente, empregaremos algoritmos de aprendizado de máquina (ML) clássicos para mensurar o grau de não-Markovianidade. Em seguida, faremos a análise com aprendizado de máquina quântico (QML), buscando ganhos de eficiência e precisão na mensuração. Dividimos a execução deste trabalho nas seguintes etapas: (i) fundamentação teórica em computação; (ii) implementação de modelos de ML clássicos para estimar o grau de não-Markovianidade no sistema de dois níveis; e (iii) implementação de técnicas de QML para avaliar possíveis ganhos na análise. Ao aprofundar o entendimento sobre como a não-Markovianidade interage com o sistema, principalmente em cenários ruidosos, os resultados podem contribuir para a caracterização e o controle de sistemas quânticos presentes em materiais complexos, como semicondutores, supercondutores e materiais fortemente correlacionados, nos quais os efeitos de memória desempenham papel fundamental.

Palavras-chave: Sistemas Quânticos Abertos. Não-Markovianidade. Aprendizado de Máquina (ML). Aprendizado de Máquina Quântico (QML).

Abstract

In this Undergraduate Thesis, we investigate non-Markovianity in open quantum systems, focusing on a two-level system subject to controlled noise. The goal is to explore and quantify the possible memory effects of these processes by means of machine learning techniques. Initially, we employ classical machine learning (ML) algorithms to measure the degree of non-Markovianity. We then conduct the analysis with quantum machine learning (QML), seeking gains in efficiency and accuracy of the measurement. The work is organized as follows: (i) theoretical groundwork in quantum computing; (ii) implementation of classical ML models to estimate the degree of non-Markovianity in the two-level system; and (iii) implementation of QML techniques to assess potential improvements in the analysis. By deepening the understanding of how non-Markovianity interacts with the system, especially in noisy scenarios, the results may contribute to the characterization and control of quantum systems present in complex materials, such as semiconductors, superconductors, and strongly correlated materials, in which memory effects play a fundamental role.

Keywords: Open Quantum Systems. Non-Markovianity. Machine Learning (ML). Quantum Machine Learning (QML)

Lista de figuras

Figura 1 – Esfera de Bloch retirada de <i>Quantum Computation and Quantum Information</i> (NIELSEN; CHUANG, 2000).	16
Figura 2 – Dinâmica temporal da pureza para o canal de <i>Phase Damping</i>	28
Figura 3 – Gráfico da concorrência em função do tempo para $\tau = 0.4$	29
Figura 4 – Gráfico da concorrência em função do tempo para $\tau = 1.5$	30
Figura 5 – Gráfico de barras da não-Markovianidade para os valores de τ	30
Figura 6 – Comparação entre os valores exatos do grau de não-Markovianidade $\mathcal{N}$ e as previsões do modelo <i>Support Vector Regressor</i> em função do parâmetro τ para o canal de <i>Phase Damping</i>	33
Figura 7 – Comparação entre os valores exatos do grau de não-Markovianidade $\mathcal{N}$ e as previsões do modelo <i>Random Forest Regressor</i> em função do parâmetro τ para o canal de <i>Phase Damping</i>	33
Figura 8 – Circuito quântico variacional para o canal de <i>Phase Damping</i> , com qubits rotulados como s , a_1 e a_2 , incluindo medição final em σ_z	34
Figura 9 – Comportamento de N_E em função de τ (canal PD).	35
Figura 10 – Predição do VQC para N_E em função de τ (canal PD).	36

Lista de abreviaturas e siglas

ML	<i>Machine Learning.</i>
QML	<i>Quantum Machine Learning.</i>
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
MAE	<i>Mean Absolute Error</i>
SVR	<i>Support Vector Regression</i>
RF	<i>Random Forest</i>
CPTP	<i>Completely Positive Trace-Preserving</i>
RHP	<i>Rivas–Huelga–Plenio</i>
VQC	<i>Variational Quantum Circuit</i>
CP	<i>Completely Positive</i>
H	<i>Hadamard</i>
CNOT	<i>Controlled-NOT</i>
CSV	<i>Comma-Separated Values</i>
RBF	<i>Radial Basis Function</i>
PD	<i>Phase Damping</i>
Qubit	<i>Quantum Bit</i>
RKHS	<i>Reproducing Kernel Hilbert Space</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	OBJETIVOS	13
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
3.1	A notação de Dirac	14
3.2	Superposição	15
3.3	Qubit	15
3.4	Esfera de Bloch	16
3.5	Operador Densidade	17
3.6	Sistemas Quânticos Abertos	18
3.6.1	Ruídos na Computação Quântica	19
3.6.2	Ruído de Fase (<i>Phase Damping</i>)	19
3.6.3	Processos Markovianos e Não-Markovianos	21
3.7	Aprendizado de Máquina	23
3.7.1	Support Vector Regressor	24
3.7.2	Random Forest	24
3.8	Aprendizado de Máquina Quântico	25
3.8.1	Variational Quantum Circuits	25
4	RESULTADOS	27
4.1	Cálculo da Pureza	27
4.2	Determinação do grau de Não-Markovianidade	28
4.3	Aplicação do Aprendizado de Máquina Clássico	31
4.3.1	Resultados dos modelos de aprendizado de máquina clássico	32
4.4	Resultados do Modelo de Aprendizado de Máquina Quântico	34
5	CONCLUSÃO	37
	REFERÊNCIAS	38

1 Introdução

A análise de sistemas quânticos abertos é essencial porque, na prática, nenhum sistema quântico está totalmente isolado. A interação inevitável com o ambiente gera processos de decoerência e degradação das propriedades quânticas importantes para aplicações como computação quântica, metrologia e comunicação. Nesse cenário, a não-Markovianidade desempenha um papel central ao descrever dinâmicas em que o ambiente possui memória e parte da informação pode retornar ao sistema. Esse fluxo reverso afeta a coerência e o emaranhamento, podendo atuar tanto como recurso quanto como limitação. Assim, compreender os mecanismos de decoerência e os efeitos não-Markovianos é fundamental para o desenvolvimento de dispositivos quânticos mais robustos e tolerantes a ruído.

O aprendizado de máquina (Machine Learning – ML), um dos principais ramos da inteligência artificial, ganhou destaque com o aumento da disponibilidade de dados e a redução do custo computacional, sendo aplicado em áreas como computação, medicina, biologia, química e física ([JORDAN; MITCHELL, 2015](#)). Na física, o ML tem se mostrado especialmente relevante ([CARLEO et al., 2019](#)), inclusive no contexto da informação quântica ([TORLAI et al., 2018](#)). Em essência, o ML desenvolve modelos capazes de identificar padrões e resolver problemas diretamente a partir dos dados, sem programação explícita para cada tarefa ([PEDREGOSA et al., 2011](#)). No paradigma clássico, esses modelos são treinados com conjuntos de entrada e saída e ajustam seus parâmetros por meio de algoritmos computacionais, sendo usualmente divididos em aprendizado supervisionado, não supervisionado e por reforço.

Por outro lado, o aprendizado de máquina quântico (Quantum Machine Learning – QML) integra os princípios do ML clássico à computação quântica, executando algoritmos em dispositivos que exploram fenômenos como superposição e emaranhamento para potencialmente ampliar a eficiência, a velocidade e a precisão dos modelos. Nos últimos anos, o QML tem sido aplicado em diferentes áreas de pesquisa ([TORLAI et al., 2018](#)), evidenciando seu potencial para tarefas de otimização e análise de sistemas complexos.

Neste trabalho, propomos o uso combinado de ML e QML para investigar processos dissipativos em sistemas quânticos abertos, com foco especial em dinâmicas não-Markovianas. Nos últimos anos, avanços significativos evidenciaram a importância dos efeitos de memória em diversos fenômenos de informação quântica. De fato, a não-Markovianidade tem se mostrado relevante em áreas como metrologia quântica ([CHIN; HUELGA; PLENIO, 2012](#)) e na descrição realista de sistemas físicos complexos ([BYLICKA; CHRUŚCIŃSKI; MANISCALCO, 2014](#)).

Neste trabalho, empregamos técnicas de aprendizado de máquina para detectar e quantificar o grau de não-Markovianidade em sistemas quânticos abertos. A seguir, apresentamos os objetivos e os métodos adotados no desenvolvimento desta pesquisa.

2 Objetivos

Um dos principais objetivos deste trabalho de conclusão de curso é o estudo de sistemas quânticos abertos, com o propósito de compreender suas propriedades dinâmicas e suas implicações na informação e computação quântica. A investigação desses sistemas, representados por um sistema de dois níveis (qubit), fornece uma base sólida para entender as interações entre o qubit e seu ambiente ([NIELSEN; CHUANG, 2000](#)), bem como para analisar como essas interações influenciam a evolução temporal dos estados quânticos. Ao focar em sistemas de dois níveis, busca-se um entendimento aprofundado das dinâmicas fundamentais que caracterizam os sistemas quânticos abertos e os fenômenos de decoerência e dissipação.

Na sequência, serão abordados os modelos não-Markovianos e suas respectivas medidas de não-Markovianidade, com o intuito de investigar como a memória do ambiente afeta a evolução temporal dos sistemas quânticos. Essa etapa é essencial para compreender como as dinâmicas não-Markovianas modificam o comportamento de sistemas quânticos reais e influenciam processos de informação quântica ([BREUER et al., 2016](#); [LI](#); [HALL](#); [WISEMAN, 2018](#); [FANCHINI et al., 2013](#)). Por meio dessa análise, será possível desenvolver métodos quantitativos para mensurar o grau de não-Markovianidade e avaliar seus efeitos sobre o desempenho de protocolos quânticos.

Por fim, com base nas etapas anteriores, propomos a implementação de técnicas de aprendizado de máquina clássico ([PEDREGOSA et al., 2011](#)) e quântico para prever e caracterizar o grau de não-Markovianidade em sistemas quânticos abertos. Serão estudados diferentes algoritmos de ML e QML, visando identificar padrões e correlações nas dinâmicas não-Markovianas. Essa abordagem híbrida permitirá o desenvolvimento de novas ferramentas computacionais para o estudo e controle de sistemas quânticos abertos, contribuindo para o avanço da informação e computação quântica.

3 Fundamentação Teórica

Nesta seção, apresentaremos os conceitos fundamentais da informação quântica e aprendizado de máquina, com o objetivo de estabelecer a base teórica necessária para a compreensão dos tópicos abordados ao longo deste trabalho. Inicialmente, introduziremos a notação de Dirac, amplamente utilizada na mecânica quântica para a representação de estados. Em seguida, discutiremos conceitos essenciais, como superposição, emaranhamento quântico, o qubit, a representação na esfera de Bloch, bem como a distinção entre estados puros e mistos, entre outros princípios fundamentais que sustentam a teoria da informação quântica (NIELSEN; CHUANG, 2000).

3.1 A notação de Dirac

A *notação de Dirac*, também conhecida como *notação bra-ket*, é uma das ferramentas matemáticas fundamentais da mecânica quântica e da informação quântica. Ela foi introduzida por Paul Dirac como uma forma elegante e compacta de representar estados e operadores em espaços vetoriais complexos, conhecidos como *espaços de Hilbert* (DIRAC, 1939; NIELSEN; CHUANG, 2000; SAKURAI; NAPOLITANO, 1995).

Nesta notação, um vetor de estado quântico é denotado por um *ket*, escrito como $|\psi\rangle$, onde ψ representa o estado do sistema. O *ket* corresponde a um vetor coluna no espaço de Hilbert. O dual deste vetor, chamado de *bra*, é representado por $\langle\psi|$ e corresponde ao vetor linha conjugado transposto do *ket*. Assim, a combinação de um *bra* e um *ket* define o produto interno entre dois estados $\langle\phi|\psi\rangle$, que resulta em um número complexo que mede a sobreposição entre os estados $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$. Quando $\langle\phi|\psi\rangle = 0$, os estados são ortogonais.

A notação também permite expressar operações fundamentais de forma compacta. Por exemplo, o produto externo entre dois vetores é dado por $|\psi\rangle\langle\phi|$, que representa um operador linear.

Além disso, é comum o uso do produto tensorial, que permite representar estados compostos de sistemas quânticos distintos:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle. \quad (3.1)$$

Na mecânica quântica, operadores atuam sobre estados como em $A|\psi\rangle$, gerando novos estados. Denotamos o conjugado por A^* , o transposto por A^T e o adjunto por $A^\dagger = (A^T)^*$, operadores hermitianos satisfazem $A = A^\dagger$ e representam observáveis, cujos autovalores são os possíveis resultados de medida. A notação de Dirac oferece um formalismo conciso para

essas operações e para as relações entre estados e observáveis, sendo fundamental à teoria da informação quântica e às técnicas empregadas neste trabalho.

3.2 Superposição

A superposição é um princípio fundamental da mecânica quântica e base de diversos fenômenos característicos, intimamente relacionada à dualidade onda-partícula, segundo a qual entidades microscópicas (elétrons, fótons, átomos) exibem traços de ondas e partículas (NIELSEN; CHUANG, 2000; SAKURAI; NAPOLITANO, 1995; FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1965). Um sistema quântico pode existir simultaneamente em múltiplos estados até a medição, matematicamente, seu estado é uma combinação linear de estados possíveis, com coeficientes complexos (amplitudes) que codificam magnitude e fase.

A medição desempenha papel fundamental, ao observar o sistema, o ato de medir provoca o colapso da função de onda, projetando-o em um dos estados possíveis com probabilidades dadas pelos módulos quadrados das amplitudes. Em sistemas abertos, a interação com o ambiente induz decoerência, atenuando as coerências e convertendo superposições em misturas clássicas, mecanismo central para compreender dinâmicas não-Markovianas e o papel do ruído quântico discutidos neste trabalho.

3.3 Qubit

O bit quântico, ou *qubit*, constitui a unidade fundamental de informação na computação quântica e nos sistemas de informação quântica. Ele pode ser descrito como um estado em um sistema quântico de dois níveis, análogo a um bit clássico, porém com propriedades exclusivamente quânticas (NIELSEN; CHUANG, 2000).

Enquanto o bit clássico assume valores discretos 0 ou 1, o qubit pode existir em uma superposição coerente desses dois estados básicos, usualmente representados pelos vetores de base ortogonais $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Essa notação, introduzida por Paul Dirac, é conhecida como *notação de Dirac* ou *notação bra-ket* (DIRAC, 1939).

O estado puro de um qubit é descrito como uma combinação linear dos estados de base:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (3.2)$$

em que os coeficientes complexos α e β são denominados amplitudes de probabilidade. A interpretação probabilística associada a esses coeficientes é dada por:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (3.3)$$

garantindo a normalização do estado quântico. Dessa forma, $|\alpha|^2$ representa a probabilidade de o qubit ser medido no estado $|0\rangle$, enquanto $|\beta|^2$ corresponde à probabilidade de ser encontrado no estado $|1\rangle$.

Em termos matriciais, o qubit pode ser representado por vetores de dimensão dois em um espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}_2$:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \langle\psi| = [\alpha^* \quad \beta^*], \quad (3.4)$$

onde $|\psi\rangle$ é o vetor *ket* (coluna) e $\langle\psi|$ é o vetor *bra* (linha conjugado transposto).

Os estados puros de um qubit são aqueles em que o vetor de estado é perfeitamente conhecido e satisfaz a condição de normalização. Por outro lado, estados mistos representam sistemas em que existe incerteza sobre o estado real do qubit, frequentemente decorrente de ruído, decoerência ou erros de medição. Esses estados são formalmente descritos por uma matriz densidade ρ , que generaliza a descrição estatística de sistemas quânticos (NIELSEN; CHUANG, 2000).

3.4 Esfera de Bloch

Uma das formas mais intuitivas e amplamente utilizadas para representar o estado de um qubit é a esfera de Bloch. Essa representação geométrica tridimensional permite visualizar todos os possíveis estados puros de um único qubit, facilitando a compreensão de suas transformações sob operações quânticas (NIELSEN; CHUANG, 2000).

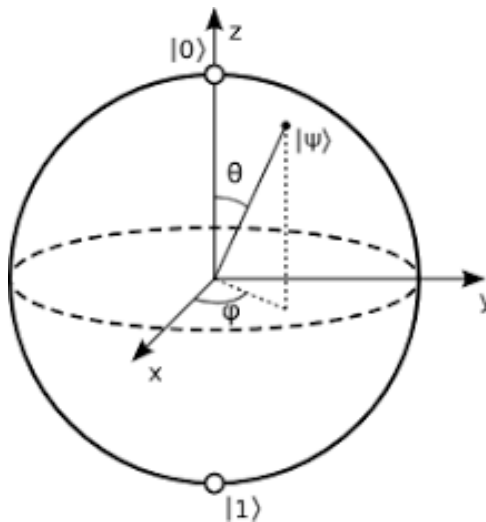


Figura 1 – Esfera de Bloch retirada de *Quantum Computation and Quantum Information* (NIELSEN; CHUANG, 2000).

A esfera de Bloch consiste em uma esfera unitária cujo centro coincide com a origem de um sistema de coordenadas cartesiano tridimensional. Cada ponto sobre a superfície da

esfera corresponde a um estado puro do qubit, enquanto os pontos localizados no interior da esfera representam estados mistos, resultantes de processos de decoerência ou interações com o ambiente (SAKURAI; NAPOLITANO, 1995).

O eixo z da esfera é associado aos estados base $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que são representados pelos polos norte e sul, respectivamente. Já os eixos x e y descrevem as possíveis superposições coerentes entre esses dois estados. Dessa forma, qualquer estado puro de um qubit pode ser representado como:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (3.5)$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$ são os *ângulos esféricos* que definem a posição do vetor de estado na superfície da esfera, e γ é uma fase global que não afeta observáveis físicos, podendo ser desprezada. Assim, o estado pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (3.6)$$

A esfera de Bloch é especialmente útil para visualizar operações unitárias sobre um qubit, que se traduzem em rotações da esfera, assim, a evolução pode ser interpretada geometricamente como a rotação do vetor de estado em torno de um eixo no espaço tridimensional. Essa representação, porém, vale apenas para um único qubit, em sistemas multiqubit (dimensão 2^n), não há visualização geométrica simples, sendo necessário recorrer a formalismos matriciais e tensoriais para descrever interações e emaranhamento (NIELSEN; CHUANG, 2000).

3.5 Operador Densidade

O operador densidade ρ fornece uma representação mais geral e abrangente de um sistema quântico em comparação à descrição por vetores de estado (*kets*). Essa formalização é especialmente útil quando o sistema se encontra em uma mistura estatística de estados ou quando está sujeito a interações com o ambiente externo. O operador densidade permite descrever, em um único formalismo, tanto *estados puros* quanto *estados mistos*, incorporando aspectos quânticos e probabilísticos clássicos (NIELSEN; CHUANG, 2000; BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002).

Em sistemas quânticos abertos, isto é, sistemas que interagem com o ambiente, a descrição do estado quântico apenas por vetores de estado deixa de ser suficiente. Nesses casos, efeitos como decoerência, dissipação e ruído alteram o estado do sistema, ocasionando perda parcial de informação quântica. O operador densidade, juntamente com o formalismo da equação mestra e do operador soma (ou formalismo de Kraus), fornece as ferramentas necessárias para modelar e compreender essas dinâmicas (BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002).

O operador densidade é definido como:

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (3.7)$$

onde p_n representa a probabilidade de o sistema estar no estado puro $|\psi_n\rangle$. Quando o sistema está em um estado puramente quântico, ou seja, quando apenas um dos p_n é igual a 1, temos:

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|,$$

enquanto em situações em que o sistema se encontra em uma mistura de estados, ρ descreve uma combinação estatística ponderada.

Em termos matriciais, para um sistema de dois níveis, o operador densidade pode ser escrito como:

$$\rho = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Os elementos da diagonal principal, $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$, são conhecidos como populações, representando as probabilidades de o sistema ser encontrado nos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. Já os elementos fora da diagonal, $\alpha\beta^*$ e $\alpha^*\beta$, são chamados de coerências, e expressam a existência de correlações de fase entre os estados de base, a presença dessas coerências distingue o comportamento genuinamente quântico de um sistema.

O operador densidade ρ possui propriedades fundamentais: é hermitiano ($\rho = \rho^\dagger$), positivo semidefinido ($\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$ para todo $|\psi\rangle$) e tem traço unitário ($\text{Tr}(\rho) = 1$; no caso de dois níveis, $\text{Tr}(\rho) = |\alpha|^2 + |\beta|^2$), assegurando a normalização das probabilidades. Por essas razões, a matriz densidade é ferramenta central na descrição de sistemas quânticos abertos, permitindo representar quantitativamente a perda de coerência e os efeitos de ruído ambiental; em conjunto com a equação mestra e o formalismo de soma de operadores (Kraus), viabiliza uma modelagem realista da evolução temporal sob interações externas em cenários experimentais e simulados (BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002; NIELSEN; CHUANG, 2000).

3.6 Sistemas Quânticos Abertos

Os sistemas quânticos abertos são aqueles que interagem com o ambiente externo, trocando energia e informação com ele ao longo do tempo. Diferentemente dos sistemas quânticos isolados, cuja evolução é descrita por transformações unitárias e totalmente determinísticas, os sistemas abertos estão sujeitos a efeitos de decoerência e dissipação, resultantes dessas interações (BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002; NIELSEN; CHUANG, 2000).

O estudo dos sistemas abertos é essencial para a compreensão de fenômenos reais em física quântica, pois, na prática, nenhum sistema pode ser completamente isolado de seu

entorno. A interação com o ambiente leva à perda gradual das propriedades quânticas do sistema, como a coerência e o emaranhamento, fenômeno que constitui um dos principais desafios para a implementação de tecnologias quânticas, como a computação e a comunicação quântica.

Nesta seção, abordaremos o papel do ruído quântico nesses sistemas, com foco em como ele afeta a dinâmica temporal e a preservação de informações quânticas. Entre os diferentes tipos de ruído que podem atuar sobre um sistema de dois níveis, destaca-se o *ruído de fase* (*phase damping*), que será estudado mais detalhadamente nesta pesquisa. Esse tipo de ruído é caracterizado pela perda de coerência entre os estados de base do sistema, sem troca de energia com o ambiente, o que o torna particularmente relevante em cenários experimentais e simulações de qubits (NIELSEN; CHUANG, 2000; BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002).

Além disso, discutiremos brevemente os conceitos de processos Markovianos e não-Markovianos, que descrevem, respectivamente, dinâmicas sem ou com memória dos estados passados do sistema. Enquanto os processos Markovianos assumem uma perda de coerência irreversível e uma evolução sem retroalimentação de informação, os processos não-Markovianos permitem a ocorrência de fluxo de informação de volta ao sistema, sendo este um dos temas centrais deste trabalho (BREUER et al., 2016).

3.6.1 Ruídos na Computação Quântica

O ruído quântico desempenha papel central na computação e na informação quânticas: trata-se de perturbações que alteram o estado do sistema devido à interação inevitável com o ambiente e a imperfeições de controle e medição, produzindo imprecisões e perda de propriedades como coerência e emaranhamento (NIELSEN; CHUANG, 2000; BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002; ZUREK, 2003). Na prática, nenhum sistema é totalmente isolado; efeitos de decoerência, erros em portas, falhas de controle e erros de medição são fontes típicas de ruído cuja compreensão e mitigação são essenciais para dispositivos quânticos confiáveis. No formalismo de canais quânticos (operadores de Kraus), a ação do ambiente é descrita por mapas CPTP que capturam perda de coerência, dissipação e fluxo de informação sistema-ambiente. Entre os canais prototípicos estão *bit-flip*, *phase-flip*, *amplitude damping* e *phase damping*; este último, foco deste trabalho, preserva as populações e suprime as coerências, levando à perda de interferência quântica e conectando-se diretamente à decoerência e às dinâmicas não-Markovianas discutidas adiante.

3.6.2 Ruído de Fase (*Phase Damping*)

O formalismo dos operadores de Kraus é de fundamental importância para o estudo de ruídos quânticos, pois fornece uma representação matemática adequada da evolução temporal de sistemas quânticos abertos, levando em consideração os efeitos de interação com o ambiente

e a introdução de erros. Cada operador de Kraus E_k descreve uma possível transformação estocástica que o sistema pode sofrer durante sua evolução. Assim, o formalismo de soma de operadores é expresso por:

$$\rho(t) = \sum_k E_k(t) \rho(0) E_k^\dagger(t), \quad (3.9)$$

onde $\rho(0)$ é o estado inicial do sistema e $\rho(t)$ é o operador densidade após a evolução temporal (NIELSEN; CHUANG, 2000; BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002).

Neste trabalho, utilizamos o formalismo de Kraus para estudar o ruído de fase (*phase damping*), um dos principais mecanismos de decoerência em sistemas quânticos abertos. O ruído de fase atua destruindo as coerências quânticas entre os estados de base, sem trocar energia com o ambiente. Dessa forma, ele modela de maneira realista o comportamento de qubits sujeitos a flutuações externas de fase (DAFFER et al., 2004).

Durante o desenvolvimento deste projeto, realizamos o estudo de um sistema quântico de dois níveis que sofre decoerência induzida por um ruído de fase colorido (*colored phase damping*) (DAFFER et al., 2004). A evolução temporal desse sistema é descrita pela equação mestra:

$$\dot{\rho} = \mathcal{K}\mathcal{L}\rho, \quad (3.10)$$

onde ρ é o operador densidade do sistema, $\mathcal{L}$ é o superoperador de Lindblad e $\mathcal{K}$ é um operador integral dependente do tempo, definido por $\mathcal{K}\phi = \int_0^t k(t-t') \phi(t') dt'$, sendo $k(t-t')$ a função kernel que determina o tipo e a intensidade de memória do ambiente.

Considerando um Hamiltoniano dependente do tempo, o sistema pode ser descrito por:

$$H(t) = \hbar \sum_{k=1}^3 \Gamma_k(t) \sigma_k, \quad (3.11)$$

onde σ_k são os operadores de Pauli e $\Gamma_k(t)$ são variáveis aleatórias independentes. Tais variáveis são dadas por $\Gamma_k(t) = \alpha_k n_k(t)$, em que $n_k(t)$ segue uma distribuição de Poisson com média $t/2\tau_k$, e α_k é uma variável aleatória com valores possíveis $\pm\alpha_k$.

A partir da equação de von Neumann,

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho], \quad (3.12)$$

a solução formal pode ser escrita como:

$$\rho(t) = \rho(0) - i \int_0^t \sum_k \Gamma_k(s) [\sigma_k, \rho(s)] ds. \quad (3.13)$$

Substituindo essa expressão de volta na equação de von Neumann e realizando a média estocástica, obtém-se:

$$\dot{\rho}(t) = - \int_0^t \sum_k e^{-(t-t')/\tau_k} \alpha_k^2 [\sigma_k, [\sigma_k, \rho(t')]] dt'. \quad (3.14)$$

As funções de correlação que definem o kernel de memória são dadas por $\langle \Gamma_j(t) \Gamma_k(t') \rangle = \alpha_k^2 \exp(-|t - t'|/\tau_k) \delta_{jk}$, o que permite reescrever a solução em termos dos operadores de Kraus:

$$M_1(\nu) = \sqrt{[1 + \Lambda(\nu)]/2} \mathbb{I}, \quad (3.15)$$

$$M_2(\nu) = \sqrt{[1 - \Lambda(\nu)]/2} \sigma_3, \quad (3.16)$$

onde $\Lambda(\nu) = e^{-\nu} [\cos(\mu\nu) + \sin(\mu\nu)/\mu]$, $\mu = \sqrt{(4\tau)^2 - 1}$ e $\nu = t/2\tau$. Aqui, $\mathbb{I}$ é o operador identidade e σ_3 é o operador de Pauli- z . A evolução do sistema aberto é, então, expressa como:

$$\rho(\nu) = \sum_{i=1}^2 M_i(\nu) \rho(0) M_i^\dagger(\nu). \quad (3.17)$$

Essa equação descreve a dinâmica dissipativa do sistema sujeito a ruído de fase colorido. O parâmetro τ controla o grau de correlação temporal do ambiente, ou seja, os *efeitos de memória* responsáveis pelo surgimento da não-Markovianidade. Quando $\tau < 1/4$, o processo é *Markoviano*, caracterizado pela perda irreversível de coerência. Já para $\tau > 1/4$, o sistema apresenta uma *dinâmica não-Markoviana*, na qual ocorre o retorno de informação do ambiente para o sistema.

Nos estágios seguintes deste projeto, o objetivo será calcular o grau de não-Markovianidade para diferentes valores de τ e, posteriormente, utilizar esses resultados como base para o treinamento de algoritmos de *aprendizado de máquina*. Espera-se, assim, desenvolver um modelo capaz de prever o grau de não-Markovianidade com base em medidas pontuais de observáveis, evitando a necessidade de simular a dinâmica completa ou recorrer a sistemas auxiliares.

3.6.3 Processos Markovianos e Não-Markovianos

Os processos Markovianos podem ser caracterizados como processos estocásticos em que o estado futuro do sistema depende apenas de seu estado atual, sendo independente dos estados anteriores. Em outras palavras, não há memória do passado. Um exemplo típico são os ruídos discutidos neste trabalho, nos quais a evolução do sistema é completamente determinada pelo estado presente.

Por outro lado, os processos não-Markovianos são fortemente dependentes dos estados anteriores do sistema, apresentando um efeito de memória. Essa dependência temporal torna a previsão da dinâmica mais complexa e, em muitos casos, não-local no tempo. Nos estudos de informação e computação quântica, compreender e quantificar tais efeitos é essencial, pois a presença de memória pode influenciar diretamente a fidelidade de protocolos e a eficiência de operações quânticas (BREUER et al., 2016).

Os efeitos de memória, característicos das dinâmicas não-Markovianas, têm relevância prática em diversas áreas. Por exemplo, em processos de teletransporte quântico envolvendo estados mistos, o aumento da memória ambiental pode melhorar o desempenho experimental

e teórico (LAINE; BREUER; PILO, 2014). Outro caso importante é na metrologia quântica, onde a presença de correlações temporais permite superar estratégias baseadas em estados não correlacionados (CHIN; HUELGA; PLENIO, 2012). Esses exemplos evidenciam a importância de estudar a natureza e a intensidade da não-Markovianidade em sistemas quânticos abertos.

A definição de não-Markovianidade em sistemas quânticos é, contudo, mais sutil do que no caso clássico. Tradicionalmente, um processo Markoviano é descrito por uma equação mestra do tipo Lindblad, que garante uma evolução dinâmica completamente positiva e preservadora do traço (CPTP). Processos quânticos Markovianos satisfazem a chamada propriedade de divisibilidade completamente positiva (CP-divisibilidade), o que significa que a evolução do sistema pode ser decomposta em etapas intermediárias, cada uma descrita por um mapa CPTP. Nos processos não-Markovianos, essa divisibilidade é violada, indicando que o passado do sistema não pode ser ignorado e que há retroalimentação de informação do ambiente para o sistema (BREUER, 2012).

Na equação mestra de Lindblad, essa violação se manifesta quando as taxas de decaimento variam no tempo e podem assumir valores negativos. Para que um processo seja CP-divisível, todas as taxas de decaimento devem permanecer não negativas durante a evolução temporal. Quando essa condição é quebrada, o mapa dinâmico deixa de ser divisível e a não-Markovianidade emerge, refletindo a presença de efeitos de memória (BREUER et al., 2016).

Dessa forma, diferentes quantificadores de não-Markovianidade foram propostos para medir o grau de violação da CP-divisibilidade. Tais quantificadores permitem avaliar quanto a evolução de um sistema se desvia do comportamento Markoviano ideal e são ferramentas essenciais na caracterização da dinâmica de sistemas quânticos abertos.

No presente trabalho, adotamos como medida operacional a dinâmica do emaranhamento (RHP), por sua adequação ao cenário bipartido analisado. Medidas alternativas, como as baseadas em distância, são mencionadas na bibliografia, mas não foram aplicadas nos resultados.

Medida baseada na dinâmica do emaranhamento

Outra abordagem amplamente utilizada para quantificar a não-Markovianidade é baseada na evolução do emaranhamento de um sistema bipartido. Essa metodologia foi proposta por Rivas, Huelga e Plenio (RHP) (RIVAS; HUELGA; PLENIO, 2010) e considera um sistema de interesse B acoplado a um ambiente e um sistema auxiliar A , que permanece isolado.

Em uma dinâmica Markoviana, o emaranhamento entre A e B deve decair de forma monotônica ao longo do tempo. Qualquer aumento no emaranhamento indica a presença de efeitos de memória e, portanto, uma dinâmica não-Markoviana. Formalmente, a medida é

definida como:

$$\mathcal{N}_E = \max_{\rho_{AB}(0)} \int_{(dE(t)/dt) > 0} \frac{dE(t)}{dt} dt, \quad (3.18)$$

onde $E(t)$ representa uma medida de emaranhamento e a maximização é feita sobre todos os estados iniciais $\rho_{AB}(0)$ do sistema bipartido.

Para o caso de um qubit acoplado a um sistema auxiliar, demonstrou-se que os estados de Bell são aqueles que maximizam a medida (NETO; KARPAT; FANCHINI, 2016). Como as medidas de emaranhamento são monotônicas sob mapas CPTP, qualquer aumento na quantidade de emaranhamento serve como testemunha inequívoca da não-Markovianidade. Nesta pesquisa, utilizamos essa metodologia para detectar a indivisibilidade dos processos e caracterizar o comportamento dissipativo do sistema estudado.

A metodologia de Rivas, Huelga e Plenio (*RHP*) foi a principal ferramenta quantitativa adotada neste trabalho, permitindo a análise efetiva do grau de não-Markovianidade a partir da dinâmica do emaranhamento entre o sistema e um qubit auxiliar.

3.7 Aprendizado de Máquina

O aprendizado de máquina tem se expandido rapidamente, tanto pelo avanço dos algoritmos de inteligência artificial quanto pela sua capacidade de identificar padrões em dados e generalizar para novas entradas. Em tarefas supervisionadas, distinguem-se classificação (atribuir um rótulo em um conjunto finito) e regressão (prever um valor real) (IZBICKI; SANTOS, 2020).

Em regressão, uma métrica clássica de desempenho é o risco preditivo quadrático (esperado em uma nova observação (X, Y)):

$$R_{\text{pred}}(g) = \mathbb{E}[(Y - g(X))^2], \quad (3.19)$$

onde g é o preditor aprendido. Minimizar (3.19) garante, em média, boas predições em dados futuros (IZBICKI; SANTOS, 2020).

No contexto deste trabalho, o problema é de regressão: estimar uma medida de não-Markovianidade a partir de observáveis do qubit obtidos da dinâmica sob ruído (com destaque para o canal phase damping). Para cada estado/instância i , usamos como atributos as componentes de Bloch em três instantes t_1, t_2, t_3 ,

$$x_i = \left(\langle \sigma_x \rangle_{t_1}, \langle \sigma_y \rangle_{t_1}, \langle \sigma_z \rangle_{t_1}, \langle \sigma_x \rangle_{t_2}, \langle \sigma_y \rangle_{t_2}, \langle \sigma_z \rangle_{t_2}, \langle \sigma_x \rangle_{t_3}, \langle \sigma_y \rangle_{t_3}, \langle \sigma_z \rangle_{t_3} \right) \in \mathbb{R}^9, \quad (3.20)$$

e como alvo y_i a medida de não-Markovianidade definida no capítulo de sistemas abertos. Esse enquadramento conecta diretamente os capítulos teóricos de dinâmica/quebra de Markovianidade às técnicas de aprendizado que seguem.

3.7.1 Support Vector Regressor

O *Support Vector Regressor* (SVR) pode ser visto como um caso particular do arcabouço de estimação em *Reproducing Kernel Hilbert Spaces* (RKHS), no qual aprendemos uma função de predição g que equilibra qualidade de ajuste e suavidade (IZBICKI; SANTOS, 2020). Nesse arcabouço, busca-se

$$\min_{g \in H_K} \sum_{k=1}^n L(g(x_k), y_k) + \lambda \|g\|_{H_K}^2, \quad (3.21)$$

onde H_K é o RKHS induzido por um kernel de Mercer K , L é uma função de perda adequada e $\lambda > 0$ controla o balanço viés–variância. Pelo Teorema da Representação, a solução ótima tem a forma finita

$$g(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k K(x_k, x), \quad (3.22)$$

reduzindo o problema a otimizar coeficientes $\{\alpha_k\}$ (IZBICKI; SANTOS, 2020).

No SVR ε -insensível, escolhe-se a perda

$$L_\varepsilon(g(x), y) = \max\{0, |y - g(x)| - \varepsilon\}, \quad (3.23)$$

que ignora erros até uma tolerância $\varepsilon > 0$ (IZBICKI; SANTOS, 2020). Para lidar com relações não lineares, utiliza-se o *truque do kernel*. Um kernel frequente é o Gaussiano (RBF),

$$K(x, x') = \exp\left(-\frac{\|x - x'\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.24)$$

cujas escolhas de σ (ou γ) regulam a suavidade das funções aprendidas (IZBICKI; SANTOS, 2020; BURKOV, 2019). A solução é obtida por otimização convexa numérica; na predição utiliza-se diretamente a expansão de (3.22) com os coeficientes $\{\alpha_k\}$ estimados.

No contexto deste trabalho, usamos SVR para captar relações não lineares entre os observáveis de Bloch de (3.20) e a medida escalar de não-Markovianidade. Para evitar vazamento de informação, os dados foram padronizados (*StandardScaler*) com ajuste apenas no treino, e os hiperparâmetros foram escolhidos por validação cruzada 5-*folds* otimizando o erro quadrático médio. Na implementação, adotamos a parametrização (C, ε) do *scikit-learn*, que é equivalente ao controle da regularização λ no objetivo em RKHS (IZBICKI; SANTOS, 2020; BURKOV, 2019).

3.7.2 Random Forest

Random Forest é um método de *ensemble* do tipo *bagging*. Reamostram-se B conjuntos *bootstrap* do treino, treina-se uma árvore f_b em cada amostra e, em regressão, prediz-se pela média

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B f_b(x), \quad (3.25)$$

enquanto, em classificação, usa-se o voto majoritário (BURKOV, 2019). Diferentemente do *bagging* “padrão”, em cada divisão da árvore considera-se apenas um *subconjunto aleatório de atributos*, o que reduz a correlação entre árvores e amplia o ganho da agregação (BURKOV, 2019). Os hiperparâmetros de maior impacto são o número de árvores B e o tamanho do subconjunto de atributos inspecionados por divisão ($mtry$).

No contexto deste trabalho, escolhemos RF por sua robustez a não linearidades e interações entre os atributos de (3.20), dispensando suposições de escala (árvores não exigem padronização). Além de MSE, MAE e R^2 , reportamos *importâncias de variáveis* agregadas sobre as árvores, úteis para interpretar quais componentes/instantes de Bloch mais contribuem para prever a não-Markovianidade (IZBICKI; SANTOS, 2020). O ajuste de B e de $mtry$ foi realizado via validação cruzada (BURKOV, 2019).

3.8 Aprendizado de Máquina Quântico

O aprendizado de máquina quântico (QML) tem se destacado nos últimos anos devido à sua versatilidade e ao potencial para resolver problemas complexos de forma mais eficiente do que métodos clássicos. Essa área combina princípios da física quântica com técnicas de inteligência artificial, buscando aumentar o desempenho e a capacidade de generalização dos modelos de aprendizado (PRESKILL, 2018).

3.8.1 Variational Quantum Circuits

Os circuitos quânticos são o modelo computacional fundamental da computação quântica, nos quais operações unitárias são aplicadas sequencialmente sobre qubits, seguidas por medições em bases apropriadas. Durante a execução, o sistema evolui de acordo com as leis da mecânica quântica, explorando fenômenos como superposição, emaranhamento e interferência (NIELSEN; CHUANG, 2000).

A estrutura básica de um circuito quântico compreende: qubits, que podem estar nos estados $|0\rangle$, $|1\rangle$ ou em superposições coerentes $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$; portas quânticas (*quantum gates*), operadores unitários que evoluem o estado do sistema, por exemplo, Hadamard (H), rotações R_x , R_y , R_z e CNOT, e medições, que projetam o estado em bases apropriadas e produzem resultados clássicos com probabilidades dadas pelos módulos quadrados das amplitudes.

Em nosso estudo, utilizamos circuitos quânticos para simular a dinâmica de sistemas quânticos abertos, incluindo interações com qubits ancilares e operações controladas e entrelaçadas. Essa abordagem permite representar transformações completamente positivas e com traço preservado, conforme o formalismo de Kraus (BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002; NIELSEN; CHUANG, 2000).

Esses circuitos são particularmente úteis para a simulação de processos dissipativos e

canais de ruído, como o canal de *Phase Damping* (PD) estudado neste trabalho. Além disso, possibilitam o desenvolvimento de estratégias híbridas para estimar propriedades físicas, como o grau de não-Markovianidade.

Os circuitos quânticos variacionais (VQCs) constituem uma abordagem híbrida entre computação quântica e aprendizado de máquina. Nessa arquitetura, parâmetros ajustáveis são introduzidos em portas quânticas, como rotações $R_y(\theta)$, e otimizados por algoritmos clássicos, com o objetivo de minimizar uma função de custo associada à tarefa de interesse (PRESKILL, 2018; BENEDETTI et al., 2019).

Durante este projeto, empregamos VQCs para estimar o grau de não-Markovianidade de um canal dissipativo do tipo PD. A ideia central consiste em utilizar o circuito quântico variacional como um modelo de aprendizado supervisionado capaz de aprender uma relação funcional entre os parâmetros do canal (α, τ) e a medida de não-Markovianidade $(\mathcal{N})$, obtida pela métrica de Rivas, Huelga e Plenio (RHP) baseada na dinâmica do emaranhamento (RIVAS; HUELGA; PLENIO, 2010).

Combinamos parâmetros quânticos (ϕ) , que controlam as operações no circuito, com parâmetros clássicos (w) , otimizados por meio de um conjunto de dados de entrada x . O processo de otimização utiliza uma função de custo do tipo erro quadrático médio (MSE), definida por:

$$C(x, \phi, w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\check{f}_{\phi, w}(x_i) - f_t(x_i) \right)^2, \quad (3.26)$$

onde n é o número de amostras de treino, $\check{f}_{\phi, w}(x_i)$ é a predição do circuito para a entrada x_i , e $f_t(x_i)$ é o valor real do grau de não-Markovianidade.

O modelo de saída do circuito pode ser expresso como uma combinação linear dos valores esperados dos observáveis medidos:

$$\check{f}_{\phi, w}(x) = w_0 + \sum_{i=1}^k w_i \langle M_i \rangle_{x, \phi}, \quad (3.27)$$

onde $\langle M_i \rangle_{x, \phi}$ são os valores esperados obtidos nas medições do circuito para um conjunto de parâmetros ϕ e entrada x . Esse formalismo segue o modelo proposto por Benedetti et al. (2019) (BENEDETTI et al., 2019).

Em síntese, os circuitos variacionais oferecem uma estrutura híbrida poderosa para a integração entre métodos clássicos e quânticos, permitindo a modelagem de fenômenos complexos. No contexto deste trabalho, eles foram aplicados à predição do grau de não-Markovianidade em um sistema quântico aberto sujeito a ruído de fase, explorando o potencial do aprendizado de máquina quântico como ferramenta de análise e previsão em dinâmicas dissipativas.

4 Resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos a partir das simulações numéricas realizadas para o canal de *Phase Damping* (PD), também conhecido como *dephasing*. Como discutido anteriormente, o formalismo de Kraus descreve a evolução temporal de estados quânticos que interagem com o ambiente por meio de transformações completamente positivas e preservadoras do traço (CPTP) (BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002; NIELSEN; CHUANG, 2000).

4.1 Cálculo da Pureza

No presente trabalho, utilizamos o formalismo de soma de operadores, dado pela Eq. (3.9) para estudar o comportamento dissipativo induzido pelo canal de *Phase Damping*.

O *phase damping* é caracterizado pela perda de coerência quântica *sem troca de energia* com o ambiente: as populações permanecem inalteradas, enquanto os elementos de coerência da matriz densidade decaem ao longo do tempo. Uma realização conveniente desse canal usa os operadores de Kraus apresentados anteriormente (seção de ruído quântico), que atenuam exclusivamente as coerências.

No limite assintótico, a matriz densidade assume a forma

$$\rho = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

As simulações numéricas foram realizadas considerando um estado inicial maximamente coerente. A análise foi conduzida por meio da dinâmica da *pureza*, definida como

$$P(t) = \text{Tr}[\rho^2(t)], \quad (4.2)$$

a qual satisfaz $P = 1$ para estados puros e $P = 1/2$ para estados maximamente mistos em um único qubit. Os resultados da dinâmica da pureza para o canal de *Phase Damping* são mostrados na Fig. 2.

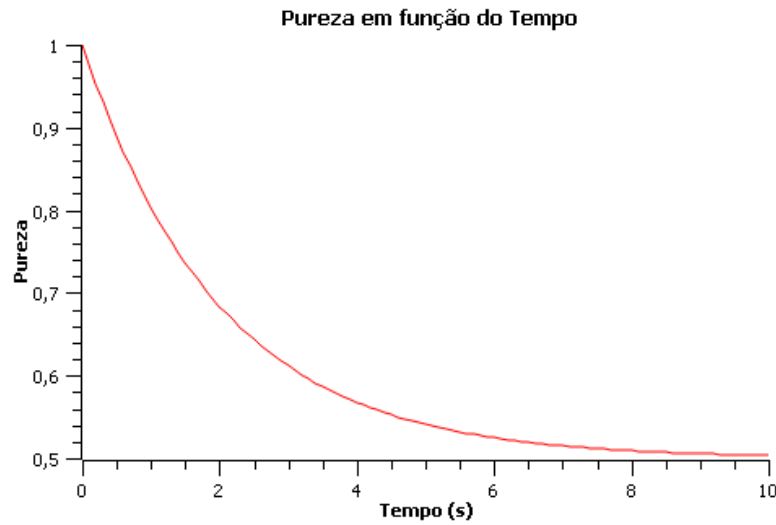


Figura 2 – Dinâmica temporal da pureza para o canal de *Phase Damping*.

Observa-se que a pureza decai gradualmente até se aproximar de $P \approx 0.5$, indicando a evolução para um estado maximamente misto quando o estado inicial possui coerência máxima. Ressalta-se que o valor assintótico da pureza depende das condições iniciais: para estados inicialmente incoerentes (como $|0\rangle$ ou $|1\rangle$), a pureza permanece constante; já para estados em superposição, ela decai conforme a perda de coerência.

Esses resultados evidenciam o efeito dissipativo do canal de *Phase Damping* e servem de base para as análises subsequentes de não-Markovianidade, bem como para a aplicação dos métodos de aprendizado de máquina clássicos e quânticos na predição do grau de não-Markovianidade.

4.2 Determinação do grau de Não-Markovianidade

Primeiramente, foi realizado um estudo aprofundado sobre a linguagem de programação necessária para o desenvolvimento do projeto. Após uma análise criteriosa, optou-se pela linguagem *Python* devido à sua versatilidade e ampla aplicação em projetos científicos.

Nessa primeira etapa, nossos esforços concentraram-se principalmente na criação de um código eficiente para a análise do ruído de *Phase Damping* (PD). Essa etapa inicial foi crucial para estabelecer uma base sólida, garantindo que as simulações e análises futuras fossem precisas e confiáveis.

Para facilitar o processo, a simulação foi dividida em etapas. Inicialmente, foi desenvolvido um código para calcular a evolução temporal de $\rho(t)$, considerando diferentes valores de τ e, conseqüentemente, avaliando o grau de não-Markovianidade do sistema. Para implementar a dinâmica dissipativa, utilizamos a Eq. (3.17). A representação em termos da soma de operadores é prática e pode ser facilmente implementada em *Python*.

Como o cálculo do grau de não-Markovianidade requer a análise da dinâmica do emaranhamento, iniciamos a simulação a partir de um estado de Bell. Isso nos permitiu obter a dinâmica do operador densidade, que foi então utilizada para calcular o emaranhamento e sua evolução temporal. Para quantificar o emaranhamento do estado quântico, implementamos uma função para calcular a concorrência (WOOTTERS, 1998). A concorrência é uma medida de emaranhamento para sistemas de dois qubits e, em nosso estudo, foi utilizada para avaliar o grau de não-Markovianidade. A concorrência pode ser calculada pela expressão

$$C(\rho(t)) = \max \left(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right), \quad (4.3)$$

em que λ_i são os autovalores, em ordem decrescente, da matriz

$$\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (4.4)$$

Como mostramos adiante, o uso da concorrência permite quantificar e analisar, de forma eficaz, os efeitos de memória no sistema quântico.

Com a trajetória temporal da concorrência em mãos, foi possível calcular o grau de não-Markovianidade dos processos dissipativos fazendo uso da Eq. (3.18). Observa-se que essa medida pode ser obtida somando as diferenças entre os valores máximos e mínimos consecutivos da concorrência ao longo da evolução temporal, isto é, somando os aumentos da concorrência durante a dinâmica.

Nas simulações, foram explorados valores de τ variando de 0.4 a 1.5, com incrementos de 0.1, com foco na análise das dinâmicas não-Markovianas. A janela temporal foi escolhida suficientemente longa a fim de capturarmos todos os aumentos da concorrência durante a evolução, condição fundamental para o cálculo preciso da não-Markovianidade.

Para exemplificar, ilustramos abaixo o cálculo da dinâmica da concorrência utilizando $\tau = 0.4$ e $\tau = 1.5$.

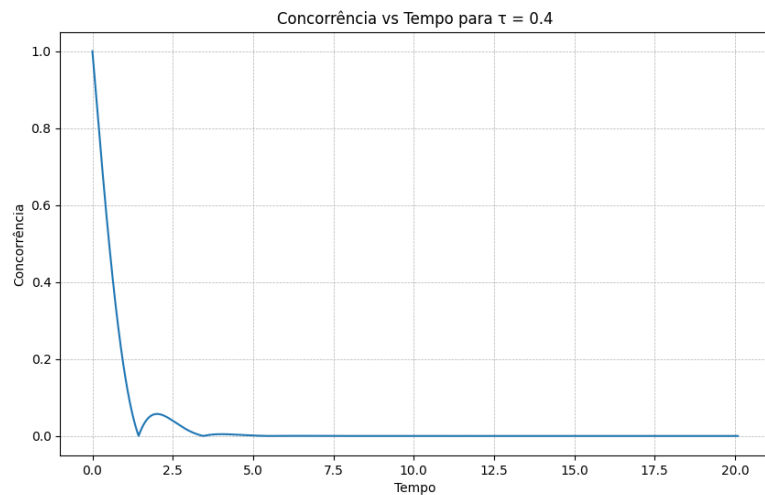


Figura 3 – Gráfico da concorrência em função do tempo para $\tau = 0.4$.

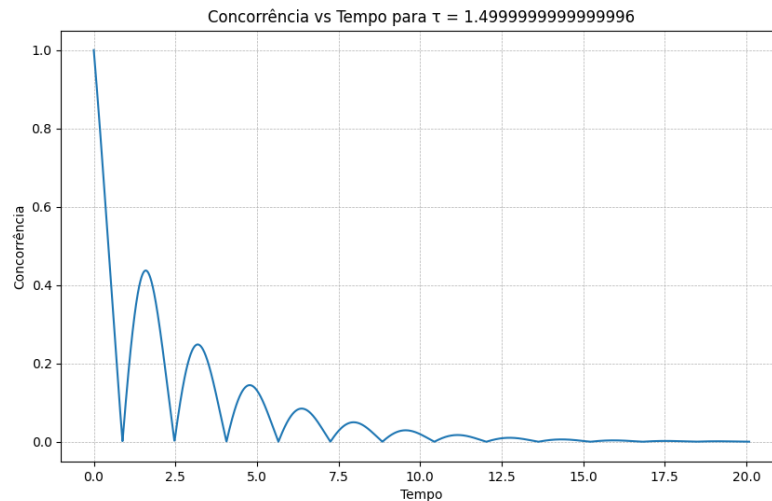


Figura 4 – Gráfico da concorrência em função do tempo para $\tau = 1.5$.

Como podemos observar, ao aumentarmos os valores de τ , intensificam-se as oscilações presentes durante a evolução temporal do sistema aberto, o que indica um aumento do grau de não-Markovianidade do processo.

Após o cálculo da dinâmica da concorrência, determinamos o grau de não-Markovianidade do sistema. Para cada valor de τ escolhido, os valores calculados foram registrados em uma lista e, em seguida, utilizados para construir o gráfico de barras, proporcionando uma análise visual detalhada e comparativa dos resultados obtidos para diferentes parâmetros de τ .

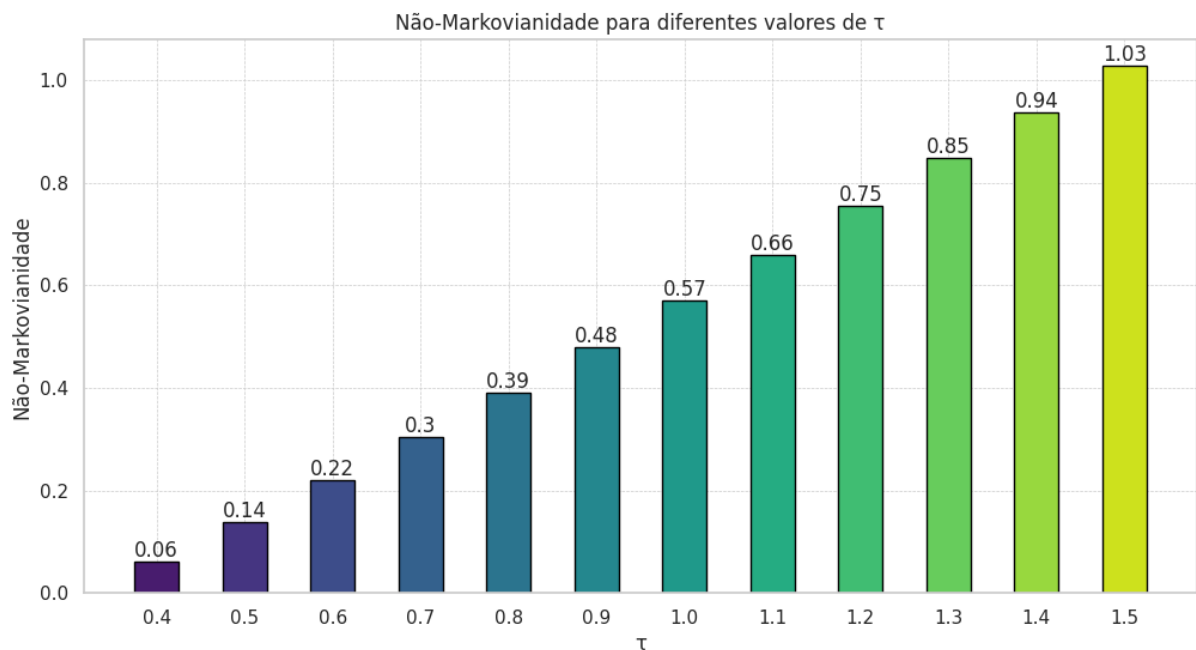


Figura 5 – Gráfico de barras da não-Markovianidade para os valores de τ .

Portanto, nota-se que, ao aumentarmos τ , aumenta também o grau de não-Markovianidade

do sistema quântico aberto.

Por fim, o uso da concorrência permitiu quantificar e analisar, de maneira eficaz, os efeitos de memória no sistema quântico. Nossos resultados numéricos mostram que a dinâmica do emaranhamento, iniciada a partir de um estado de Bell, é uma ferramenta poderosa para caracterizar a não-Markovianidade.

4.3 Aplicação do Aprendizado de Máquina Clássico

Nesta subseção, aplicamos os métodos de aprendizado de máquina clássico apresentados no Capítulo 3.7 para estimar o grau de não-Markovianidade a partir de observáveis locais de um único qubit. Para isso, iniciamos pela geração de um conjunto de dados simulados, construído a partir da dinâmica do canal ruidoso de *Phase Damping* (PD) discutido na Seção 3.6.2.

Consideramos um sistema bipartido composto por dois qubits, em que apenas um deles interage com o ambiente, enquanto o outro é mantido isolado e atua como uma ancila. O estado inicial do sistema bipartido foi escolhido como um estado de Bell maximamente emaranhado, em concordância com a definição adotada para a medida de não-Markovianidade baseada na dinâmica do emaranhamento (Seção 3.6.3). A evolução temporal da matriz densidade $\rho(t)$ foi obtida numericamente por meio do formalismo de soma de operadores, Eq. (3.17), utilizando os operadores de Kraus do canal PD, Eqs. (3.15) e (3.16), com o parâmetro τ controlando o regime Markoviano ($\tau < 1/4$) ou não-Markoviano ($\tau > 1/4$).

Para cada valor de τ no intervalo $[0.10, 0.75]$, que inclui tanto o regime Markoviano quanto o não-Markoviano, calculamos o grau de não-Markovianidade $\mathcal{N}$ a partir da evolução do emaranhamento entre o sistema e a ancila, de acordo com a medida baseada na dinâmica do emaranhamento, Eq. (3.18). Em nossa implementação numérica, o emaranhamento foi quantificado por meio da concorrência $C(\rho(t))$, Eq. (4.3), calculada para cada instante de tempo. O valor de $\mathcal{N}$ foi então obtido somando-se apenas as contribuições nos intervalos em que a derivada temporal do emaranhamento é positiva, isto é, somando os aumentos sucessivos de $C(\rho(t))$ ao longo da evolução, como discutido na Seção 4.2.

Uma vez determinado o grau de não-Markovianidade para cada valor de τ , passamos à construção das variáveis de entrada para os modelos de aprendizado de máquina. Para isso, consideramos agora a dinâmica de um único qubit sujeito ao mesmo canal de Phase Damping, descrito pelos mesmos operadores de Kraus e parâmetro τ . Dado um tempo t , o estado do qubit é representado por uma matriz densidade $\rho(t)$, a partir da qual calculamos os valores esperados dos operadores de Pauli,

$$\mathcal{O}_k = \text{Tr}[\sigma_k \rho(t^*)], \quad (4.5)$$

onde σ_k denotam os três operadores de spin de Pauli nas direções x , y e z (FANCHINI et al., 2021).

No contexto deste trabalho, em vez de utilizar apenas um único tempo t^* , selecionamos três instantes distintos t_1 , t_2 e t_3 , escolhidos em torno de um tempo ótimo t_c . Esse tempo t_c foi determinado numericamente a partir de simulações da dinâmica, de modo a maximizar a distinção entre os regimes Markoviano e não-Markoviano. Para cada valor de τ , calculamos os nove valores esperados $\{\mathcal{O}_x(t_j), \mathcal{O}_y(t_j), \mathcal{O}_z(t_j)\}_{j=1}^3$, que podem ser organizados no vetor de atributos, em completa concordância com a definição apresentada na Eq. (3.20).

Assim, para cada valor de τ obtemos um par $(\mathbf{x}_i, \mathcal{N}_i)$, em que $\mathbf{x}_i$ contém os nove valores esperados associados ao qubit em três instantes de tempo, e $\mathcal{N}_i$ é o grau de não-Markovianidade calculado a partir da dinâmica do emaranhamento do sistema bipartido. Todos esses pares foram organizados em um arquivo no formato .csv, no qual a coluna rotulada como Non-Markovianity armazena o valor de $\mathcal{N}_i$ correspondente àquela linha, enquanto as demais colunas registram os nove observáveis definidos em (3.20).

Esse conjunto de dados serviu como base comum para o treinamento e teste dos dois modelos de aprendizado de máquina clássicos considerados neste trabalho, o *Support Vector Regressor* (SVR) e o *Random Forest*, cujos desempenhos e análises comparativas são apresentados nas subseções seguintes.

4.3.1 Resultados dos modelos de aprendizado de máquina clássico

Nesta subseção analisamos conjuntamente o desempenho dos dois modelos de aprendizado de máquina clássico considerados neste trabalho, o *Support Vector Regressor* (SVR) e o *Random Forest Regressor* (RF). Ambos foram treinados utilizando o mesmo conjunto de dados descrito na Seção 4.3, usando 70% dos dados para treino e 30% para teste, em que as nove componentes do vetor de características (3.20) são utilizadas como variáveis de entrada e o grau de não-Markovianidade $\mathcal{N}$ como variável alvo. As Figuras 6 e 7 apresentam, respectivamente, a comparação entre os valores exatos de $\mathcal{N}$, obtidos a partir da dinâmica do emaranhamento, e as previsões fornecidas pelo SVR e pelo RF em função do parâmetro τ . Em ambos os casos observa-se que os pontos correspondentes às previsões praticamente se sobrepõem à curva alvo ao longo de todo o intervalo considerado, reproduzindo tanto a região Markoviana ($\tau < 0,25$), em que $\mathcal{N}$ é aproximadamente nula, quanto o crescimento suave da medida no regime não-Markoviano ($\tau > 0,25$).

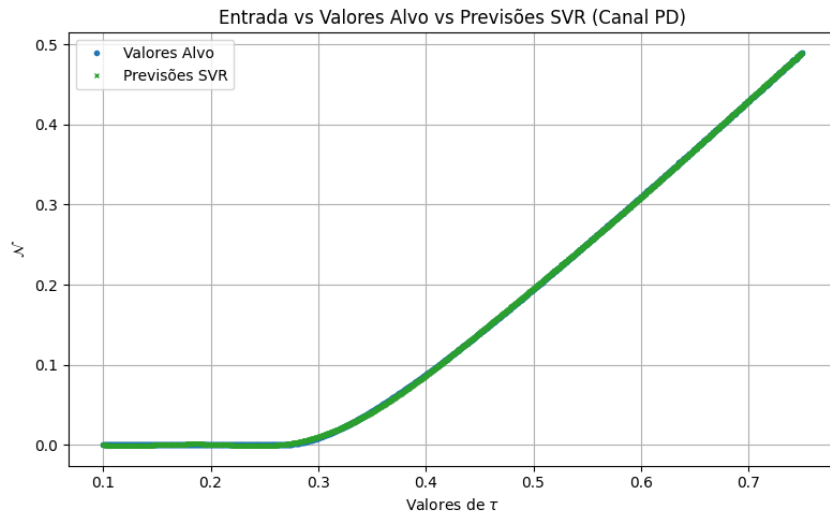


Figura 6 – Comparação entre os valores exatos do grau de não-Markovianidade $\mathcal{N}$ e as previsões do modelo *Support Vector Regressor* em função do parâmetro τ para o canal de *Phase Damping*.

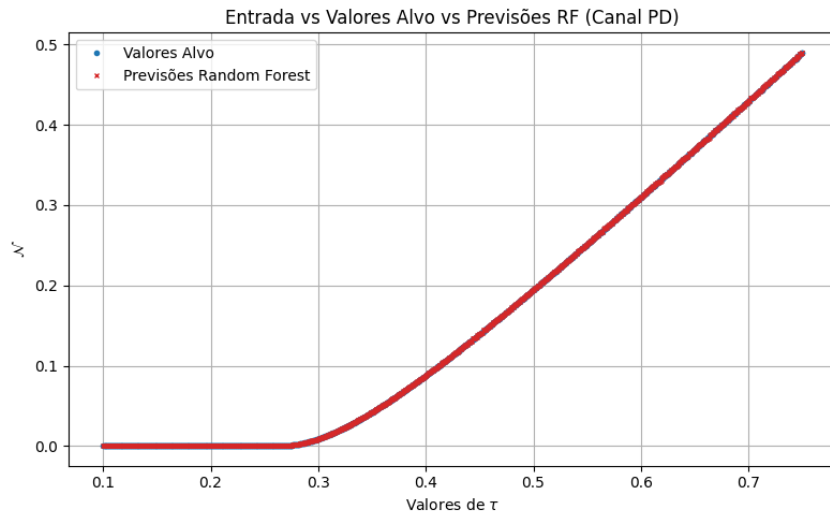


Figura 7 – Comparação entre os valores exatos do grau de não-Markovianidade $\mathcal{N}$ e as previsões do modelo *Random Forest Regressor* em função do parâmetro τ para o canal de *Phase Damping*.

Do ponto de vista quantitativo, os dois modelos apresentam erros extremamente baixos e coeficientes de determinação muito próximos de 1. Para o SVR obtivemos um erro quadrático médio $MSE_{SVR} \approx 6,2 \times 10^{-7}$, um erro absoluto médio $MAE_{SVR} \approx 6,7 \times 10^{-4}$ e um coeficiente de determinação $R_{SVR}^2 = 0,999977$. Já para o *Random Forest Regressor* os valores encontrados foram $MSE_{RF} \approx 2,7 \times 10^{-7}$, $MAE_{RF} \approx 3,5 \times 10^{-4}$ e $R_{RF}^2 = 0,999990$. Esses resultados evidenciam que ambos os modelos conseguem capturar com alta fidelidade a relação entre as observáveis locais do qubit e o grau de não-Markovianidade associado ao canal de *Phase Damping*.

Embora as diferenças numéricas sejam pequenas, o modelo de *Random Forest* apresenta desempenho ligeiramente superior, com erros médios menores e um coeficiente de determinação marginalmente mais próximo de 1 do que o SVR. De maneira geral, os resultados indicam que a informação contida nas nove expectativas dos operadores de Pauli em três instantes de tempo é suficiente para codificar, de forma robusta, o comportamento não-Markoviano do canal, é observado que as observáveis dos eixos y e z não possuem interação, pois no estado de máximo emaranhamento temos que essas observáveis são nulas. Logo, somente as observáveis do eixo x que são levadas em consideração, e que modelos clássicos de regressão, tanto baseados em métodos de núcleo quanto em comitês de árvores, são capazes de explorar eficientemente essa informação.

4.4 Resultados do Modelo de Aprendizado de Máquina Quântico

Para nossos estudos, utilizamos a arquitetura de VQC proposta por (DINANI et al., 2023) para o canal de *Phase Damping* (PD). Nela, simulamos interações entre o qubit do sistema e o ambiente, representado por dois qubits ancilares. A seguir, apresentamos a estrutura empregada.

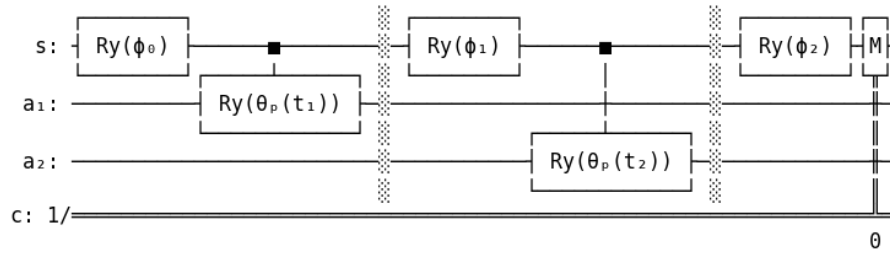


Figura 8 – Circuito quântico variacional para o canal de *Phase Damping*, com qubits rotulados como s , a_1 e a_2 , incluindo medição final em σ_z .

A estrutura do circuito consiste na inicialização do qubit do sistema no estado $|0\rangle$, seguida por uma rotação $R_y(\phi_0)$. Em sequência, o sistema interage com os dois ambientes, representados pelos qubits ancilares a_1 e a_2 . Cada ancila recebe uma rotação $R_y(\theta_p(t))$ em seus respectivos tempos, e são aplicadas as rotações $R_y(\phi_1)$ e $R_y(\phi_2)$ entre as interações. Por fim, mede-se o sistema no observável σ_z , e o valor da medida é combinado linearmente para estimar $\mathcal{N}$. Dessa forma, o circuito simula a dinâmica não-Markoviana do sistema e extrai a assinatura de memória do ambiente a partir da medida do sistema.

$$\check{\mathcal{N}} = w_0 + w_1 \langle \sigma_z \rangle. \quad (4.6)$$

No estudo, consideramos ϕ_i ($i = 0, 1, 2$), t_j ($j = 1, 2$), w_0 e w_1 como parâmetros de treino. Para determinar os valores ótimos desses parâmetros, minimizamos a função de custo apresentada anteriormente.

Na simulação, utilizamos valores de $\alpha\tau$ variando de 0.1 a 0.75, com $\alpha = 1$, a fim de estudar a predição do circuito tanto no regime markoviano quanto no não-Markoviano. Escolhemos janelas temporais suficientemente longas para capturar todas as contribuições da não-Markovianidade.

Para ilustrar, apresentamos abaixo o comportamento de $\mathcal{N}$ em função de τ para o canal PD.

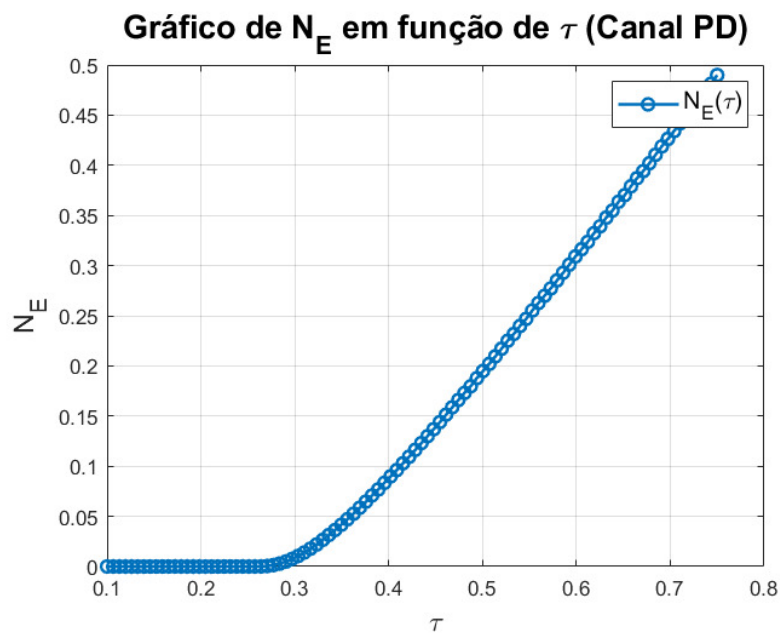


Figura 9 – Comportamento de N_E em função de τ (canal PD).

Observa-se que, ao aumentarmos τ , há crescimento de $\mathcal{N}$ no sistema. Para o treino do VQC, utilizamos 70% do conjunto total de dados, amostrados aleatoriamente. A seguir, apresentamos a predição do modelo.

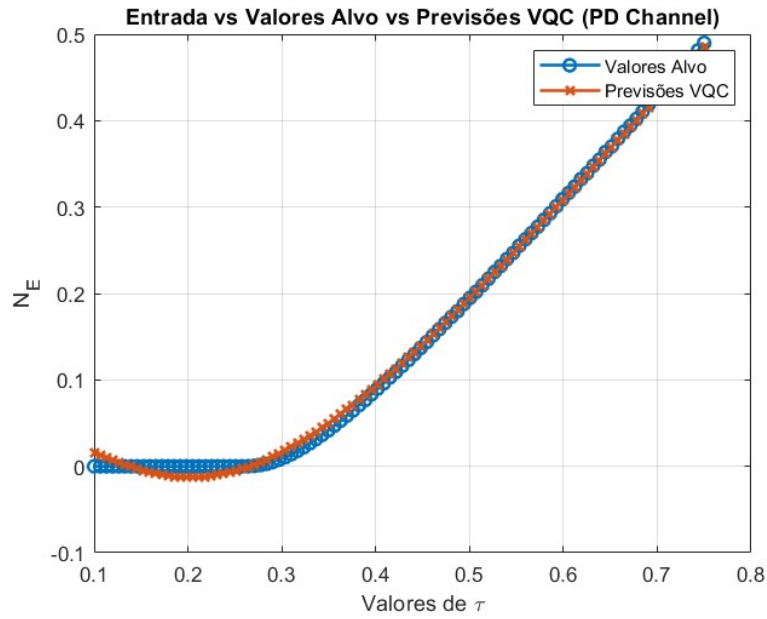


Figura 10 – Predição do VQC para N_E em função de τ (canal PD).

Para o canal PD, obtivemos *mean squared error* (MSE) igual a $3,6712 \times 10^{-5}$. Os resultados indicam alta fidelidade na predição da não-Markovianidade a partir da medida de σ_z . Contudo, para $\mathcal{N} = 0$, especificamente no regime markoviano, não observamos correspondência exata, o que sugere que apenas uma única interação com o ambiente não é suficiente para prever com precisão a não-Markovianidade no canal PD (DINANI et al., 2023). Ainda assim, o método valida as previsões teóricas discutidas ao longo do trabalho e estabelece uma base sólida para o desenho e a implementação de circuitos quânticos variacionais em tarefas de estimação de não-Markovianidade.

5 Conclusão

Este trabalho investigou a não-Markovianidade em sistemas quânticos abertos sob o canal de *Phase Damping* (PD), integrando formalismo de Kraus, quantificação via dinâmica do emaranhamento (RHP, concorrência) e métodos de aprendizado de máquina clássicos e quânticos. As simulações confirmaram o comportamento esperado do PD, populações preservadas e coerências atenuadas, com pureza tendendo a $1/2$ para estados inicialmente maximamente coerentes, e mostraram crescimento do grau de não-Markovianidade com o parâmetro de correlação temporal τ .

Metodologicamente, estabelecemos uma *pipeline* que (i) gera dados simulados via PD na forma de soma de operadores de Kraus, (ii) rotula a não-Markovianidade a partir do emaranhamento (concorrência) iniciado em estados de Bell e (iii) constrói um vetor de atributos compacto com observáveis locais (componentes de Bloch) em três instantes de tempo específicos. Essa estratégia privilegia medições factíveis, reduz custo de aquisição e mantém interpretabilidade física.

Com esse *dataset*, modelos clássicos de regressão (*Support Vector Regressor* e *Random Forest*) previram o grau de não-Markovianidade com alta fidelidade, indicando que poucas medições locais em tempos adequados carregam a assinatura de memória do processo; a *Random Forest* apresentou leve vantagem. No eixo quântico, um circuito variacional (VQC) para o canal PD, com dois qubits ancilares e leitura em σ_z , estimou $\mathcal{N}$ com erro muito baixo na maior parte do intervalo analisado, embora perca sensibilidade no regime estritamente markoviano ($\mathcal{N} = 0$), sugerindo múltiplas interações e leituras adicionais.

As principais contribuições são: (i) cadeia completa de análise para PD, do formalismo de Kraus à quantificação via emaranhamento; (ii) demonstração de que um conjunto enxuto de observáveis locais em tempos finitos permite prever $\mathcal{N}$ com alta acurácia; e (iii) validação de um estimador quântico variacional simples para essa tarefa.

Em síntese, a integração entre formalismo físico (Kraus + RHP) e técnicas de ML/QML mostrou-se uma rota eficiente e escalável para caracterizar e prever a não-Markovianidade em sistemas quânticos abertos. Ao evidenciar que poucas medições locais bastam para estimar o grau de memória, o trabalho oferece um caminho prático para diagnóstico e controle em plataformas quânticas reais e abre perspectivas para metrologia, mitigação de erros e engenharia de ambientes onde a não-Markovianidade é um recurso importante.

Referências

- BENEDETTI, M.; LLOYD, E.; SACK, S.; FIORENTINI, M. Parameterized quantum circuits as machine learning models. *Quantum science and technology*, IOP Publishing, v. 4, n. 4, p. 043001, 2019.
- BREUER, H.-P. Foundations and measures of quantum non-markovianity. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 45, p. 154001, 2012.
- BREUER, H.-P.; LAINE, E.-M.; PIILO, J.; VACCHINI, B. Colloquium: Non-markovian dynamics in open quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 88, n. 2, p. 021002, 2016.
- BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. et al. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2002.
- BURKOV, A. *The hundred-page machine learning book*. [S.l.]: Andriy Burkov Quebec City, QC, Canada, 2019. v. 1.
- BYLICKA, B.; CHRUSCINSKI, D.; MANISCALCO, S. Non-markovianity and reservoir memory of quantum channels: a quantum information theory perspective. *Scientific reports*, Springer, v. 4, n. 1, p. 1–7, 2014.
- CARLEO, G.; CIRAC, I.; CRANMER, K.; DAUDET, L.; SCHULD, M.; TISHBY, N.; VOGT-MARANTO, L.; ZDEBOROVÁ, L. Machine learning and the physical sciences. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 91, n. 4, p. 045002, 2019.
- CHIN, A. W.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Quantum metrology in non-markovian environments. *Physical review letters*, APS, v. 109, n. 23, p. 233601, 2012.
- DAFFER, S.; WÓDKIEWICZ, K.; CRESSER, J. D.; MCIVER, J. K. Depolarizing channel as a completely positive map with memory. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 70, p. 010304(R), 2004.
- DINANI, H. T.; TANCARA, D.; FANCHINI, F. F.; NORAMBUENA, A.; COTO, R. Estimating the degree of non-markovianity using variational quantum circuits. *Quantum Machine Intelligence*, Springer, v. 5, n. 2, p. 29, 2023.
- DIRAC, P. A. M. A new notation for quantum mechanics. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. [S.l.], 1939. v. 35, n. 3, p. 416–418.
- FANCHINI, F. F.; KARPAT, G.; CASTELANO, L. K.; ROSSATTO, D. Z. Probing the degree of non-markovianity for independent and common environments. *Physical Review A*, APS, v. 88, n. 1, p. 012105, 2013.
- FANCHINI, F. F.; KARPAT, G.; ROSSATTO, D. Z.; NORAMBUENA, A.; COTO, R. Estimating the degree of non-markovianity using machine learning. *Physical Review A*, American Physical Society, United States, v. 103, n. 2, p. 022425, February 2021. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.103.022425>>.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics, Vol. III: Quantum Mechanics*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1965.

IZBICKI, R.; SANTOS, T. M. dos. *Aprendizado de máquina: uma abordagem estatística*. [S.l.]: Rafael Izbicki, 2020.

JORDAN, M. I.; MITCHELL, T. M. Machine learning: Trends, perspectives, and prospects. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 349, n. 6245, p. 255–260, 2015.

LAINE, E.-M.; BREUER, H.-P.; PIILO, J. Nonlocal memory effects allow perfect teleportation with mixed states. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 4, p. 4620, 2014.

LI, L.; HALL, M. J.; WISEMAN, H. M. Concepts of quantum non-markovianity: A hierarchy. *Physics Reports*, Elsevier, v. 759, p. 1–51, 2018.

NETO, A. C.; KARPAT, G.; FANCHINI, F. F. Inequivalence of correlation-based measures of non-markovianity. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 94, p. 032105, 2016.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.

PEDREGOSA, F.; VAROQUAUX, G.; GRAMFORT, A.; MICHEL, V.; THIRION, B.; GRISEL, O.; BLONDEL, M.; PRETTENHOFER, P.; WEISS, R.; DUBOURG, V. et al. Scikit-learn: Machine learning in python. *the Journal of machine Learning research*, JMLR. org, v. 12, p. 2825–2830, 2011.

PRESKILL, J. Quantum computing in the nisq era and beyond. *Quantum*, Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, v. 2, p. 79, 2018.

RIVAS, Á.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Entanglement and non-Markovianity of quantum evolutions. *Physical Review Letters*, v. 105, n. 5, p. 050403, 2010. ISSN 00319007.

SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics, (1985)*. [S.l.]: Addison-Wesley, Reading, Mass, 1995.

TORLAI, G.; MAZZOLA, G.; CARRASQUILLA, J.; TROYER, M.; MELKO, R.; CARLEO, G. Neural-network quantum state tomography. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 14, n. 5, p. 447–450, 2018.

WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 80, n. 10, p. 2245–2248, 1998.

ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of modern physics*, APS, v. 75, n. 3, p. 715, 2003.