

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

DOUGLAS BENNDORF RODRIGUES

Cosmologia Cinemática : Modelos e Testes

Guaratinguetá

2022

Douglas Benndorf Rodrigues

Cosmologia Cinemática : Modelos e Testes

Tese apresentada ao Conselho de Curso de Pós Graduação em Doutorado em Física da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Doutorado em Física .

Orientador: Profº Dr. José Fernando de Jesus,
Coorientador: Profº Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá

2022

R696c	Rodrigues, Douglas Benndorf Cosmologia cinemática: modelos e testes / Douglas Benndorf Rodrigues – Guaratinguetá, 2023. 76 f : il. Bibliografia: f. 53-64 Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2023. Orientador: Prof. Dr. José Fernando de Jesus Coorientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira 1. Cosmologia. 2. Cosmografia. 3. Matéria escura (Astronomia). 4. Cinemática. I. Título. CDU 524.82(043)
-------	--

Luciana Máximo
Bibliotecária CRB-8/3595

DOUGLAS BENNDORF RODRIGUES

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: DOUTORADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JOSE FERNANDO DE JESUS
Orientador - UNESP
participou por videoconferência


Prof. Dr. JOSÉ ADEMIR SALES DE LIMA
USP
participou por videoconferência


Prof. Dr. RODOLFO VALENTIM DA COSTA LIMA
UNESP
participou por videoconferência


Prof. Dr. LUIZ CLEBER TAVARES DE BRITO
UFPA
participou por videoconferência


Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP
participou por videoconferência

NOVEMBRO de 2022

DADOS CURRICULARES

DOUGLAS BENNDORF RODRIGUES

NASCIMENTO 06/02/1990 - Francisco Morato / SP

FILIAÇÃO Antonio Freire Rodrigues
Emma Benndorf de Oliveira

2007 Ensino Médio
E. E. Profº Rogério Levorin

2008 / 2013 Bacharelado em Física
Unesp-FEG

2014 / 2016 Mestrado em Física
Unesp-FEG

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao orientador, José Fernando de Jesus, e ao coorientador, Saulo Henrique Pereira, pelo tempo dedicado e conhecimento repassado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES) - código de financiamento 88882.433442/2019-01.

“The ways of being human are bounded but infinite.”
(Laurence van Cott Niven)

RESUMO

A Cosmologia, enquanto estudo da origem e evolução do Universo, trabalha com modelos dinâmicos onde se supõe um conteúdo energético e se compara o modelo com os dados observacionais. Atualmente, existe uma grande profusão de modelos dinâmicos na literatura, muito devido aos problemas da matéria e energia escura. Um método que se busca determinar a evolução do Universo sem supor nenhum conteúdo energético é chamado de Cosmologia Cinemática ou Cosmografia, onde se busca determinar os parâmetros cinemáticos ou mesmo a evolução desses parâmetros com o tempo. Outra possibilidade, é buscar determinar a evolução de quantidades cosmológicas sem a suposição de alguma parametrização. Nesse trabalho, propusemos análises relacionadas a essas 3 possibilidades. Primeiro, foi proposto e analisado um modelo de interação entre energia e matéria escuras visando aliviar o Problema da Coincidência. Em seguida, estudamos algumas parametrizações cinemáticas, onde conseguimos determinar alguns dos parâmetros cinemáticos. Finalmente, propusemos e analisamos um método de reconstrução não-paramétrica de um modelo dinâmico, onde a energia escura se comporta como um campo escalar.

PALAVRAS-CHAVE: cosmologia. cosmografia. cinemática. gaussianos. matéria escura. energia escura.

ABSTRACT

Cosmology, as a study of the origin and evolution of the Universe, works with dynamic models where an energy content is assumed and the model is compared with observational data. Currently, there is a great profusion of dynamic models in the literature, largely due to the problems of dark matter and dark energy. A method that seeks to determine the evolution of the Universe without assuming any energy content is called Kinematic Cosmology or Cosmography, which seeks to determine the kinematic parameters or even the evolution of these parameters with time. Another possibility is to seek to determine the evolution of cosmological quantities without the assumption of some parameterization. In this work, we proposed analyzes related to these 3 possibilities. First, a model of interaction between dark energy and dark matter was proposed and analyzed in order to alleviate the Coincidence Problem. Then, we studied some kinematic parameterizations, where we were able to determine some of the kinematic parameters. Finally, we proposed and analyzed a non-parametric reconstruction method of a dynamic model, where dark energy behaves like a scalar field.

KEYWORDS: cosmology. cosmography. kinematics. Gaussians. dark matter. dark energy.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	RESUMO DE COSMOLOGIA	18
2.1	Princípio Cosmológico	18
2.2	Lei de Hubble–Lemaître	18
2.3	Equações de Friedmann	19
2.4	Parâmetros de Expansão	19
2.5	Geometria do Universo	20
2.6	Soluções das Equações de Friedmann	21
2.7	Distâncias e Tempos Cosmológicos	22
2.7.1	Distância Comóvel	22
2.7.2	Distância Comóvel Transversal	22
2.7.3	Distância Própria	22
2.7.4	Distância de Luminosidade	22
2.7.5	Distância de Diâmetro Angular	23
2.7.6	<i>Lookback Time</i> e a Distância de Viagem da Luz	23
2.7.7	Tempo Conforme	23
3	EXEMPLO DE MODELO DINÂMICO: MODELO DE INTERAÇÃO DM-DE	24
3.1	Considerações Iniciais	24
3.2	Modelo de de Interação	26
3.3	Dados e Análise	28
4	COSMOLOGIA CINEMÁTICA	33
4.1	Expansões em série de observáveis cosmológicos	33
4.2	Determinação dos Parâmetros Cinemáticos a partir de SNs Ia e Cronômetros Cósmicos	36
4.2.1	Equações para parâmetros cinemáticos	36
4.2.2	Parametrizações Cinemáticas	38
4.2.2.1	Parametrização $q(z) = q_0 + q_1 z$	39
4.2.2.2	Parametrização $q(z) = q_0 + \frac{q_a z}{1+z}$	39
4.2.2.3	Parametrização $j(z) = j_0$	40
4.2.2.4	Outras parametrizações e parâmetros derivados	41
4.2.3	Análises e Resultados	42
4.2.3.1	Análises	42
4.2.3.2	Resultados	43
5	CONCLUSÃO	53

REFERÊNCIAS 54

**APÊNDICE A – RECONSTRUÇÕES NÃO-PARAMÉTRICAS – PROCES-
SOS GAUSSIANOS 66**

A.1 Reconstrução do Potencial de Energia Escura via Processos Gaussianos 67

A.2 Dinâmica Cosmológica 69

A.3 Conjunto de dados e metodologia 71

A.4 Resultados 72

A.5 Conclusão 77

1 INTRODUÇÃO

A Cosmologia é o estudo da origem e evolução do Universo. Entre as 4 forças fundamentais, dado que o Universo é eletricamente neutro, a única força que possui alcance cosmológico é a força de gravidade. Assim, a Cosmologia depende de uma teoria de gravitação.

A Cosmologia Moderna começa com a Relatividade Geral (RG) de Einstein (EINSTEIN, 1915; EINSTEIN, 1916), onde ele relaciona matéria e espaço-tempo. Enquanto a RG é uma teoria sem parâmetros livres, Einstein à sua época encontrou dificuldades em adequar sua teoria ao Universo observado – estático, homogêneo e isotrópico¹. Assim, Einstein adicionou um parâmetro livre às suas equações (EFE, *Einstein Field Equations*) (EINSTEIN, 1917), a constante cosmológica (Λ).

Pouco depois, com as observações de Hubble e outros (HUBBLE, 1929), Einstein percebeu que teria cometido “o maior erro da sua vida”², pois a expansão do Universo observada estava de acordo com as EFE sem parâmetros livres, conforme demonstrado nos modelos de Friedmann (FRIEDMANN, 1922; FRIEDMANN, 1924).

Mas mesmo errando, Einstein acerta e, décadas depois, em 1998 (RIESS et al., 1998; PERLMUTTER et al., 1999), observações da luminosidade de Supernovas Ia (SNs Ia) levaram os astrônomos a ressuscitar a constante cosmológica e assim se consolidou o modelo que é até hoje considerado o modelo cosmológico padrão, Λ CDM (FELTEN; ISAACMAN, 1986; CARROLL; PRESS; TURNER, 1992).

Nesse ínterim, muito aconteceu na Cosmologia. Na década de 1930, observações de aglomerados de galáxias feitas por Zwicky (ZWICKY, 1933; ZWICKY, 1937), levaram à conclusão de que alguma matéria de pressão desprezível, além dos bárions³, era necessária para explicar a rotação de aglomerados. Essa matéria foi chamada de matéria escura, por não interagir ou interagir muito fracamente com a radiação eletromagnética. Com o tempo, percebeu-se que essa matéria também precisaria ser *fria* (CDM, *Cold Dark Matter*), no sentido de ser não-relativística, pra dar conta da formação de estruturas observada.

Na década de 1940, formulou-se o modelo de formação primordial dos elementos químicos, nos trabalhos de Alpher, Gamow e outros (ALPHER; BETHE; GAMOW, 1948). Esse modelo consistia em explicar a formação de elementos anterior às primeiras estrelas (a nucleossíntese primordial), pois, dado que o Universo estava em expansão, isso significava que o Universo possuiu, no início, uma densidade muito alta, o que corresponde a uma temperatura muito alta também. Essas altas densidades e temperaturas levaram à formação de elementos leves, principalmente hélio, deutério, mas também traços de lítio, berílio etc. Essa ideia de um passado denso e quente para o Universo, contribuiu com a formulação da teoria do *Hot Big Bang Model*.

Apenas na década de 1960, obteve-se uma comprovação da teoria de Gamow, com as observações de Penzias e Wilson da radiação cósmica de fundo (PENZIAS; WILSON, 1965), um banho térmico de

¹ Essas duas últimas hipóteses se referem ao Princípio Cosmológico.

² cf. citado em (Gamow, 1970), p. 44.

³ Chamamos de bárions a matéria ordinária, formada pelos átomos que conhecemos. Mais precisamente, os bárions são os prótons e nêutrons, dado que os elétrons possuem massa desprezível.

fótons a 2,7 K, lembranças de um passado quente e denso. Essa descoberta casual rendeu o primeiro Nobel na área de Cosmologia a Penzias e Wilson.

Essa radiação seria desprezível na nossa época, sendo importante principalmente nos primórdios do Universo. Assim, de acordo com o modelo padrão dessa época, viveríamos numa era da matéria, onde a matéria sem pressão (bárions+CDM) seria a componente predominante do Universo e a densidade de matéria resultaria numa curvatura espacial aberta (baixa densidade), plana (densidade média) ou fechada (alta densidade). Lembremos que de acordo com a RG, matéria e espaço-tempo interagem. Mais detalhes na próxima seção.

Quando esse modelo CDM chega na década de 1980, alguns problemas começam a ser notados: mesmo com a imprecisão das observações da época, já se percebia que o Universo precisaria ser bastante plano (espacialmente) no passado (problema da planura); pontos distantes do Universo não poderiam estar em equilíbrio térmico, dado que não tiveram tempo de estar em contato causal (problema do horizonte); o Universo era muito homogêneo (problema da homogeneidade). Além disso, as Teorias de Grande Unificação (GUTs, *Grand Unified Theories*) já tinham se desenvolvido bastante a essa época e elas previam a existência de monopolos magnéticos que não eram observados. Pois foi justamente um estudioso das GUTs, Alan Guth, quem demonstrou que um campo escalar primordial (anterior à nucleossíntese primordial), descendo lentamente seu potencial poderia levar a uma grande e acelerada expansão que poderia resolver esses problemas (Inflação Cosmológica) (GUTH, 1987).

É interessante notar que esse campo escalar da inflação levava a um comportamento semelhante ao da constante cosmológica, ou seja, a uma expansão acelerada do Universo.

Como a teoria da inflação em geral levava a universo plano, o modelo favorito na década de 1980 era então o modelo Einstein-deSitter (EdS), onde o Universo era formado principalmente por matéria sem pressão com densidade igual à densidade crítica (a densidade correspondente a um universo espacialmente plano).

Porém, mesmo resolvendo tantos problemas, esse modelo (EdS+inflação) enfrentava alguns problemas com a idade de alguns aglomerados observados, com idades estimadas maiores que a idade do universo no EdS (CHABOYER, 1998). Esse era o chamado problema da idade, que levou alguns cientistas a considerarem novamente a constante cosmológica, dado que ela aumenta a idade do universo.

Mas a constante cosmológica só começou a ser confirmada mesmo observacionalmente a partir das observações de SNs Ia em 1998 mencionadas acima. Desde então, o modelo Λ CDM tem sido confirmado em várias outras observações, como anisotropias da radiação cósmica de fundo (RCF) (HINSHAW et al., 2013; AGHANIM et al., 2020), oscilações acústicas dos bárions (BAO, *Baryon Acoustic Oscillations*) (EISENSTEIN et al., 2005) etc.

Porém, a natureza de Λ permaneceu um mistério. Será apenas uma constante da natureza a ser ajustada pelas observações? Será uma nova componente?

A possibilidade de ser uma nova componente, deixando a RG sem parâmetros livres, é o que mais tem atraído os cientistas. Dessa forma, Λ seria apenas mais uma componente que deveria ter sua densidade adicionada no tensor de energia-momento, no lado direito das EFE, como já tinham sido adicionadas outras componentes (bárions, CDM, fótons, neutrinos).

Mas isso traz um problema, pois, se Λ é uma componente energética, ela repele, ao contrário das outras componentes conhecidas. Na RG, é possível que uma componente leve a essa repulsão gravitacional se sua pressão for negativa. Além disso, entendendo Λ como uma componente, a equação de estado de Λ deve ser $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$, o que corresponde à mesma equação de estado do vácuo quântico. Ainda não é conhecida uma teoria de gravitação quântica, mas as estimativas atuais do vácuo quântico levam a $\rho_{vac} \gtrsim 10^{45} \rho_\Lambda$ (MARTIN, 2012). Toda essa densidade ρ_{vac} do vácuo quântico não é observada, então poderíamos pensar que há algum mecanismo desconhecido que cancela parte de ρ_{vac} com ρ_Λ . Porém, é difícil imaginar tal mecanismo se o cancelamento precisa ser de $10^{45} - 1$ partes em 10^{45} . Esse necessário “ajuste fino” é o chamado Problema da Constante Cosmológica (PCC) (WEINBERG, 1989).

Outro problema de Λ CDM é o Problema da Coincidência (PC) (WEINBERG, 2000). As densidades de matéria e de Λ são da mesma ordem de grandeza hoje, com $\rho_{\Lambda 0} \gtrsim \rho_{m0}^4$. Dadas as equações de estado da matéria e de Λ , teríamos $\rho_m \sim 10^9 \rho_\Lambda$ na última superfície de espalhamento⁵, o que ocorreu há mais de 13 bilhões de anos. Assim, parece ser uma grande coincidência que apenas recentemente tivemos $\rho_\Lambda \approx \rho_m$.

Mais recentemente, foi observada e tem sido elevada a chamada tensão da constante de Hubble H_0 , a taxa de expansão do Universo atual (FREEDMANN, 2017; VALENTINO et al., 2021). Basicamente, observações de altos *redshifts* (grandes distâncias, bem no passado) indicam, com base no modelo Λ CDM, uma taxa de expansão atual mais baixa, enquanto observações de baixos *redshifts* (pequenas distâncias, Universo recente) levam a uma taxa de expansão atual mais alta.

Esses problemas levam à formulação de modelos alternativos a Λ CDM. Podemos dividir essas alternativas da seguinte forma:

- Se mantivermos as EFE e o Princípio Cosmológico, é preciso supor a existência de uma Energia Escura, um fluido homogêneo de pressão negativa, que corresponde ao próprio modelo Λ CDM, modelo XCDM, campo escalar (ϕ CDM), interação entre matéria e energia escura, criação de matéria etc (COPELAND; SAMI; TSUJIKAWA, 2006; LI et al., 2011; NOVOSYADLYJ et al., 2013; JESUS; PEREIRA, 2014; LIMA; JESUS; OLIVEIRA, 2010; JESUS; ANDRADE-OLIVEIRA, 2016; BARANOV; JESUS; LIMA, 2019; JESUS; VALENTIM; ANDRADE-OLIVEIRA, 2017a).
- Se mantivermos apenas as EFE, uma métrica inomogênea poderia explicar as atuais observações e o Universo não estaria passando por uma expansão acelerada, mas sim estaríamos em algum tipo de “Vazio Local” (CELERIER; BOLEJKO; KRASINSKI, 2010; CÉLÉRIER, 2014). Modelos anisotrópicos seriam fortemente limitados pela pequena anisotropia da RCF, da ordem de 1 parte em 10^5 .
- Se mantivermos apenas o Princípio Cosmológico, isso levaria a uma modificação das EFE, ou seja, a uma nova teoria de gravitação, ou gravidade modificada, são os modelos $f(R)$, teorias

⁴ Usamos o subscrito ‘0’ para denotar valores das quantidades hoje.

⁵ Época que o Universo ficou transparente, formando átomos neutros.

escalar-tensoriais etc. (NOJIRI; ODINTSOV, 2006; NOJIRI; ODINTSOV, 2011; CLIFTON et al., 2012).

Citamos, até agora, principalmente a dinâmica do Universo, ou seja, a interação entre geometria e conteúdo energético, seja pelas EFEs ou por alguma gravidade modificada. Outro caminho que a Cosmologia pode tomar, tal qual a Mecânica, que se divide em Dinâmica e Cinemática, é a Cosmologia Cinemática, ou Cosmografia.

Do ponto de vista da Cosmologia Cinemática, estamos interessados na evolução do Universo em si, e não nas causas dinâmicas dessa evolução. Além de ser uma descrição válida do Universo, esse método pode usar as observações atuais para colocar limites sobre quantidades cinemáticas como o H_0 citado acima, sem fazer suposições sobre o conteúdo energético.

Em geral, supõe-se apenas o Princípio Cosmológico, que é comprovado por muitas observações, para estimarmos a “velocidade”, “aceleração” etc. da expansão. Se além disso, supormos que o Universo possui uma geometria pseudo-riemanniana, podemos também estimar sua curvatura espacial. Assim, a Cosmologia Cinemática não é só cinemática, no sentido de descrever a evolução temporal, mas também é uma Cosmografia, no sentido de descrever a geometria espacial⁶.

As parametrizações cinemáticas têm como objetivo obter a evolução do Universo a partir de parametrizações com o *redshift* das quantidades cinemáticas discutidas acima. Elas podem ser simplesmente um truncamento das séries discutidas acima, por exemplo, $q(z) = q_0$ (ELGARROY; MULTAMAKI, 2006), $q(z) = q_0 + q_1 z$ (RIESS et al., 2004; ELGARROY; MULTAMAKI, 2006; SHAPIRO; TURNER, 2006a), $q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2$ etc., ou podem corresponder a funções mais complexas do *redshift*, como $q(z) = \frac{1}{2} + \frac{q_1 z + q_2}{(1+z)^2}$ (GONG; WANG, 2007), $q(z) = q_0 + \frac{q_1 z}{1+z}$ (CUNHA; LIMA, 2008; XU; LU, 2009; SANTOS; CARVALHO; ALCANIZ, 2011), $q(z) = a + \frac{b}{1+\ln(1+z)}$ (XU et al., 2008), $q(z) = \frac{1}{2} + \frac{q_2}{(1+z)^2}$ (NAIR; JHINGAN; JAIN, 2012), $q(z) = -1 + \frac{3}{2} \left[\frac{(1+z)^{q_2}}{q_1 + (1+z)^{q_2}} \right]$ etc.

Devido à questão da aceleração do Universo e devido ao parâmetro de desaceleração q não ser diretamente observável, as parametrizações de $q(z)$ são as mais comuns. Mas também há parametrizações das outras quantidades cinemáticas, como $D_C(z) = z + d_2 z^2 + d_3 z^3$, $H(z) = H_0(1 + h_1 z + h_2 z^2)$ (JESUS; HOLANDA; PEREIRA, 2018), $D_L(z) = \ln(10) [x + a_2 x^2 + a_3 x^3]$, onde $x = \log(1 + z)$ (RISALITI; LUSSO, 2019).

As parametrizações cinemáticas são modelos, e como tal, podem introduzir *bias* nas análises estatísticas. Mas ainda são *cinemáticas*, no sentido de não dependerem do conteúdo energético, não dependem da validade das EFE. Podem ser chamadas, assim, independentes de modelos dinâmicos.

Uma forma de realizar a modelagem cosmográfica é parametrizar o parâmetro de desaceleração, o *jerk* e o *snap* (q , j e s , respectivamente), ou até ordens superiores se assim se desejar (*crackle*, *pop* etc). A partir desta parametrização podemos obter outros parâmetros. Um estudo para o desvio do *redshift* em termos dos valores atuais do parâmetro de Hubble, do parâmetro de desaceleração, do *jerk*, do *snap* e de outros parâmetros, foi feito em (LOBO; MIMOSO; VISSER, 2020) e uma análise conjunta usando BAO, dados do Hubble e a compilação Pantheon de Supernovas tipo Ia para uma parametrização com um parâmetro *jerk* constante foi feita por (AMIRHASHCHI; AMIRHASHCHI, 2020) obtendo $j_0 = 1.038^{+0.061}_{-0.023}$. Em (GÓMEZ-VALENT, 2019) foram realizadas duas expansões

⁶ Uma descrição mais completa buscaria limitar a Topologia do Universo, o que está fora do escopo da presente tese.

diferentes para q em função do redshift, fornecendo as restrições $q_0 = -0.43^{+0.04}_{-0.07}$ e $j_0 = 1.5^{+1.0}_{-0.7}$ para uma expansão polinomial. Uma reconstrução explícita do parâmetro jerk de forma não paramétrica a partir de dados observacionais independentes do modelo foi feita recentemente por (MUKHERJEE; BANERJEE, 2021a).

A parametrização pode ser feita de várias formas, desde a dependência linear mais básica do redshift, até as mais elaboradas, como expansões de Padé (AVILES et al., 2014), polinômios de Chebyshev (CAPOZZIELLO; D'AGOSTINO; LUONGO, 2018) e polinômios logarítmicos (BARGIACCHI et al., 2021). Parametrizações alternativas são necessárias devido à não convergência da série de Taylor para redshift $z \geq 1$, o que significa que mesmo o truncamento da expansão implica uma modelagem ruim para redshifts maiores. Uma das maneiras mais simples de contornar este problema é redefinir a relação padrão de redshift $1 + z \equiv \lambda_0/\lambda_e$ como $1 + y = \lambda_e/\lambda_0$, de modo que agora temos um novo parâmetro y -redshift (CATTOËN; VISSER, 2007). A vantagem de usar y -redshift é que seu intervalo de convergência $[0, 1]$ corresponde a todo o período desde a origem do universo até o momento presente, enquanto diverge apenas para $y \rightarrow -1$, correspondendo a o futuro distante (o inverso ocorre com o z -redshift). No entanto, como os dados observacionais estão todos no passado, o y -redshift é ideal para lidar com isso.

O y -redshift pode ser obtido de z -redshift através da relação

$$y = \frac{z}{1+z} \quad (1.1)$$

o que significa que todos os dados observacionais já coletados para z -redshift podem ser usados diretamente em análises envolvendo y -redshift. Como

$$y = 1 - \frac{1}{1+z} = 1 - a(z), \quad (1.2)$$

podemos entender as expansões em série de Maclaurin em y como expansões em série do tipo Taylor no fator de escala em torno de $a = 1$ (hoje).

Embora, em termos de convergência para $z > 1$, y -redshift tenha um desempenho melhor que z -redshift, z -redshift ainda é melhor para $z < 1$. Isso ocorre porque y -redshift implica maiores incertezas, como mostrado por (COLGAIN, 2021) e em nossos resultados na Tabela 4.7. O fator $1 - a$ é um parâmetro menor que z -redshift no mesmo intervalo de redshift, portanto, são necessários mais dados para restringir os parâmetros da mesma maneira. Ou seja, a escolha de y -redshift ou z -redshift é uma troca com prós e contras.

Neste paper (BENNDORF; JESUS; PEREIRA, 2022), obtemos e comparamos os atuais valores para os parâmetros cosmológicos q_0 , j_0 e s_0 através das parametrizações lineares de q , j e s em função de z ou y , nas formas gerais $u(x) = u_0$ e $u(x) = u_0 + u_1x$, onde $u = (q, j, s)$ e $x = (z, y)$. Escolhemos oito parametrizações diferentes, que diferem de outros trabalhos no sentido de que cobrem a mais grandezas cinemáticas, ou seja, derivadas em 2ª, 3ª e 4ª ordens, e também cobrem as parametrizações mais populares na literatura, ou seja, constante e linear no redshift z e no y -redshift. Adicionalmente, para fazer uma comparação de modelos entre todas as parametrizações, calculamos o Critério de Informação Bayesiano (BIC), que permite escolher os três modelos mais favorecidos. Além disso,

trabalhamos com os dados SN Ia e $H(z)$ mais recentes disponíveis.

Nesta tese, inicio com um resumo teórico da cosmologia, introduzindo os principais conceitos a serem usados ou subentendidos ao longo do desenvolvimento do texto. Apresento um modelo dinâmico original que desenvolvemos (o modelo de interação DM-DE, onde conjecturamos que matéria e energia escuras decaem uma na outra de acordo com uma relação específica entre suas densidades. Por fim, apresento uma série de modelagens cinemáticas do universo observável (em termos do parâmetro de desaceleração, do *jerk* e do *snap*).

2 RESUMO DE COSMOLOGIA

2.1 PRINCÍPIO COSMOLÓGICO

A cosmologia moderna parte do chamado “Princípio Cosmológico”, que, de acordo com (WEINBERG, 1972), estabelece que

- As leis da física são as mesmas em qualquer lugar e época.
- O universo é isotrópico e homogêneo em largas escalas.

Isotrópico significa que não há direções privilegiadas (como a presença de algum campo vetorial universal) e homogêneo significa que em largas escalas a distribuição de matéria/energia é a mesma em cada ponto. A forma geral da métrica, em coordenadas esféricas, de um universo isotrópico, homogêneo e em expansão/contração, como visto em (MISNER K.S. THORNE, 1973), é dada por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

ela é chamada de métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, $a(t)$ é o fator de escala de Robertson-Walker e k é a constante de curvatura. Essa equação descreve como a definição de distância espacial evolui com o tempo em um universo em expansão e também sua forma (JESUS, 2010). Para $k = -1$ o universo tem geometria hiperbólica (“aberta”), para $k = 1$ o universo tem geometria esférica (“fechada”) e para $k = 0$ o universo tem geometria plana (os dados observacionais indicam que essa é a forma do universo). Tanto no caso hiperbólico quanto no plano, o universo é infinito, já no caso esférico ele é finito.

2.2 LEI DE HUBBLE–LEMAÎTRE

Dado que o universo está em expansão (fato empírico verificado por Lemaître em 1927 e por Hubble em 1929), a velocidade de afastamento das galáxias é dada por

$$v = Hd, \quad (2.2)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble e $L = d_0 a$ é a distância própria da galáxia (a distância física, medida por uma régua que não se expande junto com o universo), com d_0 sendo a distância comóvel (a distância puramente geométrica, medida por uma régua que se expande junto com o universo). Quando H assume o valor atual (H_0), a equação (2.2) é chamada de Lei de Hubble–Lemaître¹. Por convenção, assumimos que o fator de escala atual ($t = t_0$) é $a_0 = 1$, de modo que

$$d(t_0) = a_0 d_0 = d_0, \quad (2.3)$$

¹ A mudança de nome foi aprovada pela IAU em 2018.

ou seja, a distância comóvel, da forma definida, pode ser também interpretada como a distância medida na atual época do universo, deste modo não seria só uma distância puramente geométrica. Uma forma mais adequada de se definir distância comóvel seria definindo-a como sendo adimensional e convencionando o fator de escala com dimensão de comprimento ($a(t) = f(t)m$, onde m denota a dimensão de comprimento no SI, o metro), ou seja, com $a_0 = 1m$ escrevemos

$$d(t_0) = a_0 d_0 = d_0 m, \quad (2.4)$$

deste modo se evita uma definição de metro (m) que cresce com o tempo. Porém, não havendo possibilidade de confusão, adotamos aqui a convenção mais usada dada por (2.3).

2.3 EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Substituindo o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ da métrica (2.1) nas equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $R = R^\nu{}_\nu$ é o escalar de Ricci, Λ é a constante cosmológica, G é a constante gravitacional de Newton e

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

é o tensor energia-momento de um fluido ideal (P é a pressão, ρ é a densidade de energia-matéria e u_α é a quadrivelocidade), obtemos as equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (2.7)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.8)$$

2.4 PARÂMETROS DE EXPANSÃO

A atual taxa de expansão do universo é dada pela constante de Hubble

$$H_0 \equiv H(t_0), \quad (2.9)$$

seu valor empírico é

$$H_0 \sim 68 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}, \quad (2.10)$$

a partir do qual podemos obter o tempo de Hubble

$$t_H = 1/H_0, \quad (2.11)$$

que é da ordem da idade do universo ($\sim 10^{17}$ s), e, multiplicando t_H por c , o raio de Hubble (ou distância de Hubble):

$$d_H = c/H_0. \quad (2.12)$$

A grandeza

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (2.13)$$

é o parâmetro de desaceleração, que expressa o regime de aceleração do universo: se a aceleração é maior que zero, q é negativo, se menor que zero, q é positivo e zero no caso sem aceleração. O parâmetro de desaceleração também pode ser escrito em termos do parâmetro de Hubble

$$q = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1. \quad (2.14)$$

Para fins de observação, é conveniente escrever o parâmetro de Hubble em termos do *redshift* em vez do tempo. O *redshift* z é o efeito do esticamento do comprimento de onda das ondas eletromagnéticas devido à expansão do universo e é dado por

$$z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emt}} - 1, \quad (2.15)$$

onde λ_{obs} e λ_{emt} são os comprimentos de onda observado e emitido, respectivamente. Como o comprimento é função de $a(t)$, podemos escrever o *redshift* em termos do fator de escala, ou seja

$$z = \frac{\lambda_{obs}a_0}{\lambda_{obs}a_{emt}} - 1 = \frac{1}{a_{emt}} - 1, \quad (2.16)$$

onde tomamos $\lambda_{emt} = \lambda_{obs}a_{emt}$.

2.5 GEOMETRIA DO UNIVERSO

Para $k = 0$, a densidade

$$\rho_C \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.17)$$

é o valor para o qual a geometria do universo é plana e é chamada de densidade crítica. A razão entre a densidade e a densidade crítica

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_C} \quad (2.18)$$

é chamada de parâmetro de densidade. Assim, a equação de Friedmann (2.7) pode ser reescrita como

$$1 = \Omega + \Omega_k, \quad (2.19)$$

onde

$$\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{H^2a^2}, \quad (2.20)$$

é o parâmetro de densidade para a energia de curvatura. A equação (2.19) implica que para $k = 0$ devemos ter $\Omega = 1$, ou seja

$$\Omega = \Omega_b + \Omega_{DM} + \Omega_\gamma + \Omega_\Lambda + \dots + \Omega_i = 1, \quad (2.21)$$

onde b , DM , γ e Λ indicam matéria barionica, matéria escura, radiação e energia do vácuo, i indica quaisquer outros componentes.

2.6 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Como exemplos básicos de soluções das equações de Friedmann, podemos citar:

- *Universo dominado por matéria*: Como a matéria não relativística não tem tempo de interagir consigo mesma devido às grandes distâncias, em largas escalas a pressão é nula ($P = 0$), $\rho = \rho_0 a^{-3}$ e a equação fica

$$a^{\frac{1}{2}} da = H_0 \sqrt{\Omega_b + \Omega_{DM}} dt. \quad (2.22)$$

Com a condição $a(t = 0) = 0$, a solução é

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} t H_0 \sqrt{\Omega_b + \Omega_{DM}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.23)$$

- *Universo dominado por radiação*: Neste caso temos $P = c^2 \rho / 3$ e $\rho = \rho_0 a^{-4}$, a equação fica

$$a da = H_0 \sqrt{\Omega_\gamma} dt, \quad (2.24)$$

e a solução é

$$a(t) = \left(2 t H_0 \sqrt{\Omega_\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.25)$$

- *Universo dominado por energia do vácuo*: Neste caso temos $P = -c^2 \rho$ e $\rho = cte$, a equação fica

$$a^{-1} da = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} dt, \quad (2.26)$$

e a solução é

$$a(t) = A \exp \left(t H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} \right), \quad (2.27)$$

onde A é uma constante.

- *Universo dominado por energia do vácuo + matéria*: Essa corresponde à composição atual do universo, quando a densidade de matéria e de energia escura possuem a mesma ordem de grandeza (Problema da Coincidência). A equação de Friedmann fica

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 (\Omega_d a^{-3} + \Omega_\Lambda), \quad (2.28)$$

onde $\Omega_d = \Omega_b + \Omega_{DM}$. A solução é

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_d}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3H_0 t \sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} \right). \quad (2.29)$$

2.7 DISTÂNCIAS E TEMPOS COSMOLÓGICOS

2.7.1 Distância Comóvel

É a distância geométrica, medida por uma régua que se expande junto com o universo, definida pelas coordenadas espaciais da métrica, já mencionada na subseção 2.2. Ela pode ser expressa em termos do *redshift*, ou seja

$$\begin{aligned} d_C &= \int dd_C = \int_a^{a_0} \frac{da}{a\dot{a}} \\ &= - \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A distância comóvel entre dois objetos no fluxo de Hubble (que não possuem velocidade própria) não muda com o tempo.

2.7.2 Distância Comóvel Transversal

A distância comóvel entre dois pontos no céu separados por um ângulo $\delta\phi$ para um mesmo *redshift* (ou seja, mesma distância) é $d_M\delta\phi$, onde a distância comóvel transversal d_M (HOGG, 1999) é

$$d_M = \begin{cases} \frac{d_H}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\Omega_k} d_C}{d_H} \right) & \text{para } \Omega_k > 0 \\ d_C & \text{para } \Omega_k = 0 \\ \frac{d_H}{\sqrt{-\Omega_k}} \sin \left(\frac{\sqrt{-\Omega_k} d_C}{d_H} \right) & \text{para } \Omega_k < 0 \end{cases}, \quad (2.31)$$

onde $d_H = c/H_0$ é a distância de Hubble. A distância comóvel transversal difere da distância comóvel por imbuir a curvatura, mas no caso plano ($k = 0$) elas coincidem.

2.7.3 Distância Própria

É a distância física entre objetos, medida por uma régua que não se expande junto com o universo, ela cresce com o tempo de acordo com o fator de escala. Ela é escrita como

$$d_P = a(t)d_C. \quad (2.32)$$

2.7.4 Distância de Luminosidade

É a distância medida usando-se a queda do fluxo com a distância de um objeto brilhante cuja luminosidade absoluta é conhecida (as “velas padrões”). Ela é dada por (DODELSON, 2021)

$$d_L = (1 + z)d_M. \quad (2.33)$$

2.7.5 Distância de Diâmetro Angular

É a distância inferida usando tamanhos próprios (dl_P) conhecidos e seus tamanhos angulares ($d\phi$), ou seja

$$dl_P = d_A d\phi. \quad (2.34)$$

Pode-se mostrar que

$$d_A = \frac{d_M}{(1+z)}. \quad (2.35)$$

A relação

$$d_L = (1+z)^2 d_A \quad (2.36)$$

é chamada de “dualidade de distância de Etherington”.

2.7.6 Lookback Time e a Distância de Viagem da Luz

É o tempo passado desde a emissão de um fóton num tempo t_i até ser detectado num tempo t_f , ou seja, $t_L = t_f - t_i$. Tomando a métrica de Friedmann igual a zero ($ds^2 = 0$), temos (PIATTELLA, 2018)

$$dd_V \equiv cdt = a(t)dd_M. \quad (2.37)$$

A distância própria e a distância de *lookback time* são parecidas mas distintas, a diferença é que a distância própria é instantânea e a de *lookback* leva em conta a expansão do espaço durante o trajeto do fóton (a distância própria muda desde o momento da emissão até o da detecção), por isso essa distância também pode ser chamada de “distância de viagem da luz” (d_V).

2.7.7 Tempo Conforme

O tempo conforme é o tempo normalizado pela expansão do universo, definido como

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.38)$$

Assim, a métrica pode ser reescrita como

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-c^2 d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.39)$$

e o fator de escala passa a ser um fator conforme.

3 EXEMPLO DE MODELO DINÂMICO: MODELO DE INTERAÇÃO DM-DE

Neste capítulo, apresentamos um exemplo de modelo dinâmico, antes de abordarmos o tema central deste trabalho (modelos cinemáticos). O Problema da Coincidência (PC), mencionado na introdução, pode ser aliviado com a interação entre matéria e energia escura, e recentemente submetemos um trabalho (JESUS et al., 2020b) com essa intenção.

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A maioria dos modelos de interação DM-DE são descritos pelas equações de Friedmann e pelas equações de conservação:

$$\dot{\rho}_d + 3H(\rho_d + p_d) = Q, \quad (3.1)$$

$$\dot{\rho}_x + 3H(\rho_x + p_x) = -Q, \quad (3.2)$$

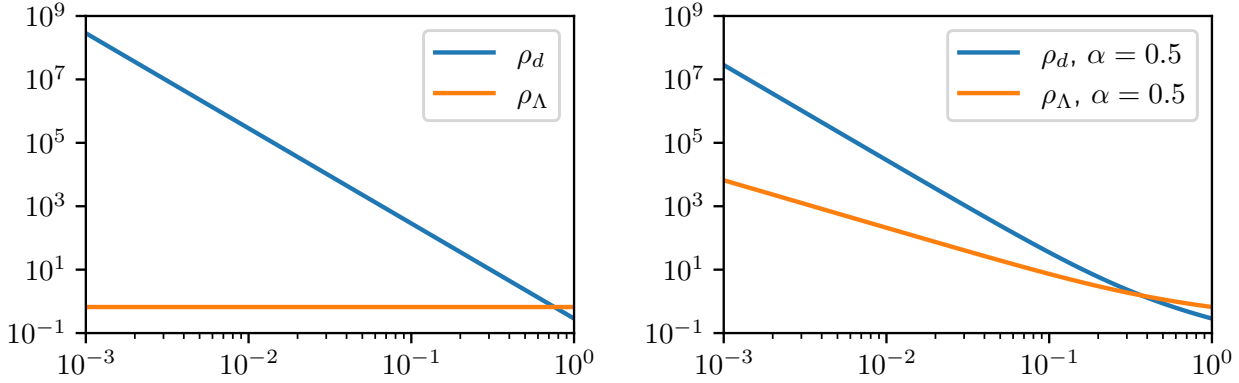
onde ρ_d e p_d são a densidade de energia e a pressão da matéria escura (DM), e ρ_x e p_x são a densidade e a pressão da energia escura (DE). Para um fluido do tipo *poeira* (DM) a pressão é $p_d = 0$ e para um fluido do tipo *vácuo* (DE) ela é $p_x = -\rho_x$, por exemplo. Q denota o termo de interação fenomenológica. Para $Q > 0$ DE decai para DM enquanto para $Q < 0$ DM decai para DE. Uma análise termodinâmica (PEREIRA; JESUS, 2009) mostrou que ambas as rotas de decaimento são possíveis.

Vários termos de interação Q foram estudados na literatura (PEREIRA; JESUS, 2009; CALDERA-CABRAL; MAARTENS; SCHAEFER, 2009; MAJEROTTO; VÄLIVIITA; MAARTENS, 2010; VÄLIVIITA; MAARTENS; MAJEROTTO, 2010; CHIMENTO, 2010; CAI; SU, 2010; SUN; YUE, 2012; POURTSIDOU; SKORDIS; COPELAND, 2013; SALVATELLI et al., 2014; LI; ZHANG, 2014; SKORDIS; POURTSIDOU; COPELAND, 2015; JIMENEZ et al., 2016; SHAFIELOO et al., 2017; GÓMEZ-VALENT; PETTORINO; AMENDOLA, 2020). A maioria deles são $Q \propto \rho_x$ ou $Q \propto \rho_d$. Modelos com $Q \propto H\rho_d$ têm sido amplamente explorados na literatura, porém é permeado por instabilidades na evolução das perturbações de densidade (VÄLIVIITA; MAJEROTTO; MAARTENS, 2008; HE; WANG; ABDALLA, 2009). Modelos com $Q \propto H\rho_x$ estão livres de tais instabilidades. Em particular, o modelo com $Q = 3\varepsilon H\rho_x$ foi estudado em (PEREIRA; JESUS, 2009) e o parâmetro ε foi restringido por dados observacionais SN Ia como $\varepsilon = -0,026^{+0,021}_{-0,027}$ a 1σ C.L. Isso mostra que um valor negativo de Q é favorecido por observações no intervalo 1σ , com o limite $\varepsilon = 0$ apenas ligeiramente distante do valor de melhor ajuste.

Seguindo uma abordagem diferente, Cai e Su (CAI; SU, 2010) descobriram que deve haver uma mudança do sinal de Q em torno de $z = 0,5$ em um modelo independente do termo de interação específico. Isso levanta um desafio notável para os modelos interativos, uma vez que as formas fenomenológicas usuais de interação não mudam seus sinais durante a evolução cosmológica. Um modelo que engloba uma característica tão peculiar é apresentado em (SUN; YUE, 2012).

Recentemente um modelo com $Q = \Gamma\rho_x$ foi apresentado por Shafieloo et al. (SHAFIELOO et al., 2017), onde Γ é uma constante com as dimensões do tempo inverso, relacionado ao decaimento da DE. Com uma equação de estado do tipo vácuo, $p_x = -\rho_x$, Eq. (3.2) tem uma solução da forma

Figura 3.1 – Evolução das densidades do setor escuro para os modelos Λ CDM (esquerda) e $\Lambda(t)$ CDM (direita). As densidades são normalizadas pela densidade crítica atual, ρ_{c0} .



fonte: Produção do próprio autor.

$\rho_x(t) = \rho_x(t_0) \exp[-\Gamma(t - t_0)]$, exatamente como um decaimento radioativo da matéria e Γ está relacionado com a 'meia-vida' da DE. Tal modelo é conhecido como uma energia escura metaestável com decaimento do tipo radioativo. Uma análise mais recente à luz dos dados do Planck 2018 foi feita em (YANG et al., 2020), e uma análise dinâmica do sistema foi feita em (SZYDŁOWSKI; STACHOWSKI; URBANOWSKI, 2020). Um modelo fechado de interação muito interessante foi explorado recentemente com dados CMB completos, que oferecem uma solução muito atraente para a tensão constante do Hubble (YANG et al., 2021; VALENTINO et al., 2021).

No presente trabalho, analisamos um modelo de interação de fluidos DM-DE no qual pretendemos testar se uma interação entre DM e DE pode resolver ou aliviar o CP. No modelo Λ CDM, a densidade da constante cosmológica tem sempre o mesmo valor, ou seja, $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0}$, enquanto a densidade de energia da matéria sem pressão satisfaz $\rho_d = \rho_{d0}(a/a_0)^{-3}$, onde o subscrito "0" representa os valores atuais. O PC diz que $\rho_{\Lambda 0} \sim \rho_{d0}$ hoje. Como a razão entre o fator de escala hoje e a última superfície de espalhamento é $a_0/a = 10^3$ ou $z \sim 1000$, temos uma razão $r = \frac{\rho_d}{\rho_\Lambda} \sim 10^9$ naquela época. Assim, uma interação entre DM-DE poderia manter a razão constante ao longo da evolução, $r \sim 1$, resolvendo o CP, pois não seria específico para o momento presente. Se a razão for tal que $r \ll 10^9$ em $z \sim 1000$ dizemos que CP é aliviado.

O modelo padrão Λ CDM é caracterizado por uma equação constante do parâmetro de estado $w = \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -1$, onde tanto ρ_Λ quanto p_Λ são constantes. As evoluções da matéria escura e das densidades de Λ podem ser vistas em escala logarítmica na Figura 3.1 (esquerda). As densidades logarítmicas neste caso são dadas por

$$\ln \rho_\Lambda = \ln \rho_{\Lambda 0}, \quad \ln \rho_d = -3 \ln a + \ln \rho_{d0}. \quad (3.3)$$

Para modelos onde a equação do parâmetro de estado também é -1, mas com ρ_Λ e p_Λ variando no tempo, a densidade de energia associada a Λ muda com o tempo, e isso define um modelo $\Lambda(t)$ CDM, com um comportamento típico para a evolução das densidades dado na Figura 3.1 (direita). Se a densidade de energia de $\Lambda(t)$ se aproxima da densidade de energia da matéria escura na Figura 3.1,

resolvemos ou pelo menos aliviamos o CP. Para isso, vamos tentar escrever

$$\ln \rho_\Lambda = k_1 \ln a + \ln \rho_{\Lambda 0}, \quad \ln \rho_d = k_2 \ln a + \ln \rho_{d0}. \quad (3.4)$$

Reorganizando, as equações nos dão:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\Lambda 0}} = \left(\frac{\rho_d}{\rho_{d0}} \right)^{k_1/k_2}, \quad (3.5)$$

o que corresponde a

$$\rho_x = \beta \rho_d^\alpha \quad (3.6)$$

para uma componente DE geral.

Assim, para testar se um modelo de interação pode resolver ou aliviar o CP, assumimos a relação (3.6) para o setor escuro. Com essa suposição, se os dados indicarem $\alpha \sim 0$, não há interação e o modelo Λ CDM é recuperado. Se $\alpha = 1$, a razão r é exatamente constante e o CP é resolvido. Para $0 < \alpha < 1$, podemos concluir que a interação DM-DE pode aliviar o CP. Na Figura 3.1 (direita), vemos como $\alpha = 0.5$ alivia o CP. Abaixo derivamos qual termo de interação Q resulta na relação (3.6).

A conjectura de que matéria escura (DM) pode decair em energia escura (DE) e vice-versa pode ser modelada fenomenologicamente através das equações (CAI; SU, 2019)

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = Q \quad (3.7)$$

e

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(1+w)\rho_{DE} = -Q, \quad (3.8)$$

onde ρ_{DM} é a densidade de matéria escura, ρ_{DE} é a densidade de energia escura, w é o parâmetro da equação de estado para a energia escura ($p_{DE} = w\rho_{DE}$) e Q é o termo que descreve a interação entre as duas densidades. A exata interação física que intermediaria essas duas densidades depende do que são exatamente DM e DE e poderia ser desde interações conhecidas até alguma nova interação, o que fica a cabo de futuros avanços no entendimento da natureza desses fluidos cósmicos e da física de partículas elementares.

3.2 MODELO DE DE INTERAÇÃO

A forma escolhida para o termo de interação é

$$Q = \Gamma(t)\rho_{DE}, \quad (3.9)$$

onde $\Gamma(t)$ é uma função que representa o decaimento ao longo do tempo das densidades de DM e DE. A relação entre elas é determinada por

$$\rho_{DE} = \beta \rho_{DM}^\alpha \equiv f(\rho_{DM}), \quad (3.10)$$

onde α e β são constantes. Das equações (3.8), (3.9) e (3.10), obtemos

$$\Gamma(t) = -3H(1+w) - \alpha \frac{\dot{\rho}_{DM}}{\rho_{DM}}, \quad (3.11)$$

e de (3.7)

$$\frac{\dot{\rho}_{DM}}{\rho_{DM}} \left[\frac{1 + \alpha\beta\rho_{DM}^{\alpha-1}}{1 + \beta(1+w)\rho_{DM}^{\alpha-1}} \right] = -3H = -3\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.12)$$

Para $w = -1$ (constante cosmológica) uma solução exata é obtida via função W de Lambert. A equação (3.12) pode ser reescrita como

$$(1 + \alpha\beta\rho_{DM}^{\alpha-1}) \frac{d\rho_{DM}}{dt} = -\frac{3\rho_{DM}}{a} \frac{da}{dt}, \quad (3.13)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{1}{\rho_{DM}} + \alpha\beta\rho_{DM}^{\alpha-2} \right) d\rho_d = -\frac{3da}{a}, \quad (3.14)$$

cuja solução é

$$\ln \frac{\rho_{DM}}{\rho_{DM0}} + \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} (\rho_{DM}^{\alpha-1} - \rho_{DM0}^{\alpha-1}) = -3 \ln a, \quad (3.15)$$

onde foi usada a condição inicial $\rho_{DM}(a=1) = \rho_{DM0}$. Ela pode ser reescrita como

$$\ln \rho_{DM}^{\alpha-1} + \alpha\beta\rho_{DM}^{\alpha-1} = (\alpha-1) \ln (\rho_{DM0}a^{-3}) + \alpha\beta\rho_{DM0}^{\alpha-1}. \quad (3.16)$$

A função W de Lambert é definida como a solução de

$$xe^x = f \Rightarrow x = W(f) \quad (3.17)$$

ou seja

$$x + \ln x = \ln f. \quad (3.18)$$

Deste modo a solução para ρ_{DM} e ρ_{DE} são

$$\rho_{DM} = \left[\frac{W(\alpha\beta \exp(\alpha\beta\rho_{DM0}^{\alpha-1})(\rho_{DM0}a^{-3})^{\alpha-1})}{\alpha\beta} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (3.19)$$

e

$$\rho_{DE} = \rho_{DE0} \left[\frac{W(\alpha r_0 e^{\alpha r_0} a^{3(1-\alpha)})}{\alpha r_0} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \quad (3.20)$$

onde $r_0 \equiv \beta\rho_{d0}^{\alpha-1}$. Essas duas expressões podem ser reescritas em função do *redshift* z como

$$\rho_{DM}(z) = \rho_{DM0} \left[\frac{W(\alpha r_0 e^{\alpha r_0} (1+z)^{3(\alpha-1)})}{\alpha r_0} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (3.21)$$

e

$$\rho_{DE}(z) = \rho_{DE0} \left[\frac{W(\alpha r_0 e^{\alpha r_0} (1+z)^{3(\alpha-1)})}{\alpha r_0} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \quad (3.22)$$

O caso geral com $w \neq -1$ não pode, até onde sabemos, ser resolvido analiticamente, então foram usadas soluções numéricas. Usando as definições $r_{DM} \equiv \frac{\rho_{DM}}{\rho_{DM0}}$, $r_{DE} \equiv \frac{\rho_{DE}}{\rho_{DE0}}$, $\Omega_{DM0} \equiv \frac{\rho_{DM0}}{\rho_{c0}}$, $\Omega_{DE0} \equiv \frac{\rho_{DE0}}{\rho_{c0}}$ e a relação $\frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}$, a equação (3.12) pode ser reescrita como

$$\frac{dr_{DM}}{dz} = \frac{3r_{DM}}{1+z} \left[\frac{\Omega_{DM0} + (1+w)\Omega_{DE0}r_{DM}^{\alpha-1}}{\Omega_{DM0} + \alpha\Omega_{DE0}r_{DM}^{\alpha-1}} \right], \quad (3.23)$$

onde foi assumida a condição inicial $r_{DM}(z=0) = 1$. Então $r_{DE} = r_{DM}^\alpha$, e

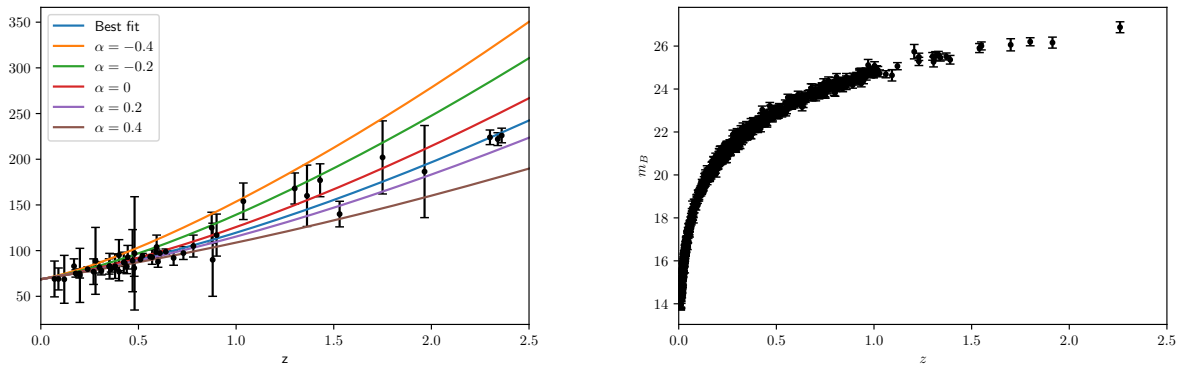
$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0} = [\Omega_{b0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{DM0}r_{DM}(z) + \Omega_{DE0}r_{DE}(z)]^{1/2}, \quad (3.24)$$

que será usada para delimitar o modelo com os dados observacionais.

3.3 DADOS E ANÁLISE

Os conjuntos de dados utilizados foram de $H(z)$ (MAGANA et al., 2017), SNs Ia (amostra Pantheon), CMB ((AGHANIM et al., 2020), (CHEN; HUANG; WANG, 2018) e (FIXSEN, 2009)) e BAO ((CAMARENA; MARRA, 2018)).

Figura 3.2 – Na esquerda, o modelo $\Lambda(t)$ CDM ($w = -1$) para diferentes valores de α , assim como os dados observacionais de $H(z)$. Note que $\alpha = 0$ corresponde a Λ CDM. Na direita está o *plot* dos dados de magnitude m_B aparente de SN Ia da compilação do Pantheon.



fonte: Produção do próprio autor.

No caso do modelo $\Lambda(t)$ CDM, ou seja, modelo com interação onde a energia escura tem equação de estado $w = -1$, fixamos o parâmetro de densidade dos bárions $\Omega_b = 0,0493$ de acordo com os vínculos de Planck (2018) para a radiação cósmica de fundo (CMB), que também está de acordo com os vínculos da nucleossíntese do Big Bang (BBN). Então os parâmetros livres são (H_0, Ω_d, α) .

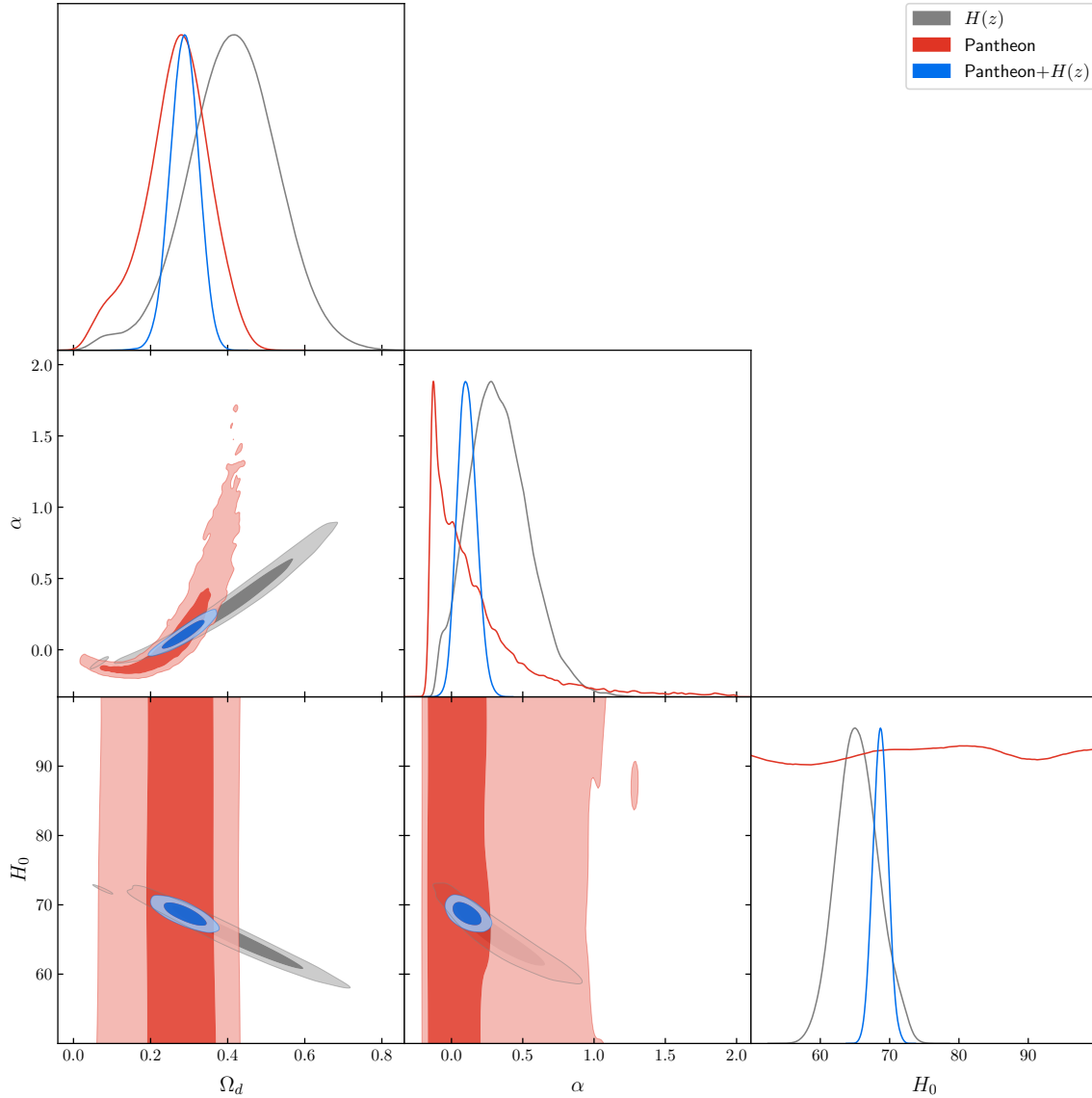
Os parâmetros livres foram bem delimitados com SN Ia em combinação a $H(z)$, como pode ser visto em Figura 3.3, Figura 3.4 e na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Vínculos combinados sobre os parâmetros livres de $\Lambda(t)$ CDM a partir de dados de Pantheon+ $H(z)$ para 68% e 95% c.l.

Parâmetro	Limites de 68% e 95%
Ω_d	$0,287^{+0,036+0,071}_{-0,036-0,075}$
α	$0,109^{+0,062+0,14}_{-0,072-0,12}$
H_0 ($km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$)	$68,7^{+1,1+2,2}_{-1,1-2,1}$

fonte: Produção do próprio autor.

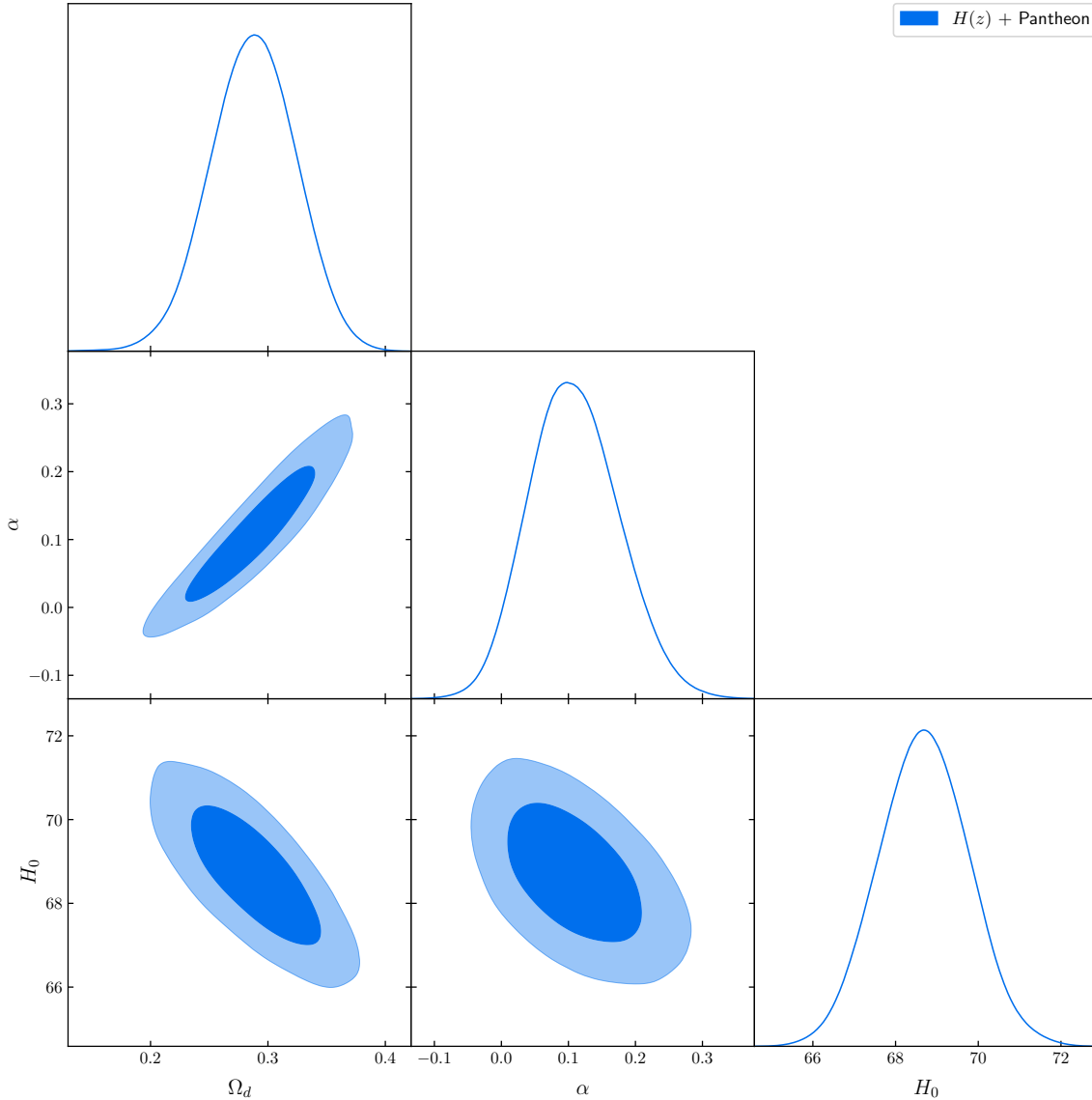
Figura 3.3 – Todos os vínculos (SN Ia e $H(z)$) para o modelo $\Lambda(t)$ CDM.



fonte: Produção do próprio autor.

Como pode ser visto na Figura 3.3, principalmente no plano $\Omega_{DM} \times \alpha$, a combinação entre SNs Ia e $H(z)$ reduz fortemente o espaço de parâmetros. Na Tabela 3.1, o valor para H_0 está de acordo com o valor obtido para Λ CDM em Planck (2018), a saber, $H_0 = 67,4 \pm 0,5\ km\ s^{-1}Mpc^{-1}$. Com o valor fixo de $\Omega_b = 0,0493$, obtemos $\Omega_d = \Omega_b + \Omega_{DM} = 0,336 \pm 0,036$ a 68% c.l., o que está de acordo com o valor obtido de Planck (2018), $\Omega_m = 0,315 \pm 0,007$. O valor obtido para α , conforme pode ser visto na Tabela 3.1, é compatível com zero apenas com 1,6 σ , portanto a interação não é descartada

Figura 3.4 – Vínculos combinados (SNs Ia e $H(z)$) para $\Lambda(t)$ CDM model.



fonte: Produção do próprio autor.

por esta análise.

A Figura 3.4 mostra em mais detalhes as restrições combinadas sobre os parâmetros livres (Ω_{DM}, α, H_0). Podemos ver que os parâmetros são bem delimitados, com uma correlação maior no plano $\Omega_{DM} \times \alpha$.

Quando deixamos w da equação de estado da energia escura como um parâmetro livre, os dados SNs Ia + $H(z)$ não foram suficientes para delimitar os parâmetros livres ($\Omega_b, \Omega_d, w, H_0$) e tivemos que adicionar restrições de outros dados. Assim, adicionamos restrições de Planck (2018), com os chamados *priors* de distância, que incluem o parâmetro de *shift*, ℓ_A e $\Omega_b h^2$. Também incluímos vínculos de Oscilações Acústicas de Barions (BAO) de vários *surveys* (Figura 3.5).

Da Tabela 3.2, o valor obtido para Ω_m é $\Omega_m = 0,3170 \pm 0,0064$, o que está de acordo com o valor obtido de Planck (2018), $\Omega_m = 0,3153 \pm 0,0073$. O valor de H_0 também está de acordo com Planck (2018), $H_0 = 67,36 \pm 0,54 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. O resultado obtido para a equação de estado da energia escura, como pode ser visto na Tabela 3.2, é apenas ligeiramente compatível com $w = -1$,

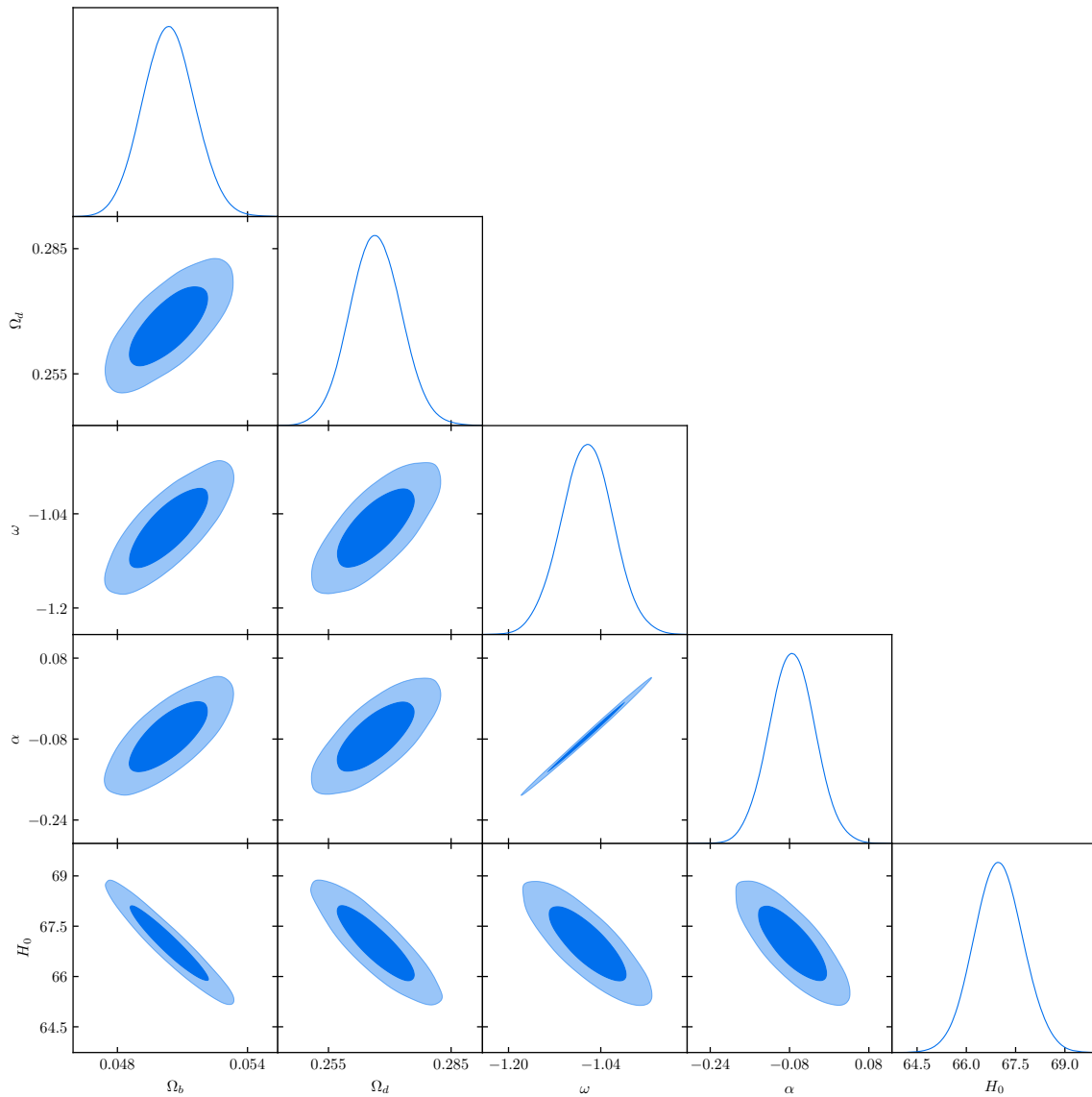
Tabela 3.2 – Vínculos combinados sobre os parâmetros livres do modelo de interação DM-DE a partir de Pantheon+ $H(z)$ +Planck18+BAO.

Parametro	Limites para 68% e 95%
Ω_b	$0,0504 \pm 0,0012 \pm 0,0024$
Ω_{DM}	$0,2666 \pm 0,0063 \pm 0,013$
ω	$-1,064 \pm 0,045 \pm 0,090$
α	$-0,075^{+0,046+0,094}_{-0,046-0,093}$
$H_0 (km s^{-1} Mpc^{-1})$	$66,98 \pm 0,75 \pm 1,5$

fonte: Produção do próprio autor.

a $1,4 \sigma$. A energia escura phantom ($w < -1$) é ligeiramente favorecida por esta análise. Outra característica interessante da interação DE é que o parâmetro α agora muda de sinal quando comparado com $\Lambda(t)$ CDM. O valor obtido, $\alpha = -0,075 \pm 0,046$, é ligeiramente compatível com zero em $1,6 \sigma$.

Figura 3.5 – Vínculos combinados de Pantheon+ $H(z)$ +Planck18+BAO para o modelo DM-DE intera- gente.



fonte: Produção do próprio autor.

O que esses resultados nos dizem sobre o Problema da Coincidência? No caso de $\Lambda(t)$ CDM, no

limite superior de 2σ do parâmetro α , a proporção ρ_{DM}/ρ_{Λ} em $z = 1000$ é reduzida de $\approx 10^9$ para $\approx 3 \times 10^5$. Ou seja, o problema da coincidência é aliviado. Para XCDM em interação, entretanto, surgiu uma degenerescência no plano $w \times \alpha$, de tal forma que para DE phantom, α torna-se negativo. Para o melhor ajuste, o problema da coincidência é ainda pior, $\rho_{DM}/\rho_{DE} \approx 2 \times 10^9$ a $z = 1000$. No limite superior de 2σ do parâmetro α , a proporção ρ_{DM}/ρ_{DE} é ligeiramente reduzida para $\approx 2 \times 10^8$. O problema da coincidência não é sequer aliviado. No entanto, somente com uma análise completa do espectro da CMB, uma conclusão final poderia ser tirada, neste caso.

4 COSMOLOGIA CINEMÁTICA

A Cosmologia Cinemática ou Cosmografia se ocupa das derivadas temporais da expansão, ou seja, as derivadas temporais do fator de escala a . Supondo o Princípio Cosmológico, outra quantidade importante para a Cosmografia é a única que descreve a geometria espacial, o parâmetro de curvatura Ω_k . Vamos relembrar as derivadas temporais já definidas e acrescentar as derivadas mais altas:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.1)$$

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (4.2)$$

$$j = \frac{a^{(3)}}{aH^3} \quad (4.3)$$

$$s = \frac{a^{(4)}}{aH^4} \quad (4.4)$$

Esses são o parâmetro de Hubble, parâmetro de desaceleração, *jerk* e *snap*, respectivamente. Repare que apenas o parâmetro de desaceleração possui um sinal negativo, por motivos históricos, por se acreditar que a gravidade era apenas atrativa, o que levaria a uma desaceleração da expansão do Universo. Usamos a notação para derivadas mais altas $a^{(n)} \equiv \frac{d^n a}{dt^n}$. Os parâmetros de desaceleração, *jerk* e *snap* definidos dessa forma são adimensionais. Outro parâmetro cinemático importante é o *redshift* de transição z_t , que é o *redshift* em que o Universo transitou de desacelerado para acelerado (RIESS et al., 2004; LIMA et al., 2012). Portanto, podemos definir z_t pela equação $q(z_t) = 0$.

A obtenção desses parâmetros a partir das observações, bem como parâmetros que correspondem a derivadas de ordens mais altas que não serão tratados aqui, e juntamente com o parâmetro de curvatura Ω_k , são os objetivos da Cosmologia Cinemática. Veremos como fazê-lo por dois métodos: expansão em série e parametrização.

4.1 EXPANSÕES EM SÉRIE DE OBSERVÁVEIS COSMOLÓGICOS

Podemos escrever para a expansão do fator de escala

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t - t_0)^3 + \frac{1}{4!}s_0H_0^4(t - t_0)^4 + \dots \right] \quad (4.5)$$

Se definirmos o *lookback time* $t_L \equiv t_0 - t$, ou tempo de viagem da luz de um *redshift* z até hoje ($z = 0$), podemos reescrever (4.5) como:

$$a(t) = a_0 \left[1 - H_0t_L - \frac{1}{2}q_0H_0^2t_L^2 - \frac{1}{3!}j_0H_0^3t_L^3 + \frac{1}{4!}s_0H_0^4t_L^4 + \dots \right] \quad (4.6)$$

Assim, podemos escrever a relação do fator de escala com o *redshift* como:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a(t_0)}{a(t_0 - t_L)} - 1 = \\ &= H_0 t_L + \frac{H_0^2 t_L^2}{2} (q_0 + 2) + \frac{H_0^3 t_L^3}{6} (j_0 + 6q_0 + 6) + \frac{H_0^4 t_L^4}{24} (8j_0 + 6q_0^2 + 36q_0 - s_0 + 24) + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Podemos inverter essa série para obter $t_L(z)$ como:

$$t_L = \frac{z}{H_0} - \frac{(q_0 + 2) z^2}{2H_0} + \frac{z^3 (-j_0 + 3q_0^2 + 6q_0 + 6)}{6H_0} + \frac{z^4 [2j_0 (5q_0 + 6) - 15q_0^3 - 36q_0^2 - 36q_0 + s_0 - 24]}{24H_0} + \dots \quad (4.8)$$

Um observável muito usado atualmente é a taxa de expansão em função do *redshift*, $H(z)$. A partir de (4.1) e (4.6), podemos obter

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_0^2 (q_0 + 1) t_L + \frac{1}{2} H_0^3 (j_0 + 3q_0 + 2) t_L^2 + \frac{1}{6} H_0^4 t_L^3 (4j_0 + 3q_0^2 + 12q_0 - s_0 + 6) + \\ &+ \frac{1}{24} H_0^5 t_L^4 [10j_0 (q_0 + 2) + 30q_0^2 + 60q_0 - 5s_0 + 24] + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituindo (4.8) em (4.9) e desprezando termos de ordem mais alta que z^4 , obtemos:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_0 + H_0 (q_0 + 1) z + \frac{1}{2} H_0 z^2 (j_0 - q_0^2) - \frac{1}{6} H_0 z^3 [j_0 (4q_0 + 3) - 3q_0^3 - 3q_0^2 + s_0] + \\ &+ \frac{1}{24} H_0 z^4 [j_0 (25q_0^2 + 32q_0 + 12) - 4j_0^2 + 7q_0 s_0 - 15q_0^4 - 24q_0^3 - 12q_0^2 + 8s_0] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Outros observáveis importantes são as distâncias cosmológicas. Para começar, vamos definir a distância comóvel na linha de visada d_C (HOGG, 1999), dada por:

$$d_C = d_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (4.11)$$

onde $d_H = \frac{c}{H_0}$ é a distância de Hubble e $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$ é o parâmetro de Hubble adimensional. Já a distância comóvel transversal é dada por:

$$d_M = \begin{cases} \frac{d_H}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\Omega_k} d_C}{d_H} \right) & \text{para } \Omega_k > 0 \\ d_C & \text{para } \Omega_k = 0 \\ \frac{d_H}{\sqrt{-\Omega_k}} \sin \left(\frac{\sqrt{-\Omega_k} d_C}{d_H} \right) & \text{para } \Omega_k < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

As distâncias observáveis atualmente são a distância de luminosidade d_L e a distância de diâmetro angular d_A . Ambas se relacionam com a distância comóvel transversal d_M via $d_L = (1 + z)d_M$ e

$d_A = \frac{d_M}{1+z}$. Se usarmos a Eq. (4.11) com a (4.10), mantendo termos até ordem z^4 , obtemos:

$$D_C(z) = \frac{d_C(z)}{d_H} = z + \frac{1}{120}(-60q_0 - 60)z^2 + \frac{1}{120}z^3(-20j_0 + 60q_0^2 + 80q_0 + 40) + \frac{1}{24}z^4(10j_0q_0 + 9j_0 - 15q_0^3 - 27q_0^2 - 18q_0 + s_0 - 6) + \dots \quad (4.13)$$

onde $D_C(z)$ é a distância comóvel de linha de visada adimensional. Estamos usando uma notação em que as distâncias com letras minúsculas são dimensionais e com letras maiúsculas $D_i = \frac{d_i}{d_H}$ são adimensionais. Usando (4.12) e (4.13), podemos obter para a distância comóvel transversal:

$$D_M(z) = \frac{d_M(z)}{d_H} = z + \frac{1}{2}(-q_0 - 1)z^2 + \frac{1}{6}z^3(-j_0 + \Omega_k + 3q_0^2 + 4q_0 + 2) + \frac{1}{24}z^4(j_0(10q_0 + 9) - 6q_0(\Omega_k + 3) - 6\Omega_k - 15q_0^3 - 27q_0^2 + s_0 - 6) + \dots \quad (4.14)$$

Como podemos ver, o efeito da curvatura aparece apenas no termo de terceira ordem no *redshift*. Isso também pode ser visto na expansão da distância de luminosidade:

$$D_L(z) = z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \frac{1}{6}z^3(-j_0 + \Omega_k + 3q_0^2 + q_0 - 1) + \frac{1}{24}z^4[5j_0(2q_0 + 1) - 2q_0(3\Omega_k + 1) - 2\Omega_k - 15q_0^3 - 15q_0^2 + s_0 + 2] + \dots \quad (4.15)$$

Esse resultado está de acordo com (VISSER, 2005).

Consideramos a parametrização de uma quantidade cinemática como um modelo, a partir do qual obtemos as outras quantidades. Por exemplo, supondo uma parametrização $q(z)$, podemos obter $H(z)$ a partir da relação (2.14). Fazendo a mudança para derivada no *redshift*, usando $\frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}$, (2.14) fica:

$$q(z) = (1+z)\frac{H'(z)}{H(z)} - 1 \quad (4.16)$$

onde denotamos $' = \frac{d}{dz}$. Integrando essa equação para obtermos $H(z)$, encontramos:

$$H(z) = H_0 \exp \left[\int_0^z \frac{1+q(z')}{1+z'} dz' \right] \quad (4.17)$$

Como mostramos, a dependência das expansões cinemáticas com a curvatura espacial é fraca, aparecendo apenas na terceira ordem do *redshift*. Isso acontece porque diferentemente de modelos dinâmicos, onde Ω_k já parece explicitamente em $H(z)$, nas parametrizações cinemáticas, Ω_k só aparece se parametrizarmos $D_C(z)$, o que pode ser usado para determinar a curvatura espacial de modo independente da dinâmica (JESUS et al., 2020b). Isso pode levar a vínculos mais fracos na curvatura, mas mais consistentes, pois não dependem da escolha da dinâmica (teoria de gravitação).

4.2 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS CINEMÁTICOS A PARTIR DE SNS IA E CRONÔMETROS CÓSMICOS

Observações de idades diferenciais de galáxias distantes através da compilação de dados do parâmetro de Hubble ($H(z)$) (MAGAÑA et al., 2018) e supernovas Tipo Ia (SNs Ia) (SCOLNIC et al., 2018a) mostram que o universo está entrando em uma fase de expansão acelerada. Embora o modelo Λ CDM padrão se ajuste muito bem à maioria dos dados observacionais, modelos alternativos com diferentes conteúdos energéticos também foram invocados para lidar com alguns problemas enfrentados pelo modelo padrão (BULL et al., 2016). Em alguns desses modelos, um novo componente dinâmico entra nas equações para imitar os efeitos da energia escura e da matéria escura, ou mesmo a interação entre eles (AL., 2017; von Martens et al., 2020; PEREIRA; JESUS, 2009; MAJEROTTO; VÄLIVIITA; MAARTENS, 2010; VÄLIVIITA; MAARTENS; MAJEROTTO, 2010; CHIMENTO, 2010; CAI; SU, 2010; SUN; YUE, 2012; POURTSIDOU; SKORDIS; COPELAND, 2013; SALVATELLI et al., 2014; LI; ZHANG, 2014; SKORDIS; POURTSIDOU; COPELAND, 2015; JIMENEZ et al., 2016; GÓMEZ-VALENT; PETTORINO; AMENDOLA, 2020).

Outras possibilidades são os modelos cosmográficos (ou cinemáticos) (VISSER, 2004; VISSER, 2005; SHAPIRO; TURNER, 2006b; BLANDFORD et al., 2004; ELGARØY; MULTAMÄKI, 2006; RAPETTI et al., 2007; RIESS et al., 2007; GUIMARÃES; LIMA, 2011; GUIMARÃES; CUNHA; LIMA, 2009), onde não se assume nenhum conteúdo energético dinâmico e buscamos medidas diretas de expansão através de seus parâmetros cinemáticos, tais como o parâmetro Hubble, parâmetro de desaceleração, parâmetros *jerk*, *snap*, etc. Nestes métodos nenhuma relação entre massa-energia e geometria é assumida, apenas que a geometria do Universo é pseudo-Riemanniana e supõe-se a validade do Princípio Cosmológico. A vantagem do uso da modelagem cosmográfica é que ela possui menos viés, uma vez que busca uma medida direta dos parâmetros de expansão a partir dos dados, com menos premissas do que na modelagem dinâmica, o que significa que os parâmetros obtidos via cosmografia devem ser mais fiéis à realidade. Uma desvantagem é que, uma vez que uma relação entre conteúdo de energia e geometria não é assumida, as medidas obtidas a partir dos dados tendem a ter maiores incertezas estatísticas. Diferentes tipos de modelos de energia escura no âmbito da abordagem cosmográfica, com ênfase nos modelos de vácuo em execução, foram estudados recentemente em (REZAEI; PERACULA; MALEKJANI, 2021) e funções cosmográficas até a quarta derivada do fator de escala usando o método não paramétrico de Processos Gaussianos foi feito em (VELASQUEZ-TORIBIO; FABRIS, 2022).

4.2.1 Equações para parâmetros cinemáticos

Os parâmetros cinemáticos, definidos em (4.1), são frequentemente escritos em termos do *redshift* z por meio da definição $1 + z \equiv 1/a$, da qual segue a relação $\frac{d}{dt} = -H(1 + z)\frac{d}{dz}$, onde usamos o fator de escala atual igual à unidade, ou seja $a_0 = 1$. Assim, o parâmetro de desaceleração (4.2) pode ser escrito como:

$$q = -\frac{1}{aH^2} \frac{d(\dot{a})}{dt} = (1 + z) \frac{H'}{H} - 1, \quad (4.18)$$

onde $H' \equiv dH/dz$. A partir desta relação, $H(z)$ pode ser obtido a partir de uma parametrização $q(z)$ específica como:

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dz} = \frac{1+q(z)}{1+z} \Rightarrow \int_{H_0}^H \frac{dH}{H} = \int_0^z \frac{1+q(z)}{1+z} dz \quad (4.19)$$

do qual segue

$$H = H_0 \exp \left[\int_0^z \frac{1+q(z)}{1+z} dz \right] \quad (4.20)$$

O parâmetro *jerk* (4.3) pode ser escrito como:

$$j = \frac{1}{aH^3} \frac{d}{dt}(\ddot{a}) = 1 - 2(1+z) \frac{H'}{H} + (1+z)^2 \frac{H'^2}{H^2} + (1+z)^2 \frac{H''}{H}, \quad (4.21)$$

e, para uma parametrização $j(z)$ específica, a equação para $H(z)$ é:

$$H''(z) - \frac{2H'(z)}{1+z} + \frac{H'(z)^2}{H(z)} - \frac{H(z)(j(z)-1)}{(1+z)^2} = 0. \quad (4.22)$$

Se fizermos a substituição $f(z) \equiv H(z)^2$, a equação (4.22) pode ser escrita como:

$$(1+z)^2 f''(z) - 2(1+z)f'(z) + 2[1-j(z)]f(z) = 0 \quad (4.23)$$

que é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem em $f(z)$.

Para parametrizações de ordem superior, é mais conveniente trabalhar com um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Para fazer isso, vamos definir um parâmetro cinemático genérico de ordem $n \geq 2$, com ℓ_n definido como:

$$\ell_n \equiv \frac{a^{(n)}}{aH^n} \quad (4.24)$$

onde $a^{(n)} \equiv d^n a / dt^n$. Do mesmo modo, um parâmetro de ordem superior ℓ_{n+1} será:

$$\ell_{n+1} \equiv \frac{a^{(n+1)}}{aH^{n+1}}, \quad (4.25)$$

de tal forma que:

$$a^{(n)} = aH^n \ell_n \quad (4.26)$$

$$a^{(n+1)} = \frac{d}{dt} (a^{(n)}) = -H(1+z) \frac{d}{dz} (aH^n \ell_n) = aH^{n+1} \ell_{n+1} \quad (4.27)$$

e

$$\frac{H^{n+1} \ell_{n+1}}{1+z} = -H(1+z) \left[\frac{nH^{n-1} H' \ell_n}{1+z} - \frac{H^n \ell_n}{(1+z)^2} + \frac{H^n \ell'_n}{1+z} \right]. \quad (4.28)$$

De acordo com (4.18):

$$H' = \frac{H}{1+z}(1+q), \quad (4.29)$$

então, usando (4.28), podemos escrever:

$$\ell_{n+1} = -n(1+q)\ell_n + \ell_n - \ell'_n(1+z) \quad (4.30)$$

a partir do qual podemos obter ℓ'_n para uma parametrização $q(z)$ dada.

Para $n = 2$, com $\ell_2 = -q$, $\ell_3 = j$, (4.30) lê-se como ¹:

$$(1+z)q' = j(z) - q(1+2q), \quad (4.31)$$

então, a partir de (4.29) e (4.31), pode-se resolver um modelo para uma dada parametrização do *jerk* com o sistema:

$$\begin{cases} (1+z)H' = (1+q)H \\ (1+z)q' = j - 2q^2 - q \end{cases} \quad (4.32)$$

Para $n = 3$, com $\ell_3 = j$, $\ell_4 = s$, a equação (4.30) fica como:

$$(1+z)j' = -s(z) - (2+3q)j \quad (4.33)$$

Assim, pode-se resolver um modelo com uma dada parametrização $s(z)$ do sistema:

$$\begin{cases} (1+z)H' = (1+q)H \\ (1+z)q' = j - 2q^2 - q \\ (1+z)j' = -s(z) - (2+3q)j \end{cases} \quad (4.34)$$

O processo pode ser repetido para parâmetros de ordem superior.

4.2.2 Parametrizações Cinemáticas

As parametrizações que usaremos neste trabalho estão resumidas na Tabela I abaixo.

Tabela 4.3 – Parametrizações Cinemáticas do parâmetro de desaceleração, jerk e snap.

Modelo	Parametrização	Parâmetros livres
M1	$q(z) = q_0 + q_1 z$	(H_0, q_0, q_1)
M2	$q(a) = q_0 + q_a(1-a)$	(H_0, q_0, q_a)
M3	$j(z) = j_0$	(H_0, q_0, j_0)
M4	$j(z) = j_0 + j_1 z$	(H_0, q_0, j_0, j_1)
M5	$j(a) = j_0 + j_a(1-a)$	(H_0, q_0, j_0, j_a)
M6	$s(z) = s_0$	(H_0, q_0, j_0, s_0)
M7	$s(z) = s_0 + s_1 z$	$(H_0, q_0, j_0, s_0, s_1)$
M8	$s(a) = s_0 + s_a(1-a)$	$(H_0, q_0, j_0, s_0, s_a)$

fonte: Produção do próprio autor.

¹ O parâmetro de desaceleração q é o único parâmetro cinemático que muda de sinal em relação à definição (4.24).

4.2.2.1 Parametrização $q(z) = q_0 + q_1 z$

Para uma parametrização linear do parâmetro de desaceleração da forma $q = q_0 + q_1 z$, podemos obter o parâmetro de Hubble de (4.20)

$$H(z) = H_0(1+z)^{1+q_0-q_1} e^{q_1 z} \quad (4.35)$$

A distância comovel adimensional $D_C(z)$ pode ser obtida de:

$$D_C(z) = \int_0^z \frac{1}{E(z)} dz, \quad (4.36)$$

onde $E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0}$. De onde podemos obter

$$D_C(z) = e^{q_1} q_1^{q_0-q_1} [\gamma(q_1 - q_0, q_1) - \gamma(q_1 - q_0, q_1(1+z))], \quad (4.37)$$

onde γ é a função gama incompleta, definida por

$$\gamma(a, x) \equiv \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (4.38)$$

Os valores atuais (em $z = 0$) do *jerk* (j_0) e do *snap* (s_0) podem ser obtidos de (4.34):

$$j_0 = q_1 + q_0 + 2q_0^2 \quad (4.39)$$

e

$$s_0 = -2q_0 - 4q_1 - 7q_0^2 - 7q_0q_1 - 6q_0^3 \quad (4.40)$$

4.2.2.2 Parametrização $q(z) = q_0 + \frac{q_a z}{1+z}$

Para uma parametrização linear do parâmetro de desaceleração da forma $q = q_0 + q_a(1-a) = q_0 + \frac{q_a z}{1+z}$, podemos obter o parâmetro de Hubble de (4.20):

$$H = H_0(1+z)^{1+q_0+q_a} \exp\left(-\frac{q_a z}{1+z}\right). \quad (4.41)$$

A distância comóvel adimensional é

$$D_C(z) = e^{q_a} q_a^{-q_0-q_a} \left[\gamma\left(q_0 + q_a, \frac{q_a}{1+z}\right) - \gamma(q_0 + q_a, q_a) \right]. \quad (4.42)$$

Os valores atuais dos parâmetros *jerk* e *snap* podem ser obtidos de (4.34):

$$j_0 = q_a + q_0 + 2q_0^2 \quad (4.43)$$

e

$$s_0 = -2q_0 - 2q_a - 7q_0^2 - 7q_0q_a - 6q_0^3. \quad (4.44)$$

4.2.2.3 Parametrização $j(z) = j_0$

Para parametrizações de $j(z)$ a equação para $H(z)$ é bastante complicada, vindo de (4.21). Para um jerk constante ($j(z) = j_0$) pode-se obter uma expressão analítica como segue. A Eq. (4.23) lê-se

$$(1+z)^2 f''(z) - 2(1+z)f'(z) + 2(1-j_0)f(z) = 0 \quad (4.45)$$

Se for feita a substituição

$$x \equiv 1+z, \quad (4.46)$$

a (4.45) fica:

$$x^2 f''(x) - 2x f'(x) + 2(1-j_0)f(x) = 0, \quad (4.47)$$

que é uma equação de Cauchy-Euler para $f(x)$. A equação de Cauchy-Euler tem uma solução bem conhecida, que pode ser encontrada pelo *ansatz* $f = x^m$. Substituindo-o em (4.47), encontramos:

$$(m^2 - 3m + 2 - 2j_0)x^m = 0, \quad (4.48)$$

cujas soluções são

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{1+8j_0}}{2}. \quad (4.49)$$

Então, temos 3 possibilidades, de acordo com o sinal de $1+8j_0$:

- $1+8j_0 > 0$ ou $j_0 > -\frac{1}{8}$. Neste caso, vamos definir os números reais:

$$m_1 = \frac{3 + \sqrt{1+8j_0}}{2}, \quad m_2 = \frac{3 - \sqrt{1+8j_0}}{2} \quad (4.50)$$

e a solução é dada por:

$$f = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \quad (4.51)$$

ou

$$H^2 = c_1 (1+z)^{m_1} + c_2 (1+z)^{m_2}. \quad (4.52)$$

Como $f = H^2$, $f(0) = H_0^2$ e $f' = 2HH'$, então $f'(0) = 2H_0 H'(0)$. Como $H' = H \frac{1+q}{1+z}$, $H'(0) = H_0(1+q_0)$ e $f'(0) = 2H_0^2(1+q_0)$. Assim, se forem impostas as condições iniciais $f(z=0) = H_0^2$, $f'(z=0) = 2(1+q_0)H_0^2$, encontramos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \left(1 + \frac{1+4q_0}{\sqrt{1+8j_0}}\right) \frac{(1+z)^{m_1}}{2} + \left(1 - \frac{1+4q_0}{\sqrt{1+8j_0}}\right) \frac{(1+z)^{m_2}}{2}. \quad (4.53)$$

- $1+8j_0 = 0$ ou $j_0 = -\frac{1}{8}$:

Neste caso, temos soluções iguais $m = m_1 = m_2 = \frac{3}{2}$, e é preciso encontrar a segunda solução, dada a solução particular $f = x^{3/2}$. Ela é dada por $f = x^{3/2} \ln x$, então:

$$f = c_1 x^{3/2} + c_2 x^{3/2} \ln x \quad (4.54)$$

ou

$$H^2 = (1+z)^{3/2} [c_1 + c_2 \ln(1+z)]. \quad (4.55)$$

Dadas as condições iniciais $f(z=0) = H_0^2$, $f'(z=0) = 2(1+q_0)H_0^2$, encontramos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = (1+z)^{3/2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} + 2q_0 \right) \ln(1+z) \right]. \quad (4.56)$$

- $1 + 8j_0 < 0$ ou $j_0 < -\frac{1}{8}$:

Neste caso, temos soluções complexas conjugadas

$$m_1 = \alpha + \beta i, \quad m_2 = \alpha - \beta i \quad (4.57)$$

onde

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{-1 - 8j_0}. \quad (4.58)$$

Assim, a solução será:

$$f = x^{3/2} [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)] \quad (4.59)$$

ou

$$H^2 = (1+z)^{3/2} \{c_1 \cos[\beta \ln(1+z)] + c_2 \sin[\beta \ln(1+z)]\}. \quad (4.60)$$

Dadas as condições iniciais $f(z=0) = H_0^2$, $f'(z=0) = 2(1+q_0)H_0^2$, encontramos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = (1+z)^{3/2} \left\{ \cos[\beta \ln(1+z)] + \frac{1+4q_0}{\sqrt{-1-8j_0}} \sin[\beta \ln(1+z)] \right\}. \quad (4.61)$$

O valor atual do parâmetro snap pode ser obtido de (4.34):

$$s_0 = -(2 + 3q_0)j_0. \quad (4.62)$$

4.2.2.4 Outras parametrizações e parâmetros derivados

Para as outras parametrizações, ou seja M4-M8, as expressões para $H(z)$ são muito mais complicadas e foram obtidas apenas numericamente. Os parâmetros derivados em cada caso são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Parâmetros derivados.

Modelo	Parametrização	j_0	s_0
M1	$q(z) = q_0 + q_1 z$	$q_0 + q_1 + 2q_0^2$	$-2q_0 - 4q_1 - 7q_0^2 - 7q_0q_1 - 6q_0^3$
M2	$q(z) = q_0 + q_a(1-a)$	$q_0 + q_a + 2q_0^2$	$-2q_0 - 2q_a - 7q_0^2 - 7q_0q_a - 6q_0^3$
M3	$j = j_0$	-	$-(2 + 3q_0)j_0$
M4	$j(z) = j_0 + j_1 z$	-	$-j_1 - (2 + 3q_0)j_0$
M5	$j(z) = j_0 + j_a(1-a)$	-	$-j_a - (2 + 3q_0)j_0$

fonte: Produção do próprio autor.

4.2.3 Análises e Resultados

4.2.3.1 Análises

Para restringir os parâmetros livres das parametrizações cinemáticas, usamos magnitudes aparentes da compilação de SNs Ia Pantheon (SCOLNIC et al., 2018a) e da compilação de dados de $H(z)$ de (MAGANÑA et al., 2018).

Para SNs Ia, as restrições nos parâmetros livres vêm da minimização da função χ^2 :

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{i=1}^{1048} \sum_{j=1}^{1048} \left(m_i - m(z_i, \vec{\theta}) \right) (C^{-1})_{ij} \left(m_j - m(z_j, \vec{\theta}) \right) \quad (4.63)$$

onde m_i é a magnitude aparente observada de SNs Ia, $\vec{\theta}$ é o vetor de parâmetros, C_{ij} é a matriz de covariância² e $m(z_i, \vec{\theta})$ é a magnitude prevista no *redshift* z_i , dada por

$$m(z, \vec{\theta}) = 5 \log_{10} D_L(z, \vec{\theta}) + \mathcal{M}, \quad (4.64)$$

onde $\mathcal{M}$ é um parâmetro de ruído, que engloba H_0 e magnitude absoluta M , e $D_L(z, \vec{\theta})$ é a distância de luminosidade adimensional, dada, para um Universo espacialmente plano, como

$$D_L(z) = (1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')/H_0} \quad (4.65)$$

Optamos por projetar sobre $\mathcal{M}$, o que equivale a marginalizar a probabilidade $\mathcal{L} \propto e^{-\chi^2/2}$ sobre $\mathcal{M}$. Isso é explicado, por exemplo, em (ESCOBAL; JESUS; PEREIRA, 2021).

Para os dados de $H(z)$, para evitar a dependência de modelo dos dados do BAO, restringimos nossa análise aos dados de 31 cronômetros cósmicos de (MAGANÑA et al., 2018). Então, o χ^2 é dado por:

$$\chi_H^2 = \sum_{i=1}^{31} \left[\frac{H_i - H(z_i, \vec{\theta})}{\sigma_{Hi}} \right]^2 \quad (4.66)$$

onde $H(z_i, \vec{\theta})$ é o parâmetro de Hubble previsto, H_i é o parâmetro de Hubble observado e σ_{Hi} é sua incerteza.

A probabilidade conjunta é então dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SN} \mathcal{L}_H, \quad (4.67)$$

onde

$$\mathcal{L}_i = A e^{-\chi_i^2/2} \quad (4.68)$$

é a probabilidade para cada conjunto de dados e A é uma constante de normalização. Os *priors* que

² Aqui, devemos mencionar dois fatos sobre os dados do Pantheon e sua matriz de covariância. Em primeiro lugar, os dados do Pantheon são fornecidos sem ordenamento no *redshift*, o que não é ideal para a avaliação numérica da distância de luminosidade. Assim, primeiro ordenamos os dados em termos do *redshift*, depois ordenamos a matriz de covariâncias de acordo. Em segundo lugar, devemos mencionar que obtivemos a matriz de covariância inversa com o auxílio da função do Scipy disponível publicamente, `linalg.inv` (<<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.inv.html>>).

Tabela 4.5 – Parametrizações cinemáticas do parâmetro de desaceleração, do *jerk* e do *snap*, incluindo valores de χ^2 e BIC.

Modelo	Parâmetros livres	p	χ^2_{min}	χ^2_{red}	BIC	ΔBIC
M1	(H_0, q_0, q_1)	3	1043,80	0,97007	1064,75	0,75
M2	(H_0, q_0, q_a)	3	1043,20	0,96951	1064,15	0,15
M3	(H_0, q_0, j_0)	3	1043,05	0,96937	1064,00	0
M4	(H_0, q_0, j_0, j_1)	4	1043,04	0,97027	1070,98	6,98
M5	(H_0, q_0, j_0, j_a)	4	1043,04	0,97027	1070,98	6,98
M6	(H_0, q_0, j_0, s_0)	4	1042,96	0,97020	1070,90	6,90
M7	$(H_0, q_0, j_0, s_0, s_1)$	5	1042,69	0,97085	1077,61	13,62
M8	$(H_0, q_0, j_0, s_0, s_a)$	5	1042,82	0,97097	1077,74	13,74

fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4.6 – Intervalos para os *priors* planos adotados para cada parâmetro e parametrização.

Modelo	Parâmetros livres	<i>Priors</i> planos
M1	(H_0, q_0, q_1)	$([50, 100], [-5, 5], [-20, 20])$
M2	(H_0, q_0, q_a)	$([50, 100], [-5, 5], [-20, 20])$
M3	(H_0, q_0, j_0)	$([50, 100], [-5, 5], [-10, 10])$
M4	(H_0, q_0, j_0, j_1)	$([50, 100], [-5, 5], [-20, 20], [-50, 50])$
M5	(H_0, q_0, j_0, j_a)	$([50, 100], [-5, 5], [-20, 20], [-50, 50])$
M6	(H_0, q_0, j_0, s_0)	$([50, 100], [-5, 5], [-20, 20], [-50, 50])$
M7	$(H_0, q_0, j_0, s_0, s_1)$	$([0, 100], [-5, 20], [-240, 30], [-190, 190], [-190, 300])$
M8	$(H_0, q_0, j_0, s_0, s_a)$	$([0, 100], [-5, 20], [-240, 30], [-190, 190], [-500, 500])$

fonte: Produção do próprio autor.

usamos para os parâmetros são fixados em um grande intervalo abrangendo toda a região onde as probabilidades não são desprezíveis, como pode ser visto na Tabela 4.6. As distribuições posteriores são então dadas por

$$p(\vec{\theta}) = \pi(\vec{\theta})\mathcal{L}(\vec{\theta}) \quad (4.69)$$

onde π é o *prior*. Para testar as distribuições posteriores, usamos o software livre emcee (FOREMAN-MACKEY et al., 2013), que é baseado em um método de Monte Carlo do tipo *Affine Parametrization Ensemble* (GOODMAN; WEARE, 2010).

Após gerar as cadeias de Monte Carlo, para plotar os resultados como contornos de posteriores marginalizados, utilizamos o software livre de código aberto getdist (LEWIS; BRIDLE, 2002).

4.2.3.2 Resultados

Primeiramente, para fazer uma comparação de modelos entre todas as parametrizações, calculamos o Critério de Informação Bayesiano (BIC) (SCHWARZ, 1978; LIDDLE, 2004; JESUS; VALENTIM; ANDRADE-OLIVEIRA, 2017b) para elas. O BIC é dado por:

$$\text{BIC} = -2 \ln \mathcal{L}_{max} + p \ln N = \chi^2_{min} + p \ln N \quad (4.70)$$

onde p é o número de parâmetros livres e N é o número de dados. Os valores de BIC encontrados para todos os modelos podem ser vistos na Tabela 4.5.

Tabela 4.7 – Resultados para todas as parametrizações cinemáticas, com valores médios dos parâmetros e incertezas em 95% c.l.

Modelo	H_0	q_0	q_1, q_a	$\dot{j}_0$	$\dot{j}_1, \dot{j}_a$	s_0	s_1, s_a
M1	$68.8^{+3.8}_{-3.7}$	-0.51 ± 0.12	$0.73^{+0.28}_{-0.29}$	$0.75^{+0.41}_{-0.38}$		$-0.24^{+0.54}_{-0.41}$	
M2	69.0 ± 3.8	-0.63 ± 0.16	$1.62^{+0.64}_{-0.66}$	$1.79^{+0.89}_{-0.84}$		$4.0^{+3.4}_{-3.0}$	
M3	$68.8^{+3.7}_{-3.6}$	-0.58 ± 0.13		$1.15^{+0.56}_{-0.53}$		$-0.25^{+0.40}_{-0.30}$	
M4	68.8 ± 3.8	$-0.58^{+0.26}_{-0.25}$		1.2 ± 1.9	$0.0^{+3.7}_{-3.6}$	$0.1^{+4.3}_{-3.5}$	
M5	68.8 ± 3.8	$-0.57^{+0.31}_{-0.30}$		$1.1^{+2.6}_{-2.7}$	$0.3^{+8.7}_{-8.4}$	$0.0^{+9.0}_{-7.9}$	
M6	68.6 ± 3.9	$-0.53^{+0.32}_{-0.30}$		$0.6^{+2.5}_{-2.7}$		$-2.7^{+6.5}_{-6.9}$	
M7	68.4 ± 3.9	$-0.45^{+0.52}_{-0.49}$		$-0.6^{+6.2}_{-6.5}$		-9^{+34}_{-32}	11^{+55}_{-62}
M8	$68.4^{+4.0}_{-3.9}$	$-0.46^{+0.59}_{-0.56}$		$-0.6^{+7.8}_{-8.1}$		-10^{+52}_{-48}	20^{+100}_{-200}

fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4.8 – Resultados para todas as parametrizações cinemáticas M1 - M3, com os valores médios de H_0 , q_0 , $\dot{j}_0$ e s_0 . Incertezas em 68% e 95% c.l.

Modelo	H_0	q_0	$\dot{j}_0$	s_0
M1	$68.8^{+1.9+3.8}_{-1.9-3.7}$	$-0.515 \pm 0.059 \pm 0.12$	$0.75^{+0.20+0.41}_{-0.20-0.38}$	$-0.24^{+0.14+0.54}_{-0.28-0.41}$
M2	$69.0 \pm 1.9 \pm 3.8$	$-0.627 \pm 0.078 \pm 0.16$	$1.79^{+0.43+0.89}_{-0.43-0.84}$	$4.0^{+1.2+3.4}_{-2.0-3.0}$
M3	$68.8^{+1.9+3.7}_{-1.9-3.6}$	$-0.578 \pm 0.067 \pm 0.13$	$1.15^{+0.28+0.56}_{-0.28-0.53}$	$-0.255^{+0.094+0.40}_{-0.21-0.30}$

fonte: Produção do próprio autor.

Como pode ser visto, os modelos M1 - M3 são favorecidos por esta análise do BIC³. Na Tabela 4.7, podemos ter uma visão geral dos resultados para as parametrizações M1 - M8. Como se pode ver, o valor obtido para H_0 é bastante semelhante para todos os modelos. Aqui, devemos mencionar que evitamos usar a constante de Hubble das SNs Ia locais (RIESS et al., 2021), pois está atualmente em tensão (VALENTINO et al., 2021) com estimativas de altos *redshift* no contexto de modelos dinâmicos de medições da CMB (Cosmic Microwave Background) (AGHANIM et al., 2020)⁴ Os dados locais de SNs Ia indicam $H_0 = 73, 2 \pm 1, 3$ km/s/Mpc, enquanto os dados de CMB do Planck 2018 indicam $H_0 = 67, 4 \pm 0, 5$ km/s/Mpc. Podemos ver que embora nosso resultado seja independente da dinâmica, está mais de acordo com o resultado da CMB. Para ser mais preciso, H_0 do M3 é compatível com CMB dentro de $0,7\sigma$, enquanto é marginalmente compatível com dados de SNs Ia em $1,9\sigma$.

Os valores médios do parâmetro de desaceleração são todos compatíveis, dadas as incertezas. O parâmetro *jerk* ($\dot{j}_0$) também apresenta compatibilidade entre todos os modelos, pelo menos em 2σ c.l. O resultado para o *jerk* também está de acordo com (AMIRHASHCHI; AMIRHASHCHI, 2020), onde eles encontraram $\dot{j}_0 = 1.038^{+0.061}_{-0.023}$, usando BAO+Pantheon+Cronômetros Cósmicos, no contexto do modelo M3. O parâmetro *snap* s_0 , entretanto, apresenta uma incompatibilidade no modelo M2 quando comparado aos modelos M1 e M3.

³ Para concluir, usamos a escala de Jeffreys conforme explicado, por exemplo, em (KASS; RAFTERY, 1995; JESUS; VALENTIM; ANDRADE-OLIVEIRA, 2017b).

⁴ Devemos também mencionar que um ponto no conjunto de dados $H(z)$, em $z = 0.47$, de (RATSIMBAZAFY et al., 2017), pode ter uma incerteza maior do que a estimada por (MAGAÑA et al., 2018). É por isso que (MAGAÑA et al., 2018) escolheu combinar as incertezas estatísticas e sistemáticas deste ponto através de um método de ponto médio. Ou seja, eles estimam a incerteza deste ponto a partir de uma média aritmética das incertezas estatísticas e sistemáticas, em vez de usar o método mais recomendado da soma em quadratura de ambos os tipos de incertezas. No entanto, analisamos o modelo M3 com essa nova incerteza e a diferença foi insignificante para os parâmetros em comparação com a Tabela 4.7.

Como mencionado anteriormente, os modelos M1 - M3 são favorecidos pela análise BIC, por isso vamos nos concentrar neles a partir de agora e apresentar seus contornos estatísticos em Figura 4.6-Figura 4.11.

Como pode ser visto, em Figura 4.6-Figura 4.11 incluímos parâmetros originais e derivados⁵. Podemos ver a complementaridade dos dados SN Ia e $H(z)$, principalmente para H_0 , pois não é restringido por SN Ia. Também podemos notar uma grande correlação entre os parâmetros de ordem superior.

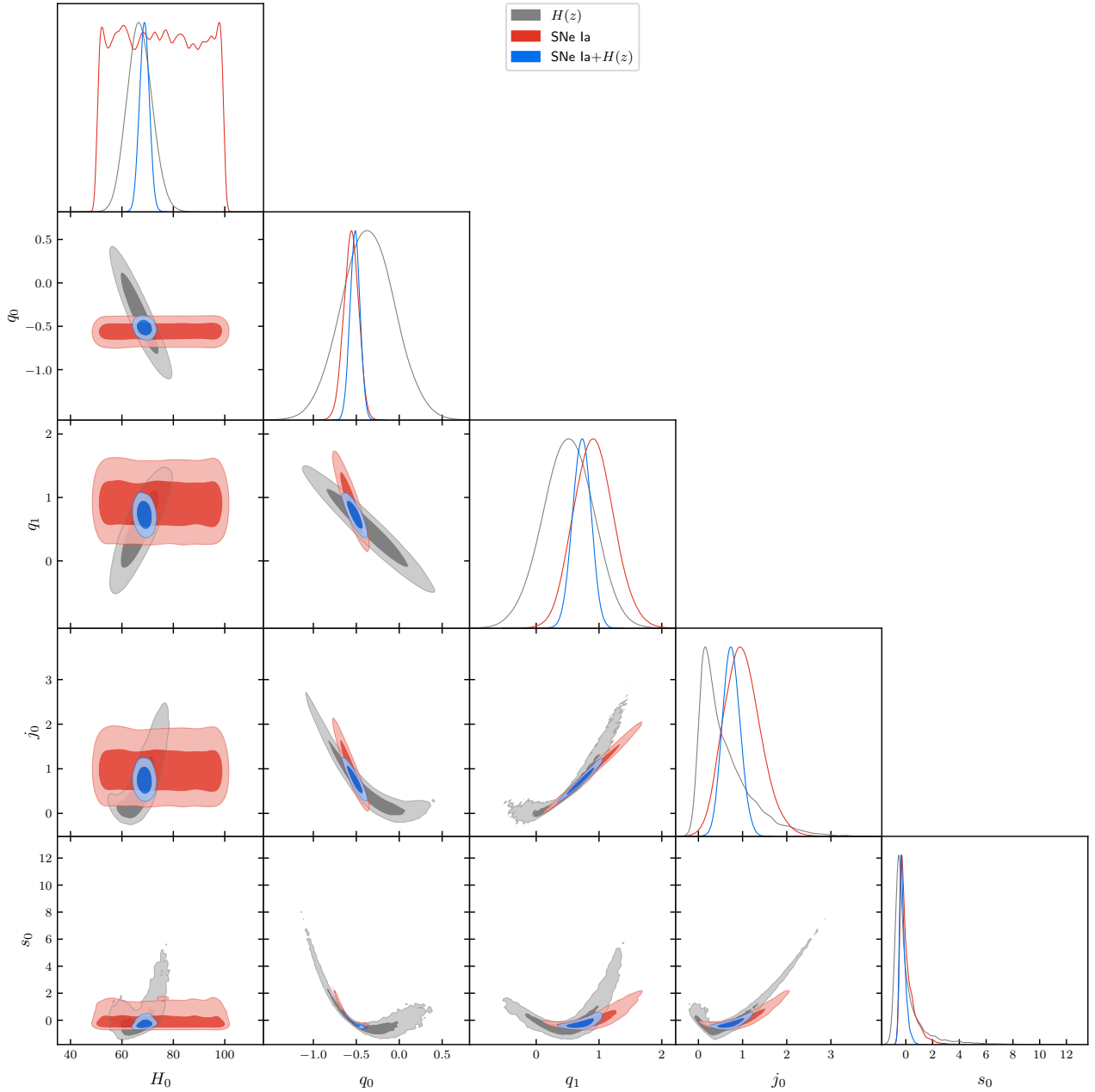
Pode-se observar em mais detalhes os modelos M1, M2 e M3 na Tabela 4.8, onde mostramos os resultados para os parâmetros cinemáticos desses modelos, com 1 e 2σ c.l. Os posteriores para estes parâmetros podem ser vistos na Figura 4.12.

Como se pode ver na Tabela 4.8, H_0 e q_0 são compatíveis com os modelos M1, M2 e M3; j_0 é compatível entre os modelos M2 e M3 a $1,25\sigma$, mas é marginalmente compatível entre os modelos M1 e M2 a $2,19\sigma$. O resultado mais drástico vem do snap: uma discrepância de $2,65\sigma$ entre M2 e M3 e uma discrepância de $2,63\sigma$ entre os modelos M2 e M1. Mencionaremos que esta análise de diferenças entre parâmetros é aproximada principalmente para o snap, onde fizemos uma simetrização das incertezas.

Como pode ser visto na Figura 4.12, a discrepância para os parâmetros cinemáticos é maior para derivadas mais altas (parâmetros de ordem superior), portanto pode surgir de diferentes tendências dos parâmetros cinemáticos com o *redshift*. A discrepância encontrada para o snap é ainda maior quando comparamos os modelos M1 e M2. Como se pode ver na Tabela 4.4, as expressões para o snap nestes modelos são bastante semelhantes. No entanto, os parâmetros q_1 e q_a apresentam uma pequena diferença que é amplificada nos termos $7q_0q_1$ e $7q_0q_a$ levando a uma grande diferença no snap. Estatisticamente falando, pode-se notar também em Figura 4.7, Figura 4.9 e Figura 4.11 que há uma maior correlação entre os parâmetros para os modelos M1 e M2 onde há mais parâmetros derivados (j_0 e s_0), do que o modelo M3, onde há menos parâmetros derivados (somente s_0). A introdução de parâmetros mais derivados pode induzir uma correlação artificial entre os parâmetros que pode levar a discrepâncias como a encontrada para o snap.

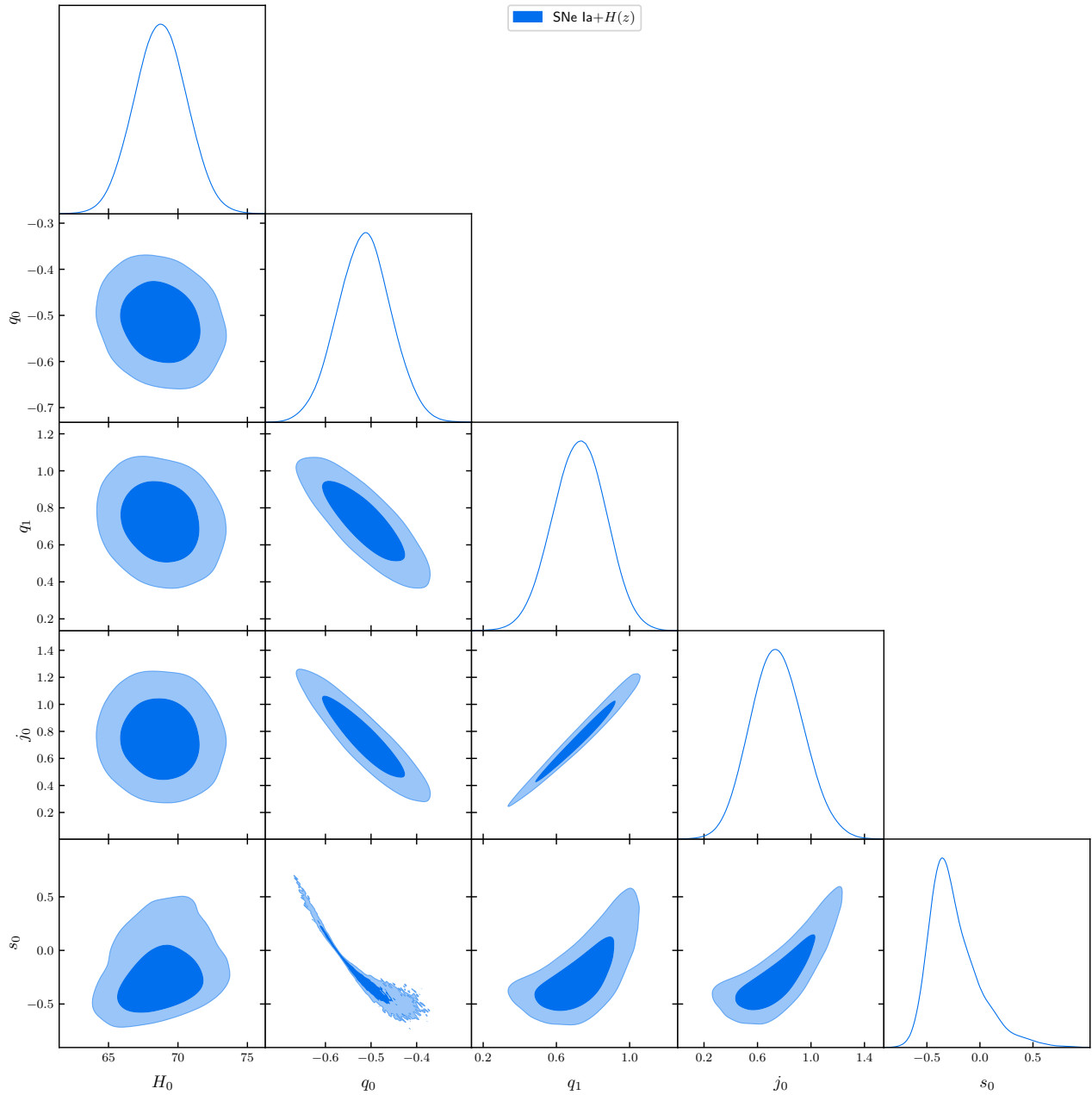
⁵ Devemos mencionar que obtivemos as restrições de parâmetros derivados diretamente das cadeias de Monte Carlo-Markov, conforme explicado, por exemplo, nos exemplos da galeria de gráficos getdist (https://getdist.readthedocs.io/en/latest/plot_gallery.html).

Figura 4.6 – Resultados completos para o modelo M1: $q(z) = q_0 + q_1 z$. Em vermelho, de super-novas. Em cinza, de dados de $H(z)$. E em azul, a combinação de ambos dados. Pode-se notar que a combinação delimita mais os valores dos parâmetros



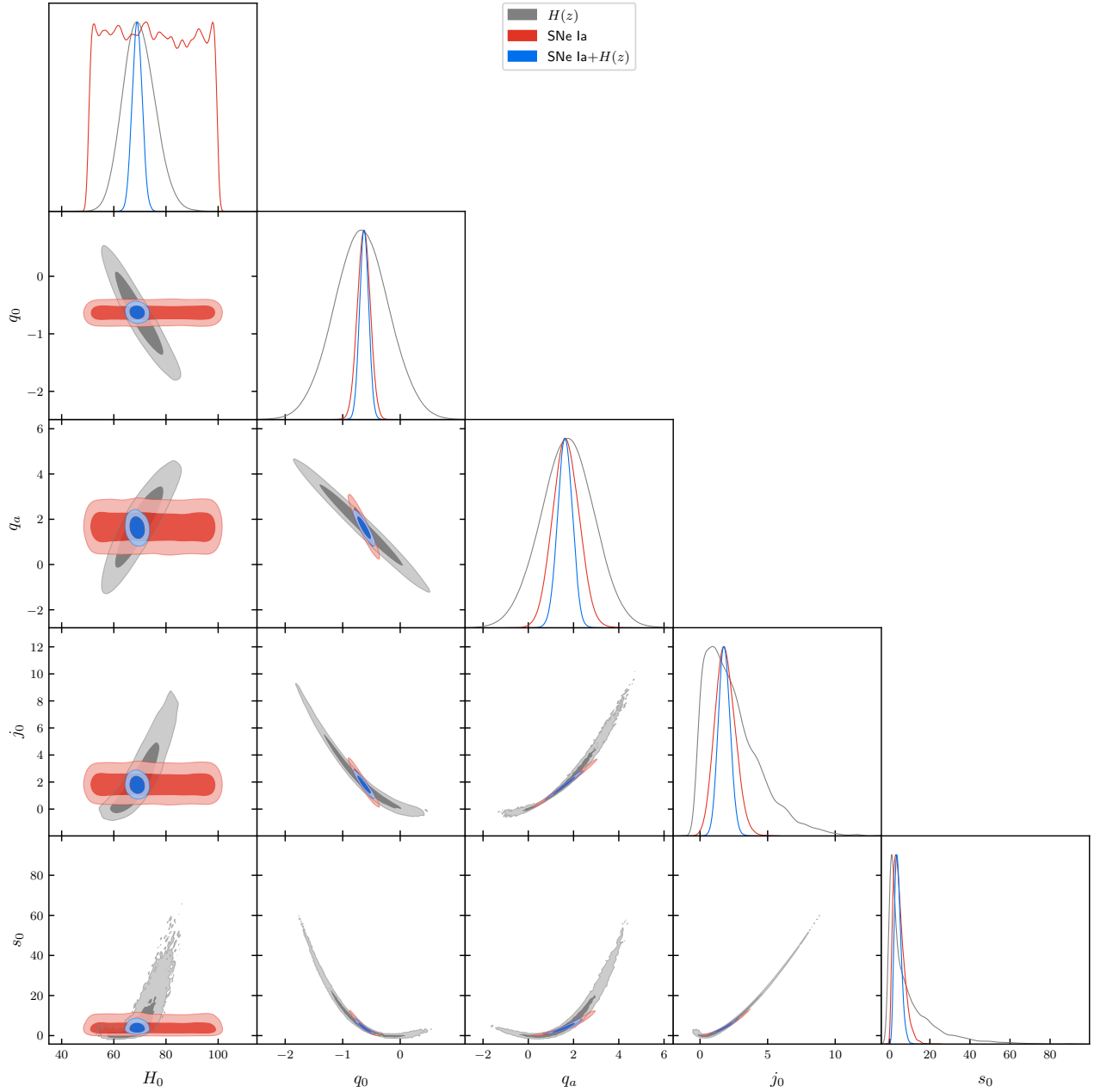
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.7 – Combinado isolado para o modelo M1. Inclinação positiva indica correlação. Inclinação negativa indica correlação reversa. Círculos indicam ausência ou baixa correlação.



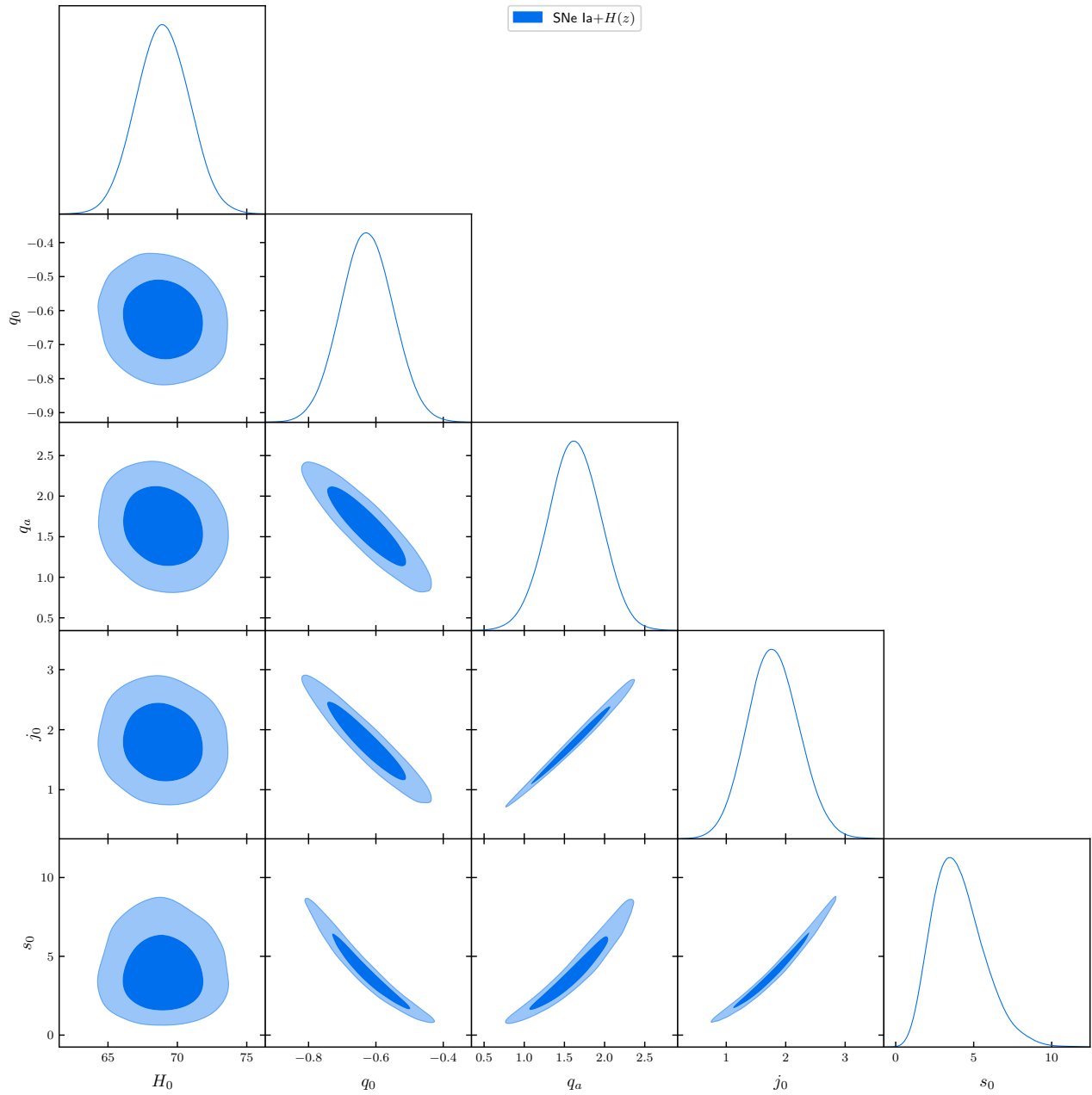
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.8 – Resultados completos para o modelo M2: $q(z) = q_0 + q_a(1 - a)$.



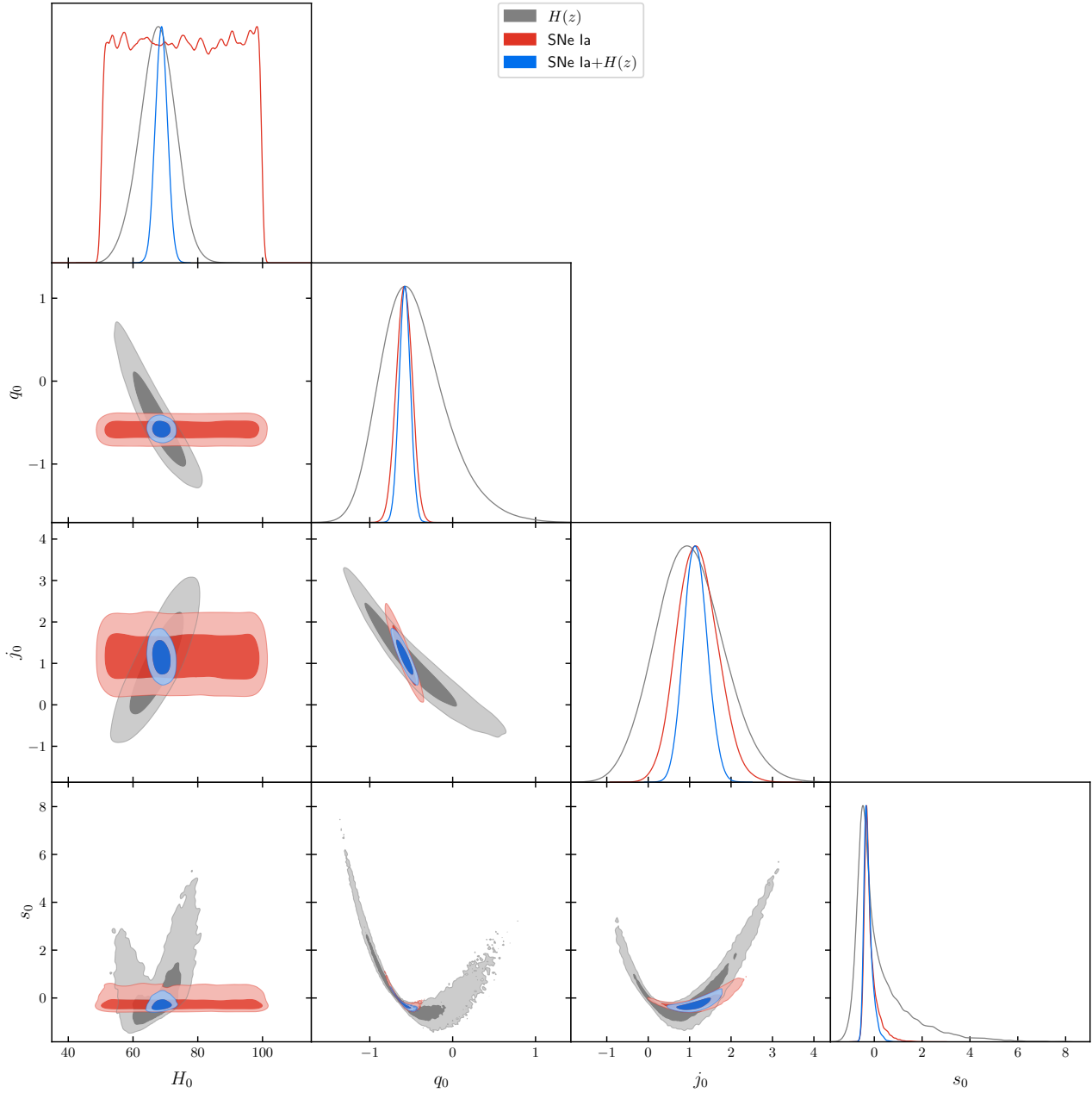
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.9 – Combinado isolado para o modelo M2.



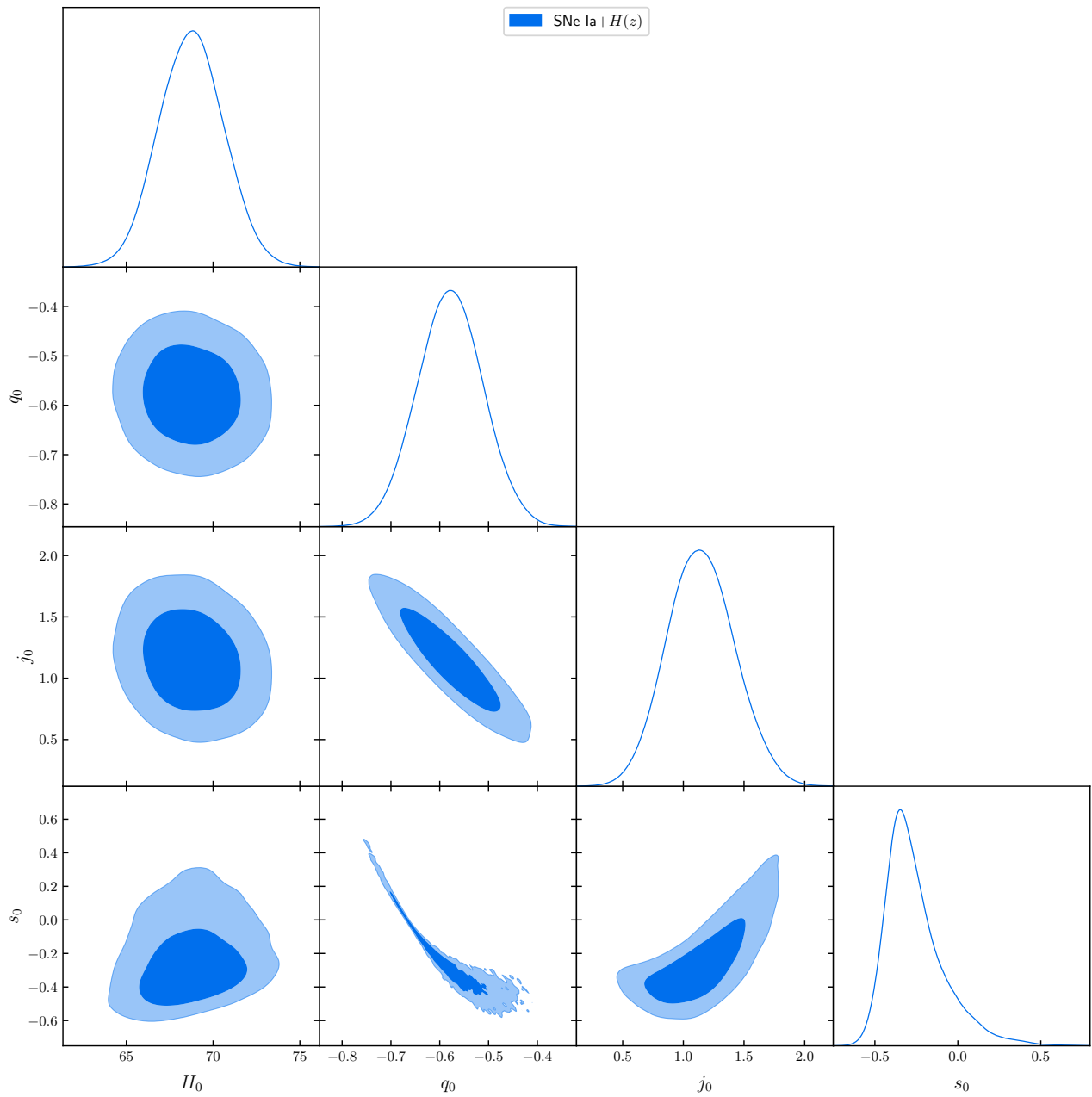
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.10 – Resultados completos para o modelo M3: $j(z) = j_0$.



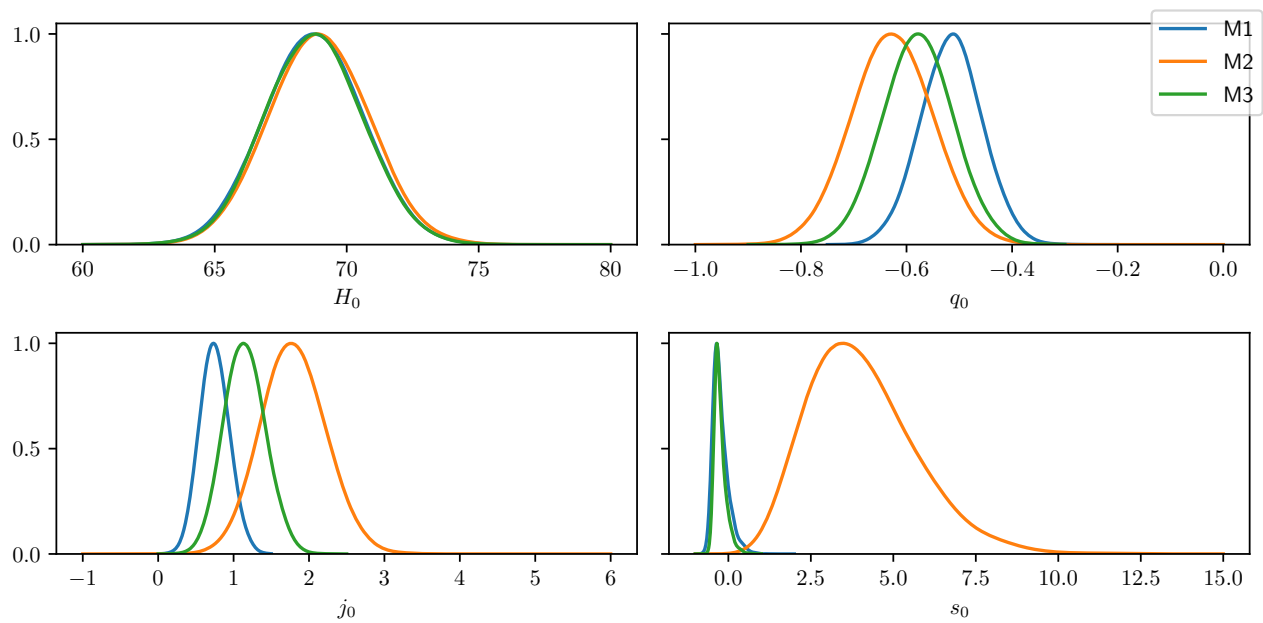
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.11 – Combinado isolado para o modelo M3.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.12 – Posteriores marginalizados para os modelos M1, M2 e M3. A concordância para H_0 foi alta em todos os modelos, razoável para q_0 e j_0 e marginal para s_0 .



fonte: Produção do próprio autor.

5 CONCLUSÃO

Os modelos cinemáticos são promissores por possibilitar a determinação de parâmetros cosmológicos de forma independente da dinâmica, o que permite uma descrição menos enviesada e dependente de modelos de conteúdo energético. Neste trabalho mostramos que podemos modelar a expansão do universo sem recorrer a presunções do seu conteúdo energético e incluímos parâmetros cinemáticos de ordem elevada (o *snap*).

Um exemplo de modelo dinâmico, onde o conteúdo de energia do universo é assumido a priori, foi apresentado no capítulo 3, onde buscamos averiguar se o modelo XCDM alivia o problema da coincidência (CP). Estudamos um modelo de interação DE-DM onde a razão entre esses componentes pode mudar de tempos primordiais para tempos recentes, satisfazendo uma relação da forma $\rho_x \propto \rho_d^\alpha$, onde ρ_x e ρ_d são as densidades de energia das componentes de energia escura e matéria escura, respectivamente, e α é um parâmetro livre. Em seguida, comparamos a razão ρ_d/ρ_x ao longo do tempo para dois modelos distintos, a saber, o modelo $\Lambda(t)$ CDM e o modelo XCDM interagente. Dizemos que CP é resolvido se a razão for ~ 1 ao longo da evolução do tempo, e é aliviado se a razão for menor que a prevista pelo modelo padrão atual.

No caso de $\Lambda(t)$ CDM, no intervalo de 2σ do parâmetro α , a razão ρ_d/ρ_Λ em $z = 1000$ é reduzida de $\approx 10^9$ para $\approx 3 \times 10^5$, e o CP é aliviado. Para XCDM interativo, no entanto, surge uma degenerescência no plano $w - \alpha$, de tal forma que para o DE *phantom*, α torna-se negativo. Para o melhor ajuste, o CP é ainda pior, $\rho_d/\rho_x \approx 2 \times 10^9$ em $z = 1000$. No intervalo de 2σ do parâmetro α , a razão ρ_d/ρ_x é ligeiramente reduzida para $\approx 2 \times 10^8$, e o CP nem sequer é aliviado. No entanto, somente se alguém fizesse uma análise completa do espectro CMB, uma conclusão final poderia ser tirada, neste caso.

No capítulo 4 analisamos 8 parametrizações cosmológicas cinemáticas em função de dados de $H(z)$ e SN Ia. Uma comparação Bayesiana favoreceu modelos onde o parâmetro de desaceleração é linearmente dependente do *redshift* (M1), do fator de escala (M2) e um modelo onde o *jerk* é constante (M3). Esses modelos eram compatíveis quanto à constante de Hubble e ao parâmetro de desaceleração atual, eram marginalmente compatíveis no valor atual do *jerk* e eram incompatíveis no valor atual do *snap*.

De acordo com o argumento da convergência em série, o modelo M2 deve ser favorecido, pois é uma expansão do fator de escala. No entanto, se acreditarmos que o modelo plano Λ CDM é o modelo dinâmico subjacente correto, devemos esperar que o modelo M3 seja favorecido, pois tem o modelo plano Λ CDM como um caso especial (com $j_0 = 1$). Além disso, M3 é ligeiramente favorecido pela análise BIC. Os dados atuais, no entanto, não são suficientes para descartar nenhum desses três modelos (M1, M2 e M3).

Enfim, no apêndice apresentamos o trabalho mais recente envolvendo processos gaussianos, ele serve de trabalho preliminar para um estudo de modelos cinemáticos usando esse método, em vez da parametrização simples. O trabalho está em desenvolvimento e por isso não foi incluso aqui.

REFERÊNCIAS

- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. **Astron. Astrophys.**, v. 641, p. A6, 2020.
- AGRAWAL, P. et al. On the cosmological implications of the string swampland. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 784, p. 271–276, sep 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2018.07.040>>.
- AL., G.-B. Z. et. Dynamical dark energy in light of the latest observations. **Nature Astronomy**, v. 1, p. 627–632, 2017.
- ALPHER, R. A.; BETHE, H.; GAMOW, G. The origin of chemical elements. **Phys. Rev.**, v. 73, p. 803–804, 1948.
- AMIRHASHCHI, H.; AMIRHASHCHI, S. Recovering λ cdm model from a cosmographic study. **General Relativity and Gravitation**, Springer Science and Business Media LLC, v. 52, n. 2, feb 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fs10714-020-2664-5>>.
- AVILES, A. et al. Precision cosmology with padé rational approximations: Theoretical predictions versus observational limits. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 90, p. 043531, Aug 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.043531>>.
- BARANOV, I. P. R.; JESUS, J. F.; LIMA, J. A. S. Testing creation cold dark matter cosmology with the radiation temperature-redshift relation. **General Relativity and Gravitation**, Springer Science and Business Media LLC, v. 51, n. 2, feb 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fs10714-019-2516-3>>.
- BARGIACCHI, G. et al. Cosmography by orthogonalized logarithmic polynomials. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 649, p. A65, may 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051%2F0004-6361%2F202140386>>.
- BARROW, J. D.; SAICH, P. Scalar-field cosmologies. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 10, n. 2, p. 279–283, feb 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/10/2/009>>.
- BENNDORF, D.; JESUS, J. F.; PEREIRA, S. H. Determination of the kinematic parameters from SNe ia and cosmic chronometers. **The European Physical Journal C**, Springer Science and Business Media LLC, v. 82, n. 5, may 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-022-10378-x>>.
- BERNARDO, R. C.; SAID, J. L. A data-driven reconstruction of horndeski gravity via the gaussian processes. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2021, n. 09, p. 014, sep 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2021%2F09%2F014>>.
- BERNARDO, R. C.; SAID, J. L. Towards a model-independent reconstruction approach for late-time hubble data. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2021, n. 08, p. 027, aug 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2021%2F08%2F027>>.
- BLANDFORD, R. D. et al. **Cosmokinetics**. arXiv, 2004. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0408279>>.

- BULL, P. et al. Beyond λ cdm: Problems, solutions, and the road ahead. **Physics of the Dark Universe**, v. 12, p. 56–99, 2016. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686416300097>>.
- CAI, R.-G.; SU, Q. On the dark sector interactions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 103514, May 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.103514>>.
- CAI, R.-G.; SU, Q. On the dark sector interactions. 2019.
- CALDERA-CABRAL, G.; MAARTENS, R.; SCHAEFER, B. M. The growth of structure in interacting dark energy models. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2009, n. 07, p. 027–027, jul 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2009/07/027>>.
- CAMARENA, D.; MARRA, V. The impact of the cosmic variance on h_0 on cosmological analyses. 2018.
- CAO, S.; RYAN, J.; RATRA, B. Cosmological constraints from hii starburst galaxy apparent magnitude and other cosmological measurements. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 497, n. 3, p. 3191–3203, jul 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/staa2190>>.
- CAPOZZIELLO, S.; D'AGOSTINO, R.; LUONGO, O. Cosmographic analysis with Chebyshev polynomials. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 476, n. 3, p. 3924–3938, 02 2018. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/sty422>>.
- CARROLL, S. M.; PRESS, W. H.; TURNER, E. L. The Cosmological constant. **Ann. Rev. Astron. Astrophys.**, v. 30, p. 499–542, 1992.
- CATTOËN, C.; VISSER, M. The hubble series: convergence properties and redshift variables. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 24, n. 23, p. 5985–5997, nov 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/23/018>>.
- CÉLÉRIER, M.-N. Effects of inhomogeneities on the expansion of the Universe: a challenge to dark energy? **J. Phys. Conf. Ser.**, v. 484, p. 012005, 2014.
- CELIERIER, M.-N.; BOLEJKO, K.; KRASINSKI, A. A (giant) void is not mandatory to explain away dark energy with a Lemaitre – Tolman model. **Astron. Astrophys.**, v. 518, p. A21, 2010.
- CHABOYER, B. The age of the universe. **Phys. Rept.**, v. 307, p. 23–30, 1998.
- CHEN, L.; HUANG, Q.-G.; WANG, K. Distance priors from planck final release. 2018.
- CHIMENTO, L. P. Linear and nonlinear interactions in the dark sector. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 043525, Feb 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.043525>>.
- CLIFTON, T. et al. Modified Gravity and Cosmology. **Phys. Rept.**, v. 513, p. 1–189, 2012.
- COLGAIN, E. O. **private communication**, 2021.
- COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 15, p. 1753–1936, 2006.
- CUNHA, J. V.; LIMA, J. A. S. Transition Redshift: New Kinematic Constraints from Supernovae. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 390, p. 210–217, 2008.

- DIMAKIS, N. et al. General analytic solutions of scalar field cosmology with arbitrary potential. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 93, n. 12, jun 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.123518>>.
- DODELSON, F. S. S. **Modern Cosmology**. Londres, Reino Unido: Academic Press, 2021.
- EINSTEIN, A. The Field Equations of Gravitation. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 1915, p. 844–847, 1915.
- EINSTEIN, A. The Foundation of the General Theory of Relativity. **Annalen Phys.**, v. 49, n. 7, p. 769–822, 1916.
- EINSTEIN, A. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)**, v. 1917, p. 142–152, 1917.
- EISENSTEIN, D. J. et al. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. **Astrophys. J.**, v. 633, p. 560–574, 2005.
- ELGARROY, O.; MULTAMAKI, T. Bayesian analysis of friedmannless cosmologies. **JCAP**, v. 09, p. 002, 2006.
- ELGARØY, Ø.; MULTAMÄKI, T. Bayesian analysis of friedmannless cosmologies. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2006, n. 09, p. 002–002, sep 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2006/09/002>>.
- ESCAMILLA-RIVERA, C.; SAID, J. L.; MIFSUD, J. Performance of non-parametric reconstruction techniques in the late-time universe. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2021, n. 10, p. 016, oct 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/10/016>>.
- ESCOBAL, A. A.; JESUS, J. F.; PEREIRA, S. H. Cosmological constraints on scalar field dark matter. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific Pub Co Pte Ltd, v. 30, n. 15, sep 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/IMD.2021.30150108x>>.
- FAROOQ, O. et al. HUBBLE PARAMETER MEASUREMENT CONSTRAINTS ON THE REDSHIFT OF THE DECELERATION–ACCELERATION TRANSITION, DYNAMICAL DARK ENERGY, AND SPACE CURVATURE. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 835, n. 1, p. 26, jan 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/835/1/26>>.
- FELTEN, J. E.; ISAACMAN, R. Scale factors $R(t)$ and critical values of the cosmological constant Λ in Friedmann universes. **Rev. Mod. Phys.**, v. 58, p. 689–698, 1986.
- FIXSEN, D. J. The temperature of the cosmic microwave background. 2009.
- FOREMAN-MACKEY, D. et al. emcee: The MCMC hammer. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, IOP Publishing, v. 125, n. 925, p. 306–312, mar 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/670067>>.
- FREEDMANN, W. L. Cosmology at a Crossroads. **Nature Astron.**, v. 1, p. 0121, 2017.
- FRIEDMANN, A. On the Curvature of space. **Z. Phys.**, v. 10, p. 377–386, 1922.
- FRIEDMANN, A. On the Possibility of a world with constant negative curvature of space. **Z. Phys.**, v. 21, p. 326–332, 1924.
- Gamow, G. **My world line: An informal autobiography**. [S.l.: s.n.], 1970.

GÓMEZ-VALENT, A. Quantifying the evidence for the current speed-up of the universe with low and intermediate-redshift data. a more model-independent approach. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2019, n. 05, p. 026–026, may 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2019%2F05%2F026>>.

GÓMEZ-VALENT, A.; PETTORINO, V.; AMENDOLA, L. Update on coupled dark energy and the h_0 tension. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 101, n. 12, jun 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.101.123513>>.

GONG, Y.-G.; WANG, A. Reconstruction of the deceleration parameter and the equation of state of dark energy. **Phys. Rev. D**, v. 75, p. 043520, 2007.

GOODMAN, J.; WEARE, J. Ensemble samplers with affine invariance. **Comm. App. Math. Comp. Sci.**, v. 5, n. 1, p. 65, 2010. Disponível em: <<https://msp.org/camcos/2010/5-1/p04.xhtml>>.

GUIMARÃES, A.; CUNHA, J.; LIMA, J. Bayesian analysis and constraints on kinematic models from union snia. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2009, n. 10, p. 010, oct 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/10/010>>.

GUIMARÃES, A. C. C.; LIMA, J. A. S. Could the cosmic acceleration be transient? a cosmographic evaluation. **Classical and Quantum Gravity**, v. 28, n. 12, p. 125026, may 2011. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/28/12/125026>>.

GUTH, A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. **Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.**, v. 3, p. 139–148, 1987.

HE, J.-H.; WANG, B.; ABDALLA, E. Stability of the curvature perturbation in dark sectors mutual interacting models. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 671, n. 1, p. 139–145, jan 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2008.11.062>>.

HEISENBERG, L. et al. Dark energy in the swampland. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 98, n. 12, dec 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.98.123502>>.

HEISENBERG, L. et al. **Dark Energy in the Swampland II**. arXiv, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1809.00154>>.

HINSHAW, G. et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. **Astrophys. J. Suppl.**, v. 208, p. 19, 2013.

HOGG, D. W. Distance measures in cosmology. 5 1999.

HOLSCLAW, T. et al. Nonparametric reconstruction of the dark energy equation of state. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 82, n. 10, nov 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.82.103502>>.

HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proc. Nat. Acad. Sci.**, v. 15, p. 168–173, 1929.

JESUS, J.; ANDRADE-OLIVEIRA, F. CCDM model with spatial curvature and the breaking of “dark degeneracy”. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2016, n. 01, p. 014–014, jan 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2016%2F01%2F014>>.

JESUS, J.; PEREIRA, S. CCDM model from quantum particle creation: constraints on dark matter mass. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 07, p. 040–040, jul 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2014%2F07%2F040>>.

- JESUS, J.; VALENTIM, R.; ANDRADE-OLIVEIRA, F. Bayesian analysis of Λ CDM models. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 09, p. 030–030, sep 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2017%2F09%2F030>>.
- JESUS, J.; VALENTIM, R.; ANDRADE-OLIVEIRA, F. Bayesian analysis of Λ CDM models. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 09, p. 030–030, sep 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2017%2F09%2F030>>.
- JESUS, J. et al. Gaussian process estimation of transition redshift. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2020, n. 04, p. 053–053, apr 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2020%2F04%2F053>>.
- JESUS, J. F. et al. Can dark matter-dark energy interaction alleviate the cosmic coincidence problem? 2020.
- JESUS, J. F.; HOLANDA, R. F. L.; PEREIRA, S. H. Model independent constraints on transition redshift. **JCAP**, v. 05, p. 073, 2018.
- JESUS, J. F. et al. Gaussian Process Estimation of Transition Redshift. **JCAP**, v. 04, p. 053, 2020.
- JESUS, J. F. et al. Kinematic Constraints on Spatial Curvature from Supernovae Ia and Cosmic Chronometers. **Mon. Not. Roy. Astron. Soc.**, v. 500, n. 2, p. 2227–2235, 2020.
- JESUS, J. F. de. **Energia Escura e Aceleração do Universo: Aspectos Conceituais e Testes Observacionais**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Departamento de Astronomia, 2010.
- JIMENEZ, J. B. et al. **Cosmological future singularities in interacting dark energy models**. arXiv, 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1607.06389>>.
- KASS, R. E.; RAFTERY, A. E. Bayes factors. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 90, n. 430, p. 773–795, 1995. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1995.10476572>>.
- KHADKA, N.; RATRA, B. Quasar X-ray and UV flux, baryon acoustic oscillation, and Hubble parameter measurement constraints on cosmological model parameters. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 492, n. 3, p. 4456–4468, 01 2020. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/staa101>>.
- KRISHAK, A.; HAZRA, D. K. Gaussian process reconstruction of reionization history. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 922, n. 2, p. 95, nov 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac3251>>.
- LEE, S.; OLIVE, K. A.; POSPELOV, M. Quintessence models and the cosmological evolution of α . **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 70, n. 8, oct 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.70.083503>>.
- LEWIS, A.; BRIDLE, S. Cosmological parameters from CMB and other data: A monte carlo approach. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 66, n. 10, nov 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.66.103511>>.
- LI, C.; HOLZ, D. E.; COORAY, A. Direct reconstruction of the dark energy scalar-field potential. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 75, n. 10, may 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.75.103503>>.
- LI, M. et al. Dark Energy. **Commun. Theor. Phys.**, v. 56, p. 525–604, 2011.

LI, Y.-H.; ZHANG, X. Large-scale stable interacting dark energy model: Cosmological perturbations and observational constraints. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 89, p. 083009, Apr 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.083009>>.

LIDDLE, A. R. How many cosmological parameters. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 351, n. 3, p. L49–L53, 07 2004. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08033.x>>.

LIDDLE, A. R.; PAHUD, C.; UREÑA-LÓPEZ, L. A. Triple unification of inflation, dark matter, and dark energy using a single field. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 77, n. 12, jun 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.121301>>.

LIMA, J.; JESUS, J.; OLIVEIRA, F. CDM accelerating cosmology as an alternative to λ CDM model. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2010, n. 11, p. 027–027, nov 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/11/027>>.

LIMA, J. A. S. et al. Is the transition redshift a new cosmological number? 5 2012.

LIN, C.-M. **Triple Unification of Inflation, Dark matter and Dark energy in Chaotic Braneworld Inflation**. arXiv, 2009. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/0906.5021>>.

LOBO, F. S.; MIMOSO, J. P.; VISSER, M. Cosmographic analysis of redshift drift. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2020, n. 04, p. 043–043, apr 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/04/043>>.

MAGANA, J. et al. The cardassian expansion revisited: constraints from updated hubble parameter measurements and type ia supernovae data. 2017.

MAGAÑA, J. et al. The cardassian expansion revisited: constraints from updated hubble parameter measurements and type ia supernova data. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 476, n. 1, p. 1036–1049, feb 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/sty260>>.

MAJEROTTO, E.; VÄLIVIITA, J.; MAARTENS, R. Adiabatic initial conditions for perturbations in interacting dark energy models. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 402, n. 4, p. 2344–2354, 03 2010. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.16140.x>>.

MARTIN, J. Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask). **Comptes Rendus Physique**, v. 13, p. 566–665, 2012.

MARTINELLI, M.; TUTUSAUS, I. CMB tensions with low-redshift h_0 and s_8 measurements: Impact of a redshift-dependent type-ia supernovae intrinsic luminosity. **Symmetry**, MDPI AG, v. 11, n. 8, p. 986, aug 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/sym11080986>>.

MARTTENS, R. von et al. Model-independent reconstruction of dark sector interactions. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 104, n. 4, aug 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.043515>>.

MISNER K.S. THORNE, J. A. W. C. **Gravitation**. San Francisco, California, USA: W. H. Freeman and Company, 1973.

MORESCO, M. Raising the bar: new constraints on the hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, Oxford University Press (OUP), v. 450, n. 1, p. L16–L20, apr 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnrasl/ltv037>>.

- MORESCO, M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to $z \sim 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2012, n. 08, p. 006–006, aug 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2012%2F08%2F006>>.
- MORESCO, M. et al. A 6% measurement of the hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2016, n. 05, p. 014–014, may 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2016%2F05%2F014>>.
- MUKHERJEE, P.; BANERJEE, N. Non-parametric reconstruction of the cosmological jerk parameter. **The European Physical Journal C**, Springer Science and Business Media LLC, v. 81, n. 1, jan 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-021-08830-5>>.
- MUKHERJEE, P.; BANERJEE, N. Nonparametric reconstruction of interaction in the cosmic dark sector. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 103, n. 12, jun 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.103.123530>>.
- MUKHERJEE, P.; MUKHERJEE, A. Assessment of the cosmic distance duality relation using gaussian process. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 504, n. 3, p. 3938–3946, apr 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstab1054>>.
- NAIR, R.; JHINGAN, S.; JAIN, D. Cosmokinetics: A joint analysis of Standard Candles, Rulers and Cosmic Clocks. **JCAP**, v. 01, p. 018, 2012.
- NAIR, R.; JHINGAN, S.; JAIN, D. Exploring scalar field dynamics with gaussian processes. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 01, p. 005–005, jan 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2014%2F01%2F005>>.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. **eConf**, C0602061, p. 06, 2006.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models. **Phys. Rept.**, v. 505, p. 59–144, 2011.
- NOVOSYADLYJ, B. et al. **Dark Energy: Observational Evidence and Theoretical Models**. Kyiv: Academperiodyka, 2013. ISBN 978-966-360-239-4, 978-966-360-240-0.
- OBIED, G. et al. **De Sitter Space and the Swampland**. arXiv, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1806.08362>>.
- PALIATHANASIS, A.; PAN, S.; PRAMANIK, S. Scalar field cosmology modified by the generalized uncertainty principle. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 24, p. 245006, dec 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F32%2F24%2F245006>>.
- PALIATHANASIS, A.; TSAMPARLIS, M. Two scalar field cosmology: Conservation laws and exact solutions. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 90, n. 4, aug 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.90.043529>>.
- PALIATHANASIS, A.; TSAMPARLIS, M.; BASILAKOS, S. Dynamical symmetries and observational constraints in scalar field cosmology. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 90, n. 10, nov 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.90.103524>>.
- Peebles, P. J. E.; Ratra, B. Cosmology with a Time-Variable Cosmological “Constant”. **apjl**, v. 325, p. L17, fev. 1988.

- PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. **Astrophys. J.**, v. 142, p. 419–421, 1965.
- PERACLAULA, J. S.; PÉREZ, J. de C.; GÓMEZ-VALENT, A. Possible signals of vacuum dynamics in the universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 478, n. 4, p. 4357–4373, may 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fsty1253>>.
- PEREIRA, S. H.; JESUS, J. F. Can dark matter decay in dark energy? **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 79, p. 043517, Feb 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.043517>>.
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae. **Astrophys. J.**, v. 517, p. 565–586, 1999.
- PIATTELLA, O. **Lectures Notes in Cosmology**. Vitória, Espírito Santo, Brasil: Springer, 2018.
- PILOYAN, A.; PAVLUCHENKO, S.; AMENDOLA, L. Limits on the reconstruction of a single dark energy scalar field potential from SNe ia data. **Particles**, MDPI AG, v. 1, n. 1, p. 3, feb 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390%2Fparticles1010003>>.
- POURTSIDOU, A.; SKORDIS, C.; COPELAND, E. J. Models of dark matter coupled to dark energy. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 88, p. 083505, Oct 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.083505>>.
- RAPETTI, D. et al. A kinematical approach to dark energy studies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 375, n. 4, p. 1510–1520, feb 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111%2Fj.1365-2966.2006.11419.x>>.
- RATRA, B. Expressions for linearized perturbations in a massive-scalar-field-dominated cosmological model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 44, p. 352–364, Jul 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.44.352>>.
- RATRA, B.; PEEBLES, P. J. E. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 37, p. 3406–3427, Jun 1988. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.37.3406>>.
- RATSIMBAZAFY, A. L. et al. Age-dating luminous red galaxies observed with the southern african large telescope. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 467, n. 3, p. 3239–3254, feb 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstx301>>.
- REZAEI, M.; PERACLAULA, J. S.; MALEKJANI, M. Cosmographic approach to running vacuum dark energy models: New constraints using BAOs and hubble diagrams at higher redshifts. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), nov 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstab3117>>.
- RIESS, A. G. The expansion of the universe is faster than expected. **Nature Reviews Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 2, n. 1, p. 10–12, dec 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038%2Fs42254-019-0137-0>>.
- RIESS, A. G. et al. Cosmic distances calibrated to 1% precision with gaia EDR3 parallaxes and hubble space telescope photometry of 75 milky way cepheids confirm tension with λ cdm. **The Astrophysical Journal Letters**, American Astronomical Society, v. 908, n. 1, p. L6, feb 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847%2F2041-8213%2Fabdbaf>>.

- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **Astron. J.**, v. 116, p. 1009–1038, 1998.
- RIESS, A. G. et al. Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. **Astrophys. J.**, v. 607, p. 665–687, 2004.
- RIESS, A. G. et al. New hubble space telescope discoveries of type ia supernovae at $z > 1$: Narrowing constraints on the early behavior of dark energy. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 659, n. 1, p. 98–121, apr 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F510378>>.
- RISALITI, G.; LUSSO, E. Cosmological constraints from the Hubble diagram of quasars at high redshifts. **Nature Astron.**, v. 3, n. 3, p. 272–277, 2019.
- RUBANO, C.; BARROW, J. D. Scaling solutions and reconstruction of scalar field potentials. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 12, nov 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.64.127301>>.
- SÁ, P. M. Triple unification of inflation, dark energy, and dark matter in two-scalar-field cosmology. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 102, n. 10, nov 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.102.103519>>.
- SAHLÉ N, M.; LIDDLE, A. R.; PARKINSON, D. Direct reconstruction of the quintessence potential. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 72, n. 8, oct 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.72.083511>>.
- SAHNI, V.; WANG, L. New cosmological model of quintessence and dark matter. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 62, n. 10, oct 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.62.103517>>.
- SALVATELLI, V. et al. Indications of a late-time interaction in the dark sector. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 113, p. 181301, Oct 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.181301>>.
- SANTOS, B.; CARVALHO, J. C.; ALCANIZ, J. S. Current constraints on the epoch of cosmic acceleration. **Astropart. Phys.**, v. 35, p. 17–20, 2011.
- SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. **The Annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461 – 464, 1978. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/aos/1176344136>>.
- SCOLNIC, D. M. et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe ia from pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 859, n. 2, p. 101, may 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847%2F1538-4357%2Faab9bb>>.
- SCOLNIC, D. M. et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe ia from pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 859, n. 2, p. 101, may 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847%2F1538-4357%2Faab9bb>>.
- SEIKEL, M.; CLARKSON, C.; SMITH, M. Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using Gaussian processes. **JCAP**, v. 06, p. 036, 2012.

SEIKEL, M.; CLARKSON, C.; SMITH, M. Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using gaussian processes. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2012, n. 06, p. 036–036, jun 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2012%2F06%2F036>>.

SEIKEL, M. et al. Using $H(z)$ data as a probe of the concordance model. **Phys. Rev. D**, v. 86, p. 083001, 2012.

SHAFIELOO, A. et al. Metastable dark energy with radioactive-like decay. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 473, n. 2, p. 2760–2770, sep 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstx2481>>.

SHAFIELOO, A.; KIM, A. G.; LINDER, E. V. Gaussian process cosmography. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 85, n. 12, jun 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.85.123530>>.

SHAPIRO, C.; TURNER, M. S. What do we really know about cosmic acceleration? **Astrophys. J.**, v. 649, p. 563–569, 2006.

SHAPIRO, C.; TURNER, M. S. What do we really know about cosmic acceleration? **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 649, n. 2, p. 563–569, oct 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F506470>>.

SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 71, n. 12, jun 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.71.123001>>.

SINGH, A.; SANGWAN, A.; JASSAL, H. Low redshift observational constraints on tachyon models of dark energy. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2019, n. 04, p. 047–047, apr 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2019%2F04%2F047>>.

SKORDIS, C.; POURTSIDOU, A.; COPELAND, E. J. Parametrized post-friedmannian framework for interacting dark energy theories. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 91, p. 083537, Apr 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.083537>>.

STERN, D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. i: $H(z)$ measurements. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2010, n. 02, p. 008–008, feb 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2010%2F02%2F008>>.

SUN, C.-Y.; YUE, R.-H. New interaction between dark energy and dark matter changes sign during cosmological evolution. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, p. 043010, Feb 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.043010>>.

SUN, W.; JIAO, K.; ZHANG, T.-J. Influence of the bounds of the hyperparameters on the reconstruction of the hubble constant with the gaussian process. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 915, n. 2, p. 123, jul 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847%2F1538-4357%2Fac05b8>>.

SZYDŁOWSKI, M.; STACHOWSKI, A.; URBANOWSKI, K. The evolution of the FRW universe with decaying metastable dark energy—a dynamical system analysis. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2020, n. 04, p. 029–029, apr 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2020%2F04%2F029>>.

UREÑ A-LÓPEZ, L. A.; REYES-IBARRA, M. J. ON THE DYNAMICS OF a QUADRATIC SCALAR FIELD POTENTIAL. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 18, n. 04, p. 621–634, apr 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142%2Fs0218271809014674>>.

UREÑ A-LÓPEZ, L. A.; ROY, N. Generalized tracker quintessence models for dark energy. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 102, n. 6, sep 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.102.063510>>.

VALENTINO, E. D. et al. In the realm of the hubble tension—a review of solutions. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 38, n. 15, p. 153001, jul 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d>>.

VELASQUEZ-TORIBIO, A. M.; FABRIS, J. C. Constraints on cosmographic functions of cosmic chronometers data using gaussian processes. **Brazilian Journal of Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 52, n. 4, may 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fs13538-022-01113-8>>.

VISSER, M. Jerk, snap and the cosmological equation of state. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 21, n. 11, p. 2603–2615, apr 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F21%2F11%2F006>>.

VISSER, M. Cosmography: Cosmology without the Einstein equations. **Gen. Rel. Grav.**, v. 37, p. 1541–1548, 2005.

von Marttens, R. et al. Dark degeneracy i: Dynamical or interacting dark energy? **Physics of the Dark Universe**, v. 28, p. 100490, 2020. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686419303292>>.

VäLIVIITA, J.; MAARTENS, R.; MAJEROTTO, E. Observational constraints on an interacting dark energy model. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 402, n. 4, p. 2355–2368, 03 2010. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.16115.x>>.

VäLIVIITA, J.; MAJEROTTO, E.; MAARTENS, R. Large-scale instability in interacting dark energy and dark matter fluids. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2008, n. 07, p. 020, jul 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2008%2F07%2F020>>.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. New York, USA: John Wiley and Sons, 1972.

WEINBERG, S. The Cosmological Constant Problem. **Rev. Mod. Phys.**, v. 61, p. 1–23, 1989.

WEINBERG, S. The Cosmological constant problems. In: **4th International Symposium on Sources and Detection of Dark Matter in the Universe (DM 2000)**. [S.l.: s.n.], 2000. p. 18–26.

WILLIAMS; RASMUSSEN. **Gaussian processes for machine learning**. [S.l.]: MIT press Cambridge, 2006.

XU, L.; LU, J. Cosmic constraints on deceleration parameter with Sne Ia and CMB. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 24, p. 369–376, 2009.

XU, L.-I. et al. Constraints to deceleration parameters by recent cosmic observations. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 23, p. 1939–1948, 2008.

YANG, W. et al. 2021- h_0 odyssey: closed, phantom and interacting dark energy cosmologies. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2021, n. 10, p. 008, oct 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2021%2F10%2F008>>.

- YANG, W. et al. Constraints on quintessence scalar field models using cosmological observations. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 100, n. 2, jul 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.023522>>.
- YANG, W. et al. Metastable dark energy models in light of planck 2018: Alleviating the h_0 tension. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 102, n. 6, sep 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.063503>>.
- YU, H.; RATRA, B.; WANG, F.-Y. Hubble Parameter and Baryon Acoustic Oscillation Measurement Constraints on the Hubble Constant, the Deviation from the Spatially Flat Λ CDM Model, the Deceleration–Acceleration Transition Redshift, and Spatial Curvature. **Astrophys. J.**, v. 856, n. 1, p. 3, 2018.
- ZHANG, C. et al. Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven. **Res. Astron. Astrophys.**, v. 14, n. 10, p. 1221–1233, 2014.
- ZWICKY, F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. **Helv. Phys. Acta**, v. 6, p. 110–127, 1933.
- ZWICKY, F. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. **Astrophys. J.**, v. 86, p. 217–246, 1937.

APÊNDICE A – RECONSTRUÇÕES NÃO-PARAMÉTRICAS – PROCESSOS GAUSSIANOS

Podemos estar interessados em reconstruir as quantidades cinemáticas de modo independente de parametrizações, obtendo a reconstrução da forma mais direta dos dados possível. Neste apêndice apresentamos um trabalho desenvolvido usando os processos gaussianos (GP). Ele ainda é um modelo dinâmico e serve de base para uma modelagem cinemática usando os GP atualmente em desenvolvimento.

Existem vários métodos de estatística não-paramétrica (redes neurais, análise de componentes principais etc.), mas focaremos aqui num método que tem obtido grande atenção na cosmologia devido à sua praticidade e disponibilidade de códigos de livre acesso, os Processos Gaussianos.

A ideia dos Processos Gaussianos (*Gaussian Processes*, GP) é obter a partir de um conjunto de dados $f(x_i) \pm \sigma_i$ uma reconstrução da função $f(x)$. Isso é feito a partir da hipótese de que os erros dos dados são gaussianos. Dessa forma, a função subjacente que descreve os dados é vista como um processo gaussiano, quer dizer, ela é gerada a partir de uma distribuição gaussiana ponto a ponto.

É possível mostrar (SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012a; SEIKEL et al., 2012; YU; RATRA; WANG, 2018; JESUS et al., 2020a) que o valor esperado μ e a variância σ^2 da função $f(x)$ nesse processo gaussiano são dados por:

$$\mu(x) = \sum_{i,j=1}^N k(x, x_i)(M^{-1})_{ij}f(x_j) \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma^2(x) = k(x, x) - \sum_{i,j=1}^N k(x, x_i)(M^{-1})_{ij}k(x_j, x) \quad (\text{A.2})$$

onde N é o número de dados, a matriz $M_{ij} = k(x_i, x_j) + c_{ij}$, c_{ij} é a matriz de covariância dos dados e $k(x, x')$ é a função de covariância ou *kernel* entre os pontos x e x' .

Um dos principais ingredientes para se obter a reconstrução por GP é a função de covariância. Como supomos que os dados descrevem a mesma função $f(x)$ subjacente, dois pontos x e x' não são independentes entre si, então possuem uma covariância. Para se fazer a reconstrução é preciso escolher uma função de covariância, a função que vai modelar a correlação entre esses pontos. Uma função de covariância bastante usada é a de quadrado exponencial (ou gaussiana):

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{2l^2} \right] \quad (\text{A.3})$$

onde σ_f e l são hiperparâmetros da função de covariância. σ_f está relacionado à variação vertical dos dados e l está relacionado à variação horizontal. Para usarmos as equações (A.1) e (A.2) para reconstruirmos a função $f(x)$, precisamos determinar os hiperparâmetros. Eles podem ser obtidos a

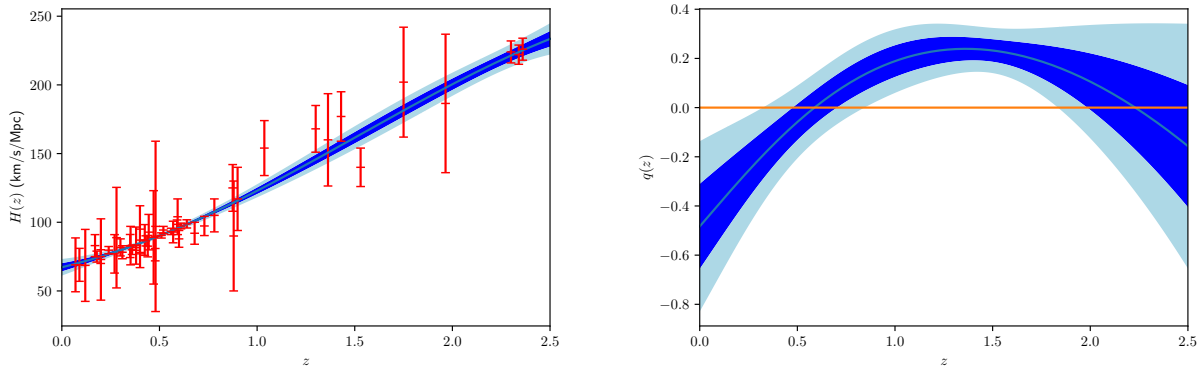
partir da maximização da função de verossimilhança marginalizada logarítmica:

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N f(x_i) (M^{-1})_{ij} f(x_j) - \frac{1}{2} \ln |M| - \frac{1}{2} N \ln 2\pi \quad (\text{A.4})$$

onde $|M|$ é o determinante de M_{ij} .

Podemos usar os Processos Gaussianos para reconstruir o parâmetro de Hubble em função do *redshift*, por exemplo, a partir de dados de $H(z)$. Uma vez tendo a reconstrução de $H(z)$, também é possível obter a reconstrução das derivadas $H'(z)$, $H''(z)$ etc., pois a derivada de um GP também é um GP. Assim, podemos obter outras quantidades cinemáticas como o parâmetro de desaceleração, por exemplo, a partir da Eq. (4.18). Na Figura A.13, vemos como foi feita essa reconstrução em (JESUS et al., 2020a).

Figura A.13 – **Esquerda:** 51 dados de $H(z)$ e reconstrução de $H(z)$. **Direita:** Reconstrução de $q(z)$ a partir de $H(z)$.



fonte: (JESUS et al., 2020a).

Na Figura A.13, foi usado a função de covariância quadrática exponencial na reconstrução. Além das funções médias, são mostrados também os intervalos de confiança de 1 e 2σ . Podemos ver que várias quantidades podem ser obtidas dessas reconstruções, H_0 , q_0 e z_t , que foi o objetivo de (JESUS et al., 2020a).

A.1 RECONSTRUÇÃO DO POTENCIAL DE ENERGIA ESCURA VIA PROCESSOS GAUSSIANOS

O modelo padrão da cosmologia, Λ CDM plano, prevê a aceleração atual para o universo e tem sido consistente com muitas observações (FAROOQ et al., 2017; SCOLNIC et al., 2018b; AGHANIM et al., 2020), embora existam algumas discrepâncias teóricas e observacionais (RIESS, 2019; MARTINELLI; TUTUSAUS, 2019; BULL et al., 2016) que abrem a possibilidade para outros modelos cosmológicos, como quintessência de campo escalar ou modelos de energia escura (SAHNI; WANG, 2000; RUBANO; BARROW, 2001; PALIATHANASIS; TSAMPARLIS; BASILAKOS, 2014; DIMAKIS et al., 2016; PALIATHANASIS; PAN; PRAMANIK, 2015; PALIATHANASIS; TSAMPARLIS, 2014; BARROW; SAICH, 1993; LEE; OLIVE; POSPELOV, 2004). Modelos cosmológicos unificados para

inflação, matéria escura e energia escura foram construídos com campos escalares também propostos recentemente (SÁ, 2020; LIN, 2009; LIDDLE; PAHUD; UREÑA-LÓPEZ, 2008) e restrições em modelos de campo escalar de quintessência usando observações cosmológicas também foram feitos (YANG et al., 2019; CAO; RYAN; RATRA, 2020; UREÑA-LÓPEZ; ROY, 2020; KHADKA; RATRA, 2020; SINGH; SANGWAN; JASSAL, 2019; PERACLAULA; PÉREZ; GÓMEZ-VALENT, 2018). A seleção de um modelo de campo escalar de quintessência pode ser feita escolhendo um potencial $V(\phi)$ apropriado para conduzir diferentes fases dinâmicas do Universo, e seus parâmetros livres devem ser restritos para estarem de acordo com os dados observacionais. Desde o estudo de um potencial quadrático simples de campo livre (RATRA, 1991; UREÑA-LÓPEZ; REYES-IBARRA, 2009) até potenciais do tipo lei de potência foram propostos por Peebles e Ratra (Peebles; Ratra, 1988; RATRA; PEEBLES, 1988), vários potenciais têm sido estudados no contexto de modelos de energia escura. Recentemente foi publicado um trabalho proposto por Yang et al. (YANG et al., 2019) e que os autores consideram alguns potenciais mais gerais, incluindo exponencial, hiperbólico e lei de potência geral, onde os potenciais foram estudados para restringir os modelos com oscilações acústicas bariônicas (BAO), as observações de radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB), análise conjunta da curva de luz (JLA) de supernovas tipo Ia (SN Ia), distorções espaciais de desvio para o vermelho (RSD) e os cronômetros cósmicos (CC). Recentemente, o potencial da lei de potência foi usado para restringir os parâmetros cosmológicos da magnitude aparente da galáxia HII starburst mais outras medidas cosmológicas (CAO; RYAN; RATRA, 2020).

Os potenciais acima mencionados para modelos de quintessência ou energia escura são apenas alguns exemplos de vários potenciais já estudados na literatura. No entanto, como foi mostrado recentemente, os potenciais não devem ser muito arbitrários, então devem ter algumas restrições de acordo com os critérios do pantano (OBIED et al., 2018; AGRAWAL et al., 2018; HEISENBERG et al., 2018a; HEISENBERG et al., 2018b). Tal critério impõe características restritivas em modelos de campo escalar de quintessência, como que o potencial de quintessência não deve ser mais íngreme do que a ordem de uma unidade do comprimento de Planck. Outra maneira de encontrar um potencial adequado é reconstruindo-o diretamente a partir de dados observacionais.

Um método interessante para reconstruir os parâmetros cosmológicos de um modelo foi proposto recentemente por Seikel, Clarkson e Smith (SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012b) usando o GP. A abordagem da ferramenta estatística é baseada em um método não paramétrico para reconstruir a dependência com o *redshift* de um observável cosmológico, como distância de luminosidade (SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012b), equação do parâmetro de estado da energia escura (HOLSCLAW et al., 2010), o parâmetro de Hubble (SHAFIELOO; KIM; LINDER, 2012) ou a transição para o *redshift* (JESUS et al., 2020a), por exemplo. Com o método GP, pode-se reconstruir uma função geral do modelo diretamente dos dados, sem a necessidade de uma parametrização específica para isso. A reconstrução de um potencial de campo escalar DE foi feita em (LI; HOLZ; COORAY, 2007; SAHLÉ N; LIDDLE; PARKINSON, 2005) e os limites de dados de SN Ia foram obtidos recentemente por (PILOYAN; PAVLUCHENKO; AMENDOLA, 2018). Existem várias outras análises recentes de parâmetros cosmológicos reconstruídas pelo método GP. Em (BERNARDO; SAID, 2021b) foi feita uma abordagem de reconstrução independente de modelo para dados de tempo recente do

Hubble. Em (KRISHAK; HAZRA, 2021) foi analisada a reconstrução da história da reionização. Em (ESCAMILLA-RIVERA; SAID; MIFSUD, 2021) a eficácia das técnicas de reconstrução não paramétrica foi usada no contexto do problema de tensão do parâmetro de Hubble. Em (SUN; JIAO; ZHANG, 2021) foi estudada a influência dos limites dos hiperparâmetros na reconstrução da constante de Hubble com GP. A reconstrução não paramétrica da interação no setor escuro cósmico foi feita em (MUKHERJEE; BANERJEE, 2021b; MARTTENS et al., 2021). A relação de dualidade de distância cósmica usando GP foi analisada em (MUKHERJEE; MUKHERJEE, 2021).

No trabalho que desenvolvemos o objetivo principal é reconstruir o potencial do campo escalar de energia escura diretamente dos dados de $H(z)$ e SN Ia, levando em consideração a curvatura espacial.

A.2 DINÂMICA COSMOLÓGICA

Para um modelo cosmológico de quintessência com curvatura, as equações de Friedmann podem ser escritas como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_\phi) - \frac{k}{a^2}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_\phi + 3p_\phi), \quad (\text{A.6})$$

onde ρ_m e p_m são a densidade de energia e de pressão do conteúdo de matéria e ρ_ϕ e p_ϕ são a densidade de energia e de pressão do campo escalar ϕ , dado por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (\text{A.7})$$

O potencial $V(\phi)$ carrega a informação sobre a evolução temporal do campo escalar homogêneo. Podemos reescrever o sistema (A.5)-(A.6) como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\rho_m + 2\dot{\phi}^2 - 2V(\phi) \right]. \quad (\text{A.9})$$

Eliminando $\dot{\phi}^2$ em (A.8)-(A.9) e usando a relação $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$, podemos expressar o potencial $V(\phi)$ como

$$V(\phi) = \frac{3H^2 + \dot{H}}{8\pi G} - \frac{\rho_m}{2} + \frac{k}{4\pi G a^2}, \quad (\text{A.10})$$

e para uma análise numérica, é útil usar o potencial adimensional $U(\phi)$ definido como

$$U(\phi) \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2} V(\phi). \quad (\text{A.11})$$

Os dados observacionais usados na reconstrução potencial são dados em termos do *redshift* z . Assim, é necessário mudar a dependência temporal da equação (A.10) para uma dependência de z

através da relação

$$\frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}. \quad (\text{A.12})$$

Usando a definição (A.11) e a relação (A.12), a equação para o potencial $V(\phi)$ dada por (A.10) é agora escrita como

$$U(z) = E^2 - \frac{E(1+z)}{3} \frac{dE}{dz} - \frac{\Omega_m(1+z)^3}{2} - \frac{2\Omega_k}{3}(1+z)^2. \quad (\text{A.13})$$

onde $E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0}$, $\Omega_m \equiv \frac{8\pi G\rho_{m0}}{3H_0^2}$ e $\Omega_k \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$ são quantidades adimensionais relacionadas ao parâmetro de Hubble, densidade de matéria e parâmetro de curvatura, respectivamente. Também usamos o fato de que a matéria sem pressão é conservada separadamente, de modo que $\frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2} = \Omega_m(1+z)^3$.

Por outro lado, eliminando $V(\phi)$ em (A.8)-(A.9), podemos escrever para a energia cinética do campo escalar $T \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2}$:

$$T = -\frac{\dot{H}}{8\pi G} - \frac{\rho_m}{2} + \frac{k}{8\pi G a^2} \quad (\text{A.14})$$

a partir do qual podemos definir a energia cinética adimensional $\tau \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2} T$ e escrevê-la em termos do *redshift* como:

$$\tau(z) = \frac{E(1+z)}{3} \frac{dE}{dz} - \frac{\Omega_m(1+z)^3}{2} - \frac{\Omega_k}{3}(1+z)^2. \quad (\text{A.15})$$

As expressões (A.13) e (A.15) para o potencial adimensional $U(z)$ e a energia cinética $\tau(z)$ são escritas como funções do *redshift* e outras quantidades adimensionais, em particular, $E(z)$. Isso nos permite reconstruir $U(z)$ e $\tau(z)$ reconstruindo $E(z)$ e suas derivadas via GP usando os dados de $H(z)$. Da mesma forma, para usar a reconstrução feita pelos GPs para os dados SN Ia, é vantajoso expressar o potencial de campo escalar $U(z)$ e a energia cinética $\tau(z)$ em termos da distância comovel transversal adimensional $D_M(z)$, que é dada por

$$D_M(z) = \frac{1}{\sqrt{-\Omega_k}} \sin\left(\sqrt{-\Omega_k} D_C(z)\right) \quad (\text{A.16})$$

onde a distância comóvel da linha de visão $D_C(z)$ se refere a $E(z)$ como:

$$D'_C(z) = \frac{1}{E(z)}, \quad (\text{A.17})$$

onde o *prime* denota uma derivada em relação ao *redshift* z . As distâncias adimensionais D_i estão relacionadas às distâncias dimensionais d_i como:

$$D_i \equiv \frac{d_i}{d_H}, \quad (\text{A.18})$$

onde $d_H \equiv \frac{c}{H_0}$ é a distância de Hubble.

A derivada em relação a z da distância comovel transversal $D_M(z)$ é

$$\frac{dD_M(z)}{dz} = D'_M(z) = \cos\left(\sqrt{-\Omega_k} D_C(z)\right) D'_C(z), \quad (\text{A.19})$$

então, combinando (A.16) e (A.19), encontramos

$$\left(\frac{D'_M}{D'_C}\right)^2 - \Omega_k D_M^2 = 1. \quad (\text{A.20})$$

Agora, usando (A.17), podemos expressar a relação (A.20) em termos da quantidade adimensional $E(z)$:

$$E^2 = \frac{1 + \Omega_k D_M^2}{D_M'^2}. \quad (\text{A.21})$$

Derivando em relação a z da relação (A.21):

$$E \frac{dE}{dz} = \frac{\Omega_k D_M (D_M'^2 - D_M D_M'') - D_M''}{D_M'^3}, \quad (\text{A.22})$$

o que nos permite escrever o potencial adimensional $U(\phi)$, dado por (A.13), como uma função da distância comóvel transversal $D_M(z)$ e suas derivadas, $D'_M(z)$ e $D''_M(z)$:

$$U(z) = \frac{1 + \Omega_k D_M^2}{D_M'^2} + \left(\frac{1+z}{3}\right) \frac{D_M'' + \Omega_k D_M (D_M D_M'' - D_M'^2)}{D_M'^3} - \frac{\Omega_m (1+z)^3}{2} - \frac{2\Omega_k}{3} (1+z)^2. \quad (\text{A.23})$$

Da mesma forma, a energia cinética adimensional (A.15) pode ser obtida da distância comóvel transversal como:

$$\tau(z) = \left(\frac{1+z}{3}\right) \frac{\Omega_k D_M (D_M'^2 - D_M D_M'') - D_M''}{D_M'^3} - \frac{\Omega_m (1+z)^3}{2} - \frac{\Omega_k}{3} (1+z)^2. \quad (\text{A.24})$$

A.3 CONJUNTO DE DADOS E METODOLOGIA

A amostra de dados observacionais usada neste trabalho inclui uma compilação de medições do parâmetro Hubble, $H(z)$ (MAGANA et al., 2017), e um grande conjunto de dados de SN Ia da compilação Pantheon (SCOLNIC et al., 2018b).

Para manter o modelo cosmológico de análise independente, vamos nos concentrar nas medidas astrofísicas de 31 de $H(z)$, distribuídas no intervalo $0,07 < z < 1,965$, obtidas através da estimativa de idades diferenciais de galáxias (SIMON; VERDE; JIMENEZ, 2005; STERN et al., 2010; MORESCO et al., 2012; ZHANG et al., 2014; MORESCO, 2015; MORESCO et al., 2016), chamados cronômetros cósmicos.

Os dados de SN Ia, por outro lado, consistem na amostra Pantheon, que possui 1048 medidas de SN Ia, na faixa de *redshift* $0,01 < z < 2,3$, contendo medidas de Pan-STARRS1 (PS1), SDSS, SNLS e vários conjuntos de dados low- z e HST.

A partir do conjunto de dados descrito acima, utilizaremos o método GP (SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012b), que permite a reconstrução de uma função contínua, $f(x)$, e suas derivadas através do conjunto discreto de valores desta função, em que cada um dos valores é assumido para representar uma variável aleatória que segue uma distribuição gaussiana. Como este conjunto de pontos corresponde a uma mesma função subjacente a ser reconstruída, é necessário escolher uma função de correlação $k(x_i, x_j)$ entre os pontos x_i e x_j . Existem várias funções de correlação disponíveis na literatura

(WILLIAMS; RASMUSSEN, 2006; SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012b; JESUS et al., 2020a). Realizamos a análise GP com a função de correlação chamada Exponencial Quadrada, dada por

$$k(x_i, x_j) = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{(x_i - x_j)^2}{2l^2} \right], \quad (\text{A.25})$$

onde l e σ_f são os chamados hiperparâmetros GP que devem ser determinados a partir dos dados.

Com os 31 dados de cronômetros cósmicos, podemos reconstruir diretamente a função $H(z)$ e suas derivadas. Usando a relação (A.13) podemos reconstruir o potencial adimensional $U(z)$ associado ao campo escalar ϕ . A distância comoviente transversal D_M e suas derivadas podem ser reconstruídas via GP usando as magnitudes aparentes m_B de SN Ia do Pantheon e, junto com a expressão (A.23), podemos realizar a reconstrução do potencial adimensional $U(z)$ dos dados do Pantheon.

Utilizamos o software GaPP (SEIKEL; CLARKSON; SMITH, 2012b) para implementar os Processos Gaussianos para reconstruir $H(z)$, $D_M(z)$ e suas derivadas. Em seguida, desenvolvemos um código paralelizado para encontrar $U(z)$ e $D_M(z)$ amostrando as distribuições gaussianas multivariadas envolvendo $H(z)$ e suas derivadas e $D_M(z)$ e suas derivadas.

A forma específica do potencial $V(\phi)$, além de determinar a evolução temporal do campo ϕ , pode fornecer informações importantes sobre o modelo de quintessência, como a massa associada à partícula DE e o termos de auto-interação. Faremos uma comparação do potencial $U(z)$ reconstruído em nosso método com alguns modelos já padronizados de energia escura de campo escalar presentes na literatura. Vamos nos concentrar no antigo potencial quadrático de campo livre, $U(\Phi)_{FF}$ (RATRA, 1991; UREÑ A-LÓPEZ; REYES-IBARRA, 2009) e no potencial da lei de potência de Peebles-Ratra (Peebles; Ratra, 1988; RATRA; PEEBLES, 1988), $U(\Phi)_{PL}$. O potencial quadrático de campo livre é escrito como

$$U(\Phi)_{FF} = \frac{\mu^2}{2} \Phi^2, \quad (\text{A.26})$$

onde o parâmetro $\mu \equiv m/H_0$ está relacionado com a massa m do campo escalar e $\Phi \equiv \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \phi$ é o campo escalar adimensional, enquanto o potencial da Lei da Potência é dado por

$$U(\Phi)_{PL} = \frac{\kappa \Phi^{-\alpha}}{2} \quad (\text{A.27})$$

onde κ é uma constante que é dada em termos do coeficiente α como

$$\kappa = \frac{8}{3} \left(\frac{\alpha + 4}{\alpha + 2} \right) \left[\frac{2}{3} \alpha (\alpha + 2) \right]^{\alpha/2}. \quad (\text{A.28})$$

Quando $\alpha = 0$ esse potencial se reduz ao modelo padrão Λ CDM.

A.4 RESULTADOS

Usando o método GP, conforme descrito na seção anterior, conseguimos reconstruir as funções $H(z)$ e $D_M(z)$ usando dados do parâmetro de Hubble e da amostra Pantheon, respectivamente. No entanto, para obter o potencial adimensional $U(z)$ dessas reconstruções, como pode ser visto nas Eqs.

(A.13) e (A.23), existem parâmetros livres que devem ser obtidos, a saber, Ω_m e Ω_k . Esses parâmetros não podem ser obtidos a partir da reconstrução e devem ser restringidos a partir de outras observações, que podem fornecer os *priors* desses parâmetros. Uma vez que temos *priors* sobre (Ω_m, Ω_k) , podemos obter $U(z)$ amostrando esses *priors* e a gaussiana multivariada correspondente a $(H(z), D_M(z))$ e suas derivadas.

Optamos por trabalhar com 2 *priors* diferentes para obter resultados robustos. O primeiro *prior* analisado foi o de Planck 18 (AGHANIM et al., 2020) ($\Omega_k = -0.044 \pm 0.050$, $\Omega_m = 0.315 \pm 0.022$) a 3σ c.l. Optamos por trabalhar com *priors* a 3σ c.l., pois esses resultados do Planck 18 não correspondem a cosmologias de energia escura de campo escalar, mas ao modelo Λ CDM.

O segundo *prior* que usamos foi um *prior* “grande” nos parâmetros, que abrange a maioria das observações atuais, a saber, ($\Omega_k = 0.0 \pm 0.1$, $\Omega_m = 0.30 \pm 0.05$).

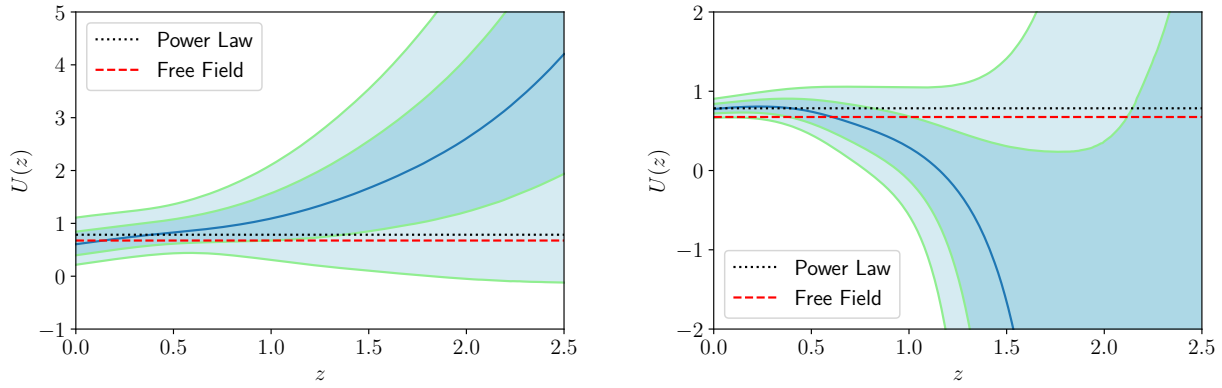
Os resultados obtidos são apresentados nas Figs. Figura A.14 e Figura A.15. Na Fig. Figura A.14, mostramos a reconstrução de $U(z)$ dentro de um intervalo de confiança 2σ , a partir de dados $H(z)$ (esquerda) e de dados Pantheon SN Ia (direita). Em ambos os casos, mostramos também a evolução do potencial adimensional. Para o modelo de Lei de Potência, $U_{PL}(z)$, com $\alpha = 0,150$ da análise realizada por (CAO; RYAN; RATRA, 2020) e para o potencial adimensional do modelo quadrático de campo livre, $U_{FF}(z)$, usamos a massa $m = 0,60H_0$ eV, que obtemos através de ligações observacionais entre os dados de $H(z)$ e a amostra Pantheon. Podemos observar que a reconstrução dos dados de $H(z)$ têm uma melhor compatibilidade com as curvas de U_{PL} e U_{FF} , em comparação com a reconstrução via SN Ia. O potencial $U_{PL}(z)$, em particular, é compatível com a reconstrução $U(z)$ em menos de 1σ em quase todo o intervalo de *redshift* analisado, enquanto o potencial $U(z)_{FF}$ está entre as linhas 1σ e 2σ em aproximadamente 40% de todo o intervalo de *redshift*.

Por outro lado, a reconstrução de $U(z)$, obtida a partir de dados do Pantheon, tem uma pequena incerteza na faixa de $z < 1$, fazendo com que as regiões de contorno até 2σ sejam bem restritas. Nesse caso, no restante do intervalo de *redshift*, a largura do intervalo de confiança 1σ aumenta de acordo com a forma que a reconstrução $U(z)$ assume, e isso leva a uma menor compatibilidade entre a reconstrução e os dois potenciais $U_{FF}(z)$ e $U_{PL}(z)$. Vemos que a curva $U_{PL}(z)$ é inicialmente sobreposta na linha 1σ atingindo a região entre 1σ e 2σ e, em $z \gtrsim 1,7$, a curva torna-se compatível em menos de 1σ da reconstrução de $U(z)$. A curva $U_{FF}(z)$ é compatível com a reconstrução em menos de 1σ em $\approx 60\%$ do intervalo de *redshift*, porém, no intervalo inicial de $z \lesssim 0,4$, é ligeiramente inferior à linha de reconstrução 2σ .

Na Fig. Figura A.15 está o gráfico sobreposto das reconstruções $U(z)$ para ambas as amostras de dados observacionais utilizadas, que foram plotadas com um intervalo de confiança de 1 e 2σ . Podemos ver que para $z \lesssim 0,5$, a reconstrução 2σ de $U(z)$ para os dados SN Ia está dentro do intervalo de 1σ da reconstrução de $U(z)$ com os dados de $H(z)$. As duas reconstruções mostram apenas uma ligeira divergência para *redshift* em torno de $z \sim 1,5$, onde não há sobreposição de seus intervalos de confiança de 1σ .

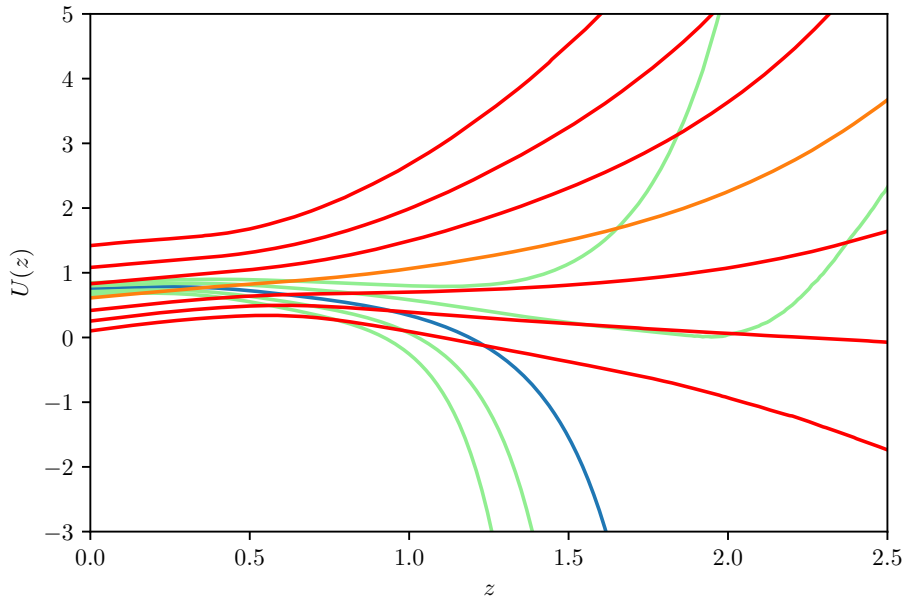
A reconstrução com prior maior é apresentada nas Figura A.17 e Figura A.18. Esta análise é descrita de forma semelhante à anterior. Na Figura A.17, a reconstrução de $U(z)$ mostra cada um dos conjuntos de dados separadamente: a curva da esquerda representa a reconstrução com os dados de

Figura A.14 – Resultados das reconstruções com *prior* do Planck a 3σ . **Esquerda:** reconstrução de $U(z)$ com os 31 dados de $H(z)$. **Direita:** reconstrução de $U(z)$ com o Pantheon.



fonte: Produção do próprio autor.

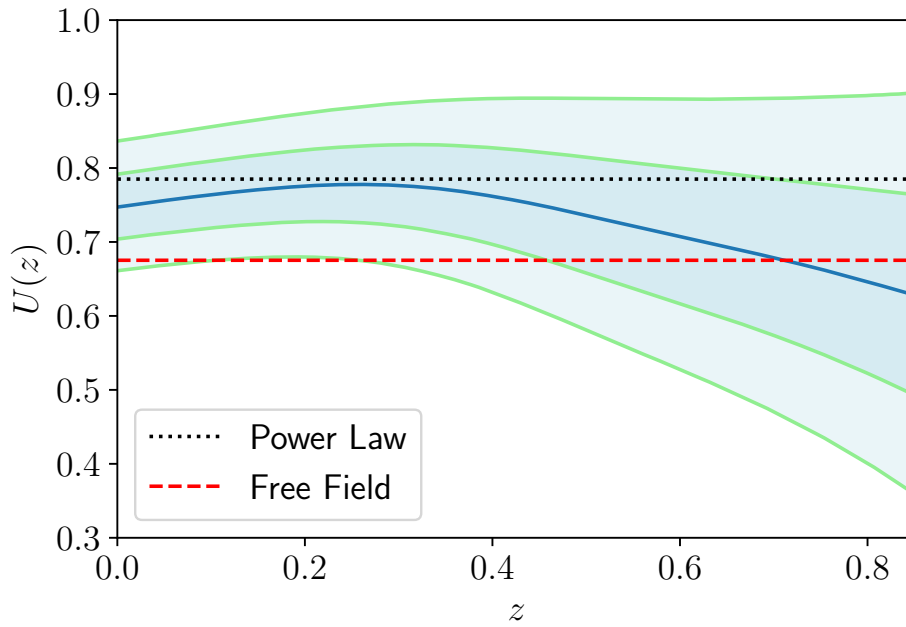
Figura A.15 – Reconstrução de $U(z)$ a partir de $H(z)$ e dados do Pantheon com *prior* de Planck de 3σ sobre Ω_m e Ω_k .



fonte: Produção do próprio autor.

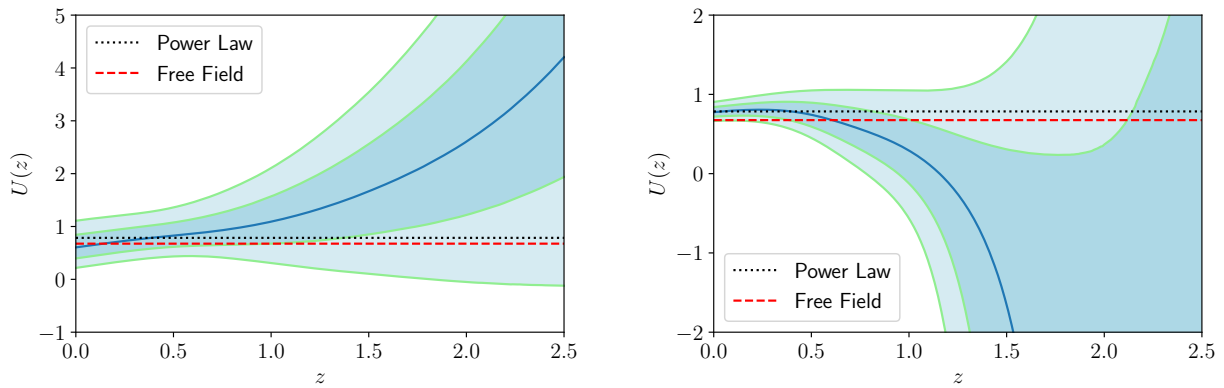
$H(z)$ e a curva da direita representa a reconstrução com os dados de SN Ia do Pantheon. Como na análise com Planck 18 anterior, traçamos as mesmas curvas de evolução dos potenciais adimensionais $U_{PL}(z)$ e $U_{FF}(z)$. A partir dessas figuras, podemos ver que a escolha do “*prior* maior” tem uma melhor compatibilidade com as curvas de ambos os potenciais de teste dentro de 1σ , para a maior parte do intervalo de *redshift*, devido ao aumento dos intervalos de confiança. Na Figura A.18, apresentamos a compilação de ambas as reconstruções de $U(z)$ realizadas com o *prior* maior. Nesta Figura, podemos ver que os intervalos de confiança 1σ de ambas as reconstruções se sobrepõem em todo o intervalo de *redshift* dos dados.

Figura A.16 – Análise conjunta: Reconstrução de $U(z)$ a partir de $H(z)$ e dados do Pantheon com *prior* de Planck de 3σ sobre Ω_m e Ω_k .



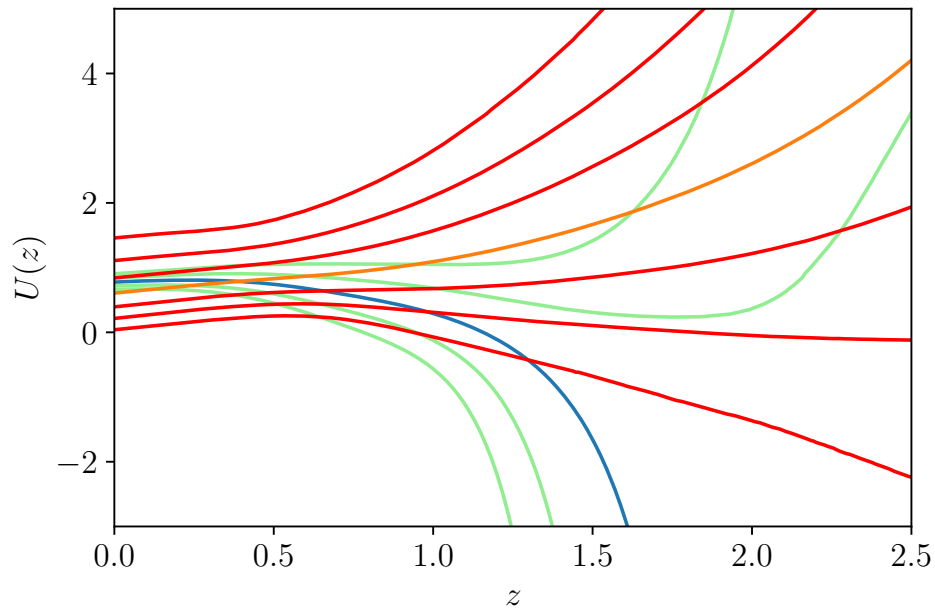
fonte: Produção do próprio autor.

Figura A.17 – Resultados das reconstruções do *prior* maior. **Esquerda:** Reconstrução de $U(z)$ a partir dos 31 dados de $H(z)$. **Direita:** Reconstrução de $U(z)$ a partir do Pantheon.



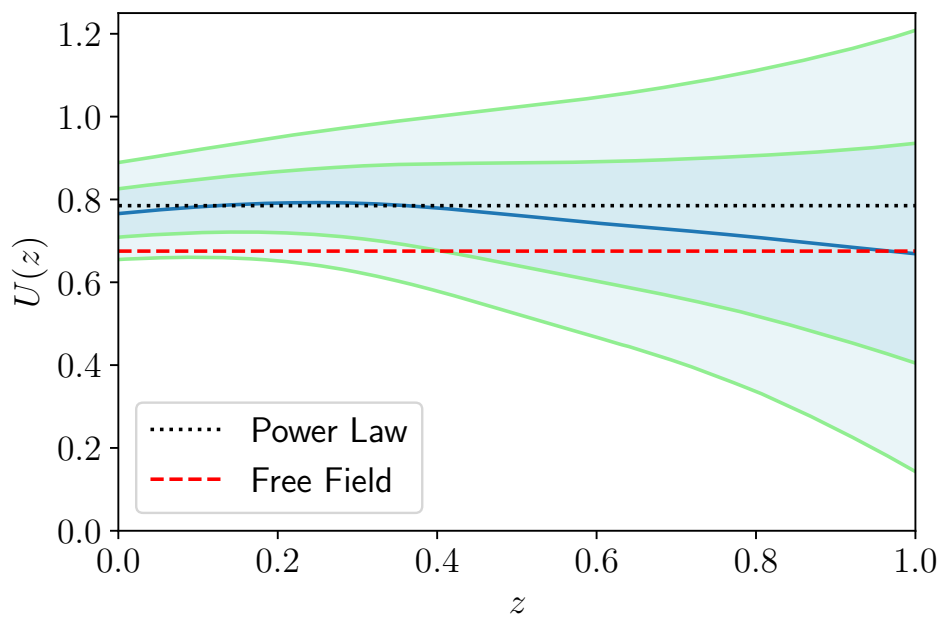
fonte: Produção do próprio autor.

Figura A.18 – Reconstrução de $U(z)$ a partir de dados de $H(z)$ e do Pantheon. Prior maior.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura A.19 – Análise conjunta: reconstrução de $U(z)$ a partir de dados de $H(z)$ e do Pantheon. Prior maior.



fonte: Produção do próprio autor.

Tabela A.9 – $U(z = 0)$ de ambos os modelos de campo escalar (Lei de Potência e Campo Livre) e de ambas as análises de Processos Gaussianos, com diferentes prioris (Prior de Planck e Prior Maior), de $H(z)$, dados SN Ia e da análise conjunta.

Modelo		Reconstrução por Processos Gaussianos					
Lei de Potência	Campo Livre	Prior de Planck			Prior Maior		
		$H(z)$	SN Ia	Conjunta	$H(z)$	SN Ia	Conjunta
$0,785^{+0,083}_{-0,063}$	$0,675^{+0,113}_{-0,131}$	$0,639^{+1,128}_{-0,543}$	$0,662^{+0,164}_{-0,125}$	$0,645^{+0,157}_{-0,121}$	$0,640^{+1,129}_{-0,542}$	$0,703^{+0,188}_{-0,149}$	$0,679^{+0,179}_{-0,144}$

fonte: Produção do próprio autor.

Em (NAIR; JHINGAN; JAIN, 2014), os autores reconstroem o potencial de energia escura usando SN Ia e BAO, assumindo um universo espacialmente plano. Eles encontram restrições mais fortes sobre $V(\phi)$, o que pode ser explicado pelo fato de assumirem um universo espacialmente plano e usarem uma compilação SN Ia mais antiga, a Union 2.1, de quando os erros sistemáticos de supernovas não eram tão bem compreendidos como hoje . Sua reconstrução também é restrita a *redshifts* mais baixos, $z < 1,4$.

Uma análise semelhante foi feita para a reconstrução da gravidade de Horndeski (BERNARDO; SAID, 2021a), incluindo o potencial de quintessência, onde eles usam os dados de $H(z)$ de Pantheon/MCT + BAO + CC, no contexto de um modelo espacialmente plano e eles encontram um comportamento para o potencial de campo escalar semelhante às nossas Figura A.14 e Figura A.17. Eles encontram limites mais rigorosos para o potencial de campo escalar devido ao fato de não permitirem que a curvatura espacial varie.

A.5 CONCLUSÃO

Encontramos restrições sobre o potencial de energia escura de campo escalar (SFDE, ou quintessência) diretamente dos dados de $H(z)$ e SN Ia, sem ter que assumir qualquer forma para o potencial. Também permitimos que a curvatura espacial e a densidade do parâmetro de matéria variem de acordo com dois *priors*, a saber, um *prior* de 3σ da CMB do Planck 18 e um “prior maior”, que abrange muitas das atuais observações.

Como resultado, descobrimos que duas formas populares do SFDE são compatíveis com nossas reconstruções, pelo menos para alguns valores de seus parâmetros e para algumas regiões dentro do intervalo dos dados de *redshift*.

Esta análise pode ser melhorada no futuro quando mais dados estiverem disponíveis, principalmente dados SN Ia com *redshift* alto, pois vimos que a reconstrução SN Ia tem erros muito maiores em *redshift* mais altos.