



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
JÚLIO DE MESQUITA FILHO
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA - SP

FERNANDO OTTA ARASHIRO

Projeto de Controle Fuzzy Takagi-Sugeno e Sistemas Chaveados com Região de Saturação

Ilha Solteira

2020

FERNANDO OTTA ARASHIRO

**Projeto de Controle Fuzzy Takagi-Sugeno e Sistemas
Chaveados com Região de Saturação**

Versão Original

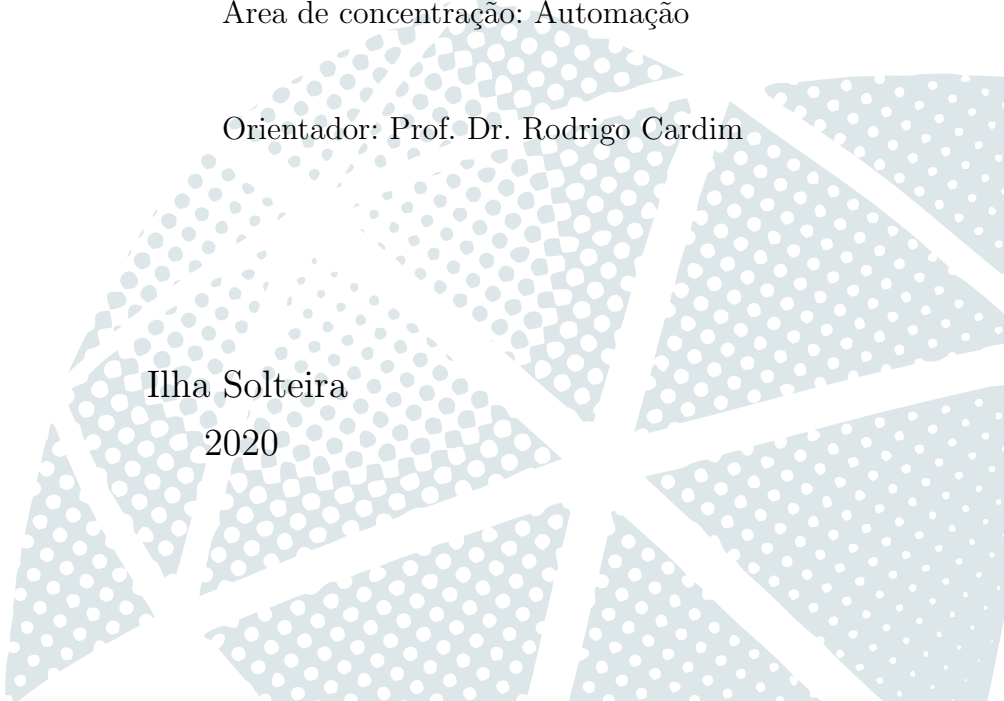
Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Câmpus de Ilha Solteira, programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Cardim

Ilha Solteira

2020



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

A662 Arashiro, Fernando Otta.
Projeto de controle *fuzzy* Takagi-Sugeno e sistemas chaveados com região de saturação / Fernando Otta Arashiro. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2020
81 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2020

Orientador: Rodrigo Cardim
Inclui bibliografia

1. Modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno. 2. Controle chaveado. 3. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).


Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Projeto de Controle Fuzzy Takagi-Sugeno e Sistemas Chaveados com Região de Saturação

AUTOR: FERNANDO OTTA ARASHIRO

ORIENTADOR: RODRIGO CARDIM

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM 
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA 
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA *Diogo Ramalho de Oliveira*
Departamento de Engenharia Elétrica e Automação / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Ilha Solteira, 24 de setembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador o prof. Dr. Rodrigo Cardim pela ajuda e paciência durante o processo de desenvolvimento deste trabalho. Aos colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC): Ariel, Bruno, Hyago, Igor e Marco que muito auxiliaram para que este trabalho fosse concluído e aos colegas Fabian e Jorge que ajudaram com o editor de LaTeX. Aos professores Marcelo C. M. Teixeira, Diogo R. de Oliveira e Marcelo A. A. Sanches que contribuíram com sugestões para este trabalho. Ao final agradeço ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Unesp de Ilha Solteira e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro e ao CNPq.

RESUMO

Neste trabalho foi estudada a aplicação do controle chaveado em sistemas não lineares que possuem parâmetros incertos. Devido à presença de incertezas, as funções de pertinência não estão disponíveis para a construção de modelos *fuzzy* (método proposto por [Taniguchi et al. \(2001\)](#)) que representam exatamente estes sistemas em uma região de operação. Dessa forma a lei de controle chaveada utilizada nesse trabalho é vantajosa pois não utiliza as funções de pertinência dos modelos locais na estrutura e as condições de projeto também podem ser descritas em termos de LMIs (do inglês *Linear matrix inequalities*). A utilização desta ferramenta matemática (LMIs) no projeto de controladores podem trazer diversas vantagens para uma busca computacional, principalmente no que diz respeito à inserção de índices de desempenho, como taxa de decaimento, restrições em sinais de entrada e saída, e também incertezas na planta. Foram realizadas simulações computacionais com o *software* Matlab/Simulink utilizando a linguagem do YALMIP, com o *solver* LMILab. Para exemplificar foi utilizado o modelo matemático de um sistema dinâmico bola-viga. Na implementação prática foi utilizado o sistema *Ball Balancer* onde foi utilizado o mesmo modelo matemático do sistema bola-viga só que neste caso em duas dimensões.

Palavras-chaves: Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Controle chaveado. Desigualdades matriciais lineares (LMIs).

ABSTRACT

In this work was studied the application of the switched control in nonlinear systems that have uncertain parameters. Due to the presence of uncertainties, the pertinence functions are not available for the construction of *fuzzy* models (method proposed by [Taniguchi et al. \(2001\)](#)) that exactly represent these systems in a region of operation. In this way, the switched control law is advantageous because it does not use the pertinence functions of the local models in the structure and the design conditions can also be described in terms of LMIs (*Linear matrix inequalities*). The use of this mathematical tool (LMIs) in the design of controllers can bring several advantages to a computational search, mainly with regard to the insertion of performance indices, such as decay rate, restrictions on input and output signals, and also uncertainties in the plant. Computer simulations were performed with the Matlab / Simulink *software* using the YALMIP language, with the LMILab *solver*. To exemplify, the mathematical model of a dynamic ball-beam system was used. In the practical implementation, the *Ball Balancer* system was used where the same mathematical model of the ball-beam system was used only in this case in two dimensions.

Keywords: Takagi-Sugeno fuzzy models. Switched control. Linear matrix inequalities (LMIs).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Aproximação Fuzzy	17
Figura 2 – Sistema Bola-Viga.	31
Figura 3 – Resposta temporal dos estados do sistema bola-viga com controlador (62).	36
Figura 4 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema bola-viga controlado pela lei (62).	37
Figura 5 – Resposta temporal dos estados do sistema bola-viga com controlador chaveado (66).	39
Figura 6 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema bola-viga controlado pela lei (66).	40
Figura 7 – Representação da Saturação.	42
Figura 8 – Representação de possíveis trajetórias de estado e das regiões.	47
Figura 9 – Resposta temporal dos estados do sistema bola-viga com a lei de controle chaveado (100) com região de saturação.	48
Figura 10 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema bola-viga com a lei de controle (100) com região de saturação.	49
Figura 11 – Resposta temporal dos estados do sistema bola-viga com a lei de controle chaveado (100) com região de saturação e redução de norma.	51
Figura 12 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema bola-viga com a lei de controle (100) com região de saturação e redução de norma.	52
Figura 13 – Resposta temporal dos estados do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66) com incertezas na matriz ampliada.	56
Figura 14 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle (66) com incertezas na matriz ampliada.	57
Figura 15 – Sistema ball balancer Quanser®	59
Figura 16 – Sinal de controle dos servomotores do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (62) e com uma falha nos atuadores.	62
Figura 17 – Posição no eixo x e o ângulo da placa (θ) do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (62) e com uma falha no atuador.	63
Figura 18 – Chaveamento dos servomotores do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (62) e com falha nos atuadores.	64

Figura 19 – Posição no plano xy do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (62) e com falha nos atuadores.	64
Figura 20 – Sinal de controle dos servomotores do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66).	66
Figura 21 – Posição no eixo x e o ângulo da placa (θ) do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66).	67
Figura 22 – Chaveamento dos servomotores do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66).	68
Figura 23 – Posição no plano xy do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66).	68
Figura 24 – Sinal de controle dos servomotores do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66), falha no atuador do eixo x e matriz ampliada.	70
Figura 25 – Posição no eixo x e o ângulo da placa (θ) do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66), falha no atuador do eixo x e matriz ampliada.	71
Figura 26 – Chaveamento dos servomotores do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66), falha no autador do eixo x e matriz ampliada.	72
Figura 27 – Posição no plano xy do sistema <i>Ball Balancer</i> com a lei de controle chaveada (66), falha no autador do eixo x e matriz ampliada.	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do sistema Bola-Viga.	32
Tabela 2 – Parâmetros do sistema Ball Balancer.	58

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Re$	Conjunto dos números reais.
Z_+	Conjunto dos números inteiros positivos.
$\Re^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\Re^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
M^T	Transposta da matriz real M .
$M > (\geq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semi-definida) positiva.
$M < (\leq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semi-definida) negativa.
$\mathbb{N}_r$	Conjunto dos primeiros r números naturais $\mathbb{N}_r = \{1, 2, \dots, r\}$.
$co\{a_1, \dots, a_r\}$	Conjunto das combinações convexas dos vetores a_i , $\forall i \in \mathbb{N}_r$; $a \in co\{a_1, \dots, a_r\}$ se e somente se $a = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$, $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$.
$M_{(l)}$	l -ésima linha de uma matriz M .
$diag\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$	Matriz bloco-diagonal cujos elementos diagonais são $M_1, M_2, \dots, M_n$.
$arg * \min_{i \in \mathbb{N}_r} \{h_i\}$	Menor índice $j \in \mathbb{N}_r$ tal que, para o conjunto $h_1, \dots, h_r$, $h_j = \min_{i \in \mathbb{N}_r} \{h_i\}$; por exemplo, dado um conjunto $H = \{h_1 = 3, h_2 = 1, h_3 = 6, h_4 = 3, h_5 = 1\}$, então $arg * \min_{i \in \mathbb{N}_r} \{h_i\} = \min\{2, 5\} = 2$.
I_q	Matriz identidade de ordem $q \times q$.
$\prod$	Produtório entre elementos; por exemplo, seja o conjunto $\mathcal{P} = p_1, p_3, p_5$, então $\prod_{p_i \in \mathcal{P}} p_i = p_1 p_3 p_5$.
$\mathcal{E}(P, \delta)$	Conjunto elipsoidal formado pelos estados $x(t) \in \Re^{n_x}$ tais que $x(t)^T P x(t) \leq \delta$, $P = P^T \in \Re^{n_x \times n_x}$, $P > 0$.
$\mathcal{E}(P, 1) \setminus \mathcal{E}(P, \delta_1)$	Conjunto formado pelos elementos $x(0)$ tais que $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ mas $x(0) \notin \mathcal{E}(P, \delta_1)$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MODELOS <i>FUZZY</i> TAKAGI-SUGENO	15
2.1	Exemplo de aproximação obtida por Modelos <i>Fuzzy</i> T-S	17
2.2	Controladores com Modelos <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	18
2.3	Condições para a Estabilidade	20
2.4	Projeto de Controladores <i>Fuzzy</i> com LMIs	24
2.5	Taxa de Decaimento	25
2.6	Representação de Sistemas Não Lineares Incertos Através de Modelos <i>Fuzzy</i> T-S	27
3	CONTROLADORES CHAVEADOS	29
3.1	Controle Chaveado Robusto	29
3.2	Controle Chaveado com Incertezas Politópicas e Matriz $B(z(t))$ Constante	30
3.3	Controle Chaveado no Sistema Bola-Viga	31
3.3.1	<i>Simulação do Controle Chaveado Robusto no Sistema Bola-Viga</i>	34
3.3.2	<i>Simulação do Controle Chaveado com Incertezas Politópicas e Matriz $B(z(t))$ Constante no Sistema Bola-Viga</i>	37
3.4	Controle Chaveado Sujeito à Saturação	40
3.4.1	<i>Conceitos Iniciais</i>	40
3.4.2	<i>Descrição do Sinal de Controle por uma Combinação Convexa</i>	41
3.5	Controle Chaveado de Sistemas Descritos por Modelos <i>Fuzzy</i> T-S Incertos Com Saturação no Atuador	44
3.5.1	<i>Simulação do Controle Chaveado de Sistemas Descritos por Modelos <i>Fuzzy</i> T-S Incertos Com Saturação no Atuador no Sistema Bola-viga</i>	47
3.5.2	<i>Simulação do Controle Chaveado de Sistemas Descritos por Modelos <i>Fuzzy</i> T-S Incertos Com Saturação no Atuador e Redução de Norma no Sistema Bola-viga</i>	49

3.6	Controle Chaveado com Incertezas na Matriz B (Matriz Ampliada)	52
3.6.1	<i>Simulação do Controle Chaveado com Incertezas na Matriz B (Matriz Ampliada)</i>	54
4	IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA NO SISTEMA <i>BALL BALANCER</i> QUANSER®	58
4.1	Implementação do Controle Chaveado Com Saturação, Falha no Atuador e Redução de Norma	59
4.2	Implementação do Controle chaveado com incertezas politópicas e matriz $B(z(t))$ constante no sistema Ball Balancer	65
4.3	Implementação do Controle Chaveado com Incertezas na Matriz B (Matriz Ampliada) e Falha no Atuador	69
5	CONCLUSÃO	74
	Referências	76

1 INTRODUÇÃO

Uma ampla classe de sistemas não lineares pode ser descrita por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) segundo Takagi e Sugeno (1985), sendo representados como uma combinação de modelos locais em uma dada região de operação ponderados por funções de pertinências. Esta forma de representar os sistemas não lineares viabiliza o uso de LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) (BOYD *et al.*, 1994) para projetar os controladores deste sistemas. A representação de sistemas não lineares em uma região no espaço de estados (região de operação) proposto em Taniguchi *et al.* (2001) permite então o projeto de controle através de sua descrição pelo modelo *fuzzy* de forma exata, com a condição do sistema permanecer na região do espaço de estados na qual o modelo foi obtido. Dessa forma podem ser aplicadas técnicas de controle que utilizam a Compensação Distribuída Paralela (CDP)(WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ZAK, 1999; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; FANG *et al.*, 2006; SANTIM *et al.*, 2012; HAMDY; HAMDAN; IBRAHIM, 2014; HO; CHOU; CHANG, 2014; SADEGHI; SAFARINEJADIAN; FARUGHIAN, 2014) que utilizam funções de pertinência do modelo *fuzzy* para a aplicação do controle no sistema.

Para o caso do sistema não linear possuir parâmetros incertos é possível obter um modelo *fuzzy* que represente exatamente este sistema em uma região de operação, conforme mostrado em Santim *et al.* (2012). Entretanto, mesmo conhecendo os modelos locais com este método, as funções de pertinência obtidas podem ser incertas, pois podem depender de parâmetros incertos. Sendo assim, não podem-se aplicar as técnicas que utilizam o conceito de controle CDP.

Desta forma como um meio para contornar este problema com as incertezas, foi proposto em Souza *et al.* (2014a) e Souza *et al.* (2014b) a lei de controle chaveada que não utiliza as funções de pertinência do modelo na estrutura do controlador, assim não precisando das expressões que definem as funções de pertinência para o cálculo do sinal de controle. Tendo as condições de projeto também descritas em termos de LMIs que são eficientemente resolvidas computacionalmente (GAHINET *et al.*, 1994; STURM, 1999; LOFBERG, 2004).

No projeto de controle chaveado, assim como em Deaecto, Geromel e Daafouz (2011), são projetados vários ganhos de realimentação, mas apenas um ganho utilizado

por vez. Este ganho é escolhido com base em uma lei de chaveamento que depende do vetor de estado do sistema controlado.

A lei de chaveamento proposta em Souza *et al.* (2014a) e em Souza *et al.* (2014b) atua minimizando a derivada da função de Lyapunov e baseia-se na condição de que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual que qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto. Esta lei de controle chaveada apresenta menor conservadorismo quando comparada ao uso de um único ganho de realimentação, podendo ser aplicada no controle de modelos *fuzzy* T-S incertos e também de modelos lineares com incertezas politópicas (SOUZA *et al.*, 2013).

Assim é possível obter melhores índices de desempenho quando comparada à utilização de uma lei de controle com um único ganho de realimentação.

Sabemos que a descrição exata do sistema não linear através de uma combinação convexa de modelos locais é feita apenas na região de operação considerada. Assim, a condição para que a trajetória de estado do sistema permaneça nesta região de validade deve ser obtida (ALVES *et al.*, 2016). Além disso, um problema bastante comum em aplicações práticas é a saturação no atuador, que não é considerada no projeto do controlador chaveado proposto em Souza *et al.* (2014a), Souza *et al.* (2014b).

Em Barmish (1983) é proposto um teorema de matriz ampliada que consiste em adicionar um novo estado, que é a integral do sinal de controle, desta forma é obtida uma nova matriz A que contém as incertezas da matriz $\hat{B}$ original, sendo a que nova matriz B será constante. Este teorema garante que se existe estabilidade neste novo sistema equivalente, o sistema original que possui a matriz $\hat{B}$ com incertezas também tem a estabilidade garantida. Já em Souza *et al.* (2013) é proposto um método de projeto de controle chaveado para algumas classes de sistemas lineares com incertezas politópicas onde utiliza-se o teorema de Barmish (1983) da matriz ampliada.

Em Alves *et al.* (2016) é considerada uma planta sujeita à saturação do atuador, propondo-se um método de projeto de controle chaveado, utilizando a representação exata da função mínimo através das funções de sinal. Com isto considerando a conhecida aproximação da função de sinal por uma função sigmóide, apresentou-se a função de “mínimo suave”. A função de mínimo suave permitiu o projeto de leis de controle chaveado suave, retirando o fenômeno de “chattering” no chaveamento.

Em Alves () são propostas condições que garantam a estabilização local com a especificação da taxa de decaimento de uma classe de sistemas não lineares com saturação

no atuador, para um projeto de controlador chaveado de um sistema descrito por modelos *fuzzy* T-S incertos.

Tem-se em [Buzetti \(2017\)](#) a abordagem de um controlador robusto chaveado com falhas nos sensores, onde é proposto um procedimento de projeto de controle chaveado que garante a estabilidade do sistema controlado, com uma taxa de decaimento (β) mínima previamente especificada. É apresentado um teorema que limita a norma do controlador, para assim evitar problemas de saturação e uma forma de escolher outros vértices do politopo para diminuir o conservadorismo do sistema. Também é proposto um projeto de um controlador que garante a estabilidade e uma taxa de decaimento mínima para o sistema controlado, mesmo que as falhas nos sensores variem no tempo.

Em [DE OLIVEIRA *et al.* \(2018b\)](#) é proposto um controlador chaveado H_∞ local para uma classe de plantas não lineares incertas sujeitas à saturação do atuador, onde também não é necessário encontrar as expressões das funções de pertinência para realizar a implementação da lei de controle. Sendo as condições de projeto não dependentes da magnitude da perturbação, ao contrário do método apresentado em [Lee *et al.* \(2015\)](#) que só é aplicado em sistemas sujeitos a perturbações limitadas pela magnitude. Já em [DE OLIVEIRA *et al.* \(2018a\)](#) é proposta uma lei de controle chaveada que estabeleceu novas condições de estabilidade para uma classe de sistemas não lineares de tempo discreto, descritos por modelos *fuzzy* T-S.

2 MODELOS *FUZZY* TAKAGI-SUGENO

Os modelos *fuzzy* T-S (TAKAGI; SUGENO, 1985; TANAKA; WANG, 2001) representam um sistema não linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares. Esses modelos podem representar uma ampla classe de plantas não lineares de forma exata ou aproximada representando o comportamento do sistema em diferentes pontos do seu espaço de estado. A mais usada é a descrição aproximada, sendo que o erro em relação ao modelo real depende do número de modelos locais utilizado. O modelo *fuzzy* global do sistema é obtido pela combinação *fuzzy* dos modelos locais lineares e para um determinado número de modelos locais, pode-se representar de forma exata o sistema não linear. Esta representação exata permite o projeto de controladores com todo o rigor da teoria dos sistemas não lineares (SLOTINE; LI *et al.*, 1991). O sistema *fuzzy* T-S é descrito pelas regras *fuzzy* SE-ENTÃO, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema. Tem-se os seguintes modelos lineares locais:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t).\end{aligned}\tag{1}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n_r$ (n_r é o número de regras do modelo *fuzzy* T-S), $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saída, $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$. A informação acima é então fundida com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a i -ésima regra tem a forma:

$$\begin{aligned}\text{Regra } i : & \text{ Se } Z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_{n_p}(t) \text{ é } M_{n_p}^i, \\ & \text{Então } \begin{cases} x(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases}\end{aligned}\tag{2}$$

Tem-se que $M_j^i, j = 1, 2, \dots, n_p$ é o conjunto *fuzzy* j da regra i e $z_1(t), \dots, z_{n_p}(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ o “peso” do conjunto *fuzzy* M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$, dessa forma o peso associado a cada regra é dado por $w_i(z(t))$:

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_{n_p}(t)].\tag{3}$$

Como $\mu_j^i z_j(t) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, n_r$,

$$w_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n_r} w_i(z(t)) > 0. \quad (4)$$

Uma escolha conveniente para a obtenção de um modelo *fuzzy* T-S para sistemas não lineares é adotar $z(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado do sistema não linear. Defina

$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{n_r}]^T. \quad (5)$$

Desta forma, dados $[x(t), u(t), z(t)]$, a saída final do sistema *fuzzy* é inferida utilizando o método do centro de gravidade para a defuzzificação (TANIGUCHI *et al.*, 2001), e é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{n_r} w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} w_i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t))A_i\right)x(t) + \left(\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t))B_i\right)u(t), \\ &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \end{aligned} \quad (6)$$

sendo,

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{n_r} w_i(z(t))}; \ i = 1, 2, \dots, n_r. \quad (7)$$

Em (7), $\alpha_i(z(t))$ é o peso normalizado de cada modelo de regra, também conhecido como função de pertinência do modelo local i , $i = 1, 2, \dots, n_r$.

O sistema não forçado ($u(t) = 0$) é definido como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{n_r} w_i(z(t))A_i x(t)}{\sum_{i=1}^{n_r} w_i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t))A_i x(t), \\ &= A(\alpha)x(t). \end{aligned} \quad (8)$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{n_r} w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{n_r} w_i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) C_i x(t), \\ &= C(\alpha) x(t).\end{aligned}\tag{9}$$

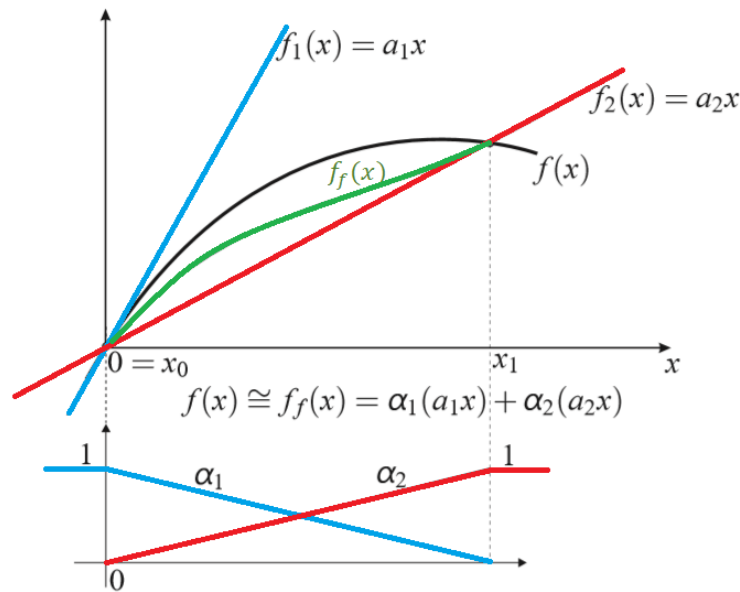
É importante observar que, para $i = 1, 2, \dots, n_r$, tem-se a combinação linear convexa dos modelos, ou seja,

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) = 1.\tag{10}$$

2.1 EXEMPLO DE APROXIMAÇÃO OBTIDA POR MODELOS FUZZY T-S

Para ilustrar a aproximação obtida pelos modelos *fuzzy* T-S tem-se na Figura 1 o exemplo a seguir (MACHADO, 2003).

Figura 1 – Aproximação Fuzzy



Fonte: Adaptado de (MACHADO, 2003).

Observando a função não linear $f(x)$ descrita na Figura 1, e suas aproximações, $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$, e $f_2(x) = a_2x$, observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois

$f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Desta forma adotam-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ definidas na Figura 1, um modelo *fuzzy* T-S para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$. Finalmente, verifica-se que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, na região de $x_0 \leq x \leq x_1$. Escolhendo-se convenientemente as funções $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ é possível representar exatamente a função $f(x)$ através de $f_f(x)$ conforme proposto em (TANIGUCHI *et al.*, 2001).

Neste método de construção, os modelos locais são obtidos em função da região de operação e correspondem aos valores máximos e mínimos das funções não lineares do sistema. Assim o número de modelos está diretamente relacionado ao número de funções não lineares. Para a determinação dos modelos locais, é considerada a seguinte classe de sistemas não lineares:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_x} \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{n_u} g_{ik}(x(t))u_k(t), \quad (11)$$

sendo neste caso $i = 1, 2, \dots, n_x$, n_x é o número de variáveis de estados, n_u o número de entradas e $\tilde{f}_{ij}(x(t))$ e $g_{ik}(x(t))$ são funções de $x(t)$, sendo $x(t) = [x_1(t) \dots x_{n_x}(t)]^T$. Para obter a forma generalizada deste método, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &\equiv \max_{x(t)} \left\{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \right\}, \\ a_{ij2} &\equiv \min_{x(t)} \left\{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \right\}, \\ b_{ik1} &\equiv \max_{x(t)} \left\{ g_{ik}(x(t)) \right\}, \\ b_{ik2} &\equiv \min_{x(t)} \left\{ g_{ik}(x(t)) \right\}. \end{aligned}$$

Com isto, para representar o sistema verdadeiro com a forma generalizada são necessários 2^s modelos locais, sendo s o número de não linearidades distintas existentes no sistema (TANIGUCHI *et al.*, 2001).

2.2 CONTROLADORES COM MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

No projeto dos controladores é normalmente considerado o conceito de CDP para estabilizar sistemas não lineares descritos por modelos *fuzzy* T-S. A ideia é projetar um compensador para cada regra do modelo *fuzzy*. Para cada regra, são utilizadas técnicas

de projeto de controle linear. O controlador *fuzzy* global resultante, que é em geral não linear, é uma combinação *fuzzy* de cada controlador linear individual. A CDP oferece um procedimento de projeto onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo T-S da planta. O controlador *fuzzy* projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo *fuzzy* nas partes premissas. Para o modelo *fuzzy* (2), sendo $i = 1, 2, \dots, n_r$, tem-se a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \text{ Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{Então } u(t) = -F_i x(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (6), o controlador *fuzzy* é dado por

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^{n_r} w^i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^{n_r} w^i(z(t))}, \\ &= -\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) F_i x(t), \\ &= -F(\alpha) x(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Substituindo a equação (13) na equação (6) tem-se:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) A_i x(t) + \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) B_i \left[-\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j(z(t)) F_j x(t) \right], \quad (14)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j(z(t)) B_i F_j x(t). \quad (15)$$

Sabemos que

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_r. \quad (16)$$

Desta forma, pode-se escrever

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j(z(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j(z(t)) B_i F_j x(t), \quad (17)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t), \quad (18)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t), \quad (19)$$

de acordo com (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

2.3 CONDIÇÕES PARA A ESTABILIDADE

Da teoria clássica de mecânica sabe-se que um sistema vibratório é assintoticamente estável se sua energia total (uma função definida positiva) for continuamente decrescente (o que significa que a derivada em relação ao tempo é definida negativa) até que um ponto de equilíbrio seja alcançado. O segundo método de Lyapunov é baseado em uma generalização deste fato: se um sistema possui um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada transferida no interior do domínio de atração decai à medida que o tempo cresce até que finalmente assume seu valor mínimo no ponto de equilíbrio. Para sistemas puramente matemáticos, contudo, não há forma simples de se definir uma “função energia”. Para contornar esta dificuldade, Lyapunov introduziu a função de Lyapunov, uma “função energia” fictícia. Esta ideia, contudo, é mais geral que a de energia e é aplicada de forma mais abrangente (OGATA, 2003). Para modelos *fuzzy* contínuos no tempo, podem-se obter as condições suficientes para a estabilidade, sendo que $P = P^T > 0$, através de funções de Lyapunov quadráticas do tipo $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ (TANAKA; SUGENO, 1992; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; XIAODONG; QINGLING, 2003).

A partir da equação (19) tem-se:

$$G_{ij} = A_i - B_i F_j, \quad (20)$$

então,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) G_{ij} x(t), \quad (21)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t), \quad (22)$$

sendo que,

$$\sum_{i < j}^{n_r} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n_r-1} \sum_{j=i+1}^{n_r} a_{ij}. \quad (23)$$

Lema 1 ([TANAKA; WANG, 2001](#)) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy contínuo descrito por (8) é globalmente assintoticamente estável se existe uma matriz simétrica positiva definida comum P tal que*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad (24)$$

para $i = 1, 2, \dots, n_r$; isto é, para todos os subsistemas.

Prova 1 *Considere a candidata a função de Lyapunov do tipo $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$. Desta forma, sua derivada em relação ao tempo (que no caso deve ser negativa definida) é dada por*

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0, \quad x(t) \neq 0. \quad (25)$$

Substituindo (8) em (25) tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) = \left(\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) A_i x(t) \right) < 0, \quad (26)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) x(t)^T A_i^T P x(t) + \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) x(t)^T P A_i x(t) < 0, \quad (27)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) (A_i^T P + P A_i) x(t) < 0. \quad (28)$$

Assim, tendo em vista (10),

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_r, \quad (29)$$

é uma condição necessária e suficiente para (28) (estabilidade quadrática) pois de (10), para $\alpha_i = 1, \alpha_j = 0, i \neq j, i, j \in 1, 2, \dots, n_r$ e assim, (28) implica em (29) (condição necessária). Agora, as condições (29) e (10) implicam em (28) (condição suficiente).

A utilização mais interessante com relação ao Lema 1 é aplicá-lo no sistema realimentado (22). Substituindo (22) em (25) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \left[\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2(z(t)) x(t)^T G_{ii}^T + 2 \sum_{i < j}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) x(t)^T \left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) \right] P x(t) \\ & + x(t)^T P \left[\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Organizando os termos da equação tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2(z(t)) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) + 2 \sum_{i < j}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left[\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} P + P \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right] \right\} x(t). \quad (31)$$

Assim, verificando a equação (31), como $\alpha_i(z(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n_r$ e $\alpha_1(z(t)) + \dots + \alpha_r(z(t)) = 1$, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do sistema (6) realimentado com a lei de controle (13) (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998):

$$P > 0, \quad P = P^T. \quad (32)$$

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_r. \quad (33)$$

$$\left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j. \quad (34)$$

Teorema 1 (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo no tempo dado em (19) é globalmente assintoticamente estável, se existirem uma matriz simétrica positiva definida $X \in \Re^{n_x \times n_x}$ ($X > 0$) e matrizes $M_i \in \Re^{n_u \times n_x}$ tais que para todo $i, j \in \mathbb{N}_{n_r}$, as seguintes LMIs sejam factíveis:*

$$X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0, \quad (35)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_i M_j - B_j M_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T \leq 0, \quad i < j, \quad (36)$$

excetuando os pares (i, j) tais que $\alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t)) = 0$, para todo $x(t)$. Se (35) e (36) forem factíveis os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{N}_{n_r}$.

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática $V = x^T P x$. Assim, de (19) nota-se que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j x^T (A_i - B_i K_j)^T P x + x^T P \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j (A_i - B_i K_j) x \\
 &= x^T \left[\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2 (A_i^T P + P A_i - K_i^T B_i^T P - P B_i K_i) \right] x \\
 &\quad + x^T \left[\sum_{i=1}^{n(r-1)} \sum_{j=1+i}^{n_r} \alpha_i \alpha_j (A_i^T P + P A_i + A_j^T P + P A_j \right. \\
 &\quad \left. - K_j^T B_i^T P - P B_i K_j - K_i^T B_j^T P - P B_j K_i) \right] x.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Como $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_{n_r}$ e $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i = 1$, então de (37), $\dot{V} < 0$ (para $x \neq 0$) se para $i, j \in \mathbb{N}_{n_r}$

$$A_i^T P + P A_i - K_i^T B_i^T P - P B_i K_i < 0, \tag{38}$$

$$A_i^T P + P A_i + A_j^T P + P A_j - K_j^T B_i^T P - P B_i K_j - K_i^T B_j^T P - P B_j K_i \leq 0, \quad i < j. \tag{39}$$

Definindo $X = P^{-1}$ e $M_i = K_i X$, pré e pós multiplicando as equações (38) e (39) por X obtém-se (35) e (36) e a demonstração está concluída.

Como no caso linear, considerando que $B(\alpha) = B$ é uma matriz constante segue o seguinte corolário.

Corolário 1 . Se $B_1 = B_2 = \dots = B_{n_r} = B$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo no tempo dado em (19) é globalmente assintoticamente estável se existirem uma matriz simétrica positiva definida X e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{N}_{n_r}$,

$$X A_i^T + A_i X - B M_i - M_i^T B^T < 0. \tag{40}$$

Se (40) são factíveis, para $i \in \mathbb{N}_{n_r}$, os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{N}_{n_r}$.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 1, considerando $B_i = B$, $i \in \mathbb{N}_{n_r}$.

2.4 PROJETO DE CONTROLADORES FUZZY COM LMIS

Vários problemas como o projeto de controle e a análise de estabilidade, podem ser formulados como LMIs. Numericamente, as soluções de LMIs, quando existem, podem ser obtidas por meio de ferramentas, disponíveis na literatura de programação matemática (BOYD *et al.*, 1994). Assim as soluções encontradas para os problemas descritos por LMIs são equivalentes às soluções encontradas para o problema original. Através das LMIs também é possível especificar a resposta transitória por meio da taxa de decaimento e as restrições nos sinais de controle e das saídas.

Como descrito anteriormente, as condições (32), (33) e (34) garantem a estabilidade assintótica global do sistema (6) realimentado com a lei de controle (13). Substituindo (20) na condição (33) tem-se:

$$\begin{aligned} (A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) &< 0, \\ (A_i^T - F_i^T B_i^T) P + P(A_i - B_i F_i) &< 0, \\ A_i^T P - F_i^T B_i^T P + P A_i - P B_i F_i &< 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Sejam,

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X \Rightarrow F_i = M_i X^{-1}.$$

Então, (41) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$A_i^T X^{-1} - X^{-1} M_i^T B_i^T X^{-1} + X^{-1} A_i - X^{-1} B_i M_i X^{-1} < 0.$$

Multiplicando os termos por X pela esquerda e pela direita:

$$X A_i^T - M_i^T B_i^T + A_i X - B_i M_i < 0. \tag{42}$$

Portanto,

$$-X A_i^T + M_i^T B_i^T - A_i X + B_i M_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_r. \tag{43}$$

Agora, analisando a condição (34) temos que:

$$(A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i)^T P + P(A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i) \leq 0.$$

$$(A_i^T - F_j^T B_i^T + A_j^T - F_i^T B_j^T)P + P(A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i) \leq 0. \quad (44)$$

Sendo $X = P^{-1}$ e $F_i = M_i X^{-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & A_i^T X^{-1} - X^{-1} M_j^T B_i^T X^{-1} + A_j^T X^{-1} - X^{-1} M_i^T B_j^T X^{-1} \\ & + X^{-1} A_i - X^{-1} B_i M_j X^{-1} + X^{-1} A_j - X^{-1} B_j M_i X^{-1} \leq 0. \end{aligned}$$

$$X A_i^T - M_j^T B_i^T + X A_j^T - M_i^T B_j^T + A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i \leq 0. \quad (45)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & -X A_i^T + M_j^T B_i^T - X A_j^T + M_i^T B_j^T - A_i X + B_i M_j - A_j X + B_j M_i \geq 0, \\ & \text{sendo que, } i = 1, 2, \dots, n_r - 1, j = i + 1, i + 2, \dots, n_r. \end{aligned} \quad (46)$$

Assim, as LMIs (43) e (46) garantem a estabilidade assintótica global do sistema (6) realimentado com a lei de controle (13).

2.5 TAXA DE DECAIMENTO

É importante considerar não apenas a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado, tais como a velocidade de resposta, restrições da entrada e da saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento (β). Considere uma função candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, com ($\dot{V}(x(t)) < 0$) para todo $x \neq 0$. A taxa de decaimento β , $\beta > 0$ é obtida se a condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$ for satisfeita para toda a trajetória $x(t)$ do sistema (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Lembrando-se que da equação (31):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = x(t)^T & \left\{ \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2(z(t)) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i < j}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left[\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} P + P \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right] \right\} x(t), \end{aligned} \quad (47)$$

em que:

- $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$,
- $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j(z(t)) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2(z(t)) + 2 \sum_{i < j}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) = 1$.

Tem-se:

$$V(x(t)) = \left\{ \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2(z(t)) + 2 \sum_{i < j}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \right\} x(t)^T P x(t). \quad (48)$$

Dessa forma, de (31) e $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$ obtém-se:

$$x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i^2(z(t)) (G_{ii}^T P + P G_{ii} + 2\beta P) + 2 \sum_{i < j}^{n_r} \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left[\left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + 2\beta P \right] \right\} x(t) \leq 0. \quad (49)$$

Assim, como $\alpha_i(z(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n_r$ e $\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(t)) = 1$, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento maior ou igual a β ($\beta > 0$):

$$P > 0, \quad P = P^T,$$

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + 2\beta P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_r, \quad (50)$$

$$\left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + 2\beta P \leq 0, \quad i < j. \quad (51)$$

Analogamente ao cálculo das LMIs considerando apenas a estabilidade do sistema, obtém-se:

$$-X A_i^T + M_i^T B_i^T - A_i X + B_i M_i - 2\beta X > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_r, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} -X A_i^T + M_j^T B_i^T - X A_j^T + M_i^T B_j^T - A_i X + B_i M_j - A_j X + B_j M_i - 4\beta X &\geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, n_r - 1. \quad j = i + 1, i + 2, \dots, n_r. \end{aligned} \quad (53)$$

Assim, as LMIs (52) e (53) garantem a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento maior ou igual a β .

2.6 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS ATRAVÉS DE MODELOS FUZZY T-S

O modelo *fuzzy* T-S pode fornecer uma aproximação da dinâmica não linear (TEIXEIRA; ZAK, 1999; GAO *et al.*, 2012), ou até mesmo descrever o sistema de maneira exata, através de uma combinação convexa dos modelos locais, em uma região compacta do espaço de estados (TANIGUCHI *et al.*, 2001). A modelagem exata é utilizada como base para os resultados deste trabalho e será descrita a seguir, considerando os métodos apresentados em Taniguchi *et al.* (2001) e Santim *et al.* (2012). Como será visto, essa metodologia permite obter a saída do sistema *fuzzy* (6) e (9) e suas funções de pertinência normalizadas (7) sem descrever as regras do modelo *fuzzy* T-S, e consequentemente, sem definir os conjuntos *fuzzy* do antecedente de cada regra *fuzzy* (2).

Considere uma classe de sistemas não lineares descrita por

$$\dot{x}(t) = A(z(t))x(t) + B(z(t))u(t), \quad (54)$$

sendo $z(t)^T = [x(t)^T \ v^T] \in \mathbb{R}^{n_x+n_v}$, $x(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_{n_x}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado e $v^T = [v_1 \ \cdots \ v_{n_v}]^T \in \mathbb{R}^{n_v}$ um vetor cujas componentes v_i são os parâmetros incertos de (54), $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_{n_u}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de controle, $A(z(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $B(z(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$. Denota-se por $a_{ij}(z(t))$ e $b_{lk}(z(t))$ os elementos ij e lk de $A(z(t))$ e $B(z(t))$, respectivamente, podendo estes serem constantes ou funções lineares/não lineares contínuas de $z(t)$.

Para a manipulação dos elementos $a_{ij}(z(t))$ ou $b_{lk}(z(t))$ que não são constantes conhecidas (que dependem de $z(t)$), assume-se que o vetor de incertezas $v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}$, sendo $\mathcal{V}$ um conjunto compacto, e que o sistema deva permanecer em uma região de operação descrita por um conjunto compacto no espaço de estados $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$. O conjunto compacto considerado como região de operação será (KLUG *et al.*, 2015; KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015).

$$\mathcal{X} \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |N_{(h)}x(t)| \leq \phi_h, h \in \mathbb{N}_{n_h}\}, \quad (55)$$

sendo $N = [N_{(1)}^T \ N_{(2)}^T \ \cdots \ N_{(n_h)}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_h \times n_x}$ e $\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_{n_h}]^T \in \mathbb{R}^{n_h}$ conhecidos.

Defina o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$. Então, para os elementos $a_{ij}(z(t))$ e $b_{lk}(z(t))$ que são funções contínuas de $z(t)$ (isto é, não são constantes conhecidas), tem-se (SANTIM *et al.*, 2012):

$$\begin{aligned} a_{ij}^1 &= \min_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{ij}(z(t)) \leq a_{ij}(z(t)) \leq \max_{z(t) \in \mathcal{S}} a_{ij}(z(t)) = a_{ij}^2, \\ b_{lk}^1 &= \min_{z(t) \in \mathcal{S}} b_{lk}(z(t)) \leq b_{lk}(z(t)) \leq \max_{z(t) \in \mathcal{S}} b_{lk}(z(t)) = b_{lk}^2, \end{aligned}$$

e pode-se escrever

$$a_{ij}(z(t)) = \sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) a_{ij}^{\ell_{ij}^a}, \quad a_{ij}^1 \leq a_{ij}(z(t)) \leq a_{ij}^2, \quad \sum_{\ell_{ij}^a=1}^2 \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) = 1, \quad \xi_{ij}^{\ell_{ij}^a}(z(t)) \geq 0, \quad (56)$$

$$b_{lk}(z(t)) = \sum_{\ell_{lk}^b=1}^2 \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) b_{lk}^{\ell_{lk}^b}, \quad b_{lk}^1 \leq b_{lk}(z(t)) \leq b_{lk}^2, \quad \sum_{\ell_{lk}^b=1}^2 \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) = 1, \quad \zeta_{lk}^{\ell_{lk}^b}(z(t)) \geq 0, \quad (57)$$

sendo

$$\xi_{ij}^1(z(t)) = \frac{a_{ij}^2 - a_{ij}(z(t))}{a_{ij}^2 - a_{ij}^1}, \quad \xi_{ij}^2(z(t)) = \frac{a_{ij}(z(t)) - a_{ij}^1}{a_{ij}^2 - a_{ij}^1}, \quad (58)$$

$$\zeta_{lk}^1(z(t)) = \frac{b_{lk}^2 - b_{lk}(z(t))}{b_{lk}^2 - b_{lk}^1}, \quad \zeta_{lk}^2(z(t)) = \frac{b_{lk}(z(t)) - b_{lk}^1}{b_{lk}^2 - b_{lk}^1}. \quad (59)$$

Sejam os conjuntos de pares ordenados dados por $\mathcal{P}_A = \{(i, j) | a_{ij}(z(t))\}$ é uma função contínua de $z(t)$ (não é uma constante conhecida) em $A(z(t))$ de (54) e $\mathcal{P}_B = \{(l, k) | b_{lk}(z(t))\}$ é uma função contínua de $z(t)$ (não é uma constante conhecida) em $B(z(t))$ de (54). Defina as matrizes $\mathbb{A}_{ij} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ tais que seus respectivos elementos (i, j) sejam iguais a 1 e os outros sejam 0, e $\mathbb{B}_{lk} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$ tais que seus respectivos elementos (l, k) sejam iguais a 1 e os outros sejam 0. Então o sistema (54) pode ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = \left(\tilde{A} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{P}_A} a_{ij}(z(t)) \mathbb{A}_{ij} \right) x(t) + \left(\tilde{B} + \sum_{(l,k) \in \mathcal{P}_B} b_{lk}(z(t)) \mathbb{B}_{lk} \right) u(t), \quad (60)$$

sendo $\tilde{A} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ e $\tilde{B} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$, matrizes cujos elementos (i, j) e (l, k) são os elementos constantes e conhecidos (independentes de $z(t)$) em $A(z(t))$ e $B(z(t))$ de (54), ou 0, caso $(i, j) \in \mathcal{P}_A$ ou $(l, k) \in \mathcal{P}_B$, respectivamente.

3 CONTROLADORES CHAVEADOS

Neste capítulo será aplicado o controle chaveado no sistema não linear bola-viga com as leis de controle baseadas em Souza *et al.* (2014b) e em Buzetti (2017). A função de Lyapunov do tipo quadrática é dada por

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad (61)$$

sendo que $P = P^T > 0$ e o vetor de estado medido $x(t)$.

3.1 CONTROLE CHAVEADO ROBUSTO

O conceito básico da lei de controle chaveada é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov, por meio da seleção do ganho do controlador, que pertence ao conjunto de ganhos $K_j, j \in \mathbb{N}_{n_r}$. Essa lei de chaveamento utiliza matrizes simétricas auxiliares $Q_j, j \in \mathbb{N}_{n_r}$, que serão definidas posteriormente, e escolhe um índice $\sigma(t)$. Portanto define-se o controlador chaveado da seguinte forma:

Considere a lei de controle para um ganho único:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t), \\ \sigma(t) &= \arg^* \min_{j \in \mathbb{K}_s} \{x^T(t) Q_j x(t)\}, \end{aligned} \quad (62)$$

ou seja, $\sigma(t) \in \mathbb{N}_{n_r}$ possui o valor do índice j que resulta no menor valor de $x^T(t) Q_j x(t)$. Caso dois ou mais Q_j produzirem o menor valor de $x^T(t) Q_j x(t)$, então σ assumirá o valor do menor índice j dentre eles.

Então o sistema realimentado dado por (62) e (54) pode ser representado por:

$$\dot{x}(t) = A(z(t))x(t) - B(z(t))K_\sigma x(t). \quad (63)$$

Teorema 2 (SOUZA *et al.*, 2014b). *Suponha a existência de uma matriz simétrica positiva definida $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $\bar{Z}_i, \bar{Q}_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\beta \geq 0$, para todo $i, j \in \mathbb{N}_{n_r}$, tais que:*

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j < 0, \quad (64)$$

$$X A_i^T + A_i X + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0. \quad (65)$$

Então a lei de controle chaveada (62) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (54) globalmente assintoticamente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual β , sendo $P = X^{-1}$, $Q_j = X^{-1}\bar{Q}_jX^{-1}$ e os ganhos do controlador dados por $K_j = M_jX^{-1}$.

A prova do teorema se encontra em Buzetti (2017).

3.2 CONTROLE CHAVEADO COM INCERTEZAS POLITÓPICAS E MATRIZ $B(z(t))$ CONSTANTE

Outra lei de controle chaveada proposta em Souza *et al.* (2013) assumindo que $B(z(t)) = B$ é uma matriz constante, agora dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t), \\ \sigma(t) &= \arg^* \min_{i \in \mathbb{N}_{n_r}} \{-x^T(t)PBK_i x(t)\}. \end{aligned} \quad (66)$$

Assim $\sigma(t) \in \mathbb{N}_{n_r}$ e observe que na lei de controle (66) para um dado t , a lei de chaveamento σ pode ser obtida calculando $-x^T(t)PBK_i x(t)$, para $i \in \mathbb{N}_{n_r}$, e então considerando o conjunto de índices $\Omega(t) = \{j \in \mathbb{N}_{n_r} : -x^T(t)PBK_j x(t) \leq -x^T(t)PBK_i x(t), \forall i \in \mathbb{N}_{n_r}\}$. O índice de comutação σ pode ser dado por $\sigma(t) = j \in \Omega$ tal que $j \leq i$, para todos $i \in \Omega(t)$.

Portanto o sistema controlado (54) e (66) pode ser escrito como segue:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu_\sigma = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i [A_i - BK_\sigma]x(t). \quad (67)$$

Teorema 3 (SOUZA, 2013). *Suponha que as condições do Corolário 1, relativas ao sistema (54) com a lei de controle (13) sejam satisfeitas e obtenha $K_i = M_iX^{-1}$, $i \in \mathbb{N}_{n_r}$ e $P = X^{-1}$. Então, a lei de controle chaveada (66) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema (54), globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Considere uma candidata a função de Lyapunov $V = x^T Px$, sendo $P = P^T > 0$. Defina $\dot{V}_{u_\alpha}$ e $\dot{V}_{u_\sigma}$ a derivada temporal de V para o sistema (54), com a lei de controle (13) e (66), respectivamente. Então, de (67),

$$\dot{V}_{u_\sigma} = 2x^T P \dot{x} = 2x^T P(A(\alpha)x + Bu_\sigma) = 2x^T PA(\alpha)x + 2x^T PB(-K_\sigma)x. \quad (68)$$

Assim, note que de (66),

$$\min_{i \in \mathbb{N}_{n_r}} \{x^T PB(-K_i)x\} \leq x^T PB \left(-\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i K_i \right) x.$$

Portanto, de (68) e das leis dadas em (66) e (13) observa-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u_\sigma} &= 2x^T PA(\alpha)x + 2 \min_{i \in \mathbb{N}_{n_r}} \{x^T PB(-K_i)x\} \\ &\leq 2x^T PA(\alpha)x + 2x^T PB \left(-\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i K_i \right) x \\ &= 2x^T P(A(\alpha) - BK(\alpha))x \\ &= 2x^T P(A(\alpha)x + Bu_\alpha) = \dot{V}_{u_\alpha}. \end{aligned}$$

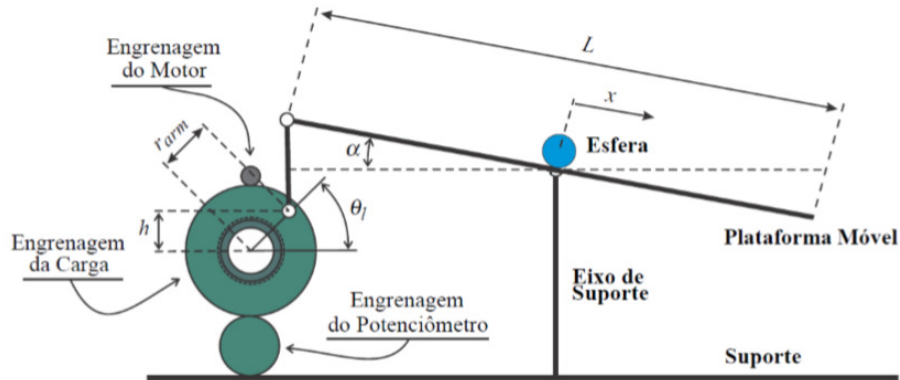
Então, $\dot{V}_{u_\sigma} \leq \dot{V}_{u_\alpha}$. Além disso, considerando que do Corolário 2 tem-se $\dot{V}_{u_\alpha} < 0$ para $x \neq 0$, a prova está concluída.

Outros teoremas desta lei de chaveamento (66) para casos de sistemas lineares com a matriz B constante, para sistemas lineares com incertezas na matriz B e para sistemas com incertezas no sinal de controle se encontram em [Souza et al. \(2013\)](#).

3.3 CONTROLE CHAVEADO NO SISTEMA BOLA-VIGA

Considere o sistema Bola-Viga apresentado na Figura 2. Este sistema apresenta uma dinâmica não linear e instabilidade em malha aberta. O objetivo de controle é manter a esfera na posição central da viga por meio de um motor de corrente contínua.

Figura 2 – Sistema Bola-Viga.



Fonte: Adaptado de ([QUANSER, 2008](#)).

Com base nas modelagens apresentadas, que foram adaptadas de Quanser (2008) e Quanser (2013), tem-se o seguinte comportamento dinâmico para o sistema:

$$\ddot{x}(t) = \frac{m_b r_b^2 g \sin(\alpha(t))}{m_b r_b^2 + J_b} + \frac{m_b r_b^2 x(t) \dot{\alpha}(t)^2}{m_b r_b^2 + J_b}, \quad (69)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{-B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\alpha}(t) + \frac{A_m}{J_{eq}} u(t), \quad (70)$$

sendo $\ddot{x}(t)$ a aceleração da bola, $\ddot{\alpha}(t)$ a aceleração angular da viga, $\dot{\alpha}$ a velocidade angular da viga e $\alpha(t)$ o ângulo da viga em relação a horizontal. A descrição e os valores dos demais parâmetros do sistema estão apresentados na Tabela 1. O parâmetro J_b é o momento de inércia da esfera, que para o caso de uma esfera sólida é dado por,

$$J_b = \frac{2m_b r_b^2}{5}. \quad (71)$$

A relação entre os ângulos $\theta_l(t)$ e $\alpha(t)$ pode ser descrita por:

$$\sin(\alpha(t)) \cong \frac{2r_{arm} \sin(\theta_l(t))}{L}. \quad (72)$$

Tabela 1 – Parâmetros do sistema Bola-Viga.

Parâmetro	Descrição	Valor
B_{eq}	Amortecimento referente ao motor	0,0844 <i>Nms/rad</i>
J_{eq}	Momento de inércia equivalente no motor	0,0021 <i>kgm²</i>
A_m	Ganho do motor	0,129 <i>Nm/V</i>
L	Comprimento da viga	0,28 <i>m</i>
r_{arm}	Distância entre o eixo da engrenagem de saída do servo motor e o ponto de fixação da barra	0,14 <i>m</i>
r_b	Raio da esfera	0,02 <i>m</i>
m_b	Massa da esfera	0,05 <i>kg</i>
g	Aceleração da gravidade	9,81 <i>m/s²</i>
$\ \theta_l\ _{max}$	Limitação para o ângulo máximo proporcionado pela engrenagem da carga	80 graus
$\ \dot{\alpha}(t)\ _{max}$	Limitação para a velocidade angular máxima da viga	1,5 rad/s
$\ x\ _{max}$	Limitação do deslocamento máximo permitido para a bola	0,14 <i>m</i>

Fonte: Adaptado de (QUANSER, 2008).

Considerando as variáveis de estado do sistema $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, $x_3(t) = \alpha(t)$, $x_4(t) = \dot{\alpha}(t)$ e a saída $y(t) = x_1(t)$, as equações de estado são as seguintes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_b r_b^2 g \sin(x_3)}{x_3(m_b r_b^2 + J_b)} & \frac{m_b r_b^2 x_1 x_4}{m_b r_b^2 + J_b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{A_m}{J_{eq}} \end{bmatrix} u(t) \quad (73)$$

Seja,

$$\tilde{f}_{23}(x(t)) = \frac{m_b r_b^2 g \sin(x_3)}{x_3(m_b r_b^2 + J_b)} \text{ e } \tilde{f}_{24}(x(t)) = \frac{m_b r_b^2 x_1 x_4}{m_b r_b^2 + J_b}, \quad (74)$$

as funções que contêm as não linearidades do sistema. Desta forma, podemos reescrever (73) como sendo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f}_{23}(x(t)) & \tilde{f}_{24}(x(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{A_m}{J_{eq}} \end{bmatrix} u(t). \quad (75)$$

Foi adicionada uma incerteza através de uma falha no atuador em que se tem uma perda de 40% do ganho do motor (A_m) variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V), a taxa de decaimento usada foi $\beta = 1$, e assim chega-se no modelo *fuzzy* T-S incerto descrito

em (54), sendo $n_x = 4$, $n_v = 1$, $n_u = 1$, $n_h = 4$ e matrizes A_i e B_i , $i \in \mathbb{N}_{n_r}$ com $n_r = 8$, dados pelos seguintes modelos locais:

$$\begin{aligned}
 A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_3 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9423 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_5 = A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_7 = A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9423 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 B_1 = B_3 = B_5 = B_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 61,4286 \end{bmatrix}^T, \\
 B_2 = B_4 = B_6 = B_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 36,8571 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{76}$$

3.3.1 Simulação do Controle Chaveado Robusto no Sistema Bola-Viga

Utilizando a lei de controle chaveada (62) e as LMIs (64) e (65) com taxa de decaimento ($\beta = 1$) obteve-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 F1 &= \begin{bmatrix} 5,0314 & 5,9502 & 12,9760 & 0,8467 \end{bmatrix}, F2 = \begin{bmatrix} 18,6676 & 22,0639 & 47,9137 & 4,6748 \end{bmatrix}, \\
 F3 &= \begin{bmatrix} 7,2125 & 8,5022 & 18,4012 & 1,4518 \end{bmatrix}, F4 = \begin{bmatrix} 19,3611 & 22,8751 & 49,6574 & 4,8710 \end{bmatrix}, \\
 F5 &= \begin{bmatrix} 3,2548 & 3,8719 & 8,5579 & 0,3562 \end{bmatrix}, F6 = \begin{bmatrix} 17,3439 & 20,5135 & 44,6084 & 4,2961 \end{bmatrix}, \\
 F7 &= \begin{bmatrix} 5,4072 & 6,3900 & 13,9107 & 0,9504 \end{bmatrix}, F8 = \begin{bmatrix} 18,1194 & 21,4223 & 46,5664 & 4,5324 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{77}$$

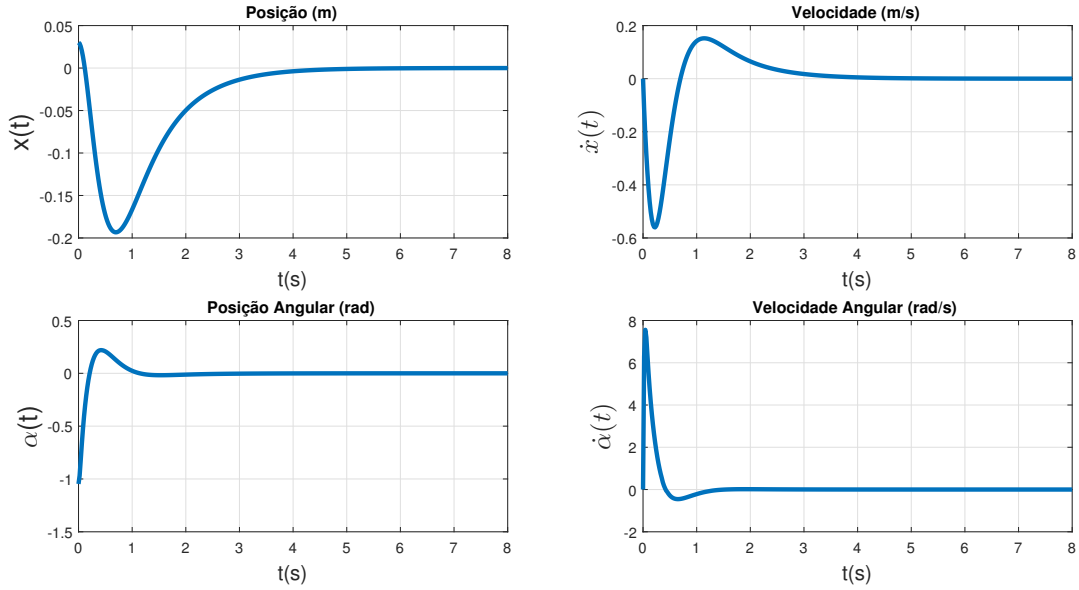
$$\begin{aligned}
Q_1 &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -2,395585234590999 & 4,509157247081500 & 0,471919946007764 & -0,327255692397648 \\ 4,509157247081500 & 1,549851562930765 & -7,302764557190648 & 0,088293898002107 \\ 0,471919946007764 & -7,302764557190648 & 4,963078613872386 & 0,289574700219228 \\ -0,327255692397648 & 0,088293898002107 & 0,289574700219228 & -0,485620853421783 \end{bmatrix}, \\
Q_2 &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -2,395585234357796 & 4,509157247542878 & 0,471919945391590 & -0,327255156938542 \\ 4,509157247542878 & 1,549851554203846 & -7,302764548693478 & 0,088295191006102 \\ 0,471919945391590 & -7,302764548693478 & 4,963078606484279 & 0,289572065520222 \\ -0,327255156938542 & 0,088295191006102 & 0,289572065520222 & -0,485607296305138 \end{bmatrix}, \\
Q_3 &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -2,395585226994771 & 4,509157305919760 & 0,471919951880690 & -0,327255690274585 \\ 4,509157305919760 & 1,549851212425133 & -7,302764492751801 & 0,088293548062996 \\ 0,471919951880690 & -7,302764492751801 & 4,963078617660799 & 0,289574704047513 \\ -0,327255690274585 & 0,088293548062996 & 0,289574704047513 & -0,485620858512546 \end{bmatrix}, \\
Q_4 &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -2,395585227521622 & 4,509157304325393 & 0,471919953317285 & -0,327255264828570 \\ 4,509157304325393 & 1,549851205296637 & -7,302764486094279 & 0,088295296844326 \\ 0,471919953317285 & -7,302764486094279 & 4,963078613856343 & 0,289572003136757 \\ -0,327255264828570 & 0,088295296844326 & 0,289572003136757 & -0,485607402571852 \end{bmatrix}, \\
Q_5 &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -2,395585234390311 & 4,509157251177523 & 0,471919945409938 & -0,327255687654068 \\ 4,509157251177523 & 1,549851583033001 & -7,302764574030605 & 0,088294164072120 \\ 0,471919945409938 & -7,302764574030605 & 4,963078612244710 & 0,289574710190499 \\ -0,327255687654068 & 0,088294164072120 & 0,289574710190499 & -0,485620882472934 \end{bmatrix}, \\
Q_6 &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -2,395585234052212 & 4,509157253906563 & 0,471919944069110 & -0,327255132254033 \\ 4,509157253906563 & 1,549851577449876 & -7,302764573448220 & 0,088295425841100 \\ 0,471919944069110 & -7,302764573448220 & 4,963078607746559 & 0,289571997856913 \\ -0,327255132254033 & 0,088295425841100 & 0,289571997856913 & -0,485605982989352 \end{bmatrix}, \\
Q_7 &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -2,395585226989655 & 4,509157309571161 & 0,471919951467236 & -0,327255687796797 \\ 4,509157309571161 & 1,549851234734914 & -7,302764512431801 & 0,088293832450323 \\ 0,471919951467236 & -7,302764512431801 & 4,963078617708155 & 0,289574700083870 \\ -0,327255687796797 & 0,088293832450323 & 0,289574700083870 & -0,485620842953733 \end{bmatrix}, \\
Q_8 &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -2,395585227442576 & 4,509157309406576 & 0,471919952890960 & -0,327255258298053 \\ 4,509157309406576 & 1,549851234631405 & -7,302764510234153 & 0,088295454253609 \\ 0,471919952890960 & -7,302764510234153 & 4,963078610877103 & 0,289572069325520 \\ -0,327255258298053 & 0,088295454253609 & 0,289572069325520 & -0,485608187105773 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{78}$$

$$P = \begin{bmatrix} 27,0759 & 31,3605 & 66,2574 & 7,3492 \\ 31,3605 & 36,6916 & 78,0008 & 8,6904 \\ 66,2574 & 78,0008 & 168,0948 & 18,8802 \\ 7,3492 & 8,6904 & 18,8802 & 2,2280 \end{bmatrix}. \tag{79}$$

Os autovalores de P são: $eig(P) = [0,0676 \ 0,0964 \ 1,0608 \ 232,8655]^T$.

Na Figura 3 é apresentada a simulação com a resposta temporal dos estados do sistema não linear bola-viga com a lei de controle (62). O tempo de estabelecimento é de aproximadamente $t = 4s$.

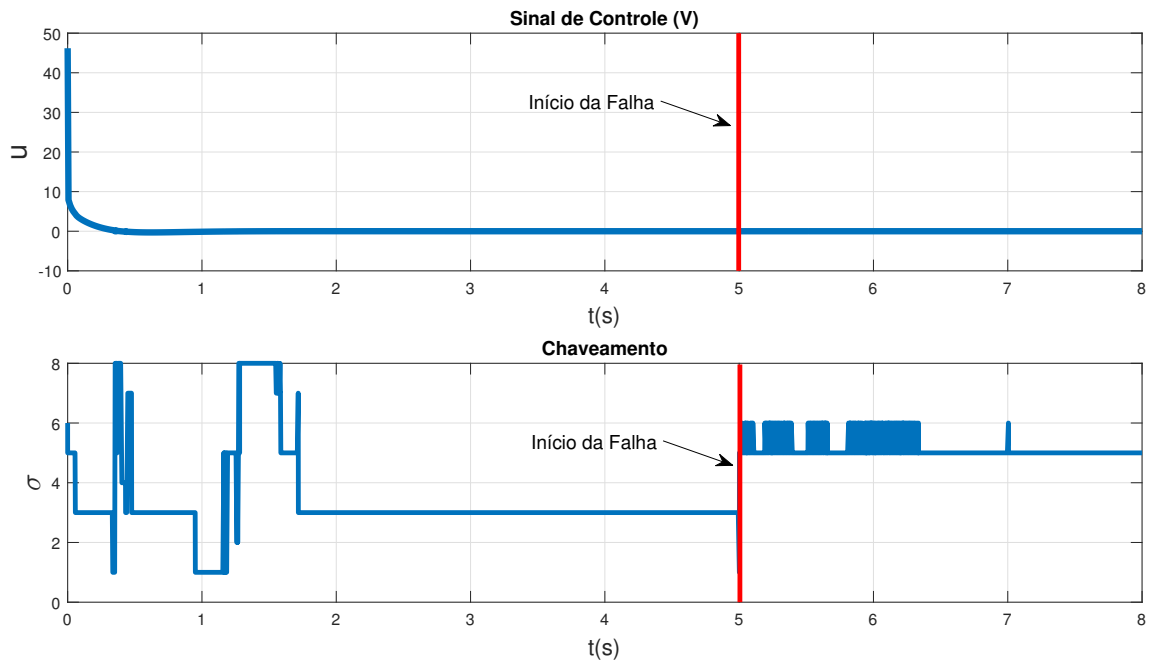
Figura 3 – Resposta temporal dos estados do sistema bola-viga com controlador (62).



Fonte: Próprio autor

Na Figura 4 é apresentado o sinal de controle e o chaveamento do sistema não linear bola-viga com a lei de controle (62), com uma falha no atuador em que se tem uma perda de 40% do ganho do motor (A_m) variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V). Observa-se o sinal de controle partindo por volta de 46,19 (V) e no chaveamento a variação do índice de comutação entre $\sigma = 1$ e $\sigma = 8$.

Figura 4 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema bola-viga controlado pela lei (62).



Fonte: Próprio autor

3.3.2 Simulação do Controle Chaveado com Incertezas Politópicas e Matriz $B(z(t))$ Constante no Sistema Bola-Viga

Agora utilizando a LMI (52) para garantir a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento ($\beta = 1$) e a lei de controle (66) utilizando uma matriz B constante.

Foi adicionada uma incerteza ao sistema no valor da massa da bola onde se tem a variação de $m_b = 0,05kg$ e $m_{b_2} = 0,04kg$, a taxa de decaimento usada foi $\beta = 1$. Obteve-se:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9423 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9423 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,5400 & 0,1400 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,5400 & -0,1400 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,6128 & 0,1400 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,6128 & -0,1400 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = B_8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 61,4286 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{80}$$

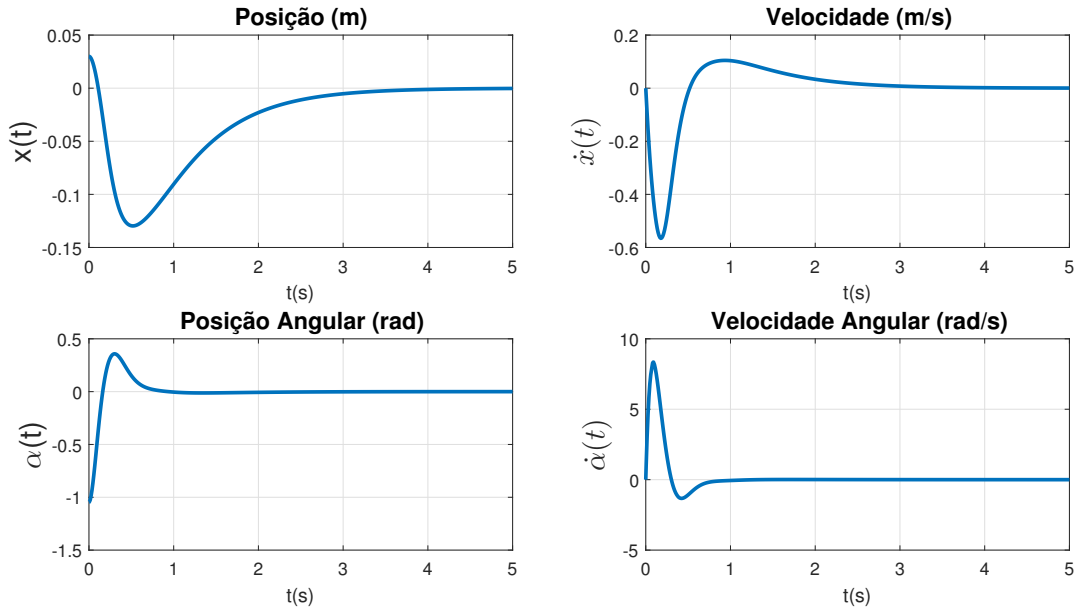
$$\begin{aligned}
 F1 &= \begin{bmatrix} 2,5796 & 2,6429 & 4,7923 & -0,2104 \end{bmatrix}, F2 = \begin{bmatrix} 1,7684 & 1,8335 & 3,4806 & -0,3264 \end{bmatrix}, \\
 F3 &= \begin{bmatrix} 3,0679 & 3,1301 & 5,5818 & -0,1406 \end{bmatrix}, F4 = \begin{bmatrix} 2,2567 & 2,3207 & 4,2701 & -0,2566 \end{bmatrix}, \\
 F5 &= \begin{bmatrix} 2,6630 & 2,7262 & 4,9272 & -0,1984 \end{bmatrix}, F6 = \begin{bmatrix} 1,9059 & 1,9707 & 3,7029 & -0,3067 \end{bmatrix}, \\
 F7 &= \begin{bmatrix} 3,1188 & 3,1809 & 5,6640 & -0,1333 \end{bmatrix}, F8 = \begin{bmatrix} 2,3616 & 2,4254 & 4,4398 & -0,2415 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{81}$$

$$P = \begin{bmatrix} 8,7513 & 8,3067 & 13,2325 & 1,1514 \\ 8,3067 & 8,2887 & 13,4316 & 1,1877 \\ 13,2325 & 13,4316 & 23,4666 & 2,0836 \\ 1,1514 & 1,1877 & 2,0836 & 0,2358 \end{bmatrix}. \tag{82}$$

Os autovalores de P são: $eig(P) = [0,0494 \ 0,1314 \ 1,0903 \ 39,4713]^T$.

Na Figura 5 é apresentada a resposta temporal dos estados do sistema não linear bola-viga com a lei de controle chaveada (66), com uma incerteza no valor da massa da bola onde se tem a variação de $m_b = 0,05kg$ e $m_{b_2} = 0,04kg$. Onde a estabilização dos estados ocorre por volta de $t = 4s$.

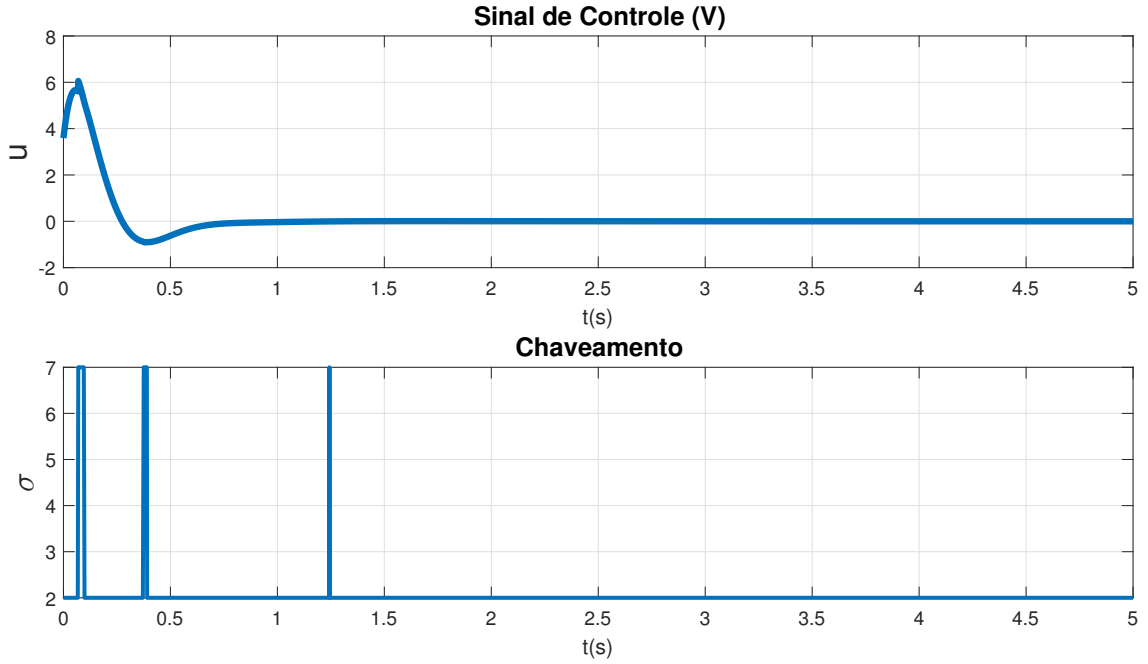
Figura 5 – Resposta temporal dos estados do sistema bola-viga com controlador chaveado (66).



Fonte: Próprio autor

Na Figura 6 é apresentado o sinal de controle e o chaveamento do sistema não linear bola-viga com a lei de controle (66). Observa-se o sinal de controle partindo por volta de 3,6 (V) com um pico por volta de 6,05 (V) e no chaveamento a variação do índice de comutação entre $\sigma = 2$ e $\sigma = 7$. Observa-se que as restrições das variáveis de estados apresentadas na Tabela 1 são respeitadas.

Figura 6 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema bola-viga controlado pela lei (66).



Fonte: Próprio autor

3.4 CONTROLE CHAVEADO SUJEITO À SATURAÇÃO

Os métodos utilizados para estimar a região de operação em que o sistema não linear deve operar e a possibilidade de saturação no sinal de controle são apresentados em [Souza *et al.* \(2014a\)](#) e [Souza *et al.* \(2014b\)](#). Um exemplo de aplicação desta lei de controle no sistema bola-viga é mostrado no final deste capítulo.

3.4.1 Conceitos Iniciais

Sejam matrizes $H_k = [H_{k(1)}^T H_{k(2)}^T \cdots H_{k(n_u)}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathbb{N}_{n_r}$, uma matriz definida positiva $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, um vetor conhecido $\rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\rho_l > 0$, $l \in \mathbb{N}_{n_u}$, e um escalar $\delta > 0$ também conhecido. Definem-se os conjuntos $\mathcal{L}(H_k)$ e $\mathcal{E}(P, \delta)$ como segue ([HU; LIN; CHEN, 2002b](#); [CAO; LIN, 2003](#)):

$$\mathcal{L}(H_k) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |H_{k(l)}x(t)| \leq \rho_l, l \in \mathbb{N}_{n_u}, k \in \mathbb{N}_{n_r}\}, \quad (83)$$

$$\mathcal{E}(P, \delta) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : x(t)^T P x(t) \leq \delta\}. \quad (84)$$

Define-se o conjunto de matrizes $\mathcal{D}$ como (HU; LIN; CHEN, 2002b; CAO; LIN, 2003).

$$\mathcal{D} \triangleq \{D \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u} : d_{ii} = 0 \text{ ou } 1 \text{ e } d_{ij} = 0, \forall i \neq j\}, \quad (85)$$

sendo $d_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N}_{n_u} \times \mathbb{N}_{n_u}$, os elementos da matriz D . Assim, o conjunto $\mathcal{D}$ em (85) possui 2^{n_u} matrizes. As matrizes que compõem este conjunto serão denominadas D_s , $s \in \mathbb{N}_{2^{n_u}}$. Por exemplo, para $n_u = 2$, tem-se

$$\mathcal{D} = \left\{ D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Baseado em Boyd *et al.* (1994), Hu, Lin e Chen (2002b), em Alves *et al.* (2016) é enunciado o lema que se segue, fornecendo uma condição suficiente tal que, se satisfeita, assegura $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$.

Lema 2 (ALVES *et al.*, 2016). *Dados os conjuntos $\mathcal{E}(P, \delta)$ em (84) e $\mathcal{L}(H_k)$ em (83). A condição $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H_k)$ é assegurada se*

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \delta^{-1} & G_{k(l)} \\ G_{k(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (86)$$

for satisfeita para todo $(k, l) \in \mathbb{N}_{n_r} \times \mathbb{N}_{n_u}$, sendo $X = P^{-1}$ e $G_{k(l)} = H_{k(l)}X$.

3.4.2 Descrição do Sinal de Controle por uma Combinação Convexa

Nesta Subseção apresenta-se uma interpretação da descrição da saturação do sinal de controle por uma combinação convexa. Esta descrição utiliza os conjuntos $\mathcal{D}$ em (85) e $\mathcal{L}(H_k)$ em (83), tendo sido apresentada em Hu, Lin e Chen (2002b), Hu, Lin e Chen (2002a) e Cao e Lin (2003).

Admita um sinal de controle $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$. Então a saturação do sinal de controle é dada por

$$\text{sat}(u(t)) = [\text{sat}_1(u_1(t)) \cdots \text{sat}_{n_u}(u_{n_u}(t))]^T, \quad (87)$$

$$\text{sat}_l(u_l(t)) = \text{sgn}(u_l(t)) \min \{\rho_l, |u_l(t)|\}, \quad (88)$$

sendo $\rho_l > 0, \forall l \in \mathbb{N}_{n_u}$, um valor conhecido. Uma componente $\text{sat}_l(u_l(t))$ da saturação no sinal de controle, descrita por (88), é ilustrada na Figura 7. De (88) e da Figura 7 observa-se que

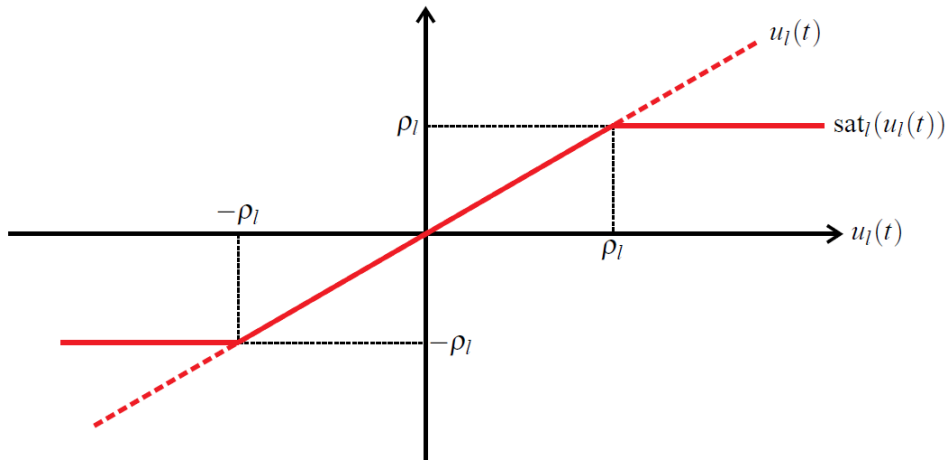
$$\text{sat}_l(u_l(t)) \leq u_l(t), \quad u_l(t) \geq 0 \text{ e } \text{sat}_l(u_l(t)) \geq u_l(t), \quad u_l(t) < 0. \quad (89)$$

Observação 1 Para todo $x(t) \in \mathcal{L}(H)$ e para cada componente $\text{sat}_l(u_l(t))$ descrita em (88) do vetor $\text{sat}(u(t))$ em (87) tem-se que

$$\text{sat}_l(u_l(t)) = \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(l)}x(t), \quad \sum_{i=1}^2 \theta_{li}(t) = 1, \quad \theta_{li} \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (90)$$

Demonstração. Considere o conjunto $\mathcal{L}(H)$ definido como em (83), sendo $H_k = H \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, ou seja, uma única matriz H ; e uma componente $\text{sat}_l(u_l(t))$ dada por (88).

Figura 7 – Representação da Saturação.



Fonte: (ALVES,)

O ponto chave desta demonstração é mostrar que $\text{sat}_l(u_l(t))$ sempre assume valores entre $u_l(t)$ e $H_{(l)}x(t)$ para $x(t) \in \mathcal{L}(H)$ em (83). Assim pode-se representar $\text{sat}_l(u_l(t))$ por uma combinação convexa como apresentado em (1). Seja $x(t) \in \mathcal{L}(H)$ em (83), de (88) e da Figura 7, seguem as possibilidades:

(i) Para $-\rho_l \leq u_l(t) \leq \rho_l$ tem-se que $\text{sat}_l(u_l(t)) = u_l(t)$ e assim $\text{sat}_l(u_l(t)) = \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(l)}x(t)$ com

$$\theta_{l1} = 1 \text{ e } \theta_{l2} = 0, \quad (91)$$

portanto, para $-\rho_l \leq u_l(t) \leq \rho_l$, $\theta_{l1}(t) + \theta_{l2}(t) = 1$, $\theta_{l1}(t), \theta_{l2}(t) \geq 0$.

(ii) Para $u_l(t) > \rho_l$, $\text{sat}_l(u_l(t)) = \rho_l$ e assim, como $H_{(l)}x(t) \leq \rho_l$, pode-se dizer que $\text{sat}_l(u_l(t)) = \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(l)}x(t)$, sendo

$$\theta_{l1}(t) = \frac{\text{sat}_l(u_l(t)) - H_{(l)}x(t)}{u_l(t) - H_{(l)}x(t)} \text{ e } \theta_{l2}(t) = \frac{u_l(t) - \text{sat}_l(u_l(t))}{u_l(t) - H_{(l)}x(t)}, \quad (92)$$

logo, para $u_l(t) > \rho_l$, $\theta_{l1}(t) + \theta_{l2}(t) = 1$, $\theta_{l1}(t), \theta_{l2}(t) \geq 0$.

(iii) Para $u_l(t) < -\rho_l$, $\text{sat}_l(u_l(t)) = -\rho_l$ e, como $H_{(l)}x(t) \geq -\rho_l$, pode-se dizer que $\text{sat}_l(u_l(t)) = \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(l)}x(t)$, sendo

$$\theta_{l1}(t) = \frac{H_{(l)}x(t) - \text{sat}_l(u_l(t))}{H_{(l)}x(t) - u_l(t)} \text{ e } \theta_{l2}(t) = \frac{\text{sat}_l(u_l(t)) - u_l(t)}{H_{(l)}x(t) - u_l(t)}, \quad (93)$$

e assim, também para $u_l(t) < -\rho_l$, $\theta_{l1}(t) + \theta_{l2}(t) = 1$, $\theta_{l1}(t), \theta_{l2}(t) \geq 0$.

A demonstração da Observação 1 está concluída.

A partir da Observação 1, reescreve-se (87) como

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{bmatrix} \text{sat}_1(u_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sat}_{n_u}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(1)}x(t) \\ \vdots \\ \theta_{n_u1}(t)u_{n_u}(t) + \theta_{n_u2}(t)H_{(n_u)}x(t) \end{bmatrix}. \quad (94)$$

Agora defina $\mathbb{D}_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ como sendo a matriz com seu elemento de índice ll igual a 1 e os demais elementos nulos, ou seja,

$$\mathbb{D}_l = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n_u1} & \cdots & d_{n_un_u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad d_{ll} = 1, \quad d_{lj} = 0 \text{ se } j \neq l. \quad (95)$$

A partir de (94) e (95), e sabendo que $H = [H_{(1)}^T \cdots H_{(n_u)}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= \begin{bmatrix} \text{sat}_1(u_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sat}_{n_u}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{l1}(t)u_l(t) + \theta_{l2}(t)H_{(1)}x(t) \\ \vdots \\ \theta_{n_u1}(t)u_{n_u}(t) + \theta_{n_u2}(t)H_{(n_u)}x(t) \end{bmatrix} \\ &= \theta_{l1}(t)\mathbb{D}_1u(t) + \theta_{l2}(t)\mathbb{D}_1Hx(t) + \cdots + \theta_{n_u1}(t)\mathbb{D}_{n_u}u(t) + \theta_{n_u2}(t)\mathbb{D}_{n_u}Hx(t), \end{aligned} \quad (96)$$

pois, de acordo com a definição (95), $\mathbb{D}_l$ é uma matriz quadrada de ordem $n_u \times n_u$ cujo elemento (l, l) é igual a 1 e os elementos (l, j) iguais a 0, para $j \neq l$.

Toda a prova mais detalhada se encontra em (ALVES,).

3.5 CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS DESCRITOS POR MODELOS *FUZZY* T-S INCERTOS COM SATURAÇÃO NO ATUADOR

Considere um sistema não linear sujeito à saturação nos atuadores cuja equação dinâmica é dada por

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_x} f_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{n_u} g_{ik}(x(t))sat_k(u_k(t)), i \in \mathbb{N}_{n_x}, \quad (97)$$

$$sat_k(u_k(t)) = \text{sgn}(u_k(t)) \min \{ \rho_k, |u_k(t)| \}, \quad (98)$$

sendo $x_i(t), i \in \mathbb{N}_{n_x}$, as variáveis de estado, $u_k(t), k \in \mathbb{N}_{n_u}$, os sinais de controle, $f_{ij}(x(t))$, $g_{ik}(x(t))$, funções não lineares que possuem parâmetros incertos, sendo estes em intervalos conhecidos, e ρ_k valores conhecidos da saturação dos atuadores. Note que esta é uma representação equivalente ao sistema (54), considerando saturação no atuador.

Utilizando o procedimento descrito na Seção 2.6, o sistema (97) pode ser exatamente descrito, em uma região de operação $\mathcal{X}$ em (55), pelo modelo *fuzzy* T-S incerto

$$\dot{x}(t) = A(z(t))x(t) + B(z(t))sat(u(t)), \quad (99)$$

sendo $A(z(t))$ e $B(z(t))$ definidos em (6) e (8), e $sat(u(t))$ definido em (87).

Nesta Seção estudam-se condições para que a lei de controle chaveada

$$\begin{aligned} u(t) &= u_\varphi(t) = -K_\varphi x(t), \\ \varphi &= \arg^* \min_{i \in \mathbb{N}_{n_r}} \{x(t)^T Q_i x(t)\}, \end{aligned} \quad (100)$$

sendo as matrizes dos ganhos de realimentação K_φ , e matrizes de decisão $Q_i, i \in \mathbb{N}_{n_r}$, obtidas no procedimento de projeto, que garantem a estabilidade local do sistema (97) e (100) com certa taxa de decaimento.

Teorema 4 (*ALVES et al., 2016*). *Dado um sistema não linear incerto e sujeito a saturação no atuador (97) exatamente descrito por um modelo fuzzy T-S incerto (99) em uma região de operação $\mathcal{X}$ em (55), sendo $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}, \phi \in \mathbb{R}^{n_h}$ e $N \in \mathbb{R}^{n_h \times n_x}$ conhecidos, assim como as faixas de valores para seus parâmetros incertos. Suponha a existência de matrizes simétricas*

$0 < X$, $\bar{Q}_i$ e $\bar{Z}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $G_j = [G_{j(1)}^T \ G_{j(2)}^T \ \cdots \ G_{j(n_u)}^T]^T$ e $M_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e um escalar $\beta > 0$, tais que

$$A_i X + X A_i^T + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (101)$$

$$B_i[-D_s M_j + D_s^- G_j] + [-D_s M_j + D_s^- G_j]^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j \leq 0, \quad (102)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 & G_{j(l)} \\ G_{j(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_{(h)} X \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (103)$$

sejam satisfeitas para todo i e $j \in \mathbb{N}_{n_r}$, $l \in \mathbb{N}_{n_u}$, $h \in \mathbb{N}_{n_h}$, $s \in \mathbb{N}_{2n_u}$, $D_s \in D$ e $D_s^- = I_{n_u} - D_s$. Então, a lei de controle chaveada (100) sendo $K_i = M_i X^{-1}$ e $Q_i = X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1}$, para todo $i \in \mathbb{N}_{n_r}$, aplicada ao sistema (97) torna a origem um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ em (84), sendo que $P = X^{-1}$. Além disso, $x(t) \in \mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$, $t \geq 0$.

Caso as condições do Teorema (4) sejam satisfeitas, fica garantida a estabilidade local, com taxa de decaimento β , do sistema não linear incerto (97) em malha fechada com a lei de controle (100) para toda condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Com isto, é interessante exigir que um conjunto de condições iniciais de interesse $\Psi \subset \mathcal{E}(P, 1)$ e, portanto, para qualquer condição inicial $x(0) \in \Psi$ tenha-se $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Seja $\Psi = \varpi \text{ co}\{w_1, \dots, w_{n_L}\}$, $\varpi > 0$, então a condição $\Psi \subset \mathcal{E}(P, 1)$ é assegurada caso

$$\begin{bmatrix} \varpi^{-2} & w_\ell^T \\ w_\ell & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (104)$$

seja satisfeita $\forall \ell \in \mathbb{N}_{n_L}$. Observe que qualquer elemento no conjunto Ψ pode ser escrito como $\varpi w(\theta) = \varpi \sum_{\ell=1}^{n_L} \theta_\ell w_\ell \in \Psi$, $\theta_\ell \geq 0$ e $\sum_{\ell=1}^{n_L} \theta_\ell = 1$. Então, supondo (104) satisfeita para todo $\ell \in \mathbb{N}_{n_L}$, multiplicando as desigualdades por θ_ℓ , $\theta_\ell \geq 0$ e $\sum_{\ell=1}^{n_L} \theta_\ell = 1$, e aplicando complemento de Schur com relação à segunda linha e coluna, encontra-se

$$\varpi^{-2} - w(\theta)^T P w(\theta) \geq 0, \quad (105)$$

sendo $P = X^{-1}$, e segue que $\varpi^{-2} \geq w(\theta)^T P w(\theta)$, então $1 \geq [\varpi w(\theta)^T] P [\varpi w(\theta)]$ e consequentemente $\varpi w(\theta) \in \mathcal{E}(P, 1)$, qualquer que seja $\varpi w(\theta) \in \Psi$. Portanto $\Psi \subset \mathcal{E}(P, 1)$.

Observe que em (104), ϖ é um fator de escala do conjunto $co\{w_1, \dots, w_{n_L}\}$ (BOYD *et al.*, 1994; HU; LIN; CHEN, 2002b; CAO; LIN, 2003), portanto, ϖ pode ser utilizado como uma variável a ser maximizada (minimização de ϖ^{-2}) de forma a obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\mathcal{E}(P, 1)$.

Ainda utilizando a teoria de conjuntos apresentada, é possível reduzir a norma dos ganhos de realimentação K_i , calculados pelas LMIs do Teorema (4) através do aumento da região $\mathcal{L}(K_i)$ em (83) na qual a saturação não ocorre. Isto pode ser feito selecionando um escalar $x > 0$ tal que $\mathcal{E}(P, \xi^{-1}) \subset \mathcal{L}(K_i)$. Usando o resultado do Lema 2, isso acontece se

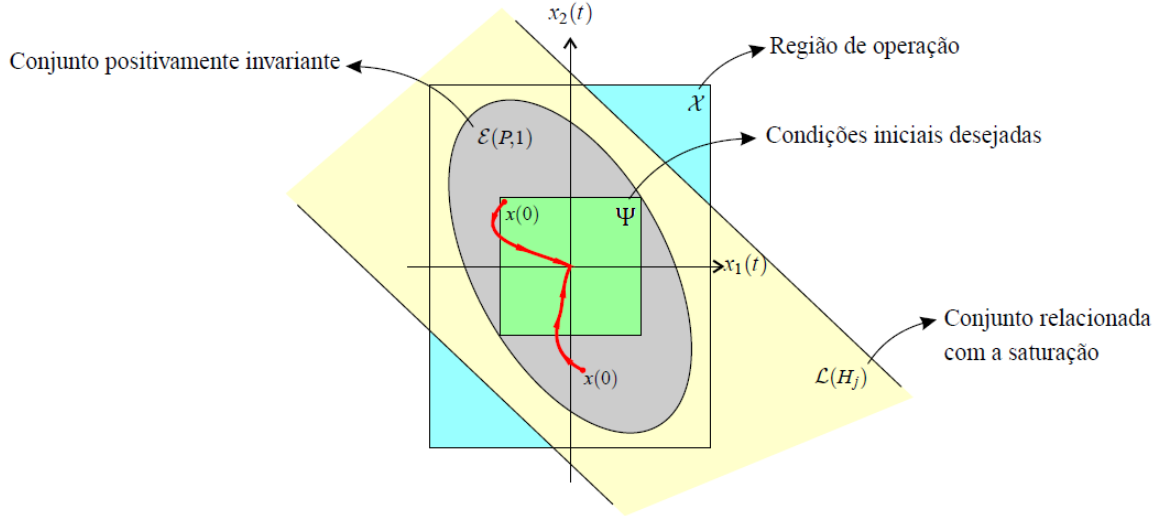
$$\begin{bmatrix} \xi \rho_l^{-2} & M_{i(l)} \\ M_{i(l)}^T & X \end{bmatrix} > 0, \quad (106)$$

for satisfeita para todo $i \in \mathbb{N}_{n_r}$ e $l \in \mathbb{N}_{n_u}$, cuja prova segue os mesmos passos da prova do Lema 2, observando que $X = P^{-1}$ e $M_{i(l)} = K_{i(l)}X$ (HU; LIN; CHEN, 2002b; CAO; LIN, 2003).

A diminuição na norma dos ganhos K_i ocorre porque, sendo fixa a matriz P , quanto maior o valor de ξ^{-1} maior será a norma de $x(0)$ admissível em $\mathcal{E}(P, \xi^{-1})$ em (84). A partir do Lema 2, sendo satisfeita a desigualdade (106) tem-se $\mathcal{L}(K_i) \supset \mathcal{E}(P, \xi^{-1})$, e portanto os estados $x(0)$ com maiores normas em $\mathcal{E}(P, \xi^{-1})$ também pertencem a $\mathcal{L}(K_i)$. Pela definição (83) maiores normas de $x(0) \in \mathcal{L}(K_i)$ resultam em menores normas dos ganhos K_i , visto que $|K_{i(l)}x(t)|$ é menor ou igual a um valor constante (ALVES *et al.*, 2016).

Na Figura 8 apresentam-se exemplos de possíveis trajetórias de estado, sendo $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$, para um sistema em malha fechada com controle projetado usando a teoria em discussão neste capítulo. Observe que $\Psi \subset \mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$, ou seja, o conjunto de condições iniciais de interesse está contido na região positivamente invariante $\mathcal{E}(P, 1)$, que por sua vez é um subconjunto da região de operação estipulada para o sistema. Então para toda trajetória em Ψ , ou mesmo em $\mathcal{E}(P, 1) \setminus \Psi$, tem-se que a trajetória de estado é assintoticamente estável.

Figura 8 – Representação de possíveis trajetórias de estado e das regiões.



Fonte: Adaptado de (ALVES,)

3.5.1 Simulação do Controle Chaveado de Sistemas Descritos por Modelos Fuzzy T-S Incertos Com Saturação no Atuador no Sistema Bola-viga

Assim como na Seção 3.3.1, foi adicionada uma incerteza através de uma falha no atuador onde se tem uma perda de 40% do ganho do motor (A_m) variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V). Utilizando o Teorema 4 e as LMIs (101), (102), (103), (104) apresentadas neste teorema, com os parâmetros $\beta = 1$ e $\rho = 3$, $n_L = 2$, $w_1 = [0,07 \ 1 \ 0,25\pi \ 1]^T$, $w_2 = -w_1$ e $\varpi = 0,0818$ de modo a garantir a condição inicial: $x(0) = [0,03 \ 0 \ -4\pi/12 \ 0]^T \in \mathcal{E}(P,1)$. Foram obtidos o seguintes resultados:

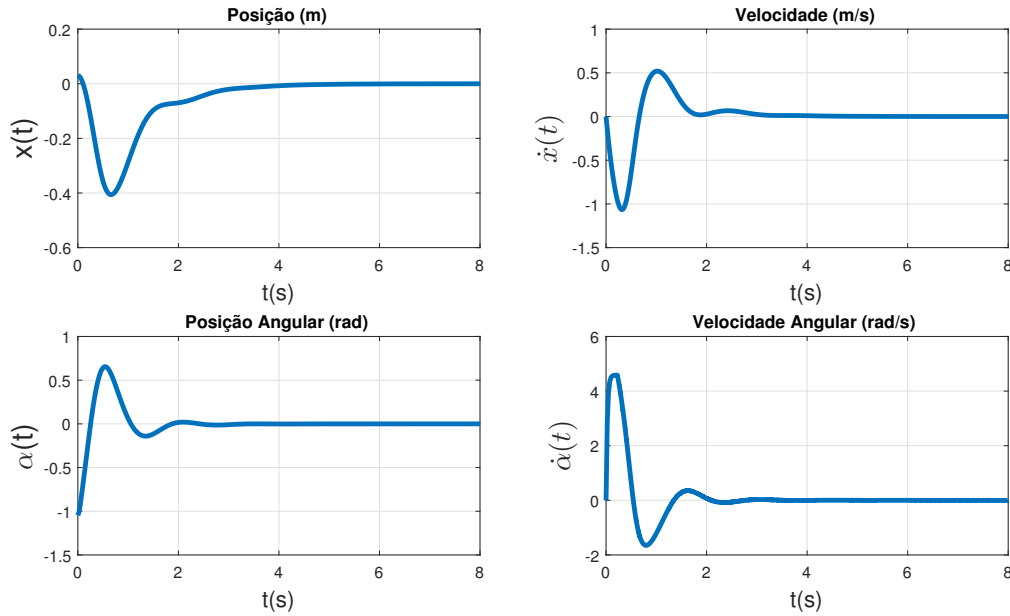
$$\begin{aligned}
 F1 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 4,6856 & 4,8720 & 6,1647 & 1,2845 \end{bmatrix}; F2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4,6895 & 4,8758 & 6,1699 & 1,2851 \end{bmatrix}; \\
 F3 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 4,6890 & 4,8755 & 6,1691 & 1,2854 \end{bmatrix}; F4 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4,6917 & 4,8780 & 6,1726 & 1,2857 \end{bmatrix}; \\
 F5 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 4,6883 & 4,8749 & 6,1685 & 1,2854 \end{bmatrix}; F6 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4,6917 & 4,8782 & 6,1731 & 1,2858 \end{bmatrix}; \\
 F7 &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 4,6883 & 4,8749 & 6,1684 & 1,2853 \end{bmatrix}; F8 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4,6917 & 4,8782 & 6,1730 & 1,2858 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{107}$$

$$P = \begin{bmatrix} 123,2547 & 45,6514 & 57,8380 & 2,6824 \\ 45,6514 & 32,6709 & 34,3275 & 2,7894 \\ 57,8380 & 34,3275 & 60,2356 & 3,5292 \\ 2,6824 & 2,7894 & 3,5292 & 0,7359 \end{bmatrix}. \tag{108}$$

Os autovalores de P são: $\text{eig}(P) = [0,4403 \ 8,8006 \ 27,9335 \ 179,7227]^T$.

Na Figura 9 é apresentada a resposta temporal dos estados do sistema não linear bola-viga com o controle chaveado (100). Mesmo com os altos valores dos ganhos de realimentação a estabilização dos estados ocorre por volta de $t = 4s$.

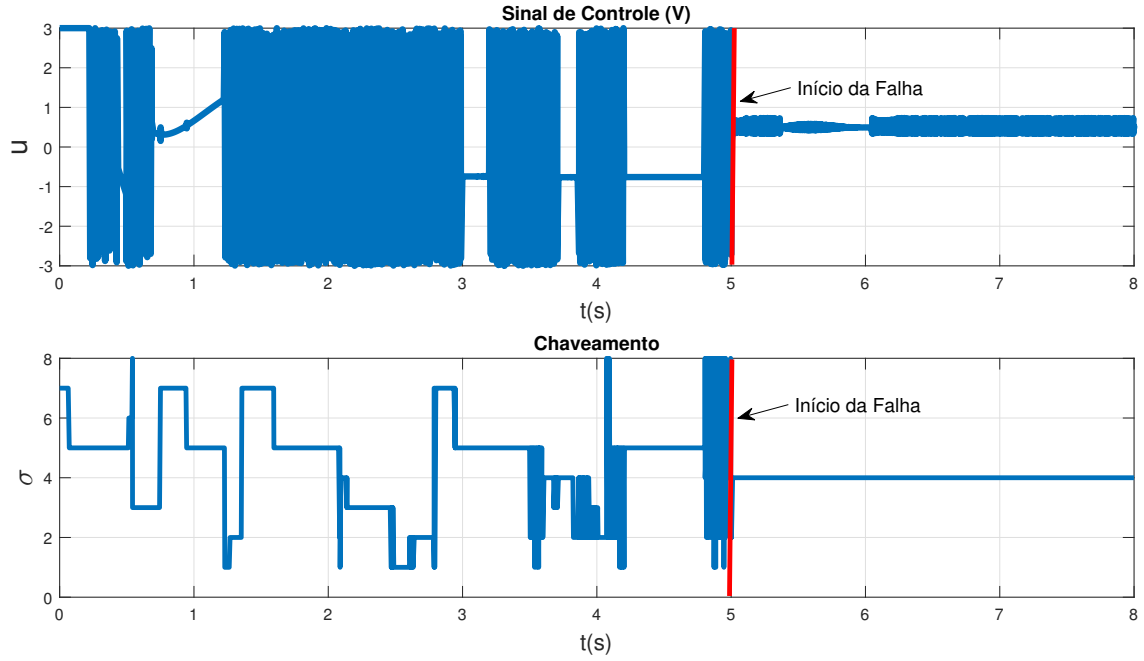
Figura 9 – Resposta temporal dos estados do sistema bola-viga com a lei de controle chaveado (100) com região de saturação.



Fonte: Próprio autor

Na Figura 10 é apresentado o sinal de controle e o chaveamento do sistema não linear bola-viga com o controle chaveado (100). Observa-se o sinal de controle sendo limitado em 3 (V) mas não se estabilizando durante o tempo e ocorrendo o efeito de “chattering”, que se manifesta pelo chaveamento em frequência muito elevada dos ganhos de realimentação. Observa-se também no sinal de controle uma rápida variação de sinal em períodos em que não há a troca da chave, isto pode ser ocasionado pelo alto valor das ganhos obtidos, fazendo o controlador ter este comportamento para manter os estados estáveis. No chaveamento a variação do índice de comutação foi entre $\sigma = 1$ e $\sigma = 8$.

Figura 10 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema bola-viga com a lei de controle (100) com região de saturação.



Fonte: Próprio autor

3.5.2 Simulação do Controle Chaveado de Sistemas Descritos por Modelos Fuzzy T-S Incertos Com Saturação no Atuador e Redução de Norma no Sistema Bola-viga

Da mesma forma feita na Seção 3.3.1 só que agora com a LMI (106) de redução de norma de ganhos, foi adicionado uma incerteza através de uma falha no atuador onde se tem uma perda de 40% do ganho do motor (A_m) variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V). Utilizando o Teorema 4 e as LMIs (101), (102), (103), (104) apresentadas neste teorema, com os parâmetros $\beta = 1$ e $\rho = 3$, $n_L = 2$, $w_1 = [0,07 \ 1 \ 0,25\pi \ 1]^T$, $w_2 = -w_1$ e $\varpi = 0,0817$ de modo a garantir a condição inicial: $x(0) = [0,03 \ 0 \ -4\pi/12 \ 0]^T \in \mathcal{E}(P, 1)$.

Com a LMI (106) de redução da norma de ganhos de realimentação, sendo $\xi = 20$. Foram obtidos o seguintes resultados:

$$\begin{aligned} F1 &= \begin{bmatrix} 6,3656 & 6,1176 & 8,4684 & 0,9446 \end{bmatrix}; F2 = \begin{bmatrix} 7,2491 & 6,8147 & 9,7349 & 0,7641 \end{bmatrix}; \\ F3 &= \begin{bmatrix} 6,8205 & 6,6089 & 8,8885 & 1,0830 \end{bmatrix}; F4 = \begin{bmatrix} 7,6187 & 7,2548 & 10,0233 & 0,8991 \end{bmatrix}; \\ F5 &= \begin{bmatrix} 6,9513 & 6,8010 & 9,3242 & 1,1412 \end{bmatrix}; F6 = \begin{bmatrix} 7,7710 & 7,3601 & 10,5242 & 0,8367 \end{bmatrix}; \\ F7 &= \begin{bmatrix} 6,9100 & 6,7439 & 9,1422 & 1,1203 \end{bmatrix}; F8 = \begin{bmatrix} 7,7155 & 7,4166 & 10,2069 & 0,9004 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (109)$$

Observa-se que os ganhos de realimentação agora obtidos estão bem menores que o da Seção 3.5.1.

$$\begin{aligned} Q_1 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -1,448967967333823 & 0,445157425711534 & 0,109939279110998 & -0,072977560248818 \\ 0,445157425711534 & 0,805643062616844 & 0,824729061236330 & -0,004691213496707 \\ 0,109939279110998 & 0,824729061236330 & -0,369056378836589 & 0,002136661839222 \\ -0,072977560248818 & -0,004691213496707 & 0,002136661839222 & -0,007210128863668 \end{bmatrix}, \\ Q_2 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -1,448967967333844 & 0,445157425712175 & 0,109939279110842 & -0,072977549193188 \\ 0,445157425712175 & 0,805643062614064 & 0,824729061235266 & -0,004691242790921 \\ 0,109939279110842 & 0,824729061235266 & -0,369056378835678 & 0,002136638145474 \\ -0,072977549193188 & -0,004691242790921 & 0,002136638145474 & -0,007210045987838 \end{bmatrix}, \\ Q_3 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -1,448967967333413 & 0,445157425617786 & 0,109939279110066 & -0,072977560651383 \\ 0,445157425617786 & 0,805643062029836 & 0,824729061704687 & -0,004691215379684 \\ 0,109939279110066 & 0,824729061704687 & -0,369056378833993 & 0,002136663933951 \\ -0,072977560651383 & -0,004691215379684 & 0,002136663933951 & -0,007210178774056 \end{bmatrix}, \\ Q_4 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -1,448967967333592 & 0,445157425618323 & 0,109939279110567 & -0,072977549890535 \\ 0,445157425618323 & 0,805643062028146 & 0,824729061703315 & -0,004691245012513 \\ 0,109939279110567 & 0,824729061703315 & -0,369056378835380 & 0,002136641699749 \\ -0,072977549890535 & -0,004691245012513 & 0,002136641699749 & -0,007210099448748 \end{bmatrix}, \\ Q_5 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -1,448967967333562 & 0,445157425796620 & 0,109939279109936 & -0,072977560243274 \\ 0,445157425796620 & 0,805643062067455 & 0,824729061122948 & -0,004691209644149 \\ 0,109939279109936 & 0,824729061122948 & -0,369056378832603 & 0,002136662393664 \\ -0,072977560243274 & -0,004691209644149 & 0,002136662393664 & -0,007210193475836 \end{bmatrix}, \\ Q_6 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -1,448967967333242 & 0,445157425796692 & 0,109939279109234 & -0,072977547944154 \\ 0,445157425796692 & 0,805643062064803 & 0,824729061122909 & -0,004691241887520 \\ 0,109939279109234 & 0,824729061122909 & -0,369056378830937 & 0,002136635545499 \\ -0,072977547944154 & -0,004691241887520 & 0,002136635545499 & -0,007209935182699 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (110)$$

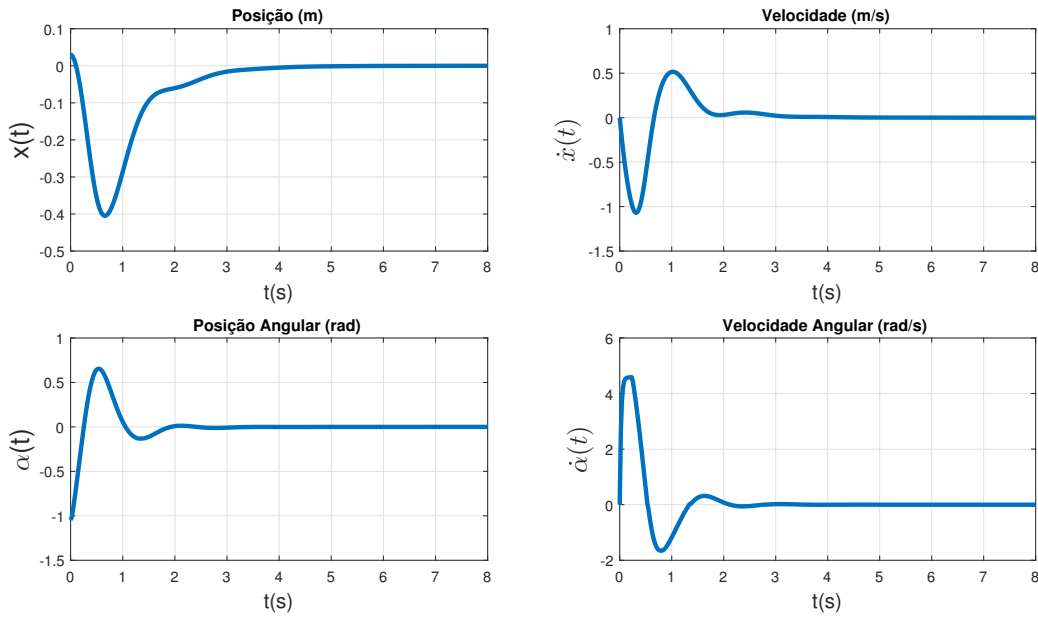
$$\begin{aligned}
Q_7 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -1,448967967333536 & 0,445157425703084 & 0,109939279110292 & -0,072977560362425 \\ 0,445157425703084 & 0,805643061483183 & 0,824729061587825 & -0,004691211629191 \\ 0,109939279110292 & 0,824729061587825 & -0,369056378833260 & 0,002136663293169 \\ -0,072977560362425 & -0,004691211629191 & 0,002136663293169 & -0,007210173747192 \end{bmatrix}, \\
Q_8 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} -1,448967967333517 & 0,445157425702924 & 0,109939279110645 & -0,072977549048465 \\ 0,445157425702924 & 0,805643061483902 & 0,824729061586865 & -0,004691243674439 \\ 0,109939279110645 & 0,824729061586865 & -0,369056378834575 & 0,002136640651599 \\ -0,072977549048465 & -0,004691243674439 & 0,002136640651599 & -0,007210048515912 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{111}$$

$$P = \begin{bmatrix} 123,2953 & 45,7321 & 57,9238 & 2,6784 \\ 45,7321 & 32,7328 & 34,4249 & 2,7853 \\ 57,9238 & 34,4249 & 60,4376 & 3,5301 \\ 2,6784 & 2,7853 & 3,5301 & 0,7346 \end{bmatrix}. \tag{112}$$

Os autovalores de P são: $\text{eig}(P) = [0,4403 \ 8,8045 \ 28,0039 \ 179,9516]^T$.

Na Figura 11 é apresentada a resposta temporal dos estados do sistema não linear bola-viga com o controle chaveado (100). Onde a estabilização dos estados ocorre por volta de $t = 4s$.

Figura 11 – Resposta temporal dos estados do sistema bola-viga com a lei de controle chaveado (100) com região de saturação e redução de norma.

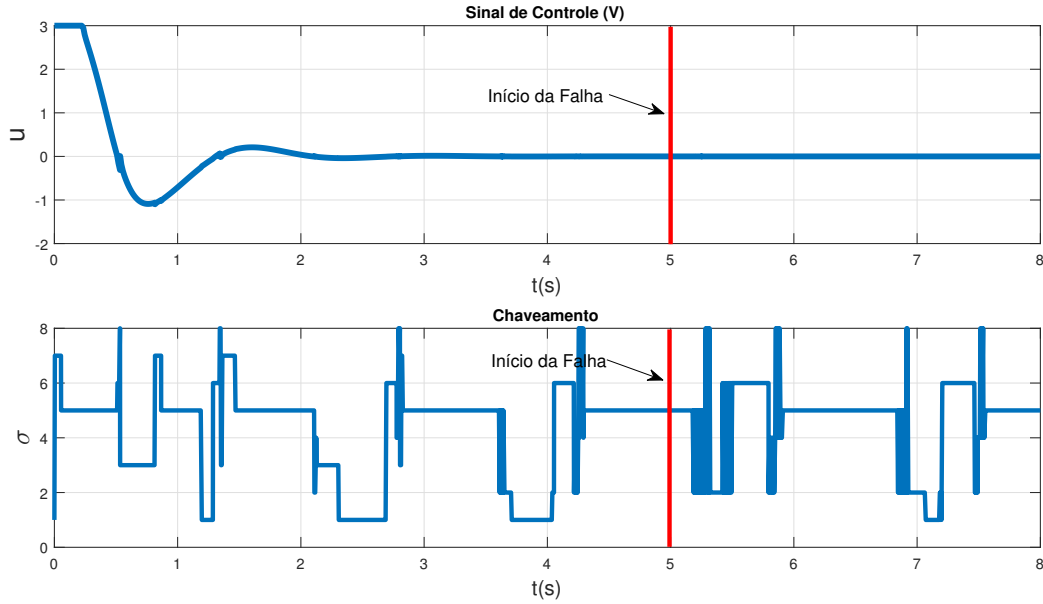


Fonte: Próprio autor

Na Figura 12 é apresentado o sinal de controle e o chaveamento do sistema não linear bola-viga com o controle chaveado (100). Observa-se o sinal de controle sendo

limitado em 3 (V) e se estabilizando em zero durante o tempo e no chaveamento a variação do índice de comutação entre $\sigma = 1$ e $\sigma = 8$.

Figura 12 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema bola-viga com a lei de controle (100) com região de saturação e redução de norma.



Fonte: Próprio autor

3.6 CONTROLE CHAVEADO COM INCERTEZAS NA MATRIZ B (MATRIZ AMPLIADA)

Utilizando do método da matriz ampliada de [Souza *et al.* \(2013\)](#), que consiste em adicionar um novo estado, que é a integral do sinal de controle, desta forma é obtida uma nova matriz A que contém as incertezas da matriz $\hat{B}$ original, sendo a que nova matriz B será constante. Este teorema garante que se existe estabilidade neste novo sistema equivalente, o sistema original que possui a matriz $\hat{B}$ com incertezas também tem a estabilidade garantida. Tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \\ \hat{A}(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \hat{A}_i, \quad \hat{B}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \hat{B}_i. \end{aligned} \tag{113}$$

Seja $v(t) \in \mathbb{R}^m$ a derivada do tempo do vetor da entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Defina $x_{n+1}(t)$ e $v_l(t)$, de modo que $\dot{x}_{n+1}(t) = \dot{u}_l(t) = v_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, m$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) &= v_1(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n+m}(t) &= v_m(t).\end{aligned}\tag{114}$$

ou equivalente, conforme apresentado em [Barmish \(1983\)](#),

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bv(t),\tag{115}$$

onde

$$\begin{aligned}x &= [\hat{x}^T \ x_{n+1} \ \cdots \ x_{n+m}]^T, \\ A(\alpha) &= \begin{bmatrix} \hat{A}(\alpha) & \hat{B}(\alpha) \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{116}$$

Após as considerações acima, observe que o sistema (115) é semelhante ao sistema (54). Assim, pode-se projetar uma lei de controle comutado $v(t) = -K_\sigma x(t)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Utilizou-se o Teorema 5 de [Buzetti \(2017\)](#) para a redução da norma do controlador chaveado com a matriz ampliada, o qual foi baseado em um teorema de [Assunção et al. \(2007\)](#) para um controlador sem chaveamento.

Teorema 5 ([BUZETTI, 2017](#)). *Dada uma constante $\mu_0 > 0$, então a norma dos controladores K_j , $j \in K_s$, pode ser descrita utilizando a minimização de η , $\eta > 0$, tal que $K_j K_j^T < \eta I / \mu_0^2$. O valor ótimo de η pode ser obtido solucionando o seguinte problema de otimização:*

$$\min(\eta)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I & M_j \\ M_j^T & I \end{bmatrix} > 0,\tag{117}$$

$$X > \mu_0 I.\tag{118}$$

A prova do teorema é demonstrada em [Buzetti \(2017\)](#).

3.6.1 Simulação do Controle Chaveado com Incertezas na Matriz B (Matriz Ampliada)

Utilizando-se os parâmetros do sistema *Ball Balancer* da Tabela 2 a LMI (53) para garantir a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento ($\beta = 3$), uma falha no atuador em que se tem uma perda de 40% do ganho do motor (A_m) variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V), $\mu_0 = 1$ e $\eta = 736792316,8435$ minimizado pelo Teorema 5. Com a lei de controle (66), condição inicial: $x(0) = [0,03 \ 0 \ -\pi/8 \ 0]^T$ e a região de operação: $-0,0254 \leq x \leq 0,0254 \ m$ e $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$. Obteve-se os seguintes modelos locais.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & 0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 & 61,4286 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & 0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 & 36,8571 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & -0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 & 61,4286 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & -0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 & 36,8571 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6913 & 0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 & 61,4286 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6913 & 0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 & 36,8571 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6913 & -0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 & 61,4286 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6913 & -0,0272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 & 36,8571 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = B_8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{119}$$

Os seguintes ganhos do controlador e matriz P .

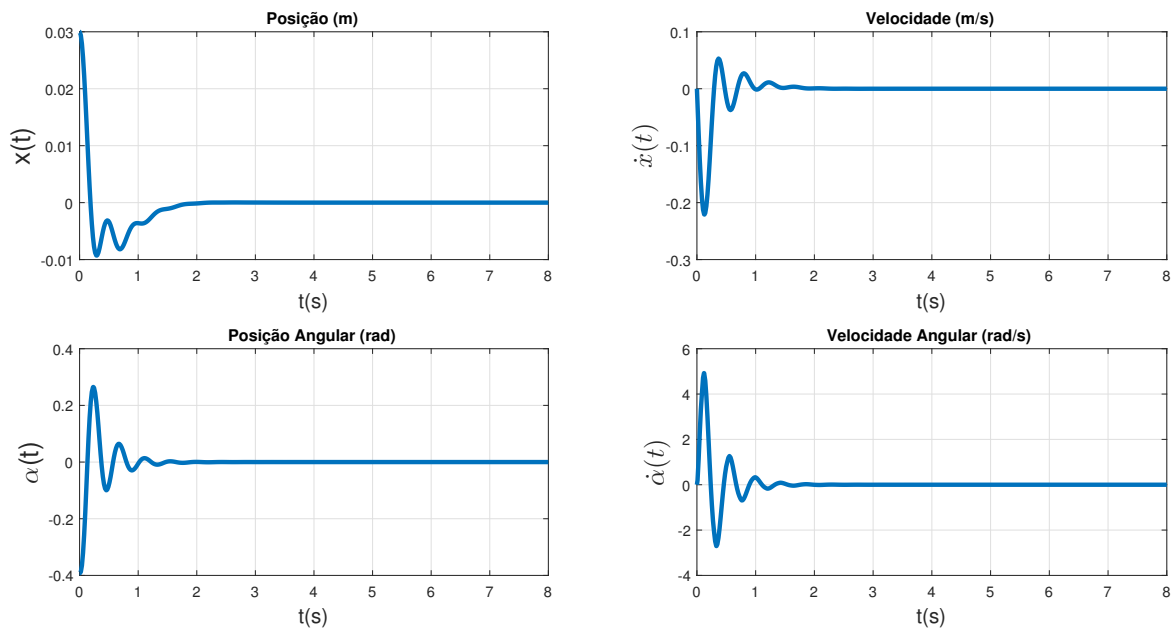
$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 723,2102 & 401,7185 & 551,2508 & 11,6584 & 30,2318 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} 250,2345 & 146,6539 & 221,3737 & 4,6842 & 14,5940 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} 640,3977 & 360,8980 & 506,3231 & 10,7263 & 28,2938 \end{bmatrix}, \\
 K_4 &= \begin{bmatrix} 185,0768 & 114,5677 & 186,1380 & 3,9534 & 13,0771 \end{bmatrix}, \\
 K_5 &= \begin{bmatrix} 754,0344 & 416,9149 & 568,0284 & 12,0067 & 30,9564 \end{bmatrix}, \\
 K_6 &= \begin{bmatrix} 279,7408 & 161,1872 & 237,3866 & 5,0165 & 15,2846 \end{bmatrix}, \\
 K_7 &= \begin{bmatrix} 671,1233 & 376,0483 & 523,0650 & 11,0739 & 29,0177 \end{bmatrix}, \\
 K_8 &= \begin{bmatrix} 214,5846 & 129,1047 & 202,1650 & 4,2860 & 13,7689 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{120}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,2591 & 0,1128 & 0,1140 & 0,0023 & 0,0046 \\ 0,1128 & 0,0555 & 0,0608 & 0,0013 & 0,0026 \\ 0,1140 & 0,0608 & 0,0774 & 0,0016 & 0,0036 \\ 0,0023 & 0,0013 & 0,0016 & 3,6272 \times 10^{-5} & 7,5365 \times 10^{-5} \\ 0,0046 & 0,0026 & 0,0036 & 7,5365 \times 10^{-5} & 0,0003 \end{bmatrix}. \tag{121}$$

Os autovalores de P são: $\text{eig}(P) = [0,0000 \ 0,0001 \ 0,0015 \ 0,0240 \ 0,3668]^T$.

Na Figura 13 é apresentada a resposta temporal dos estados do sistema não linear *Ball Balancer* com o controle chaveado (66) com incertezas na matriz ampliada. Onde a estabilização dos estados ocorre por volta de $t = 2s$.

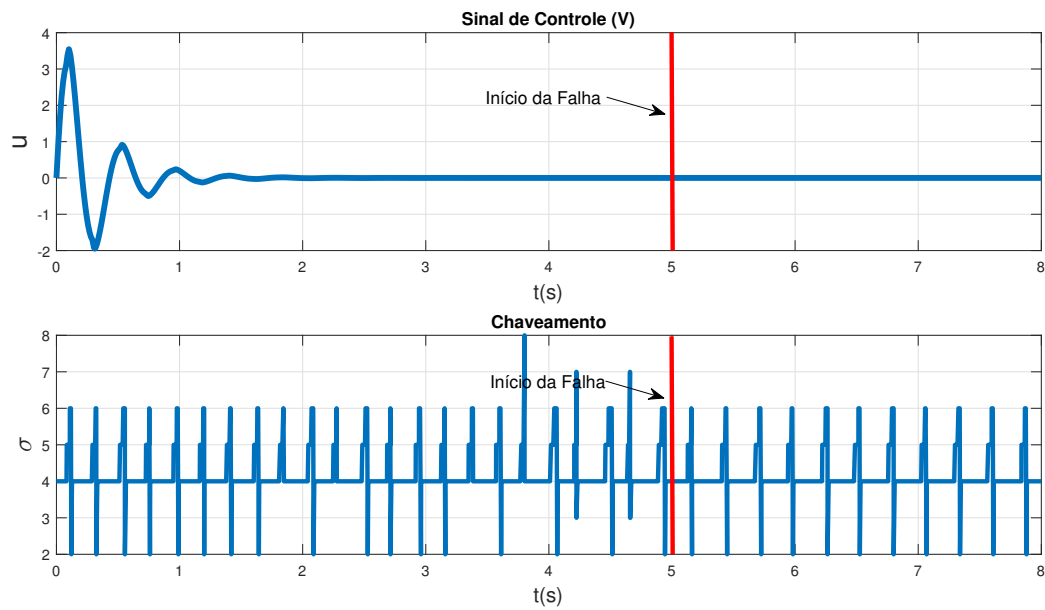
Figura 13 – Resposta temporal dos estados do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66) com incertezas na matriz ampliada.



Fonte: Próprio autor

Na Figura 14 é apresentado o sinal de controle e o chaveamento do sistema não linear *Ball Balancer* com o controle chaveado (66) com incertezas na matriz ampliada. Observa-se no chaveamento a variação do índice de comutação entre $\sigma = 2$ e $\sigma = 8$. Com a máxima taxa de decaimento obtida $\beta = 3$, o pico no sinal de controle foi de 3,55 (V).

Figura 14 – Sinal de controle e chaveamento para o sistema *Ball Balancer* com a lei de controle (66) com incertezas na matriz ampliada.



Fonte: Próprio autor

4 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA NO SISTEMA *BALL BALANCER* QUANSER[®]

Neste capítulo será implementado o controle chaveado no sistema não linear *Ball Balancer* fabricado pela Quanser[®], com as leis de controle baseadas em [Souza et al. \(2014b\)](#) e em [Buzetti \(2017\)](#).

O sistema *Ball Balancer* Quanser[®] consiste numa placa controlada por dois servomotores. A função deste sistema é equilibrar uma bola sobre a placa numa posição específica ou fazê-la seguir uma trajetória preestabelecida. Sendo a posição da bola medida por uma câmera localizada acima da placa.

Utilizando a mesma modelagem do sistema bola viga da Seção 3.3 só que agora para dois eixos (x e y) e os parâmetros do sistema *Ball Balancer* da Tabela 2 foi feita a implementação com os ganhos dos controladores obtidos pelas leis (62) e (66).

Tabela 2 – Parâmetros do sistema Ball Balancer.

Parâmetro	Descrição	Valor
B_{eq}	Amortecimento referente ao motor	0,0844 Nms/rad
J_{eq}	Momento de inércia equivalente no motor	0,0021 kgm^2
A_m	Ganho do motor	0,129 Nm/V
L	Comprimento da viga	0,2750 m
r_{arm}	Distância entre o eixo da engrenagem de saída do servo motor e o ponto de fixação da barra	0,0254 m
r_b	Raio da esfera	0,0196 m
m_b	Massa da esfera	0,003 kg
g	Aceleração da gravidade	9,81 m/s^2
$\ \theta_l\ _{max}$	Limitação para o ângulo máximo proporcionado pela engrenagem da carga	80 graus
$\ \dot{\alpha}(t)\ _{max}$	Limitação para a velocidade angular máxima da viga	1,5 rad/s
$\ x\ _{max}$	Limitação do deslocamento máximo permitido para a bola	0,14 m

Fonte: Adaptado de ([QUANSER, 2008](#)).

Na Figura 15 é apresentado o sistema *Ball Balancer* Quanser[®] pertencente ao LPC - FEIS - UNESP utilizado na implementação.

Figura 15 – Sistema ball balancer Quanser®



Fonte: Arquivo do LPC - FEIS - UNESP

4.1 IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLE CHAVEADO COM SATURAÇÃO, FALHA NO ATUADOR E REDUÇÃO DE NORMA

Utilizando a lei de controle chaveada (62), as LMIs (64), (65) e a LMI (106) de redução de norma de ganhos, adicionando uma falha de 40% nos atuadores variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V) e com a taxa de decaimento ($\beta = 4,8$) a maior obtida. Utilizando o Teorema 4 e as LMIs (101), (102), (103), (104) com os parâmetros $\rho = 5$, $n_L = 2$, $w_1 = [0,07 \ 1 \ 0,25\pi \ 1]^T$, $w_2 = -w_1$ e $\varpi = 0,0043$ de modo a garantir a condição inicial: $x(0) = [0,03 \ 0 \ -4\pi/12 \ 0]^T \in \mathcal{E}(P, 1)$. Com a LMI (106) de redução da norma

de ganhos de realimentação, sendo $\xi = 20$. Obteve-se os seguintes modelos locais por simulação:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9422 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9422 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9422 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9422 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= B_3 = B_5 = B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 61,4286 \end{bmatrix}^T, \\
 B_2 &= B_4 = B_6 = B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 36,8571 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{122}$$

Os seguintes ganhos do controlador, matrizes auxiliares Q e matriz P .

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{bmatrix} 321,2048 & 91,2183 & 48,1892 & 0,9051 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 298,3892 & 87,6834 & 49,0192 & 0,8683 \end{bmatrix}, \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} 350,9655 & 99,3570 & 48,5745 & 0,9573 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} 340,6818 & 99,2363 & 50,3224 & 0,9577 \end{bmatrix}, \\
 F_5 &= \begin{bmatrix} 314,1052 & 90,0142 & 48,8955 & 0,7089 \end{bmatrix}, F_6 = \begin{bmatrix} 306,6445 & 87,7432 & 47,9334 & 0,5378 \end{bmatrix}, \\
 F_7 &= \begin{bmatrix} 322,6343 & 94,6542 & 49,5694 & 0,7869 \end{bmatrix}, F_8 = \begin{bmatrix} 319,4569 & 95,5822 & 50,6865 & 0,7298 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \begin{bmatrix} -7957035, 71479520 & 22212118, 9818707 & 70631090, 9842672 & -12575724, 9711713 \\ 22212118, 9818707 & 113084946, 050764 & -100350930, 217109 & -4055566, 03460618 \\ 70631090, 9842672 & -100350930, 217109 & 31882916, 7630677 & 1221232, 35745947 \\ -12575724, 9711713 & -4055566, 03460618 & 1221232, 35745947 & -965014, 060945005 \end{bmatrix}, \\
Q_2 &= \begin{bmatrix} -7957035, 71479500 & 22212118, 9818686 & 70631090, 9842731 & -12575724, 9692624 \\ 22212118, 9818686 & 113084946, 050811 & -100350930, 217154 & -4055565, 96401028 \\ 70631090, 9842731 & -100350930, 217154 & 31882916, 7630176 & 1221231, 96006129 \\ -12575724, 9692624 & -4055565, 96401028 & 1221231, 96006129 & -965004, 905916564 \end{bmatrix}, \\
Q_3 &= \begin{bmatrix} -7957035, 71479514 & 22212118, 9819652 & 70631090, 9842688 & -12575724, 9642183 \\ 22212118, 9819652 & 113084946, 048348 & -100350930, 214414 & -4055566, 15519305 \\ 70631090, 9842688 & -100350930, 214414 & 31882916, 7631047 & 1221232, 50279894 \\ -12575724, 9642183 & -4055566, 15519305 & 1221232, 50279894 & -965016, 544823668 \end{bmatrix}, \\
Q_4 &= \begin{bmatrix} -7957035, 71479483 & 22212118, 9819640 & 70631090, 9842731 & -12575724, 9598558 \\ 22212118, 9819640 & 113084946, 048352 & -100350930, 214423 & -4055566, 12080894 \\ 70631090, 9842731 & -100350930, 214423 & 31882916, 7630272 & 1221232, 21240924 \\ -12575724, 9598558 & -4055566, 12080894 & 1221232, 21240924 & -965014, 859587872 \end{bmatrix}, \\
Q_5 &= \begin{bmatrix} -7957035, 71479495 & 22212118, 9818470 & 70631090, 9842770 & -12575724, 9723885 \\ 22212118, 9818470 & 113084946, 051566 & -100350930, 222655 & -4055565, 68540084 \\ 70631090, 9842770 & -100350930, 222655 & 31882916, 7635739 & 1221232, 13469102 \\ -12575724, 9723885 & -4055565, 68540084 & 1221232, 13469102 & -964997, 224810696 \end{bmatrix}, \\
Q_6 &= \begin{bmatrix} -7957035, 71479479 & 22212118, 9818442 & 70631090, 9842826 & -12575724, 9739890 \\ 22212118, 9818442 & 113084946, 051621 & -100350930, 222780 & -4055565, 62722451 \\ 70631090, 9842826 & -100350930, 222780 & 31882916, 7638609 & 1221231, 68370751 \\ -12575724, 9739890 & -4055565, 62722451 & 1221231, 68370751 & -964973, 103950781 \end{bmatrix}, \\
Q_7 &= \begin{bmatrix} -7957035, 71479491 & 22212118, 9819432 & 70631090, 9842705 & -12575724, 9634724 \\ 22212118, 9819432 & 113084946, 049132 & -100350930, 219851 & -4055565, 79615120 \\ 70631090, 9842705 & -100350930, 219851 & 31882916, 7631824 & 1221232, 24340257 \\ -12575724, 9634724 & -4055565, 79615120 & 1221232, 24340257 & -964999, 140954993 \end{bmatrix}, \\
Q_8 &= \begin{bmatrix} -7957035, 71479490 & 22212118, 9819433 & 70631090, 9842686 & -12575724, 9596938 \\ 22212118, 9819433 & 113084946, 049132 & -100350930, 219856 & -4055565, 76251912 \\ 70631090, 9842686 & -100350930, 219856 & 31882916, 7632375 & 1221231, 89873477 \\ -12575724, 9596938 & -4055565, 76251912 & 1221231, 89873477 & -964989, 537180846 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{124}$$

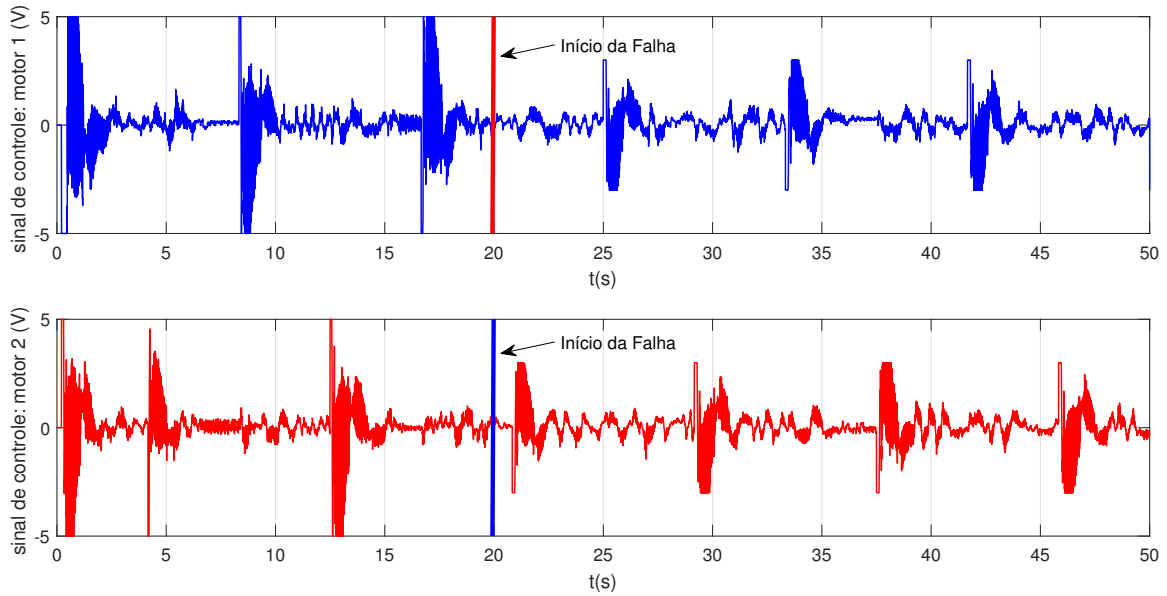
$$P = \begin{bmatrix} 354882, 438169380 & 81453, 2200667544 & 30263, 7298101595 & 458, 929774086404 \\ 81453, 2200667544 & 20920, 1190685566 & 8209, 51278297702 & 124, 960296763978 \\ 30263, 7298101595 & 8209, 51278297702 & 3782, 41384838000 & 58, 8895566570781 \\ 458, 929774086404 & 124, 960296763978 & 58, 8895566570781 & 1, 39413394673627 \end{bmatrix}. \tag{125}$$

Os autovalores de P são: $eig(P) = [0, 4743 \ 349, 1256 \ 2910, 8421 \ 376325, 9232]^T$.

Para a implementação utilizou-se os ganhos do controlador, as matrizes auxiliares Q e a matriz P obtidos anteriormente por simulação no módulo do sistema *Ball Balancer*.

Como resultado obteve-se na Figura 16 o sinal de controle dos dois servomotores do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (62) e uma falha de 40% nos atuadores variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V) a partir de $t = 20s$. Observa-se o sinal de controle saturando momentaneamente em 5 (V) antes da falha no atuador para os dois servomotores.

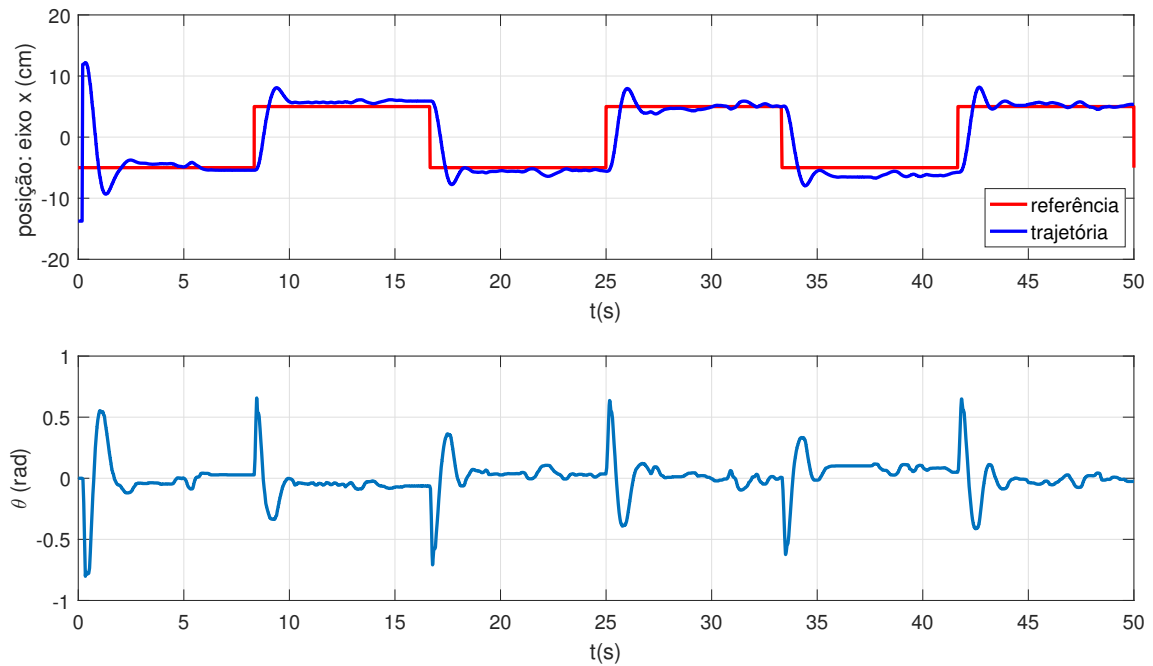
Figura 16 – Sinal de controle dos servomotores do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (62) e com uma falha nos atuadores.



Fonte: Próprio autor

Na Figura 17 são apresentados os resultados da simulação com uma falha de 40% nos atuadores variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V), considerando como referência de trajetória um quadrado de 10 *cm* de lado. Observa-se que a posição da bola no eixo x segue a referência e o ângulo (θ) da placa respeita a limitação de $|1,39| \text{ rad}$.

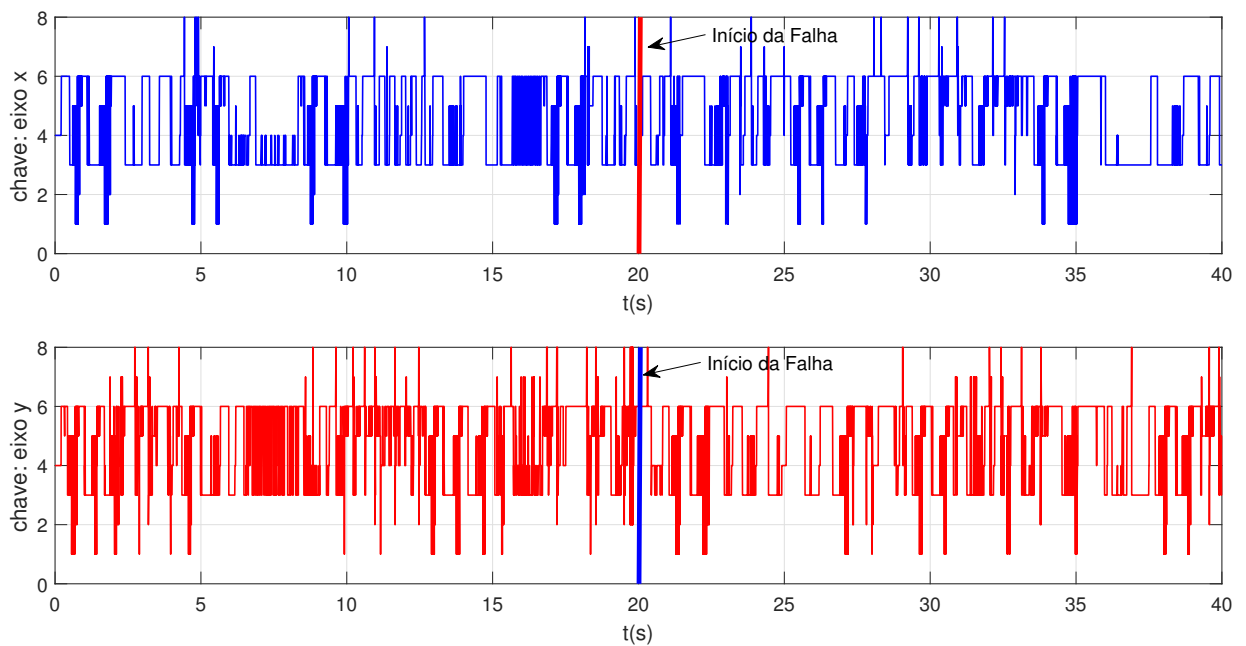
Figura 17 – Posição no eixo x e o ângulo da placa (θ) do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (62) e com uma falha no atuador.



Fonte: Próprio autor

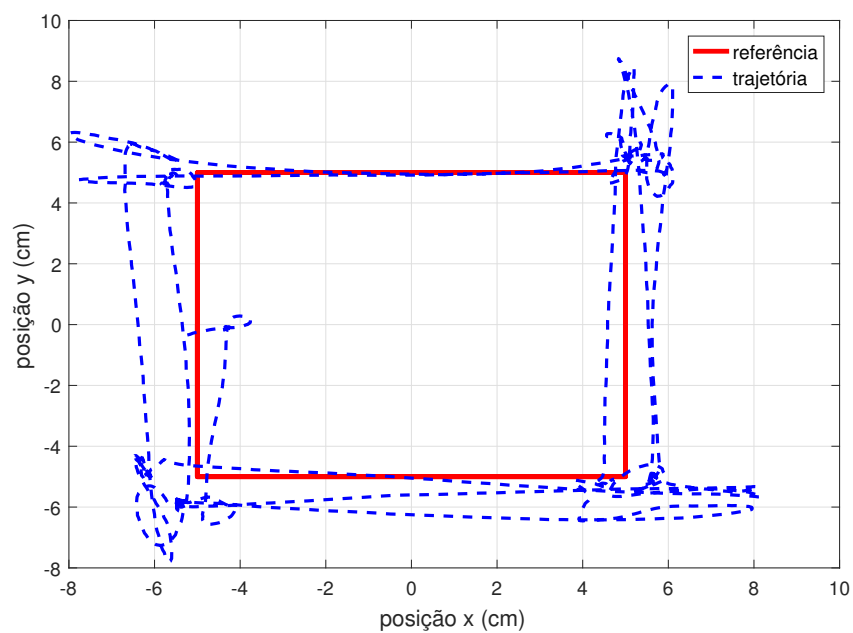
Na Figura 18 é apresentado o chaveamento dos dois servomotores. Nesta observa-se o chaveamento dos dois servomotores com o índice de comutação entre $\sigma = 1$ e 8. Na Figura 19 é apresentado a trajetória da bola sobre a referência no plano xy do sistema *Ball Balancer*. Nesta observa-se que a bola seguiu o trajeto de referência com poucos e pequenos desvios do quadrado de 10 cm de lado.

Figura 18 – Chaveamento dos servomotores do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (62) e com falha nos atuadores.



Fonte: Próprio autor

Figura 19 – Posição no plano xy do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (62) e com falha nos atuadores.



Fonte: Próprio autor

4.2 IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLE CHAVEADO COM INCERTEZAS POLITÓPICAS E MATRIZ $B(z(t))$ CONSTANTE NO SISTEMA BALL BALANCER

Agora utilizando a LMI (52) para garantir a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento (β). Com os parâmetros de redução de norma ($\mu_0 = 1$, $\eta = 83720772,0417$) minimizado pelo Teorema 5 e com a lei de controle (66) utilizando uma matriz B constante.

Foi adicionada uma incerteza ao sistema no valor da massa da bola onde se tem a variação de $m_b = 0,003kg$ e $m_{b_2} = 0,0024kg$, a taxa de decaimento usada foi $\beta = 5$ (maior obtida). Obteve-se os seguintes modelos locais, ganhos do controlador e matriz P por simulação:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,0071 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9422 & 0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9422 & -0,1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,5400 & 0,1400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,5400 & -0,1400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,6128 & 0,1400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,6128 & -0,1400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40,1905 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = B_8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 61,4286 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{126}$$

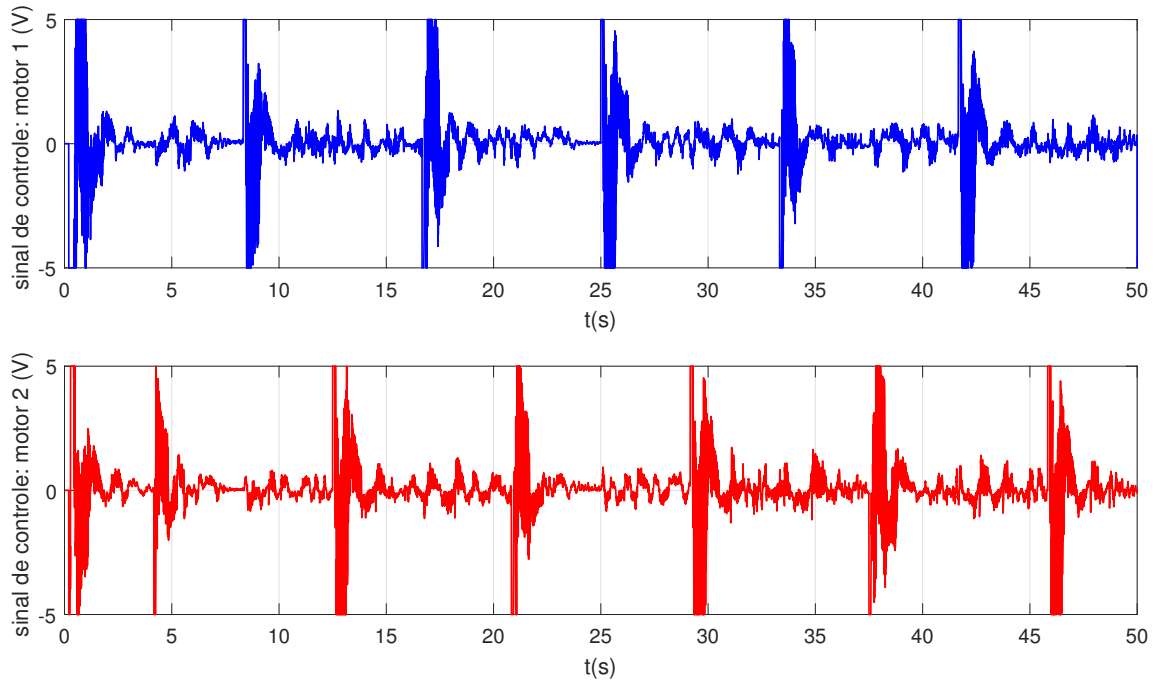
$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{bmatrix} 588,3711 & 148,7011 & 57,2136 & 0,8311 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 704,6618 & 176,4134 & 66,5586 & 0,9626 \end{bmatrix}, \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} 329,7886 & 87,7718 & 36,4927 & 0,5387 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} 316,3937 & 84,6044 & 35,4098 & 0,5234 \end{bmatrix}, \\
 F_5 &= \begin{bmatrix} 538,8275 & 137,1007 & 53,2928 & 0,7759 \end{bmatrix}, F_6 = \begin{bmatrix} 598,1809 & 151,3212 & 58,1181 & 0,8438 \end{bmatrix}, \\
 F_7 &= \begin{bmatrix} 265,9112 & 72,6011 & 31,2861 & 0,4651 \end{bmatrix}, F_8 = \begin{bmatrix} 245,0756 & 67,5448 & 29,5343 & 0,4403 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{127}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,6016 & 0,1283 & 0,0421 & 0,0006 \\ 0,1283 & 0,0306 & 0,0106 & 0,0001 \\ 0,0421 & 0,0106 & 0,0043 & 0,0001 \\ 0,0006 & 0,0001 & 0,0001 & 0,0000 \end{bmatrix}. \quad (128)$$

Os autovalores de P são: $\text{eig}(P) = [0,0000 \ 0,0004 \ 0,0040 \ 0,6321]^T$.

Implementando os ganhos do controlador e matriz P obtidas anteriormente por simulação no sistema *Ball Balancer*. Obteve-se o resultado mostrado na Figura 20 onde tem-se o sinal de controle dos dois servomotores do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66). Observa-se o sinal de controle dos dois servomotores saturando algumas vezes em 5 (V) devido a limitação própria do sistema *Ball Balancer*.

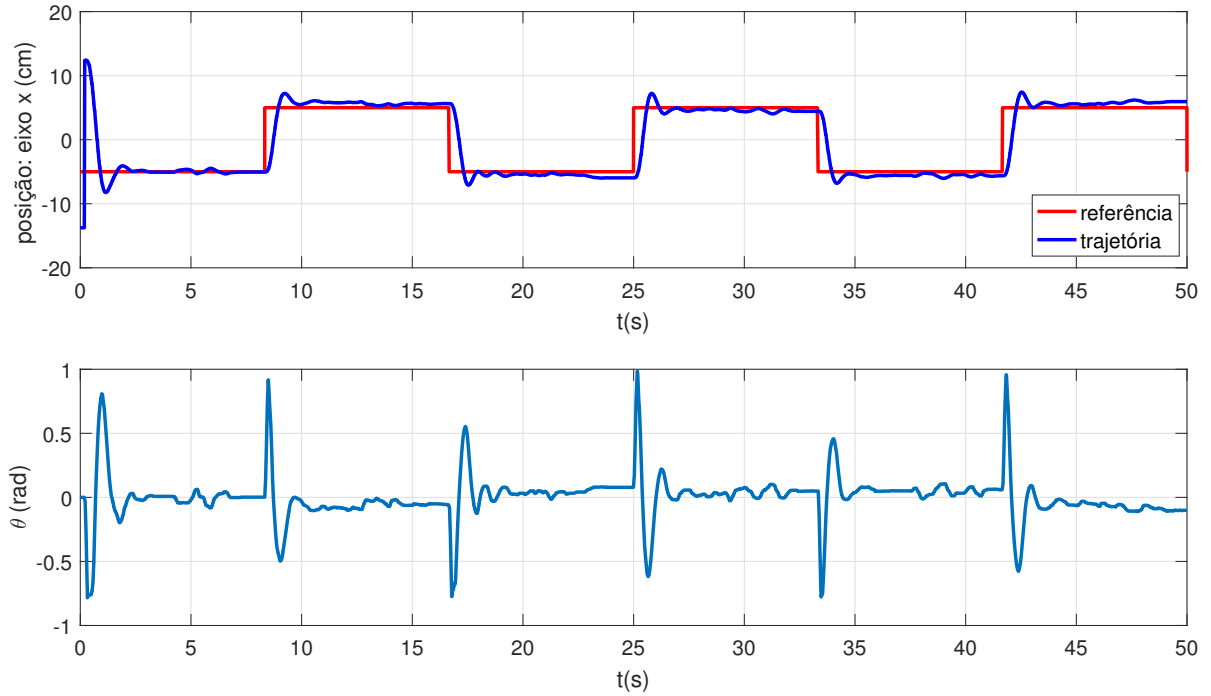
Figura 20 – Sinal de controle dos servomotores do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66).



Fonte: Próprio autor

Na Figura 21 é apresentada a posição da bola no eixo x considerando como sinal de referência um quadrado de 10cm de lado e o ângulo da placa do sistema *Ball Balancer*. Observa-se que a posição da bola no eixo x segue a referência e o ângulo (θ) da placa respeita as limitações $[1, 39] \text{ rad}$.

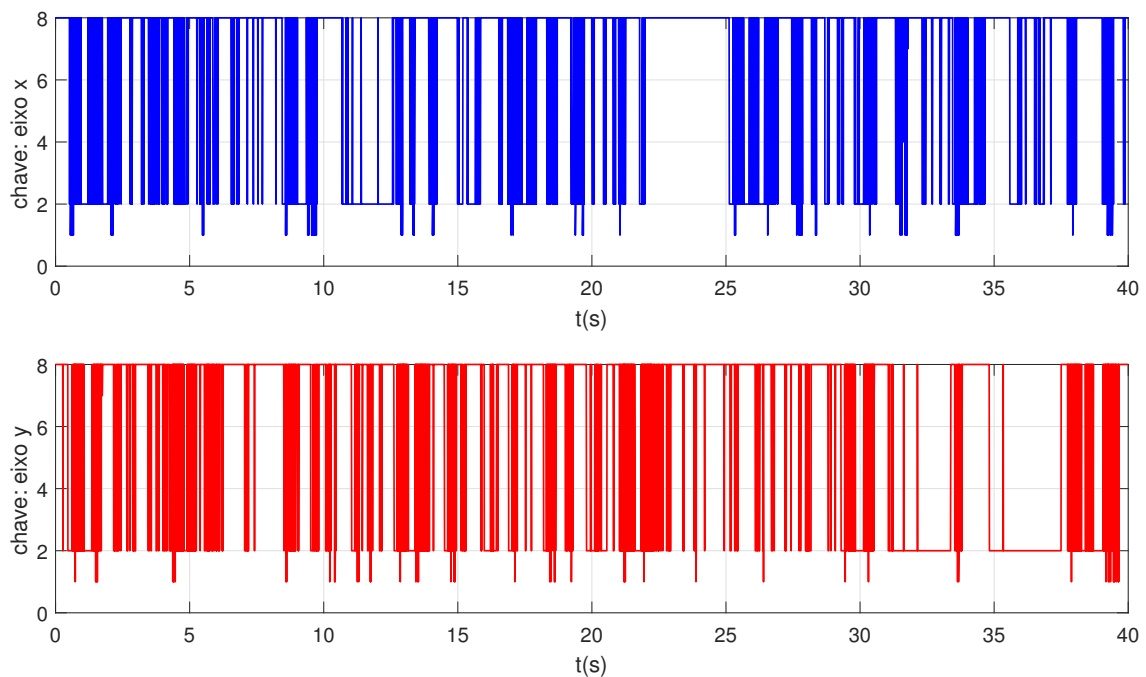
Figura 21 – Posição no eixo x e o ângulo da placa (θ) do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66).



Fonte: Próprio autor

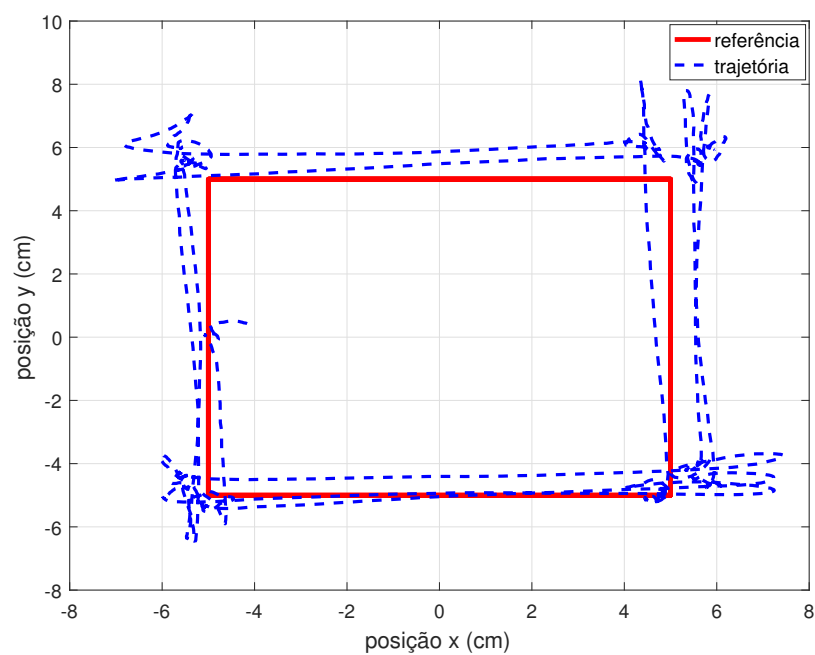
Na Figura 22 é apresentado o chaveamento dos dois servomotores, onde os índices de comutação variam entre $\sigma = 1$ e 8. A Figura 23 mostra a trajetória da bola sobre a referência no plano xy do sistema *Ball Balancer*. Nesta observa-se que a bola seguiu como o previsto a referência com poucos e pequenos desvios do quadrado de 10 cm.

Figura 22 – Chaveamento dos servomotores do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66).



Fonte: Próprio autor

Figura 23 – Posição no plano xy do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66).



Fonte: Próprio autor

4.3 IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLE CHAVEADO COM INCERTEZAS NA MATRIZ B (MATRIZ AMPLIADA) E FALHA NO ATUADOR

Com os parâmetros do sistema *Ball Balancer* da Tabela 2, utilizando-se a LMI (52) para garantir a estabilidade assintótica global do sistema. Com os parâmetros de redução de norma escolhidos empiricamente ($\mu_0 = 1$, $\eta = 65000000251, 0$) do Teorema 5 e com a lei de controle (66) utilizando uma matriz ampliada.

Foi adicionada uma falha de 40% no atuador do eixo x variando entre 0,0774 (Nm/V) e 0,129 (Nm/V) a partir de $t = 20s$, esta incerteza é considerada na matriz ampliada (equação (116)) através do método mostrado na Seção 3.6. Com uma taxa de decaimento de $(\beta = 4, 4)$ (maior obtido, diferente da Subseção 3.6.1 devido a forma empírica de escolha do η), uma região de operação: $-0,0254 \leq x \leq 0,0254$ m e $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$. Obteve-se os mesmos modelos locais de (119), os seguintes ganhos do controlador e matriz P através de simulação.

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 3784,6712 & 1450,0661 & 1388,3506 & 27,5660 & 49,9032 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} 1303,0989 & 522,2195 & 543,1197 & 10,7946 & 23,2925 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} 3148,5047 & 1231,4716 & 1216,1955 & 24,2309 & 45,0264 \end{bmatrix}, \\
 K_4 &= \begin{bmatrix} 805,1301 & 351,1609 & 408,4784 & 8,1865 & 19,4809 \end{bmatrix}, \\
 K_5 &= \begin{bmatrix} 3981,7130 & 1517,7725 & 1441,6993 & 28,5996 & 51,4149 \end{bmatrix}, \\
 K_6 &= \begin{bmatrix} 1483,3134 & 584,1309 & 591,8776 & 11,7391 & 24,6733 \end{bmatrix}, \\
 K_7 &= \begin{bmatrix} 3345,4866 & 1299,1627 & 1269,5473 & 25,2646 & 46,5388 \end{bmatrix}, \\
 K_8 &= \begin{bmatrix} 985,3398 & 413,0752 & 457,2486 & 9,1313 & 20,8624 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{129}$$

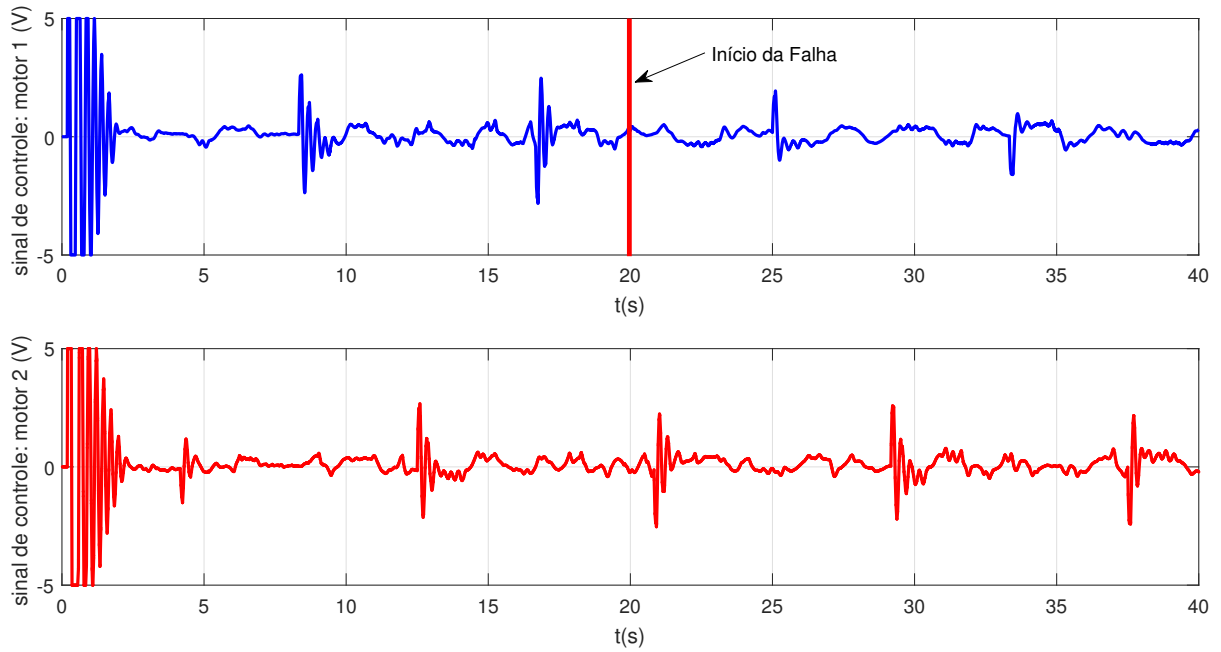
$$P = \begin{bmatrix} 0,4085 & 0,1256 & 0,0920 & 0,0018 & 0,0025 \\ 0,1256 & 0,0431 & 0,0339 & 0,0007 & 0,0010 \\ 0,0920 & 0,0339 & 0,0303 & 0,0006 & 0,0009 \\ 0,0018 & 0,0006 & 0,0006 & 1,2383 \times 10^{-5} & 1,8145 \times 10^{-5} \\ 0,0025 & 0,0010 & 0,0009 & 1,8145 \times 10^{-5} & 5,0165 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \tag{130}$$

Os autovalores de P são: $eig(P) = [0,0000 \ 0,0000 \ 0,0008 \ 0,0118 \ 0,4694]^T$.

Implementando os ganhos do controlador e matriz P obtidas anteriormente por simulação no sistema *Ball Balancer*. Obteve-se o resultado mostrado na Figura 24 onde tem-se o sinal de controle dos dois servomotores operando pela lei de controle chaveada

(66) com uma falha de 40% no atuador do eixo x variando entre $0,0774 \text{ (Nm/V)}$ e $0,129 \text{ (Nm/V)}$ a partir de $t = 20\text{s}$. Observa-se o sinal de controle saturando somente no início em 5 (V) (limitação própria do sistema *Ball Balancer*) para os dois servomotores.

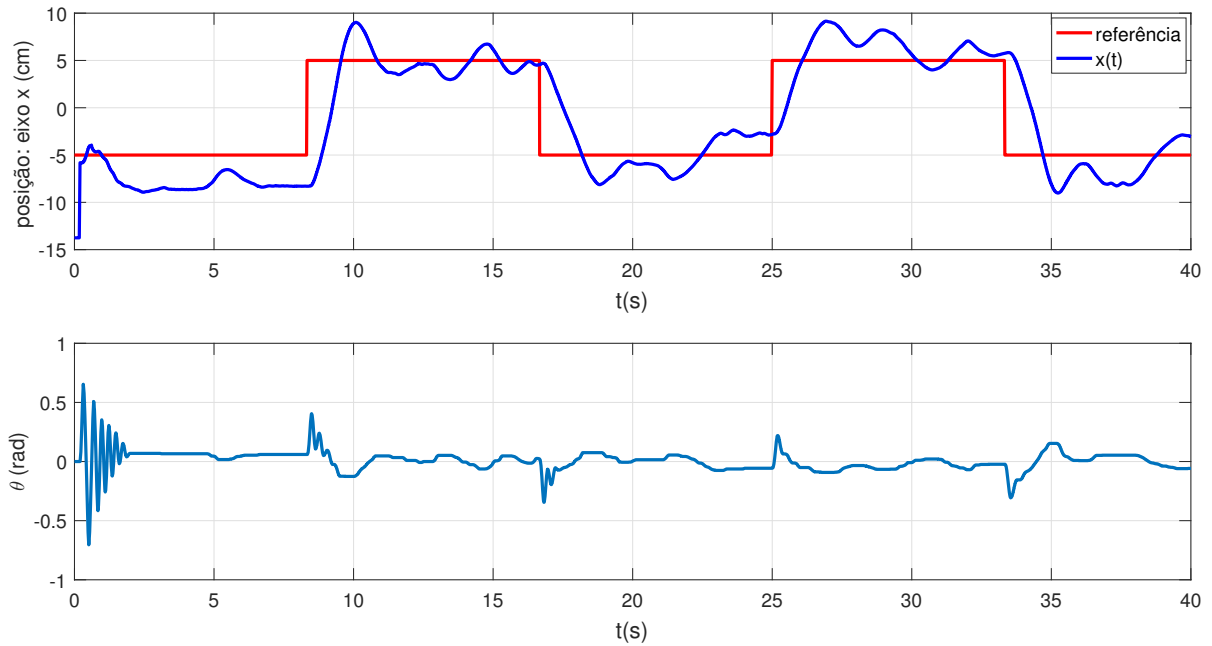
Figura 24 – Sinal de controle dos servomotores do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66), falha no atuador do eixo x e matriz ampliada.



Fonte: Próprio autor

Na Figura 25 são apresentados os resultados da implementação com uma falha de 40% no atuador do eixo x variando entre $0,0774 \text{ (Nm/V)}$ e $0,129 \text{ (Nm/V)}$, considerando como sinal de referência um quadrado com 10 cm de lado. Observa-se que a posição da bola no eixo x seguiu parcialmente a referência e o ângulo (θ) da placa passa somente no início do limite projetado $[0,52 \text{ rad}]$, mas depois permanece dentro da limitação.

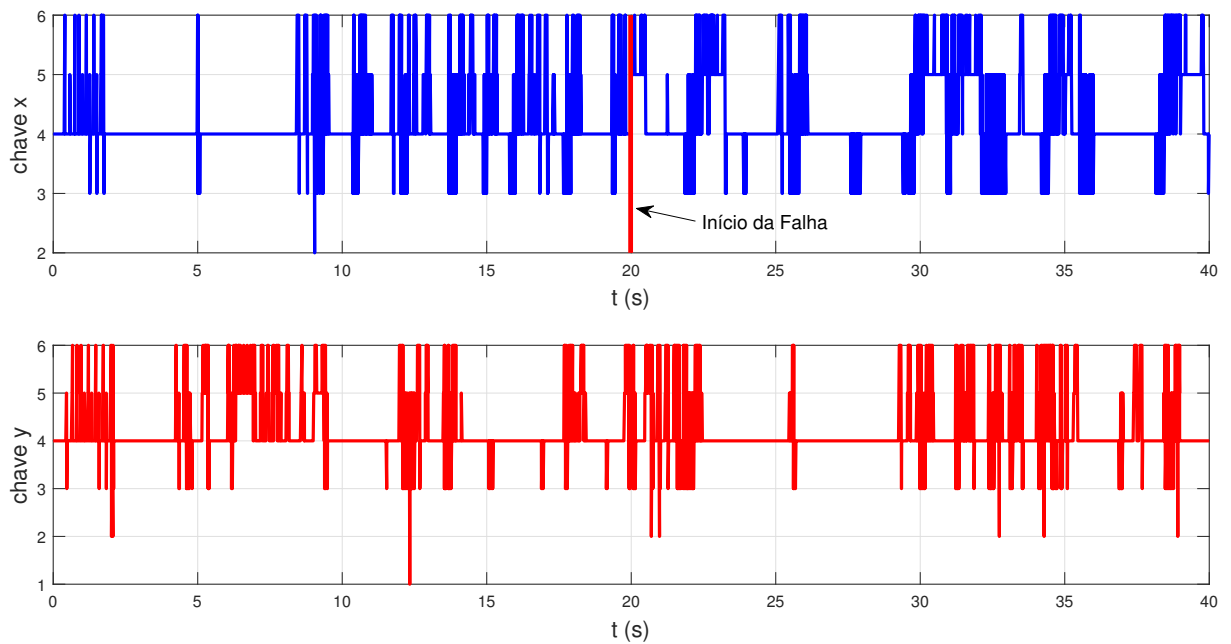
Figura 25 – Posição no eixo x e o ângulo da placa (θ) do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66), falha no atuador do eixo x e matriz ampliada.



Fonte: Próprio autor

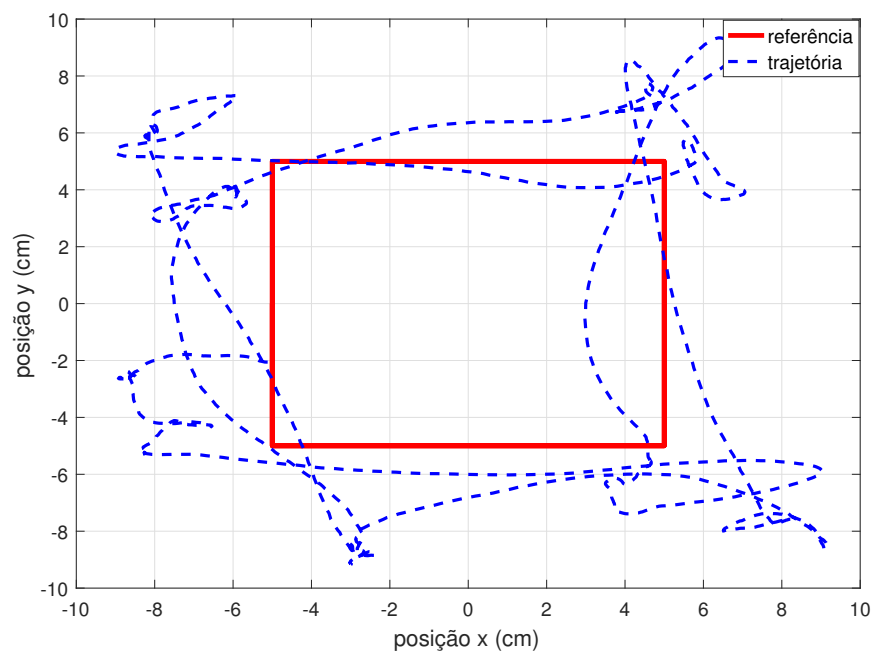
Na Figura 26 é apresentado o chaveamento dos dois servomotores com uma falha no atuador do eixo x . Nesta observa-se o chaveamento dos dois servomotores oscilando entre os índices de comutação $\sigma = 1$ e 6. A Figura 27 mostra a trajetória da bola sobre a referência no plano xy do sistema *Ball Balancer*. Observa-se a bola seguindo de forma parcial o eixo x da referência e de forma mais difusa o eixo y da referência.

Figura 26 – Chaveamento dos servomotores do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66), falha no autador do eixo x e matriz ampliada.



Fonte: Próprio autor

Figura 27 – Posição no plano xy do sistema *Ball Balancer* com a lei de controle chaveada (66), falha no autador do eixo x e matriz ampliada.



Fonte: Próprio autor

Observação: Utilizou-se os parâmetros de redução de norma escolhidos empiricamente (μ_0 e η) pois com a minimização para o Teorema 5 (utilizada na Subseção 3.6.1) obteve-se sinais do controlador muito pequenos (abaixo de 0,9 (V)) para a implementação no sistema *Ball Balancer*.

5 CONCLUSÃO

Com este estudo observou-se a eficiência dos controladores chaveados em relação à controladores fuzzy T-S devido à não necessidade de utilizar as funções de pertinências, pois estas podem se tornar de difícil implementação quando se tem incertezas envolvidas nos modelos fuzzy, caso adotado neste trabalho, em que se desejam controlar. Foram utilizadas duas leis de controle chaveado, ambas com taxa de decaimento ($\beta = 1$), a lei de controle chaveado (62) não necessita da matriz B e utiliza as matrizes simétricas auxiliares Q_j , a estabilização dos estados ocorreu por volta de $t = 4$ s. Para lei de controle (66) que utiliza a matriz B , o tempo de estabilização ocorreu por volta de $t = 4$ s. A maior taxa de decaimento para uma solução factível conseguida usando a lei de controle (62) foi de $\beta = 3,8$ com um pico no sinal de controle de $56,39(V)$ e com um tempo de estabelecimento em torno de $t = 1,6$ s. Para a lei de controle (66) foi de $\beta = 8,3$ com um pico no sinal de controle de $89,65(V)$ e com um tempo de estabelecimento dos estados em torno de $t = 0,9$ s.

Também foram utilizadas as restrições que delimitam a região de operação ($\mathcal{X}$) do sistema não linear e que possibilitam a saturação (ρ) do sinal de controle. Na aplicação do controlador (100) utilizando o Teorema 4 com a região de saturação ($\rho = 3$ e $\beta = 1$) e redução de norma de ganho de $\xi = 20$, o tempo de estabelecimento foi por volta de $t = 4$ s. A maior taxa de decaimento obtida utilizando o Teorema 4 foi de $\beta = 2,5$ com um tempo de estabelecimento de $t = 3,8$ s. Ao final das simulações foi utilizado o método da matriz ampliada com a lei de controle (66), onde foi feita a redução de norma pelo Teorema 5 obtendo-se os parâmetros minimizados $\mu_0 = 1$ e $\eta = 736792316,8435$. Com a taxa de decaimento ($\beta = 3$), a maior obtida, a estabilização dos estados ocorreu por volta de $t = 2$ s.

Na implementação prática foram utilizados os parâmetros do sistema *Ball Balancer* Quanser[®] da Tabela 2. Na Seção 4.1 foi implementado o controle chaveado com saturação, redução de norma e falha no atuador onde obteve-se o resultado esperado com o sinal de controle saturando às vezes em $5(V)$ para os dois servomotores, o chaveamento oscilando entre todos os índices de comutação e a bola seguindo satisfatoriamente a trajetória de referência. Já na Seção 4.2 foi implementado o controle chaveado com a matriz B constante e redução de norma, no qual também obteve-se os resultados previstos. Ao final na Seção

4.3 foi implementado o controle chaveado com a matriz ampliada e redução de norma, onde a redução de norma pelo Teorema 5 teve que ser feita com a escolha dos parâmetros μ_0 e η de forma empírica, pois com os parâmetros minimizados da simulação da Subseção 3.6.1 obteve-se um sinal de controle de ordem muito pequena para a implementação. Assim com o parâmetros minimizados de forma empírica chegou-se na melhor resposta possível mostrada na Figura 27, e com o chaveamento para os dois servomotores variando entre os índices de comutação $\sigma = 1$ e 6 conforme observado na Figura 26.

Fazendo uma comparação entre os métodos de controle implementados: o controlador chaveado com saturação, redução de norma e considerando uma falha no atuador (Seção 4.1) e o controlador chaveado com a matriz B constante e redução de norma (Seção 4.2) tiveram um bom desempenho no sistema *Ball Balancer* atendendo as exigências dos projetos dos controladores. Já o controlador chaveado com a matriz ampliada e redução de norma (Seção 4.3) apresentou problemas na amplitude do sinal de controle e resultou em uma resposta menos precisa em relação aos dois controladores anteriores. Tendo desta forma, o controlador chaveado com saturação, redução de norma e considerando uma falha no atuador (Seção 4.1) o melhor desempenho entre os três implementados, devido a abrangência no local das incertezas nos modelos do sistema.

Sugestões para estudos futuros seriam na direção de aprimorar os resultados dos controladores abordados neste trabalho, obtendo soluções menos conservadoras e amenizar para alguns casos a frequência do chaveamento usando um controlador chaveado suave. Para o estudo do controlador chaveado com a matriz ampliada poderia-se pesquisar outras formas de redução de norma que tornassem a implementação deste controlador mais eficiente.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. *et al.* Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016. DOI 10.1002/acs.2671. Citado 4 vezes nas páginas 13, 41, 44 e 46.
- ALVES, U. N. L. T. **Controle chaveado e chaveado suave de sistemas não lineares incertos via modelos fuzzy T-S**. 2017. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152448>. Acesso em: 26 out. 2020. Citado 4 vezes nas páginas 13, 42, 43 e 47.
- ASSUNÇÃO, E. *et al.* Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. **International Journal of Control**, Abingdon, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007. DOI 10.1080/00207170701283899. Citado na página 53.
- BARMISH, B. Stabilization of uncertain systems via linear control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 28, n. 8, p. 848–850, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 53.
- BOYD, S. *et al.* **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 15. ed. [S.l.]: Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p. Citado 4 vezes nas páginas 12, 24, 41 e 46.
- BUZETTI, A. S. **Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/148888>. Acesso em: 26 out. 2020. Citado 5 vezes nas páginas 14, 29, 30, 53 e 58.
- CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 1, p. 57–67, 2003. DOI 10.1109/TFUZZ.2002.806317. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 46.
- DE OLIVEIRA, D. R. *et al.* On switched control of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with unknown membership functions. *In: IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2018*. Rio de Janeiro: IEEE, 2018. p. 1–8. Citado na página 14.
- DE OLIVEIRA, D. R. *et al.* On local H_∞ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 344, p. 1 – 26, 2018. DOI <https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.12.004>. Citado na página 14.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, 2011. DOI 10.1080/00207179.2011.608134. Citado na página 12.
- FANG, C. H. *et al.* A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 14, n. 3, p. 386–397, 2006. DOI 10.1109/TFUZZ.2006.876331. Citado na página 12.

- GAHINET, P. *et al.* P. Gahinet and a. Nemirovskii and a. j. Laub and m. Chilali. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 33rd., 1994, Lake Buena Vista, FL, USA. **Anais...** Lake Buena Vista: IEEE, 1994. p. 2038–2041 vol.3. DOI 10.1109/CDC.1994.411440. Citado na página 12.
- GAO, Q. *et al.* T–S-fuzzy-model-based approximation and controller design for general nonlinear systems. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)**, Piscataway, v. 42, n. 4, p. 1143–1154, 2012. DOI 10.1109/TSMCB.2012.2187442. Citado na página 27.
- HAMDY, M.; HAMDAN, I.; IBRAHIM, M. Fuzzy pdc controller for a class of T-S fuzzy bilinear system via output feedback. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY (ICET)*, 2014, Cairo. **Anais...** Cairo: IEEE, 2014. p. 1–5. Citado na página 12.
- HO, C. C.; CHOU, Y. S.; CHANG, F. R. A new parameter-dependent lyapunov function approach for robust control. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEM SCIENCE AND ENGINEERING (ICSSE)*, 2014, Shanghai. **Anais...** Shanghai, China, 2014. p. 50–55. DOI 10.1109/ICSSE.2014.6887903. Citado na página 12.
- HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation. **Systems and Control Letters**, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 97 – 112, 2002. DOI //doi.org/10.1016/S0167-6911(01)00168-2. Citado na página 41.
- HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. **Automatica**, Oxford, v. 38, n. 2, p. 351 – 359, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 46.
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T-S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Heidelberg, v. 26, n. 3, p. 191–200, 2015. Citado na página 27.
- KLUG, M. *et al.* Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi–Sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 263, p. 92 – 111, 2015. Citado na página 27.
- LEE, D. H. *et al.* Local h controller design for continuous-time t-s fuzzy systems. **International Journal of Control, Automation and Systems**, London, v. 13, n. 6, p. 1499–1507, 2015. Citado na página 14.
- LOFBERG, J. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, 2004, New Orleans. **Anais...** New Orleans: IEEE, 2004. p. 284–289. DOI 10.1109/CACSD.2004.1393890. Citado na página 12.
- MACHADO, E. R. M. D. **Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno**. 2003. 190 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/101978>. Acesso em: 26 out. 2020. Citado na página 17.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 4t. ed. [S.l.]: New Jersey: Prentice-Hall, 2003. Citado na página 20.

- QUANSER, I. E. 2D Ball Balancer Control using QUARC. **Instructor Manual**, Ontário, p. 87, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 58.
- QUANSER, I. E. 2 DOF Ball Balancer. **Workbook, Student Version**, Ontário, p. 26, 2013. Citado na página 32.
- SADEGHI, M. S.; SAFARINEJADIAN, B.; FARUGHIAN, A. Parallel distributed compensator design of tank level control based on fuzzy Takagi–Sugeno model. **Applied Soft Computing**, Amsterdam, v. 21, p. 280 – 285, 2014. DOI doi.org/10.1016/j.asoc.2014.03.024. Citado na página 12.
- SANTIM, M. *et al.* Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2012, n. 1, p. 1–17, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 12, 27 e 28.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *et al.* **Applied nonlinear control**. 1. ed. [S.l.]: Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991. Citado na página 15.
- SOUZA, W. A. *et al.* On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2013, n. 1, p. 1–10, 2013. DOI 10.1155/2013/595029. Citado 4 vezes nas páginas 13, 30, 31 e 52.
- SOUZA, W. A. *et al.* On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi–Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014b. DOI 10.1109/TFUZZ.2014.2302494. Citado 5 vezes nas páginas 12, 13, 29, 40 e 58.
- SOUZA, W. A. D. **Projeto de Controladores Robustos Chaveados para Sistemas Não Lineares Descritos por Modelos Fuzzy Takagi-sugeno**. 2013. 93 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/100294>. Acesso em: 26 out. 2020. Citado na página 30.
- SOUZA, W. A. d. *et al.* Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2014, p. 1–11, 2014a. DOI dx.doi.org/10.1155/2014/721537. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 40.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Oxfordshire, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. DOI 10.1080/10556789908805766. Citado na página 12.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, Piscataway, SMC-15, n. 1, p. 116–132, 1985. ISSN 2168-2909. DOI 10.1109/TSMC.1985.6313399. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998. DOI 10.1109/91.669023. Citado 4 vezes nas páginas 12, 20, 22 e 25.
- TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. **Fuzzy sets and systems**, North-Holland, v. 45, n. 2, p. 135–156, 1992. Citado na página 20.

TANAKA, K.; WANG, H. O. **Fuzzy Control Systems Design and Analysis**. 1. ed. [S.l.]: New York: John Wiley Professional, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 21.

TANIGUCHI, T. *et al.* Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001. DOI 10.1109/91.940966. Citado 6 vezes nas páginas 4, 5, 12, 16, 18 e 27.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003. DOI 10.1109/TFUZZ.2003.817840. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 20.

TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999. DOI 10.1109/91.755395. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 27.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS*, 2., 1995, Yokohama, Japan. **Anais...** Yokohama: IEEE, 1995. p. 531–538 vol.2. DOI 10.1109/FUZZY.1995.409737. Citado na página 12.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996. DOI 10.1109/91.481841. Citado na página 12.

XIAODONG, L.; QINGLING, Z. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for t-s fuzzy systems via LMI. **Automatica**, Amsterdam, v. 39, n. 9, p. 1571 – 1582, 2003. DOI //doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00172-9. Citado na página 20.