Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

**Kleber de Santana Souza**

# Estudo sobre Existência de soluções e Oscilação para Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento

**Rio Claro**
**2019**

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

# Estudo sobre Existência de soluções e Oscilação para Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento

**Kleber de Santana Souza**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientadora
**Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti**

**Rio Claro**
**2019**

S729e

Souza, Kleber de Santana
Estudo sobre existência de soluções e oscilação para equações diferenciais funcionais com retardamento / Kleber de Santana Souza. -- Rio Claro, 2019
71 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Matemática. 2. Análise funcional. 3. Equações diferenciais funcionais. I. Título.

# TERMO DE APROVAÇÃO

Kleber de Santana Souza

Estudo sobre Existência de soluções e Oscilação para Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Prof. Dr. Wladimir Seixas
CCET - UFSCar

Prof. Dr. João Frederico C. A. Meyer
IMECC - UNICAMP

**Rio Claro, 31 de outubro de 2019**

*Dedico este trabalho aos meus pais Wilson e Lucilda, responsáveis pela minha existência e pela forma como vejo o mundo. A minha esposa Lídia, meu ponto de apoio em todos os momentos desta jornada e a minha filha Sofia, meu motivo para continuar sempre buscando aprender.*

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer a minha orientadora, Professora Doutora Marta Cilene Gadotti, por todo entusiasmo e paciência com que me orientou. Muito obrigado pelas observações precisas, pelo cuidado com os detalhes e rigor necessários, pelos exemplos esclarecedores e pela constante motivação. Através do seu exemplo pude vislumbrar não só a beleza da Matemática, mas também a importância da bondade e da responsabilidade do professor para com seus alunos.

Desejo igualmente agradecer ao Professor Doutor Wladimir Seixas, que me incentivou a trilhar um caminho que eu julgava não ser capaz. Obrigado pelo incentivo e pelas orientações.

A presente dissertação não seria possível sem o precioso apoio de todos os professores, funcionários e colegas do Programa de Pós Graduação em Matemática do IGCE, cujo apoio e amizade estiveram sempre presentes. Sou grato a todos.

*The tool which serves as intermediary between theory and practice, between thought and observation, is mathematics, it is mathematics which builds the linking bridges and gives the ever more reliable forms. From this it has come about that our entire contemporary culture, in as much as it is based on the intellectual penetration and the exploitation of nature, has its foundations in mathematics.*

David Hilbert

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo o estudo da teoria básica sobre as Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento. Enunciaremos e provaremos os resultados clássicos sobre existência e unicidade de solução. E iremos estudar a existência de soluções oscilatórias para equações autônomas escalares.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Funcionais, existência e unicidade, oscilação.

# Abstract

This paper aims to study the basic theory about the Delay Differential Equations. We will enunciate and prove the classic results on existence and uniqueness of solution. And we will study the existence of oscillatory solutions for scalar autonomous equations.

**Keywords:** Functional Differential Equations, existence and uniqueness, oscillation.

# Lista de Figuras

# Sumário

# Introdução

A área de pesquisa envolvendo Equações Diferenciais Funcionais é uma área de pesquisa relativamente nova, mas com um papel importante tanto na Matemática quanto em aplicações. Estas equações representam modelos onde o estado futuro do sistema depende do seu estado passado. Esta dependência em relação ao estado passado é também conhecida como efeito hereditário.

Já no Congresso Internacional de Matemáticos de 1908, Picard enfatizava a importância da consideração dos efeitos hereditários na modelagem de sistemas. Picard chamava atenção ao fato de as equações diferenciais da mecânica clássica em que o passado é indistinguível do futuro e os movimentos são de natureza reversível, serem inaplicáveis aos seres vivos.

Em 1931, Volterra escreve um livro fundamental sobre o papel dos efeitos hereditários em modelos para a interação de espécies. Mas é somente depois de 1940 que o assunto ganha impulso, principalmente na ex-União Soviética, devido a consideração de modelos importantes de engenharia e controle. É provável que grande parte dos engenheiros estivessem cientes do fato de que os efeitos hereditários ocorriam em sistemas físicos, mas este efeito era ignorado porque não havia teoria suficiente para discutir estes modelos em detalhes.

As pesquisas prosseguem nas décadas seguintes e começam a surgir os livros clássicos sobre o assunto. Como o livro Differential-difference Equations de R. Bellman e K.L. Cooke de 1963 e o livro Functional Differential Equations de Jack K. Hale de 1977. É creditado aos estudos realizados por Hale o impulso que traria a teoria sobre as Equações Diferenciais Funcionais para o nível atual de profundidade.

Aqui quando falamos de Equações Diferenciais Funcionais estamos nos referindo a uma classe bem ampla de equações. Logo é desejável definirmos tipos mais específicos dentro desta classe de equações, ou seja, definirmos subclasses. De uma maneira geral as Equações Diferenciais Funcionais são classificadas como:

- Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento:
  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))$.

- Equações Diferenciais Funcionais Neutras:
  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau))$.

- Equações Diferenciais Funcionais com Avanço:
  $\dot{x}(t-\tau) = f(t, x(t), x(t-\tau))$.

Em nosso trabalho iremos estudar somente as Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento (EDFR's), que como o nome sugere, são as que apresentam um lapso de tempo entre causa e efeito. Este tipo de equação surge quando modelamos processos biológicos, físicos, ecológicos, econômicos, entre outros.

Em um modelo populacional, por exemplo, o tempo de gestação pode ser incorporado ao modelo através do retardo. Um outro exemplo que podemos analisar é o do reflorestamento. Uma floresta cortada, após o replantio, levará pelo menos 20 anos antes de atingir qualquer tipo de maturidade. Para certas espécies de árvores esse tempo pode ser até mais longo. Portanto, qualquer modelo matemático de colheita e regeneração florestal deve claramente ter retardos incorporados a ele. Podemos ainda observar, como exemplo, que devido ao fato de que os animais devem ter tempo para digerir sua comida antes que outras atividades e respostas ocorram, modelos de dinâmica de espécies sem retardos podem levar a uma aproximação menos precisa.

Assim gostemos ou não, os retardos ocorrem com tanta frequência, em quase todas as situações, que ignorá-los seria ignorar uma parte importante da realidade.

Portanto com o objetivo de produzir material introdutório a tema tão relevante, e que praticamente não dispõe de referências em português, é que desenvolvemos este trabalho. Com este intuito começamos no Capítulo 1 com a apresentação de resultados de Análise que serão necessários ao entendimento da teoria das EDFR's que vamos abordar. Já no Capítulo 2 iremos desenvolver de forma rigorosa a teoria básica sobre existência e unicidade para EDFR's através de demonstrações detalhadas destes teoremas. E no Capítulo 3 apresentaremos um estudo introdutório a existência de soluções oscilatórias para EDFR's.

# 1 Resultados de Análise

Neste capítulo iniciaremos com algumas definições e apresentaremos vários teoremas. Alguns serão necessários as demonstrações que faremos nos capítulos seguintes. Outros mesmo não aparecendo de forma explícita nos capítulos que se seguirão estão aqui pois julgamos serem relevantes para a compreensão da teoria abordada. As definições e teoremas apresentados neste capítulo foram baseados principalmente na referência [8].

Por questões práticas e de delimitação do escopo deste trabalho consideraremos como de conhecimento prévio do leitor algumas definições e teoremas clássicos oriundos da Álgebra Linear e da Análise no $\mathbb{R}^n$ assim como alguns conceitos relativos a Espaços Métricos.

## 1.1 Continuidade e Extensão

Iniciaremos com um conceito central em Análise que é o conceito de continuidade de uma função.

**Definição 1.1** (Continuidade). *Usaremos as seguintes definições de continuidade de uma função. Seja $X$ um espaço normado e $f$ uma função tal que $f : X \to X$, então:*

*(i) $f$ é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se, e somente se,*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in X,\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

*(ii) $f$ é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se, e somente se, para qualquer sequência $(x_n)$ tal que $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$ temos $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Vejamos que as duas definições de continuidade de uma função apresentadas na definição 1.1 são equivalentes. De fato, temos que

$(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $(x_n)$ tal que $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$. Devemos mostrar que $f(x_n) \to f(x_0)$, isto é,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\ n \geqslant n_0 \text{ temos } \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Fixemos um $\varepsilon > 0$. Pela definição 1.1 $(i)$, podemos achar um $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Uma vez que $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$, podemos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ temos $\|x_n - x_0\| < \delta$ e então $\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Assim mostramos a primeira implicação.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Provemos a declaração contrapositiva $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Assumimos $\neg(i)$, isto é,

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \geqslant \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon_0 > 0$ o $\varepsilon$ da declaração anterior. Usemos uma sequência de $\delta's$, uma vez que vale para qualquer $\delta$. Seja $\delta_n = \frac{1}{n} > 0, n = 1, 2, \ldots$. Para cada $\delta_n$ podemos achar um $x_n$ tal que $\|x_n - x_0\| < \delta$ e $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geqslant \varepsilon_0$.

Logo a sequência $x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$, mas $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$ o que implica em $\neg(ii)$. Mostramos assim a equivalência entre as definições de continuidade da definição 1.1. Outros resultados relacionados a continuidade dos quais faremos uso são os do Teorema 1.2 e do Teorema 1.3.

**Teorema 1.2.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos e seja $f$ uma função tal que $f : X \to Y$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $f$ é contínua.*

*(ii) Sempre que $V \subset Y$ for um conjunto aberto, a imagem inversa $f^{-1}(V) \subset X$ será um conjunto aberto.*

*Demonstração.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Suponha $f$ contínua e $V \subset Y$ aberto. Seja $x_0 \in f^{-1}(V)$, então $f(x_0) \in V$. Uma vez que $V$ é aberto existe uma bola aberta $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. E sendo $f$ contínua existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ sempre que $d_X(x, x_0) < \delta$. Isto significa que $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$, logo $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$ e portanto $f^{-1}(V)$ é aberto.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Suponha que a imagem inversa de conjuntos abertos é aberta. Seja $V = B_Y(f(x_0), \varepsilon)$, a função inversa $f^{-1}(V)$ é aberta e contém $x_0$, então existe $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Logo $f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(V)) = V$ e portanto $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ sempre que $d_X(x_0, x) < \delta$. □

**Teorema 1.3.** *Sejam $X, Y$ e $Z$ espaços métricos. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora. Se $g \circ f$ for contínua então $g : Y \to Z$ também será contínua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Diagrama para $g \circ f$.

*Demonstração.* Seja $g \circ f$ contínua, então para todo $W \subset Z$ aberto temos que $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ é aberto em $X$. Logo como $f$ é contínua e sobrejetora temos que $g^{-1}(W)$ é um aberto em $Y$.

De fato, imagine que $g^{-1}(W) \subset Y$ é fechado, então $Y \backslash g^{-1}(W)$ é aberto, assim $f^{-1}(Y \backslash g^{-1}(W))$ é aberto, mas $f^{-1}(Y \backslash g^{-1}(W)) = X \backslash f^{-1}(g^{-1}(W))$, segue que $f^{-1}(g^{-1}(W))$ é fechado, o que é um absurdo pois $f^{-1}(g^{-1}(W))$ é aberto em $X$. Logo $g^{-1}(W)$ é aberto.

Portanto como todo aberto $W$ em $Z$ possui imagem inversa aberta em $Y$, temos que $g$ é contínua. □

**Definição 1.4** (Extensão de uma função)**.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos e seja $A$ um subconjunto próprio de $X$. Se $f$ é uma função de $A$ em $Y$, então a função $g : X \to Y$ é chamada de uma extensão de $f$ se $g(x) = f(x)$ para cada $x \in A$. A função $f$ é então dita uma restrição de $g$ em $A$.*

**Exemplo 1.5.** Considere a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Não existe uma função contínua $g$ definida em $[0, \infty)$ que coincida com f. Em outras palavras, $f$ não tem uma extensão contínua para $[0, \infty)$.

O Teorema de Extensão de Tietze estende uma função contínua definida em um subconjunto próprio fechado de um espaço métrico para todo o espaço. Vejamos primeiro um resultado que será usado na demonstração do Teorema de Extensão de Tietze.

**Teorema 1.6.** *Seja $X$ um espaço métrico e $Y$ um subconjunto fechado não vazio de $X$, seja $f : Y \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e limitada, para a qual existe $M > 0$ tal que*

$$\inf_{x \in Y} f(x) = -M, \quad \sup_{x \in Y} f(x) = M.$$

*Então existe uma função contínua $g$ definida em $X$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

*(i)* $|g(x)| \leqslant \frac{1}{3}M,\ x \in X$*;*

*(ii)* $|g(x)| < \frac{1}{3}M,\ x \in X\backslash Y$*;*

*(iii)* $|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}M,\ x \in Y$*.*

*Demonstração.* Sejam $A = \{x \in Y : f(x) \leqslant -\frac{1}{3}M\}$ e $B = \{x \in Y : f(x) \geqslant \frac{1}{3}M\}$. Observe que $A$ e $B$ são não vazios, disjuntos e fechados em $Y$. Se $x \in Y$ é um ponto de acumulação de $A$ e $(x_n)_{n\geqslant 1}$ é uma sequencia em $A$ que converge para $x$, segue que, usando a continuidade de $f$ temos

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant -\frac{1}{3}M,$$

isto é, $x \in A$.

Uma vez que $Y$ é um subconjunto fechado de $X$, segue que $A$ e $B$ são fechados em $X$. Definimos $g$ em $X$ por

$$g(x) = \frac{1}{3}M\frac{d(x,A) - d(x,B)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Temos que $g$ é contínua. Além disso, $|g(x)| \leqslant \frac{M}{3}$, $x \in X$. Se $x \in X\backslash Y$, então $x \notin A$ e $x \notin B$, assim $|g(x)| < \frac{M}{3}$. Supondo $x \in Y$, se $x \in A$ então $g(x) = -\frac{M}{3}$ e $-M \leqslant f(x) \leqslant -\frac{M}{3}$ e assim $|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{2M}{3}$. De forma similar para $x \in B$. Se $x \in Y\backslash(A \cup B)$, então $|g(x)| < \frac{M}{3}$ e $|f(x)| < \frac{M}{3}$ e temos $|f(x) - g(x)| < \frac{2M}{3}$. □

**Teorema 1.7** (Teorema de Extensão de Tietze)**.** *Se $X$ é um espaço métrico, $Y$ um subconjunto fechado de $X$ e $f : Y \to \mathbb{R}^n$ é uma função limitada e contínua, existe uma função contínua $g$ definida em $X$ que estende $f$.*

*Além disso, se*

$$m = \inf\{f(y) : y \in Y\} < \sup\{f(y) : y \in Y\} = M,$$

*então $g$ satisfaz $m < g(x) < M$ para todo $x \in X\backslash Y$.*

*Demonstração.* Assumimos sem perda de generalidade que $m = -M$ e substituímos $f$ por $f - \frac{m+M}{2}$.

Então $|f(x)| \leqslant M$ em $Y$. Pelo teorema (1.6), podemos definir uma função real contínua $g_1$ em $X$ tal que

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leqslant \frac{1}{3}M, \quad x \in X \\ |g_1(x)| &< \frac{1}{3}M, \quad x \in X\backslash Y \\ |f(x) - g_1(x)| &\leqslant \frac{2}{3}M, \quad x \in Y. \end{aligned}$$

Seja $f_2$ definida em $Y$ por $f_2(x) = f(x) - g_1(x)$. Pelo teorema (1.6) podemos achar uma função real contínua em $X$ tal que

$$\begin{aligned} |g_2(x)| &\leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}M\right), \quad x \in X \\ |g_2(x)| &< \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}M\right), \quad x \in X\backslash Y \\ |f_2(x) - g_2(x)| &\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 M, \quad x \in Y. \end{aligned}$$

Podemos continuar este esquema de construção indefinidamente. Desta forma isto nos leva a uma sequência de funções $(g_n)_{n\geqslant 1}$, todas contínuas em $X$, tal que

$$\begin{aligned} |g_n(x)| &\leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M, \quad x \in X \\ |g_n(x)| &< \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M, \quad x \in X\backslash Y \\ |f_n(x) - g_n(x)| &\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n M, \quad x \in Y. \end{aligned}$$

onde $f_n = f_{n-1} - g_{n-1} = f_{n-2} - (g_{n-2} + g_{n-1}) = f - (g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1})$. Segue que

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n M, \quad x \in Y. \tag{1.1}$$

definimos $g$ por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \quad x \in X.$$

Uma vez que

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M,$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M \quad \text{é convergente.}$$

Segue do Teste M de Weierstrass que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x),$$

é uniformemente convergente.

Como cada termo da série é contínua, $g$ representa uma função contínua em $X$.

Fazendo $n \to \infty$ em (1.1), segue que $f(x) = g(x)$, $x \in Y$. Para $x \in X\backslash Y$ temos

$$|g(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M = M.$$

Isto completa a demonstração. □

Gostaríamos de ressaltar que a restrição imposta à $f$, de ser limitada em $Y$, pode ser dispensada com a consideração da função contínua limitada $\mathrm{tg}^{-1} \circ f$ em substituição a $f$. Uma aplicação do Teorema 1.7 com $M = \frac{\pi}{2}$ leva a uma extensão contínua $H$ de $\mathrm{tg}^{-1} \circ f$, onde $H$ é definida em todo $X$.

Observe que, em função da última parte do Teorema 1.7, $H$ não assume os valores $\pm\frac{\pi}{2}$. Definimos $g$ em $X$ por

$$g = \mathrm{tg} \circ H,$$

então $g$ é contínua em $X$ e $g(x) = f(x)$, $x \in Y$.

## 1.2 Conjunto compacto

Estudaremos agora o conceito de conjunto compacto. Em espaços de dimensão finita conjuntos compactos são exatamente aqueles conjuntos que são limitados e fechados, e usamos estas propriedades para definir compacidade de um conjunto. Contudo isto não pode ser feito em espaços de dimensão infinita, que é onde iremos adentrar em nossos estudos sobre equações diferenciais funcionais com retardamento. Assim se fazem necessárias outras definições de um conjunto compacto, as quais apresentamos a seguir.

Seja $M$ um subconjunto de um espaço métrico $X$. Uma cobertura de $M$ é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de $X$ tal que $M \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Isto significa que, para cada $x \in M$, existe pelo menos um índice $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que, para cada $x \in M$ ainda se possa obter $\lambda \in L'$ com $x \in C_\lambda$, isto é, $M \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$, então a subfamília $C' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, chama-se uma subcobertura de $C$.

Uma cobertura diz-se aberta quando cada conjunto $C_\lambda$, $\lambda \in L$ é aberto em $X$ e finita quando $L$ é um conjunto finito.

**Definição 1.8** (Compacto, relativamente compacto). *Seja $X$ um espaço métrico, e seja $M \subset X$. Dizemos que $X$ é um espaço métrico compacto quando toda cobertura aberta de $X$ possui uma subcobertura finita. Dizemos que $M$ é um subconjunto* ***compacto*** *em $X$ se $M$, com a métrica induzida por $X$ é um espaço métrico compacto. E dizemos que $M$ é um subconjunto* ***relativamente compacto*** *de $X$ se $\overline{M}$ (o fecho de $M$) é um subconjunto compacto de $X$.*

Assim, $M$ compacto significa que se $M \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde cada $A_\lambda$ é aberto em $M$, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ tais que $M \subset A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Vejamos dois exemplos.

**Exemplo 1.9.** Todo espaço métrico finito é compacto. Seja $X$ um espaço métrico finito. Digamos que $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, se $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é cobertura aberta de $X$, então cada ponto de $X$ pertence a pelo menos um $C_\lambda$. Digamos que $a_1 \in C_{\lambda_1}, a_2 \in C_{\lambda_2}, \dots, a_n \in C_{\lambda_n}$. Então $X \subset C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$ e como $\{C_{\lambda_1}, \dots, C_{\lambda_n}\}$ é um conjunto finito, $X$ é compacto.

**Exemplo 1.10.** Considere o espaço $C[0,1]$ das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$ dotado com a norma do sup

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Denotemos por $B_r(f)$ a bola aberta de raio $r$ centrada em $f \in C[0,1]$ e por $B_r[f]$ a bola fechada.

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a sequência em $C[0,1]$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}} \\ 2^{n+2}\left(x - \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}}\right)\right) & \text{se } \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}} < x \leqslant \frac{1}{2^n} \\ -2^{n+2}\left(x - \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}}\right)\right) & \text{se } \frac{1}{2^n} < x < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

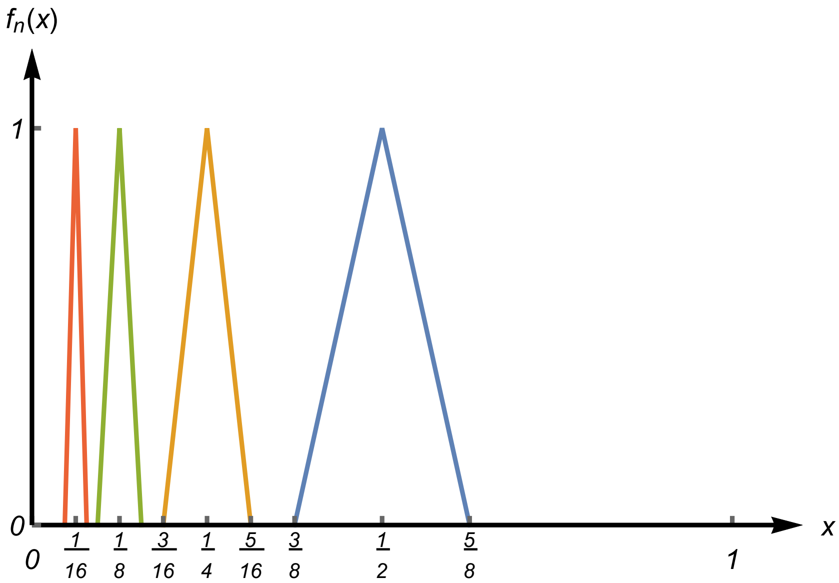



Figura 1.2: Gráficos de $f_1, f_2, f_3$ e $f_4$.

Para $1 \leqslant n < m$ temos

$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+2}} < \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}},$$

consequentemente os suportes de $f_n$ (o subconjunto do domínio de $f_n$ contendo somente os elementos que não são levados no zero) são disjuntos e $\|f_n - f_m\| = 1$, sempre que $n \neq m$.

Agora consideremos o conjunto $\mathcal{U} = \{B_{1/2}(f) : f \in C[0,1]\}$, claramente $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta para $C[0,1]$. Consequentemente cada $B_{1/2}(f)$ contém pelo menos uma função de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e qualquer subcobertura finita de $\mathcal{U}$ terá somente um número finito de funções de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e portanto falha em ser uma cobertura para $C[0,1]$, provando que $C[0,1]$ não é compacto.

Observe também que $B_1[0]$ contém todos os elementos da sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e apesar de ser $B_1[0]$ um conjunto fechado e limitado, $B_1[0]$ não é compacto, a demonstração é análoga a apresentada acima. Isto se deve ao fato de ser $C[0,1]$ um espaço de dimensão infinita.

Apresentaremos agora uma outra definição para compacto e relativamente compacto. Pois apesar da definição anterior ser a mais conhecida, sendo também uma definição mais geral, será a próxima definição a que utilizaremos com maior frequência. Vale a pena ressaltar que em espaços métricos as duas definições são equivalentes, mas o mesmo não ocorre em espaços topológicos.

**Definição 1.11** (Compacto, relativamente compacto)**.** *Seja $X$ um espaço métrico, e seja $M \subset X$. Dizemos que $M$ é **relativamente compacto** se, e somente se, cada sequência $(u_n)$ em $M$ tem uma subsequência convergente $u_{n'} \to u$ quando $n' \to \infty$. Dizemos que $M$ é **compacto** se, e somente se, cada sequência $(u_n)$ em $M$ tem uma subsequência convergente $u_{n'} \to u$ quando $n' \to \infty$ tal que $u \in M$.*

**Exemplo 1.12.** Consideremos novamente o espaço $C[0,1]$ das funções reais contínuas, dotado da norma do sup. Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a sequência em $C[0,1]$ definida por $g_n(x) = x^n$.

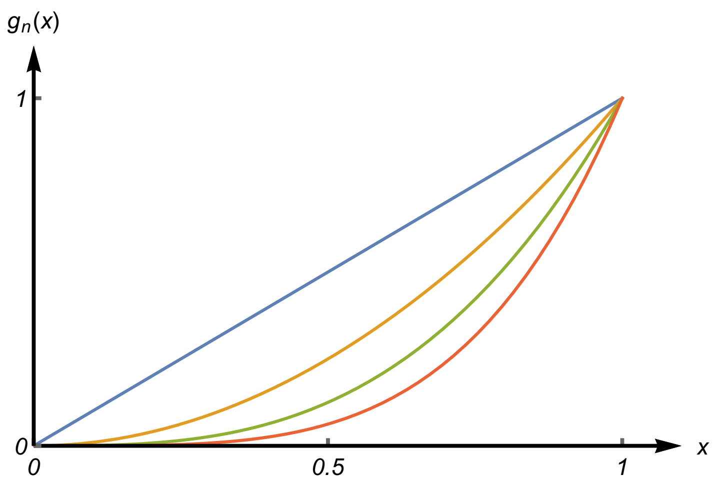



Figura 1.3: Gráficos de $g_1, g_2, g_3$ e $g_4$.

Temos que $\|g_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)| = 1$, logo $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Além disso $g_n \to g$ quando $n \to \infty$, sendo $g$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Assim se $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tivesse uma subsequência convergente esta deveria convergir para a mesma função $g$. Como esta função não é contínua, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ter uma subsequência convergindo para uma função em $C[0,1]$. Portanto mostramos usando a nossa segunda definição de conjunto compacto mais uma vez que $C[0,1]$ não é compacto.

É interessante observar que as definições de conjunto compacto e conjunto relativamente compacto levam as implicações mostradas na figura 1.4.

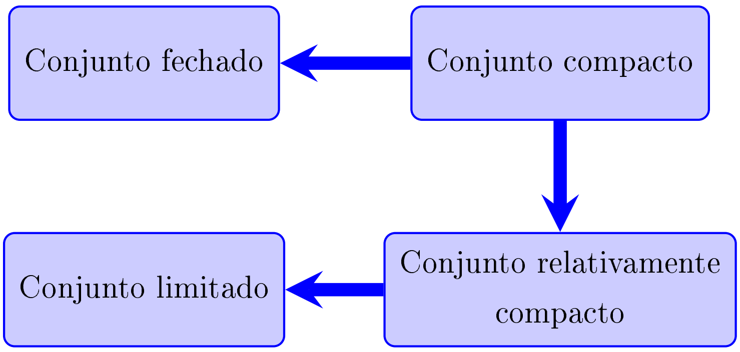



Figura 1.4: Conjunto compacto e relativamente compacto.

**Teorema 1.13.** *O conjunto $M$ é compacto se, e somente se, é relativamente compacto e fechado.*

*Demonstração.* Seja $M$ compacto. Por definição, isto implica que $M$ é relativamente compacto. Além disso, seja

$$u_n \to v \quad \text{quando } n \to \infty \text{ com } u_n \in M \text{ para todo } n.$$

Uma vez que $M$ é compacto, existe uma subsequência $(u_{n'}) \to u$ quando $n' \to \infty$ com $u \in M$. Temos então que $u = v$. Consequentemente $M$ é fechado.

Reciprocamente, seja $M$ relativamente compacto e fechado. Considere qualquer sequência $(u_n)$ em $M$. Então existe uma subsequência tal que $u_{n'} \to u$ quando $n' \to \infty$. Uma vez que $M$ é fechado, $U \in M$. Portanto $M$ é compacto. $\square$

**Teorema 1.14.** *Todo conjunto relativamente compacto é limitado.*

*Demonstração.* Seja $M$ relativamente compacto e suponha que $M$ não é limitado. Então existe uma sequência $(u_n)$ em $M$ tal que

$$\|u_n\| \geqslant n, \quad \text{para todo } n. \tag{1.2}$$

Uma vez que $M$ é relativamente compacto, existe uma subsequência convergente $(u_{n'})$. Consequentemente $(u_{n'})$ é limitada, uma vez que toda sequência convergente é limitada. Mas isto contradiz (1.2). $\square$

**Teorema 1.15.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, e seja $M$ um subconjunto compacto não vazio de $X$. Se*

$$T : M \to Y$$

*é um operador contínuo. Então, $T$ é uniformemente contínuo em $M$.*

*Demonstração.* Suponha que $T$ não seja uniformemente contínuo. Então, existe um número $\varepsilon_0 > 0$ e duas sequências $u_n$ e $v_n$ em $M$ tais que

$$\|u_n - v_n\| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{e } \|Tu_n - Tv_n\| \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n. \tag{1.3}$$

Uma vez que $M$ é compacto, existe uma subsequência de $(u_n)$, que denotaremos novamente por $(u_n)$, tal que

$$u_n \to u \quad \text{quando } n \to \infty \quad \text{e} \quad u \in M.$$

Isto implica

$$\|v_n - u\| \leqslant \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Consequentemente

$$v_n \to u \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Assim pela continuidade do operador T,

$$\|Tu_n - Tv_n\| \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Mas isto contradiz a condição (1.3). $\square$

Vamos denotar por $C[a.b]$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

**Teorema 1.16** (Arzelà-Ascoli)**.** *Seja $X := C[a, b]$ com $\|u\| := \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u(x)|$ e $-\infty < a < b < \infty$. Suponha que seja dado um conjunto $M$ em $X$ tal que*

*(i) $M$ é limitado, isto é, $\|u\| \leqslant r$ para todo $u \in M$ e $r \geqslant 0$ fixo.*

*(ii) $M$ é equicontínuo, isto é, por definição, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$|x - y| < \delta \quad e \quad u \in M \quad \textit{implica} \quad |u(x) - u(y)| < \varepsilon.$$

*Então, $M$ é um subconjunto relativamente compacto de $X$, isto é, $\overline{M}$ é compacto.*

*Demonstração.* Suponha uma sequência $(u_n)$ em $M$, isto é, as funções

$$u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

são contínuas.

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais contidos no intervalo $[a,b]$. Este conjunto é enumerável. Então podemos escrever

$$\mathbb{Q} = \{r_i : \ i = 1, 2, \ldots\}.$$

Pela hipótese $(i)$, a sequência $(u_n(r_1))$ é limitada em $\mathbb{R}$. Então existe uma subsequência $(u_n^{(1)})$ de $(u_n)$ tal que $(u_n^{(1)}(r_1))$ é convergente, isto é, existe um número real $w_1$ tal que

$$u_n^{(1)}(r_1) \longrightarrow w_1 \ \text{ em } \mathbb{R} \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Novamente por $(i)$, a sequência $(u_n^{(1)}(r_2))$ é limitada em $\mathbb{R}$. Consequentemente existe uma subsequência $(u_n^{(2)})$ de $(u_n^{(1)})$ tal que

$$u_n^{(2)}(r_2) \longrightarrow w_2 \ \text{ em } \mathbb{R} \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Continuando esta construção, para cada $k = 1, 2, \ldots$ obtemos uma subsequência $(u_n^{(k)})$ de $(u_n)$ tal que, quando $n \to \infty$,

$$\begin{array}{l}
u_1^{(1)}(r_1), u_2^{(1)}(r_1), u_3^{(1)}(r_1), \ldots \ \longrightarrow w_1 \\
u_1^{(2)}(r_2), u_2^{(2)}(r_2), u_3^{(2)}(r_2), \ldots \ \longrightarrow w_2 \\
u_1^{(3)}(r_3), u_2^{(3)}(r_3), u_3^{(3)}(r_3), \ldots \ \longrightarrow w_3 \\
\ldots
\end{array}$$

Além disso, $(u_n^{(k+1)})$ é uma subsequência de $(u_n^{(k)})$ para todo $k$.

Consideremos agora a sequência diagonal

$$v_n := u_n^{(n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Então

$$v_n(r_j) \longrightarrow w_j \ \text{ quando } n \longrightarrow \infty \quad \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos o número $\delta > 0$ como em (ii). Então, existe um número finito de pontos $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{Q}$ tal que, para cada $x \in [a, b]$, existe algum $x_j$ tal que

$$|x - x_j| < \delta. \tag{1.5}$$

Por (1.4), para cada $j = 1, \ldots, s$ , a sequência $(v_n(x_j))$ é convergente, e consequentemente é uma sequência de Cauchy. Então, existe um número $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|v_n(x_j) - v_m(x_j)| < \varepsilon \quad \text{para todo } n, m \geqslant n_0(\varepsilon),\ j = 1, \ldots, s.$$

E finalmente, para cada $x \in [a, b]$, segue da hipótese (ii) e de (1.5) que

$$\begin{aligned} |v_n(x) - v_m(x)| &\leqslant |v_n(x) - v_n(x_j)| + |v_n(x_j) - v_m(x_j)| + |v_m(x_j) - v_m(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \quad \text{para todo } n, m \geqslant n_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\|v_n - v_m\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |v_n(x) - v_m(x)| < 3\varepsilon \text{ para todo } n, m \geqslant n_0(\varepsilon),$$

isto é, $(v_n)$ é uma subsequência de Cauchy de $(u_n)$.

Uma vez que $C[a, b]$ é um espaço de Banach, $(v_n)$ representa uma subsequência convergente de $(u_n)$ em $C[a, b]$. □

**Definição 1.17** ($\varepsilon$-net). *Seja $M \subseteq X$. O conjunto de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ é chamado de uma $\varepsilon$-net finita para $M$ se $\min_i d(x, x_i) < \varepsilon$ para todo $x \in M$.*

Assim todo elemento de $M$ está em uma das bolas de raio $\varepsilon$ se $M$ tem uma $\varepsilon$-net finita.

**Teorema 1.18** ($\varepsilon$-net finita). *Seja $M$ um conjunto não vazio em um espaço de Banach $X$. Então as duas afirmações seguintes são equivalentes:*

*(i) $M$ é relativamente compacto.*

*(ii) $M$ tem uma $\varepsilon$-net finita.*

*Demonstração.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $M$ relativamente compacto. Suponha que $(ii)$ não aconteça, ou seja, vamos negar $(ii)$. Então existe um número $\varepsilon_0 > 0$ tal que $M$ não tem uma $\varepsilon_0$-net finita. Escolhemos um ponto $u_1 \in M$ fixo. Então existe um ponto $u_2 \in M$ tal que

$$\|u_2 - u_1\| > \varepsilon_0.$$

Além disso, existe um ponto $u_3 \in M$ tal que

$$\|u_3 - u_2\| > \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad \|u_3 - u_1\| > \varepsilon_0.$$

Continuando esta construção teremos uma sequência $(u_n)$ em $M$ tal que

$$\|u_n - u_m\| > \varepsilon_0 \quad \text{para todo} \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{com} \quad n \neq m.$$

Consequentemente cada subsequência de $(u_n)$ não é de Cauchy, isto é, $(u_n)$ não contém nenhuma subsequência convergente. O que contradiz o fato de $M$ ser relativamente compacto.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Suponha que a condição $(ii)$ é satisfeita. Seja $(u_n)$ uma sequência em $M$. Fixemos $\varepsilon = 1$.

Por $(ii)$ existe $y_i \in M$ tal que

$$\|u_n - y_i\| \leqslant 1 \qquad \text{para infinitos índices } n.$$

Então existe uma subsequência $(u_n^{(1)})$ de $(u_n)$ tal que

$$\|u_n^{(1)} - y_i\| \leqslant 1 \qquad \text{para todo } n.$$

Consequentemente

$$\|u_n^{(1)} - u_m^{(1)}\| \leqslant \|u_n^{(1)} - y_i\| + \|y_i - u_m^{(1)}\| \leqslant 2 \qquad \text{para todo } n, m.$$

Continuando esta construção para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$, obtemos as sequências

$$\begin{aligned} &u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \ldots \\ &u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, \ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

com as seguintes propriedades. Para cada $k = 1, 2, \ldots$, $(u_n^{(k+1)})$ é uma subsequência de $(u_n^{(k)})$ e

$$\|u_n^{(k)} - u_m^{(k)}\| \leqslant \frac{2}{k} \qquad \text{para todo } n, m. \tag{1.6}$$

Considere agora a sequência diagonal

$$y_n := u_n^{(n)}.$$

Por (1.6)

$$\|y_n - y_m\| \leqslant \frac{2}{n} \qquad \text{para todo } n, m \;\; \text{com} \;\; m \geqslant n.$$

Consequentemente $(y_n)$ é uma subsequência de Cauchy de $(u_n)$. Uma vez que $X$ é um espaço de Banach, a sequência $y_n$ é convergente. Isto prova que $M$ é relativamente compacto. □

**Definição 1.19** (Operador compacto)**.** *Se $U$ é um subconjunto de um espaço de Banach $X$ e $T : U \longrightarrow X$, então $T$ é dito compacto (ou completamente contínuo) se:*

*(i) $T$ é contínuo;*

*(ii) para qualquer conjunto limitado $B \subseteq U$ o fecho de $T(B)$ é compacto.*

**Exemplo 1.20.** Seja

$$Q := \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in [a, b] \ \text{ e } \ |u| \leqslant r \ \text{ para } \ r > 0 \ \text{ fixo}\}.$$

Suponha que a função $F : Q \to \mathbb{R}$ é contínua. Seja

$$X := C[a, b] \ \text{ e } \ M := \{u \in X : \|u\| \leqslant r\}.$$

Vamos considerar o seguinte operador integral

$$Tu(x) := \int_a^b F(x, y, u(y))\ dy \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b]$$

onde $-\infty < a < b < \infty$.

Então o operador

$$T : M \to X$$

é compacto.

De fato pelo Teorema 1.15, a função $F$ é uniformemente contínua no conjunto compacto $Q$. Isto implica que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que

$$|F(x, y, u) - F(z, y, v)| < \varepsilon \tag{1.7}$$

para todo $(x, y, u), (z, y, v) \in Q$ com $|x - z| + |u - v| < \delta$.

Primeiro mostremos que o operador $T : M \to X$ é contínuo. De fato, se $u \in M$, então a função $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, e $|u(y)| \leqslant r$ para todo $y \in [a, b]$. Consequentemente $Tu : [a, b] \to \mathbb{R}$ é também contínua. Seja $u, v \in M$. Então

$$\|u - v\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u(y) - v(y)| < \delta$$

implica por (1.7) em

$$\|Tu - Tv\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int_a^b [F(x, y, u(y)) - F(x, y, v(y))]\ dy \right| \leqslant (b - a)\varepsilon.$$

Consequentemente $T : M \to X$ é contínuo.

Mostremos agora que $T : M \to X$ é compacto. Uma vez que $M$ é limitado é suficiente mostrar que o conjunto $T(M)$ é relativamente compacto.

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, resta mostrar que $T(M)$ é limitado e equicontínuo.

(i) $T(M)$ é limitado. Seja $\mathcal{M} := \max_{(x,y,u) \in Q} |F(x, y, u)|$. Então, para todo $u \in M$,

$$\|Tu\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int_a^b F(x, y, u(y))\ dy \right| \leqslant (b - a)\mathcal{M}.$$

(ii) $T(M)$ é equicontínuo. Seja $|x-z|<\delta$ e $x,z\in[a,b]$. Então por (1.7)

$$\begin{aligned}|Tu(x)-Tu(z)| \leqslant & \int_a^b |F(x,y,u(y))-F(z,y,u(y))|\ dy\\ \leqslant & (b-a)\varepsilon \quad \text{para todo } u\in M.\end{aligned}$$

**Definição 1.21** ($span(M)$)**.** *Seja $M\neq\emptyset$ um subconjunto de um espaço vetorial $X$ sobre o corpo $\mathbb{K}$. O gerado por $M$, denotado por $span(M)$, é o conjunto contendo todas as combinações lineares de vetores de $M$,*

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \tag{1.8}$$

*com $\alpha_i\in\mathbb{K}$ e $x_i\in M$ para $n\in\mathbb{N}$.*

**Teorema 1.22** (Teorema de aproximação para operadores compactos)**.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach, com $M$ um subconjunto não vazio e limitado de $X$. Seja $T: M\subseteq X\to Y$ um operador dado. Então $T$ é compacto se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita:*

*Para todo $n\in\mathbb{N}$ existe um operador compacto $P_n: M\to Y$ tal que*

$$\sup_{x\in M}\|T(x)-P_n(x)\|\leqslant\frac{1}{n}\quad e\quad \dim(spanP_n(M))<\infty. \tag{1.9}$$

*Demonstração.* Seja $T$ compacto. Então $T(M)$ é relativamente compacto, logo pelo Teorema 1.18 para cada $n$ existem elementos $y_i\in T(M)$, $i=1,2,\ldots,N$ tais que

$$\min_i\|Tx-y_i\|<\frac{1}{n},\quad \text{para todo } x\in M. \tag{1.10}$$

O chamado operador de Schauder, definido por

$$P_n(x)=\frac{\sum_{i=1}^{N}a_i(x)y_i}{\sum_{i=1}^{N}a_i(x)}. \tag{1.11}$$

onde $a_i(x)=\max\{\frac{1}{n}-\|Tx-y_i\|,0\}$, tem todas as propriedades requeridas. Por (1.10) as $a_i$ contínuas não desaparecem simultaneamente para $x\in M$, e

$$\begin{aligned}\|P_nx-Tx\| &= \left\|\frac{\sum_i a_i(x)(y_i-Tx)}{\sum_i a_i(x)}\right\|\\ &\leqslant \frac{\sum_i a_i(x)n^{-1}}{\sum_i a_i(x)}\leqslant\frac{1}{n}\quad \text{para todo } x\in M.\end{aligned}$$

A limitação de $T(M)$ implica na limitação de $P_n(M)$. E uma vez que o conjunto $P_n(M)$ encontra-se em um espaço dimensionalmente finito, $P_n(M)$ é relativamente compacto, isto é, o operador $P_n$ é compacto.

Reciprocamente suponha agora que para todo $n \in \mathbb{N}$ exista o operador compacto $P_n$ e que as condições em (1.9) sejam verdadeiras. Uma vez que $P_n$ é compacto então é contínuo, assim dado um ponto $y$ qualquer e $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|x-y\| < \delta(\varepsilon)$ implica em $\|P_n x - P_n y\| < \varepsilon$.

E sendo $T$ o limite uniforme dos operadores $P_n$ temos que $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos $\|Tx - P_n x\| < \varepsilon$.

Consequentemente $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$ implica em

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\| &= \|Tx - Ty + P_n y - P_n y + P_n x - P_n x\| \\ &\leqslant \|Tx - P_n x\| + \|P_n x - P_n y\| + \|P_n y - Ty\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo $T$ é contínuo.

Além disso por (1.9) temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto relativamente compacto $P_n(M)$ tem uma $\frac{1}{n} - net$ finita.

Assim existem $y_i \in P_n(M)$, com $i = 1, 2, \ldots$,N tais que $\|P_n(x) - y_i\| < \frac{1}{n}$ para todo $x \in M$. E desta forma temos

$$\|Tx - y_i\| = \|Tx - y_i + P_n x - P_n x\| \leqslant \|Tx - P_n x\| + \|P_n x - y_i\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

Logo o conjunto $T(M)$ possui uma $\frac{2}{n} - net$ finita, e assim pelo Teorema 1.18 $T(M)$ é relativamente compacto.

Portanto como $T$ é contínua e mapeia o conjunto limitado $M$ no conjunto relativamente compacto $T(M)$, temos que $T$ é compacto.

□

## 1.3 Teoremas de Ponto Fixo

Os Teoremas de Ponto Fixo são fundamentais nas demonstrações dos teoremas que garantem a existência de soluções de equações diferenciais.

**Definição 1.23** ($co(M)$)**.** *Para $M \neq \emptyset$, o envoltório convexo, $co(M)$, é o conjunto de todas as combinações lineares* (1.8) *com as restrições*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad e \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1 \quad para\ n \in \mathbb{N}.$$

O envoltório convexo $co(M)$ é o menor conjunto convexo que contém $M$.

**Teorema 1.24** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (1912))**.** *Suponha que $M$ é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$, onde $n \geqslant 1$, e que $f : M \to M$ é uma função contínua. Então $f$ tem um ponto fixo.*

Não faremos a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Esta pode ser encontrada na referência [2] e em uma forma menos geral na referência [6]. A seguir enunciamos uma versão do Teorema do Ponto Fixo de Schauder que é uma tradução direta do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para espaços de Banach e em seguida o Teorema do Ponto Fixo de Schauder na forma que será utilizada na prova do Teorema de existência.

**Teorema 1.25** (Versão alternativa do Teorema do Ponto Fixo de Schauder)**.** *Seja $M$ um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de um espaço de Banach $X$, e suponha $T : M \to M$ um operador contínuo. Então $T$ tem um ponto fixo.*

*Demonstração.* Seja $M_n = co(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$, onde $y_i$ e $P_n$ são escolhidos como em (1.10) e (1.11). A convexidade de $M$ implica que

$$M_n \subseteq co(T(M)) \subseteq M.$$

Portanto,

$$P_n : M_n \to M_n$$

é contínua. Além disso, $M_n$ é compacto e convexo, e $M_n \subseteq \mathbb{R}^n$. Aqui identificamos $span\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ como o subespaço $\mathbb{R}^n$.

Pelo Teorema 1.24 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer), existe um ponto fixo

$$x_n = P_n(x_n), \text{ onde } x_n \in M_n \subseteq M.$$

Uma vez que $M$ é compacto, existe uma subsequência, novamente denotada por $(x_n)$, tal que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Este $x$ é o ponto fixo desejado. De fato,

$$\|x_n - Tx\| \leqslant \|P_n x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tx\|,$$

e fazendo $n \to \infty$ temos $x = Tx$. □

**Teorema 1.26** (Teorema do ponto fixo de Schauder(1930))**.** *Se $M$ é um subconjunto não vazio, fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach $X$ e $T : M \longrightarrow M$ é um operador compacto, então $T$ tem um ponto fixo em $M$.*

*Demonstração.* Seja $A = \overline{co}(T(M))$. Então $A \subseteq M$ e o conjunto $A$ é compacto e convexo. Além disso, $T(A) \subseteq A$. Então a restrição

$$T : A \longrightarrow A$$

pelo Teorema 1.25 tem um ponto fixo, e este ponto é automaticamente um ponto fixo de $T$ em $M$. □

# 2 Equações diferenciais funcionais: Teoria básica

Neste capítulo desenvolveremos a teoria básica sobre existência e unicidade de solução das equações diferenciais funcionais. As definições e teoremas apresentados neste capítulo foram baseados nas referências [4] e [1].

## 2.1 Definição de uma equação com retardamento

Suponha $r \geqslant 0$ um número real dado, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial linear n-dimensional sobre o corpo $\mathbb{R}$ com norma $|\cdot|$, $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ em $\mathbb{R}^n$ com a topologia da convergência uniforme. Se $[a,b] = [-r,0]$ temos $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e designamos a norma de um elemento $\phi$ em $C$ por $\|\phi\| = \sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} |\phi(\theta)|$. Logo, $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ é Banach. Se

$$\sigma \in \mathbb{R},\ A \geqslant 0, \quad \text{e} \quad x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$$

então para qualquer $t \in [\sigma, \sigma + A]$, temos $x_t \in C$ definida por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-r \leqslant \theta \leqslant 0$.

**Definição 2.1** (Equação Diferencial Funcional com Retardamento)**.** *Se $D$ é um subconjunto de $\mathbb{R} \times C$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ é uma função dada e "$\cdot$" representa a derivada (sendo que nos extremos do intervalo "$\cdot$" representa a derivada lateral), dizemos que a relação*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{2.1}$$

*é uma equação diferencial funcional com retardamento em $D$ e denominamos esta equação por EDFR.*

A equação (2.1) é um tipo bem geral de equação que engloba por exemplo as equações diferenciais ordinárias, quando $r = 0$:

$$\dot{x}(t) = F(x(t))$$

e as equações íntegro-diferenciais

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} g(t, \theta, x(t+\theta))d\theta.$$

O problema de valor inicial para equações diferenciais funcionais com retardamento é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ x_\sigma = \phi \end{cases}$$

onde $\phi$ é uma função conhecida definida em $[-r, 0]$ com imagem em $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 2.2.** Como exemplo de EDFR consideremos o seguinte problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1) \\ \quad x_0 = -t, \qquad\qquad -1 \leqslant t \leqslant 0 \end{cases}$$

Em nosso exemplo observamos que $\dot{x}(t)$ depende de $t$ e da função $x$ calculada no instante $t-1$. Neste tipo de equação para a determinação da solução $x$, diferentemente do que ocorre em uma EDO, não dependemos apenas do conhecimento da solução em um instante $\sigma$, mas sim do conhecimento da solução em um certo intervalo anterior a $\sigma$. A condição inicial agora é dada por uma função no intervalo $[-r, 0]$, ou seja, por uma $\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Exibiremos a solução deste problema quando apresentarmos o método de resolução de EDFR por passos na seção 2.2.1.

**Definição 2.3** (Solução da EDFR)**.** *Uma função $x$ é uma solução da equação (2.1) em $[\sigma - r, \sigma + A)$ se existir $\sigma \in \mathbb{R}$ e $A > 0$ tais que $x \in C([\sigma - r, \sigma + A), \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz a equação (2.1) para $t \in [\sigma, \sigma + A)$.*

**Definição 2.4** (Solução da EDFR com valor inicial)**.** *Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in C$, dizemos que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma solução da equação (2.1) com valor inicial $\phi$ em $\sigma$ ou simplesmente uma solução passando por $(\sigma, \phi)$ se existir um $A > 0$ tal que $x(\sigma, \phi, f)$ é uma solução da equação (2.1) em $[\sigma - r, \sigma + A)$ e $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$.*

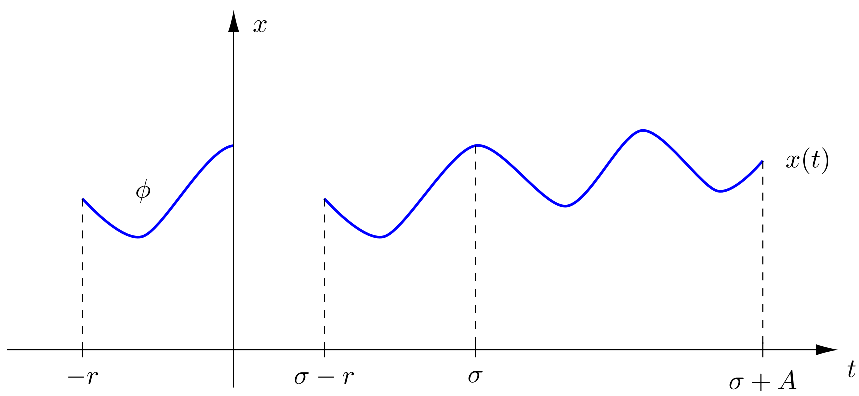



Figura 2.1: Gráfico de $x$ para $n = 1$.

Passemos agora as nossas primeiras observações. Representadas pelos Lemas 2.5 e 2.6.

**Lema 2.5.** *Se* $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$ *então a função*

$$\begin{aligned} h_x : [\sigma, \sigma + \alpha] &\longrightarrow C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \\ t &\longmapsto h_x(t) = x_t \end{aligned}$$

*é uma função contínua de* $t$*, onde* $\alpha > 0$*.*

*Demonstração.* Referência [4]. □

**Lema 2.6.** *Se* $\sigma \in \mathbb{R}$*,* $\phi \in C$ *são dados, e* $f(t, \phi)$ *é contínua, então encontrar uma solução da equação (2.1) com condição inicial* $(\sigma, \phi)$ *é equivalente a resolver a equação integral*

$$\begin{aligned} x_\sigma &= \phi \\ x(t) &= \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s) ds, \qquad t \geqslant \sigma. \end{aligned} \tag{2.2}$$

*Demonstração.* Referência [4]. □

## 2.2 Existência e unicidade de solução

Para provar a existência de uma solução passando por $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times C$, consideramos um $\alpha > 0$ e todas as funções $x$ definidas em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ que são contínuas e coincidem com $\phi$ em $[\sigma - r, \sigma]$, isto é, $x_\sigma = \phi$. Os valores destas funções em $[\sigma, \sigma + \alpha]$ são restritos a classe de $x$ tais que $|x(t) - \phi(0)| \leqslant \beta$ para $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$. O operador usual $T$ obtido da correspondente equação integral é definido e então mostraremos que $\alpha$ e $\beta$ podem ser escolhidos de tal forma que $T$ transforma esta classe nela mesma e é completamente contínuo. Então, o Teorema do Ponto Fixo de Shauder implica na existência.

Verifiquemos primeiro alguns resultados preliminares que serão úteis no decorrer deste capítulo. Para qualquer $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times C$, seja $\tilde{\phi} \in C([\sigma - r, \infty), \mathbb{R}^n)$ definida por

$$\tilde{\phi}_\sigma = \phi, \qquad \tilde{\phi}(t + \sigma) = \phi(0), \qquad t \geqslant 0. \tag{2.3}$$

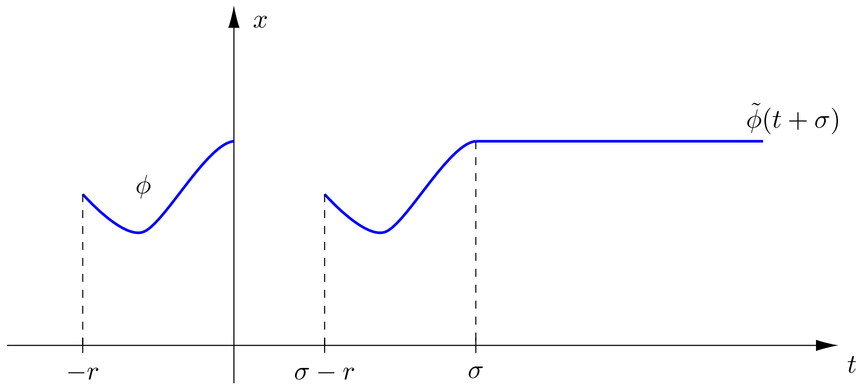



Figura 2.2: Gráfico de $\tilde{\phi}$, para $n = 1$.

Suponha que $x$ é uma solução da equação (2.1) passando por $(\sigma, \phi)$. Se $x(t+\sigma) = \tilde{\phi}(t+\sigma) + y(t)$, $t \geqslant -r$, então derivando temos

$$\dot{x}(t+\sigma) = \dot{\tilde{\phi}}(t+\sigma) + \dot{y}(t)$$

Como $\tilde{\phi}(t+\sigma) = \phi(0)$. Segue que

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t+\sigma) = f(t+\sigma, x_{t+\sigma}) = f(t+\sigma, \tilde{\phi}_{t+\sigma} + y_t).$$

Integrando de 0 a $t$ fica

$$\int_0^t \dot{y}(s)ds = \int_0^t f(s+\sigma, \tilde{\phi}_{s+\sigma} + y_s)ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$y(t) - y(0) = \int_0^t f(s+\sigma, \tilde{\phi}_{s+\sigma} + y_s)ds.$$

Onde $y(0) = x(\sigma) - \tilde{\phi}(\sigma) = 0$. Logo $y$ satisfaz

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y(t) &= \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, \qquad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por outro lado, se $y$ é uma solução desta equação, então obtemos a solução $x$ da equação (2.1) por esta transformação. Consequentemente, achar uma solução de (2.1) é equivalente a achar um $\alpha > 0$ e uma função $y \in C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$ tal que a equação (2.4) é satisfeita para $0 \leqslant t \leqslant \alpha$.

Se $V$ é um subconjunto de $\mathbb{R} \times C$, então $C(V, \mathbb{R}^n)$ é a classe de todas as funções $f : V \to \mathbb{R}^n$ que são contínuas e $C^0(V, \mathbb{R}^n) \subseteq C(V, \mathbb{R}^n)$ é um subconjunto das funções limitadas e contínuas de $V$ em $\mathbb{R}^n$. O espaço $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ torna-se um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_V = \sup_{(t,\phi)\in V} |f(t, \phi)|. \tag{2.5}$$

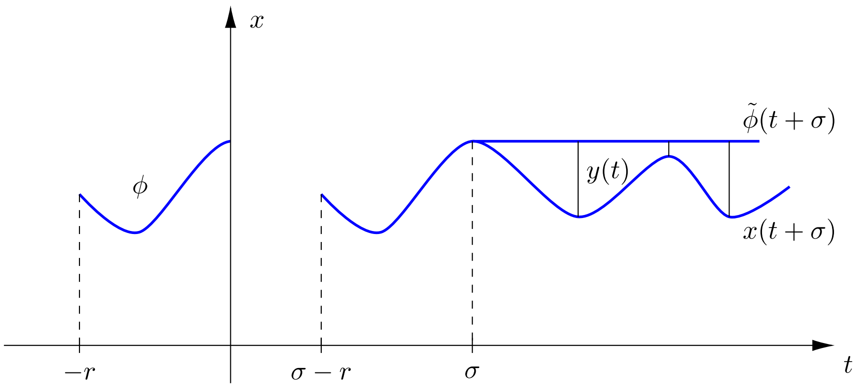



Figura 2.3: Gráfico de $x$ e $\tilde{\phi}$, para $n = 1$.

Para quaisquer reais $\alpha$ e $\beta$ definimos

$$\begin{gathered} I_\alpha = [0,\alpha], \qquad B_\beta = \{\psi \in C : \|\psi\| \leqslant \beta\}, \\ \mathcal{A}(\alpha,\beta) = \{y \in C([-r,\alpha],\mathbb{R}^n) : y_0 = 0,\ y_t \in B_\beta,\ t \in I_\alpha\}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

**Lema 2.7.** *Suponha que $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ é aberto, $W \subseteq \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ é dada. Então existe uma vizinhança $V \subseteq \Omega$ de $W$ tal que $f^0 \in C^0(V,\mathbb{R}^n)$, existe uma vizinhança $U \subseteq C^0(V,\mathbb{R}^n)$ de $f^0$ e constantes positivas $M, \alpha$ e $\beta$ tais que*

$$|f(\sigma,\phi)| < M \text{ para } (\sigma,\phi) \in V \text{ e } f \in U. \tag{2.7}$$

*Além disso, para qualquer $(\sigma^0,\phi^0) \in W$, temos $(\sigma^0 + t, y_t + \tilde{\phi}_{\sigma^0+t^0}) \in V$ para $t \in I_\alpha$ e $y \in \mathcal{A}(\alpha,\beta)$.*

*Demonstração.* Referência [4]. □

**Lema 2.8.** *Suponha $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ aberto, $W \subseteq \Omega$ compacto e $f^0 \in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ dada, as vizinhanças $U$ e $V$ e as constantes $M$, $\alpha$, $\beta$ são as obtidas no Lema 2.7. Se*

$$T : W \times U \times \mathcal{A}(\alpha,\beta) \longrightarrow C([-r,\alpha],\mathbb{R}^n)$$

$$T(\sigma,\phi,f,y)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-r,0], \\ \int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, & t \in I_\alpha, \end{cases}$$

*então $T$ é contínua e existe um conjunto compacto $K$ em $C([-r,\alpha],\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$T : W \times U \times \mathcal{A}(\alpha,\beta) \longrightarrow K.$$

*Além disso, se $M\alpha \leqslant \beta$ então*

$$T : W \times U \times \mathcal{A}(\alpha,\beta) \longrightarrow \mathcal{A}(\alpha,\beta).$$

*Demonstração.* Referência [4].

□

**Teorema 2.9** (Existência)**.** *Suponha que $\Omega$ é um subconjunto aberto em $\mathbb{R} \times C$ e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$, então existe uma solução da equação diferencial com retardamento EDFR($f^0$) passando por $(\sigma, \phi)$. De forma mais geral, se $W \subseteq \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é dado, então existe uma vizinhança $V \subseteq \Omega$ de $W$ tal que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, existe uma vizinhança $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de $f^0$ e um $\alpha > 0$ tal que para qualquer $(\sigma, \phi) \in W$, $f \in U$, existe uma solução $x(\sigma, \phi, f)$ da EDFR($f$) passando por $(\sigma, \phi)$ que existe em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.*

*Demonstração.* Para a prova da primeira parte do teorema consideremos $W = \{(\sigma, \phi)\}$, um ponto único, logo compacto. Pelo Lema 2.8 podemos definir

$$
\begin{aligned}
T &: W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n) \\
T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [-r, 0], \\ \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)\, ds, & t \in I_\alpha, \end{cases}
\end{aligned}
$$

sendo $T$ contínua. Além disso, sendo $M\alpha \leqslant \beta$ temos

$$T : W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathcal{A}(\alpha, \beta).$$

Consideremos agora a aplicação

$$
\begin{aligned}
T(\sigma, \phi, f^0, \cdot) : \mathcal{A}(\alpha, \beta) &\longrightarrow C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n) \\
y &\longmapsto T(\sigma, \phi, f, y)(t)
\end{aligned}
$$

Queremos mostrar que $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ é limitado, fechado e convexo, e ainda que

$$G = T(\sigma, \phi, f^0, \cdot) : \mathcal{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathcal{A}(\alpha, \beta)$$

é completamente contínuo. E então poderemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para concluir a prova do teorema.

**a)** Temos que $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ é limitado. De fato seja $y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$, então

$$y_t \in B_\beta, \quad \forall\, t \in I_\alpha$$

o que implica que

$$|y_t| \leqslant \beta, \quad \forall\, t \in I_\alpha.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|y_t(\theta)| &\leqslant \beta, \quad \forall\, t \in I_\alpha,\ \theta \in [-r, 0] \\
|y(t + \theta)| &\leqslant \beta, \quad \text{com } -r \leqslant t + \theta \leqslant \alpha \\
|y(s)| &\leqslant \beta, \quad \text{com } -r \leqslant s \leqslant \alpha,
\end{aligned}
$$

o que implica em

$$\|y\| \leqslant \beta, \quad \forall\ y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta).$$

Portanto $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ é limitado.

**b)** Mostremos agora que $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ é fechado em $C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$. Seja $(y^i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ uma sequência em $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ convergente, isto é, $y^i \to y$ em $C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$, mostraremos que $y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$. De fato como $y^i \to y$ então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant n_0$ implica em

$$\|y^n - y\| < \varepsilon \implies |y^n(t) - y(t)| < \varepsilon.$$

Em particular para $n = n_0$, temos

$$\|y^{n_0} - y\| < \varepsilon \implies |y^{n_0}(t) - y(t)| < \varepsilon.$$

Assim

$$|y_0| = |y_0 - y_0^{n_0} + y_0^{n_0}| \leqslant |y_0 - y_0^{n_0}| + |y_0^{n_0}| = |y_0 - y_0^{n_0}| + 0 \leqslant |y - y^{n_0}| < \varepsilon,$$

logo $|y_0| < \varepsilon$, e fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ implica em $|y_0| \leqslant 0$, então $y_0 = 0$.

Agora,

$$|y_t| = |y_t - y_t^{n_0} + y_t^{n_0}| \leqslant |y_t - y_t^{n_0}| + |y_t^{n_0}| \leqslant |y - y^{n_0}| + |y_t^{n_0}| < \varepsilon + \beta,$$

fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ implica em $|y_t| \leqslant \beta, \quad \forall\ t \in I_\alpha$.

Portanto $y_t \in B_\beta$ para todo $t \in I_\alpha$, o que implica que $y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$ e temos que $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ é fechado em $C([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$.

**c)** Vamos mostrar que $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ é convexo. Queremos provar que, se $y^1$ e $y^2 \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$, então "o segmento" $(1-a)y^1 + ay^2\ \forall\ a \in [0, 1]$ está contido em $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$.

De fato, fixando um $a$ em $[0, 1]$, temos

$$((1-a)y^1 + ay^2)(\theta) = ((1-a)y^1)(\theta) + (ay^2)(\theta) = (1-a)y^1(\theta) + ay^2(\theta) = 0 + 0 = 0,$$

pois $y^1$ e $y^2 \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$ para $-r \leqslant \theta \leqslant 0$. Logo $((1-a)y^1 + ay^2)_0 = 0$.

Também,

$$\begin{aligned} |((1-a)y^1 + ay^2)_t| = |(1-a)y_t^1 + ay_t^2| &\leqslant |1-a||y_t^1| + |a||y_t^2| \\ &\leqslant (1-a)\beta + a\beta = \beta - a\beta + a\beta = \beta. \end{aligned}$$

Logo,

$$((1-a)y^1 + ay^2)_t \in B_\beta,\ \forall\ t \in I_\alpha.$$

Assim,

$$\forall\ a \in [0,1],\ (1-a)y^1 + ay^2 \in \mathcal{A}(\alpha,\beta).$$

E portanto $\mathcal{A}(\alpha,\beta)$ é convexo.

**d)** Mostremos agora que

$$G = T(\sigma,\phi,f^0,\cdot) : \mathcal{A}(\alpha,\beta) \longrightarrow \mathcal{A}(\alpha,\beta)$$

é completamente contínuo. Ou seja, que $G$ é contínuo e que para todo conjunto $K \subseteq \mathcal{A}(\alpha,\beta)$, temos que $G(K)$ é relativamente compacto.

Temos pelo Lema 2.8 que $T$ é contínuo e portanto que $T(\sigma,\phi,f^0,\cdot)$ é contínuo.

Desta forma se tomarmos $A \subset \mathcal{A}(\alpha,\beta)$ limitado resta provar que $T(\sigma,\phi,f^0(A))$ tem fecho compacto. Para tanto devemos mostrar que $G(A)$ é limitado e equicontínuo, e então utilizar o Teorema 1.16.

**i)** $G(A)$ é limitado. Seja $y \in A$, definimos

$$\begin{aligned} G : \mathcal{A}(\alpha,\beta) &\longrightarrow \mathcal{A}(\alpha,\beta) \\ y &\longmapsto G(y) \end{aligned}$$

tal que

$$G(y) : [-r,\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$G(y)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-r,0], \\ \int_0^t f^0(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)\ ds, & t \in I_\alpha, \end{cases}$$

Pelo Lema 2.7 temos que $(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s) \in V$ para $s \in [0,\alpha]$ e $y \in \mathcal{A}(\alpha,\beta)$, e temos ainda por (2.7) que

$$\begin{aligned} |G(y)(t)| &= \left|\int_0^t f^0(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\right| \leqslant \int_0^t \left|f^0(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)\right| ds \\ &\leqslant \int_0^\alpha \left|f^0(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)\right| ds < \int_0^\alpha M\ ds = \alpha M, \end{aligned}$$

onde $M$ não depende de $y$ e portanto $G(A)$ é limitada.

**ii)** $G(A)$ é equicontínuo. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ tal que se $|t-q| < \delta$ então

$$\begin{aligned} |G(y)(t) - G(y)(q)| &= \left|\int_0^t f^0(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds - \int_0^q f^0(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\right| \\ &\leqslant \int_0^{|t-q|} \left|f^0(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)\right| ds < \int_0^{|t-q|} M\ ds \\ &= M|t-q| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $y \in A$, logo $G(A)$ é equicontínuo.

Assim por (i) e (ii) e aplicando o Teorema de Arzelà-Ascoli, temos que $\overline{G(A)}$ é compacto.

Logo,

$$G = T(\sigma, \phi, f^0, \cdot) : \mathcal{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathcal{A}(\alpha, \beta),$$

é completamente contínuo.

Assim pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder existe $y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$ tal que

$$T(\sigma, \phi, f^0, y)(t) = y(t), \qquad \forall\ t \in [-r, \alpha].$$

E como pelo Lema 2.6 encontrar $y$ é equivalente a resolver

$$\begin{cases} \dot{x} = f^0(t, x_t) \\ x_\sigma = \phi \end{cases} \tag{2.8}$$

Temos que existe solução para (2.8), isto é, existe solução da $EDFR(f^0)$. □

**Teorema 2.10** (Dependência Contínua)**.** *Suponha $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ aberto, $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, e $x^0$ uma solução da $EDFR(f^0)$ passando por $(\sigma^0, \phi^0)$ que existe e é única sobre $[\sigma^0 - r, b]$. Seja $W^0 \subseteq \Omega$ um conjunto compacto definido por*

$$W^0 = \{(t, x_t^0) : t \in [\sigma^0, b]\}$$

*e seja $V^0$ uma vizinhança de $W^0$ onde $f^0$ é limitada. Se $(\sigma^k, \phi^k, f^k)$, $k = 1, 2, ...$ satisfaz $\sigma^k \to \sigma^0$, $\phi^k \to \phi^0$, e $|f^k - f^0|_{V^0} \to 0$ quando $k \to \infty$, então existe um $k^0$ tal que a $EDFR(f^k)$ para $k \geqslant k^0$ é tal que cada solução $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ passando por $(\sigma^k, \phi^k)$ existe em $[\sigma^k - r, b]$ e $x^k \to x^0$ uniformemente em $[\sigma^0 - r, b]$. Uma vez que toda $x^k$ pode não ser definida em $[\sigma^0 - r, b]$, por $x^k \to x^0$ uniformemente em $[\sigma^0 - r, b]$, queremos dizer que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $k_1(\varepsilon)$ tal que $x^k(t)$, $k \geqslant k_1(\varepsilon)$, é definido em $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$, e $x^k \to x^0$ uniformemente em $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$.*

*Demonstração.* Referência [4]. □

**Teorema 2.11** (Unicidade)**.** *Suponha $\Omega$ um conjunto aberto em $\mathbb{R} \times C$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua, e $f(t, \phi)$ lipschitziana em $\phi$ em cada conjunto compacto em $\Omega$. Se $(\sigma, \phi) \in \Omega$, então existe uma solução única da equação (2.1) passando por $(\sigma, \phi)$.*

*Demonstração.* Definindo $I_\alpha = [0, \alpha]$ e $B_\beta = \{\psi \in C : \|\psi\| < \beta\}$. Suponha que existam duas soluções $x$ e $y$ da Equação (2.1) sobre $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ com $x_\sigma = \phi = y_\sigma$.

Logo,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ \dot{y}(t) = f(t, y_t) \end{cases}$$

então

$$\dot{x}(t) - \dot{y}(t) = f(t, x_t) - f(t, y_t),$$

integrando em relação a $t$

$$\begin{aligned}
\int_\sigma^t [\dot{x}(s) - \dot{y}(s)]ds &= \int_\sigma^t [f(s, x_s) - f(s, y_s)]ds \\
x(t) - x(\sigma) - y(t) + y(\sigma) &= \int_\sigma^t [f(s, x_s) - f(s, y_s)]ds \\
x(t) - y(t) &= \int_\sigma^t [f(s, x_s) - f(s, y_s)]ds, \quad t \geqslant \sigma
\end{aligned}$$

e

$$x_\sigma - y_\sigma = 0.$$

Seja $k$ a constante de Lipschitz de $f(t, \phi)$ em cada compacto que contém as trajetórias $\{t, x_t\},\ \{t, y_t\},\ t \in I_\alpha$.

Escolhendo $\bar{\alpha}$ tal que $k\bar{\alpha} < 1$, temos que para $t \in I_{\bar{\alpha}} = [0, \bar{\alpha}]$,

$$\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| &= \left| \int_\sigma^t [f(s, x_s) - f(s, y_s)]ds \right| \leqslant \int_\sigma^t |f(s, x_s) - f(s, y_s)|ds \\
&\leqslant \int_\sigma^t k|x_s - y_s|ds \leqslant k \int_\sigma^t \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |x_s - y_s|ds = k|t - \sigma| \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |x_s - y_s|.
\end{aligned}$$

Como $t,\ \sigma \in I_{\bar{\alpha}}$ temos que $|t - \sigma| \leqslant \bar{\alpha}$, assim

$$|x(t) - y(t)| \leqslant k\bar{\alpha} \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |x_s - y_s| < \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |x_s - y_s| \leqslant \sup_{t \in [\sigma - r, \sigma + \bar{\alpha}]} |x(t) - y(t)|.$$

Assim,

$$x(t) = y(t), \quad \forall\ t \in [\sigma - r, \sigma + \bar{\alpha}].$$

Provemos agora a unicidade em $x, y : [\sigma - r, \sigma + \alpha]$. Se $\bar{\alpha} = \alpha$ temos $x = y$ em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.

Se $\bar{\alpha} < \alpha$, tomamos $\sigma' = \sigma + \bar{\alpha}$ e $\phi' = x_{\sigma'} = y_{\sigma'}$. Então supomos que existam duas soluções.

Seja $k'$ a constante de Lipschitz de $f(t, \phi')$ em cada compacto que contenha as trajetórias $\{t, x_t\},\ \{t, y_t\},\ t \in I_\alpha$.

Escolhemos $\bar{\bar{\alpha}}$ tal que $k'\bar{\bar{\alpha}} < 1$, então aplicando raciocínio análogo ao anterior teremos

$$x(t) = y(t) \text{ para } t \in [\sigma' - r, \sigma' + \bar{\bar{\alpha}}] = [\sigma + \bar{\alpha} - r, \sigma + \bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}}].$$

Da mesma forma se $\bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ temos $x = y$ em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$. Se $\bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}} < \alpha$, tomamos $\sigma'' = \sigma + \bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}}$ e $\phi'' = x_{\sigma''} = y_{\sigma''}$. E assim sucessivamente.

Como $\alpha$ é finito temos um número finito de passos. E desta forma concluímos a demonstração. □

## 2.3 Método de resolução de EDFR por passos

Mostraremos a seguir a solução para o exemplo 2.2 e o respectivo gráfico. Para tanto, introduziremos o método de resolução conhecido como método de resolução por passos. Nesta introdução às EDFR's faremos apenas uma apresentação simplificada deste método de resolução. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência [5].

Para retardos discretos em um intervalo finito, o problema de valor inicial para EDFR pode geralmente ser resolvido usando-se o método por passos. Consideremos a seguinte equação escalar

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad t \geqslant \sigma, \quad r = constante > 0. \tag{2.9}$$

Seja $f : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e localmente lipschitziana.

Dada uma função inicial $\phi$ para (2.9) em $[\sigma - r, \sigma]$, assumimos que esta é contínua.

Se $t \in [\sigma, \sigma + r]$ então $t - r \in [\sigma - r, \sigma]$. Consequentemente a EDRF (2.9) se torna a EDO

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \phi(t-r)), \quad \sigma \leqslant t \leqslant \sigma + r.$$

Resolvendo esta equação com a condição inicial $x(\sigma) = \phi(\sigma)$, obtemos a solução requerida em $[\sigma, \sigma + r]$. Em particular o valor $x(\sigma + r)$ está definido.

Se agora, $\sigma + r \leqslant t \leqslant \sigma + 2r$, então $t - r \in [\sigma, \sigma + r]$, e temos que $x(t-r)$ é conhecida a partir do passo anterior. Consequentemente para $\sigma + r \leqslant t \leqslant \sigma + 2r$ (2.9) torna-se novamente uma EDO, que pode ser resolvida com o valor inicial $x(\sigma + r)$, definindo a solução $x$ em $[\sigma + r, \sigma + 2r]$.

Agora consideremos o intervalo $[\sigma + 2r, \sigma + 3r]$ e assim sucessivamente. Obtendo desta forma a solução para valores arbitrariamente grandes de $t$.

No entanto antes de prosseguirmos com o exemplo, cabe uma observação importante sobre este método e o próximo método a ser descrito. Se a EDO obtida for não-linear então nem sempre teremos a solução desta definida em todo o $\mathbb{R}$. Logo para que exista solução, a solução máxima da EDO deve estar definida em cada passo em um intervalo maior ou igual ao do retardo $r$.

**Exemplo 2.12.** Retomemos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1) \\ x_0 = -t, \qquad\qquad -1 \leqslant t \leqslant 0. \end{cases}$$

Aplicando o método por passos temos que:

Se $t \in [0, 1]$ então $t - 1 \in [-1, 0]$ e assim:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\phi(t-1) \\ x(0) = \phi(0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = t-1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este PVI obtemos $x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2t)$.

Se $t \in [1,2]$ então $t-1 \in [0,1]$ e assim:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1) \\ x(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{2}(t^2 - 4t + 3) \\ x(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolvendo este PVI obtemos $x(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 6t^2 - 9t + 1)$. E assim sucessivamente usamos a solução obtida para cada intervalo no intervalo seguinte.

É interessante ressaltar que como em cada passo a equação (2.9) é convertida em uma EDO, podemos aplicar métodos para solução númerica como Runge -Kutta por exemplo para obtermos a solução das EDO's. Mas a cada passo será necessário também fazer a interpolação dos pontos para obtermos a equação a ser usada no passo seguinte.

Uma abordagem para evitarmos a necessidade de interpolação na solução numérica de (2.9) é conhecida como método de passos de Bellman, o qual passaremos a descrever a seguir.

Consideremos como no método anterior a equação (2.9) com retardo $r$ constante e uma função inicial $\phi$ para (2.9) em $[\sigma - r, \sigma]$, assumimos aqui também que $\phi$ é contínua.

No primeiro intervalo $[\sigma, \sigma + r]$ a EDFR (2.9) se torna a EDO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \phi(t-r)) \\ x(\sigma) = \phi(\sigma). \end{cases}$$

No segundo intervalo $[\sigma + r, \sigma + 2r]$ podemos definir $x_1(t) = x(t-r)$ e $x_2(t) = x(t)$, e então podemos escrever a EDFR (2.9) como um sistema bidimensional de EDO's

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(t-r, x_1(t), \phi(t-2r)) \\ \dot{x}_2(t) = f(t, x_2(t), x_1(t)) \\ x_1(\sigma + r) = \phi(\sigma) \\ x_2(\sigma + r) = x(\sigma + r). \end{cases}$$

Em geral, no intervalo $[\sigma + (k-1)r, \sigma + kr]$ podemos escrever a EDFR (2.9) como o sistema k-dimensional de EDO's

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(t-(k-i)r, x_i(t), x_{i-1}(t)), \qquad i = 1, 2, \ldots, k \\ x_i(\sigma + (k-1)r) = x(\sigma + (i-1)r), \qquad i = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

onde temos $x_0(t) = \phi(t - kr)$ e $x_i(t) = x(t-(k-i)r)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

**Exemplo 2.13.** Aplicando o método de passos de Bellman ao exemplo 2.12 temos:

Para $t \in [0,1]$ então $t-1 \in [-1,0]$ e assim:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t-1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este PVI obtemos $x(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 - 2t\right)$.

Para $t \in [1,2]$ então $t-1 \in [0,1]$ e assim:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = t-2 \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{2}(t^2 - 4t + 3) \\ x_1(1) = 0 \\ x_2(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $x_2(t) = \frac{1}{6}\left(-t^3 + 6t^2 - 9t + 1\right)$. E desta forma a cada passo vamos construindo os sistemas de EDO's dos quais obtemos a solução para o respectivo intervalo do nosso PVI com EDFR.

Independente do método por passos escolhido obteremos para $t \in [-1,5]$ a solução:

$$x(t) = \begin{cases} -t, & -1 \leq t \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(t^2 - 2t\right), & 0 < t \leq 1 \\ \dfrac{1}{6}\left(-t^3 + 6t^2 - 9t + 1\right), & 1 < t \leq 2 \\ \dfrac{1}{24}\left(t^4 - 12t^3 + 48t^2 - 68t + 20\right), & 2 < t \leq 3 \\ \dfrac{1}{120}\left(-t^5 + 20t^4 - 150t^3 + 510t^2 - 745t + 343\right), & 3 < t \leq 4 \\ \dfrac{1}{720}\left(t^6 - 30t^5 + 360t^4 - 2180t^3 + 6900t^2 - 10614t + 6154\right), & 4 < t \leq 5 \end{cases}$$

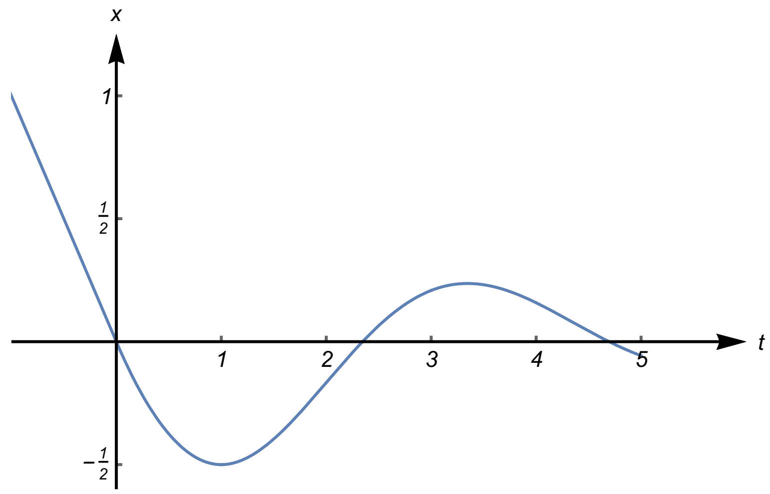



Figura 2.4: Gráfico de $x$ para $t \in [-1, 5]$.

Existem duas características inerentes a solução das EDFR's que gostaríamos de comentar. A primeira diz respeito ao fato de que, diferentemente do que ocorre para EDO onde a solução $x$ é continuamente diferenciável, em geral para a solução $x$ da EDFR a derivada à direita $\dot{x}(\sigma)^+$, não é igual a derivada à esquerda $\dot{x}(\sigma)^- = \phi(\sigma)^-$ e consequentemente a solução $x$ não é conectada suavemente a função inicial $\phi$ no ponto $\sigma$, onde somente a continuidade $C^0$ pode ser assegurada. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.14.** Vamos alterar a condição inicial do problema do exemplo 2.12 para o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1) \\ \quad x_0 = 1, \qquad\qquad -1 \leqslant t \leqslant 0. \end{cases}$$

Aplicando o método de passos, obtemos a seguinte solução para $t \in [-1, 3]$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t & 0 < t \leq 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(t^2 - 4t + 3\right) & 1 < t \leq 2 \\ \dfrac{1}{6}\left(-t^3 + 9t^2 - 24t + 17\right) & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

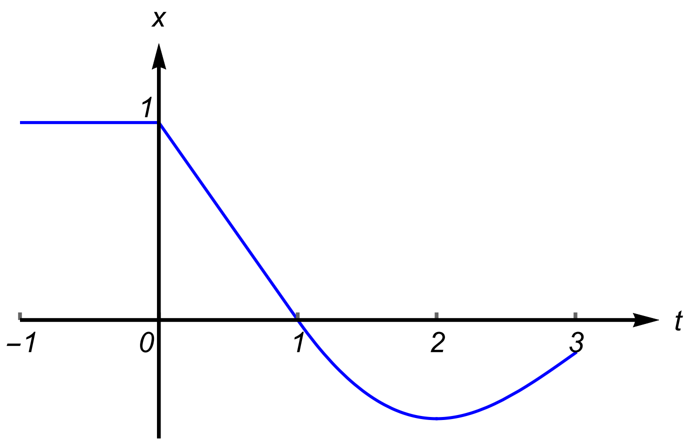



Figura 2.5: Gráfico da solução de $\dot{x}(t) = -x(t-1)$ para $t \in [-1, 3]$.

Podemos observar que $\dot{x}(0)^- = 0$ e $\dot{x}(0)^+ = -1$, ou seja, a função $x$ não possui derivada em $t = 0$.

A segunda característica diz respeito a intersecção dos gráficos das soluções de uma EDFR e a unicidade da solução. Analisemos o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.15.** Consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ x_0 = \cos(t), \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Pelos teoremas anteriores sabemos que este problema tem solução e que ela é única. Alterando a condição inicial da equação (2.10) para obtermos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ x_0 = -\operatorname{sen}(t), \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

temos da mesma forma que este problema tem solução e que ela é única. Agora plotando as soluções de (2.10) e (2.11) num mesmo gráfico obtemos a figura 2.6.

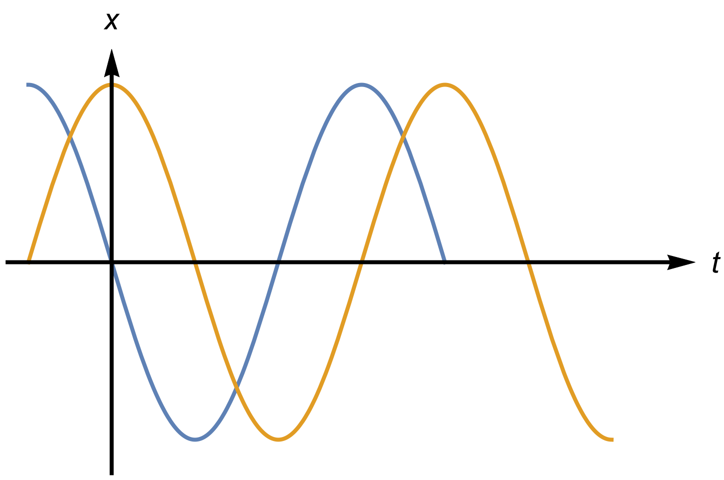



Figura 2.6: Soluções de $\dot{x}(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Fazendo $t \to \infty$ teremos infinitas intersecções entre a solução de (2.10) e a solução de (2.11). Se estivéssemos tratando de soluções para uma EDO, onde variássemos a condição inicial como fizemos aqui para a EDFR, o fato de termos intersecções entre as soluções implicaria na ausência de unicidade para a solução do PVI. Pois poderíamos tomar cada ponto de intersecção como condição inicial do problema e desta forma teríamos duas soluções possíveis, o que de fato pelo Teorema de Existência e Unicidade de Picard não ocorre.

Mas em se tratando de EDFR as intersecções, em pontos como ocorrem na figura 2.6, não implicam na perda da unicidade da solução, esta somente ocorreria se a intersecção ou sobreposição ocorresse em um intervalo que tivesse a medida igual a do retardo, o que no exemplo acima significaria uma sobreposição de soluções em um intervalo de medida igual a $\frac{\pi}{2}$. Portanto de forma diferente do que ocorre para EDO's para EDFR's podemos ter intersecções entre as soluções sem que isso represente a perda da unicidade da solução.

# 3 Oscilações

Começaremos por definir e apresentar alguns resultados que usaremos em nosso estudo introdutório sobre oscilações em Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento EDFR's. Nosso intuito como nos capítulos anteriores será fornecer a maioria dos resultados necessários ao estudo que se segue, a fim de que o leitor não precise neste momento recorrer a consulta de várias referências para leitura de nosso texto. E como trata-se de uma introdução não temos a intenção de trazer um tratamento amplo sobre o tema, mas sim fornecer uma visão inicial para aqueles que estão tendo um primeiro contato com as EDFR's. E é claro, caso queiram, possam aprofundar seus estudos através das referências dadas. A principal referência para este capítulo é a [3].

## 3.1 Conceitos preliminares

Começaremos definindo solução oscilatória e solução positiva no futuro ou negativa no futuro. Seja $x$ uma função contínua definida em um intervalo infinito $[a, \infty)$.

**Definição 3.1.** *Dizemos que a função $x$ oscila ou é oscilatória se $x$ tem zeros arbitrariamente grandes. Isto é, para todo $b > a$ existe um ponto $c > b$ tal que $x(c) = 0$. Em caso contrário $x$ é chamada de não oscilatória. Isto é, $x$ é não oscilatória se existe um $b > a$ tal que $x(t) \neq 0$ para $t > b$.*

Como $x$ é contínua, se for não oscilatória, deve ser positiva no futuro ou negativa no futuro.

**Definição 3.2.** *Dizemos que a função $x$ é positiva no futuro se existe um $T \in \mathbb{R}$ tal que $x(t)$ é positiva para todo $t \geqslant T$ e dizemos que a função $x$ é negativa no futuro se existe um $T \in \mathbb{R}$ tal que $x(t)$ é negativa para todo $t \geqslant T$.*

O lema a seguir estabelece uma importante estimativa, aplicável à desigualdade envolvendo integrais, e será utilizado na demonstração do Teorema 3.7.

**Lema 3.3** (Desigualdade de Gronwall)**.** *Seja $I = [t_0, T)$ um intervalo de números reais e suponha que*

$$u(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds \quad \textit{para } t \in I, \tag{3.1}$$

*onde*

$$c \in [0, \infty) \ \textit{e} \ u, v \in C\left(I, \mathbb{R}^{+}\right).$$

*Então*

$$u(t) \leqslant c \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right) \ \textit{para } t \in I. \tag{3.2}$$

*Demonstração.* Seja

$$U(t) := \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds.$$

Então

$$\begin{aligned}
\dot{U}(t) = v(t)u(t) &\leqslant v(t)\left[c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds\right] \\
\dot{U}(t) &\leqslant v(t)c + v(t)U(t) \\
\dot{U}(t) - v(t)U(t) &\leqslant v(t)c.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)$, temos

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)\dot{U}(t) - \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)v(t)U(t) &\leqslant \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)v(t)c \\
\frac{d}{dt}\left[\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)U(t)\right] &\leqslant \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)v(t)c.
\end{aligned}$$

Integrando de $t_0$ até $t$, obtemos

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)U(t) &\leqslant c\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} v(s)ds\right)v(\tau)d\tau \\
&\leqslant c\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left[-\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} v(s)ds\right)\right]d\tau \\
&\leqslant c\left[1 - \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)\right] \\
U(t) &\leqslant c\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right) - c.
\end{aligned}$$

Logo,

$$u(t) \leqslant c\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right) \ \text{para } t \in I.$$

□

Como aplicaremos a Transformada de Laplace para obter as condições necessárias e suficientes para a oscilação das equações diferenciais que vamos estudar, apresentaremos alguns fatos sobre as transformadas de Laplace. Para uma abordagem mais ampla sobre o assunto o leitor pode consultar a referência [7].

**Definição 3.4** (Transformada de Laplace). *Seja $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função real. A Transformada de Laplace de $x(t)$ é denotada por $L[x(t)]$ ou $X(s)$ e é dada pela integral imprópria*

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt. \tag{3.3}$$

$X(s)$ é definida para todos os valores da variável complexa $s$ para a qual a integral imprópria em (3.3) converge no sentido que

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-st} x(t) dt,$$

existe e é finito.

Para uma dada função $x(t)$, a integral em (3.3) comporta-se de acordo com uma das três maneiras seguintes:

(i) Converge para todos os números complexos $s$.

(ii) Diverge para todos os números complexos $s$.

(iii) Existe um número real $\sigma_0$ tal que a integral em (3.3) converge para todo $s$ com $Re\, s > \sigma_0$ e diverge para todo $s$ com $Re\, s < \sigma_0$.

Quando $(iii)$ ocorre, o número $\sigma_0$ é chamado de abscissa de convergência de $X(s)$. Quando $(i)$ ocorre, dizemos que a abscissa de convergência de $X(s)$ é $\sigma_0 = -\infty$. Finalmente quando $(ii)$ ocorre, dizemos que a abscissa de convergência de $X(s)$ é $\sigma_0 = +\infty$. Por exemplo, a abscissa de convergência das transformadas de Laplace das funções $e^{-t^2}, e^{3t}, e^{t^2}$ são respectivamente $-\infty, 3$ e $+\infty$.

O seguinte lema estabelece condições suficientes para a existência da Transformada de Laplace.

**Lema 3.5.** *Seja $x \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ e suponha que existam constantes $M$ e $\alpha$ tais que*

$$|x(t)| \leqslant M e^{\alpha t} \quad \textit{para} \quad t \geqslant 0. \tag{3.4}$$

*Então a abscissa de convergência $\sigma_0$ da Transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ satisfaz*

$$\sigma_0 \leqslant \alpha.$$

*Além disso, $X(s)$ existe e é uma função analítica*[1] *de $s$ para $Re\, s > \sigma_0$.*

*Demonstração.* Podemos escrever

$$\int_0^\infty e^{-st}x(t)\ dt = \int_0^N e^{-st}x(t)\ dt + \int_N^\infty e^{-st}x(t)\ dt.$$

Como $|x(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$, segue que

$$\int_N^\infty e^{-st}x(t)\ dt \leqslant \int_N^\infty |e^{-st}x(t)|\ dt \leqslant \int_N^\infty e^{-st}e^{\alpha t}M\ dt \leqslant M\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\ dt$$

e

$$\lim_{R\to\infty} M\int_0^R e^{-(s-\alpha)t}\ dt = \frac{M}{s-\alpha},\ \text{para } s > \alpha.$$

Logo $\int_0^\infty e^{-st}x(t)\ dt$ converge para todo $s > \alpha$.

□

**Teorema 3.6.** *Seja $x \in C([0,\infty),\mathbb{R}^+)$ e assuma que a abscissa de convergência $\sigma_0$ da Transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ é finita. Então $X(s)$ tem uma singularidade no ponto $s = \sigma_0$. De forma mais precisa, existe uma sequência*

$$s_n = \alpha_n + i\beta_n \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

*tal que*

$$\alpha_n \geqslant \alpha_0 \text{ para } n \geqslant 1,\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \sigma_0,\ \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty}|X(s_n)| = \infty.$$

A demonstração do Teorema 3.6 pode ser encontrada na referência [7].

**Teorema 3.7.** *Considere o sistema linear autônomo com retardamento*

$$\dot{x}(t) + Q_0x(t) + \sum_{i=1}^{n} Q_ix(t-\tau_i) = 0, \tag{3.5}$$

*assuma que os coeficientes $Q_i$ são matrizes reais $m \times m$ e os retardos $\tau_i$ são números positivos. Seja $x(t)$ uma solução da equação (3.5) em $[0,\infty)$. Então existem constantes positivas $M$ e $\alpha$ tais que*

$$\|x(t)\| \leqslant Me^{\alpha t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0. \tag{3.6}$$

[1] Diz-se que uma função $f$ é analítica numa região $R \subset \mathbb{C}$ se ela é derivável em cada ponto de $R$; $f$ é analítica num ponto $z_0$ se $f$ é analítica numa região contendo $z_0$, por exemplo, numa vizinhança $V_\delta(z_0)$.

*Demonstração.* Seja $r = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$. Integrando a equação (3.5) de 0 até $t$ obtemos

$$\int_0^t \dot{x}(s)ds + \int_0^t \left[ Q_0 x(s) + \sum_{i=1}^{n} Q_i x(s - \tau_i) \right] ds = 0, \text{ ou seja,}$$
$$x(t) = x(0) - \int_0^t \left[ Q_0 x(s) + \sum_{i=1}^{n} Q_i x(s - \tau_i) \right] ds.$$

Fazendo

$$u(t) = \max_{-r \leqslant s \leqslant t} \|x(s)\| \quad \text{para } t \geqslant -r,$$
$$B = \sum_{i=0}^{n} \|Q_i\|, \quad c = \|x(0)\|.$$

Então $u(t)$ é uma função contínua não decrescente e

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant \|x(0)\| + \int_0^t \left[ \|Q_0\| \|x(s)\| + \sum_{i=1}^{n} \|Q_i\| \|x(s - \tau_i)\| \right] ds \\ &\leqslant c + \int_0^t \left[ \|Q_0\| u(s) + \sum_{i=1}^{n} \|Q_i\| u(s) \right] ds \\ &= c + B \int_0^t u(s)\, ds, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$u(t) \leqslant c + B \int_0^t u(s)\, ds, \quad t \geqslant 0.$$

E pelo Lema 3.3 temos que

$$u(t) \leqslant ce^{Bt}.$$

O que demonstra que as soluções das equações diferenciais lineares autônomas com retardamento são exponencialmente limitadas. □

Logo, como toda solução $x(t)$ de uma equação diferencial linear autônoma com retardamento como (3.5) satisfaz (3.6), pelo Lema 3.5 a Transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ existe para $Re\, s > \alpha$.

**Lema 3.8.**

*(i)* *Seja* $x \in C([-\tau, \infty), \mathbb{R})$ *e seja* $\sigma_0 < \infty$ *a abscissa de convergência da Transformada de Laplace* $X(s)$ *de* $x(t)$*. Então a Transformada de Laplace de* $x(t-\tau)$ *tem a mesma abscissa de convergência e*

$$L[x(t-\tau)] = \int_0^\infty e^{-st}x(t-\tau)\ dt = e^{-s\tau}X(s) + e^{-s\tau}\int_{-\tau}^0 e^{-st}x(t)\ dt,$$

*para todo* $s$ *com* $Re\, s > \sigma_0$*.*

*(ii)* *Seja* $x \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$ *e seja* $\sigma_0 < \infty$ *a abscissa de convergência da Transformada de Laplace* $X(s)$ *de* $x(t)$*. Então a Transformada de Laplace de* $\dot{x}(t)$ *tem a mesma abscissa de convergência e*

$$L[\dot{x}(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\dot{x}(t)\ dt = sX(s) - x(0),$$

*para todo* $s$ *com* $Re\, s > \sigma_0$*.*

*Demonstração.*

(i) Fazendo a substituição $u = t - \tau$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}x(t-\tau)\ dt &= \int_{-\tau}^\infty e^{-s(u+\tau)}x(u)\ du\\ &= \int_{-\tau}^0 e^{-s(u+\tau)}x(u)\ du + \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)}x(u)\ du\\ &= e^{-s\tau}\int_{-\tau}^0 e^{-su}x(u)\ du + e^{-s\tau}\int_0^\infty e^{-su}x(u)\ du.\end{aligned}$$

Fazendo $u = t$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}x(t-\tau)\ dt &= e^{-s\tau}\int_{-\tau}^0 e^{-st}x(t)\ dt + e^{-s\tau}\int_0^\infty e^{-st}x(t)\ dt\\ &= e^{-s\tau}\int_{-\tau}^0 e^{-st}x(t)\ dt + e^{-s\tau}X(s).\end{aligned}$$

(ii) Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\dot{x}(t)\ dt &= \lim_{R\to\infty}\left[e^{-st}x(t)\Big|_0^R\right] + s\int_0^\infty e^{-st}x(t)\ dt\\ &= -x(0) + sX(s).\end{aligned}$$

$\square$

**Lema 3.9.** *Sejam $p$ e $\tau$ constantes positivas. Seja $x(t)$ uma solução positiva no futuro da desigualdade diferencial com retardamento*

$$\dot{x}(t) + px(t-\tau) \leqslant 0. \tag{3.7}$$

*e seja $y(t)$ uma solução positiva no futuro da desigualdade diferencial com avanço*

$$\dot{y}(t) - py(t+\tau) \geqslant 0 \tag{3.8}$$

*Então para $t$ suficientemente grande,*

$$x(t-\tau) \leqslant Bx(t), \tag{3.9}$$

*e*

$$y(t+\tau) \leqslant By(t) \tag{3.10}$$

*onde*

$$B = \frac{4}{(p\tau)^2}.$$

*Demonstração.* Provaremos (3.9). A prova de (3.10) é similar e será omitida. Assuma que $t_0$ é tal que $x(t) > 0$ para $t \geqslant t_0 - \tau$ e $x(t)$ satisfaz (3.7) para $t \geqslant t_0$. Dado $s \geqslant t_0 + \tau$ integramos os dois lados de (3.7) de $s$ até $s + \tau/2$ e usando o fato de que $x$ é decrescente para $t \geqslant t_0$ achamos

$$x(s+\tau/2) - x(s) + (p\tau/2)x(s-\tau/2) \leqslant 0$$

ou

$$(p\tau/2)x(s-\tau/2) \leqslant x(s) \quad \text{para} \quad s \geqslant t_0 + \tau. \tag{3.11}$$

Para qualquer $t \geqslant t_0 + 3\tau/2$ aplicamos (3.11) para $s = t - \tau/2$ e para $s = t$, e achamos

$$(p\tau/2)x(t-\tau) \leqslant x(t-\tau/2) \quad \text{e} \quad (p\tau/2)x(t-\tau/2) \leqslant x(t).$$

A afirmação (3.9) segue da combinação destas desigualdades. □

**Lema 3.10.** *Seja $v(t)$ uma função positiva e continuamente diferenciável em algum intervalo $[t_0, \infty)$. Assuma que existem números positivos $A$ e $\alpha$ tais que para $t$ suficientemente grande,*

$$\dot{v}(t) \leqslant 0 \quad e \quad v(t-\alpha) < Av(t) \tag{3.12}$$

*ou*

$$\dot{v}(t) \geqslant 0 \quad e \quad v(t+\alpha) < Av(t). \tag{3.13}$$

*Seja*

$$\Lambda = \{\lambda \geqslant 0 : \dot{v}(t) + \lambda v(t) \leqslant 0 \text{ para } t \text{ suficientemente grande}\} \text{ se (3.12) ocorre,}$$

*ou*

$$\Lambda = \{\lambda \geqslant 0 : -\dot{v}(t) + \lambda v(t) \leqslant 0 \text{ *para* } t \text{ *suficientemente grande*}\} \text{ *se* } (3.13) \text{ *ocorre.*}$$

*Então* $A > 1$ *e*

$$\lambda_0 = \frac{\ln A}{\alpha} \notin \Lambda.$$

*Demonstração.* Vamos provar o lema quando (3.12) ocorre. O caso quando (3.13) ocorre é similar e será omitido. Assuma que $\lambda_0 \in \Lambda$. Então

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda_0 t} v(t)\right] = e^{\lambda_0 t}\left[\dot{v}(t) + \lambda_0 v(t)\right] \leqslant 0, \text{ para } t \text{ suficientemente grande,}$$

o que implica que a função $e^{\lambda_0 t} v(t)$ é decrescente no futuro. Consequentemente para $t$ suficientemente grande,

$$e^{\lambda_0(t-\alpha)} v(t-\alpha) \geqslant e^{\lambda_0 t} v(t),$$

assim

$$v(t-\alpha) \geqslant e^{\lambda_0 \alpha} v(t) = e^{\ln A} v(t) = A v(t),$$

logo (3.12) não está satisfeita e a prova do lema está completa. □

## 3.2 Oscilações de EDFR's lineares escalares

Vamos estabelecer condições necessárias e suficientes para que ocorram oscilações nas soluções da equação diferencial linear autônoma com retardamento

$$\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i) = 0, \tag{3.14}$$

onde os coeficientes $p_i$ são números reais e os retardos $\tau_i$ são números reais não negativos. Supondo que $x(t) = e^{\lambda t}$ é uma solução de (3.14), obtemos a equação característica associada

$$\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i} = 0. \tag{3.15}$$

Temos o seguinte resultado fundamental para a oscilação de todas as soluções da equação (3.14).

**Teorema 3.11.** *Assuma que*

$$p_i \in \mathbb{R} \quad e \quad \tau_i \geqslant 0 \qquad para \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.16}$$

*Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) Toda solução da equação* (3.14) *oscila.*

*(ii) A equação característica* (3.15) *não tem raízes reais.*

*Demonstração.* A prova que $(i) \Rightarrow (ii)$ é elementar. Isto porque se a equação característica (3.15) tiver uma raiz real $\lambda_0$ então $e^{\lambda_0 t}$ será uma solução não oscilatória da equação (3.14).

A prova que $(ii) \Rightarrow (i)$ faz uso da Transformada de Laplace e do Teorema 3.6.

Assuma por contradição que $(ii)$ ocorra e que a equação (3.14) tenha uma solução positiva no futuro $x(t)$. Como a equação (3.14) é autônoma assumimos que

$$x(t) > 0 \quad \text{para} \quad t \geqslant -\tau \quad \text{onde} \quad \tau = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \tau_i.$$

Claramente $\tau > 0$, caso contrário a equação (3.15) teria uma raiz real. Pelo Teorema 3.7 sabemos que existem constantes positivas $M$ e $\mu$ tais que

$$|x(t)| \leqslant M e^{\mu t}, \quad t \geqslant -\tau.$$

Então a Transformada de Laplace

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt, \tag{3.17}$$

existe para $Re\, s > \mu$. Seja $\sigma_0$ a abscissa de convergência de $X(s)$, isto é, $\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : X(\sigma) \text{ existe}\}$. Então para qualquer $i = 1, 2, \ldots, n$, a Transformada de Laplace de $x(t - \tau_i)$ existe e tem abscissa de convergência $\sigma_0$. Além disso pelo Lema 3.8

$$\int_0^\infty e^{-st} \dot{x}(t)\; dt = sX(s) - x(0), \quad Re\, s > \sigma_0$$

e para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_0^\infty e^{-st} x(t - \tau_i)\; dt = e^{-s\tau_i} X(s) + e^{-s\tau_i} \int_{-\tau_i}^0 e^{-st} x(t)\; dt, \quad Re\; s > \sigma_0.$$

Consequentemente tomando a Transformada de Laplace da equação (3.14) obtemos

$$F(s)X(s) = \Phi(s), \quad Re\, s > \sigma_0 \tag{3.18}$$

onde

$$F(s) = s + \sum_{i=1}^n p_i e^{-s\tau_i} \tag{3.19}$$

e

$$\Phi(s) = x(0) - \sum_{i=1}^n p_i e^{-s\tau_i} \int_{-\tau_i}^0 e^{-st} x(t)\; dt. \tag{3.20}$$

Claramente, $F(s)$ e $\Phi(s)$ são funções inteiras[2]. Além disso por hipótese, $F(s) \neq 0$ para todo real $s$. Segue de (3.18) que

$$X(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)}, \quad Re\, s > \sigma_0. \tag{3.21}$$

[2]Chama-se função inteira a toda função que é analítica em todo o plano complexo.

Afirmamos que $\sigma_0 = -\infty$. Pois, supondo que não, então $\sigma_0 > -\infty$ e pelo Teorema 3.6 o ponto $s = \sigma_0$ é uma singularidade do quociente $\Phi(s)/F(s)$. Mas este quociente não tem singularidades no eixo real (o numerador e o denominador são funções inteiras e por hipótese o denominador não tem zero real). Então $\sigma_0 = -\infty$ e (3.21) fica

$$X(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)}, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

Pode-se ver agora que a medida que $s \to -\infty$, por valores reais, (3.22) leva a uma contradição, pois $X(s)$ e $F(s)$ são sempre positivas enquanto $\Phi(s)$ torna-se negativa no futuro. A positividade de $X(s)$ segue de (3.17) e do fato que $x(t) > 0$ para todo $t \geqslant 0$. A positividade de $F(s)$ segue de (3.19) e do fato que $F(\infty) = \infty$ e que a equação característica não tem raízes reais. Sem perda de generalidade podemos assumir que os retardos na equação (3.14) são distintos e que os coeficientes $p_i$ são diferentes de zero. Seja $\tau_{i_0}$ um retardo máximo na equação (3.14). Então o coeficiente correspondente $p_{i_0} > 0$, pois de outra forma $\lim_{s\to-\infty} F(s) = -\infty$ e o termo dominante em (3.20), quando $s \to -\infty$, é $p_{i_0}e^{-s\tau_{i_0}}$. Claramente $\lim_{s\to-\infty} \Phi(s) = -\infty$. Assim a prova está completa. $\square$

A prova do Teorema 3.11 faz uso do fato de que as soluções da equação diferencial com retardamento são limitadas exponencialmente. Mas quando $\tau_i \in \mathbb{R}$ não sabemos se suas soluções são limitadas exponencialmente. Embora não possamos provar este problema em geral, podemos estabelece-lo no seguinte caso especial.

**Teorema 3.12.** *Considere a equação diferencial*

$$\dot{x}(t) + px(t-\tau) = 0 \tag{3.23}$$

*onde*

$$p, \tau \in \mathbb{R}.$$

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) Toda solução da equação* (3.23) *oscila.*

*(ii) A equação característica*

$$\lambda + pe^{-\lambda\tau} = 0 \tag{3.24}$$

*não tem raízes reais.*

*Demonstração.* A prova de que $(a) \Rightarrow (b)$ é óbvia. Mostraremos que $(b) \Rightarrow (a)$. Seja $F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau}$. Como $F(\lambda)$ não tem raízes reais, segue que $\tau \neq 0$. E temos os seguintes casos:

**Caso 1:** $\tau < 0$. Como $F(-\infty) = -\infty$, segue que $F(0) = p < 0$. Então $F(\infty) = -\infty$ e como a equação (3.24) não tem raízes reais segue que existe uma constante positiva $m$ tal que

$$\lambda + pe^{-\lambda\tau} \leqslant -m \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

Suponha que a equação (3.23) tem uma solução $x(t)$ positiva no futuro. Então $\dot{x}(t) = -px(t-\tau) > 0$. Definimos o conjunto

$$\Lambda = \{\lambda \geqslant 0 : -\dot{x}(t) + \lambda x(t) \leqslant 0 \ \text{ para } t \text{ suficientemente grande}\}.$$

Claramente $0 \in \Lambda$ e $\Lambda$ é um subintervalo de $\mathbb{R}^+$. Vamos mostrar que $\Lambda$ tem as seguintes propriedades contraditórias:

$(P_1)$ Existem números positivos $\lambda_1$ e $\lambda_2$ tais que

$$\lambda_1 \in \Lambda \quad \text{e} \quad \lambda_2 \notin \Lambda.$$

$(P_2)$ $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \lambda + m \in \Lambda$ onde $m$ é definido como em (3.25).

Observe que $x(t)$ é crescente e então $\dot{x}(t) + px(t) \geqslant 0$, o que implica que $-p \in \Lambda$.

A partir do Lema 3.10 e da equação (3.23) segue que

$$\lambda_2 = \frac{\ln[4/(p\tau)^2]}{-\tau} \notin \Lambda.$$

Vejamos a prova de $(P_2)$. Seja $\lambda \in \Lambda$ e defina $\phi(t) = e^{-\lambda t}x(t)$. Então $\dot{\phi} = -e^{-\lambda t}[-\dot{x}(t) + \lambda x(t)] \geqslant 0$ o que mostra que $\phi(t)$ é crescente. Agora

$$\begin{aligned}
-\dot{x}(t) + (\lambda + m)x(t) &= px(t-\tau) + (\lambda + m)x(t) \\
&= p\phi(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)} + (\lambda + m)\phi(t)e^{\lambda t} \\
&\leqslant \phi(t)e^{\lambda t}(pe^{-\lambda\tau} + \lambda + m) \\
&\leqslant \phi(t)e^{\lambda t}(-m + m) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo $(\lambda + m) \in \Lambda$ e a prova do teorema está completa para este caso.

**Caso 2:** $\tau > 0$. A prova segue do Teorema 3.11.

□

De posse deste resultado podemos agora analisar a equação que tem sido utilizada ao longo deste texto.

**Exemplo 3.13.** Consideremos a equação com retardo

$$\dot{x} = -x(t-\tau). \tag{3.26}$$

Queremos determinar valores para o retardo $\tau$ que garantam a existência de soluções oscilatórias.

A equação característica de (3.26) é dada por

$$h(\lambda) = \lambda + e^{-\lambda\tau} = 0. \tag{3.27}$$

Derivando (3.27) temos

$$\dot{h}(\lambda) = 1 - \tau e^{-\lambda\tau} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tau e^{-\lambda\tau} &= 1 \\ \ln(\tau e^{-\lambda\tau}) &= \ln(1) \\ \ln(\tau) + \ln(e^{-\lambda\tau}) &= 0 \\ \lambda &= \frac{\ln\tau}{\tau}. \end{aligned}$$

E uma vez que, $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda + e^{-\lambda\tau} = \infty$ e $\lim_{\lambda\to-\infty} \lambda + e^{-\lambda\tau} = \infty$ segue que

$$h\left(\frac{\ln\tau}{\tau}\right) = \frac{\ln\tau}{\tau} + e^{-\ln\tau} = \frac{\ln\tau}{\tau} + \frac{1}{\tau},$$

é ponto de mínimo global.

Note que a condição para não termos raízes reais para a equação característica (3.27) é que

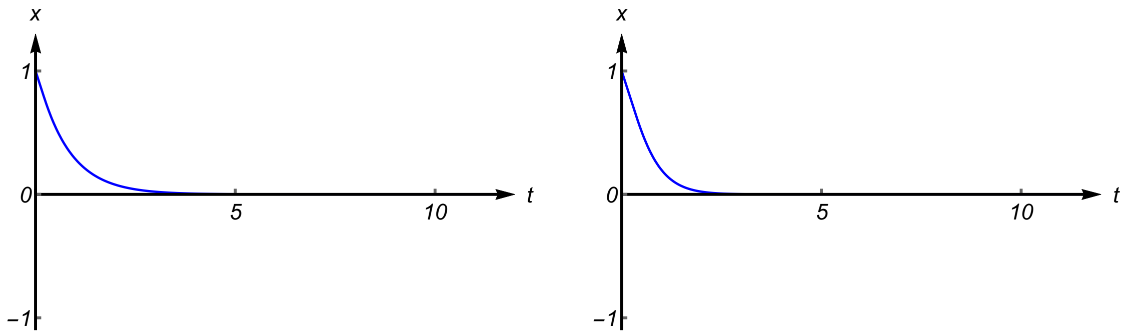
$$\frac{\ln\tau}{\tau} + \frac{1}{\tau} > 0.$$

Logo para termos soluções oscilatórias devemos encontrar $\tau$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{\ln\tau}{\tau} + \frac{1}{\tau} &> 0 \\ \frac{\ln\tau}{\tau} &> -\frac{1}{\tau} \\ e^{\ln\tau} &> e^{-1} \\ \tau &> e^{-1}. \end{aligned}$$

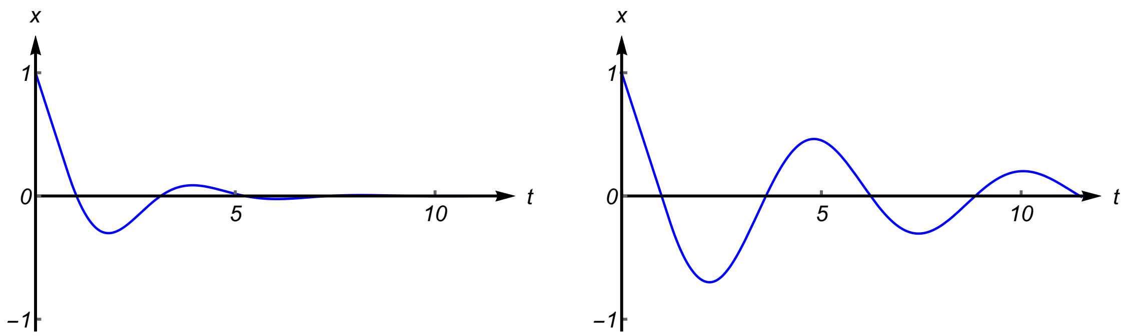
Então para todo retardo $\tau > e^{-1}$ não teremos raízes reais para a equação característica (3.27). E, portanto, pelo Teorema 3.11 toda solução da equação (3.26) oscila quando $\tau > e^{-1}$.

Vejamos nas figuras 3.1 e 3.2 os gráficos que ilustram este comportamento.




(a) $\tau = \frac{1}{5}$ (b) $\tau = \frac{1}{e}$

Figura 3.1: Gráficos de soluções não oscilatórias da equação $\dot{x} = -x(t - \tau)$.




(a) $\tau = \frac{4}{5}$ (b) $\tau = \frac{6}{5}$

Figura 3.2: Gráficos de soluções oscilatórias da equação $\dot{x} = -x(t - \tau)$.

# Referências


[1] Marta Gadotti. Equações diferenciais funcionais. Manuscrito não publicado, 2004.

[2] Kazimierz Goebel and W. A. Kirk. *Topics in Metric Fixed Point Theory*. Number 28 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1 edition, 1990.

[3] I. Győri and G. E. Ladas. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations: With Applications*. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, New York, 1 edition, 1991.

[4] J.K. Hale and S.M.V. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Number v. 99 in Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1993.

[5] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Number v. 85 in Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, Boston, 1 edition, 1992.

[6] E.L. Lima. *Curso de Análise Vol. 2*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 11 edition, 2014.

[7] D. Widder. *An Introduction to Transform Theory*. Number v. 42 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York, 1 edition, 1971.

[8] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis: Main principles and their applications*. Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1995.